Варіант №1

1. Змінити порядок інтегрування:

$$\int\limits_0^1 \mathrm{d}y \int\limits_0^{y^2} f\,\mathrm{d}x + \int\limits_1^{\sqrt{2}} \mathrm{d}y \int\limits_0^{\sqrt{2-y^2}} f\,\mathrm{d}x.$$

2. Обчислити:

$$1) \iint\limits_{D:y=\frac{\pi}{4},y=\frac{\pi}{2},x=2,x=3} 12y\sin 2xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \quad 2) \int\limits_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \mathrm{d}x \int\limits_0^{\sqrt{3-x^2}} \sqrt{1+x^2+y^2}\,\mathrm{d}y.$$

$$3) \iiint\limits_{V:\ \substack{z=2(x^2+y^2),\\ 0\leqslant y\leqslant \frac{x}{\sqrt{3}},\, z=18}} \frac{xz\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

3. Знайти координати центра мас однорідного тіла, обмеженого поверхнями:

$$x = 7(y^2+z^2), x = 28.$$

4. Знайти роботу сили $\vec{F} = x^2y\,\vec{i} - y\,\vec{j}$ при переміщенні вздовж відрізка MN від точки $M(-1,0)$ до точки $N(0,1)$.

5. Знайти $\left.\dfrac{\partial u}{\partial \vec{l}}\right|_M$ за умови, що $u = x^3 + \sqrt{y^2+z^2}$; $\vec{l} = (0,1,-1)$; $M(1,-3,4)$.

6. Знайти потік векторного поля $\vec{a}$ крізь замкнену поверхню S (нормаль зовнішня):

$$\vec{a} = (yz+x, x^2+y, xy^2+z), S: x^2+y^2+z^2 = 2z.$$

Варіант №2

1. Змінити порядок інтегрування:

$$\int\limits_{-\sqrt{2}}^{-1} \mathrm{d}y \int\limits_{-\sqrt{2-y^2}}^{0} f\mathrm{d}x + \int\limits_{-1}^{0} \mathrm{d}y \int\limits_{y}^{0} f\mathrm{d}x.$$

2. Обчислити:

$$1) \iint\limits_{D:y=\ln 3, y=\ln 4, x=\frac{1}{2}, x=1} 4ye^{xy}\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \quad 2) \int\limits_{-R}^{0} \mathrm{d}x \int\limits_{0}^{\sqrt{R^2-x^2}} \cos\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}y.$$

$$3) \iiint\limits_{V:\ \begin{array}{l} z=\sqrt{8-x^2-y^2}, \\ z=\sqrt{x^2+y^2}, y\geqslant 0 \end{array}} y\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

3. Знайти координати центра мас однорідного тіла, обмеженого поверхнями:

$$y^2+z^2=8x, x=2.$$

4. Знайти роботу сили $\vec{F}=xy\,\vec{i}+2y\,\vec{j}$ при переміщенні вздовж кола $x^2+y^2=1$ $(x,y\geqslant 0)$ від точки $M(1,0)$ до точки $N(-1,0)$.

5. Знайти $\left.\dfrac{\partial u}{\partial \vec{n}}\right|_M$ ($\vec{n}$ – нормаль до поверхні S у точці M) за умови, що $u=4\ln(3+x^2)-8xyz$; S : $x^2-2y^2+2z^2=1$; $\angle(\vec{n},Oz)\leqslant 90°$; $M(1,1,1)$.

6. Знайти потік векторного поля $\vec{a}$ крізь замкнену поверхню S (нормаль зовнішня):

$$\vec{a}=(y+2z,-y,3x), S: z^2=x^2+y^2, 3z=27-2(x^2+y^2)\ (z\geqslant 0).$$

Варіант №3

1. Змінити порядок інтегрування:

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{d}y \int\limits_0^{\sin y} f\,\mathrm{d}x + \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}y \int\limits_0^{\cos y} f\,\mathrm{d}x.$$

2. Обчислити:

$$1)\ \iint\limits_{D:y=\frac{\pi}{2},y=\frac{\pi}{4},x=1,x=2} 2y\cos 2xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \quad 2)\ \int\limits_{-R}^{R}\mathrm{d}x \int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{0} \frac{\sin\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}y.$$

$$3)\ \iiint\limits_{V:\ \substack{x^2+y^2=16y,\\ y+z=16;\,x,\,z\geqslant 0}} \frac{x\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

3. Знайти координати центра мас однорідного тіла, обмеженого поверхнями:

$$z = 2\sqrt{x^2+y^2}, x^2+y^2=9, z=0.$$

4. Знайти роботу сили $\vec{F} = y^2\vec{i} - x^2\vec{j}$ при переміщенні вздовж кола $(x, y\geqslant 0)$ $x^2+y^2=9$ від точки $M(3,0)$ до точки $N(0,3)$.

5. Знайти $\left.\dfrac{\partial u}{\partial \vec{l}}\right|_M$ за умови, що $u = \ln(x+\sqrt{y^2+z^2})$; $\vec{l} = (-2,-1,1)$; $M(1,-3,4)$.

6. Знайти потік векторного поля $\vec{a}$ крізь замкнену поверхню S (нормаль зовнішня):

$$\vec{a} = (2x+2z, xz+y, 4xy-8), S: x^2+y^2+z^2 = 4x-2y+4z-8.$$

Варіант №4

1. Змінити порядок інтегрування:

$$\int\limits_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \mathrm{d}y \int\limits_0^{\arcsin y} f\mathrm{d}x + \int\limits_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1} \mathrm{d}y \int\limits_0^{\arccos y} f\mathrm{d}x.$$

2. Обчислити:

$$1) \iint\limits_{D:x=0,y=\sqrt{\pi},y=x} y^2 \sin\frac{xy}{2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \quad 2) \int\limits_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \mathrm{d}x \int\limits_{-\sqrt{2-x^2}}^{\sqrt{2-x^2}} e^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}y.$$

$$3) \iiint\limits_{V:\ \substack{x^2+y^2=2x;\\ z=3;\, y,\, z\geqslant 0}} z\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

3. Знайти координати центра мас однорідного тіла, обмеженого поверхнями: $x = 6(y^2+z^2), y^2+z^2 = 3, x = 0$.

4. Знайти роботу сили $\vec{F} = (x^2-y^2)\vec{i} + (x^2+y^2)\vec{j}$ при переміщенні вздовж еліпса $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$ $(y\geqslant 0)$ від точки $M(3,0)$ до точки $N(-3,0)$.

5. Знайти $\left.\dfrac{\partial u}{\partial \vec{l}}\right|_M$ за умови, що $u = \sqrt{xy} + \sqrt{9-z^2}$; $\vec{l} = (-2,2,-1)$; $M(1,1,0)$.

6. Знайти потік векторного поля $\vec{a}$ крізь замкнену поверхню S (нормаль зовнішня):

$$\vec{a} = (\sqrt{z}-x, x-y, y^2-z), S: 3x-2y+z = 6, x, y, z = 0.$$

Варіант №5

1. Змінити порядок інтегрування:

$$\int\limits_0^1 \mathrm{d}y \int\limits_{-y}^0 f\,\mathrm{d}x + \int\limits_1^{\sqrt{2}} \mathrm{d}y \int\limits_{-\sqrt{2-y^2}}^0 f\,\mathrm{d}x.$$

2. Обчислити:

$$1)\ \iint\limits_{D:y=\ln 2, y=\ln 3, x=2, x=4} y\exp\left(\frac{xy}{2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \quad 2)\ \int\limits_0^1 \mathrm{d}x \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}}\,\mathrm{d}y.$$

$$3)\ \iiint\limits_{V:\ \substack{x^2+y^2+z^2=4,\\ x,y,z\geqslant 0}} (x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

3. Знайти координати центра мас однорідного тіла, обмеженого поверхнями:

$$z = 2\sqrt{x^2+y^2}, z = 8.$$

4. Знайти роботу сили $\vec{F} = (x+y)\vec{i} + (x-y)\vec{j}$ при переміщенні вздовж кривої $y = \sin x$ від точки $M(\pi, 0)$ до точки $N(0, 0)$.

5. Знайти $\left.\dfrac{\partial u}{\partial \vec{l}}\right|_M$ за умови, що $u = \ln(3-x^2) + xy^2z$; $\vec{l} = (-1, 2, -2)$; $M\,(1, 3, 2)$.

6. Знайти потік векторного поля $\vec{a}$ крізь замкнену поверхню S (нормаль зовнішня):

$$\vec{a} = (6x - \cos y, -e^x - z, -2y - 3z), S: x^2 + y^2 = z^2, z = 1, z = 2.$$

Варіант №6

1. Змінити порядок інтегрування:

$$\int\limits_0^1 \mathrm{d}y \int\limits_0^y f\mathrm{d}x + \int\limits_1^{\sqrt{2}} \mathrm{d}y \int\limits_0^{\sqrt{2-y^2}} f\mathrm{d}x.$$

2. Обчислити:

$$1) \iint\limits_{D:x=0,y=\sqrt{2},y=x} y^2 e^{-\frac{xy}{2}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \quad 2) \int\limits_0^R \mathrm{d}x \int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2}\cos^2\sqrt{x^2+y^2}}.$$

$$3) \iiint\limits_{V:\ \begin{array}{l} x^2+y^2=2x, \\ x+z=2,\, z\geqslant 0 \end{array}} \sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

3. Знайти координати центра мас однорідного тіла, обмеженого поверхнями:

$$x^2+y^2=2z,\, z=3.$$

4. Знайти роботу сили $\vec{F}=\left(y\sqrt{x^2+y^2}+x\right)\vec{i}+(y-x\sqrt{x^2+y^2})\vec{j}$ при переміщенні вздовж кола $x^2+y^2=1$ $(y\geqslant 0)$ від точки $M(1,0)$ до точки $N(-1,0)$.

5. Знайти $\left.\dfrac{\partial u}{\partial \vec{n}}\right|_M$ ($\vec{n}$ – нормаль до поверхні S у точці M) за умови, що $u=xz^2-\sqrt{x^3y}$; $S: x^2-y^2-3z+12=0$; $\angle(\vec{n},Oz)\leqslant 90^\circ$, $M(2,2,4)$.

6. Знайти потік векторного поля $\vec{a}$ крізь замкнену поверхню S (нормаль зовнішня):

$$\vec{a}=\left(e^z+\frac{x}{4},\ln x+\frac{y}{4},\frac{z}{4}\right),\, S:(x-1)^2+(y-1)^2+(z+1)^2=1.$$

Варіант №7

1. Змінити порядок інтегрування:

$$\int\limits_0^1 \mathrm{d}y \int\limits_0^{\sqrt{y}} f\mathrm{d}x + \int\limits_1^2 \mathrm{d}y \int\limits_0^{\sqrt{2-y}} f\mathrm{d}x.$$

2. Обчислити:

$$1) \iint\limits_{D:x=0,y=\sqrt{\pi},y=2x} y^2\cos xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \quad 2) \int\limits_{-2}^{2}\mathrm{d}x \int\limits_0^{\sqrt{4-x^2}} \sqrt{x^2+y^2}e^{x^2+y^2}\mathrm{d}y.$$

$$3) \iiint\limits_{V:\ \substack{x^2+y^2=4y;\\ y+z=4;\ z\geqslant 0}} \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

3. Знайти координати центра мас однорідного тіла, обмеженого поверхнями:

$$z = 5(x^2+y^2), x^2+y^2 = 2, z = 0.$$

4. Знайти роботу сили $\vec{F} = (x^2+2y)\vec{i} + (y^2+2x)\vec{j}$ при переміщенні вздовж параболи $y = 2 - \dfrac{x^2}{8}$ від точки $M(-4,0)$ до точки $N(0,2)$.

5. Знайти $\left.\dfrac{\partial u}{\partial \vec{n}}\right|_M$ ($\vec{n}$ – нормаль до поверхні S у точці M) за умови, що $u = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} + xz; S: x^2+y^2-2z = 10;$ $M\,(3;5;12)$.

6. Знайти потік векторного поля $\vec{a}$ крізь замкнену поверхню S (нормаль зовнішня):

$$\vec{a} = (2x+y, 0, y+2z), S: z = 2-4(x^2+y^2), z = 4(x^2+y^2).$$

Варіант №8

1. Змінити порядок інтегрування:

$$\int\limits_{-\sqrt{2}}^{-1} \mathrm{d}y \int\limits_{-\sqrt{2-y^2}}^{0} f\,\mathrm{d}x + \int\limits_{-1}^{0} \mathrm{d}y \int\limits_{y}^{0} f\,\mathrm{d}x.$$

2. Обчислити:

$$1) \iint\limits_{D:y=\frac{\pi}{2},y=3\pi,x=1,x=3} 3y\sin xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \quad 2) \int\limits_{0}^{R} \mathrm{d}x \int\limits_{-\sqrt{R-x^2}}^{\sqrt{R-x^2}} \sin(x^2+y^2)\,\mathrm{d}y.$$

$$3) \iiint\limits_{V:\ \substack{1\leqslant x^2+y^2+z^2\leqslant 9,\\ 0\leqslant y\leqslant x,\, z\geqslant 0}} \frac{x\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

3. Знайти координати центра мас однорідного тіла, обмеженого поверхнями:

$$y = 3\sqrt{x^2+z^2}, y = 9.$$

4. Знайти роботу сили $\vec{F} = y\,\vec{i} - x\,\vec{j}$ при переміщенні вздовж кола $x^2+y^2=2$ $(y\geqslant 0)$ від точки $M(\sqrt{2},0)$ до точки $N(-\sqrt{2},0)$.

5. Знайти $\left.\dfrac{\partial u}{\partial \vec{l}}\right|_M$ за умови, що $u = x + \ln(z^2+y^2)$; $\vec{l} = (-2,1,-1)$; $M(2,1,1)$.

6. Знайти потік векторного поля $\vec{a}$ крізь замкнену поверхню S (нормаль зовнішня):

$$\vec{a} = (8x+1, zx-4y, e^x - z), S: x^2+y^2+z^2 = 2y.$$

Варіант №9

1. Змінити порядок інтегрування:

$$\int\limits_0^1 \mathrm{d}y \int\limits_0^{\sqrt{y}} f\,\mathrm{d}x + \int\limits_1^{\sqrt{2}} \mathrm{d}y \int\limits_0^{\sqrt{2-y^2}} f\,\mathrm{d}x.$$

2. Обчислити:

$$1)\quad \iint\limits_{D:x=0,y=\sqrt{\frac{\pi}{2}},y=x} 4y^2 \sin xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \quad 2)\ \int\limits_{-R}^{R} \mathrm{d}x \int\limits_0^{\sqrt{R^2-x^2}} \mathrm{tg}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}y.$$

$$3)\quad \iiint\limits_{V:\ \substack{4\leqslant x^2+y^2+z^2\leqslant 36,\\ x,\,z\geqslant 0;\,y\geqslant\sqrt{3x}}} \frac{y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{x^2+y^2+z^2}.$$

3. Знайти координати центра мас однорідного тіла, обмеженого поверхнями:

$$y=\sqrt{x^2+z^2}, y=4.$$

4. Знайти роботу сили $\vec{F}=x^2\vec{j}$ при переміщенні вздовж кола $x^2+y^2=9$ $(x,y\geqslant 0)$ від точки $M(3,0)$ до точки $N(0,3)$.

5. Знайти $\left.\dfrac{\partial u}{\partial \vec{l}}\right|_M$ за умови, що $u=2\sqrt{x+y}+y\,\mathrm{arctg}\,z$; $\vec{l}=(4,0,-3)$; $M(3,-2,1)$.

6. Знайти потік векторного поля $\vec{a}$ крізь замкнену поверхню S (нормаль зовнішня):

$$\vec{a}=(y+z^2, x^2+3y, xy), S: x^2+y^2+z^2=2x.$$

Варіант №10

1. Змінити порядок інтегрування:

$$\int\limits_0^1 \mathrm{d}y \int\limits_0^{\sqrt[3]{y}} f\mathrm{d}x + \int\limits_1^2 \mathrm{d}y \int\limits_0^{2-y} f\mathrm{d}x.$$

2. Обчислити:

$$1) \iint\limits_{D:y=\pi,y=2\pi,x=\frac{1}{2},x=1} y\sin xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \quad 2) \int\limits_{-R}^{R} \mathrm{d}x \int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{0} \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2}\cos^2\sqrt{x^2+y^2}}.$$

$$3) \iiint\limits_{V:\ \substack{2\leqslant x^2+y^2+z^2\leqslant 8,\\ z^2=x^2+y^2;\, x,y,z\geqslant 0}} xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

3. Знайти координати центра мас однорідного тіла, обмеженого поверхнями:

$$z=\sqrt{x^2+y^2}, z=4.$$

4. Знайти роботу сили $\vec{F}=x^3\vec{i}-y^3\vec{j}$ при переміщенні вздовж кола $x^2+y^2=4\,(x,y\geqslant 0)$ від точки $M(2,0)$ до точки $N(0,2)$.

5. Знайти $\left.\dfrac{\partial u}{\partial \vec{l}}\right|_M$ за умови, що $u=(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}$; $\vec{l}=(1,-1,1)$; $M(1,1,1)$.

6. Знайти потік векторного поля $\vec{a}$ крізь замкнену поверхню S (нормаль зовнішня):

$$\vec{a}=(\cos z+3x, x-2y, 3z+y^2), S: z^2=36(x^2+y^2), z=6.$$

Варіант №11

1. Змінити порядок інтегрування:

$$\int\limits_0^1 \mathrm{d}y \int\limits_0^{\sqrt{y}} f\mathrm{d}x + \int\limits_1^e \mathrm{d}y \int\limits_{\ln y}^1 f\mathrm{d}x.$$

2. Обчислити:

$$1) \iint\limits_{D:x=0,y=\sqrt{\frac{\pi}{2}},y=\frac{x}{2}} y^2\cos\frac{xy}{2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \quad 2) \int\limits_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \mathrm{d}x \int\limits_{-\sqrt{2-x^2}}^{\sqrt{2-x^2}} \frac{xy}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}y.$$

$$3) \iiint\limits_{V:\ \substack{4\leqslant x^2+y^2+z^2\leqslant 16,\\ y\leqslant\sqrt{3}x;\, y,z\geqslant 0}} y\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

3. Знайти координати центра мас однорідного тіла, обмеженого поверхнями:

$$z = 8(x^2+y^2), z = 32.$$

4. Знайти роботу сили $\vec{F} = (x^2-2y)\vec{i} + (y^2-2x)\vec{j}$ при переміщенні вздовж відрізка MN від точки $M(-4,0)$ до точки $N(0,2)$.

5. Знайти $\left.\dfrac{\partial u}{\partial \vec{n}}\right|_M$ ($\vec{n}$ – нормаль до поверхні S у точці M) за умови, що $u = \ln(1+x^2) - xy\sqrt{z}; S: 4x^2 - y^2 + z^2 = 16; \angle(\vec{n}, Oz)\leqslant 90^\circ; M(1,-2,4)$.

6. Знайти потік векторного поля $\vec{a}$ крізь замкнену поверхню S (нормаль зовнішня):

$$\vec{a} = (\ln y + 7x, \sin z - 2y, e^y - 2z), S: (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 1.$$

Варіант №12

1. Змінити порядок інтегрування:

$$\int\limits_0^1 \mathrm{d}y \int\limits_{-\sqrt{y}}^0 f\mathrm{d}x + \int\limits_1^{\sqrt{2}} \mathrm{d}y \int\limits_{-\sqrt{2-y^2}}^0 f\mathrm{d}x.$$

2. Обчислити:

$$1) \iint\limits_{D:x=0,y=\sqrt{\pi},y=x} y^2\cos xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y. : \quad 2) \int\limits_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \mathrm{d}x \int\limits_{-\sqrt{2-x^2}}^{\sqrt{2-x^2}} (1+x^2+y^2)\,\mathrm{d}y.$$

$$3) \iiint\limits_{V:\ \substack{z=x^2+y^2,\\ 0\leqslant y\leqslant x;\, z=4}} \frac{xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}.$$

3. Знайти координати центра мас однорідного тіла, обмеженого поверхнями:

$$y = 3\sqrt{x^2+z^2}, x^2+z^2=16, y=0.$$

4. Знайти роботу сили $\vec{F} = (y\sqrt{x^2+y^2}+x)\vec{i} + (y-\sqrt{x^2+y^2})\vec{j}$ при переміщенні вздовж параболи $8y = 16-x^2$ від точки $M(4,0)$ до точки $N(0,4)$.

5. Знайти $\left.\dfrac{\partial u}{\partial \vec{l}}\right|_M$ за умови, що $u = \dfrac{\sqrt{x}}{y} - \dfrac{yz}{x+\sqrt{y}}$; $\vec{l} = (2,0,1)$; $M(4,1,-2)$.

6. Знайти потік векторного поля $\vec{a}$ крізь замкнену поверхню S (нормаль зовнішня):

$$\vec{a} = (x,z,-y), S: z = 2(x^2+y^2),\ z = 4-2(x^2+y^2).$$

Варіант №13

1. Змінити порядок інтегрування:

$$\int\limits_0^{\sqrt{3}} \mathrm{d}y \int\limits_0^{2-\sqrt{4-y^2}} f\,\mathrm{d}x + \int\limits_{\sqrt{3}}^{2} \mathrm{d}y \int\limits_0^{\sqrt{4-y^2}} f\,\mathrm{d}x.$$

2. Обчислити:

$$1) \iint\limits_{D:y=\ln 3, y=\ln 4, x=\frac{1}{4}, x=\frac{1}{2}} 8ye^{4xy}\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \quad 2) \int\limits_{-R}^{0} \mathrm{d}x \int\limits_0^{\sqrt{R^2-x^2}} \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{ctg}\,\sqrt{x^2+y^2}}.$$

$$3) \iiint\limits_{V:\ \begin{array}{c} x^2+y^2+z^2=36, \\ y,z\geqslant 0, y\leqslant -x \end{array}} \sqrt{x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

3. Знайти координати центра мас однорідного тіла, обмеженого поверхнями:

$$y = 3\sqrt{x^2+z^2}, x^2+z^2=36, y=0.$$

4. Знайти роботу сили $\vec{F} = y\,\vec{j} - x\,\vec{i}$ при переміщенні вздовж еліпса $(x, y\geqslant 0)$ $x^2 + \dfrac{y^2}{9} = 1$ від точки $M(1,0)$ до точки $N(0,3)$.

5. Знайти $\left.\dfrac{\partial u}{\partial \vec{n}}\right|_M$ ($\vec{n}$ – нормаль до поверхні S у точці M) за умови, що $u = x\sqrt{y} - (z+y)\sqrt{x}$; $S: x^2 - y^2 + z^2 = 4$; $\angle(\vec{n}, Oz) \leqslant 90°$; $M(1,1,-2)$.

6. Знайти потік векторного поля $\vec{a}$ крізь замкнену поверхню S (нормаль зовнішня):

$$\vec{a} = (x+y^2, xz+y, \sqrt{x^2+1}+z), S: x^2+y^2=z^2, z=2, z=3.$$

Варіант №14

1. Змінити порядок інтегрування:

$$\int\limits_0^1 \mathrm{d}y \int\limits_0^{\sqrt{y}} f\mathrm{d}x + \int\limits_1^2 \mathrm{d}y \int\limits_0^{\sqrt{2-y}} f\mathrm{d}x.$$

2. Обчислити:

$$1) \iint\limits_{D:y=\pi,y=3\pi,x=\frac{1}{2},x=1} y\cos xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \quad 2) \int\limits_{-R}^{0} \mathrm{d}x \int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{0} \cos(x^2+y^2)\mathrm{d}y.$$

$$3) \iiint\limits_{V:\ \substack{1\leqslant x^2+y^2+z^2\leqslant 9,\\ y,z\geqslant 0;\, x\geqslant\sqrt{3}y}} \frac{z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

3. Знайти координати центра мас однорідного тіла, обмеженого поверхнями:

$$3z = \sqrt{x^2+y^2}, x^2+y^2=4, z=0.$$

4. Знайти роботу сили $\vec{F} = (x^2+2y)\vec{i}+(y^2+2x)\vec{j}$ при переміщенні вздовж відрізка MN від точки $M(-4,0)$ до точки $N(0,2)$.

5. Знайти $\left.\dfrac{\partial u}{\partial \vec{l}}\right|_M$ за умови, що $u = xy - \dfrac{x}{z}$; $\vec{l} = (5,1,-1)$; $M(-4,3,-1)$.

6. Знайти потік векторного поля $\vec{a}$ крізь замкнену поверхню S (нормаль зовнішня):

$$\vec{a} = (-2x, z, x+y), S: x^2+y^2 = 2y, z = x^2+y^2, z=0.$$

Варіант №15

1. Змінити порядок інтегрування:

$$\int\limits_{-2}^{-1} \mathrm{d}y \int\limits_{-\sqrt{2+y}}^{0} f\mathrm{d}x + \int\limits_{-1}^{0} \mathrm{d}y \int\limits_{-\sqrt{-y}}^{0} f\mathrm{d}x.$$

2. Обчислити:

$$1) \iint\limits_{D:x=0,y=2,y=x} y^2 \exp\left(-\frac{xy}{4}\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y. \quad 2) \int\limits_0^1 \mathrm{d}x \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} \ln\left(1+x^2+y^2\right) \mathrm{d}y.$$

$$3) \iiint\limits_{V:\ \begin{array}{l} x^2+y^2+z^2=32, \\ y^2=x^2+z^2, y\geqslant 0 \end{array}} y\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

3. Знайти координати центра мас однорідного тіла, обмеженого поверхнями:

$$x^2+z^2=4y, y=9.$$

4. Знайти роботу сили $\vec{F}=(y^2-y)\vec{i}+(2xy+x)\vec{j}$ при переміщенні вздовж кола $x^2+y^2=9$ $(y\geqslant 0)$ від точки $M(3,0)$ до точки $N(0,3)$.

5. Знайти $\left.\dfrac{\partial u}{\partial \vec{n}}\right|_M$ ($\vec{n}$ – нормаль до поверхні S у точці M) за умови, що $u=x\sqrt{y}-yz^2; S: x^2+y^2=4z;$ $\angle(\vec{n},Oz)\leqslant 90^\circ, M(2,1,-1)$.

6. Знайти потік векторного поля $\vec{a}$ крізь замкнену поверхню S (нормаль зовнішня):

$$\vec{a}=(e^{-z}-x, xz+3y, z+x^2), S: 2x+y+z=2, x,y,z=0.$$

Варіант №16

1. Змінити порядок інтегрування:

$$\int\limits_0^1 \mathrm{d}y \int\limits_{1-y^2}^1 f\mathrm{d}x + \int\limits_1^e \mathrm{d}y \int\limits_{\ln y}^1 f\mathrm{d}x.$$

2. Обчислити:

$$1) \iint\limits_{D:y=\frac{\pi}{2},y=\frac{3\pi}{2},x=\frac{1}{2},x=2} y\cos 2xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \quad 2) \int\limits_0^1 \mathrm{d}x \int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \ln\frac{(1+\sqrt{x^2+y^2})}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}y.$$

$$3) \iiint\limits_{V:\ \substack{1\leqslant x^2+y^2+z^2\leqslant 4,\\ y\leqslant x;\, x,y,z\geqslant 0}} \frac{x\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

3. Знайти координати центра мас однорідного тіла, обмеженого поверхнями:

$$x^2+z^2=6y, y=8.$$

4. Знайти роботу сили $\vec{F}=(x^2+y^2)\vec{i}+(x^2-y^2)\vec{j}$ при переміщенні вздовж кривої $L:\begin{cases} x,\ 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 2-x,\ 1\leqslant x\leqslant 2;\end{cases}$ від точки $M(2,0)$ до точки $N(0,0)$.

5. Знайти $\left.\dfrac{\partial u}{\partial \vec{n}}\right|_M$ ($\vec{n}$ – нормаль до поверхні S у точці M) за умови, що $u=\sqrt{x^2+y^2}-z$; $S: x^2+y^2=24z$; $\angle(\vec{n},Oz)\leqslant 90^\circ$; $M(3,4,1)$.

6. Знайти потік векторного поля $\vec{a}$ крізь замкнену поверхню S (нормаль зовнішня):

$$\vec{a}=(5x-6y, 11x^2+2y, x^2-4z), S: x+y+2z=2, x,y,z=0.$$

Варіант №17

1. Змінити порядок інтегрування:

$$\int\limits_0^1 \mathrm{d}y \int\limits_0^{y^2} f\,\mathrm{d}x + \int\limits_1^2 \mathrm{d}y \int\limits_0^{2-y} f\,\mathrm{d}x.$$

2. Обчислити:

$$1) \iint\limits_{D:y=\ln 2, y=\ln 3, x=3, x=6} 6ye^{\frac{xy}{3}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \quad 2) \int\limits_0^3 \mathrm{d}x \int\limits_0^{\sqrt{9-x^2}} \ln(1+x^2+y^2)\mathrm{d}y.$$

$$3) \iiint\limits_{V:\ \begin{array}{c} 4 \le x^2+y^2+z^2 \le 16, \\ 0 \le y \le \sqrt{3}x, z \ge 0 \end{array}} \frac{y\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

3. Знайти координати центра мас однорідного тіла, обмеженого поверхнями:

$$z = 3(x^2+y^2), x^2+y^2 = 9, z = 0.$$

4. Знайти роботу сили $\vec{F} = (x+y)\vec{i} + (x-y)\vec{j}$ при переміщенні вздовж параболи $y = x^2$ від точки $M(-1,1)$ до точки $N(1,1)$.

5. Знайти $\left.\dfrac{\partial u}{\partial \vec{l}}\right|_M$ за умови, що $u = x^2y - \sqrt{xy+z^2}$; $\vec{l} = (0,2,-2)$; $M(1,5,-2)$.

6. Знайти потік векторного поля $\vec{a}$ крізь замкнену поверхню S (нормаль зовнішня):

$$\vec{a} = (\sqrt{z}+y, 3x, 3z+5x), S: z^2 = 8(x^2+y^2), z = 2.$$

Варіант №18

1. Змінити порядок інтегрування:

$$\int\limits_{-2}^{-\sqrt{3}} \mathrm{d}y \int\limits_{-\sqrt{4-y^2}}^{0} f\mathrm{d}x + \int\limits_{-\sqrt{3}}^{0} \mathrm{d}y \int\limits_{\sqrt{4-y^2}-2}^{0} f\mathrm{d}x.$$

2. Обчислити:

$$1) \iint\limits_{D:y=\frac{\pi}{2},y=\pi,x=\frac{1}{2},x=1} y\cos xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \quad 2) \int\limits_0^1 \mathrm{d}x \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}}\,\mathrm{d}y.$$

$$3) \iiint\limits_{V:\ \substack{z=3x^2+3y^2,\\ 0\leqslant y\leqslant\sqrt{3}x,\, z=3}} \frac{y^2 z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}.$$

3. Знайти координати центра мас однорідного тіла, обмеженого поверхнями:

$$8x = \sqrt{y^2+z^2}, x = {}^1\!/_2.$$

4. Знайти роботу сили $\vec{F} = (x+y)\vec{i} + 2x\vec{j}$ при переміщенні вздовж кола $x^2+y^2 = 4$ $(y\geqslant 0)$ від точки $M(2,0)$ до точки $N(-2,0)$.

5. Знайти $\left.\dfrac{\partial u}{\partial \vec{l}}\right|_M$ за умови, що $u = z^2 + 2\,\mathrm{arctg}(x-y)$; $\vec{l} = (1,2,-2)$; $M(1,2,-1)$.

6. Знайти потік векторного поля $\vec{a}$ крізь замкнену поверхню S (нормаль зовнішня):

$$\vec{a} = (3z^2+x, e^x-2y, 2z-xy), S: x^2+y^2 = z^2, z=1, z=4.$$

Варіант №19

1. Змінити порядок інтегрування:

$$\int\limits_{-2}^{-1} \mathrm{d}y \int\limits_{-2-y}^{0} f\,\mathrm{d}x + \int\limits_{-1}^{0} \mathrm{d}y \int\limits_{\sqrt[3]{y}}^{0} f\,\mathrm{d}x.$$

2. Обчислити:

$$1) \iint\limits_{D:x=0,y=\sqrt{2\pi},y=2x} 4y^2 \sin 2xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \quad 2) \int\limits_0^1 \mathrm{d}x \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} \frac{\mathrm{d}y}{1+\sqrt{x^2+y^2}}.$$

$$3) \iiint\limits_{V:\ \substack{x^2+y^2=2x,\\ x+z=2,\, y\geqslant 0}} \frac{y\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

3. Знайти координати центра мас однорідного тіла, обмеженого поверхнями:

$$x = 5\sqrt{y^2+z^2}, x = 20.$$

4. Знайти роботу сили $\vec{F} = (xy - y^2)\vec{i} + x\,\vec{j}$ при переміщенні вздовж параболи $y = 2x^2$ від точки $M(0,0)$ до точки $N(1,2)$.

5. Знайти $\left.\dfrac{\partial u}{\partial \vec{l}}\right|_M$ за умови, що $u = x(\ln y - \operatorname{arctg} z)$; $\vec{l} = (8,4,8)$; $M\,(-2,1,-1)$.

6. Знайти потік векторного поля $\vec{a}$ крізь замкнену поверхню S (нормаль зовнішня):

$$\vec{a} = (e^z + 2x, e^x, e^y), S : x + y + z = 1, x, y, z = 0.$$

Варіант №20

1. Змінити порядок інтегрування:

$$\int\limits_0^1 \mathrm{d}y \int\limits_{-\sqrt{y}}^0 f\,\mathrm{d}x + \int\limits_1^e \mathrm{d}y \int\limits_{-1}^{-\ln y} f\,\mathrm{d}x.$$

2. Обчислити:

$$1) \iint\limits_{D:y=\frac{\pi}{2},y=\pi,x=1,x=2} y\cos xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \quad 2) \int\limits_0^R \mathrm{d}x \int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \frac{\operatorname{tg}\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}y.$$

$$3) \iiint\limits_{V:\ \substack{1\leqslant x^2+y^2\leqslant 36,\\ y\geqslant x;\, x,\, z\geqslant 0;\, z\leqslant 2}} z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

3. Знайти координати центра мас однорідного тіла, обмеженого поверхнями:

$$x = 6\sqrt{y^2+z^2}, y^2+z^2 = 9, x = 0.$$

4. Знайти роботу сили $\vec{F} = (x^2+y^2)\vec{i} + y^2\vec{j}$ при переміщенні вздовж відрізка MN від точки $M(2,0)$ до точки $N(0,2)$.

5. Знайти $\left.\dfrac{\partial u}{\partial \vec{l}}\right|_M$ за умови, що $u = y\ln(1+x^2) - \operatorname{arctg} z$; $\vec{l} = (2,-3,-2)$; $M(0,1,1)$.

6. Знайти потік векторного поля $\vec{a}$ крізь замкнену поверхню S (нормаль зовнішня):

$$\vec{a} = (y+z, x-2y+z, x), S: x^2+y^2 = 1, z = x^2+y^2, z = 0.$$

Варіант №21

1. Змінити порядок інтегрування:

$$\int\limits_0^1 \mathrm{d}y \int\limits_0^y f\mathrm{d}x + \int\limits_1^e \mathrm{d}y \int\limits_{\ln y}^1 f\mathrm{d}x.$$

2. Обчислити:

$$1)\quad \iint\limits_{D:x=0,y=\sqrt{\pi},y=\frac{x}{2}} y^2 \sin\frac{xy}{2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \quad 2)\ \int\limits_{-\sqrt{3}}^{0} \mathrm{d}x \int\limits_0^{\sqrt{3-x^2}} \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{1+x^2+y^2}}.$$

$$3)\quad \iiint\limits_{V:\ \begin{array}{c} z^2=4x^2+4y^2, \\ z=2, y\geqslant \pm x, z\geqslant 0 \end{array}} y\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

3. Знайти координати центра мас однорідного тіла, обмеженого поверхнями:

$$y^2+z^2=3x, x=9.$$

4. Знайти роботу сили $\vec{F}=2(xy-x)\vec{i}+x^2\vec{j}$ при переміщенні вздовж $y=2\sqrt{x}$ від точки $M(0,0)$ до точки $N(1,2)$.

5. Знайти $\left.\dfrac{\partial u}{\partial \vec{n}}\right|_M$ ($\vec{n}$ – нормаль до поверхні S у точці M) за умови, що $u=\frac{1}{4}x^2y-\sqrt{x^2+5z^2}; S: z^2=x^2+4y^2-4; \angle(\vec{n},Oz)\leqslant 90^\circ, M\left(-2,\frac{1}{2},1\right)$.

6. Знайти потік векторного поля $\vec{a}$ крізь замкнену поверхню S (нормаль зовнішня):

$$\vec{a}=\left(4x-2y^2, \ln z-4y, x+\frac{3z}{4}\right),\ S: x^2+y^2+z^2=2x+3.$$

Варіант №22

1. Змінити порядок інтегрування:

$$\int\limits_{-\sqrt{2}}^{-1} \mathrm{d}y \int\limits_{0}^{\sqrt{2-y^2}} f\,\mathrm{d}x + \int\limits_{-1}^{0} \mathrm{d}y \int\limits_{0}^{y^2} f\,\mathrm{d}x.$$

2. Обчислити:

$$1) \iint\limits_{D:x=0,y=\sqrt{\frac{4\pi}{3}},y=\frac{2x}{3}} 3y^2 \sin\frac{xy}{2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \quad 2) \int\limits_{-3}^{3} \mathrm{d}x \int\limits_{-\sqrt{9-x^2}}^{0} \frac{xy}{x^2+y^2}\mathrm{d}y.$$

$$3) \iiint\limits_{V:\ \substack{x^2+y^2=2x;\, z\geqslant 0;\, z=4 \\ x^2+y^2=4x;\, 0\leqslant y\leqslant x}} \frac{x\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

3. Знайти координати центра мас однорідного тіла, обмеженого поверхнями:

$$x = 2\sqrt{y^2+z^2}, y^2+z^2=4, x=0.$$

4. Знайти роботу сили $\vec{F} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j}$ при переміщенні вздовж відрізка MN від точки $M(1,0)$ до точки $N(0,3)$.

5. Знайти $\left.\dfrac{\partial u}{\partial \vec{n}}\right|_M$ ($\vec{n}$ – нормаль до поверхні S у точці M) за умови, що $u = \ln(1+x^2+y^2) - \sqrt{x^2+z^2}$; $S: x^2-6x+9y^2+z^2=4z+4; \angle(\vec{n}, Oz) \leqslant 90^\circ, M(3,0,-4)$.

6. Знайти потік векторного поля $\vec{a}$ крізь замкнену поверхню S (нормаль зовнішня):

$$\vec{a} = (e^{2y}+x, x-2y, y^2+3z), S: x+y+z=1, x,y,z=0.$$

Варіант №23

1. Змінити порядок інтегрування:

$$\int\limits_0^1 \mathrm{d}y \int\limits_{-\sqrt{y}}^0 f\mathrm{d}x + \int\limits_1^2 \mathrm{d}y \int\limits_{-\sqrt{2-y}}^0 f\mathrm{d}x.$$

2. Обчислити:

$$1) \iint\limits_{D:x=0,y=1,y=\frac{x}{2}} y^2 e^{-\frac{xy}{2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \quad 2) \int\limits_{-R}^0 \mathrm{d}x \int\limits_0^{\sqrt{R^2-x^2}} \sin(x^2+y^2)\mathrm{d}y.$$

$$3) \iiint\limits_{V:\ \begin{array}{l} x^2-2x+y^2=0, \\ y,z\geqslant 0; x+z=2 \end{array}} \sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

3. Знайти координати центра мас однорідного тіла, обмеженого поверхнями:

$$9y = x^2+z^2, x^2+y^2=4, y=0.$$

4. Знайти роботу сили $\vec{F} = x\,\vec{j} - y\,\vec{i}$ при переміщенні вздовж $y = x^3$ від точки $M(0,0)$ до точки $N(2,8)$.

5. Знайти $\left.\dfrac{\partial u}{\partial \vec{l}}\right|_M$ за умови, що $u = \ln(x^2+y^2) + xyz$; $\vec{l} = (1,-1,5)$; $M(1,-1,2)$.

6. Знайти потік векторного поля $\vec{a}$ крізь замкнену поверхню S (нормаль зовнішня):

$$\vec{a} = \left(\cos z + \frac{x}{4}, e^x + \frac{y}{4}, \frac{z}{4} - 1\right), S: x^2+y^2+z^2 = 2z+3.$$

Варіант №24

1. Змінити порядок інтегрування:

$$\int\limits_0^1 \mathrm{d}y \int\limits_0^{y^2} f\,\mathrm{d}x + \int\limits_1^2 \mathrm{d}y \int\limits_0^{2-y} f\,\mathrm{d}x.$$

2. Обчислити:

$$1) \iint\limits_{D:x=0,y=\sqrt{2\pi},y=2x} y^2 \cos\frac{xy}{2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \quad 2) \int\limits_0^R \mathrm{d}x \int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \frac{\operatorname{tg}\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}y.$$

$$3) \iiint\limits_{V:\ \begin{array}{l} z=\sqrt{18-x^2-y^2}, \\ z=\sqrt{x^2+y^2}, x\geqslant 0 \end{array}} x\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

3. Знайти координати центра мас однорідного тіла, обмеженого поверхнями:

$$4y=\sqrt{x^2+z^2}, x^2+z^2=16, y=0.$$

4. Знайти роботу сили $\vec{F}=y\vec{i}-x\vec{j}$ при переміщенні вздовж кола $x^2+y^2=1$ $(y\geqslant 0)$ від точки $M(1,0)$ до точки $N(-1,0)$.

5. Знайти $\left.\dfrac{\partial u}{\partial \vec{n}}\right|_M$ ($\vec{n}$ – нормаль до поверхні S у точці M) за умови, що $u=2\ln(x^2-5)+4xyz$; $S: x^2+2y^2-2z^2=1$; $\angle(\vec{n},Oz)\leqslant 90^\circ$, $M(1,1,1)$.

6. Знайти потік векторного поля $\vec{a}$ крізь замкнену поверхню S (нормаль зовнішня):

$$\vec{a}=(8yz-x, x^2-1, xy-2z), S: 2x+3y-z=6, x,y,z=0.$$

Варіант №25

1. Змінити порядок інтегрування:

$$\int\limits_0^1 \mathrm{d}y \int\limits_0^y f\mathrm{d}x + \int\limits_1^{\sqrt{2}} \mathrm{d}y \int\limits_0^{\sqrt{2-y^2}} f\mathrm{d}x.$$

2. Обчислити:

$$1) \iint\limits_{D:y=\ln 2, y=\ln 3, x=4, x=8} ye^{\frac{xy}{4}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \quad 2) \int\limits_0^2 \mathrm{d}x \int\limits_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \frac{\mathrm{d}y}{1+x^2+y^2}.$$

$$3) \iiint\limits_{V:\ \begin{array}{c} x^2+y^2=4y, \\ y+z=4, z\geqslant 0 \end{array}} \frac{z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

3. Знайти координати центра мас однорідного тіла, обмеженого поверхнями:

$$y = x^2+z^2, x^2+z^2 = 10, y = 0.$$

4. Знайти роботу сили $\vec{F} = (x+y)^2\vec{i} - (x^2+y^2)\vec{j}$ при переміщенні вздовж відрізка MN від точки $M(1,0)$ до точки $N(0,1)$.

5. Знайти $\left.\dfrac{\partial u}{\partial \vec{n}}\right|_M$ ($\vec{n}$ – нормаль до поверхні S у точці M) за умови, що $u = x\sqrt{y}+y\sqrt{z}$; $S: 4z+2x^2-y^2 = 0$; $\angle(\vec{n}, Oz) \leqslant 90^\circ$; $M(2,4,4)$.

6. Знайти потік векторного поля $\vec{a}$ крізь замкнену поверхню S (нормаль зовнішня):

$$\vec{a} = (17x, 7y, 11z), S: z = x^2+y^2, z = 2(x^2+y^2), y = x^2, y = x.$$

Варіант №26

1. Змінити порядок інтегрування:

$$\int\limits_{-2}^{1} \mathrm{d}y \int\limits_{-2-y}^{0} f\,\mathrm{d}x + \int\limits_{-1}^{0} \mathrm{d}y \int\limits_{\sqrt[3]{y}}^{0} f\,\mathrm{d}x.$$

2. Обчислити:

$$1) \iint\limits_{D:y=\frac{\pi}{2},y=\frac{3\pi}{2},x=\frac{1}{2},x=2} y\sin 2xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \quad 2) \int\limits_{-1}^{1} \mathrm{d}x \int\limits_{0}^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1+x^2+y^2}\mathrm{d}y.$$

$$3) \iiint\limits_{V:\ \substack{1\leqslant x^2+y^2\leqslant 16,\\ 0\leqslant y\leqslant x;\, z\geqslant 0}} x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

3. Знайти координати центра мас однорідного тіла, обмеженого поверхнями:

$$x = y^2 + z^2, y^2 + z^2 = 9, x = 0.$$

4. Знайти роботу сили $\vec{F} = (x^2 + y^2)\vec{i} + (2x^2 + 2y^2)\vec{j}$ при переміщенні вздовж кола $x^2 + y^2 = R^2$ $(y\geqslant 0)$ від точки $M(R, 0)$ до точки $N(-R, 0)$.

5. Знайти $\left.\dfrac{\partial u}{\partial \vec{l}}\right|_M$ за умови, що $u = x^2y^2z - \ln(z-1)$; $\vec{l} = (5, -6, 2\sqrt{5})$; $M(1, 1, 2)$.

6. Знайти потік векторного поля $\vec{a}$ крізь замкнену поверхню S (нормаль зовнішня):

$$\vec{a} = \left(e^x + 2x, xz - y, \frac{1}{4}e^{xy} - \frac{z}{4}\right), S : x^2 + y^2 + z^2 = 2y + 3.$$

Варіант №27

1. Змінити порядок інтегрування:

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{d}y \int\limits_0^{\sin y} f\,\mathrm{d}x + \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}y \int\limits_0^{\cos y} f\,\mathrm{d}x.$$

2. Обчислити:

$$1) \iint\limits_{D:y=\frac{\pi}{2},y=\pi,x=1,x=2} y\sin xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \quad 2) \int\limits_{-2}^{2} \mathrm{d}x \int\limits_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} \sqrt{4-x^2-y^2}\,\mathrm{d}y.$$

$$3) \iiint\limits_{V:\ \begin{array}{l} x^2+y^2+z^2=8, \\ x^2=y^2+z^2, x\geqslant 0 \end{array}} x\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

3. Знайти координати центра мас однорідного тіла, обмеженого поверхнями:

$$z = x^2+y^2, x^2+y^2=4, z=0.$$

4. Знайти роботу сили $\vec{F} = y\vec{i} - x\vec{j}$ при переміщенні вздовж еліпса $2x^2+y^2=1$ $(y\geqslant 0)$ від точки $M\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)$ до точки $N\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)$.

5. Знайти $\left.\dfrac{\partial u}{\partial \vec{l}}\right|_M$ за умови, що $u = \sin(x+2y) + \sqrt{xyz}$; $\vec{l} = (4,3,0)$; $M\left(\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}, 3\right)$.

6. Знайти потік векторного поля $\vec{a}$ крізь замкнену поверхню S (нормаль зовнішня):

$$\vec{a} = (\sqrt{z}-2x, e^x+3y, \sqrt{y+x}), S: x^2+y^2=z^2, z=2, z=5.$$

Варіант №28

1. Змінити порядок інтегрування:

$$\int\limits_0^{\sqrt{3}} \mathrm{d}y \int\limits_{\sqrt{4-y^2}-2}^{0} f\mathrm{d}x + \int\limits_{\sqrt{3}}^{2} \mathrm{d}y \int\limits_{-\sqrt{4-y^2}}^{0} f\mathrm{d}x.$$

2. Обчислити:

$$1) \iint\limits_{D:x=0,y=\sqrt{\frac{\pi}{2}},y=\frac{x}{2}} y^2\cos 2xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \quad 2) \int\limits_0^2 \mathrm{d}x \int\limits_0^{\sqrt{4-x^2}} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}y.$$

$$3) \iiint\limits_{V:\ \begin{array}{l} x^2+y^2=2y, z=6, \\ x^2+y^2=4y, x, z\geqslant 0 \end{array}} \frac{y\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

3. Знайти координати центра мас однорідного тіла, обмеженого поверхнями:

$$z = 9\sqrt{x^2+y^2}, z = 36.$$

4. Знайти роботу сили $\vec{F} = (x+y)\vec{i} + (x-y)\vec{j}$ при переміщенні вздовж еліпса $x^2 + {y^2}/{9} = 1$ $(x, y\geqslant 0)$ від точки $M(1,0)$ до точки $N(0,3)$.

5. Знайти $\left.\dfrac{\partial u}{\partial \vec{n}}\right|_M$ ($\vec{n}$ – нормаль до поверхні S у точці M) за умови, що $u = \sqrt{xy} - \sqrt{4-z^2}$; $S: z = x^2 - y^2$; $\angle(\vec{n}, Oz)\leqslant 90^\circ$; $M(1,1,0)$.

6. Знайти потік векторного поля $\vec{a}$ крізь замкнену поверхню S (нормаль зовнішня):

$$\vec{a} = (2yz - x, xz + 2y, x^2 + z), S: y - x + z = 1, x, y, z = 0.$$

Варіант №29

1. Змінити порядок інтегрування:

$$\int\limits_0^1 \mathrm{d}y \int\limits_{-\sqrt{y}}^0 f\,\mathrm{d}x + \int\limits_1^2 \mathrm{d}y \int\limits_{-\sqrt{2-y}}^0 f\,\mathrm{d}x.$$

2. Обчислити:

$$1)\ \iint\limits_{D:x=0,y=2,y=\frac{x}{2}} y^2 \exp\left(-\frac{xy}{8}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \quad 2)\ \int\limits_{-R}^{R}\mathrm{d}x \int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \sin\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}y.$$

$$3)\ \iiint\limits_{V:\ \substack{x^2+y^2+z^2=16,\\ z\geqslant 0}} \frac{x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}.$$

3. Знайти координати центра мас однорідного тіла, обмеженого поверхнями:

$$x, y, z = 0; x + y + z = 3.$$

4. Знайти роботу сили $\vec{F} = (2xy - y)\vec{i} + (x^2 + x)\vec{j}$ при переміщенні вздовж кола $x^2 + y^2 = 9\,(y\geqslant 0)$ від точки $M(3, 0)$ до точки $N(-3, 0)$.

5. Знайти $\left.\dfrac{\partial u}{\partial \vec{n}}\right|_M$ ($\vec{n}$ – нормаль до поверхні S у точці M) за умови, що $u = 7\ln\left(\frac{1}{13} + x^2\right) - 4xyz$; S : $7x^2 - 4y^2 + 4z^2 = 7; \angle(\vec{n}, Oz)\leqslant 90^\circ, M(1, 1, 1)$.

6. Знайти потік векторного поля $\vec{a}$ крізь замкнену поверхню S (нормаль зовнішня):

$$\vec{a} = (yz - 2x, \sin x + y, x - 2z), S : x + 2y - 3z = 6, x, y, z = 0.$$

Варіант №30

1. Змінити порядок інтегрування:

$$\int\limits_{-2}^{-1} \mathrm{d}y \int\limits_{0}^{\sqrt{2+y}} f\,\mathrm{d}x + \int\limits_{-1}^{0} \mathrm{d}y \int\limits_{0}^{\sqrt{-y}} f\,\mathrm{d}x.$$

2. Обчислити:

$$1) \iint\limits_{D:x=0,y=\sqrt{\frac{\pi}{2}},y=x} y^2 e^{-\frac{xy}{8}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \quad 2) \int\limits_{0}^{2} \mathrm{d}x \int\limits_{0}^{\sqrt{4-x^2}} \cos\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}y.$$

$$3) \iiint\limits_{V:\ \begin{array}{c} x^2 = 2(y^2+z^2), \\ x=4, x\geqslant 0 \end{array}} x\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

3. Знайти координати центра мас однорідного тіла, обмеженого поверхнями:

$$2x = y^2 + z^2, y^2 + z^2 = 4, x = 0.$$

4. Знайти роботу сили $\vec{F} = x^2 y\,\vec{i} - xy^2\vec{j}$ при переміщенні вздовж кола $(x, y\geqslant 0)$ $x^2 + y^2 = 4$ від точки $M(2,0)$ до точки $N(0,2)$.

5. Знайти $\left.\dfrac{\partial u}{\partial \vec{n}}\right|_M$ ($\vec{n}$ – нормаль до поверхні S у точці M) за умови, що $u = (x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}$; $S: 2x^2 - y^2 + z^2 = 1$; $\angle(\vec{n}, Oz) \leqslant 90°$; $M(0,-3,4)$.

6. Знайти потік векторного поля $\vec{a}$ крізь замкнену поверхню S (нормаль зовнішня):

$$\vec{a} = (3x - 2z, z - 2y, 1 + 2z), S: z^2 = 4(x^2 + y^2), z = 2.$$