МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ БУДІВНИЦТВА І АРХІТЕКТУРИ

ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ В ІНФОРМАТИЦІ

Методичні вказівки
до виконання практичних робіт
для студентів спеціальностей
123 «Комп'ютерна інженерія» та
125 «Кібербезпека»

Київ 2022

УДК 004.421
Ч66

Укладач В.В. Клюєва, старший викладач

Рецензент Є.Є. Шабала, канд. техн. наук, доцент

Відповідальний за випуск Ю.І. Хлапонін, д-р техн. наук, професор

Затверджено на засіданні кафедри кібербезпеки та комп'ютерної інженерії, протокол №2 від 22 вересня 2022 року.

В авторській редакції.

Чисельні методи в інформатиці: методичні вказівки до виконання
Ч66 практичних робіт / уклад. В.В. Клюєва. – Київ.: КНУБА, 2022. – 28 с.

Розглянуто чисельні методи, що найчастіше використовуються в інженерній практиці. Наведено варіанти завдань до практичних робіт із дисципліни «Чисельні методи в інформатиці».

Призначено для студентів спеціальностей 123 «Комп'ютерна інженерія» та 125 «Кібербезпека»

ЗАГАЛЬНІ ПОЛОЖЕННЯ

Метою практичних робіт є засвоєння студентами інструментальних засобів розв'язування задач інженерного характеру за допомогою чисельних методів з використанням комп'ютерної техніки.

Кожен студент отримує індивідуальне завдання до виконання практичної роботи згідно з номером варіанта, складає схему алгоритму та програму мовою програмування C++, виконує програму на комп'ютері з обов'язковим отриманням правильних результатів, здійснює перевірку у пошуковій системі Wolfram|Alpha або будь-якому математичному пакеті, оформлює звіт і захищає роботу перед викладачем.

Звіт з практичної роботи повинен містити:

- постановку задачі, вихідні дані та метод розв'язання;
- схему алгоритму;
- програму, написану мовою програмування C++;
- результати розв'язку та їх перевірку;
- висновок.

Звіт оформлюється на аркушах паперу формату А4.

Практична робота №1

Чисельне інтегрування за формулами прямокутників та трапецій

Геометрично величина визначеного інтеграла $\int_a^b f(x)dx$ являє собою площу криволінійної трапеції (рис. 1), обмеженої графіком заданої функції $f(x)$, віссю абсцис та прямими $x = a$ і $x = b$.

Якщо інтервал інтегрування $[a, b]$, розбити на n рівних відрізків довжиною $h = (b - a)/n$ і на кожному відрізку у криволінійну трапецію вписати прямокутник (на рис. 2 зображені середні прямокутники) або трапецію (рис. 3), то площу криволінійної трапеції можна приблизно прийняти рівною сумі площ елементарних прямокутників або трапецій. При цьому ліві прямокутники на кожному з відрізків $[x_{k-1}, x_k]$ матимуть висоту $f(x_{k-1})$, праві – $f(x_k)$, середні – $f(x_{k-1} + h/2)$.

Таким чином, формули для наближеного обчислення інтеграла будуть мати вигляд:

$\int_a^b f(x)dx \approx h \sum_{i=1}^{n} f(a + ih)$ – формула правих прямокутників;

$\int_a^b f(x)dx \approx h \sum_{i=1}^{n} f(a + (i-1)h)$ – формула лівих прямокутників;

$\int_a^b f(x)dx \approx h \sum_{i=1}^{n} f(a + h/2 + (i-1)h)$ – формула середніх прямокутників;

$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2}\left[f(a) + f(b) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(a + ih) \right]$ – формула трапецій,

де $h = \frac{b-a}{n}$.

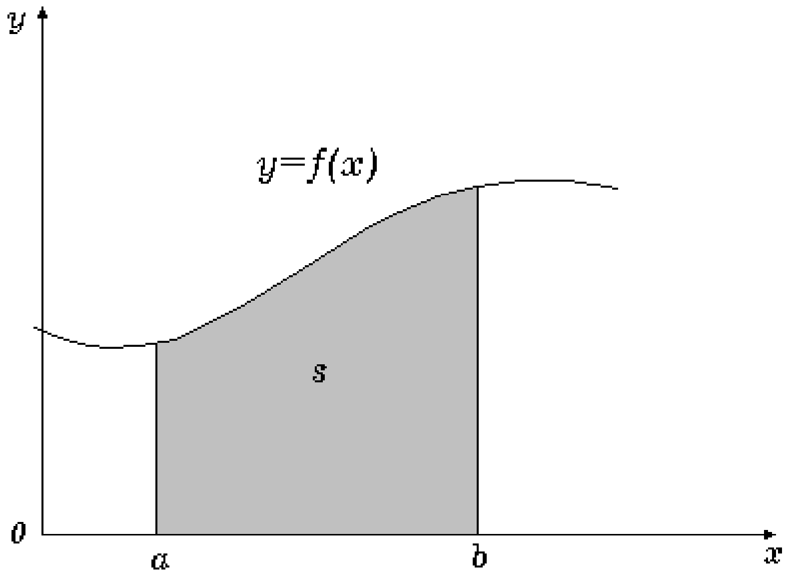

Рис. 1

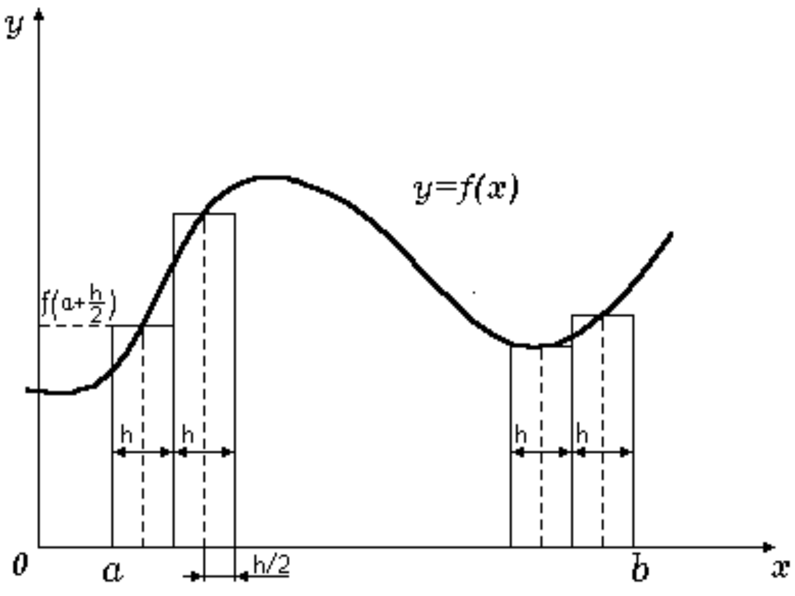

Рис. 2

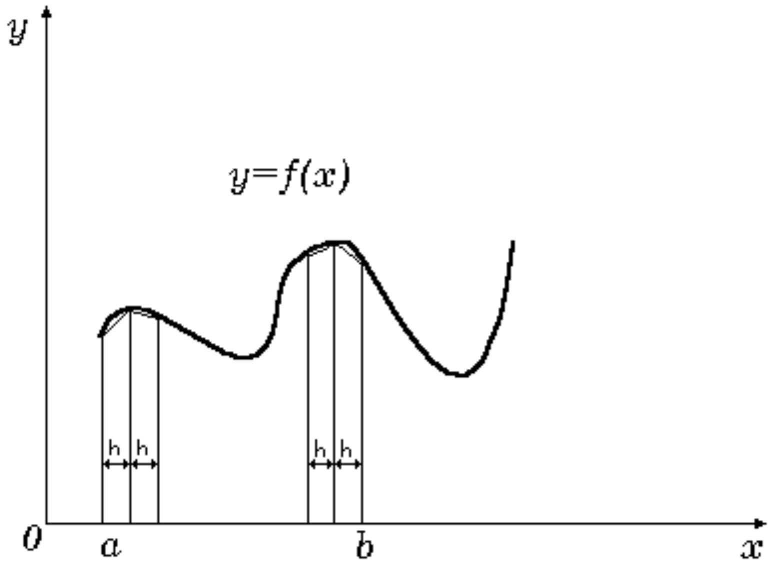

Рис. 3

Приклад алгоритму для обчислення значення визначеного інтеграла за формулою лівих прямокутників показано на рис. 4.

Зміст завдання: скласти схему алгоритму та програму обчислення значення визначеного інтеграла згідно з номером варіанта (табл. 1). Здійснити перевірку отриманого результату.

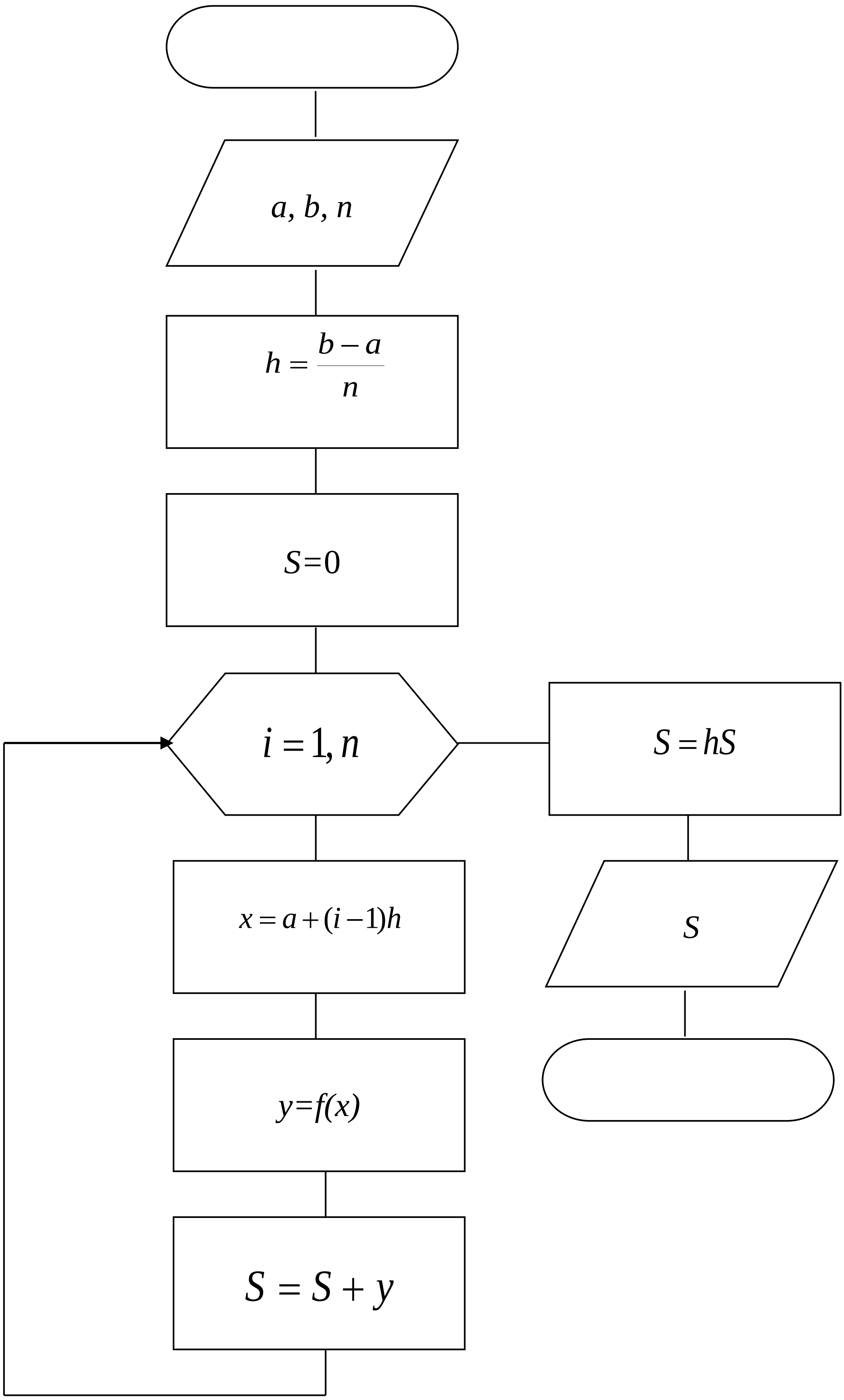

Рис. 4. Схема алгоритму обчислення визначеного інтеграла за формулою лівих прямокутників

Таблиця 1

Варіанти завдань

№ пор.	Підінтегральна функція	Проміжок інтегрування		Кількість відрізків розбиття, n	Формула для обчислення
		a	b		
1	2	3	4	5	6
1	$(1+e^{-x})/(2+\sin x)$	0	1	60	лівих прямокутників
2	$xtg^2(5-xe^{-x^2})$	0,5	1	20	середніх прямокутників
3	$5\sin^3 arctgx$	0,5	1,5	70	правих прямокутників
4	$((x^2-5)/\sqrt[3]{x^2+1})e^{-x}$	1	4	30	трапецій
5	$e^{\pi x}\sqrt{\sin x+3}$	8	22,5	100	лівих прямокутників
6	$1/(x+\sin(2x+\sqrt{x^2+1}))$	1	1,4	40	середніх прямокутників
7	$6\cos\sqrt{\lvert\cos x\rvert}$	7	12	110	правих прямокутників
8	$tg(x+x^4)/(x^4+3x^3)$	1	1,34	30	трапецій
9	$\sqrt{\lvert\sin\lvert 4\sin x\rvert\rvert}$	12	55	80	лівих прямокутників
10	$\sqrt[4]{\lvert x^2+7{,}5x-8\rvert}$	1	2	30	середніх прямокутників
11	$e^x\left(e^{-x}+0{,}2\sin e^{-x}\right)$	79	80	20	правих прямокутників
12	$x^2+\ln(x+1)e^{-x\sqrt{x}}$	0,3	2,5	30	трапецій
13	$\cos\left(5{,}2+6{,}3\sqrt{x^2+x-1}\right)$	1	5	60	лівих прямокутників
14	$(e^{-x}+xe^{-2x}+2)\sin 3x$	1,5	2,5	30	середніх прямокутників
15	$\sin^3(\cos x)+\sin(x\cos x)$	2,7	2,85	50	правих прямокутників

Продовження табл.1

1	2	3	4	5	6
16	$\sin(x/\sqrt{1+\lg(x+5)})$	1	3,5	30	трапецій
17	$e^{\cos x}+5{,}47\arccos(0{,}01x)$	19,3	44,5	30	лівих прямокутників
18	$1/\sqrt[3]{8x^3+2x\sin x}$	1	2	40	середніх прямокутників
19	$\sin x+\sqrt{x^2+\cos(55{,}3x)}$	-8,5	-6	100	правих прямокутників
20	$x^2e^{-2x}\sin^3(x\sqrt{x})$	1	2	40	трапецій
21	$e^x(4\sin x+10)$	2	4	120	лівих прямокутників
22	$\sin(x+\ln(x/(x^3+5)))^2$	1	1,5	50	середніх прямокутників
23	$\sqrt{2x+3e^x}$	1	10	80	правих прямокутників
24	$\sin 3x+2\cos(x^5+2x)$	1	2	40	трапецій
25	$4\cos\sqrt{e^x+1}$	3	19	90	лівих прямокутників
25	$4\cos\sqrt{e^x+1}$	3	19	90	лівих прямокутників
26	$xe^{-5x}(1+\ln\sqrt{x+8})$	1	3	40	середніх прямокутників
27	$x(x\cos 5x-6{,}1)$	11	177	90	правих прямокутників
28	$(x+0{,}5x^2)^3e^{-3x}$	0,1	1	20	трапецій
29	$\sqrt{1+2x}/\sqrt{\ln x+17{,}2}$	40	77	60	лівих прямокутників
30	$\lg(x^2+2{,}5x+7\sqrt{x})$	1	2	20	середніх прямокутників
31	$2\cos\sqrt{\lvert tg3\rvert+0{,}1\sin^2 x}$	95	117	70	правих прямокутників
32	$\sqrt{1+x^2+4x^3}e^{-2x}$	1	2	40	трапецій

Практична робота №2

Чисельне інтегрування за методом Сімпсона (парабол)

Для наближеного обчислення інтеграла за методом Сімпсона крива підінтегральної функції замінюється кусково-неперервною лінією, яка складається з відрізків квадратичних парабол, проведених через кінці кожних трьох сусідніх ординат значень функції $f(x_0), f(x_1), f(x_2);\ \ f(x_2), f(x_3), f(x_4);\ \ \ldots\ \ f(x_{n-2}), f(x_{n-1}), f(x_n)$. При цьому весь проміжок інтегрування розбивають на парне число з $n=2m$ відрізків $[x_i - h, x_i + h]$ (рис. 5).

Таким чином, площу криволінійної трапеції наближено замінюємо на суму площин під параболами.

Формула для наближеного обчислення інтеграла за методом Сімпсона має вигляд:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}\left(f(x_0) + f(x_{2m}) + 4\sum_{i=1}^{m} f(a+(2i-1)h) + 2\sum_{i=1}^{m-1} f(a+2ih) \right),$$

$$\text{де } h = \frac{b-a}{n};\ m = \frac{n}{2};\ f(x_0) = f(a);\ f(x_{2m}) = f(b).$$

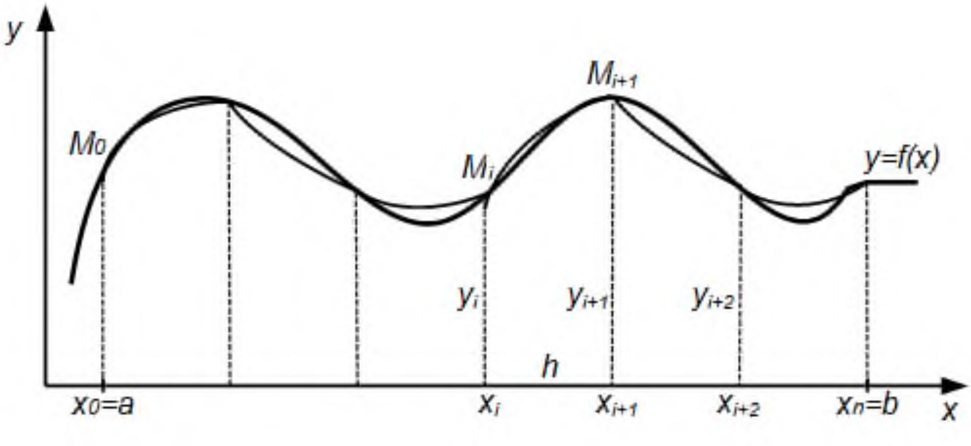

Рис. 5. Графічна інтерпретація методу Сімпсона

Зміст завдання: скласти схему алгоритму та програму обчислення значення визначеного інтеграла методом Сімпсона. Вигляд підінтегральної функції, проміжок інтегрування та кількість відрізків розбиття беруться з табл. 1. Здійснити перевірку отриманого результату.

Практична робота №3

Визначення кореня алгебраїчного рівняння методом половинного ділення (дихотомії)

Зміст завдання: скласти схему алгоритму та програму числового розв'язування алгебраїчного рівняння методом половинного ділення (дихотомії), здійснити перевірку отриманих результатів.

Постановка задачі

Дано: $f(x) = 0$ – рівняння;

$[a, b]$ – інтервал, на якому повинен бути визначений корінь рівняння;

$\varepsilon = 0{,}1 \cdot 10^{-3}$ – точність розв'язку задачі.

Знайти x, при якому $|f(x)| \le \varepsilon$.

Геометрична інтерпретація методу показана на рис. 6.

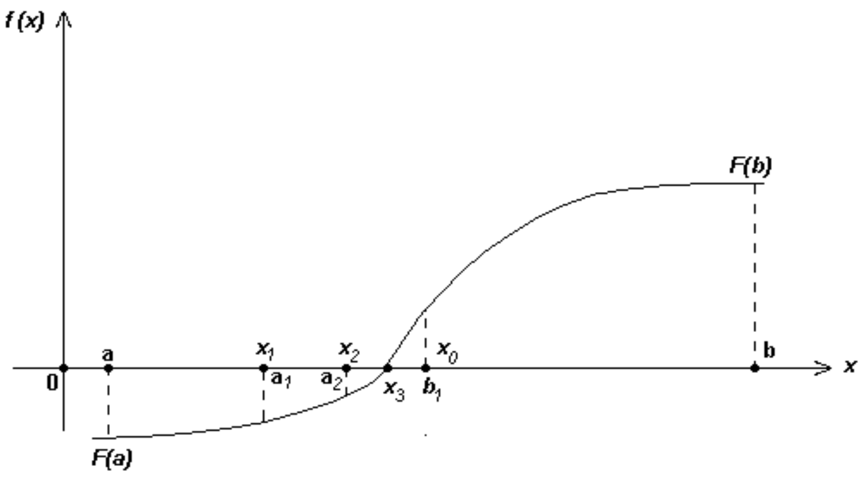

Рис. 6

Варіанти завдань наведені у табл. 2.

На початку програми необхідно перевірити, чи існує на заданому інтервалі корінь. Для цього треба обчислити значення функції на кінцях інтервалу. Якщо ці значення мають різні знаки, корінь існує і його визначення треба здійснювати за наведеним нижче алгоритмом. У протилежному випадку необхідно вивести повідомлення про те, що кореня на заданому інтервалі нема.

Алгоритм методу дихотомії складається з таких дій:

1. Визначити середню точку заданого інтервалу $x = \frac{a+b}{2}$.

2. Якщо $f(x)$ і $f(a)$ мають різні знаки, то значення кореня лежить на відрізку $[a, x]$, в іншому випадку – на відрізку $[b, x]$. Звуження діапазону пошуку, тобто використання значення x як правої або лівої межі інтервалу знаходження кореня ($b = x$ або $a = x$).

3. Якщо значення функції $f(x)$ за абсолютною величиною менше заданої точності ε, то x можна вважати коренем рівняння. Перейти до пункту 4. В іншому випадку перейти до пункту 1.

4. Вивести значення функції та її аргументу. Завершення алгоритму.

Вказівка. Для організації циклу бажано використати конструкцію **Do…While**. Доповніть алгоритм підрахунком кількості кроків виконання циклу.

Таблиця 2

Варіанти завдань

№ пор.	Рівняння	Інтервал	
		a	*b*
1	2	3	4
1	$0{,}1x^2 - x\ln x = 0$	1	2
2	$x^3 - 1{,}473x^2 - 5{,}738x + 6{,}763 = 0$	-3	0
3	$x^2 - x - 5 = 0$	2	4
4	$x^3 - 0{,}39x^2 - 10{,}5x + 11 = 0$	-5	-2
5	$4x^3 - 12{,}3x^2 - x + 16{,}2 = 0$	-2	0
6	$x^4 - 26x^3 + 131x^2 - 226x + 110 = 0$	-1	1
7	$x^3 - 2x^2 - 3x + 9 = 0$	-3	1
8	$x^5 + 8x^4 + 17x^3 - 8x^2 - 14x + 20 = 0$	-2	1
9	$2\cos x - 4{,}5x + 0{,}76 = 0$	0	1
10	$2\sin x + 6{,}53x - 6{,}7 = 0$	0	1
11	$3{,}5e^x - 8{,}65x - 2{,}43 = 0$	1	3
12	$2{,}5\sqrt{\lvert 6x+1 \rvert} + 4x - 3{,}6 = 0$	-2	2
13	$0{,}35 \cdot 10^{x+1{,}6} - 104{,}7x - 183 = 0$	1	2
14	$tg(x + 1{,}6) + 0{,}5x + 0{,}02 = 0$	1	1,54
15	$6x^7 + 1{,}54x^3 + 6{,}56 = 0$	-2	0

16	$0{,}18e^{x+3{,}6}-5{,}7(x+1)-8{,}3=0$	0	3
17	$x^4+2{,}4x^3-2{,}85x+0{,}13=0$	0,5	2
18	$(x^{x^2}+6x+2)/(x\cdot 10^5)-1{,}5x-12{,}3=0$	3	5

Продовження табл. 2

1	2	3	4
19	$2x^5-7{,}6x^3+4{,}3x-3{,}4=0$	1	3
20	$35{,}4e^{x-1}+3x-4{,}72=0$	-1	1
21	$5x^2-6x-8=0$	-1	1
22	$x^3-13{,}5x^2+27=0$	-1	2
23	$3\sin x+4{,}5x-19{,}6=0$	0	6
24	$\cos x^3-5x+10{,}15=0$	0	3
25	$\sin 5x-6{,}5x+9{,}88=0$	-1	2
26	$3{,}5x^3-\ln\lvert x\rvert+13{,}3=0$	-3	2
27	$x^3-5x+2=0$	0	3
28	$0{,}5x^3-12x^2+44=0$	0	3
29	$16{,}5x^3-\sin x+131=0$	-4	2
30	$\cos x-3\sin x+1{,}325=0$	-1	3
31	$7{,}5x^2-\ln\lvert x-5\rvert-12{,}22=0$	-1	2
32	$0{,}1x^4-0{,}2x^3-0{,}78=0$	0	3

Практична робота №4

Визначення мінімуму функції методом "золотого перетину"

Якщо відрізок поділити на дві частини так, що відношення цілого до більшої частини буде дорівнювати відношенню більшої частини до меншої, ми отр имаємо так зване "золоте відношення". Числа, які відповідають розв'язку цієї задачі, дорівнюють 1,618 та 0,618 і отримали назву "золотих", оскільки дуже часто зустрічаються як у живій, так і у неживій природі. Широко застосовуються вони і у математиці. Прикладом може бути метод визначення мінімуму функції на заданому інтервалі.

Алгоритм методу "золотого перетину" складається з таких дій:

1. Поділити інтервал (a, b) у відношенні "золотого перетину" і визначити довжину його меншої частини Δ за формулою:

$$\Delta = (1-0{,}618)\cdot(b-a).$$

2. Визначити точки x_1 та x_2, звузивши інтервал (a, b) на величину Δ з обох кінців:

$$x_1 = a+\Delta,$$
$$x_2 = b-\Delta.$$

3. Порівняти значення функції у точках x_1 та x_2. Якщо $f(x_1)<f(x_2)$, для подальшого розгляду слід вибирати інтервал

(a, x_2), у протилежному випадку – (x_1, b). Для цього у першому випадку слід перемістити точку b у точку x_2, у другому – точку a у точку x_1.

4. Перевірка. Якщо довжина відрізка між точками x_1 та x_2 менша за абсолютною величиною заданої точності, перейти до пункту 5, інакше – до пункту 1.

5. Вважати точкою мінімуму точку x_1, вивести її значення та значення функції у цій точці. На цьому пошук завершується.

Завдання 1. Визначити мінімум функції методом "золотого перетину" .

Завдання 2. Використати метод "золотого перетину" для знаходження кореня рівняння. Для цього слід обчислювати функцію за її абсолютною величиною. Тоді точка мінімуму буде відповідати точці знаходження кореня. Доповнити алгоритм підрахунком кількості кроків виконання циклу, порівняти з кількістю кроків у методі половинного ділення і зробити висновок.

Вигляд функції, інтервал та точність розрахунку беруться такими ж, як і для методу половинного ділення (табл. 2).

Практична робота №5

Розв'язування системи лінійних рівнянь методом Гаусса

В інженерних розрахунках часто буває необхідно розв'язувати системи лінійних рівнянь. Системи лінійних рівнянь з n невідомими

$$
\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + ... + a_{1n}x_n = b_1;\\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + ... + a_{2n}x_n = b_2;\\
&a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + ... + a_{3n}x_n = b_3;\\
&...\\
&a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + ... + a_{nn}x_n = b_n
\end{aligned}
$$

можна розв'язувати як точними, так і наближеними методами. Точні методи дають точний розв'язок за скінченну кількість операцій. Найчастіше при розрахунках на комп'ютері використовують метод, заснований на виключенні невідомих (метод Гаусса), який дозволяє побудувати економічний алгоритм, оскільки елементи матриць перетворюються за дуже простими формулами.

Алгоритм пошуку розв'язку системи лінійних алгебраїчних рівнянь методом Гаусса складається з таких етапів:

1. Коефіцієнти a_{kj} і вільні члени b_k системи розміщуються у пам'яті комп'ютера у формі масиву – прямокутної матриці вигляду

$$
A = \left\|\begin{matrix}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & ... & a_{1n} & a_{1,\, n+1}\\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & ... & a_{2n} & a_{2,\, n+1}\\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & ... & a_{3n} & a_{3,\, n+1}\\
\multicolumn{6}{l}{.......................................}\\
a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & ... & a_{nn} & a_{n,n+1}
\end{matrix}\right\|,
$$

де $a_{1,\, n+1}=b_1$; $a_{2,\, n+1}=b_2$; ...; $a_{n,\, n+1}=b_n$.

2. Перший рядок матриці ділиться на a_{11}, після цього множиться на a_{k1} $(k=2, 3, ..., n)$ і віднімається від k-го рядка (послідовно від 2, 3, ..., n-го рядків); елементи першого стовпця матриці від a_{21} і до a_{n1} приймають нульові значення:

$$
A^{(1)} = \left\|\begin{matrix}
1 & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & ... & a_{1n}^{(1)} & a_{1,n+1}^{(1)}\\
0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & ... & a_{2n}^{(1)} & a_{2,\, n+1}^{(1)}\\
0 & a_{32}^{(1)} & a_{33}^{(1)} & ... & a_{3n}^{(1)} & a_{3,\, n+1}^{(1)}\\
\multicolumn{6}{l}{.......................................}
\end{matrix}\right\|,
$$

$$0 \quad a_{n2}^{(1)} \quad a_{n3}^{(1)} \quad \dots \quad a_{nn}^{(1)} \quad a_{n,\,n+1}^{(1)}$$

де позначення $A^{(1)}$ прийнято для перетвореної матриці.

3. Другий рядок матриці ділиться на $a_{22}^{(1)}$, потім множиться на $a_{k2}^{(1)}$ і віднімається від усіх рядків з k= 3, 4, ..., n .

4. Дії, аналогічні перерахованим у п.2, 3, повторюються доти, поки подібна процедура не буде пророблена з (n-1)-м рядком матриці, при цьому матриця буде мати вигляд

$$A^{(n-1)} = \left\| \begin{matrix} 1 & a_{12}^{(n-1)} & a_{13}^{(n-1)} & \dots & \dots & a_{1n}^{(n-1)} & a_{1,\,n+1}^{(n-1)} \\ 0 & 1 & a_{23}^{(n-1)} & \dots & \dots & a_{2n}^{(n-1)} & a_{2,\,n+1}^{(n-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & a_{n-1,\,n}^{(n-1)} & a_{n-1,\,n+1}^{(n-1)} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{n,n}^{(n-1)} & a_{n,\,n+1}^{(n-1)} \end{matrix} \right\| .$$

5. Елементи останнього рядка отриманої матриці дозволяють обчислити значення $x_n = a_{n,\,n+1}^{(n-1)} \big/ a_{n,n}^{(n-1)}$.

6. Значення кореня використовується для знаходження x_{n-1} при підстановці у (n-1)-й рядок трикутної матриці $A^{(n-1)}$, потім послідовно обчислюються корені x_{n-2}, ..., x_1 за формулою

$$x_k = a_{k,\,n+1}^{(n-1)} - \sum_{j=k+1}^{n} a_{kj}^{(n-1)} x_j \ ,$$

де k=(n-2), ..., 1.

Описаний вище метод можна зобразити у вигляді схеми алгоритму, наведеної на рис. 7.

Зміст завдання: за заданим алгоритмом необхідно написати програму, яка б розв’язувала систему лінійних алгебраїчних рівнянь методом Гаусса. Варіанти завдань наведено у табл. 3.

Для спрощення для позначення невідомих x_1, x_2, x_3 використано змінні x, y, z.

Вказівка. З урахуванням особливостей мови програмування С++ номери індексів елементів масиву у порівнянні з відповідними індексами математичної матриці зміщуються на одиницю ліворуч. Тому початкове значення параметра циклу треба змінити з 1 на 0, значення числа *n* відповідно буде на 1 менше ніж кількість невідомих.

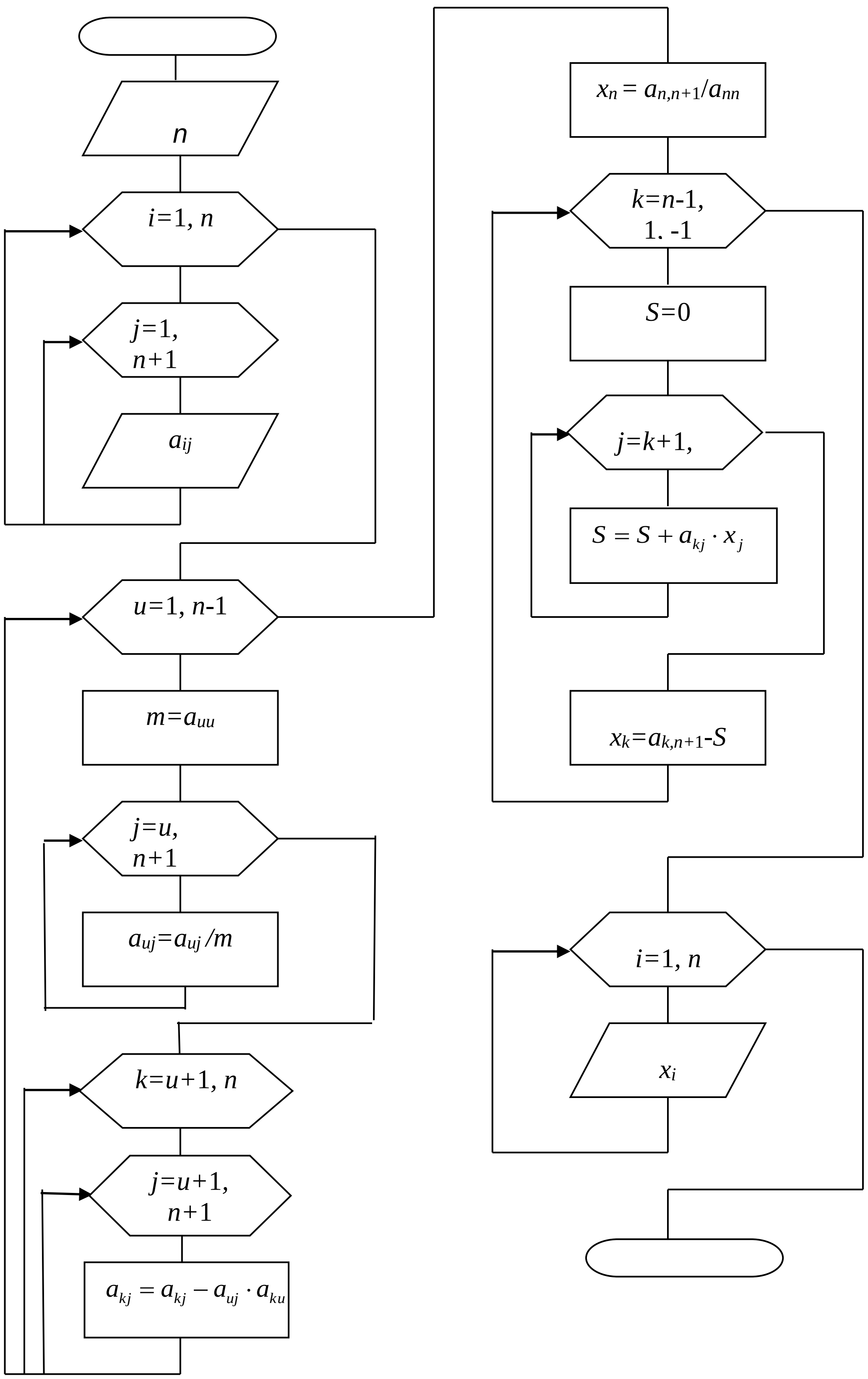

Рис. 7. Схема алгоритму методу Гаусса

Таблиця 3

Варіанти завдань

№ пор.	Система рівнянь	№ пор.	Система рівнянь
1	2	3	4
1	$\begin{cases} 5x+8y-z=-4 \\ x+2y+3z=6 \\ 2x-3y+2z=7 \end{cases}$	12	$\begin{cases} 2x-y-3z=3 \\ 3x+4y-5z=9 \\ 2y+7z=16 \end{cases}$
2	$\begin{cases} x+2y+z=4 \\ 3x-5y+3z=1 \\ 2x+7y-z=8 \end{cases}$	13	$\begin{cases} x+5y+z=-7 \\ 2x-y-z=0 \\ x-2y-z=2 \end{cases}$
3	$\begin{cases} 3x+2y+z=5 \\ 2x+3y+z=1 \\ 2x+y+3z=11 \end{cases}$	14	$\begin{cases} x-2y+3z=6 \\ 2x+3y-4z=16 \\ 3x-2y-5z=12 \end{cases}$
4	$\begin{cases} x+2y+4z=31 \\ 5x+y+2z=29 \\ 3x-y+z=10 \end{cases}$	15	$\begin{cases} 3x+4y+2z=6 \\ 2x-y-3z=-1 \\ x+5y+z=-1 \end{cases}$
5	$\begin{cases} 4x-3y+2z=9 \\ 2x+5y-3z=4 \\ 5x+6y-2z=18 \end{cases}$	16	$\begin{cases} 2x-y+3z=7 \\ x+3y-2z=0 \\ 2y-z=2 \end{cases}$
6	$\begin{cases} 2x-y-z=4 \\ 3x+4y-2z=11 \\ 3x-2y+4z=11 \end{cases}$	17	$\begin{cases} 2x+y+4z=20 \\ 2x-y-3z=3 \\ 3x+4y-5z=-8 \end{cases}$
7	$\begin{cases} x+y+2z=-1 \\ 2x-y+2z=-4 \\ 4x+y+4z=-2 \end{cases}$	18	$\begin{cases} x-y=4 \\ 2x+3y+z=1 \\ 2x+y+3z=11 \end{cases}$
8	$\begin{cases} 3x-y=5 \\ -2x+y+z=0 \\ 2x-y+4z=15 \end{cases}$	19	$\begin{cases} x+5y-z=7 \\ 2x-y-z=4 \\ 3x-2y+4z=11 \end{cases}$
9	$\begin{cases} 3x-y+z=4 \\ 2x-5y-3z=-17 \\ x+y-z=0 \end{cases}$	20	$\begin{cases} 11x+3y-z=2 \\ 2x+5y-5z=0 \\ x+y+z=2 \end{cases}$
10	$\begin{cases} x+y+z=2 \\ 2x-y-6z=-1 \\ 3x-2y=8 \end{cases}$	21	$\begin{cases} 7x+5y+2z=18 \\ x-y-z=3 \\ x+y+2z=-2 \end{cases}$

11	$\begin{cases} 2x+y-z=1 \\ x+y+z=6 \\ 3x-y+z=4 \end{cases}$	22	$\begin{cases} 2x+3y+z=1 \\ x+z=0 \\ x-y-z=2 \end{cases}$

Закінчення табл. 3

1	2	3	4
23	$\begin{cases} x-2y-2z=3 \\ x+y-2z=0 \\ x-y-z=1 \end{cases}$	28	$\begin{cases} 2x-y-3z=-9 \\ x+2y+z=3 \\ 3x+y-z=-1 \end{cases}$
24	$\begin{cases} 3x+y-5z=-7 \\ 2x-3y+4z=-1 \\ 5x-y+3z=0 \end{cases}$	29	$\begin{cases} 3x+y-2z=4 \\ 2x-3y+z=9 \\ 5x+y+3z=-4 \end{cases}$
25	$\begin{cases} x-2y+z=0 \\ 2x+y+3z=13 \\ x+3y+2z=13 \end{cases}$	30	$\begin{cases} 2x-y+3z=-4 \\ x+3y-z=2 \\ 5x+2y+z=5 \end{cases}$
26	$\begin{cases} 2x-y-2z=-1 \\ 3x+2y+z=6 \\ x+3y+3z=7 \end{cases}$	31	$\begin{cases} 6x+y+2z=9 \\ x-y+z=1 \\ x+y+2z=6 \end{cases}$
27	$\begin{cases} 2x+3y+4z=5 \\ 3x+4y-z=3 \\ 4x+5y-2z=3 \end{cases}$	32	$\begin{cases} x+5y+z=7 \\ x-y-z=-1 \\ x+2y+z=4 \end{cases}$

Практична робота №6

Розв'язування системи лінійних рівнянь матричним методом та методом Крамера

Нехай в системі лінійних рівнянь $m=n$. Тоді A – квадратна матриця порядку n:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + ... + a_{1n}x_n = b_1;$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + ... + a_{2n}x_n = b_2;$$
$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + ... + a_{3n}x_n = b_3;$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + ... + a_{mn}x_n = b_m$$

У матричному записі система має вигляд $AX=B$.

Якщо det $A\neq 0$, то існує обернена матриця A^{-1} до матриці A.

Матричний метод розв'язання систем лінійних рівнянь можна сформулювати таким чином: якщо матриця коефіцієнтів системи є квадратною і неособливою, для знаходження вектора-стовпця невідомих необхідно матрицю, обернену до матриці коефіцієнтів, помножити на вектор-стовпець вільних членів.

Формула даного методу буде мати вигляд: $X= A^{-1} B$.

Менш трудомістким є метод Крамера, у якому значення невідомих x_i , i=1, 2, …, n можна отримати за допомогою формули

$$x_i = \frac{\det A_i}{\det A} \quad , i = 1, \ldots, n ,$$

де матриця A_i формується з матриці A заміною її i-го стовпця на стовпець вільних членів.

Обидва методи зручно реалізувати за допомогою табличного процесора MS Excel, в якому існують функції для роботи з масивами. У нашому випадку достатньо скористатися функціями МОПРЕД (повертає визначник матриці), МОБР (повертає обернену матрицю), МУМНОЖ (повертає добуток матриць).

Функції роботи з масивами МОБР та МУМНОЖ, які повертають масиви, повинні бути введені як формули масиву. Для цього необхідно у комірку ввести відповідну формулу, виділити діапазон комірок для розміщення результату, починаючи з комірки з формулою, натиснути клавішу F2, а потім - комбінацію клавіш CTRL+SHIFT+ENTER .

Зміст завдання: розв’язати систему рівнянь (табл. 3) матричним методом та методом Крамера на вибір студента: або склавши програму мовою С++, або використавши функції роботи з масивами табличного процесора MS Excel. Здійснити перевірку отриманих результатів.

Практична робота №7

Уточнення кореня алгебраїчного рівняння методом Ньютона (дотичних)

Метод Ньютона є одним із найбільш популярних чисельних методів. Має другий порядок збіжності і допускає різні модифікації, які застосовуються при розв’язуванні задач і сіткових рівнянь. Але він застосовується при досить жорстких обмеженнях на функцію $f(x)$.

На відомому інтервалі існування дійсного кореня функції (a,b) вибирається початкове наближення кореня x_0 і у точці x_0 проводиться дотична до функції $f(x)$.

Точка x_1 перетину дотичної з віссю абсцис приймається за уточнене значення кореня. Повторюючи побудову дотичних у точках x_1, x_2, x_n, x_{n+1}, ..., отримаємо послідовне уточнення кореня (рис. 8).

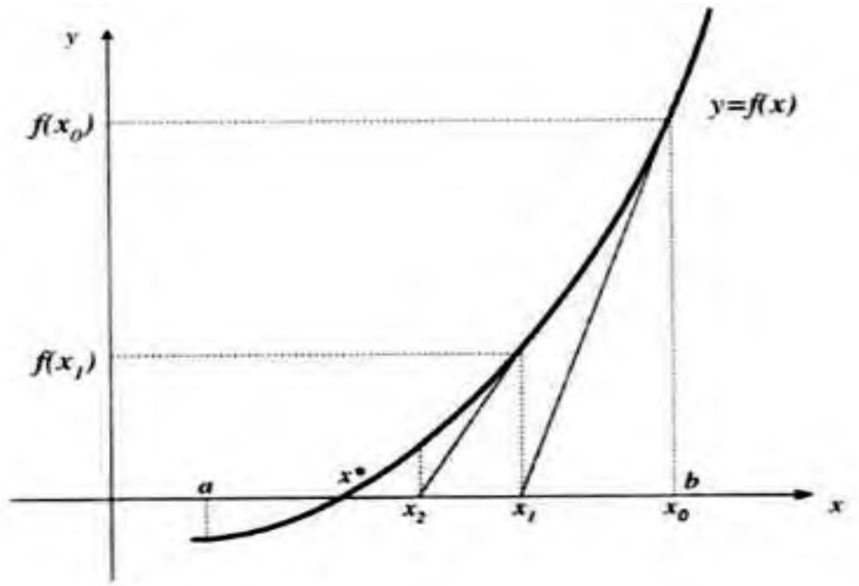

Рис. 8. Графічна інтерпретація методу Ньютона

Уточнення здійснюється за формулою

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}; \; n = 0,1,2,\ldots$$

При послідовних уточненнях

$$\lim_{n\to\infty} x_{n+1} = x \cdot$$

Метод дотичних на відміну від методу половинного ділення використовує інформацію про поточну форму функції, яка задається у вигляді похідних $f'(x_n)$ у кожній точці послідовного наближення x_n , це прискорює процес уточнення кореня, але обмежує застосовність формули, оскільки для функцій з пологими або паралельними осі абсцис ділянками точка перетину дотичної з віссю абсцис може вийти за межі інтервалу відділення кореня, і тоді уточнення не вийде.

Рекомендується вибирати досить тісні межі кореня і проводити першу дотичну завжди в тій граничній точці інтервалу, який містить корінь, де знаки функції $f(x)$ та її кривизни $f''(x)$ співпадають, тобто де буде виконана умова $f(x)f''(x)>0$.

Алгоритм методу являє собою цикл ітераційного типу, в якому число повторень заздалегідь не відомо. Обчислення T та перевірка умови $T>\varepsilon$ виконуються до тих пір, поки приріст $T=|x_{n+1}-x_n|$ не стане менше заданої похибки ε. Приріст обчислюється за формулою $T=\dfrac{f(x)}{f'(x)}$.

Змінній x спочатку присвоюється значення початкового наближення x_0 , при подальших обчисленнях ця змінна приймає уточнювані значення кореня $x=x_1, x_2, \ldots, x_n$. По закінченні повторень x має значення кореня, обчисленого з точністю ε, яке і виводиться.

Схема алгоритму даного методу наведена на рис. 9. Змінна k обчислює кількість ітерацій.

Зміст роботи: визначити корінь алгебраїчного рівняння, заданого у табл. 2, методом Ньютона, вивести його значення, а також значення функції у цій точці та кількість кроків виконання циклу. Здійснити перевірку та порівняти з кількістю кроків у методах половинного ділення та «золотого перетину». Початкове наближення слід вибирати відповідно до умови збіжності методу.

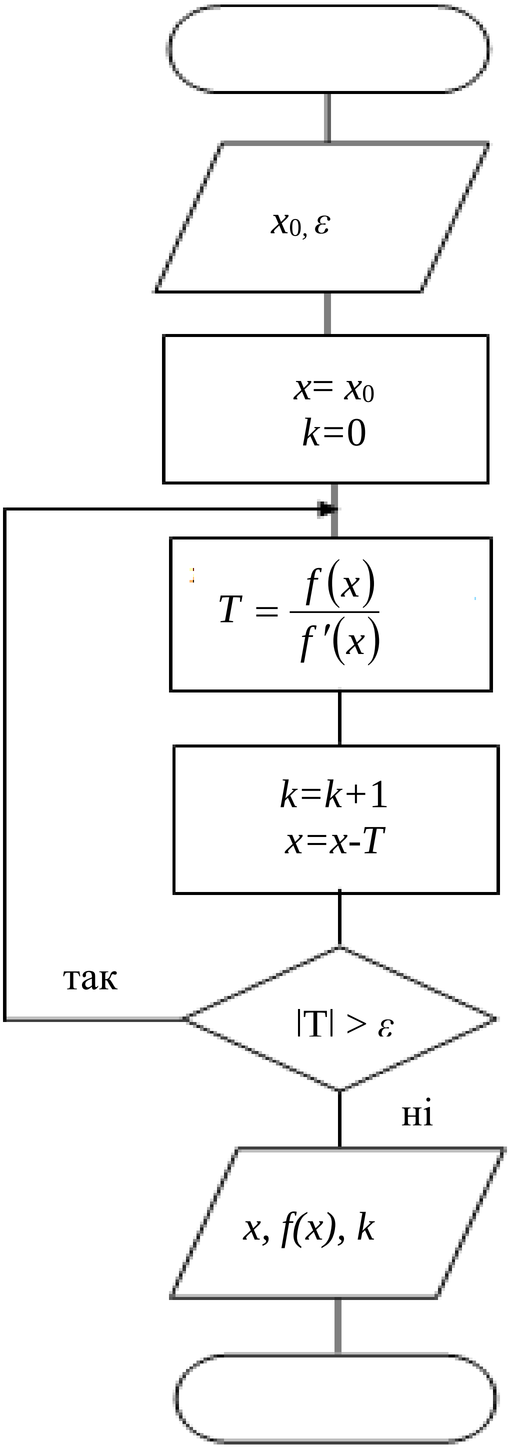

Рис. 9. Схема алгоритму уточнення кореня методом Ньютона

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Баліна О.І. Чисельні методи: методичні вказівки до практичних занять: для студ. спец., які навч. за напрям. підгот. 6.050101 "Комп’ютерні науки", 6.050202 "Автоматизація та комп’ютерно-інтегровані технології"/ О.І. Баліна; Київ. нац. ун-т буд-ва і архітектури . – Київ: КНУБА, 2011 . – 44 с.
2. Горда О.В. Чисельні методи: Для студ. спец. 7.080401 "Інформ. управл. сист. та технол.", 7.080402 "Інформ. технол. проектув.": конспект лекцій / О.В. Горда; Київськ. нац. ун-т буд-ва і архіт. – Київ: КНУБА, 2009 . –75 с.
3. Горда О.В. Чисельні методи. Розв’язання нелінійних рівнянь та систем рівнянь: для студ., які навч. за напрям. підготовки 6.050101 "Комп’ютерні науки": конспект лекцій / О.В. Горда ; Київ. нац. ун-т буд-ва і архітектури . – Київ: КНУБА, 2010 . – 72 с.
4. Задачин В.М. Чисельні методи : навчальний посібник / В.М. Задачин, І.Г. Конюшенко. – Х.: Вид. ХНЕУ ім. С. Кузнеця, 2014. – 180 с.
5. Зеленський К.Х. Комп’ютерні методи прикладної математики / К.Х. Зеленський, В.М. Ігнатенко, О.П. Коц. – К.: Академперіодика, 2002. – 480 с.
6. Копча-Горячкіна Г.Е. Чисельні методи в інформатиці. Частина І: Навчально-методичний посібник для студентів факультету інформатики напряму „Комп’ютерні науки” зі спеціальностей «Програмне забезпечення автоматизованих систем» та «Інформаційні управляючі системи та технології» / Г.Е. Копча-Горячкіна. – Ужгород: Видавництво Закарпатського державного університету, 2011. – 76 с.
7. Кучанський О.Ю. Чисельні методи в інформатиці: методичні вказівки та завдання до проведення практичних та лабораторних занять для студентів спеціальності 123 "Комп'ютерна інженерія"/ О.Ю. Кучанський ; Київ. нац. ун-т будівн. і архіт. – Київ: КНУБА, 2018 . – 28 с.
8. Мусіяка В.Г. Основи чисельних методів механіки: Підручник для студ. вищ. техн. навч. закл. / В.Г. Мусіяка. – Київ: Вища освіта, 2004 . –239 с.
9. Фельдман Л.П. Чисельні методи в інформатиці / Л.П. Фельдман; за заг. ред. М.З. Згуровського. – К.: Вид. група BHV, 2006. – 480 с.

ДЛЯ НОТАТОК

Навчально-методичне видання

ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ В ІНФОРМАТИЦІ

Методичні вказівки
до виконання практичних робіт
для студентів спеціальностей
123 «Комп'ютерна інженерія» та
125 «Кібербезпека»

Укладач **КЛЮЄВА** Вікторія Василівна

Комп'ютерне верстання *В.В. Клюєвої*

Підписано до друку 23.09.2022. Формат 60x84 1/16.
Ум. друк. арк. 1,63. Обл.-вид. арк. 0,45.
Замовлення № 2158

Видавець і виготовлювач
Київський національний університет будівництва і архітектури

Повітрофлотський проспект, 31, Київ, Україна, 03680

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру суб'єкту
Видавничої справи ДК №808 від 13.02.2002