Варіант №1

1. Змінити порядок інтегрування:

$$\int\limits_0^1 \mathrm{d}y \int\limits_0^y f\mathrm{d}x + \int\limits_1^{\sqrt{2}} \mathrm{d}y \int\limits_0^{\sqrt{2-y^2}} f\mathrm{d}x.$$

2. Обчислити:

1) $\iint\limits_{D: y=\frac{\pi}{2}, y=\frac{\pi}{4}, x=1, x=2} 2y\cos 2xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$ 2) $\int\limits_{-R}^{R} \mathrm{d}x \int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{0} \frac{\sin\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}y.$

3) $\iiint\limits_{V: \begin{array}{c} x^2+y^2=16y, \\ y+z=16; x, z\geqslant 0 \end{array}} \frac{x\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\sqrt{x^2+y^2}}.$

3. Знайти координати центра мас однорідного тіла, обмеженого поверхнями:

$$x, y, z = 0; x + y + z = 3.$$

4. Знайти роботу сили $\vec{F} = (x+y)\vec{i} + (x-y)\vec{j}$ при переміщенні вздовж еліпса $x^2 + {y^2}/{9} = 1$ $(x, y\geqslant 0)$ від точки $M(1,0)$ до точки $N(0,3)$.

5. Знайти $\left.\frac{\partial u}{\partial \vec{l}}\right|_M$ за умови, що $u = y\ln(1+x^2) - \operatorname{arctg} z$; $\vec{l} = (2,-3,-2)$; $M(0,1,1)$.

6. Знайти потік векторного поля $\vec{a}$ крізь замкнену поверхню S (нормаль зовнішня):

$$\vec{a} = (e^z + 2x, e^x, e^y), S : x + y + z = 1, x, y, z = 0.$$

Варіант №2

1. Змінити порядок інтегрування:

$$\int_0^{\sqrt{3}} \mathrm{d}y \int_0^{2-\sqrt{4-y^2}} f\mathrm{d}x + \int_{\sqrt{3}}^{2} \mathrm{d}y \int_0^{\sqrt{4-y^2}} f\mathrm{d}x.$$

2. Обчислити:

$$1) \iint\limits_{D: y=\pi, y=2\pi, x=\frac{1}{2}, x=1} y\sin xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \quad 2) \int_{-R}^{R} \mathrm{d}x \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{0} \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2}\cos^2\sqrt{x^2+y^2}}.$$

$$3) \iiint\limits_{V: \begin{array}{c} 2\leqslant x^2+y^2+z^2\leqslant 8, \\ z^2=x^2+y^2; x,y,z\geqslant 0 \end{array}} xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

3. Знайти координати центра мас однорідного тіла, обмеженого поверхнями:

$$z = x^2+y^2, x^2+y^2 = 4, z = 0.$$

4. Знайти роботу сили $\vec{F} = (x^2-2y)\vec{i} + (y^2-2x)\vec{j}$ при переміщенні вздовж відрізка MN від точки $M(-4,0)$ до точки $N(0,2)$.

5. Знайти $\left.\dfrac{\partial u}{\partial \vec{n}}\right|_M$ ($\vec{n}$ – нормаль до поверхні S у точці M) за умови, що $u = x\sqrt{y}+y\sqrt{z}$; $S: 4z+2x^2-y^2=0$; $\angle(\vec{n}, Oz)\leqslant 90°$; $M(2,4,4)$.

6. Знайти потік векторного поля $\vec{a}$ крізь замкнену поверхню S (нормаль зовнішня):

$$\vec{a} = (2yz-x, xz+2y, x^2+z), S: y-x+z=1, x,y,z=0.$$

Варіант №3

1. Змінити порядок інтегрування:

$$\int\limits_{-2}^{-1} \mathrm{d}y \int\limits_{0}^{\sqrt{2+y}} f \mathrm{d}x + \int\limits_{-1}^{0} \mathrm{d}y \int\limits_{0}^{\sqrt{-y}} f \mathrm{d}x.$$

2. Обчислити:

$$1) \iint\limits_{D: x=0, y=1, y=\frac{x}{2}} y^2 e^{-\frac{xy}{2}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y. \quad 2) \int\limits_{-R}^{0} \mathrm{d}x \int\limits_{0}^{\sqrt{R^2-x^2}} \sin(x^2+y^2)\mathrm{d}y.$$

$$3) \iiint\limits_{V: \begin{array}{l} x^2-2x+y^2=0, \\ y, z \geqslant 0; x+z=2 \end{array}} \sqrt{x^2+y^2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

3. Знайти координати центра мас однорідного тіла, обмеженого поверхнями:

$$y = 3\sqrt{x^2+z^2}, x^2+z^2 = 36, y = 0.$$

4. Знайти роботу сили $\vec{F} = (xy - y^2)\vec{i} + x\,\vec{j}$ при переміщенні вздовж параболи $y = 2x^2$ від точки $M(0,0)$ до точки $N(1,2)$.

5. Знайти $\left.\dfrac{\partial u}{\partial \vec{l}}\right|_M$ за умови, що $u = \ln(x^2+y^2) + xyz$; $\vec{l} = (1,-1,5)$; $M(1,-1,2)$.

6. Знайти потік векторного поля $\vec{a}$ крізь замкнену поверхню S (нормаль зовнішня):

$$\vec{a} = (yz + x, x^2 + y, xy^2 + z), S : x^2 + y^2 + z^2 = 2z.$$

Варіант №4

1. Змінити порядок інтегрування:

$$\int\limits_{0}^{1} \mathrm{d}y \int\limits_{1-y^2}^{1} f \mathrm{d}x + \int\limits_{1}^{e} \mathrm{d}y \int\limits_{\ln y}^{1} f \mathrm{d}x.$$

2. Обчислити:

$$1) \iint\limits_{D: y=\pi, y=3\pi, x=\frac{1}{2}, x=1} y \cos xy \mathrm{d}x \mathrm{d}y. \quad 2) \int\limits_{-R}^{0} \mathrm{d}x \int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{0} \cos(x^2+y^2) \mathrm{d}y.$$

$$3) \iiint\limits_{V:\ \substack{1 \leqslant x^2+y^2+z^2 \leqslant 9, \\ y, z \geqslant 0;\, x \geqslant \sqrt{3} y}} \frac{z \mathrm{d}x \mathrm{d}y \mathrm{d}z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

3. Знайти координати центра мас однорідного тіла, обмеженого поверхнями:

$$z = 9\sqrt{x^2+y^2}, z = 36.$$

4. Знайти роботу сили $\vec{F} = (x+y)\vec{i} + 2x\vec{j}$ при переміщенні вздовж кола $x^2 + y^2 = 4$ $(y \geqslant 0)$ від точки $M(2,0)$ до точки $N(-2,0)$.

5. Знайти $\left.\dfrac{\partial u}{\partial \vec{l}}\right|_M$ за умови, що $u = \sin(x+2y) + \sqrt{xyz}$; $\vec{l} = (4,3,0)$; $M\left(\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}, 3\right)$.

6. Знайти потік векторного поля $\vec{a}$ крізь замкнену поверхню S (нормаль зовнішня):

$$\vec{a} = \left(e^z + \frac{x}{4}, \ln x + \frac{y}{4}, \frac{z}{4}\right), S: (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2 = 1.$$

Варіант №5

1. Змінити порядок інтегрування:

$$\int\limits_0^1 \mathrm{d}y \int\limits_0^y f\mathrm{d}x + \int\limits_1^{\sqrt{2}} \mathrm{d}y \int\limits_0^{\sqrt{2-y^2}} f\mathrm{d}x.$$

2. Обчислити:

$$1) \iint\limits_{D: x=0, y=\sqrt{2\pi}, y=2x} 4y^2 \sin 2xy \mathrm{d}x\mathrm{d}y. \quad 2) \int\limits_0^1 \mathrm{d}x \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} \frac{\mathrm{d}y}{1+\sqrt{x^2+y^2}}.$$

$$3) \iiint\limits_{V:\ \begin{subarray}{c} x^2+y^2=2x, \\ x+z=2,\, y\geqslant 0 \end{subarray}} \frac{y\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

3. Знайти координати центра мас однорідного тіла, обмеженого поверхнями:

$$y = \sqrt{x^2+z^2}, y = 4.$$

4. Знайти роботу сили $\vec{F} = y\,\vec{i} - x\,\vec{j}$ при переміщенні вздовж кола $x^2+y^2=2$ $(y\geqslant 0)$ від точки $M(\sqrt{2}, 0)$ до точки $N(-\sqrt{2}, 0)$.

5. Знайти $\left.\dfrac{\partial u}{\partial \vec{n}}\right|_M$ ($\vec{n}$ – нормаль до поверхні S у точці M) за умови, що $u = \ln(1+x^2+y^2) - \sqrt{x^2+z^2}$; $S: x^2-6x+9y^2+z^2=4z+4; \angle(\vec{n}, Oz)\leqslant 90°, M(3,0,-4)$.

6. Знайти потік векторного поля $\vec{a}$ крізь замкнену поверхню S (нормаль зовнішня):

$$\vec{a} = (\sqrt{z}+y, 3x, 3z+5x), S: z^2 = 8(x^2+y^2), z=2.$$

Варіант №6

1. Змінити порядок інтегрування:

$$\int\limits_0^1 \mathrm{d}y \int\limits_{-y}^0 f\mathrm{d}x + \int\limits_1^{\sqrt{2}} \mathrm{d}y \int\limits_{-\sqrt{2-y^2}}^0 f\mathrm{d}x.$$

2. Обчислити:

$$1)\ \iint\limits_{D:y=\frac{\pi}{2},y=\pi,x=1,x=2} y\sin xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \quad 2)\ \int\limits_{-2}^{2} \mathrm{d}x \int\limits_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} \sqrt{4-x^2-y^2}\,\mathrm{d}y.$$

$$3)\ \iiint\limits_{V:\ \substack{x^2+y^2+z^2=8,\\ x^2=y^2+z^2,\, x\geqslant 0}} x\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

3. Знайти координати центра мас однорідного тіла, обмеженого поверхнями:

$$z = 5(x^2+y^2), x^2+y^2 = 2, z = 0.$$

4. Знайти роботу сили $\vec{F} = \left(y\sqrt{x^2+y^2}+x\right)\vec{i}+(y-x\sqrt{x^2+y^2})\vec{j}$ при переміщенні вздовж кола $x^2+y^2 = 1$ $(y\geqslant 0)$ від точки $M(1,0)$ до точки $N(-1,0)$.

5. Знайти $\left.\dfrac{\partial u}{\partial \vec{l}}\right|_M$ за умови, що $u = x(\ln y - \operatorname{arctg} z)$; $\vec{l} = (8,4,8)$; $M\,(-2,1,-1)$.

6. Знайти потік векторного поля $\vec{a}$ крізь замкнену поверхню S (нормаль зовнішня):

$$\vec{a} = (y+z^2, x^2+3y, xy), S : x^2+y^2+z^2 = 2x.$$

Варіант №7

1. Змінити порядок інтегрування:
$$\int\limits_0^1 \mathrm{d}y \int\limits_0^{\sqrt[3]{y}} f\mathrm{d}x + \int\limits_1^2 \mathrm{d}y \int\limits_0^{2-y} f\mathrm{d}x.$$

2. Обчислити:

$$1) \iint\limits_{D: y=\ln 2, y=\ln 3, x=2, x=4} y\exp\left(\frac{xy}{2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \quad 2) \int\limits_0^1 \mathrm{d}x \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}}\,\mathrm{d}y.$$
$$3) \iiint\limits_{V:\ \begin{subarray}{l} x^2+y^2+z^2=4, \\ x,y,z\geqslant 0 \end{subarray}} (x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

3. Знайти координати центра мас однорідного тіла, обмеженого поверхнями:
$$9y = x^2 + z^2, x^2 + y^2 = 4, y = 0.$$

4. Знайти роботу сили $\vec{F} = y^2\vec{i} - x^2\vec{j}$ при переміщенні вздовж кола $(x, y\geqslant 0)$ $x^2 + y^2 = 9$ від точки $M(3, 0)$ до точки $N(0, 3)$.

5. Знайти $\left.\dfrac{\partial u}{\partial \vec{n}}\right|_M$ ($\vec{n}$ – нормаль до поверхні S у точці M) за умови, що $u = \sqrt{xy} - \sqrt{4-z^2}$; $S : z = x^2 - y^2$; $\angle(\vec{n}, Oz)\leqslant 90°$; $M(1, 1, 0)$.

6. Знайти потік векторного поля $\vec{a}$ крізь замкнену поверхню S (нормаль зовнішня):
$$\vec{a} = (x + y^2, xz + y, \sqrt{x^2+1} + z), S : x^2 + y^2 = z^2, z = 2, z = 3.$$

Варіант №8

1. Змінити порядок інтегрування:

$$\int\limits_0^1 \mathrm{d}y \int\limits_0^y f\mathrm{d}x + \int\limits_1^e \mathrm{d}y \int\limits_{\ln y}^1 f\mathrm{d}x.$$

2. Обчислити:

$$1) \iint\limits_{D: x=0, y=\sqrt{\frac{\pi}{2}}, y=x} y^2 e^{-\frac{xy}{8}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y. \quad 2) \int\limits_0^2 \mathrm{d}x \int\limits_0^{\sqrt{4-x^2}} \cos\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}y.$$

$$3) \iiint\limits_{V: \begin{array}{c} x^2 = 2(y^2+z^2), \\ x=4, x\geqslant 0 \end{array}} x\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

3. Знайти координати центра мас однорідного тіла, обмеженого поверхнями:

$$x = y^2 + z^2, y^2 + z^2 = 9, x = 0.$$

4. Знайти роботу сили $\vec{F} = x^2\vec{j}$ при переміщенні вздовж кола $x^2 + y^2 = 9$ $(x, y \geqslant 0)$ від точки $M(3, 0)$ до точки $N(0, 3)$.

5. Знайти $\left.\dfrac{\partial u}{\partial \vec{l}}\right|_M$ за умови, що $u = x^2y^2z - \ln(z-1)$; $\vec{l} = (5, -6, 2\sqrt{5})$; $M(1, 1, 2)$.

6. Знайти потік векторного поля $\vec{a}$ крізь замкнену поверхню S (нормаль зовнішня):

$$\vec{a} = (3x - 2z, z - 2y, 1 + 2z), S : z^2 = 4(x^2 + y^2), z = 2.$$

Варіант №9

1. Змінити порядок інтегрування:
$$\int\limits_0^1 \mathrm{d}y \int\limits_0^{\sqrt{y}} f\mathrm{d}x + \int\limits_1^2 \mathrm{d}y \int\limits_0^{\sqrt{2-y}} f\mathrm{d}x.$$

2. Обчислити:
$$1) \iint\limits_{D: y=\ln 2, y=\ln 3, x=3, x=6} 6ye^{\frac{xy}{3}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \quad 2) \int\limits_0^3 \mathrm{d}x \int\limits_0^{\sqrt{9-x^2}} \ln(1+x^2+y^2)\mathrm{d}y.$$
$$3) \iiint\limits_{V: \begin{array}{c} 4 \le x^2+y^2+z^2 \le 16, \\ 0 \le y \le \sqrt{3}x, z \ge 0 \end{array}} \frac{y\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

3. Знайти координати центра мас однорідного тіла, обмеженого поверхнями:
$$z = 2\sqrt{x^2+y^2}, x^2+y^2 = 9, z = 0.$$

4. Знайти роботу сили $\vec{F} = x^2y\,\vec{i} - xy^2\vec{j}$ при переміщенні вздовж кола $(x, y \geqslant 0)$ $x^2 + y^2 = 4$ від точки $M(2, 0)$ до точки $N(0, 2)$.

5. Знайти $\left.\dfrac{\partial u}{\partial \vec{n}}\right|_M$ ($\vec{n}$ – нормаль до поверхні S у точці M) за умови, що $u = x\sqrt{y} - (z+y)\sqrt{x}$; $S : x^2 - y^2 + z^2 = 4$; $\angle(\vec{n}, Oz) \leqslant 90°$; $M(1, 1, -2)$.

6. Знайти потік векторного поля $\vec{a}$ крізь замкнену поверхню S (нормаль зовнішня):
$$\vec{a} = (8x+1, zx-4y, e^x - z), S : x^2+y^2+z^2 = 2y.$$

Варіант №10

1. Змінити порядок інтегрування:

$$\int\limits_{-\sqrt{2}}^{-1} \mathrm{d}y \int\limits_{-\sqrt{2-y^2}}^{0} f\mathrm{d}x + \int\limits_{-1}^{0} \mathrm{d}y \int\limits_{y}^{0} f\mathrm{d}x.$$

2. Обчислити:

$$1) \iint\limits_{D: x=0, y=\sqrt{2}, y=x} y^2 e^{-\frac{xy}{2}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y. \quad 2) \int\limits_0^R \mathrm{d}x \int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2}\cos^2\sqrt{x^2+y^2}}.$$

$$3) \iiint\limits_{V:\ \substack{x^2+y^2=2x,\\ x+z=2,\, z\geqslant 0}} \sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

3. Знайти координати центра мас однорідного тіла, обмеженого поверхнями:

$$3z = \sqrt{x^2+y^2}, x^2+y^2=4, z=0.$$

4. Знайти роботу сили $\vec{F} = (x^2+y^2)\vec{i} + (x^2-y^2)\vec{j}$ при переміщенні вздовж кривої $L: \begin{cases} x,\ 0\leqslant x\leqslant 1, \\ 2-x,\ 1\leqslant x\leqslant 2; \end{cases}$ від точки $M(2,0)$ до точки $N(0,0)$.

5. Знайти $\left.\dfrac{\partial u}{\partial \vec{l}}\right|_M$ за умови, що $u = (x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}; \vec{l} = (1,-1,1); M(1,1,1)$.

6. Знайти потік векторного поля $\vec{a}$ крізь замкнену поверхню S (нормаль зовнішня):

$$\vec{a} = (e^{-z}-x, xz+3y, z+x^2), S: 2x+y+z=2, x, y, z=0.$$

Варіант №11

1. Змінити порядок інтегрування:

$$\int\limits_{0}^{1} \mathrm{d}y \int\limits_{-\sqrt{y}}^{0} f\mathrm{d}x + \int\limits_{1}^{2} \mathrm{d}y \int\limits_{-\sqrt{2-y}}^{0} f\mathrm{d}x.$$

2. Обчислити:

$$1) \iint\limits_{D: y=\ln 3, y=\ln 4, x=\frac{1}{4}, x=\frac{1}{2}} 8ye^{4xy}\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \quad 2) \int\limits_{-R}^{0} \mathrm{d}x \int\limits_{0}^{\sqrt{R^2-x^2}} \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{ctg}\,\sqrt{x^2+y^2}}.$$

$$3) \iiint\limits_{V:\ \substack{x^2+y^2+z^2=36,\\ y,z\geqslant 0,\ y\leqslant -x}} \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

3. Знайти координати центра мас однорідного тіла, обмеженого поверхнями:

$$2x = y^2 + z^2, y^2 + z^2 = 4, x = 0.$$

4. Знайти роботу сили $\vec{F} = (x^2 + y^2)\vec{i} + y^2\vec{j}$ при переміщенні вздовж відрізка MN від точки $M(2,0)$ до точки $N(0,2)$.

5. Знайти $\left.\dfrac{\partial u}{\partial \vec{n}}\right|_M$ ($\vec{n}$ – нормаль до поверхні S у точці M) за умови, що $u = \mathrm{arctg}\,\dfrac{y}{x} + xz$; $S : x^2 + y^2 - 2z = 10$; $M\,(3; 5; 12)$.

6. Знайти потік векторного поля $\vec{a}$ крізь замкнену поверхню S (нормаль зовнішня):

$$\vec{a} = (8yz - x, x^2 - 1, xy - 2z), S : 2x + 3y - z = 6, x, y, z = 0.$$

Варіант №12

1. Змінити порядок інтегрування:

$$\int\limits_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \mathrm{d}y \int\limits_0^{\arcsin y} f \mathrm{d}x + \int\limits_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1} \mathrm{d}y \int\limits_0^{\arccos y} f \mathrm{d}x.$$

2. Обчислити:

1) $\iint\limits_{D: x=0, y=2, y=\frac{x}{2}} y^2 \exp\left(-\frac{xy}{8}\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$ 2) $\int\limits_{-R}^{R} \mathrm{d}x \int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \sin\sqrt{x^2+y^2}\, \mathrm{d}y.$

3) $\iiint\limits_{V:\ x^2+y^2+z^2=16,\ z\geqslant 0} \frac{x^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}.$

3. Знайти координати центра мас однорідного тіла, обмеженого поверхнями:

$$y = x^2 + z^2, x^2 + z^2 = 10, y = 0.$$

4. Знайти роботу сили $\vec{F} = x\,\vec{j} - y\,\vec{i}$ при переміщенні вздовж $y = x^3$ від точки $M(0,0)$ до точки $N(2,8)$.

5. Знайти $\left.\frac{\partial u}{\partial \vec{l}}\right|_M$ за умови, що $u = \ln(3 - x^2) + xy^2 z$; $\vec{l} = (-1, 2, -2)$; $M\,(1, 3, 2)$.

6. Знайти потік векторного поля $\vec{a}$ крізь замкнену поверхню S (нормаль зовнішня):

$$\vec{a} = (y + z, x - 2y + z, x), S : x^2 + y^2 = 1, z = x^2 + y^2, z = 0.$$

Варіант №13

1. Змінити порядок інтегрування:

$$\int\limits_{0}^{\sqrt{3}} \mathrm{d}y \int\limits_{\sqrt{4-y^2}-2}^{0} f \mathrm{d}x + \int\limits_{\sqrt{3}}^{2} \mathrm{d}y \int\limits_{-\sqrt{4-y^2}}^{0} f \mathrm{d}x.$$

2. Обчислити:

$$1) \iint\limits_{D: y=\frac{\pi}{4}, y=\frac{\pi}{2}, x=2, x=3} 12y \sin 2xy \mathrm{d}x\mathrm{d}y. \quad 2) \int\limits_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \mathrm{d}x \int\limits_{0}^{\sqrt{3-x^2}} \sqrt{1+x^2+y^2}\, \mathrm{d}y.$$

$$3) \iiint\limits_{V: \begin{array}{c} z=2(x^2+y^2), \\ 0 \leqslant y \leqslant \frac{x}{\sqrt{3}}, z=18 \end{array}} \frac{xz \mathrm{d}x \mathrm{d}y \mathrm{d}z}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

3. Знайти координати центра мас однорідного тіла, обмеженого поверхнями:

$$z = 2\sqrt{x^2+y^2}, z = 8.$$

4. Знайти роботу сили $\vec{F} = (x+y)\vec{i} + (x-y)\vec{j}$ при переміщенні вздовж параболи $y = x^2$ від точки $M(-1,1)$ до точки $N(1,1)$.

5. Знайти $\left.\dfrac{\partial u}{\partial \vec{l}}\right|_M$ за умови, що $u = z^2 + 2\,\mathrm{arctg}(x-y)$; $\vec{l} = (1,2,-2)$; $M(1,2,-1)$.

6. Знайти потік векторного поля $\vec{a}$ крізь замкнену поверхню S (нормаль зовнішня):

$$\vec{a} = (e^{2y}+x, x-2y, y^2+3z), S: x+y+z=1, x, y, z = 0.$$

Варіант №14

1. Змінити порядок інтегрування:

$$\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{d}y \int\limits_{0}^{\sin y} f \mathrm{d}x + \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}y \int\limits_{0}^{\cos y} f \mathrm{d}x.$$

2. Обчислити:

$$1) \iint\limits_{D: x=0, y=\sqrt{\pi}, y=x} y^2 \cos xy \mathrm{d}x\mathrm{d}y. : \quad 2) \int\limits_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \mathrm{d}x \int\limits_{-\sqrt{2-x^2}}^{\sqrt{2-x^2}} (1+x^2+y^2)\,\mathrm{d}y.$$

$$3) \iiint\limits_{V: \begin{array}{c} z=x^2+y^2, \\ 0\leqslant y\leqslant x;\, z=4 \end{array}} \frac{xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}.$$

3. Знайти координати центра мас однорідного тіла, обмеженого поверхнями:

$$x^2+y^2=2z, z=3.$$

4. Знайти роботу сили $\vec{F}=(2xy-y)\vec{i}+(x^2+x)\vec{j}$ при переміщенні вздовж кола $x^2+y^2=9\,(y\geqslant 0)$ від точки $M(3,0)$ до точки $N(-3,0)$.

5. Знайти $\left.\dfrac{\partial u}{\partial \vec{n}}\right|_M$ ($\vec{n}$ – нормаль до поверхні S у точці M) за умови, що $u=\sqrt{x^2+y^2}-z; S: x^2+y^2=24z;$ $\angle(\vec{n}, Oz)\leqslant 90°; M(3,4,1)$.

6. Знайти потік векторного поля $\vec{a}$ крізь замкнену поверхню S (нормаль зовнішня):

$$\vec{a}=\left(e^x+2x, xz-y, \frac{1}{4}e^{xy}-\frac{z}{4}\right), S: x^2+y^2+z^2=2y+3.$$

Варіант №15

1. Змінити порядок інтегрування:

$$\int\limits_0^1 \mathrm{d}y \int\limits_{-\sqrt{y}}^{0} f\mathrm{d}x + \int\limits_1^2 \mathrm{d}y \int\limits_{-\sqrt{2-y}}^{0} f\mathrm{d}x.$$

2. Обчислити:

$$1) \iint\limits_{D: x=0, y=\sqrt{\frac{4\pi}{3}}, y=\frac{2x}{3}} 3y^2 \sin\frac{xy}{2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \quad 2) \int\limits_{-3}^{3} \mathrm{d}x \int\limits_{-\sqrt{9-x^2}}^{0} \frac{xy}{x^2+y^2}\mathrm{d}y.$$

$$3) \iiint\limits_{V: \begin{array}{c} x^2+y^2=2x; z\geqslant 0; z=4 \\ x^2+y^2=4x; 0\leqslant y\leqslant x \end{array}} \frac{x\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

3. Знайти координати центра мас однорідного тіла, обмеженого поверхнями:

$$y^2+z^2=8x, x=2.$$

4. Знайти роботу сили $\vec{F}=x^2y\,\vec{i}-y\,\vec{j}$ при переміщенні вздовж відрізка MN від точки $M(-1,0)$ до точки $N(0,1)$.

5. Знайти $\left.\dfrac{\partial u}{\partial \vec{n}}\right|_M$ ($\vec{n}$ – нормаль до поверхні S у точці M) за умови, що $u = 7\ln\left(\frac{1}{13}+x^2\right) - 4xyz$; S : $7x^2-4y^2+4z^2=7; \angle(\vec{n}, Oz)\leqslant 90^\circ, M(1,1,1)$.

6. Знайти потік векторного поля $\vec{a}$ крізь замкнену поверхню S (нормаль зовнішня):

$$\vec{a}=(\sqrt{z}-2x, e^x+3y, \sqrt{y+x}), S: x^2+y^2=z^2, z=2, z=5.$$

Варіант №16

1. Змінити порядок інтегрування:

$$\int_0^1 \mathrm{d}y \int_0^{y^2} f\mathrm{d}x + \int_1^{\sqrt{2}} \mathrm{d}y \int_0^{\sqrt{2-y^2}} f\mathrm{d}x.$$

2. Обчислити:

1) $\iint\limits_{D: y=\frac{\pi}{2}, y=\pi, x=1, x=2} y\cos xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$ 2) $\int\limits_0^R \mathrm{d}x \int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \frac{\mathrm{tg}\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}y.$

3) $\iiint\limits_{V:\ \substack{1\leqslant x^2+y^2\leqslant 36,\\ y\geqslant x;\, x,z\geqslant 0;\, z\leqslant 2}} z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$

3. Знайти координати центра мас однорідного тіла, обмеженого поверхнями:

$$x = 2\sqrt{y^2+z^2}, y^2+z^2 = 4, x = 0.$$

4. Знайти роботу сили $\vec{F} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j}$ при переміщенні вздовж відрізка MN від точки $M(1,0)$ до точки $N(0,3)$.

5. Знайти $\left.\frac{\partial u}{\partial \vec{l}}\right|_M$ за умови, що $u = x^3 + \sqrt{y^2+z^2}$; $\vec{l} = (0,1,-1)$; $M(1,-3,4)$.

6. Знайти потік векторного поля $\vec{a}$ крізь замкнену поверхню S (нормаль зовнішня):

$$\vec{a} = (17x, 7y, 11z), S: z = x^2+y^2, z = 2(x^2+y^2), y = x^2, y = x.$$

Варіант №17

1. Змінити порядок інтегрування:

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{d}y \int\limits_0^{\sin y} f \mathrm{d}x + \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}y \int\limits_0^{\cos y} f \mathrm{d}x.$$

2. Обчислити:

1) $\iint\limits_{D: x=0, y=\sqrt{\pi}, y=\dfrac{x}{2}} y^2 \sin \dfrac{xy}{2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$ 2) $\int\limits_{-\sqrt{3}}^{0} \mathrm{d}x \int\limits_0^{\sqrt{3-x^2}} \dfrac{\mathrm{d}y}{\sqrt{1+x^2+y^2}}.$

3) $\iiint\limits_{V: \begin{subarray}{l} z^2 = 4x^2+4y^2, \\ z=2, y \geqslant \pm x, z \geqslant 0 \end{subarray}} y\sqrt{x^2+y^2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$

3. Знайти координати центра мас однорідного тіла, обмеженого поверхнями:

$$y = 3\sqrt{x^2+z^2}, x^2+z^2 = 16, y = 0.$$

4. Знайти роботу сили $\vec{F} = (y\sqrt{x^2+y^2} + x)\vec{i} + (y - \sqrt{x^2+y^2})\vec{j}$ при переміщенні вздовж параболи $8y = 16 - x^2$ від точки $M(4,0)$ до точки $N(0,4)$.

5. Знайти $\left.\dfrac{\partial u}{\partial \vec{l}}\right|_M$ за умови, що $u = 2\sqrt{x+y} + y \operatorname{arctg} z$; $\vec{l} = (4,0,-3)$; $M(3,-2,1)$.

6. Знайти потік векторного поля $\vec{a}$ крізь замкнену поверхню S (нормаль зовнішня):

$$\vec{a} = (y+2z, -y, 3x), S : z^2 = x^2+y^2, 3z = 27 - 2(x^2+y^2) \ (z \geqslant 0).$$

Варіант №18

1. Змінити порядок інтегрування:

$$\int_0^1 \mathrm{d}y \int_0^{\sqrt{y}} f \mathrm{d}x + \int_1^{\sqrt{2}} \mathrm{d}y \int_0^{\sqrt{2-y^2}} f \mathrm{d}x.$$

2. Обчислити:

$$1) \iint\limits_{D: y=\ln 2, y=\ln 3, x=4, x=8} y e^{\frac{xy}{4}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y. \quad 2) \int_0^2 \mathrm{d}x \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \frac{\mathrm{d}y}{1+x^2+y^2}.$$

$$3) \iiint\limits_{V:\ \begin{subarray}{c} x^2+y^2=4y, \\ y+z=4,\, z\geqslant 0 \end{subarray}} \frac{z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

3. Знайти координати центра мас однорідного тіла, обмеженого поверхнями:

$$z = \sqrt{x^2+y^2}, z = 4.$$

4. Знайти роботу сили $\vec{F} = (x^2+2y)\vec{i} + (y^2+2x)\vec{j}$ при переміщенні вздовж параболи $y = 2 - \dfrac{x^2}{8}$ від точки $M(-4,0)$ до точки $N(0,2)$.

5. Знайти $\left.\dfrac{\partial u}{\partial \vec{l}}\right|_M$ за умови, що $u = x^2 y - \sqrt{xy+z^2}$; $\vec{l} = (0,2,-2)$; $M(1,5,-2)$.

6. Знайти потік векторного поля $\vec{a}$ крізь замкнену поверхню S (нормаль зовнішня):

$$\vec{a} = \left(4x - 2y^2, \ln z - 4y, x + \frac{3z}{4}\right), \ S : x^2+y^2+z^2 = 2x+3.$$

Варіант №19

1. Змінити порядок інтегрування:

$$\int_{-2}^{-1} \mathrm{d}y \int_{-\sqrt{2+y}}^{0} f \mathrm{d}x + \int_{-1}^{0} \mathrm{d}y \int_{-\sqrt{-y}}^{0} f \mathrm{d}x.$$

2. Обчислити:

$$1) \iint\limits_{D: x=0, y=\sqrt{\frac{\pi}{2}}, y=\frac{x}{2}} y^2 \cos\frac{xy}{2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y. \quad 2) \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \mathrm{d}x \int_{-\sqrt{2-x^2}}^{\sqrt{2-x^2}} \frac{xy}{x^2+y^2} \mathrm{d}y.$$

$$3) \iiint\limits_{V: \begin{array}{c} 4\leqslant x^2+y^2+z^2\leqslant 16, \\ y\leqslant\sqrt{3}x;\, y, z\geqslant 0 \end{array}} y \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

3. Знайти координати центра мас однорідного тіла, обмеженого поверхнями:

$$8x = \sqrt{y^2+z^2}, x = 1/2.$$

4. Знайти роботу сили $\vec{F} = (x^2 - y^2)\vec{i} + (x^2 + y^2)\vec{j}$ при переміщенні вздовж еліпса $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ $(y\geqslant 0)$ від точки $M(3, 0)$ до точки $N(-3, 0)$.

5. Знайти $\left.\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\right|_M$ ($\vec{n}$ – нормаль до поверхні S у точці M) за умови, що $u = 2\ln(x^2 - 5) + 4xyz$; $S: x^2 + 2y^2 - 2z^2 = 1$; $\angle(\vec{n}, Oz)\leqslant 90°$, $M(1, 1, 1)$.

6. Знайти потік векторного поля $\vec{a}$ крізь замкнену поверхню S (нормаль зовнішня):

$$\vec{a} = (x, z, -y), S: z = 2(x^2 + y^2),\ z = 4 - 2(x^2 + y^2).$$

Варіант №20

1. Змінити порядок інтегрування:

$$\int\limits_0^1 \mathrm{d}y \int\limits_{-\sqrt{y}}^{0} f\mathrm{d}x + \int\limits_1^{\sqrt{2}} \mathrm{d}y \int\limits_{-\sqrt{2-y^2}}^{0} f\mathrm{d}x.$$

2. Обчислити:

$$1) \iint\limits_{D: y=\frac{\pi}{2}, y=\pi, x=\frac{1}{2}, x=1} y\cos xy \mathrm{d}x\mathrm{d}y. \quad 2) \int\limits_0^1 \mathrm{d}x \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}}\,\mathrm{d}y.$$

$$3) \iiint\limits_{V: \substack{z=3x^2+3y^2,\\ 0\leqslant y\leqslant\sqrt{3}x,\, z=3}} \frac{y^2 z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}.$$

3. Знайти координати центра мас однорідного тіла, обмеженого поверхнями:

$$z = 8(x^2+y^2), z = 32.$$

4. Знайти роботу сили $\vec{F} = x^3\vec{i} - y^3\vec{j}$ при переміщенні вздовж кола $x^2+y^2=4\,(x, y\geqslant 0)$ від точки $M(2,0)$ до точки $N(0,2)$.

5. Знайти $\left.\dfrac{\partial u}{\partial \vec{n}}\right|_M$ ($\vec{n}$ – нормаль до поверхні S у точці M) за умови, що $u = xz^2 - \sqrt{x^3 y}$; $S: x^2 - y^2 - 3z + 12 = 0$; $\angle(\vec{n}, Oz) \leqslant 90^\circ$, $M(2,2,4)$.

6. Знайти потік векторного поля $\vec{a}$ крізь замкнену поверхню S (нормаль зовнішня):

$$\vec{a} = (2x+2z, xz+y, 4xy-8), S: x^2+y^2+z^2 = 4x-2y+4z-8.$$

Варіант №21

1. Змінити порядок інтегрування:

$$\int\limits_0^1 \mathrm{d}y \int\limits_{-\sqrt{y}}^{0} f\mathrm{d}x + \int\limits_1^e \mathrm{d}y \int\limits_{-1}^{-\ln y} f\mathrm{d}x.$$

2. Обчислити:

$$1) \iint\limits_{D: x=0, y=\sqrt{\frac{\pi}{2}}, y=\frac{x}{2}} y^2 \cos 2xy \mathrm{d}x\mathrm{d}y. \quad 2) \int\limits_0^2 \mathrm{d}x \int\limits_0^{\sqrt{4-x^2}} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}y.$$

$$3) \iiint\limits_{V: \begin{array}{l} x^2+y^2=2y, z=6, \\ x^2+y^2=4y, x, z\geqslant 0 \end{array}} \frac{y\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

3. Знайти координати центра мас однорідного тіла, обмеженого поверхнями:

$$y^2+z^2=3x, x=9.$$

4. Знайти роботу сили $\vec{F}=(x^2+2y)\vec{i}+(y^2+2x)\vec{j}$ при переміщенні вздовж відрізка MN від точки $M(-4,0)$ до точки $N(0,2)$.

5. Знайти $\left.\frac{\partial u}{\partial \vec{l}}\right|_M$ за умови, що $u=\frac{\sqrt{x}}{y}-\frac{yz}{x+\sqrt{y}}$; $\vec{l}=(2,0,1)$; $M(4,1,-2)$.

6. Знайти потік векторного поля $\vec{a}$ крізь замкнену поверхню S (нормаль зовнішня):

$$\vec{a}=(\cos z+3x, x-2y, 3z+y^2), S: z^2=36(x^2+y^2), z=6.$$

Варіант №22

1. Змінити порядок інтегрування:

$$\int\limits_{-2}^{-1} \mathrm{d}y \int\limits_{-2-y}^{0} f\mathrm{d}x + \int\limits_{-1}^{0} \mathrm{d}y \int\limits_{\sqrt[3]{y}}^{0} f\mathrm{d}x.$$

2. Обчислити:

$$1) \iint\limits_{D:y=\frac{\pi}{2},y=\frac{3\pi}{2},x=\frac{1}{2},x=2} y\sin 2xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \quad 2) \int\limits_{-1}^{1} \mathrm{d}x \int\limits_{0}^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1+x^2+y^2}\mathrm{d}y.$$

$$3) \iiint\limits_{V:\ \substack{1\leqslant x^2+y^2\leqslant 16,\\ 0\leqslant y\leqslant x;\, z\geqslant 0}} x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

3. Знайти координати центра мас однорідного тіла, обмеженого поверхнями:

$$x = 7(y^2+z^2), x = 28.$$

4. Знайти роботу сили $\vec{F} = y\,\vec{j} - x\,\vec{i}$ при переміщенні вздовж еліпса $(x, y\geqslant 0)$ $x^2 + \dfrac{y^2}{9} = 1$ від точки $M(1,0)$ до точки $N(0,3)$.

5. Знайти $\left.\dfrac{\partial u}{\partial \vec{n}}\right|_M$ ($\vec{n}$ – нормаль до поверхні S у точці M) за умови, що $u = \frac{1}{4}x^2y - \sqrt{x^2+5z^2}$; $S : z^2 = x^2+4y^2-4$; $\angle(\vec{n}, Oz)\leqslant 90°$, $M\left(-2, \frac{1}{2}, 1\right)$.

6. Знайти потік векторного поля $\vec{a}$ крізь замкнену поверхню S (нормаль зовнішня):

$$\vec{a} = (2x+y, 0, y+2z), S : z = 2-4(x^2+y^2), z = 4(x^2+y^2).$$

Варіант №23

1. Змінити порядок інтегрування:
$$\int_0^1 \mathrm{d}y \int_0^{y^2} f\mathrm{d}x + \int_1^2 \mathrm{d}y \int_0^{2-y} f\mathrm{d}x.$$

2. Обчислити:
$$1) \iint\limits_{D:y=\frac{\pi}{2},y=\frac{3\pi}{2},x=\frac{1}{2},x=2} y\cos 2xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \quad 2) \int_0^1 \mathrm{d}x \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \ln\frac{(1+\sqrt{x^2+y^2})}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}y.$$
$$3) \iiint\limits_{\substack{V:\ 1\leqslant x^2+y^2+z^2\leqslant 4,\\ y\leqslant x;\, x,y,z\geqslant 0}} \frac{x\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

3. Знайти координати центра мас однорідного тіла, обмеженого поверхнями:
$$x = 6\sqrt{y^2+z^2}, y^2+z^2 = 9, x = 0.$$

4. Знайти роботу сили $\vec{F} = (x+y)^2\vec{i} - (x^2+y^2)\vec{j}$ при переміщенні вздовж відрізка MN від точки $M(1,0)$ до точки $N(0,1)$.

5. Знайти $\left.\dfrac{\partial u}{\partial \vec{n}}\right|_M$ ($\vec{n}$ – нормаль до поверхні S у точці M) за умови, що $u = 4\ln(3+x^2) - 8xyz$; S : $x^2 - 2y^2 + 2z^2 = 1; \angle(\vec{n}, Oz)\leqslant 90°; M(1,1,1)$.

6. Знайти потік векторного поля $\vec{a}$ крізь замкнену поверхню S (нормаль зовнішня):
$$\vec{a} = (3z^2+x, e^x-2y, 2z-xy), S: x^2+y^2 = z^2, z = 1, z = 4.$$

Варіант №24

1. Змінити порядок інтегрування:

$$\int\limits_0^1 \mathrm{d}y \int\limits_0^{\sqrt{y}} f\mathrm{d}x + \int\limits_1^e \mathrm{d}y \int\limits_{\ln y}^1 f\mathrm{d}x.$$

2. Обчислити:

$$1) \iint\limits_{D: x=0, y=\sqrt{2\pi}, y=2x} y^2 \cos\frac{xy}{2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \quad 2) \int\limits_0^R \mathrm{d}x \int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \frac{\operatorname{tg}\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}y.$$

$$3) \iiint\limits_{V:\ \substack{z=\sqrt{18-x^2-y^2},\\ z=\sqrt{x^2+y^2},\, x\geqslant 0}} x\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

3. Знайти координати центра мас однорідного тіла, обмеженого поверхнями:

$$y = 3\sqrt{x^2+z^2}, y = 9.$$

4. Знайти роботу сили $\vec{F} = (y^2 - y)\vec{i} + (2xy + x)\vec{j}$ при переміщенні вздовж кола $x^2 + y^2 = 9$ $(y\geqslant 0)$ від точки $M(3, 0)$ до точки $N(0, 3)$.

5. Знайти $\left.\dfrac{\partial u}{\partial \vec{n}}\right|_M$ ($\vec{n}$ – нормаль до поверхні S у точці M) за умови, що $u = x\sqrt{y} - yz^2; S : x^2 + y^2 = 4z;$ $\angle(\vec{n}, Oz)\leqslant 90^\circ, M(2, 1, -1).$

6. Знайти потік векторного поля $\vec{a}$ крізь замкнену поверхню S (нормаль зовнішня):

$$\vec{a} = (6x - \cos y, -e^x - z, -2y - 3z), S : x^2 + y^2 = z^2, z = 1, z = 2.$$

Варіант №25

1. Змінити порядок інтегрування:

$$\int\limits_{-2}^{-\sqrt{3}} \mathrm{d}y \int\limits_{-\sqrt{4-y^2}}^{0} f\mathrm{d}x + \int\limits_{-\sqrt{3}}^{0} \mathrm{d}y \int\limits_{\sqrt{4-y^2}-2}^{0} f\mathrm{d}x.$$

2. Обчислити:

$$1) \iint\limits_{D:x=0,y=\sqrt{\frac{\pi}{2}},y=x} 4y^2 \sin xy \mathrm{d}x\mathrm{d}y. \quad 2) \int\limits_{-R}^{R} \mathrm{d}x \int\limits_{0}^{\sqrt{R^2-x^2}} \operatorname{tg}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}y.$$

$$3) \iiint\limits_{V:\ \substack{4\leqslant x^2+y^2+z^2\leqslant 36,\\ x,z\geqslant 0;\, y\geqslant\sqrt{3}x}} \frac{y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{x^2+y^2+z^2}.$$

3. Знайти координати центра мас однорідного тіла, обмеженого поверхнями:

$$x^2+z^2=6y, y=8.$$

4. Знайти роботу сили $\vec{F}=2(xy-x)\vec{i}+x^2\vec{j}$ при переміщенні вздовж $y=2\sqrt{x}$ від точки $M(0,0)$ до точки $N(1,2)$.

5. Знайти $\left.\dfrac{\partial u}{\partial \vec{l}}\right|_M$ за умови, що $u=\ln(x+\sqrt{y^2+z^2})$; $\vec{l}=(-2,-1,1)$; $M(1,-3,4)$.

6. Знайти потік векторного поля $\vec{a}$ крізь замкнену поверхню S (нормаль зовнішня):

$$\vec{a}=\left(\cos z+\frac{x}{4}, e^x+\frac{y}{4}, \frac{z}{4}-1\right), S: x^2+y^2+z^2=2z+3.$$

Варіант №26

1. Змінити порядок інтегрування:

$$\int\limits_0^1 \mathrm{d}y \int\limits_0^{y^2} f\mathrm{d}x + \int\limits_1^2 \mathrm{d}y \int\limits_0^{2-y} f\mathrm{d}x.$$

2. Обчислити:

$$1) \iint\limits_{D:y=\frac{\pi}{2},y=3\pi,x=1,x=3} 3y\sin xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \quad 2) \int\limits_0^R \mathrm{d}x \int\limits_{-\sqrt{R-x^2}}^{\sqrt{R-x^2}} \sin(x^2+y^2)\,\mathrm{d}y.$$

$$3) \iiint\limits_{V:\begin{array}{c}1\leqslant x^2+y^2+z^2\leqslant 9,\\ 0\leqslant y\leqslant x,\, z\geqslant 0\end{array}} \frac{x\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

3. Знайти координати центра мас однорідного тіла, обмеженого поверхнями:

$$x = 5\sqrt{y^2+z^2}, x = 20.$$

4. Знайти роботу сили $\vec{F} = xy\,\vec{i} + 2y\,\vec{j}$ при переміщенні вздовж кола $x^2+y^2 = 1$ $(x, y\geqslant 0)$ від точки $M(1,0)$ до точки $N(-1,0)$.

5. Знайти $\left.\dfrac{\partial u}{\partial \vec{n}}\right|_M$ ($\vec{n}$ – нормаль до поверхні S у точці M) за умови, що $u = (x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}$; $S: 2x^2-y^2+z^2 = 1$; $\angle(\vec{n}, Oz)\leqslant 90^\circ$; $M(0,-3,4)$.

6. Знайти потік векторного поля $\vec{a}$ крізь замкнену поверхню S (нормаль зовнішня):

$$\vec{a} = (\sqrt{z}-x, x-y, y^2-z), S: 3x-2y+z = 6, x, y, z = 0.$$

Варіант №27

1. Змінити порядок інтегрування:
$$\int\limits_0^1 \mathrm{d}y \int\limits_0^{\sqrt{y}} f \mathrm{d}x + \int\limits_1^2 \mathrm{d}y \int\limits_0^{\sqrt{2-y}} f \mathrm{d}x.$$

2. Обчислити:

1) $\iint\limits_{D: x=0, y=\sqrt{\pi}, y=2x} y^2 \cos xy \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$ 2) $\int\limits_{-2}^{2} \mathrm{d}x \int\limits_0^{\sqrt{4-x^2}} \sqrt{x^2+y^2} e^{x^2+y^2} \mathrm{d}y.$

3) $\iiint\limits_{V:\ \substack{x^2+y^2=4y; \\ y+z=4; z \geqslant 0}} \dfrac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\sqrt{x^2+y^2}}.$

3. Знайти координати центра мас однорідного тіла, обмеженого поверхнями:
$$x^2 + z^2 = 4y, y = 9.$$

4. Знайти роботу сили $\vec{F} = y\vec{i} - x\vec{j}$ при переміщенні вздовж кола $x^2 + y^2 = 1$ $(y \geqslant 0)$ від точки $M(1,0)$ до точки $N(-1,0)$.

5. Знайти $\left.\dfrac{\partial u}{\partial \vec{l}}\right|_M$ за умови, що $u = xy - \dfrac{x}{z}$; $\vec{l} = (5, 1, -1)$; $M(-4, 3, -1)$.

6. Знайти потік векторного поля $\vec{a}$ крізь замкнену поверхню S (нормаль зовнішня):
$$\vec{a} = (\ln y + 7x, \sin z - 2y, e^y - 2z), S: (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 1.$$

Варіант №28

1. Змінити порядок інтегрування:

$$\int\limits_{-\sqrt{2}}^{-1} \mathrm{d}y \int\limits_{-\sqrt{2-y^2}}^{0} f\mathrm{d}x + \int\limits_{-1}^{0} \mathrm{d}y \int\limits_{y}^{0} f\mathrm{d}x.$$

2. Обчислити:

1) $\iint\limits_{D: y=\ln 3, y=\ln 4, x=\frac{1}{2}, x=1} 4ye^{xy}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$ 2) $\int\limits_{-R}^{0} \mathrm{d}x \int\limits_{0}^{\sqrt{R^2-x^2}} \cos\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}y.$

3) $\iiint\limits_{V:\ z=\sqrt{8-x^2-y^2},\ z=\sqrt{x^2+y^2},\ y\geqslant 0} y\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$

3. Знайти координати центра мас однорідного тіла, обмеженого поверхнями: $x = 6(y^2+z^2), y^2+z^2 = 3, x = 0$.

4. Знайти роботу сили $\vec{F} = y\vec{i} - x\vec{j}$ при переміщенні вздовж еліпса $2x^2+y^2 = 1$ $(y\geqslant 0)$ від точки $M\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ до точки $N\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$.

5. Знайти $\left.\frac{\partial u}{\partial \vec{l}}\right|_M$ за умови, що $u = \sqrt{xy} + \sqrt{9-z^2}$; $\vec{l} = (-2, 2, -1)$; $M(1, 1, 0)$.

6. Знайти потік векторного поля $\vec{a}$ крізь замкнену поверхню S (нормаль зовнішня):

$$\vec{a} = (yz - 2x, \sin x + y, x - 2z), S : x + 2y - 3z = 6, x, y, z = 0.$$

Варіант №29

1. Змінити порядок інтегрування:

$$\int\limits_{-\sqrt{2}}^{-1} \mathrm{d}y \int\limits_{0}^{\sqrt{2-y^2}} f\mathrm{d}x + \int\limits_{-1}^{0} \mathrm{d}y \int\limits_{0}^{y^2} f\mathrm{d}x.$$

2. Обчислити:

1) $\iint\limits_{D: x=0, y=\sqrt{\pi}, y=x} y^2 \sin \dfrac{xy}{2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$ 2) $\int\limits_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \mathrm{d}x \int\limits_{-\sqrt{2-x^2}}^{\sqrt{2-x^2}} e^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}y.$

3) $\iiint\limits_{V: \begin{array}{l} x^2+y^2=2x; \\ z=3; y, z \geqslant 0 \end{array}} z\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$

3. Знайти координати центра мас однорідного тіла, обмеженого поверхнями:

$$4y = \sqrt{x^2+z^2}, x^2+z^2 = 16, y = 0.$$

4. Знайти роботу сили $\vec{F} = (x^2+y^2)\vec{i} + (2x^2+2y^2)\vec{j}$ при переміщенні вздовж кола $x^2+y^2 = R^2$ $(y \geqslant 0)$ від точки $M(R, 0)$ до точки $N(-R, 0)$.

5. Знайти $\left.\dfrac{\partial u}{\partial \vec{l}}\right|_M$ за умови, що $u = x + \ln(z^2+y^2)$; $\vec{l} = (-2, 1, -1)$; $M(2, 1, 1)$.

6. Знайти потік векторного поля $\vec{a}$ крізь замкнену поверхню S (нормаль зовнішня):

$$\vec{a} = (5x-6y, 11x^2+2y, x^2-4z), S : x+y+2z = 2, x, y, z = 0.$$

Варіант №30

1. Змінити порядок інтегрування:
$$\int\limits_{-2}^{1} \mathrm{d}y \int\limits_{-2-y}^{0} f\mathrm{d}x + \int\limits_{-1}^{0} \mathrm{d}y \int\limits_{\sqrt[3]{y}}^{0} f\mathrm{d}x.$$

2. Обчислити:
$$1) \iint\limits_{D: x=0, y=2, y=x} y^2 \exp\left(-\frac{xy}{4}\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y. \quad 2) \int\limits_0^1 \mathrm{d}x \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} \ln\left(1+x^2+y^2\right) \mathrm{d}y.$$
$$3) \iiint\limits_{V: \begin{array}{l} x^2+y^2+z^2=32, \\ y^2=x^2+z^2, y\geqslant 0 \end{array}} y\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

3. Знайти координати центра мас однорідного тіла, обмеженого поверхнями:
$$z = 3(x^2+y^2), x^2+y^2=9, z=0.$$

4. Знайти роботу сили $\vec{F} = (x+y)\vec{i} + (x-y)\vec{j}$ при переміщенні вздовж кривої $y = \sin x$ від точки $M(\pi, 0)$ до точки $N(0,0)$.

5. Знайти $\left.\dfrac{\partial u}{\partial \vec{n}}\right|_M$ ($\vec{n}$ – нормаль до поверхні S у точці M) за умови, що $u = \ln(1+x^2) - xy\sqrt{z}$; $S: 4x^2 - y^2 + z^2 = 16$; $\angle(\vec{n}, Oz) \leqslant 90°$; $M(1,-2,4)$.

6. Знайти потік векторного поля $\vec{a}$ крізь замкнену поверхню S (нормаль зовнішня):
$$\vec{a} = (-2x, z, x+y), S: x^2+y^2=2y, z=x^2+y^2, z=0.$$