

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Київський національний університет
будівництва і архітектури

ЕЛЕМЕНТИ ВЕКТОРНОЇ АЛГЕБРИ ТА АНАЛІТИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ

Практичний посібник
для студентів, які навчаються за напрямом
підготовки 6.060101 „Будівництво”

Київ 2013

УДК 512+514
Е 50

Укладачі: Д.В. Максименко, канд. фіз.-мат. наук, доцент
В.Ф. Мельничук, асистент
Л.В. Соколова, канд. фіз.-мат. наук, доцент
Ю.О. Чорноіван, канд. фіз.-мат. наук, доцент

Рецензент М.С. Пастухова, старший викладач

Відповідальний за випуск В.К. Чибіряков, д-р техн. наук,
професор

*Затверджено на засіданні кафедри вищої математики,
протокол № 1 від 3 вересня 2012 року.*

Елементи векторної алгебри та аналітичної геометрії: практичний
Е50 посібник / уклад.: Д.В. Максименко, В.Ф. Мельничук,
Л.В. Соколова, Ю.О. Чорноіван. – К.: КНУБА, 2013. – 48 с.

Містить основні теоретичні відомості, розв'язання опорних
задач та завдання для аудиторної і самостійної роботи студентів
по темі «Елементи векторної алгебри та аналітичної геометрії».

Призначено для студентів, які навчаються за напрямом
підготовки 6.060101 «Будівництво».

Загальні положення

Практичний посібник “Елементи векторної алгебри та аналітичної геометрії” призначений допомогти студентам будівельних спеціальностей засвоїти основні теоретичні положення та оволодіти методами розв’язання задач з векторної алгебри та аналітичної геометрії. В посібнику розглянуто вектори та операції над ними в геометричній та координатній формах; рівняння прямої на площині; рівняння прямої та площини в просторі. Особлива увага приділяється застосуванню векторів до розв’язання різноманітних задач. Ґрунтовне засвоєння названих розділів вищої математики забезпечить подальше успішне вивчення інженерних дисциплін.

Обсяг теоретичного матеріалу та рівень запропонованих задач відповідає програмі з вищої математики для студентів першого курсу.

У посібнику систематизовано та наведено в зручному доступному вигляді необхідні теоретичні відомості, проведено розв’язання опорних задач, запропоновано задачі для аудиторної та самостійної роботи студентів. Приведено список рекомендованої літератури для поглиблення базових знань.

Посібник може використовуватись студентами першого курсу для самостійної роботи, студентами вищих курсів для повторення та систематизації набутих раніше знань, а також викладачами для організації практичних занять з аналітичної геометрії та векторної алгебри.

Розділ 1

Елементи векторної алгебри

1.1. Основні теоретичні відомості

Геометричне подання векторних величин. Видатний вчений Д.І. Менделєєв колись сказав: “Наука починається там, де починають вимірювати”. У практичному житті ми часто зустрічаємося з вимірами: температура, тиск, маса, сила й напрямок вітру тощо. Для фіксації результатів вимірів використовують дійсні числа. Ті фізичні величини, для фіксації результатів вимірів яких досить лише одного числа, називають **скалярними**, наприклад, об'єм, маса, температура, довжина. Але існує й інший клас величин, для характеристики яких крім одного такого числа необхідно вказати ще й напрямок.

Наприклад, характеризуючи таке природне явище як вітер, необхідно знати не тільки його швидкість, а й напрямок. Подібною величиною є й сила, – правда, крім величини й напрямку, для нас немаловажна і точка її прикладання. І таких прикладів можна привести досить багато. Такі величини, що характеризуються величиною і напрямком, називаються **векторними величинами**, або векторами. Розділ математики, що вивчає вектори, називається векторною алгеброю. Числове значення векторної величини, або вектора, часто називають модулем (абсолютним значенням) вектора. Слід зазначити, що розглянуті векторною алгеброю питання в прикладному відношенні використовуються в інших предметах, таких як механіка, опір матеріалів, аналітична геометрія та ін. Так, за допомогою векторів зручно описувати потоки рідин і газів, що досліджуються в механіці, гідравліці, термодинаміці. Наприклад, при вивченні потоку рідини, швидкість її частинок у кожній точці являє собою вектор $\vec{v}$. Оскільки швидкість частинок не однакова в різних точках рідини і, крім того, навіть в одній і тій же точці може мінятися з часом, то швидкість $\vec{v}$ є функцією координат точки x, y, z і часу t , тобто $\vec{v} = \vec{v}(x, y, z, t)$. Набір векторів $\vec{v}$ для розглянутих точок рідини називають векторним полем цієї рідини. Векторні поля зручні як інструмент для опису стану рідин, газів й, взагалі, суцільних середовищ, – наприклад, при вивченні напруг у металах, дереві, пластмасах.

Якщо скалярні величини представляються числами, то виникає природне запитання: як представляти векторні величини? Існує кілька

способів. Один із них – графічний. Вектор при цьому представляється у вигляді напрямленого відрізка: довжина відрізка представляє числове значення (модуль) векторної величини (зрозуміло, – у відповідному масштабі, тому що креслення – завжди лише модель певної ситуації), а стрілка вказує напрям (рис. 1.1).

Вектор може представлятися й як набір декількох чисел – координат вектора. Але зупинимось поки на графічному поданні. Позначається зображений вектор $\overline{AB}$ або $\vec{a}$.

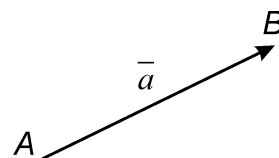


Рис. 1.1

Вектор $\overline{BA} = -\vec{a}$ – **протилежний** до даного. Вектор, у якого початок збігається з кінцем, називається **нульовим** вектором, позначається $\vec{0}$. Цей вектор має довжину 0, а напрямок його не визначений.¹

Ненульові вектори називаються **колінеарними**, якщо вони лежать на паралельних прямих. Так, вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ на рис. 1.2 – колінеарні. Будемо вважати два вектори **рівними**, якщо паралельним перенесенням один з них можна сумістити з іншим (рис. 1.3).

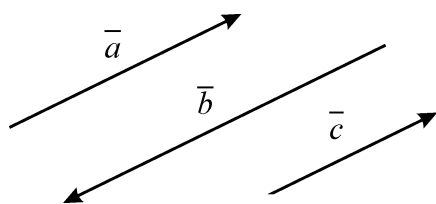


Рис. 1.2

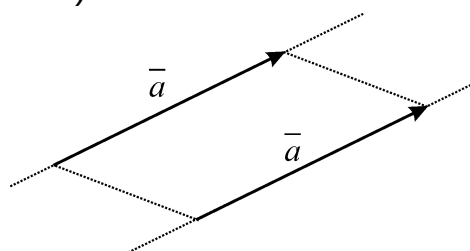


Рис. 1.3

Іншими словами, два вектори рівні, якщо вони мають однакові довжини та напрямки.

Вектори, які не прив'язані до конкретної точки, прийнято називати **вільними**. Вони застосовуються для вивчення швидкостей, прискорень, сил, моментів, імпульсів, напруги різних полів та ін.²

Тобто, два таких (вільних) вектори ми завжди можемо звести до однієї точки паралельним перенесенням (рис. 1.4).

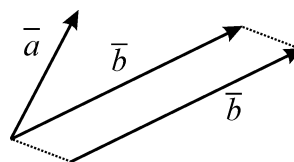


Рис. 1.4

¹ Нульовий вектор виникає при додаванні двох протилежно напрямлених векторів.

² На відміну від вільних векторів, що тут розглядаються, додатково вивчають також інший тип векторів – ковзні. Ковзні вектори, як і вільні, також зображаються у вигляді напрямленого відрізка. Але такі вектори можна переміщувати тільки вздовж лінії їх дії, на відміну від вільних векторів, які, крім цього, можна переміщувати і паралельним переносом. Вони застосовуються, наприклад, в теоретичній механіці при вивченні сил, оскільки, як відомо, у багатьох випадках силу можна переміщувати вздовж лінії її дії (сила наче ковзає вздовж прямої, звідси і назва “ковзний” вектор).

Дії над векторами в геометричній формі. Дії над векторними величинами, або векторами, – додавання, множення на число, скалярний і векторний добуток векторів, – на перший погляд можуть здатися дивними й незрозумілими, але, як ми зараз побачимо, вони природно випливають із практики роботи з векторними величинами. Отже, розглянемо ці операції.

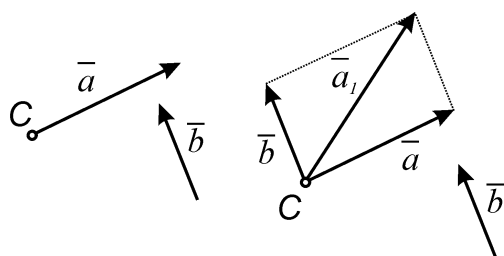


Рис. 1.5

Додавання векторів.

Розглянемо наступний приклад (рис. 1.5). Припустимо, літак С рухається у безвітряному просторі у напрямку, що задається вектором $\vec{a}$ (його довжина відповідає величині швидкості руху літака).

Починає дути вітер у напрямку вектора $\vec{b}$. Зрозуміло, що при виникненні вітру напрямок руху літака й величина його швидкості зміняться. Виявляється, якщо початок вектора $\vec{b}$ перенести в початок $\vec{a}$ паралельним переносом і побудувати на $\vec{a}$ і $\vec{b}$ паралелограм, то швидкість літака після виникнення вітру буде дорівнювати вектору, що збігається з діагоналлю цього паралелограма – з вектором $\vec{a}_1$. Природно назвати нову швидкість літака сумою швидкостей $\vec{a}$ та $\vec{b}$ і позначити $\vec{a} + \vec{b}$ (на рис. 1.5 – вектор $\vec{a}_1$).

Аналогічна ситуація складається із прискоренням, напруженостями різних полів, силами та ін., тобто ці величини додаються подібно швидкостям з попереднього прикладу. Узагальнюючи цю ситуацію на випадок довільних векторів, дамо таке визначення: *сумою векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається вектор, побудований на діагоналі паралелограма, утвореного цими векторами (рис. 1.6).*

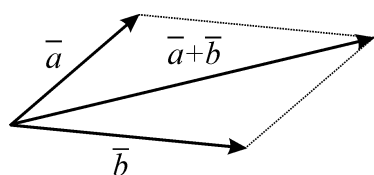


Рис. 1.6

Такий спосіб побудови суми двох векторів називається “правилом паралелограма”. Існує ще один спосіб побудови суми двох векторів. Оскільки вектори

ми вважаємо вільними, то вектор $\vec{a}$ (або вектор $\vec{b}$) ми вправі перенести паралельно самому собі, як показано на рис. 1.7. При цьому сума $\vec{a} + \vec{b}$ залишиться такою самою.



Рис. 1.7

Це так зване “правило трикутника” додавання векторів: щоб побудувати суму двох векторів, потрібно розмістити вектори послідовно та сполучити початок одного з них з кінцем іншого.

Відразу відмітимо, що при додаванні векторів як за правилом паралелограма, так і за правилом трикутника результат виходить той самий: у деяких випадках зручно користуватися одним правилом, у деяких – іншим. За правилом трикутника, наприклад, зручно знаходити суму декількох векторів, що мають спільні початок і кінець (рис. 1.8).

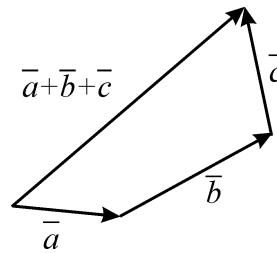


Рис. 1.8

Операція додавання векторів має такі **властивості**:

- а) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ (комутативна властивість);
- б) $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ (асоціативна властивість);
- в) $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}^*$ (властивість нуля при додаванні).

Множення вектора на число. На практиці часто доводиться змінювати значення векторної величини без зміни її напрямку. Наприклад, силу, що діє на тіло, збільшили у два рази, а напрямок залишили без змін. Або, скажемо, швидкість змінила свій напрямок на протилежний, а величина її збільшилася вдвічі. Природно буде представити змінену в такий спосіб у першому випадку векторну величину у вигляді відрізка, довжина якого збільшилася у два рази в порівнянні з довжиною вихідного вектора з тим же напрямком, а в другому випадку – у вигляді відрізка, довжина якого теж збільшилася у два рази, але напрямок змінився на протилежний (рис. 1.9).

Добутком вектора $\vec{a}$ на число x називається вектор, довжина якого

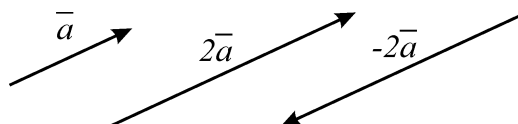


Рис. 1.9

* Нульовий вектор $\vec{0}$ називають ще нейтральним елементом відносно додавання, оскільки при додаванні його до довільного вектора $\vec{a}$ в результаті буде знову $\vec{a}$. Можна сказати, що вектор $\vec{0}$ діє (при додаванні) нейтрально. Аналогічно число 0 є нейтральним елементом при додаванні чисел, а число 1 – нейтральний елемент при множенні чисел ($1 \cdot a = a$ для довільного числа a).

дорівнює $|x| \cdot |\vec{a}|$ і збігається за напрямком з вектором $\vec{a}$ при $x > 0$; якщо $x < 0$, то напрямок вектора змінюється на протилежний.

Операція множення вектора на число має такі **властивості**:

- а) $x(\vec{a} + \vec{b}) = x\vec{a} + x\vec{b}$ для будь-яких векторів $\vec{a}, \vec{b}$ і будь-якого числа x ;
- б) $(xy)\vec{a} = x(y\vec{a})$ для будь-якого вектора $\vec{a}$ і будь-яких чисел x, y ;
- в) $(x + y)\vec{a} = x\vec{a} + y\vec{a}$ для будь-якого вектора $\vec{a}$ і будь-яких чисел x, y ;
- г) $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$ для будь-якого вектора $\vec{a}$ *
- д) $0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$ для будь-якого вектора $\vec{a}$;
- е) вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні тоді й тільки тоді, коли існує число $x \neq 0$ таке, що $\vec{a} = x\vec{b}$.

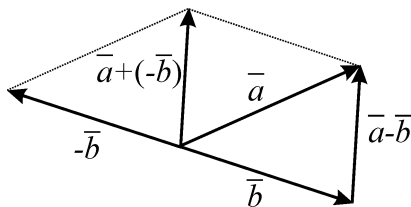


Рис. 1.10

Тепер ми можемо визначити правило для знаходження різниці двох векторів. Оскільки $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$, то до вектора $\vec{a}$ ми повинні додати вектор $-\vec{b} = -1 \cdot \vec{b}$ (рис. 1.10). У такий

спосіб $\vec{a} - \vec{b}$ являє собою вектор, початок якого збігається з кінцем вектора $\vec{b}$, а кінець збігається з кінцем вектора $\vec{a}$.

Легко помітити, що сума двох векторів, що лежать в одній площині, буде вектором, що також лежить у цій же площині. І вектор із цієї площини, помножений на довільне число, буде вектором, що знову лежить у нашій площині. Тобто операції додавання й множення на числа (скаляри) не виводять вектори з однієї площини. Якщо розглядати площину як набір векторів, то говорять, що площина замкнута щодо цих двох операцій. Якщо у звичайному тривимірному просторі розглядати множину всіх векторів, то про неї також можна сказати, що вона замкнута щодо операцій додавання й множення на скаляри.

Множини об'єктів, для яких задано операції додавання й множення на числа, зустрічаються досить часто. Наприклад, функції та матриці. Важливо те, що названі множини замкнуті щодо цих операцій, тобто сума двох функцій знову буде функцією; функція, помножена на число, – знову

* Число 1 є нейтральним елементом відносно операції множення вектора на число.

функція. Для таких об'єктів із двома операціями введена спеціальна назва – лінійний, або векторний простір*.

Лінійним (векторним) простором над множиною дійсних чисел називається множина об'єктів (у нашому випадку – векторів), для яких задані операції додавання й множення на число, тобто двом об'єктам ставиться у відповідність третій, названий їхньою сумою, і кожному числу та вектору ставиться у відповідність інший вектор, названий добутком числа на вектор, причому операції додавання й множення на число задовольняють таким умовам:

- 1) $\bar{a} + \bar{b} = \bar{b} + \bar{a}$ для будь-яких векторів $\bar{a}, \bar{b}$;
- 2) $(\bar{a} + \bar{b}) + \bar{c} = \bar{a} + (\bar{b} + \bar{c})$ для будь-яких векторів $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$;
- 3) існує елемент $\bar{0}$ такий, що $\bar{a} + \bar{0} = \bar{a}$ для будь-якого вектора $\bar{a}$ ($\bar{0}$ називається нульовим елементом або нейтральним елементом щодо додавання);
- 4) $1 \cdot \bar{a} = \bar{a}$ для будь-якого вектора $\bar{a}$;
- 5) $(xy)\bar{a} = x(y\bar{a})$ для будь-якого вектора $\bar{a}$ і будь-яких чисел x, y ;
- 6) $x(\bar{a} + \bar{b}) = x\bar{a} + x\bar{b}$ для будь-яких векторів $\bar{a}, \bar{b}$ і будь-якого числа x ;
- 7) $(x + y)\bar{a} = x\bar{a} + y\bar{a}$ для будь-якого вектора $\bar{a}$ і будь-яких чисел x, y .

Оскільки вектори на площині задовольняють властивостям 1-7, то вони утворюють лінійний простір, який позначається $\mathcal{R}^2$. Вектори у звичайному тривимірному просторі також утворюють лінійний простір, що позначається $\mathcal{R}^3$.

У природничих науках часто доводиться мати справу з кутом між векторними величинами: наприклад, знаходити (ортогональну*) проекцію одного вектора на інший, обчислювати площу проекції фігури на задану площину або просто шукати кут між двома заданими напрямками. З цією метою введено наступні операції: скалярний і векторний добуток векторів.

Скалярний добуток векторів. Почнемо з визначень декількох термінів, які постійно зустрічаються в інженерних науках.

* Зі шкільної програми добре відомі лінійні (першого степеня) функції $y = ax + b$, графік яких являє собою пряму лінію. Сума двох лінійних функцій – лінійна функція, лінійна функція, помножена на число, – знову лінійна функція. Тобто всі такі функції утворюють лінійний простір.

* Перпендикулярну.

Проекцією вектора $\vec{a}$ на вісь вектора $\vec{b}$ називається число $pr_{\vec{b}} \vec{a} = |\vec{a}| \cos \alpha$, де α - кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

Проекція може бути як додатна (рис. 1.11а), так і від'ємна (рис. 1.11б).



Рис. 1.11

У фізиці і пов'язаних з нею науках одним з базових є поняття роботи сили.

Роботою сили $\vec{F}$ при прямолінійному переміщенні тіла із точки A в точку B називається число, рівне добутку довжини шляху (відрізка AB) і проекції вектора сили $\vec{F}$ на напрям вектора $\vec{AB}$, тобто робота дорівнює $|\vec{F}| |\vec{AB}| \cos \alpha$ (рис. 1.12).

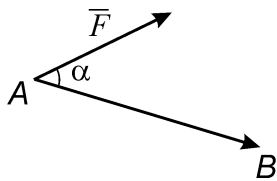


Рис. 1.12

У механіці рідин і газів постійно фігурує термін потік векторного поля (вектора) $\vec{a}$ через задану плоску пластинку s^* . Це поняття характеризує "кількість"

векторів, що пронизують пластинку s , з урахуванням їх кута нахилу до неї або, інакше кажучи, інтенсивність дії векторного поля на пластинку s . Потік визначається як добуток довжини вектора $\vec{a}$, площі пластинки s і косинуса кута між вектором $\vec{a}$ і вектором нормалі $\vec{n}$ до пластинки (вектором нормалі до площини називається будь-який вектор, перпендикулярний до цієї площини).

У цих визначеннях присутній добуток довжини вектора на косинус кута з іншим вектором. Тому досить природним є наступне визначення.

Скалярним добутком векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається число $\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \alpha$, де α – кут між векторами $\vec{a}$ й $\vec{b}$.

Оскільки $|\vec{a}| \cos \alpha = pr_{\vec{b}} \vec{a}$, то $\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \alpha = |\vec{b}| \cdot pr_{\vec{b}} \vec{a}$, звідки випливає, що $pr_{\vec{b}} \vec{a} = \vec{a}\vec{b} / |\vec{b}|$.

* Наприклад, при розрахунках сили тиску рідини або повітряного потоку на криволінійну поверхню.

Тоді робота сили $\vec{F}$ при прямолінійному переміщенні тіла із точки A в точку B дорівнює скалярному добутку $\vec{F} \vec{AB}^*$.

Безпосередньо з визначення скалярного добутку одержуємо:

$$\cos \alpha = \frac{\vec{a} \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}.$$

Скалярний добуток векторів має такі **властивості**:

- а) $\vec{a} \vec{a} = |\vec{a}| |\vec{a}| \cos 0 = |\vec{a}|^2$ для будь-якого вектора $\vec{a}$;
- б) $\vec{a} \vec{b} = \vec{b} \vec{a}$ для будь-яких векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$;
- в) $x(\vec{a} \vec{b}) = (x\vec{a}) \vec{b} = \vec{a} (x\vec{b})$ для будь-яких векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ і будь-якого числа x ;
- г) $(\vec{a} + \vec{b}) \vec{c} = \vec{a} \vec{c} + \vec{b} \vec{c}$ для будь-яких векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$;
- д) Якщо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ перпендикулярні, то $\vec{a} \vec{b} = 0$ (тому що $\vec{a} \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos 90^\circ = 0$).

Скалярний добуток, як правило, використовується для:

- **перевірки перпендикулярності векторів** (властивість д). Якщо $\vec{a} \vec{b} = 0$, то вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ перпендикулярні. І навпаки: якщо вектори перпендикулярні, то їх скалярний добуток дорівнює нулю;
- **знаходження довжини /модуля/ вектора** (властивість а):

$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \vec{a}} = \sqrt{a^2};$$

- **знаходження проекції вектора на напрямок іншого вектора:**

$$np_{\vec{b}} \vec{a} = \frac{\vec{a} \vec{b}}{|\vec{b}|};$$

- **знаходження кута між векторами:**

$$\cos \alpha = \frac{\vec{a} \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}.$$

Векторний добуток векторів. У природничих та інженерних науках досить часто одну векторну величину виражають через дві інші. Наприклад, момент сили $\vec{F}$ відносно точки O , прикладеної в точці A , виражається через вектори $\vec{OA}$ і $\vec{F}$; Нагадаємо, що моментом сили $\vec{F}$

* Аналогічно можна виразити потік вектора $\vec{a}$ через пластинку S . Для цього вводять векторну величину $\vec{S}$, абсолютне значення якої рівно площі пластинки, а напрямок – перпендикулярно пластинці. Тоді потік $\Pi = \vec{a} \vec{S}$.

відносно точки O називається вектор $\vec{M}$, перпендикулярний векторам $\vec{OA}$ і $\vec{F}$, довжини, рівної $|\vec{OA}| \cdot |\vec{F}| \cdot \sin \alpha$ (α – кут між $\vec{OA}$ і $\vec{F}$) і напрямлений так, що поворот за меншим кутом від $\vec{OA}$ до $\vec{F}$ видно з кінця вектора $\vec{M}$ проти годинникової стрілки (на рисунку вектори $\vec{M}$ й $\vec{OA}$ лежать у площині рисунку, а вектор $\vec{F}$ лежить у площині, що перпендикулярна площині рисунку). Оскільки плече сили $l = |\vec{OA}| \cdot \sin \alpha$, то $|\vec{M}| = |\vec{OA}| \cdot |\vec{F}| \cdot \sin \alpha$, $|\vec{M}| = |\vec{F}| \cdot l$. Тобто величина моменту дорівнює добутку сили на плече (що добре відомо читачеві зі шкільної програми фізики) (рис. 1.13).

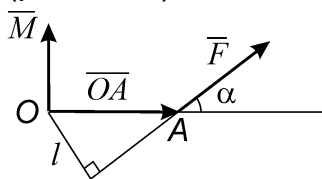


Рис. 1.13

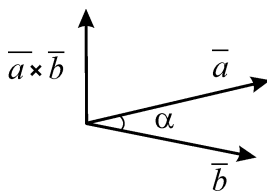


Рис. 1.14

Аналогічним способом визначається сила Лоренца, що діє на заряд, який рухається зі швидкістю $\vec{v}$ у магнітному полі з індукцією $\vec{B}$. Тобто вектор сили Лоренца виражається через вектори $\vec{v}$ і $\vec{B}$ так само, як і момент сили виражається через вектори $\vec{OA}$ і $\vec{F}$. Тому введемо наступне визначення.

Векторним добутком векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ (рис. 1.14) називається вектор $\vec{a} \times \vec{b}$, який має такі властивості:

- а) довжина (модуль) вектора $\vec{a} \times \vec{b}$ дорівнює площі паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ та $\vec{b}$, тобто $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \alpha$, де α – кут між векторами $\vec{a}$ та $\vec{b}$;
- б) $\vec{a} \times \vec{b}$ перпендикулярний як вектору $\vec{a}$, так і вектору $\vec{b}$;
- в) вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{a} \times \vec{b}$ утворюють праву трійку векторів, тобто їх можна розташувати в напрямку великого (вектор $\vec{a}$), вказівного (вектор $\vec{b}$) і середнього (вектор $\vec{a} \times \vec{b}$) пальців правої руки*.

* Зі шкільної програми фізики добре відомо правило правої руки (правило буравчика, правило правого гвинта), що використовується для визначення напрямку сили при русі заряду в магнітному полі. Напрямок вектора $\vec{a} \times \vec{b}$ визначається за допомогою вище згаданого правила: вектор $\vec{a} \times \vec{b}$ напрямлений так, що з його кінця поворот від $\vec{a}$ до $\vec{b}$ по меншому куту здійснюється проти годинникової стрілки. Загальноприйнятий термін “права трійка векторів” є іншою назвою цього правила.

Використовуючи векторний добуток, векторні величини з попередніх прикладів можна записати в такий спосіб:

- момент сили $\vec{F}$ відносно точки O , прикладеної в точці A : $\vec{M} = \vec{OA} \times \vec{F}$;
- сила Лоренца $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$, де q , $\vec{v}$, $\vec{B}$ – відповідно заряд, швидкість і магнітна індукція*.

З визначення векторного добутку безпосередньо випливають такі його **властивості**:

- $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$ для будь-якого вектора $\vec{a}$;
- $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$ для будь-яких векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ (антикомутативна властивість);
- $x(\vec{a} \times \vec{b}) = (x\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (x\vec{b})$ для будь-яких векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ і будь-якого числа x .

При розв'язанні задач векторний добуток векторів застосовується для:

- знаходження вектора, перпендикулярного до двох заданих векторів. Якщо $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$, то вектор $\vec{c}$ буде перпендикулярним як вектору $\vec{a}$, так і вектору $\vec{b}$;
- знаходження площі паралелограма, побудованого на двох даних векторах як на сторонах.

Комбінація скалярного і векторного добутків веде до ще одного виду добутків векторів, що називається **мішаним добутком**. На відміну від попередніх видів добутків, у мішаному добутку присутні не два, а три вектори.

Мішаним добутком векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ називається число $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$.

Таким чином, мішаний добуток векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ – це скалярний добуток векторів $\vec{a} \times \vec{b}$ і $\vec{c}$.

З'ясуємо геометричний зміст (рис. 1.15) мішаного добутку: $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = |\vec{a} \times \vec{b}| |\vec{c}| \cos \alpha = |\vec{a} \times \vec{b}| \cdot np_{\vec{a} \times \vec{b}} \vec{c} = \pm S_{осн} h = \pm V$, де

$S_{осн}$ – площа основи паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$;
 h – його висота; V – його об'єм.

* Можна привести ще багато інших прикладів векторних величин, де зустрічається векторний добуток: момент імпульсу (векторний добуток радіус-вектора на імпульс), вектор магнітної індукції, що виникає навколо провідника з током (закон Біо-Савара-Лапласа), сила Ампера, яка діє на рухомий провідник з током в магнітному полі та інше.

Таким чином, модуль мішаного добутку векторів дорівнює об'єму паралелепіпеда, побудованого на цих векторах. З останнього міркування випливає, що мішаний добуток не поміняється при циклічній перестановці векторів, тобто $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}) = (\vec{c}, \vec{a}, \vec{b})$.

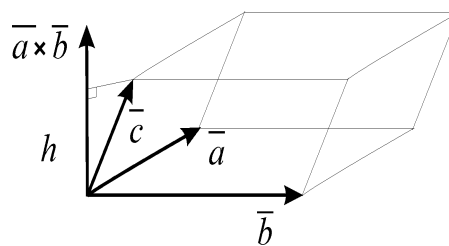


Рис. 1.15

Якщо вектори компланарні (компланарними називаються вектори, що паралельні до одної площини), то мішаний добуток таких векторів дорівнює нулю.

При розв'язанні задач мішаний добуток векторів застосовується для:

- знаходження об'ємів паралелепіпеда та тетраедра, що побудовані на даних векторах як на ребрах: $V = |(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})|$ – об'єм паралелепіпеда

(рис. 1.15), $V = \frac{1}{6} |(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})|$ – об'єм тетраедра.

- Для перевірки компланарності векторів: якщо $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 0$, то дані вектори компланарні.

Представлення векторів у координатній формі. Перейдемо тепер до іншої форми представлення векторів – координатної. Очевидно, щоб задати вільний вектор на площині (нагадаємо, що ми розглядаємо тільки вільні вектори), необхідно задати його напрямок і величину (довжину). У різних системах координат це робиться по-різному. Ми розглянемо декартову систему, як найпоширенішу. Нехай нам заданий вектор $\vec{a}$ (рис. 1.16). Якщо ми будемо знати проєкції цього вектора на осі координат, то ми будемо знати і напрямок, і довжину нашого вектора. Помітимо, що проєкції можуть бути як додатні, так і від'ємні.

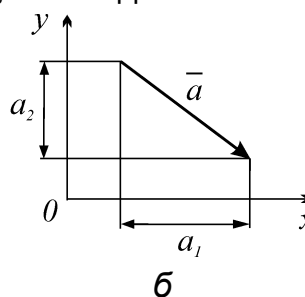
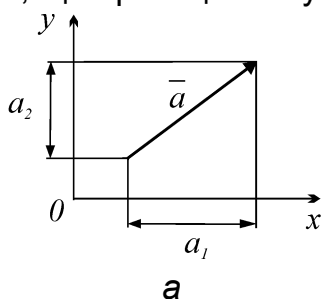


Рис. 1.16

Для заданого вектора його проєкції на осі координат визначені однозначно, й навпаки, два числа однозначно визначають вектор на площині, якщо їх розглядати як проєкції вектора на осі координат.

Ці два числа називаються координатами вектора в даній системі координат. Вектор $\vec{a}$ з координатами a_1, a_2 позначається $\vec{a} = \{a_1, a_2\}$.

Зручно ввести в розгляд два вектори: $\vec{i}$ – вектор довжини 1 (одичний вектор), паралельний осі Ox , $\vec{j}$ – одичний вектор, паралельний осі Oy . Тоді будь-який вектор $\vec{a}$ на площині можна виразити через вектори $\vec{i}, \vec{j}$ (рис. 1.17).

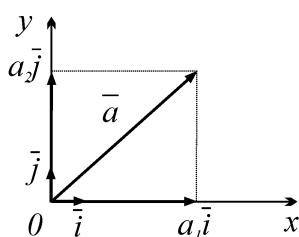


Рис. 1.17

Отже, ми одержуємо розклад вектора $\vec{a}$ по векторах $\vec{i}, \vec{j}$: $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j}$, причому числа a_1, a_2 визначаються однозначно. Вектори $\vec{i}, \vec{j}$ при цьому називаються базисом на площині.

Базисом векторного простору називається мінімальний (за кількістю) набір векторів, через які можна виразити будь-який вектор простору.

Таким чином, вектори $\vec{i}, \vec{j}$ утворюють базис простору (площини), оскільки будь-який вектор площини можна виразити через $\vec{i}, \vec{j}$, а одного із цих векторів недостатньо для одержання довільного вектора площини, тобто це мінімальний набір. Відмітимо, що базис на площині утворюють будь-які два неколінеарні (непаралельні) вектори, а базис у тривимірному просторі утворюють будь-які три вектори, які не лежать в одній площині.

Вектори, що лежать в паралельних площинах або, що те ж саме, в одній площині, називаються **компланарними**.

Кількість векторів у базисі називають **розмірністю** простору.

Відразу зауважимо, що в лінійному просторі базис визначений неоднозначно, але кількість векторів у ньому – величина постійна.

Числа a_1, a_2 у розкладанні вектора $\vec{a}$ є, очевидно, його проєкціями на осі координат, які ми назвали координатами вектора в даній системі координат. Таким чином, векторну величину на площині можна представляти у вигляді напрямленого відрізка або парою дійсних чисел (координат вектора).

Якщо векторна величина розглядається у звичайному тривимірному просторі, то до двох координат додається третя – проєкція на вісь Oz . При цьому зручно ввести в розгляд крім уже відомих нам векторів $\vec{i}, \vec{j}$

одиничний (довжини, рівної 1) вектор $\bar{k}$, паралельний осі Oz. Як і у випадку площини, можна показати, що будь-який вектор $\bar{a}$ в тривимірному просторі однозначно представляється у вигляді суми $\bar{a} = a_1\bar{i} + a_2\bar{j} + a_3\bar{k}$. Числа a_1, a_2, a_3 є координатами вектора $\bar{a}$ в даній системі координат, тобто є його проекціями на осі координат. Таким чином, у фіксованій системі координат записи $\bar{a} = a_1\bar{i} + a_2\bar{j} + a_3\bar{k}$ і $\bar{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$ є еквівалентними (рис. 1.18).

Довжину (модуль) вектора обчислюють за формулою $|\bar{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$, оскільки квадрат діагоналі прямокутного паралелепіпеда дорівнює сумі квадратів його вимірів.

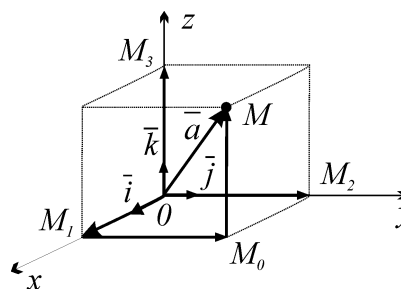


Рис. 1.18

При цьому $a_1 = |\bar{a}| \cos \alpha$, $a_2 = |\bar{a}| \cos \beta$, $a_3 = |\bar{a}| \cos \gamma$, де α, β, γ – кути, утворені вектором $\bar{a}$ з осями Ox, Oy, Oz відповідно. Очевидно, що такі кути задають напрямок вектора $\bar{a}$, тому їх косинуси називають напрямними косинусами вектора. Знаходяться напрямні косинуси вектора $\bar{a}$ за формулами: $\cos \alpha = \frac{a_1}{|\bar{a}|}$, $\cos \beta = \frac{a_2}{|\bar{a}|}$, $\cos \gamma = \frac{a_3}{|\bar{a}|}$ і задовольняють

умові $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$.

Отже вектор $\bar{e} = \{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\}$ – **орт** вектора $\bar{a}$. Орт вектора має важливе значення при роботі з векторами, оскільки задає напрямок і масштаб на осі. Зверніть увагу, що довжина вектора $\bar{e}$ дорівнює 1, тобто **орт – одиничний вектор**.

Оскільки координати вектора – це проекції на осі координат, то, змінивши осі координат, зміняться й проекції на ці осі, тобто координати вектора. Тому важливо завжди мати на увазі, в якій системі координат задані координати вектора. Наприклад, на рис. 1.19 показаний той самий вектор $\bar{a}$. Але в системі координат Oxy (рис. 1.19а) він має координати $\bar{a} = \{3, 2\}$, а в системі координат Ox'y' (рис. 1.19б) його координати $\bar{a} = \{1, 3\}$.

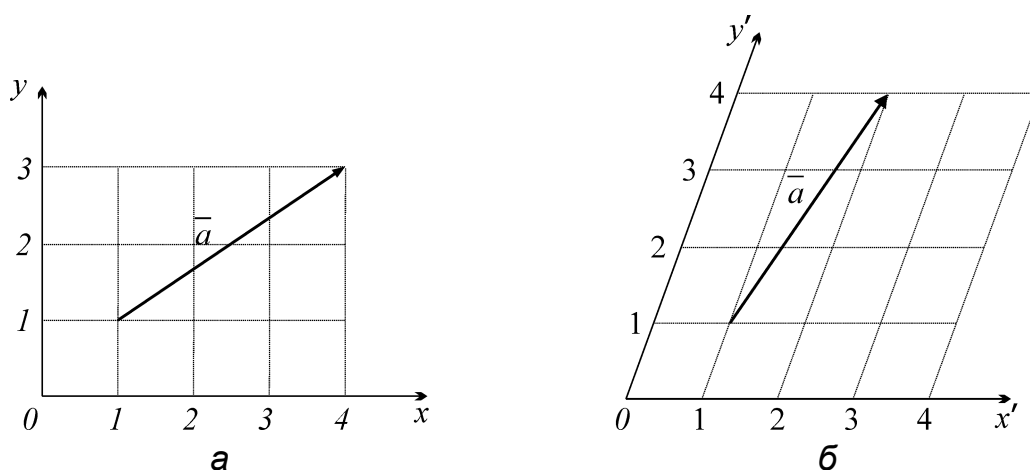


Рис. 1.19

Ми вже говорили, що будь-які два неколінеарні вектори на площині утворюють базис. Припустимо, ми маємо два базиси на площині: $\bar{f}, \bar{g}$ і $\bar{f}', \bar{g}'$ (для зручності перший базис назвемо старим, другий – новим). Оскільки $\bar{f}, \bar{g}$ – базис, то через нього ми можемо виразити вектори $\bar{f}', \bar{g}'$:

$$\begin{aligned}\bar{f}' &= \alpha_{11} \bar{f} + \alpha_{21} \bar{g}; \\ \bar{g}' &= \alpha_{12} \bar{f} + \alpha_{22} \bar{g}.\end{aligned}$$

Матрицю $T = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}$ називають матрицею переходу від старого базису $\bar{f}, \bar{g}$ до нового базису $\bar{f}', \bar{g}'$.

Матрицю переходу зручно використовувати для знаходження нових координат вектора при заміні базису. Нехай вектор $\bar{v}$ має в старому базисі координати a, b , а в новому – координати a', b' , тобто $\bar{v} = a\bar{f} + b\bar{g}$ і $\bar{v} = a'\bar{f}' + b'\bar{g}'$.

$$\begin{aligned}\text{Тоді } \bar{v} &= a'\bar{f}' + b'\bar{g}' = a'(\alpha_{11}\bar{f} + \alpha_{21}\bar{g}) + b'(\alpha_{12}\bar{f} + \alpha_{22}\bar{g}) = \\ &= (a'\alpha_{11} + b'\alpha_{12})\bar{f} + (a'\alpha_{21} + b'\alpha_{22})\bar{g}.\end{aligned}$$

Оскільки коефіцієнти при базисних векторах $\bar{f}, \bar{g}$ є його координатами a, b , то: $a = a'\alpha_{11} + b'\alpha_{12}$, а $b = a'\alpha_{21} + b'\alpha_{22}$. (*)

Таким чином, ми знайшли зв'язок між координатами векторів у старому і новому базисах. Цей зв'язок зручно представити у матричному виді, якщо координати векторів записувати у стовпчик:

- $\bar{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ – координати вектора $\bar{v}$ в старому базисі;
- $\bar{v}' = \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix}$ – координати вектора $\bar{v}$ в новому базисі.

Тоді рівності (*) можна записати так:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix}, \text{ або } \bar{v} = T \bar{v}',$$

де T – матриця переходу від старого базису до нового.

Дії над векторами в координатній формі. Розглянемо тепер, як введені нами 5 операцій над векторними величинами в геометричній формі (напрявленого відрізка) перенести на координати векторних величин.

Додавання векторів. Сумою двох векторів називається вектор, координати якого дорівнюють сумам відповідних координат доданків, тобто якщо $\bar{a} = \{a_1; a_2; a_3\}$, $\bar{b} = \{b_1; b_2; b_3\}$, то $\bar{c} = \bar{a} + \bar{b} = \{a_1 + b_1; a_2 + b_2; a_3 + b_3\}$.

Проілюструємо означення для плоского випадку за допомогою рис. 1.20. Нехай задані вектори $\bar{a} = \{a_1, a_2\}$, $\bar{b} = \{b_1, b_2\}$. З рис. 1.20 видно, що вектор $\bar{a} + \bar{b} = \{a_1 + b_1, a_2 + b_2\}$.

Множення вектора на число. Добутком вектора на число називається вектор, координати якого дорівнюють координатам даного вектора, помноженими на дане число. Нехай задані число x і вектор $\bar{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$, тоді $x\bar{a} = \{xa_1, xa_2, xa_3\}$. Зверніть увагу, що при множенні вектора на число отримуємо вектор, колінеарний даному. Проілюструйте означення для двовимірного випадку самостійно.

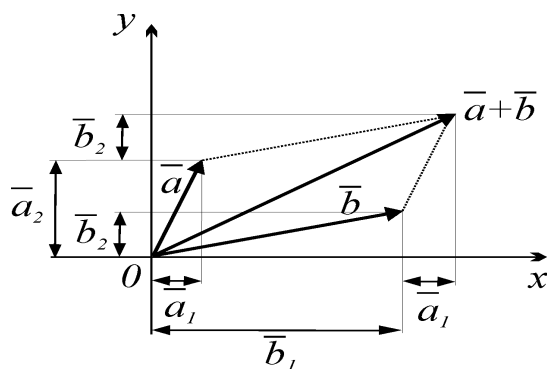


Рис. 1.20

Скалярний добуток векторів. Нехай задані вектори $\bar{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$, $\bar{b} = \{b_1, b_2, b_3\}$. Використовуючи розкладання векторів по базису $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$, ми можемо записати:

$$\begin{aligned} \bar{a} &= a_1 \bar{i} + a_2 \bar{j} + a_3 \bar{k} \\ \bar{b} &= b_1 \bar{i} + b_2 \bar{j} + b_3 \bar{k}. \end{aligned}$$

Оскільки вектори $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ взаємно перпендикулярні, то $\bar{i}\bar{i} = \bar{j}\bar{j} = \bar{k}\bar{k} = 1$, $\bar{i}\bar{j} = \bar{i}\bar{k} = \bar{j}\bar{k} = 0$. Скориставшись властивостями скалярного добутку, одержимо:

$$\bar{a}\bar{b} = (a_1\bar{i} + a_2\bar{j} + a_3\bar{k})(b_1\bar{i} + b_2\bar{j} + b_3\bar{k}) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3.$$

Таким чином, $\bar{a}\bar{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$.

Векторний добуток векторів. Нехай задані вектори $\bar{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$, $\bar{b} = \{b_1, b_2, b_3\}$. Як і в попередньому випадку, маємо $\bar{a} = a_1\bar{i} + a_2\bar{j} + a_3\bar{k}$, $\bar{b} = b_1\bar{i} + b_2\bar{j} + b_3\bar{k}$.

Оскільки $\bar{i} \times \bar{i} = \bar{j} \times \bar{j} = \bar{k} \times \bar{k} = \vec{0}$, $\bar{i} \times \bar{j} = \bar{k}$, $\bar{i} \times \bar{k} = -\bar{j}$, $\bar{j} \times \bar{k} = \bar{i}$, то

$$\begin{aligned} \bar{a} \times \bar{b} &= (a_1\bar{i} + a_2\bar{j} + a_3\bar{k}) \times (b_1\bar{i} + b_2\bar{j} + b_3\bar{k}) = \\ &= (a_2b_3 - a_3b_2)\bar{i} - (a_1b_3 - b_3a_1)\bar{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\bar{k} \end{aligned}$$

Таким чином, $\bar{a} \times \bar{b} = (a_2b_3 - a_3b_2, -a_1b_3 + a_3b_1, a_1b_2 - a_2b_1)$.

Останню формулу зручно записувати у вигляді визначника матриці, другий і третій рядки якої є координатами векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$:

$$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix},$$

розкладаючи його по першому рядку*. Наприклад, якщо $\bar{a} = \{-1, 2, 4\}$, $\bar{b} = \{3, 1, 0\}$, то

$$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -4\bar{i} + 12\bar{j} - 7\bar{k} = \{-4, 12, -7\}.$$

Мішаний добуток векторів. Нехай задані вектори $\bar{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$, $\bar{b} = \{b_1, b_2, b_3\}$, $\bar{c} = \{c_1, c_2, c_3\}$. Знайдемо $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})$. За визначенням – це скалярний добуток векторів $\bar{a} \times \bar{b}$ і $\bar{c}$. Оскільки

* Нагадаємо правило обчислення визначника матриці розміру 3x3 методом розкладу по 1-му рядку:

$$\begin{vmatrix} A & B & C \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = A \cdot \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - B \cdot \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + C \cdot \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = A \cdot (a_2b_3 - a_3b_2) - B \cdot (a_1b_3 - a_3b_1) + C \cdot (a_1b_2 - a_2b_1)$$

$\bar{a} \times \bar{b} = (a_2b_3 - a_3b_2, -a_1b_3 + a_3b_1, a_1b_2 - a_2b_1)$, а $\bar{c} = \{c_1, c_2, c_3\}$, то
 $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = (a_2b_3 - a_3b_2)c_1 + (-a_1b_3 + a_3b_1)c_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)c_3$. Як і
у випадку векторного добутку, останню формулу зручно представити
у вигляді визначника матриці з координат векторів $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$:

$$(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}.$$

В результаті вивчення теми студенти мають вміти:

- Виконувати арифметичні операції над векторами в геометричній та координатній формі.
- Знаходити координати вектора, заданого двома точками, його модуль та напрямні косинуси.
- Встановлювати колінеарність та компланарність векторів.
- Застосовувати вектори до розв'язання геометричних задач та задач механіки.

1.2 Опорні задачі

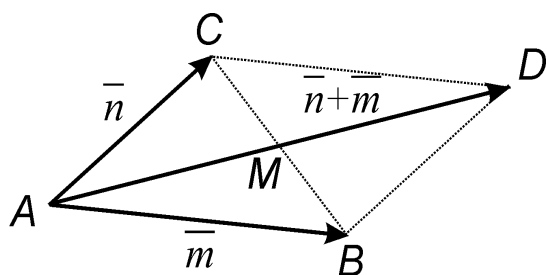


Рис. 1.21

Вправа 1. У трикутнику ABC (рис. 1.21) вектор $\overline{AB} = \bar{m}$, вектор $\overline{AC} = \bar{n}$. Побудувати кожен з наступних векторів $\frac{1}{2}(\bar{m} + \bar{n})$, $\frac{1}{2}(\bar{m} - \bar{n})$, $\frac{1}{2}(\bar{n} - \bar{m})$, $-\frac{1}{2}(\bar{m} + \bar{n})$.

Розв'язання. Доповнимо трикутник до паралелограма $ABDC$ (рис.1.21). Нехай M – точка перетину діагоналей AD і BC . Оскільки $\bar{m} + \bar{n} = \overline{AD}$, то $\frac{1}{2}(\bar{m} + \bar{n}) = \frac{1}{2}\overline{AD} = \overline{AM}$. Далі, оскільки $\bar{m} - \bar{n} = \overline{CB}$, то $\frac{1}{2}(\bar{m} - \bar{n}) = \frac{1}{2}\overline{CB} = \overline{CM} = \overline{MB}$ (вектори $\overline{CM}$ і $\overline{MB}$ рівні, бо лежать на одній прямій, мають однакові напрямки і довжину).

Аналогічно попереднім міркуванням $\bar{n} - \bar{m} = \overline{BC}$,
 $\frac{1}{2}(\bar{n} - \bar{m}) = \frac{1}{2}\overline{BC} = \overline{MC} = \overline{BM}$. Далі, $-\frac{1}{2}(\bar{n} + \bar{m}) = -\overline{AM} = \overline{MA}$.

Відзначимо для паралелограма $ABDC$ такі очевидні рівності:

$$\overline{AB} = \overline{CD}, \overline{AC} = \overline{BD}, \overline{AM} = \overline{MD}, \overline{CM} = \overline{MB}.$$

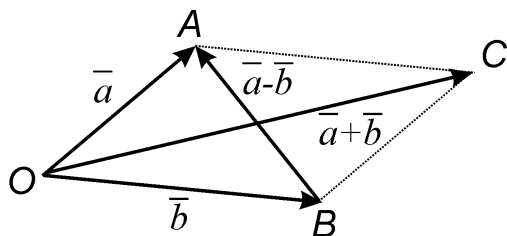


Рис. 1.22

Вправа 2. Вектори $\bar{a}$ і $\bar{b}$ утворюють кут 60° , причому $|\bar{a}| = 5$, $|\bar{b}| = 8$ (рис. 1.22).
 Визначити довжини векторів $\bar{a} + \bar{b}$ і $\bar{a} - \bar{b}$.

Розв'язання. Побудуємо на векторах $\bar{a}$ і $\bar{b}$ трикутник OAB .
 Доповнимо його до паралелограма $OACB$. Тоді $|\bar{a} + \bar{b}| = OC$, а $|\bar{a} - \bar{b}| = AB$.
 Відразу відзначимо, що $BC = OA = |\bar{a}| = 5$. Оскільки $\angle AOB = 60^\circ$, то $\angle OBC = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$.

Застосовуємо теорему косинусів* для трикутника OBC :

$$\begin{aligned} OC^2 &= OB^2 + BC^2 - 2OB \cdot BC \cos \angle OBC = \\ &= 8^2 + 5^2 - 2 \cdot 8 \cdot 5 \cos 120^\circ = \\ &= 64 + 25 + 2 \cdot 8 \cdot 5 \cdot \frac{1}{2} = 129 \end{aligned}$$

Тому $|\bar{a} + \bar{b}| = OC = \sqrt{129}$. Застосовуємо тепер теорему косинусів для трикутника OAB :

$$\begin{aligned} AB^2 &= OA^2 + OB^2 - 2OA \cdot OB \cos \angle AOB = \\ &= 8^2 + 5^2 - 2 \cdot 8 \cdot 5 \cos 60^\circ = 64 + 25 - 2 \cdot 8 \cdot 5 \cdot \frac{1}{2} = 49. \end{aligned}$$

Тому $|\bar{a} - \bar{b}| = AB = \sqrt{49} = 7$. Розв'язати дану задачу можна з використанням відомого твердження зі шкільного курсу планіметрії: сума квадратів діагоналей паралелограма дорівнює сумі квадратів його сторін.

* Зі шкільної програми.

$$\text{Тоді } |\vec{a} - \vec{b}|^2 + |\vec{a} + \vec{b}|^2 = 2|\vec{a}|^2 + 2|\vec{b}|^2.$$

Також для знаходження модуля вектора можна застосувати скалярний добуток векторів:

$$|\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{(\vec{a} - \vec{b})^2} = \sqrt{\vec{a}^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2} = \sqrt{|\vec{a}|^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\alpha + |\vec{b}|^2}.$$

Проведіть обчислення цими способами та переконайтесь у правильності розв'язку.

Вправа 3. Три сили $\vec{M}, \vec{N}, \vec{P}$, прикладені до однієї точки, мають взаємно перпендикулярні напрямки (рис. 1.23). Визначити величину їх рівнодіючої $\vec{R}$, якщо відомо,

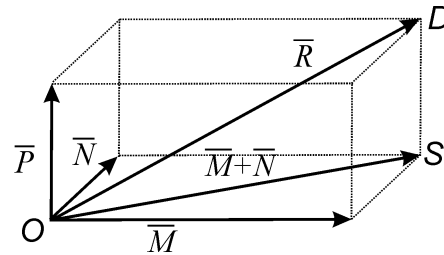


Рис. 1.23

що $|\vec{M}| = 2H$, $|\vec{N}| = 10H$, $|\vec{P}| = 11H$ (H – одиниця сили, ньютон).

Розв'язання: Побудуємо на векторах $\vec{M}, \vec{N}, \vec{P}$ паралелепіпед.

Тоді $\vec{M} + \vec{N} = \vec{OS}$, а $\vec{OS} + \vec{P} = \vec{OD}$, де вектор $\vec{OD}$ являє собою діагональ паралелепіпеда. Таким чином, рівнодіюча сил $\vec{M}, \vec{N}, \vec{P}$ дорівнює $\vec{R} = \vec{M} + \vec{N} + \vec{P} = (\vec{M} + \vec{N}) + \vec{P} = \vec{OS} + \vec{P} = \vec{OD}$.

Оскільки паралелепіпед прямий, то $OD^2 = 2^2 + 10^2 + 11^2 = 4 + 100 + 121 = 225$. Остаточо маємо: $|\vec{R}| = OD = \sqrt{225} = 15$, тобто величина рівнодіючої дорівнює $15H$, а напрямок збігається з діагоналлю $\vec{OD}$.

Вправа 4. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ утворюють кут $\frac{\pi}{6}$. Знаючи, що $|\vec{a}| = \sqrt{3}$, $|\vec{b}| = 1$, обчислити кут α між векторами $\vec{p} = \vec{a} + \vec{b}$ та $\vec{q} = \vec{a} - \vec{b}$.

Розв'язання. Знайдемо скалярний добуток

$$\vec{p}\vec{q} = (\vec{a} + \vec{b})(\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a}\vec{a} - \vec{a}\vec{b} + \vec{b}\vec{a} - \vec{b}\vec{b} = \vec{a}\vec{a} - \vec{b}\vec{b} = |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2 = 3 - 1 = 2$$

Знайдемо довжини векторів $\vec{p}$ і $\vec{q}$:

$$\begin{aligned}
|\bar{p}| &= |\bar{a} + \bar{b}| = \sqrt{|\bar{a} + \bar{b}|^2} = \sqrt{(\bar{a} + \bar{b})(\bar{a} + \bar{b})} = \sqrt{\bar{a}^2 + 2\bar{a}\bar{b} + \bar{b}^2} = \\
&= \sqrt{|\bar{a}|^2 + 2|\bar{a}||\bar{b}|\cos\frac{\pi}{6} + |\bar{b}|^2} = \sqrt{3 + 2\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 1} = \sqrt{7}, \\
|\bar{q}| &= |\bar{a} - \bar{b}| = \sqrt{|\bar{a} - \bar{b}|^2} = \sqrt{(\bar{a} - \bar{b})(\bar{a} - \bar{b})} = \sqrt{\bar{a}^2 - 2\bar{a}\bar{b} + \bar{b}^2} = \\
&= \sqrt{|\bar{a}|^2 - 2|\bar{a}||\bar{b}|\cos\frac{\pi}{6} + |\bar{b}|^2} = \sqrt{3 - 2\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 1} = 1.
\end{aligned}$$

Знаходимо косинус кута між векторами $\bar{p}$ і $\bar{q}$:

$$\cos \alpha = \frac{\bar{p}\bar{q}}{|\bar{p}||\bar{q}|} = \frac{2}{\sqrt{7} \cdot 1} = \frac{2}{\sqrt{7}} \text{ або } \alpha = \arccos \frac{2}{\sqrt{7}}.$$

Вправа 5. Дано дві точки $A(1;2;-4)$ і $B(-2;4;3)$. Знайти координати, довжину, напрямні косинуси та орт вектора $\overline{AB}$.

Розв'язання.

$$\begin{aligned}
\overline{AB} &= \{x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A\} = \\
&= \{-2 - 1; 4 - 2; 3 - (-4)\} = \{-3; 2; 7\}, \\
|\overline{AB}| &= \sqrt{(-3)^2 + 2^2 + 7^2} = \sqrt{62}.
\end{aligned}$$

$$\cos \alpha = \frac{-3}{\sqrt{62}}, \quad \cos \beta = \frac{2}{\sqrt{62}}, \quad \cos \gamma = \frac{7}{\sqrt{62}} \text{ — напрямні косинуси вектора}$$

$$\overline{AB}, \quad \bar{e} = \left\{ \frac{-3}{\sqrt{62}}, \frac{2}{\sqrt{62}}, \frac{7}{\sqrt{62}} \right\} \text{ — орт вектора } \overline{AB}.$$

Вправа 6. Дано два вектори в декартовій системі координат $\bar{a} = \{1, 2, -3\}$, $\bar{b} = \{3, -4, 1\}$. Визначити проєкції на координатні осі вектора $2\bar{a} + 3\bar{b}$.

Розв'язання. Напрямок осі Ox задається вектором $\bar{i} = \{1, 0, 0\}$, а осі Oy — вектором $\bar{j} = \{0, 1, 0\}$. Знаходимо координати вектора $2\bar{a} + 3\bar{b} = 2\{1, 2, -3\} + 3\{3, -4, 1\} = \{2, 4, -6\} + \{9, -12, 3\} = \{11, -8, -3\}$.

Обчислимо скалярні добутки:

$$(2\bar{a} + 3\bar{b})\bar{i} = 11 \cdot 1 - 8 \cdot 0 - 3 \cdot 0 = 11,$$

$$(2\bar{a} + 3\bar{b})\bar{j} = 11 \cdot 0 - 8 \cdot 1 - 3 \cdot 0 = -8.$$

Знаходимо проекції:

$$np_{Ox}(2\bar{a} + 3\bar{b}) = np_i(2\bar{a} + 3\bar{b}) = \frac{(2\bar{a} + 3\bar{b})\bar{i}}{|\bar{i}|} = \frac{11}{1} = 11,$$

$$np_{Oy}(2\bar{a} + 3\bar{b}) = np_j(2\bar{a} + 3\bar{b}) = \frac{(2\bar{a} + 3\bar{b})\bar{j}}{|\bar{j}|} = \frac{-8}{1} = -8.$$

Вправа 7. Перевірити колінеарність векторів $\bar{a} = \{2, -1, 3\}$, $\bar{b} = \{-6, 3, -9\}$. У випадку колінеарності встановити співвідношення їх довжин та напрямленість.

Розв'язання. Якщо вектори колінеарні, то існує таке число x , що $\bar{a} = x\bar{b}$, тобто $\{2, -1, 3\} = x \cdot \{-6, 3, -9\}$. Остання векторна рівність еквівалентна трьом числовим рівностям: $2 = -6x$, $-1 = 3x$, $3 = -9x$. Звідси знаходимо $x = -1/3$. Оскільки ми змогли знайти необхідне число x , то вектори колінеарні. Оскільки $x = -1/3 < 0$, то вектори напрямлені в протилежні сторони і вектор $\bar{b}$ в 3 рази довший за вектор $\bar{a}$.

1.3 Завдання для аудиторної та самостійної роботи

1. Знайти координати, модуль та напрямні косинуси вектора $\overline{AB}$, якщо $A(0;4;2)$, $B(4;7;-5)$.
2. Перевірити, що чотири точки $A(3,-1,2)$, $B(1,2,-1)$, $C(-1,1,-3)$, $D(3,-5,3)$ є вершинами трапеції.
3. Довести, що точки $A(1;5)$, $B(3;9)$, $C(-2;-1)$ лежать на одній прямій.
4. Знайти орт вектора $\bar{a} = \{6, -2, -3\}$.
5. Знайти довжину бісектриси AC у трикутнику ABC , якщо $A(1,3,-2)$, $B(2,1,1)$, $C(1,1,-2)$.
6. Вектори $\bar{a}$ і $\bar{b}$ утворюють кут $2\pi/3$. Знаючи, що $|\bar{a}| = 3$, $|\bar{b}| = 4$, обчислити $\bar{a}\bar{a}$, $\bar{a}^2$, $(3\bar{a} - 2\bar{b})(\bar{a} + 2\bar{b})$, $\bar{a} \times \bar{b}$, $(3\bar{a} - 2\bar{b}) \times (\bar{a} + 2\bar{b})$.
7. Обчислити скалярний та векторний добуток векторів $\bar{m} = 2\bar{a} + 3\bar{b}$ і $\bar{n} = -\bar{a} + 4\bar{b}$, якщо $\bar{a} = \{-2; 1; 3\}$, $\bar{b} = \{0; -1; 3\}$.

8. Дано точки $A(1;2;0)$, $B(3;0;-3)$, $C(5;2;6)$. Знайти площу трикутника ABC , косинус внутрішнього кута B , косинус зовнішнього кута C і довжину висоти, опущеної з вершини A .
9. Обчислити об'єм тетраедра з вершинами в точках $A(2-1;1)$, $B(5;5;4)$, $C(3;2;-1)$, $D(4;1;3)$.
10. Довести, що точки $A(1;2;-1)$, $B(0;1;5)$, $C(-1;2;1)$, $D(2;1;3)$ лежать в одній площині.
11. При якому значенні параметра c вектори $\vec{m} = \{3; 8; c\}$ та $\vec{n} = \{4; 0; -2\}$ взаємно перпендикулярні?
12. Обчислити проекцію вектора $\vec{a} = \{-1; 2; 3\}$ на напрямок вектора $\vec{AB}$, $A(7; 3; -2)$, $B(8; 3; -3)$.
13. Знайти одиничний вектор, перпендикулярний векторам $\vec{a} = \{1; -1; 2\}$ та $\vec{b} = \{2; -1; 4\}$.

Розділ 2

Пряма на площині

2.1 Основні теоретичні відомості

Аналітична геометрія вивчає властивості геометричних об'єктів методами алгебри. Використання методу координат дозволяє описати геометричний об'єкт алгебраїчно, тобто за допомогою чисел та рівнянь. Наприклад, на площині, залежно від вибору системи координат, точці буде відповідати пара чисел; лінія задаватиметься алгебраїчним рівнянням, що пов'язує координати точок, які належать даній лінії.

Основним інструментом аналітичної геометрії є вектор. Для складання рівнянь прямої на площині застосовуються вектори, що характеризують її положення в даній системі координат зручним чином, а саме – напрямний вектор та вектор нормалі. Будь-який вектор, що є паралельним до прямої, називається **напрямним вектором** прямої, а вектор, перпендикулярний до прямої, будемо називати **вектором нормалі** (рис. 2.1), де $\vec{l}$ – напрямний вектор, $\vec{l} \parallel a$; $\vec{N}$ – вектор нормалі, $\vec{N} \perp a$.

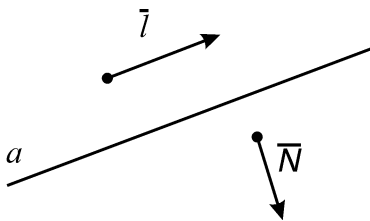


Рис. 2.1

Кожен з цих векторів задає тільки напрям прямої. Для того щоб задати пряму, потрібно вибрати ще один об'єкт, який характеризує її положення. Наприклад, точку.

Таким чином у вибраній системі координат буде задано положення прямої однозначно. Зрозуміло, що пряму на площині можна задати також і без допомоги векторів, а саме: двома точками (пригадайте аксіому планіметрії), точкою та кутом нахилу прямої (цей спосіб відомий зі шкільного курсу математики).

Навчимося складати рівняння прямої на площині. У шкільному курсі алгебри ви складали рівняння при розв'язанні текстових задач. Введення змінної величини та робота з нею як з відомою величиною при включенні її в певні залежності дозволяло скласти відповідне рівняння. В аналітичній геометрії будемо поступати аналогічно. Введемо змінні (їх буде дві!) – координати довільної точки на площині, а залежності вибиратимемо відповідно до умов задачі.

Нехай задано точку $M(x_M; y_M)$, що належить прямій, та вектор нормалі до даної прямої $\vec{N} = \{A; B\}$. Для складання рівняння прямої на площині застосуємо стандартний прийом: візьмемо довільну точку прямої $P(x; y)$, координати якої – **змінні величини**. Включимо вибрану точку у відповідну залежність. Очевидно, що всі точки прямої і тільки вони мають таку властивість: вектори $\vec{MP}$ і $\vec{N}$ взаємно перпендикулярні (рис. 2.2). Зазначена властивість і стане умовою для складання рівняння прямої, оскільки рівняння описує **закон**, якому підкорюються всі точки даної прямої. Якщо точка $P(x; y)$ належить прямій, то $\vec{MP} \perp \vec{N}$.

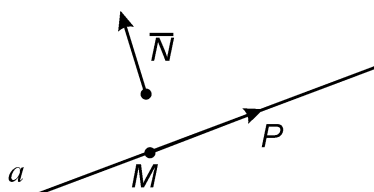


Рис. 2.2

Знайдемо координати вектора $\vec{MP}$: $\vec{MP} = \{x - x_M; y - y_M\}$. Оскільки точка P належить прямій, то незалежно від вибору точки вектори $\vec{MP}$ і $\vec{N}$ взаємно перпендикулярні, тобто

скалярний добуток векторів дорівнює нулеві. Отже, $\vec{N} \cdot \vec{MP} = 0$ або $A(x - x_M) + B(y - y_M) = 0$ – рівняння прямої, що проходить через дану точку перпендикулярно до даного вектора. Розкриємо дужки в даному рівнянні та перегрупуємо доданки: $Ax + By + (-Ax_M - By_M) = 0$. Якщо позначити число

$(-Ax_M - By_M) = C$ – отримаємо загальне рівняння прямої на площині:

$$Ax + By + C = 0.$$

Рекомендації для студентів:

- зверніть увагу – пряма на площині задається лінійним рівнянням;
- пам'ятайте про зміст параметрів A і B ;
- використайте запропонований підхід та виведіть інші види рівнянь прямої на площині; для зручності користуйтеся таблицею (див. Додаток 2);
- з метою розширення теоретичних знань читайте [4]. Зробіть конспект!

Складемо рівняння прямої в полярній системі координат. Положення прямої на площині буде визначено, якщо задати її відстань від полюса та кут між полярною віссю та віссю, що проходить через полюс, перпендикулярно до прямої. Вибираємо довільну точку прямої $K(r; \varphi)$. Очевидно, що всі точки прямої і тільки вони мають наступну властивість: проекція довільної точки прямої на вісь, що проведена з полюса, перпендикулярно до даної прямої дорівнює одному й тому ж числу p (рис. 2.3).

Оскільки точка $K(r; \varphi)$ належить прямій, то $r \cos(\varphi - \alpha) = p$ – рівняння прямої в полярній системі координат.

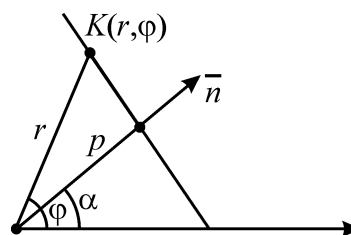


Рис. 2.3

2.2 Опорні задачі

Для подальшого успішного розв'язання задач аналітичної геометрії необхідно **навчитись розв'язувати і запам'ятати** основні задачі, які ми будемо називати опорними. В результаті студенти повинні вміти:

- Скласти рівняння прямої та записувати його в необхідному вигляді; розуміти зміст коефіцієнтів, що входять у рівняння.
- Встановлювати належність точок даній прямій.
- Встановлювати взаємне розміщення прямих на площині.
- Знаходити точку перетину прямих.
- Знаходити кут між прямими.
- Знаходити відстань точки до прямої.

Розглянемо основні опорні задачі при виконанні вправ 1 - 3.

Вправа 1. Скласти рівняння прямої, що проходить через дві задані точки $M(2; 5)$, $N(6; -5)$. Зобразити пряму, записати рівняння в усіх можливих видах та вказати відповідні параметри. Встановити, чи належать даній прямій точки.

Розв'язання. Проведемо розв'язання з опорою на таблицю (Додаток 2). Оскільки відомо дві точки, що належать прямій, то пряму на площині задано. Застосуємо відповідне рівняння прямої (4):

$$\frac{x - x_M}{x_N - x_M} = \frac{y - y_M}{y_N - y_M}. \text{ Підставляємо координати заданих точок і}$$

$$\text{отримуємо: } \frac{x - 2}{6 - 2} = \frac{y - 5}{-5 - 5} \text{ – рівняння даної прямої у вигляді (4)}$$

(рис. 2.4 а).

Після спрощення маємо канонічне рівняння заданої прямої:

$$\frac{x - 2}{4} = \frac{y - 5}{-10} \quad (5). \text{ Зазначимо, що вектор } \vec{u} = \{4; -10\} \text{ є одним}$$

з напрямних векторів прямої. Поділимо знаменник кожного дробу на -2 і

$$\text{отримаємо більш зручний вигляд канонічного рівняння } \frac{x - 2}{-2} = \frac{y - 5}{5},$$

в якому вектор $\vec{l} = \{-2; 5\}$, колінеарний вектору $\vec{u}$, також є напрямним вектором прямої (рис. 2.4 а). Користуючись канонічним рівнянням прямої, можна швидко записати його в параметричному вигляді. Для цього введемо певний параметр $t \in R$ і запишемо наступну правильну рівність:

$$\frac{x - 2}{-2} = \frac{y - 5}{5} = t, \text{ звідки отримаємо: } \frac{x - 2}{-2} = t, x = -2t + 2, \frac{y - 5}{5} = t,$$

$$y = 5t + 5. \begin{cases} x = -2t + 2 \\ y = 5t + 5 \end{cases} \text{ – параметричне рівняння заданої прямої.}$$

Кожному значенню параметра $t \in R$ відповідає точка на прямій. Наприклад, при $t = 0$ маємо точку $M(2; 5)$, при $t = 1$ – точку з координатами $(0; 10)$, що є точкою перетину даної прямої з віссю ординат. Щоб встановити, якому значенню параметра t відповідає точка $N(6; -5)$, підставимо в параметричне рівняння її координати $x = 6$, $y = -5$. При $t = -2$ отримаємо точку N . Параметричне рівняння прямої доцільно застосовувати, якщо в задачі буде потрібно вказати зручним способом точки, що належать прямій.

Канонічне рівняння прямої зручно застосовувати, щоб записати її рівняння в загальному вигляді. Використаємо основну властивість

пропорції і після певних перетворень отримаємо загальний вигляд даного рівняння (2): $5x + 2y - 20 = 0$. Тут вектор $\vec{n} = \{5; 2\}$ є вектором нормалі до прямої. Запишемо також рівняння прямої у вигляді (1), що проходить через точку $M(2; 5)$, перпендикулярно до даного вектора $\vec{n} = \{5; 2\}$: $5(x - 2) + 2(y - 5) = 0$. Переконаємось в тому, що напрямний вектор та вектор нормалі до даної прямої перпендикулярні (рис. 2.4 а). Для цього знайдемо скалярний добуток векторів і покажемо, що він дорівнює нулю: $\vec{l} \cdot \vec{n} = \{-2; 5\} \cdot \{5; 2\} = -2 \cdot 5 + 5 \cdot 2 = 0$. Пряма має проходити через задані точки $M(2; 5)$ і $N(6; -5)$, тобто координати цих точок мають задовольняти рівнянню. Підставимо координати точок в рівняння $5x + 2y - 20 = 0$:

$$5 \cdot 2 + 2 \cdot 5 - 20 = 0, 0 \equiv 0,$$

$$5 \cdot 6 + 2 \cdot (-5) - 20 = 0, 0 \equiv 0.$$

Відповідь слід записувати саме в загальному вигляді, якщо в задачі не сказано інакше.

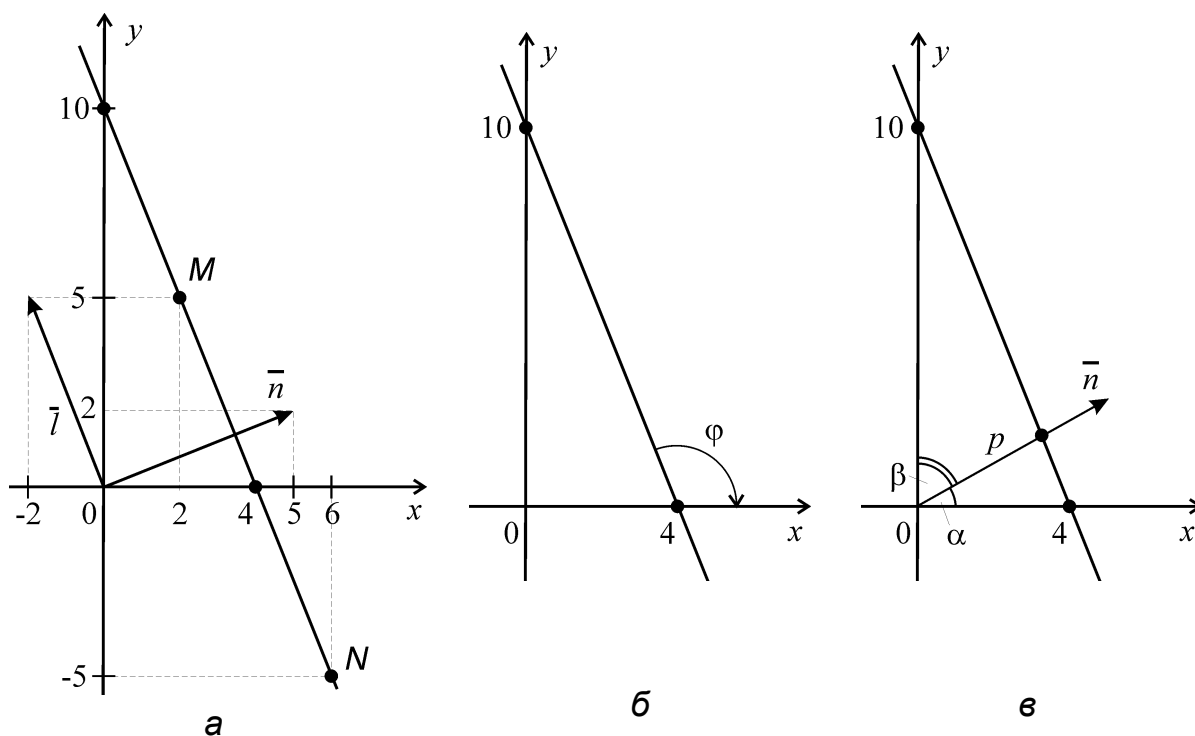


Рис. 2.4

Запишемо рівняння даної прямої у вигляді (6):

$$\frac{x}{4} + \frac{y}{10} = 1$$

– рівняння прямої у відрізках на осях. Параметри 4 і 10 показують, що на осі абсцис пряма відтинає 4 масштабні одиниці, а на осі ординат 10. (див. рис. 2.4 б).

Для того щоб записати рівняння прямої у вигляді (3) застосуємо загальне рівняння прямої:

$$5x + 2y - 20 = 0, 2y = -5x + 20, y = -\frac{5}{2}x + 10$$

– рівняння даної прямої з кутовим коефіцієнтом. Тут $k = -\frac{5}{2}$ – кутовий коефіцієнт прямої, що показує тангенс кута нахилу прямої (рис. 2.4 б). Нагадаємо, що кутом нахилу прямої називається кут між прямою та додатним напрямком осі абсцис у верхній півплощині.

Перейдемо до останнього виду і запишемо нормальне рівняння даної прямої. Розглянемо знову загальне рівняння прямої $5x + 2y - 20 = 0$. Введемо нормуючий множник

$$\mu = \pm \frac{1}{\sqrt{5^2 + 2^2}} = \pm \frac{1}{\sqrt{29}}. \text{ Знак нормувального множника вибирають}$$

протилежним до вільного члена (подумайте – чому?). У цьому випадку $\mu = 1/\sqrt{29}$. Множимо обидві частини рівняння на нормуючий множник і

отримуємо шукане рівняння $\frac{5}{\sqrt{29}}x + \frac{2}{\sqrt{29}}y - \frac{20}{\sqrt{29}} = 0$. Числа $5/\sqrt{29}$ та

$2/\sqrt{29}$ – напрямні косинуси вектора нормалі, проведеного до даної прямої, тобто вектор $\left\{ \frac{5}{\sqrt{29}}; \frac{2}{\sqrt{29}} \right\}$ – орт вектора нормалі $\bar{n} = \{5; 2\}$

(перевірте), а число $\frac{20}{\sqrt{29}}$ показує відстань початку координат до даної прямої (рис. 2.4 в).

Нормальне рівняння прямої доцільно застосовувати при знаходженні відхилень точки від прямої та при дослідженні розміщення точок відносно даної прямої.

Виконайте цю вправу з довільними точками згідно із запропонованим зразком. В результаті виконання такої вправи ви зможете навчитись складати відповідні рівняння прямої, легко переходити від одного виду рівняння до інших, чітко розуміти роль параметрів, що входять до кожного з рівнянь.

Вправа 2. Встановити взаємне розміщення прямих $2x - y - 1 = 0$ та $x + 3y - 4 = 0$. Знайти їх точку перетину, якщо прямі перетинаються. Знайти кут між прямими.

Розв'язання. Як відомо, прямі на площині можуть перетинатись, бути паралельними або співпадати. Чи можна, користуючись лише рівняннями цих прямих, встановити їх взаємне розміщення? В аналітичній геометрії ми маємо змогу **точно** відповісти на поставлене запитання.

В таблиці 1 представлено деякі відповідності, що будуть корисними при розв'язанні задач.

Отже встановити взаємне розміщення прямих можна, розглядаючи систему рівнянь:

$$\begin{cases} 2x - y - 1 = 0, \\ x + 3y - 4 = 0. \end{cases}$$

Знаходимо визначник системи $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 7 \neq 0$. Отже прямі перетинаються. Знаходимо розв'язок системи будь-яким відомим способом, наприклад, методом Крамера. Маємо точку перетину прямих: $x = 1, y = 1$.

Кут між прямими знаходимо за формулою $tg\varphi = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} \right|$,

де k_1 і k_2 – кутові коефіцієнти прямих. Перепишемо рівняння прямих у відповідному вигляді (див. вправу 1):

$$y = 2x - 1, y = -\frac{1}{3}x + \frac{4}{3}.$$

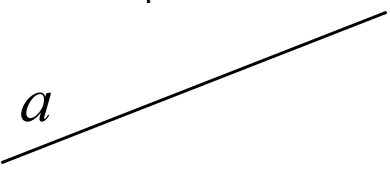
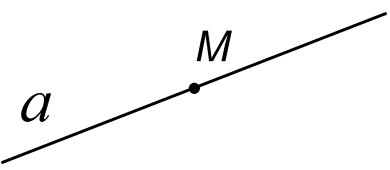
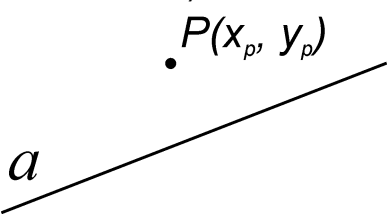
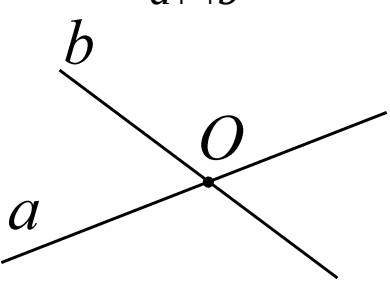
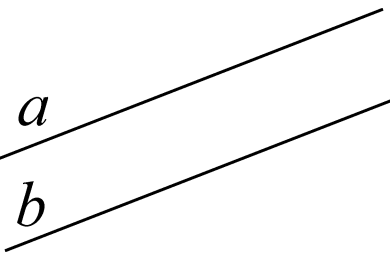
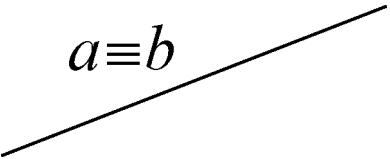
Тут $k_1 = 2$, $k_2 = -1/3$. Підставляємо отримані значення в формулу:

$$tg\varphi = \left| \frac{-\frac{1}{3} - 2}{1 + 2 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)} \right| = 7.$$

Гострий кут вважається визначеним, якщо відома одна з його тригонометричних функцій. Кут між прямими знайдено.

Знаючи кутові коефіцієнти прямих, також можна встановити їх взаємне розміщення. В даному випадку $k_1 \neq k_2$, отже прямі перетинаються.

Таблиця 1

Точка M 	Пара чисел (координати точки) $M(x_M, y_M)$
Пряма a 	Лінійне рівняння $Ax + By + C = 0$
Точка належить прямій $M \in a$ 	Координати точки задовольняють рівняння прямої $Ax_M + By_M + C \equiv 0$
Точка не належить прямій $P \notin a$  $P(x_p, y_p)$	Координати точки не задовольняють рівняння $Ax_P + By_P + C \neq 0$
Прямі перетинаються $a \cap b$ 	Система рівнянь має один розв'язок $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0 \end{cases}, \frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$
Прямі паралельні $a \parallel b$ 	Система рівнянь не має розв'язку $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$
Прямі співпадають $a \equiv b$ 	Система рівнянь має безліч розв'язків $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$

Для встановлення взаємного розміщення прямих та кута між прямими можна застосувати **вектори**. Відомо, що вектори $\overline{n_1} = \{2; -1\}$ та $\overline{n_2} = \{1; 3\}$ є векторами нормалей до заданих прямих.

Вектори не є колінеарними $\frac{2}{1} \neq \frac{-1}{3}$, (як перевірити колінеарність векторів див. розділ 1), отже прямі перетинаються. Для знаходження кута між векторами нормалей використаємо формулу $\cos \alpha = \frac{\overline{n_1} \cdot \overline{n_2}}{|\overline{n_1}| \cdot |\overline{n_2}|}$

(див. „Застосування скалярного добутку векторів”, розділ 1). Отже $\cos \alpha = -1/(5\sqrt{2})$.

Зауважимо, що кутом між прямими вважається менший з двох суміжних кутів, утворених при їх перетині.

Оскільки $\cos \alpha < 0$, то кут між вибраними векторами нормалей тупий, отже $\varphi = 180^\circ - \alpha$ – кут між прямими, $\cos \varphi = 1/(5\sqrt{2})$.

Може здатися, що другий спосіб дає іншу відповідь. Щоб показати рівність цих відповідей, застосуйте відому тригонометричну тотожність

$$\operatorname{tg}^2 \beta + 1 = \frac{1}{\cos^2 \beta}. \text{ Зробіть перевірку самостійно.}$$

При виконанні цієї вправи ви маєте навчитись встановлювати взаємне розміщення прямих на площині, знаходити точку перетину прямих, знаходити кут між прямими.

Додатково можна читати [4].

Виконайте цю вправу з двома довільними прямими згідно із запропонованим зразком. Застосуйте різні способи розв'язання.

Вправа 3. Знайти відстань від точки $M(1; 3)$ до прямої $2x - y - 1 = 0$.

Розв'язання. Для розв'язання цієї задачі застосуємо поняття відхилення точки від прямої.

Зробіть конспект [4, с. 62] і зрозумійте зміст цього поняття. Рекомендуємо такий план розв'язання цієї задачі. Спочатку перепишемо рівняння прямої в нормальному вигляді (див. вправу 1):

$$2x - y - 1 = 0, \mu = \frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}x - \frac{1}{\sqrt{5}}y - \frac{1}{\sqrt{5}} = 0. \text{ Підставимо координати}$$

точки в отримане рівняння: $\frac{2}{\sqrt{5}} \cdot 1 - \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot 3 - \frac{1}{\sqrt{5}} = \sigma$, $\sigma = -\frac{2}{\sqrt{5}}$ – шукане

відхилення. Про що говорить той факт, що відхилення від'ємне? Відхилення дорівнює нулеві? Відхилення додатне?

Відстань точки до прямої дорівнює модулю відхилення:
 $d = |\sigma| = 2/\sqrt{5}$.

Виконайте цю вправу з довільними точками та прямими згідно із запропонованим зразком.

В аналітичній геометрії на площині ви можете зустрітись із необхідністю знаходити такі відстані: відстань між двома точками, відстань від точки до прямої, відстань між паралельними прямими. Запропонуйте, як знайти зазначені відстані.

Відстань між прямими, що перетинаються, вважають рівній нулю.

Тепер, оскільки засвоєно опорні задачі, можна переходити до розв'язання більш складних комбінованих задач.

2.3 Завдання для аудиторної та самостійної роботи

1. Дано точки $A(1; 8)$, $B(0; -3)$, $C(-1; 2)$, що є вершинами трикутника ABC . Запишіть: загальне рівняння прямої AC ; канонічне рівняння висоти BH ; параметричне рівняння медіани AM . Знайдіть: проекцію точки C на пряму AB (проекцією точки на пряму називається точка, що є основою перпендикуляра, проведеного з даної точки до прямої); відстань точки C до прямої AB ; кути трикутника; координати точки, що симетрична вершині B відносно сторони AC ; рівняння бісектриси кута B .
2. При яких значеннях параметрів a і b прямі $ax + 9y + b = 0$ і $4x + ay - 2 = 0$ паралельні? Збігаються? Перпендикулярні?
3. Встановіть, що прямі $3x + 2y - 7 = 0$ і $6x + 4y + 2 = 0$ паралельні та знайдіть відстань між ними.
4. Вершини трикутника $A(2; -1)$, $B(4; 5)$, $C(-3; 1)$. Запишіть рівняння прямої, що проходить через початок координат та центр мас трикутника.
5. Вершини трикутника $A(2; -1)$, $B(4; 5)$, $C(-3; 1)$. Запишіть рівняння прямої, що проходить через вершину B паралельно медіані AM трикутника.
6. Знайти проекцію початку координат на пряму $3x + 2y - 7 = 0$.
7. Записати рівняння прямих, що проходять через точку $A(-1; 2)$ під кутом 45° до прямої $x - 2y + 3 = 0$.

8. Запишіть рівняння прямої, що проходить через точку $A(-2; 2)$ та відтинає на координатних осях відрізки однакової довжини.
9. Знайти точку A , що симетрична точці $B(1; 2)$ відносно прямої $3x + 2y - 7 = 0$.
10. Дано рівняння двох суміжних сторін паралелограма $x - y - 1 = 0$, $x - 2y = 0$ та точка перетину його діагоналей $M(3; -1)$. Знайдіть рівняння двох інших сторін паралелограма.
11. Складіть рівняння сторін паралелограма, знаючи одну з його вершин $A(3; -4)$ та рівняння двох висот: $7x - 2y - 1 = 0$ і $2x - 7y - 6 = 0$.

Розділ 3

Пряма та площина в просторі

3.1 Основні теоретичні відомості

Розглянемо різні види рівнянь прямої та площини в просторі. Відомо, що положення точки в просторі визначається трьома числами (координатами цієї точки). Розглянемо таблицю (Додаток 2) і спробуємо провести певні аналогії. Які параметри можуть задавати положення площин та прямих в просторі? Наприклад, точка та вектор нормалі? Очевидно, що такі параметри не можуть задавати положення прямої, оскільки пряма в просторі може мати безліч перпендикулярних до неї напрямків. Тим часом вони однозначно задають положення площини.

Нехай в просторі задано точку $M(x_M; y_M; z_M)$ та вектор $\vec{N} = \{A; B; C\}$. Складемо рівняння площини, що проходить через дану точку перпендикулярно до даного вектора. Вектор $\vec{N} = \{A; B; C\}$ будемо називати вектором нормалі до даної площини. Для складання рівняння площини в просторі застосуємо стандартний прийом, що опановано в розділі 2: візьмемо довільну точку площини $P(x; y; z)$, координати якої – змінні величини, та включимо її в певну залежність. Знайдемо координати вектора $\vec{MP}$: $\vec{MP} = \{x - x_M; y - y_M; z - z_M\}$. Оскільки точка P належить площині, то незалежно від вибору точки вектори $\vec{MP}$ і $\vec{N}$ взаємно перпендикулярні, тобто скалярний добуток векторів дорівнює нулю. Отже $\vec{N} \cdot \vec{MP} = 0$, або $A(x - x_M) + B(y - y_M) + C(z - z_M) = 0$ – рівняння площини в просторі, що проходить через дану точку

перпендикулярно до даного вектора. Розкриємо дужки в отриманому рівнянні та перегрупуємо доданки:

$$Ax + By + Cz + (-Ax_M - By_M - Cy_M) = 0.$$

Останній доданок є числом. Назвемо його D . Маємо **загальне рівняння площини в просторі**: $Ax + By + Cz + D = 0$.

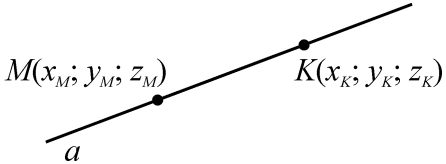
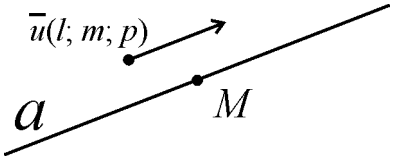
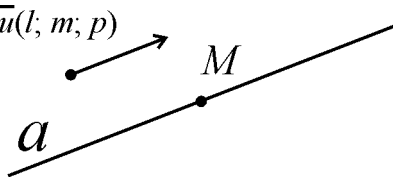
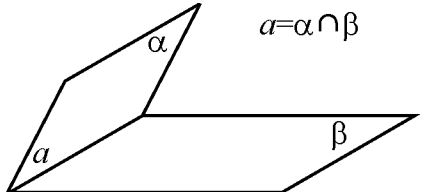
Пам'ятайте зміст параметрів A, B, C .

Продумайте, які ще параметри однозначно задають площину в просторі та виведіть відповідні рівняння. Зробіть конспект. В результаті отримаємо такі **рівняння площини в просторі**:

- Рівняння площини, що проходить через дану точку, перпендикулярно до даного вектора;
- Загальне рівняння площини;
- Рівняння площини, що проходить через три задані точки;
- Рівняння площини у відрізках на осях;
- Нормальне рівняння площини (див. Додаток 3).

Положення прямої в просторі однозначно задається двома точками, точкою та напрямним вектором. Крім того, пряму будемо розуміти як результат перетину двох площин. Відповідно виділимо такі **види рівнянь прямої в просторі** (табл. 2):

Таблиця 2

1	Рівняння прямої, що проходить через дві задані точки		$\frac{x - x_M}{x_K - x_M} = \frac{y - y_M}{y_K - y_M} = \frac{z - z_M}{z_K - z_M}$
2	Канонічне рівняння прямої в просторі		$\frac{x - x_M}{l} = \frac{y - y_M}{m} = \frac{z - z_M}{n}$
3	Параметричне рівняння прямої в просторі		$\begin{cases} x = x_M + lt, \\ y = y_M + mt, \\ z = z_M + nt, t \in R \end{cases}$
4	Загальне рівняння прямої в просторі		$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$

Розгляньте особливості розміщення прямих та площин в просторі. Подумайте, який об'єкт (пряма чи площина) в просторі задається рівняннями: а) $x = 3$, б) $x + y - 3 = 0$, в) $z - 2 = 0$, г) $y - z = 0$. Виконайте відповідні рисунки. За необхідністю читайте [4]. Зробіть конспект.

3.2 Опорні задачі

Для подальшого успішного розв'язання задач з аналітичної геометрії в просторі студенти мають вміти:

- 1) складати рівняння площини в просторі та переходити від одного виду рівняння площини до інших, розуміти зміст відповідних числових параметрів;
- 2) складати рівняння прямої в просторі;
- 3) досліджувати взаємне розміщення прямих та площин в просторі;
- 4) знаходити кут між прямими, прямою та площиною, кут між площинами;
- 5) знаходити точку перетину прямої та площини в просторі;
- 6) знаходити відстані точки до площини, точки до прямої, прямої до площини, відстань між площинами.

З метою оволодіння зазначеними вміннями виконаємо вправи 1 - 4.

Вправа 1. Дано три точки $E(1; 0; 4)$, $F(1; 1; 1)$, $K(5; -2; 2)$. Скласти рівняння площини, що проходить через дані точки. Знайти відстань точки $M(-1; 2; 3)$ до площини EFK .

Розв'язання. Три точки, що не лежать на одній прямій, задають площину і тільки одну. Оскільки задано три точки площини, то застосуємо рівняння площини, що проходить через три задані точки:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-0 & z-4 \\ 1-1 & 1-0 & 1-4 \\ 5-1 & -2-0 & 2-4 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} x-1 & y-0 & z-4 \\ 0 & 1 & -3 \\ 4 & -2 & -2 \end{vmatrix} = 0.$$

Розкладаючи визначник по елементам першого рядка, маємо:

$$(x-1) \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} - y \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} + (z-4) \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = 0.$$

Після спрощення отримаємо рівняння площини у вигляді, що відповідає рівнянню площини, яка проходить через дану точку, перпендикулярно до даного вектора: $-8(x-1) - 12y - 4(z-4) = 0$.

Вектор $\vec{N} = \{2; 3; 1\}$, колінеарний до вектора $\{-8; -12; -4\}$ – вектор

нормалі до даної площини. $2x + 3y + z - 6 = 0$ – загальне рівняння заданої площини.

Якщо не сказано інакше, то відповідь потрібно давати в загальному вигляді. Оскільки площина проходить через задані точки, то їх координати мають задовольняти рівняння. Виконайте перевірку самостійно.

Запишемо дане рівняння у вигляді (4) – рівняння площини у відрізках на осях. Для цього виконаємо певні перетворення, аналогічні тим, що ми виконували в розділі 2 при перетворенні рівняння прямої на площині. Отримаємо $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} + \frac{z}{6} = 1$. Ця площина відтинає на координатних осях відрізки 3, 2 і 6 відповідно (див. рис. 3).

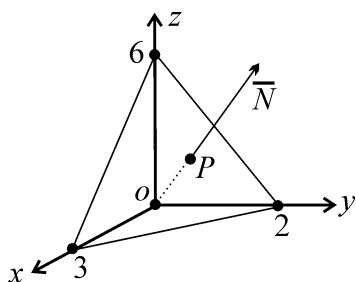


Рис. 3

Запишемо нормальне рівняння площини. Нормуючий множник $\mu = 1/\sqrt{14}$ (чому вибрано додатне значення?). Рівняння має вигляд

$$\frac{2}{\sqrt{14}}x + \frac{3}{\sqrt{14}}y + \frac{1}{\sqrt{14}}z - \frac{6}{\sqrt{14}} = 0.$$

Поясніть зміст числових параметрів, що входять до цього рівняння.

Відстань точки до площини знайдемо, застосувавши поняття відхилення точки від площини. Для знаходження відхилення точки $M(-1; 2; 3)$ від даної площини підставимо координати цієї точки

в нормальне рівняння прямої: $\frac{2}{\sqrt{14}} \cdot (-1) + \frac{3}{\sqrt{14}} \cdot 2 + \frac{1}{\sqrt{14}} \cdot 3 - \frac{6}{\sqrt{14}} = \delta$.

Маємо, що $\delta = 1/\sqrt{14}$. Про що свідчить той факт, що відхилення від'ємне? Відстань розуміємо як модуль відхилення.

При виконанні цієї вправи ви маєте навчитись складати рівняння площини в просторі, переходити від одного виду рівняння площини до інших, знаходити відстань точки до площини.

Вправа 2. Дано дві точки $A(1; 2; 0)$ та $B(-1; 2; -3)$. Скласти рівняння прямої, що проходить через дані точки. Записати його в канонічному та параметричному виглядах.

Розв'язання. Дві точки в просторі задають пряму і тільки одну. Застосуємо рівняння прямої, що проходить через дві задані точки:

$$\frac{x-1}{-1-1} = \frac{y-2}{2-2} = \frac{z-0}{-3-0}.$$

Після спрощення отримаємо канонічне рівняння

прямої: $\frac{x-1}{-2} = \frac{y-2}{0} = \frac{z}{-3}$, яке можна переписати у вигляді

$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{0} = \frac{z}{3}$. Тут вектор $\{2; 0; 3\}$ – напрямний вектор прямої.

В такому випадку 0 в знаменнику дробу може стояти, він вказує тільки на особливості розміщення прямої. Подумайте, яку особливість розміщення має дана пряма?

Якщо не сказано інакше, відповідь слід давати саме в канонічному вигляді.

Запишемо рівняння даної прямої в параметричному вигляді.

Для цього введемо деякий параметр $t \in R$. Маємо $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{0} = \frac{z}{3} = t$.

Розглядаючи кожен рівність окремо, отримаємо:

$$\begin{cases} x = 2t + 1, \\ y = 2, \\ z = 3t \end{cases}$$

– параметричне рівняння даної прямої. Його зручно застосовувати, якщо потрібні конкретні точки прямої. Для цього слід надавати параметру t певні значення. Наприклад, при $t = 0$ отримаємо точку А.

При виконанні цієї вправи ви маєте навчитись складати різні види рівнянь прямої в просторі.

Вправа 3. Прямую задано загальним рівнянням:

$$\begin{cases} x - 2y - z = 0, \\ x + y + z - 6 = 0. \end{cases}$$

Запишіть його в канонічному вигляді.

Розв’язання. При виконанні цієї вправи ви навчитесь переходити від загального рівняння прямої в просторі до канонічного. Для того щоб скласти канонічне рівняння прямої, потрібно знати точку, що належить прямій, та напрямний вектор прямої. Точку на прямій виберемо довільно. Для цього покладемо, наприклад, $z = 0$. Якщо так виявиться незручним – зробимо інакше. При $z = 0$ система набуває вигляду:

$$\begin{cases} x - 2y = 0, \\ x + y = 6. \end{cases}$$

Очевидно, що $x = 4$, $y = 2$ – розв’язки цієї системи. Отже точка $(4; 2; 0)$ належить даній прямій. Основною вимогою в такому випадку є

належність точки прямій. Як знайти напрямний вектор прямої? Вектори нормалей до площин, перетином яких є дана пряма, будуть вектори $\vec{n}_1 = \{1; -2; -1\}$ та $\vec{n}_2 = \{1; 1; 1\}$.

Користуючись знаннями зі шкільного курсу стереометрії, доведіть, що вектор, перпендикулярний до векторів нормалей площин, буде напрямним вектором прямої їх перетину.

Як знайти вектор, що є перпендикулярним до двох даних векторів?

Повторіть розділ 1 – застосування векторів.

З'ясували, що векторним добутком двох векторів є вектор, перпендикулярний до кожного з них. Знайдемо цей вектор:

$$\vec{l} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -\vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}. \text{ Будь-який вектор, колінеарний}$$

до даного, також буде напрямним вектором прямої. Зручно взяти вектор $\{1; 2; -3\}$. Складаємо канонічне рівняння прямої: $\frac{x-4}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{-3}$.

При знаходженні кутів між прямими, прямою та площиною використовуйте вектори нормалей площин, напрямні вектори прямих та знаходьте кути між векторами (див. розділ 1 – застосування скалярного добутку векторів).

Вправа 4. Знайти точку перетину прямої $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{0} = \frac{z}{3}$ та площини $2x + 3y + z + 6 = 0$.

Розв'язання. Точка перетину прямої та площини належить і прямій, і площині. Запишемо рівняння прямої в параметричному вигляді (вправа 2):

$$\begin{cases} x = 2t + 1, \\ y = 2, \\ z = 3t. \end{cases}$$

Пам'ятаємо, що при кожному значенні t маємо точку, що належить прямій. Потрібно знайти таке значення параметра t , щоб точка належала й площині, тобто координати цієї точки мають задовольняти рівняння $2x + 3y + z + 6 = 0$. Підставимо в це рівняння координати точки: $2(2t + 1) + 3 \cdot 2 + 3t + 6 = 0$. Звідси $t = -2$. Шукана точка $(-3; 2; -6)$.

Перед тим як перейти до розв'язання інших задач, докладно розберіть запропоновані вправи 1 - 4.

Додатково читайте [4]. Законспекуйте розв'язки інших задач, які надалі можна розглядати як опорні. Рекомендуємо такі: знайти відстань точки до прямої; відстань від точки до площини; відстань між паралельними прямими в просторі.

3.3 Завдання для аудиторної та самостійної роботи

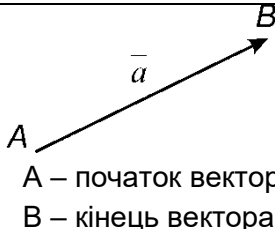
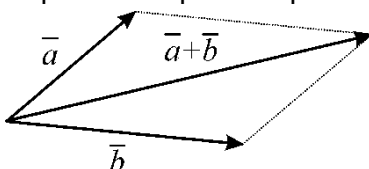
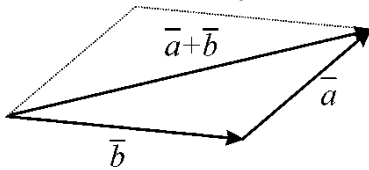
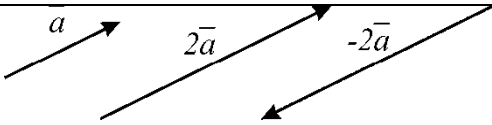
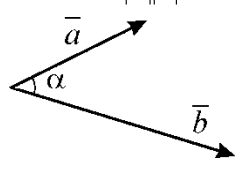
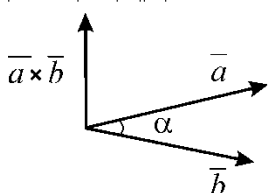
1. Записати рівняння площини, що проходить через точку $P(2; 1; 1)$ паралельно до площини $3x + y - 2z - 1 = 0$.
2. Запишіть рівняння площини, що проходить через точку $M(2; -3; 1)$ паралельно до векторів $\vec{a} = \{-3; 2; -1\}$ та $\vec{b} = \{1; 2; 3\}$.
3. Запишіть рівняння площини, що проходить через точки $A(0; 1; 3)$, $B(2; 4; 5)$ паралельно до осі Ox .
4. Знайти кут між площинами $3x + y - 2z - 1 = 0$ та $y + 3z - 1 = 0$.
5. Визначити, при яких значеннях параметра a площини $ax + 8y - 2z + 10 = 0$ та $2x + ay + z + 3 = 0$ паралельні? Перпендикулярні?
6. Переконайтесь, що площини $2x + y - 5z - 1 = 0$ та $6x + 3y - 15z + 10 = 0$ паралельні та знайдіть відстань між ними.
7. Знайдіть кут між площинами $x + y - 5z + 1 = 0$ та $2x + 4y - 3z + 1 = 0$.
8. Запишіть канонічне рівняння прямої, що проходить через точку $M(1; -1; 0)$ перпендикулярно до площини $2x - 4y + z - 3 = 0$.
9. Складіть параметричне рівняння прямої, що проходить через точку $M(2; 3; -1)$ паралельно до прямої $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z-1}{1}$.
10. Знайти кут між прямими $\begin{cases} x - y + z - 4 = 0 \\ 2x + y - 2z + 5 = 0 \end{cases}$ та $\begin{cases} x + y + z - 4 = 0 \\ 2x + 3y - z - 6 = 0 \end{cases}$.
11. Знайти точку перетину прямої $\frac{x-3}{4} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z+1}{-3}$ та площини $x + y + z - 7 = 0$.

12. При якому значенні параметра a пряма $\frac{x+1}{2} = \frac{y+1}{a} = \frac{z-3}{3}$ паралельна до площини $2x + y - z = 0$?
13. Знайти кут між прямою, що проходить через точки $A(-1; 0; -5)$ і $B(1; 2; 0)$ та площиною $x - 3y + z + 5 = 0$.
14. Знайти координати точки, що є симетричною точці $A(-1; 3; 2)$ відносно площини $2x - y + z + 3 = 0$. Знайдіть відстань даної точки до площини.
15. Знайти координати точки, що є симетричною точці $B(2; 0; 1)$ відносно прямої $\frac{x+1}{3} = \frac{y}{-1} = \frac{z-1}{2}$. Знайдіть відстань точки B до даної прямої.
16. Покажіть, що прямі $\frac{x}{0} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+1}{2}$ і $\frac{x+3}{3} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{1}$ перетинаються. Складіть рівняння площини, що містить дані прямі.

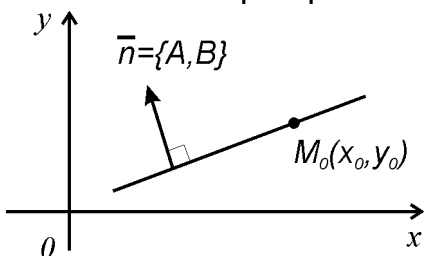
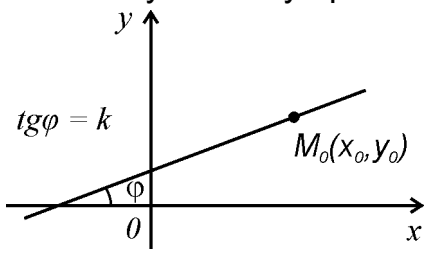
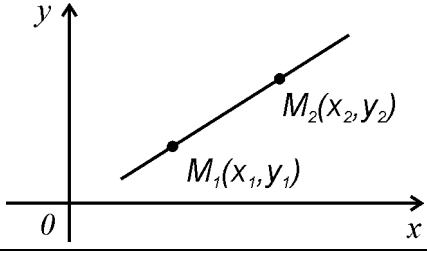
Список літератури

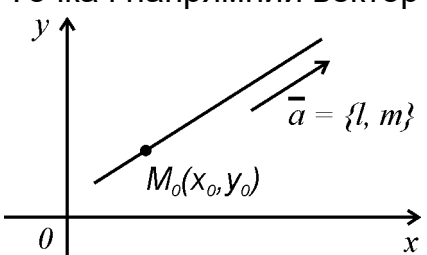
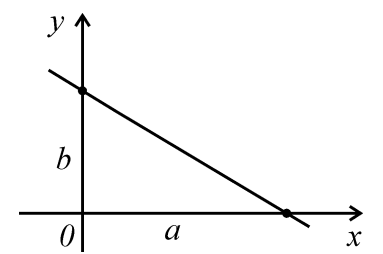
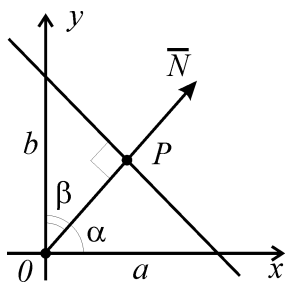
1. *Письменный Д.Т.* Конспект лекций по высшей математике: полный курс. – М.: Айрис-пресс, 2006. – 608 с.
2. *Сборник задач по математике для ВТУЗов. Линейная алгебра и основы математического анализа / под ред. А.В. Ефимова, Б.П. Демидовича.* – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1981. – 464 с.
3. *Клетеник Д.В.* Сборник задач по аналитической геометрии. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. – 224 с.
4. *Привалов И.И.* Аналитическая геометрия: практ. пособие. – 31-е изд., стер. – К.: изд-во УСХА, 1991. – 277 с.

Операції над векторами

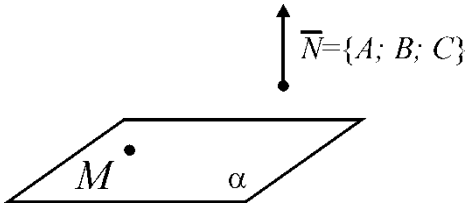
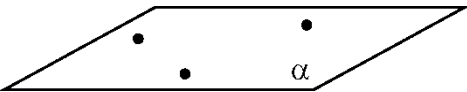
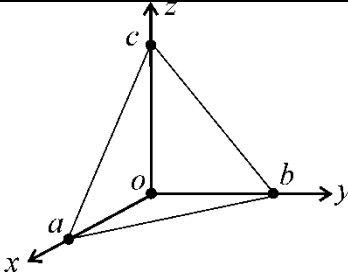
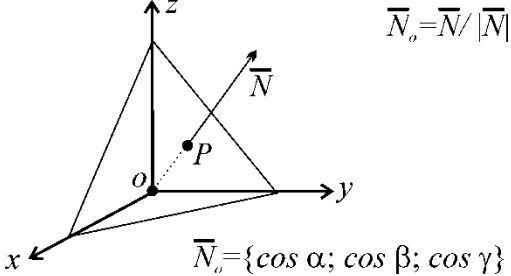
Назва операції	Геометрична форма	Аналітична форма
Визначення вектора	 А – початок вектора, В – кінець вектора	Координати вектора $\overrightarrow{AB} = \{x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A\}$ $\vec{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$
Довжина (модуль)	Довжина (модуль) вектора – довжина відрізка АВ, що задає вектор	$ \vec{a} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$
Рівність векторів	Рівні вектори: однакові напрямки і однакові довжини	$(\vec{a} = \vec{b}) \Leftrightarrow (a_1 = b_1, a_2 = b_2, a_3 = b_3)$
Додавання векторів	Правило паралелограма  Правило трикутника 	$\vec{a} = \{a_1, a_2, a_3\} \quad \vec{b} = \{b_1, b_2, b_3\}$ $\vec{a} + \vec{b} = \{a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3\}$
Множення вектора на число		$\vec{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$ $\lambda \vec{a} = \{\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3\}$
Скалярний добуток векторів	$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a} = \vec{a} \vec{b} \cos \alpha$ 	$\vec{a} = \{a_1, a_2, a_3\} \quad \vec{b} = \{b_1, b_2, b_3\}$ $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$ Властивості: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$
Векторний добуток векторів	$\vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{a}, \vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{b}$ $ \vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \vec{b} \sin \alpha$ 	$\vec{a} = \{a_1, a_2, a_3\} \quad \vec{b} = \{b_1, b_2, b_3\}$ $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$ Властивості: $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$

Основні види рівнянь прямої на площині

Назва рівняння	Задано	Вид
1. Рівняння прямої, що проходить через дану точку, перпендикулярно до заданого вектора	Точка і вектор нормалі 	$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0$
2. Загальне рівняння прямої		$Ax+By+C=0$
3. Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом	Точка і кут нахилу прямої 	$y = kx + b,$ $k = \operatorname{tg} \varphi,$ $y-y_0 = k(x-x_0)$
4. Рівняння прямої, що проходить через дві задані точки	Дві точки 	$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1}$

5. Канонічне рівняння прямої	Точка і напрямний вектор 	$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m}$
6. Параметричне рівняння прямої		$\begin{cases} x = x_M + lt, \\ y = y_M + mt, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$
7. Рівняння прямої у відрізках на осях		$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$
8. Нормальне рівняння прямої	Напрямні косинуси вектора нормалі та відстань p від початку координат до прямої 	$x \cos \alpha + y \cos \beta - p = 0$

Основні види рівнянь площини в просторі

1	Рівняння площини, що проходить через дану точку перпендикулярно до даного вектора		$A(x - x_M) + B(y - y_M) + C(z - z_M) = 0$
2	Загальне рівняння площини		$Ax + By + Cz + D = 0$
3	Рівняння площини, що проходить через три задані точки		$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$
4	Рівняння площини у відрізках на осях		$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$
5	Нормальне рівняння площини		$\cos \alpha \cdot x + \cos \beta \cdot y + \cos \gamma \cdot z - p = 0$

ЗМІСТ

ЗАГАЛЬНІ ПОЛОЖЕННЯ	3
РОЗДІЛ 1. Елементи векторної алгебри	4
РОЗДІЛ 2. Пряма на площині.....	25
РОЗДІЛ 3. Пряма та площина в просторі	35
СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ	42
ДОДАТОК 1. Операції над векторами	43
ДОДАТОК 2. Основні види рівнянь прямої на площині	44
ДОДАТОК 3. Основні види рівнянь площини в просторі	46

Навчально-методичне видання

ЕЛЕМЕНТИ ВЕКТОРНОЇ АЛГЕБРИ ТА АНАЛІТИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ

Практичний посібник
для студентів, які навчаються за напрямом
підготовки 6.060101 „Будівництво”

Укладачі: **Максименко** Дмитро Володимирович
Мельничук Володимир Федорович
Соколова Людмила Віталіївна
Чорноіван Юрій Олексійович

Редагування та коректура *Г.Є. Голіциної*

Комп'ютерне верстання *С.В. Слободян*

Підписано до друку 2013. Формат 60 × 84 ¹/₁₆

Ум. друк. арк. 2,79. Обл.-вид. арк. 3,0.

Тираж 75 прим. Вид. № 106/III-12. Зам. №

КНУБА, Повітрофлотський проспект, 31, Київ, Україна, 03680

E-mail: red-isdat@knuba.edu.ua

Надруковано в редакційно-видавничому відділі

Київського національного університету будівництва і архітектури

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру суб'єктів

Видавничої справи ДК № 808 від 13.02.2002 р.