**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ**

КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ БУДІВНИЦТВА І АРХІТЕКТУРИ

**ВИЩА МАТЕМАТИКА**

**Модуль 2 (ЗМ 4). Диференціальні рівняння**

Методичні вказівки до виконання самостійних та індивідуальних робіт для здобувачів ОПП 1-го рівня вищої освіти (бакалавр) інженерних та природничих спеціальностей всіх форм навчання КНУБА

Київ 2024

УДК 512.64,514.12,517.2

ББК 22.143,22.151.54,22.161.1

 В55

 Укладачі: О.В. Доля, канд. фіз.-мат. наук, доцент

 Ю.В. Рябчун, докт. філософії, доцент

 Л.І. Турчанінова, к.т.н., доцент

Рецензент О.І. Баліна, к.т.н., доцент

Відповідальний за випуск О.О. Терентьєв, докт. техн. наук, професор, завідувач кафедри інформаційних технологій проектування та прикладної математики

*Затверджено на засіданні кафедри інформаційних технологій проектування та прикладної математики, протокол № 8 від 30 травня 2024 р.*

Видається в авторській редакції.

В55 **Вища математика**: Модуль 2 (ЗМ 4). Диференціальні рівняння: методичні вказівки до виконання самостійних та індивідуальних робіт / уклад.: О.В. Доля, Ю.В. Рябчун, Л.І. Турчанінова. – К.: КНУБА, 2024.– 32 с.

Методичні вказівки містять необхідні практичні відомості для виконання самостійних та індивідуальних завдань Модуля 2, що включають завдання з диференціальних рівнянь різних порядків і систем диференціальних рівнянь. Також приклади виконання типових варіантів змістового модуля 4 індивідуальної роботи та 30 варіантів для виконання самостійних робіт.

Призначені для здобувачів ОПП 1-го рівня вищої освіти (бакалавр) інженерних та природничих спеціальностей всіх форм навчання КНУБА

© КНУБА, 2024

**ЗМІСТ**

ЗАГАЛЬНІ ПОЛОЖЕННЯ .........................................................................…4

ВАРІАНТИ ЗАВДАНЬ ......................................................……………..........5

РОЗВ`ЯЗАННЯ ТИПОВОГО ВАРІАНТА ....................................................14

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ ............................................………………….........27

**ЗАГАЛЬНІ ПОЛОЖЕННЯ**

Запропоноване видання являє собою методичні рекомендації для вивчення дисципліни “Вища математика. Модуль 2. Диференціальні рівняння”.

Основою навчання є самостійна робота студента з підручником, навчальним посібником, конспектом лекцій та виконання індивідуальної роботи.

Метою викладання дисципліни “Вища математика” є засвоєння фундаментальних основ математики, зокрема, аналізу необхідних для подальшого вивчення та розуміння інших математичних дисциплін.

Методичні вказівки містять 30 варіантів для виконання самостійних і індивідуальних робіт з дисципліни “Вища математика. Модуль 2 (ЗМ 4)” здобувачами першого курсу інженерних та природничих спеціальностей всіх форм навчання КНУБА.

У даному виданні наведені розв`язки варіантів типових завдань з індивідуальної роботи змістового модуля 4. Рекомендуються для аудиторної та самостійної роботи студентів КНУБА.

**МОДУЛЬ 2**

**ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ**

1. Розв’язати диференціальні рівняння першого порядку (табл.1).
2. Визначити тип рівняння та знайти його загальний або частковий розв’язок (табл. 2).
3. Знайти загальний розвязок лінійного диференціального рівняння другого порядку (табл.3).
4. Розв’язати систему рівнянь (табл.4).

Таблиця 1

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Варіант | Рівняння | Варіант | Рівняння |
| 1 |  | 8 |  |
| 2 |  | 9 |  |
| 3 |  | 10 |  |
| 4 |  | 11 |  |
| 5 |  | 12 |  |
| 6 |  | 13 |  |
| 7 |  | 14 |  |
| 15 |  | 22 |  |
| 16 |  | 23 |  |
| 17 |  | 24 |  |
| 18 |  | 25 |  |
| 19 |  | 26 |  |
| 20 |  | 27 |  |
| 21 |  | 28 |  |
| 29 |  | 30 |  |

Таблиця 2

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Варі-ант | Рівняння | Варі-ант | Рівняння |
| *1* |  | *16* |  |
| *2* |  | *17* |  |
| *3* |  | *18* |  |
| *4* |  | *19* |  |
| *5* |  | *20* |  |
| *6* |  | *21* |  |
| *7* |  | *22* |  |
| *8* |  | *23* |  |
| *9* |  | *24* |  |
| *10* |  | *25* |  |
| *11* |  | *26* |  |
| *12* |  | *27* |  |
| *13* |  | *28* |  |
| *14* |  | *29* |  |
| *15* |  | *30* |  |

Таблиця 3

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Варі-ант | Рівняння | Варі-ант | Рівняння |
| *1* |  | *16* |  |
| *2* |  | *17* |  |
| *3* |  | *18* |  |
| *4* |  | *19* |  |
| *5* |  | *20* |  |
| *6* |  | *21* |  |
| *7* |  | *22* |  |
| *8* |  | *23* |  |
| *9* |  | *24* |  |
| *10* |  | *25* |  |
| *11* |  | *26* |  |
| *12* |  | *27* |  |
| *13* |  | *28* |  |
| *14* |  | *29* |  |
| *15* |  | *30* |  |

Таблиця 4

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Варі-ант | Рівняння |  | Варі-ант | Рівняння |
| *1* |  |  | *16* |  |
| *2* |  |  | *17* |  |
| *3* |  |  | *18* |  |
| *4* |  |  | *19* |  |
| *5* |  |  | *20* |  |
| *6* |  |  | *21* |  |
| *7* |  |  | *22* |  |
| *8* |  |  | *23* |  |
| *9* |  |  | *24* |  |
| *10* |  |  | *25* |  |
| *11* |  |  | *26* |  |
| *12* |  |  | *27* |  |
| *13* |  |  | *28* |  |
| *14* |  |  | *29* |  |
| *15* |  |  | *30* |  |

***Розв`язання типового варіанту***

1. Визначити загальний розв’язок, або загальний інтеграл диференціальних рівнянь І порядку.

2. Розв'язати задачу Коші для диференціальних рівнянь вищих порядків, які допускають зниження порядку.

3. Знайти загальний розв'язок лінійних диференціальних рівнянь вищих порядків.

4. Методом виключення знайти загальний розв'язок системи лінійних диференціальних рівнянь першого порядку зі сталими коефіцієнтами .

*Приклад 1.* Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

(1.1)

*Розв'язання.*

Диференціальне рівняння (1.1) можна привести до вигляду , а саме

.

Значить це диференціальне рівняння з розподіленими змінними. Ділимо змінні за правилом пропорції:

 (1.2)

 Інтегруємо обидві частини диференціального рівняння (1.2)

звідки

,

де стала інтегрування. Для зручності потенціювання запишемо . Тоді

 (1.3)

При розподіленні змінних в таких диференціальних рівняннях можлива втрата розв'язків. У нашому випадку ми фактично припускали, що i . Безпосередньою підстановкою ми переконуємось, що *у=0* і *у=1* є розв'язками рівняння (1.1). Розв'язок *у=1* може бути отримано з множини розв'язків (1.3) при *с=0.* Але розв'язок *у=0* не входить у множину розв'язків (1.3), так як рівність не виконується ні при яких значеннях c. Тому розв'язками рівняння (1.1) є функції

.

*Приклад 2.* Проінтегрувати диференціальне рівняння

 (1.4)

*Розв'язання.* Диференціальне рівняння (1.4) може бути зведеним до вигляду: ,

а саме

 (1.5)

і тому можемо вважати, що (1.4) є однорідне диференціальне рівняння. Тому робимо заміну

, (1.6)

де – невідома функція від x. Надалі для спрощення записів не будемо вказувати аргумент х, а просто писати .

Тоді

, (1.7)

Підставляємо похідну (1.7) і заміну (1.6) в рівняння (1.5):

,

aбо .

Розподіляємо змінні

.

Тепер можемо інтегрувати:

 (1.8)

Знайдемо інтеграл в лівій частині (1.8):

.

Підставляємо знайдений інтеграл в (1.8):

.

Для зручності потенціювання сталу інтегрування задаємо у вигляді *lnc.* Тоді

 і

 (1.9)

З (1.5) , тоді (1.9) приймає вигляд

або .

Це і буде загальний інтеграл диференціального рівняння (1.4).

*Приклад 3.* Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

 (1.10)

*Розв'язання.* Диференціальне рівняння (1.10) має вигляд лінійного рівняння першого порядку

,

де i – задані функції, а саме в нашому випадку

, .

Тому зробимо заміну

(1.11)

де i – дві невідомі функції від х. Надалі для спрощення записів не будемо вказувати аргумент.

З (1.11) маємо

.

Підставимо *у* і в диференціальне рівняння (1.10):

.

Згрупуємо члени з *v*:

. (1.12)

Підберемо функцію таким чином, щоб співмножник у дужках обертався в нуль, тобто Це рівняння з розподіленими змінними. Його розв'язок .

Оберемо один з розв'язків, наприклад , тоді рівняння (1.12) приймає вигляд , розділяємо змінні і інтегруємо

Тоді загальний розв'язок диференціального рівняння (1.10) отримуємо у вигляді

.

*Приклад 4.* Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

. (1.13)

*Розв'язання.*

Щоб з'ясувати тип диференціального рівняння зробимо деякі перетворення. Поділимо обидві частини диференціального рівняння (1.13) на х:

.

 Далі . (1.14)

Тепер легко побачити, що рівняння (1.14) представляє собою рівняння Бернуллі

, (1.15)

де і

За таких обмежень на *n* рівняння (1.13) вже не є лінійним.

Існує метод зведення рівняння Бернуллі (1.15) до лінійного рівняння. Суть цього метода:

- обидві частини рівняння (1.15) домножити на

 (1.16)

- виконати підстановку

, (1.17)

де - невідома функція від *x* (далі аргумент у функції не будемо вказувати);

- продиференцюємо обидві частини рівності (1.17):

або (1.18)

- підставити (1.18) і (1.17) в рівняння (1.16), яке стане лінійним відносно функції і інтегрується методом, який ми розглянули в прикладі 3;

- повернутися до шуканої функції за допомогою (1.17).

Повертаємось наразі до рівняння (1.14) і за описаною методикою зведемо це рівняння до лінійного. Обидві частини диференційного рівняння (1.14) помножимо на :

 (1.19)

Зробимо у цьому рівнянні підстановку

. (1.20)

Продиференціюємо цю рівність ліворуч і праворуч та отримаємо

або

 (1.21)

Підставляємо (1.20) і (1.21) в рівняння (1.19)

=

або

 (1.22)

Отримали рівняння (1.22), що є лінійним відносно функції z. Розв'язуємо його методом, що був розглянутий у прикладі 3. Загальний розв'язок диференціального рівняння (1.22) має вигляд

.

Для повернення до шуканої функції *y* скористаємось (1.20). Тоді

або

*Приклад 5.* Розв'язати задачу Коші для диференціального рівняння

 (1.23)

*Pозв'язання.*

Диференціальне рівняння (1.23) відноситься до типу

і його записано у вигляді

 (1.24)

Для отримання загального розв'язку диференціального рівняння (1.24) потрібно n разів проінтегрувати функцію *f(x)*, враховуючи кожного разу сталу інтегрування.

Коли треба розв'язати задачу Коші для диференціального рівняння порядка n, то треба знайти таке рівняння диференціального рівняння, щоб воно та його похідні до порядку (n – 1) включно для заданого значення аргумента приймали б задані значення:

,

де – задані числа, які називають *початковими умовами*.

Особливістю задачі Коші являється таке: шукана функція і її похідні задаються для одного і того ж значення незалежної змінної х

Повернемося до заданого диференціального рівняння (1.23) і проінтегруємо його в перший раз:

.

Знайдемо інтеграл:

або (1.25\*)

Проінтегруємо вдруге:

(1.25)

 Для знаходження сталих і використовуємо початкові умови із (1.23) і знайдений розв'язок (1.25):

Tепер продиференцюємо (1.25) (або з (1.25\*))

Таким чином, розв'язок задачі Коші має вигляд:

.

*Приклад 6.* Розв'язати задачу Коші для диференціального рівняння:

 (1.26)

*Pозв'язання.*

Задане рівняння відноситься до типу

 Його порядок можна зменшити на одиницю завдяки заміні

 (1.27)

дe - нова невідома функція (надалі аргумент x не вказуємо).

Pобимо в диференціальному рівнянні (1.26) заміну (1.27) і отримаємо однорідне диференціальне рівняння відносно нової невідомої функції z:

або . (1.28)

Pозв'язування однорідного рівняння ми бачили в прикладі 2. Робимо в однорідному диференціальному рівнянні (1.28) заміну

 (1.29)

і диференціюємо

 (1.30)

Підставляємо (1.29) і (1.30) в рівняння (1.28):

Розділяємо змінні:

і інтегруємо:

Потенцюємо:

і знаходимо функцію *u*:

З (1.29) маємо

Значить невідома функція *z* в (1.27) знайдена і повертаємося до функції *y*:

Тоді

Iнтеграл знаходимо, використовуючи інтегрування в частинах. Таким чином функція *y* приймає вигляд:

 (1.31)

Для знаходження i скористаємося початковими умовами *і* (1.31):

З другої умови:

=0

Підставляємо у першу умову:

Таким чином, розв'язок задачі Коші з (1.31) має вигляд:

*Приклад 7.* Проінтегрувати диференціальне рівняння

*Розв'язування.*

B загальному випадку це рівняння має вигляд

Зниження його порядку на одиницю досягається завдяки підстановки

 (1.32)

дe - нова невідома функція від *y*, а не від *х*. Tому

 (1.33)

Заміна (1.32) і (1.33) зводить задане рівняння до вигляду

Скорочуємо на P і тим самим губимо розв'язки рівняння *y=c,* xоча вони задовільняють рівняння:

.

 Це рівняння з розподіленими змінними. Тому

.

 Iнтегруємо ліворуч і праворуч:

.

Для обчислення інтеграла скористаємося методом невизначених коефіцієнтів інтегрування дробово-раціональних функцій (обчислення опускаємо):

*.*

Використовуючи (1.32), отримуємо:

або ,

звідки

Проінтегруємо ліворуч і праворуч:

або

це буде загальний інтеграл заданого диференціального рівняння.

*Приклад 8.* Визначити загальний розв'язок диференціального рівняння

 (1.33)

*Розв'язання.* Диференціальне рівняння (1.33) відноситься до лінійних однорідних диференціальних рівнянь вищих порядків зі сталими коефіцієнтами. Їх загальний вигляд

 (1.34)

Розв'язок диференціального рівняння (1.34) шукають у вигляді

де *k* знаходиться характеристичного рівняння, якe є алгебраїчним рівнянням порядку *n*:

 (1.35)

Для диференціального рівняння (1.33) характеристичне рівняння (1.35) має вигляд:

Це квадратне рівняння в якості двох коренів має комплексну спряжену пару

Згідно теорії, фундаментальна система розв'язків диференціального рівняння (1.33) буде складатися з двох часткових лінійно-незалежних розв'язків

і

Tоді загальний розв'язок диференціального рівняння (1.33) приймає вигляд: +.

*Приклад 9.* Визначити загальний розв'язок диференціального рівняння

 (1.36)

*Pозв'язання.*

Диференціальне рівняння (1.36) є неоднорідним лінійним диференціальним рівнянням вищих порядків зі сталими коефіцієнтами:

 (1.37)

Його загальний розв'язок представляє собою суму загального розв'язку відповідного йому однорідного диференціального рівняння (1.34) і будь-якого часткового його розв'язку :

 (1.38)

Де фундаментальна система розв'язків відповідного однорідного диференціального рівняння (1.34).

Для неоднорідного диференціального рівняння (1.36) права частина має спеціальний вигляд

.

де *Р(х) і Q(x)* - многочлени одної або різних степенів, степені многочленів *Р(х) і Q(x)* однакові – перші, а

Загальний розв'язок однорідного рівняння (аналогічно прикладу 8) буде мати вигляд:

Частковий розв'язок можна знайти методом *невизначених коефіцієнтів*. Будемо його шукати у вигляді

де многочлени A і B – з невизначеними коефіцієнтами (вони мають нульовий степінь, як і права частина рівняння). Знайдемо похідні:

.

Підставимо в рівняння (1.36) і приведемо подібні:

=sinx

Тепер прирівняємо коефіцієнти при cosx і sinx праворуч і ліворуч:

З цієї системи: .

Тому загальний розв'язок (1.38) приймає вигляд

.

*Приклад 11.* Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

 (1.39)

*Розв'язання.*

Знаходимо (аналогічно прикладу 8) загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння

 (1.40)

Якщо загальний розв'язок однорідного рівняння знайдено, то загальний розв'язок (1.39) можна знайти за допомогою квадратур методом варіації довільних сталих в (1.40), який запропонував Лагранж. Будемо шукати *y* в вигляді:

.

Для визначення функцій і маємо систему:

Звідки +

 +

і загальний розв'язок диференціального рівняння (1.39) буде мати вигляд

.

*Приклад 12.* Знайти розв'язок системи лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами

 (1.41)

*Розв'язання.*

Це нормальна система диференціальних рівнянь першого порядку, яка розв'язується методом зведення системи до однорідного диференціального рівняння вищого порядку. З першого рівняння системи (1.41) виражаємо *у*:

 (1.42)

і диференціюємо цей вираз:

 (1.43)

Підставляємо отриману похідну (1.43) і вираз для *y* (1.42) в друге рівняння системи (1.41):

або

=0 (1.44)

Ми отримали лінійне однорідне рівняння другого порядку. Його характеристичне рівняння має в якості коренів комплексну спряжену пару Тоді загальний розв'язок диференціального рівняння (1.44) дає нам невідому функцію *х:*

 (1.45)

Продиференцюємо функцію (1.45):

 (1.46)

Підставляємо тепер *x* з (1.45) і з (1.46) у вираз для невідомої функції *у* (1.43):

.

***СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ***

1. Дубовик В.П. Вища математика: навч. посіб. / В.П. Дубовик, І.І. Юрик. - К.: А.С.К., 2020. - 647 с.
2. Дубовик В.П., Юрик І.І. та ін. Вища математика: Збірник задач: навч. посіб. / В.П. Дубовик та ін. - К.: “Ігнатекс-Україна”, 2018. - 480 с.
3. Турчанінова Л.І., Доля О.В. Вища математика в прикладах і задачах: навч. посіб. / Л.І. Турчанінова, О.В. Доля. - К.: “Ліра-К”, 2021. - 348 с.
4. Турчанінова Л.І., Доля О.В. Практикум з вищої математики: навч. посіб., видання друге, доп. і перер. / Л.І. Турчанінова, О.В. Доля. - К.: Кондор, 2010. – 246 с.
5. Федоренко Н.Д., Білощицька С.В., Доля О.В. Вища математика: методичні вказівки до виконання інд. завдань. / Н.Д. Федоренко, С.В. Білощицька, О.В. Доля. – К.: КНУБА, 2018. -94 с. – ел.док.
6. Доля О.В., Забарило О.В., Коротких Ю.А., Рябчун Ю.В. Вища математика: Модуль 1 (ЗМ 1, ЗМ 2). Лінійна алгебра та векторний аналіз. Диференціальне числення функції однієї та багатьох змінних: методичні вказівки до виконання самостійних та індивідуальних робіт. К.: КНУБА, 2023. 94 с.

Навчально-методичне видання

**ВИЩА МАТЕМАТИКА**

**Модуль 2 (ЗМ 4). Диференціальні рівняння**

Методичні вказівки до виконання самостійних та індивідуальних робіт для здобувачів ОПП 1-го рівня вищої освіти (бакалавр) інженерних та природничих спеціальностей всіх форм навчання КНУБА

Укладачі: **ДОЛЯ** Олена Вікторівна

**РЯБЧУН** Юлія Володимирівна

**ТУРЧАНІНОВА** Людмила Іванівна

Випусковий редактор

Комп`ютерне верстання

Підписано до друку 2024. Формат 60х841/16.

Ум. друк. арк. . Обл.-вид. арк.

Електронний документ. Вид. №

Видавець і виготовлювач

Київський національний університет будівництва і архітектури

Повітряних сил пр-т, 31, Київ, Україна, 03037

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру суб’єктів

видавничої справи ДК № 808 від 13.02.2002 р.

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ**

КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ БУДІВНИЦТВА І АРХІТЕКТУРИ

**ВИЩА МАТЕМАТИКА**

**Модуль 2 (ЗМ 4). Диференціальні рівняння**

Методичні вказівки до виконання самостійних та індивідуальних робіт для здобувачів ОПП 1-го рівня вищої освіти (бакалавр) інженерних та природничих спеціальностей всіх форм навчання КНУБА

Всі цитати, цифровий

та фактичний матеріал,

бібліографічні відомості

перевірені. Написання

одиниць вимірювання

відповідає стандартам

Підпис (и) автора (ів) \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

«\_\_\_\_» \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_2024 р.

Підпис голови методичної комісії факультету

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

«\_\_\_\_» \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_2024 р.

Київ 2024