

# Варіант №1

1. Знайти невизначені інтеграли:

(а)  $\int \ln(4x^2 + 1) dx$ ;

(в)  $\int \frac{2x^3 + 6x^2 + 7x + 2}{x(x+1)^3} dx$ ;

(б)  $\int \frac{x^3}{(x^2 + 1)^2} dx$ ;

(г)  $\int \frac{\sqrt{1 + \sqrt[3]{x^2}}}{x^2} dx$ .

2. Обчислити визначені інтеграли: а)  $\int_0^{\pi/2} \frac{(1 + \cos x) dx}{1 + \cos x + \sin x}$ ; б)  $\int_0^{\pi/4} \frac{6 \sin^2 x}{3 \cos 2x - 4} dx$ .

3. Обчислити площі фігур, обмежених лініями: а)  $y = \frac{1}{1 + \cos x}$ ;  $y = 0$ ;  $x = \frac{\pi}{2}$ ;  $x = -\frac{\pi}{2}$ . б)  $r = \frac{5}{2} \sin \varphi$ ;  $r = \frac{3}{2} \sin \varphi$ .

4. Обчислити довжину дуги кривої, заданої рівняннями  $\begin{cases} x = 4(\cos t + t \sin t), \\ y = 5(\sin t - t \cos t), \end{cases} 0 \leq t \leq 2\pi$ .

5. Обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} - z^2 = 1$ ;  $z = 0$ ;  $z = 3$ .

6. Обчислити об'єм тіла, утвореного при обертанні фігури, обмеженої графіками вказаних функцій, навколо вісі  $Ox$ .  $y = xe^x$ ;  $y = 0$ ;  $x = 1$ .

7. Дослідити на абсолютну та умовну збіжність невластні інтеграли:

(а)  $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x \ln x + 1}}$ ;

(б)  $\int_0^1 \frac{\cos x^{-1} \cdot dx}{x^2 \left( \frac{1}{x} + \sin \frac{1}{x} \right)^{3/2}}$ .

# Варіант №2

1. Знайти невизначені інтеграли:

(а)  $\int (2 - 9x) e^{-3x} dx$ ;

(б)  $\int \frac{x^3 + x}{x^4 + 1} dx$ ;

(в)  $\int \frac{x^3 - 6x^2 + 10x - 10}{(x + 1)(x - 2)^3} dx$ ;

(г)  $\int \frac{\sqrt[4]{(1 + \sqrt[3]{x^2})^3}}{x^2 \sqrt[6]{x}} dx$ .

2. Обчислити визначені інтеграли: а)  $\int_{2 \operatorname{arctg}(1/2)}^{\pi/2} \frac{\cos x \cdot dx}{(1 - \cos x)^3}$ ; б)  $\int_{\pi/4}^{\operatorname{arctg} 3} \frac{4 \operatorname{tg} x - 5}{1 - \sin 2x + 4 \cos^2 x} dx$ .

3. Обчислити площі фігур, обмежених лініями: а)  $y = \sqrt{4 - x^2}$ ;  $y = 0$ ;  $x = 0$ ;  $x = 1$ . б)  $r = 2 \cos \varphi$ ;  $r = 2\sqrt{3} \sin \varphi$  ( $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ ).

4. Обчислити довжину дуги кривої, заданої рівняннями

$$\begin{cases} x = 2,5(t - \sin t), & \frac{\pi}{2} \leq t \leq \pi. \\ y = 2,5(1 - \cos t), & \end{cases}$$

5. Обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями  $\frac{x^2}{81} + \frac{y^2}{25} - z^2 = 1$ ;  $z = 0$ ;  $z = 2$ .

6. Обчислити об'єм тіла, утвореного при обертанні фігури, обмеженої графіками вказаних функцій, навколо вісі  $Oy$ .  $y = \sqrt{x - 1}$ ;  $y = 0$ ;  $y = 1$ ;  $x = 0, 5$ .

7. Дослідити на абсолютну та умовну збіжність невластні інтеграли:

(а)  $\int_{\sqrt{2}}^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 1}}$ ;

(б)  $\int_3^5 \frac{x^3 dx}{\sqrt{(x - 3)(5 - x)}}$ .

# Варіант №3

1. Знайти невизначені інтеграли:

(а)  $\int (3x - 2) \cos 5x \cdot dx;$

(в)  $\int \frac{2x^3 + 6x^2 + 5x}{(x + 2)(x + 1)^3} dx;$

(б)  $\int \frac{4 \operatorname{arctg} x - x}{1 + x^2} dx;$

(г)  $\int \frac{\sqrt[5]{(1 + \sqrt[3]{x})^4}}{x \sqrt[5]{x^3}} dx.$

2. Обчислити визначені інтеграли: а)  $\int_{\pi/2}^{2 \operatorname{arctg} 2} \frac{dx}{\sin x (1 + \sin x)}$ ; б)  $\int_{-\arcsin(2/\sqrt{5})}^{\pi/4} \frac{(2 - \operatorname{tg} x) \cdot dx}{(3 \cos x + \sin x)^2}.$

3. Обчислити площі фігур, обмежених лініями: а)  $y = (x - 1)^2; y^2 = x - 1.$  б)  $r = 3 \sin \varphi; r = 5 \sin \varphi.$

4. Обчислити довжину дуги кривої, заданої рівняннями

$$\begin{cases} x = 8 (\cos t + t \sin t), \\ y = 8 (\sin t - t \cos t), \end{cases} \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{4}.$$

5. Обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями  $\frac{x^2}{4} + y^2 - z^2 = 1; z = 0; z = 3.$

6. Обчислити об'єм тіла, утвореного при обертанні фігури, обмеженої графіками вказаних функцій, навколо вісі  $Oy.$   $y = x^2 - 2x + 1; x = 2; y = 0.$

7. Дослідити на абсолютну та умовну збіжність невласні інтеграли:

(а)  $\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg}(x - 1)}{\sqrt[3]{(x - 1)^4}} dx;$

(б)  $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1 + 5 \sin^2 x}.$

# Варіант №4

1. Знайти невизначені інтеграли:

(а)  $\int (\sqrt{2} - 8x) \sin 3x \cdot dx;$

(в)  $\int \frac{2x^3 - 6x^2 + 7x - 4}{(x - 2)(x - 1)^3} dx;$

(б)  $\int \frac{\operatorname{arctg} x + x}{1 + x^2} dx;$

(г)  $\int \frac{\sqrt[3]{(1 + \sqrt[4]{x})^2}}{x \sqrt[12]{x^5}} dx.$

2. Обчислити визначені інтеграли: а)  $\int_{-2\pi/3}^0 \frac{\cos x \cdot dx}{1 + \cos x - \sin x};$  б)  $\int_0^{\pi/4} \frac{(7 + 3 \operatorname{tg} x) \cdot dx}{(\sin x + 2 \cos x)^2}.$

3. Обчислити площі фігур, обмежених лініями: а)  $y = \frac{e^x}{x^2}; y = 0; x = 2; x = 1.$  б)  $r = 2 \sin 4\varphi.$

4. Обчислити довжину дуги кривої, заданої рівняннями

$$\begin{cases} x = 3(\cos t + t \sin t), \\ y = 3(\sin t - t \cos t), \end{cases} \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{3}.$$

5. Обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} - \frac{z^2}{100} = -1; z = 20 \quad (z \geq 0).$$

6. Обчислити об'єм тіла, утвореного при обертанні фігури, обмеженої графіками вказаних функцій, навколо вісі  $Ox$ .  $x^2 + (y - 2)^2 = 1.$

7. Дослідити на абсолютну та умовну збіжність невластні інтеграли:

(а)  $\int_1^{+\infty} \frac{y \cdot dx}{4 + y^2 x^4} \quad (y \in \mathbb{R});$

(б)  $\int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt[3]{(1 - x^2)^5}}.$

# Варіант №5

1. Знайти невизначені інтеграли:

(а)  $\int (4 - 3x) e^{-3x} dx$ ;

(в)  $\int \frac{x^3 + 6x^2 + 13x + 9}{(x + 1)(x + 2)^3} dx$ ;

(б)  $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 + 1}}$ ;

(г)  $\int \frac{\sqrt{1 + \sqrt{x}}}{x^4 \sqrt{x^3}} dx$ .

2. Обчислити визначені інтеграли: а)  $\int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\cos x (1 + \cos x)}$ ; б)  $\int_0^{\pi/3} \frac{\operatorname{tg}^2 x \cdot dx}{4 + 3 \cos 2x}$ .

3. Обчислити площі фігур, обмежених лініями: а)  $y = (x - 2)^3$ ;  $y = 4x - 8$ ; б)  $r = 4 \cos 3\varphi$ ;  $r = 2$  ( $r \geq 2$ ).

4. Обчислити довжину дуги кривої, заданої рівняннями

$$\begin{cases} x = 3,5(2 \cos t - \cos 2t), \\ y = 3,5(2 \sin t - \sin 2t), \end{cases} \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}.$$

5. Обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями  $z = x^2 + 5y^2$ ;  $z = 5$ .

6. Обчислити об'єм тіла, утвореного при обертанні фігури, обмеженої графіками вказаних функцій, навколо вісі  $Ox$ .  $y = e^{1-x}$ ;  $y = 0$ ;  $x = 0$ ;  $x = 1$ .

7. Дослідити на абсолютну та умовну збіжність невластні інтеграли:

(а)  $\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{1 + x^3 + x^\alpha} - 1}{x^3} dx$ ;

(б)  $\int_0^2 \left( x \sin \frac{\pi}{x^2} - \frac{\pi}{x} \cos \frac{\pi}{x^2} \right) dx$ .

# Варіант №6

1. Знайти невизначені інтеграли:

(а)  $\int \operatorname{arctg} \sqrt{6x-1} \cdot dx;$

(в)  $\int \frac{x^3 - 6x^2 + 13x - 7}{(x+1)(x-2)^3} dx;$

(б)  $\int \frac{\sin x - \cos x}{(\cos x + \sin x)^5} dx;$

(г)  $\int \frac{\sqrt[4]{(1+\sqrt{x})^3}}{x\sqrt{x^7}} dx.$

2. Обчислити визначені інтеграли: а)  $\int_{2 \operatorname{arctg}(1/2)}^{\pi/2} \frac{dx}{(1 + \sin x - \cos x)^2};$  б)  $\int_0^{\pi/4} \frac{2 \operatorname{tg}^2 x - 11 \operatorname{tg} x - 22}{4 - \operatorname{tg} x} dx.$

3. Обчислити площі фігур, обмежених лініями: а)  $y = \cos^5 x \sin 2x; y = 0, \left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right).$  б)  $r = 4 \cos 4\varphi.$

4. Обчислити довжину дуги кривої, заданої рівняннями

$$\begin{cases} x = 3(t - \sin t), \\ y = 3(1 - \cos t), \end{cases} \quad \pi \leq t \leq 2\pi.$$

5. Обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями

$$\frac{x^2}{27} + \frac{y^2}{25} = 1; z = \frac{y}{\sqrt{3}}; z = 0 \quad (y \geq 0).$$

6. Обчислити об'єм тіла, утвореного при обертанні фігури, обмеженої графіками вказаних функцій, навколо вісі  $Oy$ .  $y = x^2 + 1; y = x; x = 0; x = 1.$

7. Дослідити на абсолютну та умовну збіжність невластні інтеграли:

(а)  $\int_1^{+\infty} \frac{2 + \arcsin \frac{1}{x}}{1 + \sqrt{x}} dx.$

(б)  $\int_0^{1/2} \left(\frac{x}{1-x}\right)^2 \cos \frac{1}{x^2} dx,$

# Варіант №7

1. Знайти невизначені інтеграли:

(а)  $\int (x + 5) \sin 3x \cdot dx$ ;

(в)  $\int \frac{x^3 + 6x^2 + 18x - 4}{(x - 2)(x + 2)^3} dx$ ;

(б)  $\int \frac{1}{(\sqrt{x} + x)^2} dx$ ;

(г)  $\int \frac{\sqrt[3]{1 + \sqrt[5]{x^4}}}{x^2 \sqrt[15]{x}} dx$ .

2. Обчислити визначені інтеграли: а)  $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x \cdot dx}{(1 + \sin x)^2}$ ; б)  $\int_{\pi/4}^{\arcsin(2/\sqrt{5})} \frac{(4 \operatorname{tg} x - 5) \cdot dx}{4 \cos^2 x - \sin 2x + 1}$ .

3. Обчислити площі фігур, обмежених лініями: а)  $x = \frac{1}{y\sqrt{1 + \ln y}}$ ;  $x = 0$ ;  $y = 1$ ;  $y = e^3$ . б)  $r = \cos \varphi + \sin \varphi$ .

4. Обчислити довжину дуги кривої, заданої рівняннями

$$\begin{cases} x = (t^2 - 2) \sin t + 2t \cos t, \\ y = (2 - t^2) \cos t + 2t \sin t, \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 3\pi.$$

5. Обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями  $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} = 1$ ;  $z = 2$ ;  $z = 0$ .

6. Обчислити об'єм тіла, утвореного при обертанні фігури, обмеженої графіками вказаних функцій, навколо вісі  $Ox$ .  $x = \sqrt[3]{y - 2}$ ;  $x = 1$ ;  $y = 1$ .

7. Дослідити на абсолютну та умовну збіжність невластні інтеграли:

(а)  $\int_{\alpha^2}^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{1 + x^2}}$ ;

(б)  $\int_0^{0,5} \frac{\cos^3 \ln x}{x \ln x} dx$ .

# Варіант №8

1. Знайти невизначені інтеграли:

(а)  $\int (2 - 4x) \sin 2x \cdot dx;$

(в)  $\int \frac{x^3 - 6x^2 + 13x - 8}{x(x-2)^3} dx;$

(б)  $\int \frac{1 - \cos x}{(x - \sin x)^2} dx;$

(г)  $\int \frac{\sqrt{1+x}}{x^2\sqrt{x}} dx.$

2. Обчислити визначені інтеграли: а)  $\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{\cos x \cdot dx}{1 + \sin x - \cos x};$  б)  $\int_{\pi/4}^{\arccos(1/\sqrt{3})} \frac{\operatorname{tg} x \cdot dx}{\sin^2 x - 5 \cos^2 x + 4}.$

3. Обчислити площі фігур, обмежених лініями: а)  $y = x\sqrt{4-x^2}; y = 0, (0 \leq x \leq 2).$  б)  $r = \frac{1}{2} + \cos \varphi.$

4. Обчислити довжину дуги кривої, заданої рівняннями

$$\begin{cases} x = e^t (\cos t + \sin t), \\ y = e^t (\cos t - \sin t), \end{cases} \quad 0 \leq t \leq \frac{3\pi}{2}.$$

5. Обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями  $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{36} = 1; z = 3; z = 0.$

6. Обчислити об'єм тіла, утвореного при обертанні фігури, обмеженої графіками вказаних функцій, навколо вісі  $Ox.$   $y = 5 \cos x; y = \cos x; x = 0; x \geq 0.$

7. Дослідити на абсолютну та умовну збіжність невласні інтеграли:

(а)  $\int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{2 + \sin x}{x^2} dx;$

(б)  $\int_0^2 \frac{dx}{x\sqrt{x} - 2x + \sqrt{x}}.$



# Варіант №9

1. Знайти невизначені інтеграли:

(а)  $\int \operatorname{arctg} \sqrt{5x-1} \cdot dx$ ;

(б)  $\int \frac{1 + \ln(x-1)}{x-1} dx$ ;

(в)  $\int \frac{2x^3 + x + 1}{(x+1)x^3} dx$ ;

(г)  $\int \frac{\sqrt[3]{(1 + \sqrt[4]{x^3})^2}}{x^2 \sqrt[4]{x}} dx$ .

2. Обчислити визначені інтеграли: а)  $\int_0^{2\pi/3} \frac{\cos^2 x \cdot dx}{(1 + \cos x + \sin x)^2}$ ; б)  $\int_0^{\pi/4} \frac{4 - 7 \operatorname{tg} x}{2 + 3 \operatorname{tg} x} dx$ .

3. Обчислити площі фігур, обмежених лініями: а)  $y = 4 - x^2$ ;  $y = x^2 - 2x$ . б)  $r = \sqrt{3} \cos \varphi$ ;  $r = \sin \varphi$  ( $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ ).

4. Обчислити довжину дуги кривої, заданої рівняннями

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} \cos t - \frac{1}{4} \cos 2t, \\ y = \frac{1}{2} \sin t - \frac{1}{4} \sin 2t, \end{cases} \quad \frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{2\pi}{3}.$$

5. Обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями

$$\frac{x^2}{27} + y^2 = 1; z = \frac{y}{\sqrt{3}}; z = 0 (y \geq 0).$$

6. Обчислити об'єм тіла, утвореного при обертанні фігури, обмеженої графіками вказаних функцій, навколо вісі  $Oy$ .  $y = (x-1)^2$ ;  $y = 1$ .

7. Дослідити на абсолютну та умовну збіжність невласні інтеграли:

(а)  $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+x^{-2\alpha})}{\sqrt{x^\alpha + x^{-\alpha}}} dx$  ( $\alpha > 0$ ).

(б)  $\int_0^\pi \frac{|\cos x|}{\sqrt{\sin x}} dx$ .

# Варіант №10

1. Знайти невизначені інтеграли:

(а)  $\int (4x + 3) \sin 5x \cdot dx;$

(в)  $\int \frac{x^3 - 6x^2 + 14x - 4}{(x + 2)(x - 2)^3} dx;$

(б)  $\int \frac{x + \frac{1}{x}}{\sqrt{x^2 + 1}} dx;$

(г)  $\int \frac{\sqrt[4]{(1 + \sqrt[5]{x^4})^3}}{x^2 \sqrt[5]{x^2}} dx.$

2. Обчислити визначені інтеграли: а)  $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x - \sin x}{(1 + \sin x)^2} dx;$  б)  $\int_0^{\operatorname{arctg}(1/3)} \frac{(8 + \operatorname{tg} x) dx}{18 \sin^2 x + 2 \cos^2 x}.$

3. Обчислити площі фігур, обмежених лініями: а)  $y = x^2 \sqrt{4 - x^2}; y = 0, (0 \leq x \leq 2).$  б)  $r = \sin 3\varphi.$

4. Обчислити довжину дуги кривої, заданої рівняннями

$$\begin{cases} x = 2(t - \sin t), \\ y = 2(1 - \cos t), \end{cases} \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}.$$

5. Обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} - z^2 = 1; z = 0; z = 2.$

6. Обчислити об'єм тіла, утвореного при обертанні фігури, обмеженої графіками вказаних функцій, навколо вісі  $Oy.$   $y = \arcsin \frac{x}{5}; y = \arcsin x; y = \frac{\pi}{2}.$

7. Дослідити на абсолютну та умовну збіжність невластні інтеграли:

(а)  $\int_0^{+\infty} x^{\frac{4\alpha}{3}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{x}}{1 + x^\alpha} \cdot dx;$

(б)  $\int_0^{e^{-1}} \frac{dx}{x \ln^2 x}.$

# Варіант №11

1. Знайти невизначені інтеграли:

(а)  $\int (4x + 7) \cos 3x \cdot dx;$

(б)  $\int \frac{x + \cos x}{x^2 + 2 \sin x} dx;$

(в)  $\int \frac{x^3 + 6x^2 + 5x + 4}{(x - 2)(x + 1)^3} dx;$

(г)  $\int \frac{\sqrt[5]{(1 + \sqrt[4]{x^3})^4}}{x^2 \sqrt[20]{x^7}} dx.$

2. Обчислити визначені інтеграли: а)  $\int_{2 \operatorname{arctg} 2}^{2 \operatorname{arctg} 3} \frac{dx}{\cos x (1 - \cos x)};$  б)  $\int_0^{\arccos \sqrt{2/3}} \frac{(2 + \operatorname{tg} x) dx}{\sin^2 x + 2 \cos^2 x - 3}.$

3. Обчислити площі фігур, обмежених лініями: а)  $y = x\sqrt{9 - x^2}; y = 0, (0 \leq x \leq 3).$  б)  $r = \cos 2\varphi.$

4. Обчислити довжину дуги кривої, заданої рівняннями

$$\begin{cases} x = 2(2 \cos t - \cos 2t), \\ y = 2(2 \sin t - \sin 2t), \end{cases} \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{3}.$$

5. Обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями  $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{144} = 1; z = 6; z = 0.$

6. Обчислити об'єм тіла, утвореного при обертанні фігури, обмеженої графіками вказаних функцій, навколо вісі  $Oy.$   $y = \arccos \frac{x}{5}; y = \arccos \frac{x}{3}; y = 0.$

7. Дослідити на абсолютну та умовну збіжність невластні інтеграли:

(а)  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x} + x^3};$

(б)  $\int_0^{\pi/4} \sin \left( \frac{1}{\sin x} \right) \frac{dx}{(\sin x)^{3/2}}.$

# Варіант №12

1. Знайти невизначені інтеграли:

(а)  $\int (2 - 3x) \sin 2x \cdot dx$ ;

(б)  $\int \frac{x \cdot dx}{x^4 + 1}$ ;

(в)  $\int \frac{x^3 + 6x^2 + 10x + 12}{(x - 2)(x + 2)^3} dx$ ;

(г)  $\int \frac{\sqrt[3]{(1 + \sqrt[5]{x^4})^2}}{x^2 \sqrt[3]{x}} dx$ .

2. Обчислити визначені інтеграли: а)  $\int_0^{2 \operatorname{arctg}(1/3)} \frac{\cos x \cdot dx}{(1 + \cos x)(1 - \sin x)}$ ; б)  $\int_0^{\operatorname{arcsin} \sqrt{3/7}} \frac{\operatorname{tg}^2 x \cdot dx}{3 \sin^2 x + 4 \cos^2 x - 7}$ .

3. Обчислити площі фігур, обмежених лініями: а)  $y = \frac{x}{1 + \sqrt{x}}$ ;  $y = 0$ ;  $x = 1$ . б)  $r = 1 + \sqrt{2} \sin \varphi$ .

4. Обчислити довжину дуги кривої, заданої рівняннями

$$\begin{cases} x = 2 \cos^3 t, \\ y = 2 \sin^3 t, \end{cases} \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{4}.$$

5. Обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями  $\frac{x^2}{9} + y^2 = 1$ ;  $z = y$ ,  $z = 0$  ( $y \geq 0$ ).

6. Обчислити об'єм тіла, утвореного при обертанні фігури, обмеженої графіками вказаних функцій, навколо вісі  $Ox$ .  $y = 1 - x^2$ ;  $x = 0$ ;  $x = \sqrt{y - 2}$ ;  $x = 1$ .

7. Дослідити на абсолютну та умовну збіжність невластні інтеграли:

(а)  $\int_0^{\pi/2} \frac{\ln \sin x}{\sqrt{x}} dx$ ;

(б)  $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt[3]{x^2 + 10}} dx$ .

# Варіант №13

1. Знайти невизначені інтеграли:

(а)  $\int (2x - 5) \cos 4x \cdot dx;$

(в)  $\int \frac{x^3 + 6x^2 + 4x + 24}{(x - 2)(x + 2)^3} dx;$

(б)  $\int \frac{2 \cos x + 3 \sin x}{(2 \sin x - 3 \cos x)^3} dx;$

(г)  $\int \frac{\sqrt[5]{(1 + \sqrt[5]{x^4})^4}}{x^2 \sqrt[25]{x^{11}}} dx.$

2. Обчислити визначені інтеграли: а)  $\int_0^{2 \operatorname{arctg}(1/2)} \frac{(1 - \sin x) dx}{\cos x (1 + \cos x)}$ ; б)  $\int_0^{\pi/4} \frac{(5 \operatorname{tg} x + 2) \cdot dx}{2 \sin 2x + 5}$ .

3. Обчислити площі фігур, обмежених лініями: а)  $x = \sqrt{4 - y^2}; x = 0; y = 0; y = 1$ . б)  $r = \cos \varphi - \sin \varphi$ .

4. Обчислити довжину дуги кривої, заданої рівняннями

$$\begin{cases} x = (t^2 - 2) \sin t + 2t \cos t, \\ y = (2 - t^2) \cos t + 2t \sin t, \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

5. Обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{64} = 1; z = 4; z = 0.$$

6. Обчислити об'єм тіла, утвореного при обертанні фігури, обмеженої графіками вказаних функцій, навколо вісі  $Oy$ .  $y = \arcsin x; y = \arccos x; y = 0$ .

7. Дослідити на абсолютну та умовну збіжність невластні інтеграли:

(а)  $\int_2^{+\infty} \frac{e^{\alpha x}}{(x - 1)^\alpha \ln x} dx;$

(б)  $\int_0^1 \frac{1}{x\sqrt{x}} \cos \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x}} dx.$

# Варіант №14

1. Знайти невизначені інтеграли:

(а)  $\int \operatorname{arctg} \sqrt{2x-1} \cdot dx;$

(в)  $\int \frac{x^3 + x + 2}{(x+2)x^3} dx;$

(б)  $\int \frac{x \cdot dx}{\sqrt{x^4 - x^2 - 1}};$

(г)  $\int \frac{\sqrt{1 + \sqrt[4]{x^3}}}{x^2 \sqrt[8]{x}} dx.$

2. Обчислити визначені інтеграли: а)  $\int_{-\pi/2}^0 \frac{\sin x \cdot dx}{(1 + \cos x - \sin x)^2};$  б)  $\int_{-\arccos(1/\sqrt{5})}^{\pi/4} \frac{11 - 3 \operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} x + 3} dx.$

3. Обчислити площі фігур, обмежених лініями: а)  $x = 4 - y^2; x = y^2 - 2y.$  б)  $r = 2 \cos \varphi; r = 3 \cos \varphi.$

4. Обчислити довжину дуги кривої, заданої рівняннями  $\begin{cases} x = 5(t - \sin t), \\ y = 5(1 - \cos t), \end{cases} 0 \leq t \leq \pi.$

5. Обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} - \frac{z^2}{64} = -1; z = 16 (z \geq 0).$

6. Обчислити об'єм тіла, утвореного при обертанні фігури, обмеженої графіками вказаних функцій, навколо вісі  $Oy.$   $y = (x - 1)^2; x = 0; x = 2; y = 0.$

7. Дослідити на абсолютну та умовну збіжність невластні інтеграли:

(а)  $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1 + x^\alpha \sin^2 x};$

(б)  $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2) \arcsin x}}.$

# Варіант №15

1. Знайти невизначені інтеграли:

(а)  $\int (5x - 2) e^{3x} dx;$

(в)  $\int \frac{x^3 + 6x^2 + 11x + 7}{(x + 1)(x + 2)^3} dx;$

(б)  $\int \frac{\arccos^3 x - 1}{\sqrt{1 - x^2}} dx;$

(г)  $\int \frac{\sqrt[3]{(1 + \sqrt[3]{x})^2}}{x\sqrt[9]{x^5}} dx.$

2. Обчислити визначені інтеграли: а)  $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x \cdot dx}{2 + \cos x};$  б)  $\int_{\arccos(4/\sqrt{17})}^{\pi/4} \frac{2 \operatorname{ctg} x + 1}{(3 \sin x + \cos x)^2} dx.$

3. Обчислити площі фігур, обмежених лініями: а)  $y = x \operatorname{arctg} x; y = 0; x = \sqrt{3}.$  б)  $r = \cos \varphi; r = 2 \cos \varphi.$

4. Обчислити довжину дуги кривої, заданої рівняннями

$$\begin{cases} x = e^t (\cos t + \sin t), & \frac{\pi}{6} \leq t \leq \frac{\pi}{4}. \\ y = e^t (\cos t - \sin t), & \end{cases}$$

5. Обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями  $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{100} = 1; z = 5; z = 0.$

6. Обчислити об'єм тіла, утвореного при обертанні фігури, обмеженої графіками вказаних функцій, навколо вісі  $Ox.$   $y = 2x - x^2; y = -x + 2; x = 0.$

7. Дослідити на абсолютну та умовну збіжність невластні інтеграли:

(а)  $\int_1^{+\infty} \frac{xy}{9 + y^2 x^5} \cdot dx \quad (y \in \mathbb{R});$

(б)  $\int_0^1 \frac{6e^{2x^2} + 24 \cos x - 13x^2 - 30}{\sin^\alpha x} dx.$

# Варіант №16

1. Знайти невизначені інтеграли:

(а)  $\int (7x - 10) \sin 4x \cdot dx$ ;

(в)  $\int \frac{x^3 + 6x^2 + 15x + 2}{(x - 2)(x + 2)^3} dx$ ;

(б)  $\int \frac{x - \frac{1}{x}}{\sqrt{x^2 + 1}} dx$ ;

(г)  $\int \frac{\sqrt[3]{1 + \sqrt[4]{x}}}{x \sqrt[3]{x}} dx$ .

2. Обчислити визначені інтеграли: а)  $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x \cdot dx}{(1 + \cos x + \sin x)^2}$ ; б)  $\int_{-\arccos(1/\sqrt{10})}^0 \frac{3 \operatorname{tg}^2 x - 50}{2 \operatorname{tg} x + 7} dx$ .

3. Обчислити площі фігур, обмежених лініями: а)  $y = \sqrt{e^x - 1}$ ;  $y = 0$ ,  $x = \ln 2$ . б)  $r = \cos 3\varphi$ .

4. Обчислити довжину дуги кривої, заданої рівняннями

$$\begin{cases} x = (t^2 - 2) \sin t + 2t \cos t, \\ y = (2 - t^2) \cos t + 2t \sin t, \end{cases} \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}.$$

5. Обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями  $z = x^2 + 4y^2$ ;  $z = 2$ .

6. Обчислити об'єм тіла, утвореного при обертанні фігури, обмеженої графіками вказаних функцій, навколо вісі  $Ox$ .  $y = 2x - x^2$ ;  $y = -x + 2$ .

7. Дослідити на абсолютну та умовну збіжність невластні інтеграли:

(а)  $\int_1^{+\infty} \frac{2^x}{x^4} dx$ ;

(б)  $\int_{-1}^1 \sin \frac{1-x}{1+x} \frac{dx}{(1-x^2)^{5/4}}$ .



# Варіант №17

1. Знайти невизначені інтеграли:

(а)  $\int \ln(x^2 + 4) dx$ ;

(в)  $\int \frac{x^3 + 6x^2 + 10x + 10}{(x - 1)(x + 2)^3} dx$ ;

(б)  $\int \frac{\operatorname{tg}(x + 1)}{\cos^2(x + 1)} dx$ ;

(г)  $\int \frac{\sqrt[3]{(1 + \sqrt{x})^2}}{x\sqrt[6]{x^5}} dx$ .

2. Обчислити визначені інтеграли: а)  $\int_0^2 \frac{\cos x \cdot dx}{1 + \cos x + \sin x}$ ; б)  $\int_0^{\operatorname{arctg}(2/3)} \frac{(6 + \operatorname{tg} x) \cdot dx}{9 \sin^2 x + 4 \cos^2 x}$ .

3. Обчислити площі фігур, обмежених лініями: а)  $y = x^2\sqrt{8 - x^2}$ ;  $y = 0$ ,  $(0 \leq x \leq 2\sqrt{2})$ . б)  $r = \sin \varphi$ ;  $r = 2 \sin \varphi$ .

4. Обчислити довжину дуги кривої, заданої рівняннями

$$\begin{cases} x = 6(\cos t + t \sin t), \\ y = 6(\sin t - t \cos t), \end{cases} \quad 0 \leq t \leq \pi.$$

5. Обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{36} = -1$ ;  $z = 12$  ( $z \geq 0$ ).

6. Обчислити об'єм тіла, утвореного при обертанні фігури, обмеженої графіками вказаних функцій, навколо вісі  $Oy$ .  $y = x^3$ ;  $y = x$ .

7. Дослідити на абсолютну та умовну збіжність невластні інтеграли:

(а)  $\int_1^{+\infty} x^2 e^{-\alpha x} dx$  ( $\alpha > 0$ );

(б)  $\int_0^1 \frac{dx}{e^x - \cos x}$ .

# Варіант №18

1. Знайти невизначені інтеграли:

(а)  $\int \frac{x}{\sin^2 x} dx;$

(в)  $\int \frac{x^3 + 6x^2 - 10x + 52}{(x - 2)(x + 2)^3} dx;$

(б)  $\int \frac{x^3}{x^2 + 1} dx;$

(г)  $\int \frac{\sqrt[4]{1 + \sqrt[3]{x^2}}}{x \sqrt[6]{x^5}} dx.$

2. Обчислити визначені інтеграли: а)  $\int_{\pi/2}^{2 \operatorname{arctg} 2} \frac{dx}{\cos^2 x (1 - \cos x)}$ ; б)  $\int_{\pi/4}^{\operatorname{arctg} 3} \frac{dx}{\sin 2x (3 \operatorname{tg} x + 5)}$ .

3. Обчислити площі фігур, обмежених лініями: а)  $y = \frac{x}{(x^2 + 1)^2}; y = 0; x = 1$ . б)  $r = \sin 6\varphi$ .

4. Обчислити довжину дуги кривої, заданої рівняннями

$$\begin{cases} x = (t^2 - 2) \sin t + 2t \cos t, \\ y = (2 - t^2) \cos t + 2t \sin t, \end{cases} \quad 0 \leq t \leq \pi.$$

5. Обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{36} = -1; z = 12 (z \geq 0).$$

6. Обчислити об'єм тіла, утвореного при обертанні фігури, обмеженої графіками вказаних функцій, навколо вісі  $Ox$ .  $y = \sin^2 x; x = \frac{\pi}{2}; y = 0$ .

7. Дослідити на абсолютну та умовну збіжність невластні інтеграли:

(а)  $\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x} \cdot dx}{(1 + x)^2};$

(б)  $\int_1^2 \frac{x \cdot dx}{x^2 - 3x + 2}.$

# Варіант №19

1. Знайти невизначені інтеграли:

(а)  $\int \operatorname{arctg} \sqrt{4x-1} \cdot dx;$

(в)  $\int \frac{x^3 + 6x^2 + 13x + 8}{x(x+2)^3} dx;$

(б)  $\int \frac{1 + \ln x}{x} dx;$

(г)  $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}}{x\sqrt[3]{x^2}} dx.$

2. Обчислити визначені інтеграли: а)  $\int_{2 \operatorname{arctg}(1/3)}^{2 \operatorname{arctg}(1/2)} \frac{dx}{\sin x (1 - \sin x)}$ ; б)  $\int_{\arcsin(1/\sqrt{37})}^{\pi/4} \frac{6 \operatorname{tg} x \cdot dx}{3 \sin 2x + 5 \cos^2 x}.$

3. Обчислити площі фігур, обмежених лініями: а)  $y = \frac{1}{x\sqrt{1+\ln x}}$ ;  $y = 0$ ;  $x = 1$ ;  $x = e^3$ . б)  $r = \cos \varphi$ ;  $r = \sqrt{2} \cos \left( \varphi - \frac{\pi}{4} \right)$   $\left( -\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \right).$

4. Обчислити довжину дуги кривої, заданої рівняннями

$$\begin{cases} x = 4 \cos^3 t, & \frac{\pi}{6} \leq t \leq \frac{\pi}{4}. \\ y = 4 \sin^3 t, & \end{cases}$$

5. Обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями  $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{64} = -1$ ;  $z = 16$ .

6. Обчислити об'єм тіла, утвореного при обертанні фігури, обмеженої графіками вказаних функцій, навколо вісі  $Ox$ .  $y = 2x - x^2$ ;  $y = 4x - 2x^2$ .

7. Дослідити на абсолютну та умовну збіжність невластні інтеграли:

(а)  $\int_1^{+\infty} \frac{\ln^\alpha \operatorname{ch} x}{x^2 \ln^3 \left( 1 + \frac{1}{x} \right)} dx;$

(б)  $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{|x^2 - 1|}}.$

# Варіант №20

1. Знайти невизначені інтеграли:

(а)  $\int (5x + 6) \cos 2x \cdot dx$ ;

(в)  $\int \frac{2x^3 + 6x^2 + 7x + 4}{(x + 2)(x + 1)^3} dx$ ;

(б)  $\int \frac{(x^2 + 1) \cdot dx}{(x^3 + 3x + 1)^5}$ ;

(г)  $\int \frac{\sqrt[5]{(1 + \sqrt{x})^4}}{x \sqrt[10]{x^9}} dx$ .

2. Обчислити визначені інтеграли: а)  $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x \cdot dx}{5 + 4 \cos x}$ ; б)  $\int_{-\arcsin(1/3)}^0 \frac{(3 \operatorname{tg} x + 1) \cdot dx}{2 \sin 2x - 5 \cos 2x + 1}$ .

3. Обчислити площі фігур, обмежених лініями: а)  $x = \sqrt{e^y - 1}$ ;  $x = 0$ ;  $y = \ln 2$ . б)  $r = 1 + \sqrt{2} \cos \varphi$ .

4. Обчислити довжину дуги кривої, заданої рівняннями

$$\begin{cases} x = (t^2 - 2) \sin t + 2t \cos t, \\ y = (2 - t^2) \cos t + 2t \sin t, \end{cases} \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{3}.$$

5. Обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями  $z = 2x^2 + 18y^2$ ;  $z = 6$ .

6. Обчислити об'єм тіла, утвореного при обертанні фігури, обмеженої графіками вказаних функцій, навколо вісі  $Oy$ .  $y = \arccos \frac{x}{3}$ ;  $y = \arccos x$ ;  $y = 0$ .

7. Дослідити на абсолютну та умовну збіжність невластні інтеграли:

(а)  $\int_1^{+\infty} \operatorname{arctg} \frac{x^\alpha}{1 + x^2} \frac{dx}{x}$ ;

(б)  $\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2} \arccos x}$ .

# Варіант №21

1. Знайти невизначені інтеграли:

(а)  $\int (3x + 4) e^{3x} dx$ ;

(в)  $\int \frac{x^3 - 6x^2 + 13x - 6}{(x + 2)(x - 2)^3} dx$ ;

(б)  $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 1}}$ ;

(г)  $\int \frac{\sqrt{1 + \sqrt[3]{x}}}{x\sqrt{x}} dx$ .

2. Обчислити визначені інтеграли: а)  $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x \cdot dx}{(1 + \cos x + \sin x)^2}$ ; б)  $\int_0^{\arcsin \sqrt{7/8}} \frac{6 \sin^2 x \cdot dx}{4 + 3 \cos 2x}$ .

3. Обчислити площі фігур, обмежених лініями: а)  $x = (y - 2)^3$ ;  $x = 4y - 8$ . б)  $r = \frac{3}{2} \cos \varphi$ ;  $r = \frac{5}{2} \cos \varphi$ .

4. Обчислити довжину дуги кривої, заданої рівняннями

$$\begin{cases} x = e^t (\cos t + \sin t), \\ y = e^t (\cos t - \sin t), \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

5. Обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями  $x^2 + y^2 = 9$ ;  $z = y$ ;  $z = 0$  ( $y \geq 0$ ).

6. Обчислити об'єм тіла, утвореного при обертанні фігури, обмеженої графіками вказаних функцій, навколо вісі  $Oy$ .  $y = \arccos x$ ;  $y = \arcsin x$ ;  $x = 0$ .

7. Дослідити на абсолютну та умовну збіжність невласні інтеграли:

(а)  $\int_0^{+\infty} \frac{x \operatorname{arctg} x}{\sqrt{1 + x^3}} dx$ ;

(б)  $\int_0^1 (1 - x)^2 \sin \frac{\pi}{1 - x} dx$ .

# Варіант №22

1. Знайти невизначені інтеграли:

$$(a) \int \frac{x \cdot dx}{\cos^2 x};$$

$$(b) \int \frac{2x^3 - 6x^2 + 7x}{(x+2)(x-1)^3} dx;$$

$$(б) \int \frac{x - \operatorname{arctg}^4 x}{1+x^2} dx;$$

$$(r) \int \frac{\sqrt[4]{1+\sqrt[3]{x}}}{x \sqrt{x^5}} dx.$$

2. Обчислити визначені інтеграли: а)  $\int_{-\pi/2}^0 \frac{\cos x \cdot dx}{(1 + \cos x - \sin x)^2}$ ; б)  $\int_{\arcsin(2/\sqrt{5})}^{\arcsin(3/\sqrt{10})} \frac{(2 \operatorname{tg} x + 5) \cdot dx}{(5 - \operatorname{tg} x) \sin 2x}$ .

3. Обчислити площі фігур, обмежених лініями: а)  $y = x^2 \cos x; y = 0, (0 \leq x \leq \frac{\pi}{2})$ . б)  $r = 2 \sin \varphi; r = 4 \sin \varphi$ .

4. Обчислити довжину дуги кривої, заданої рівняннями

$$\begin{cases} x = 4(t - \sin t), \\ y = 4(1 - \cos t), \end{cases} \quad \frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{2\pi}{3}.$$

5. Обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями

$$\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{16} = 1; z = \sqrt{3}y; z = 0 (y \geq 0).$$

6. Обчислити об'єм тіла, утвореного при обертанні фігури, обмеженої графіками вказаних функцій, навколо вісі  $Oy$ .  $y = x^2; x = 2; y = 0$ .

7. Дослідити на абсолютну та умовну збіжність невластні інтеграли:

$$(a) \int_1^{+\infty} \left( 1 + \frac{e^{\sqrt{x}} - 1}{\alpha} \right) dx \quad (\alpha \neq 0);$$

$$(б) \int_0^1 \frac{\sin \frac{1}{x} \cdot dx}{x^2 + \sqrt{x^3} + x^2 \cos \frac{1}{x}}.$$

# Варіант №23

1. Знайти невизначені інтеграли:

(а)  $\int (1 - 6x) e^{2x} dx$ ;

(б)  $\int \operatorname{tg} x \ln \cos x \cdot dx$ ;

(в)  $\int \frac{2x^3 + 6x^2 + 7x + 1}{(x - 1)(x + 1)^3} dx$ ;

(г)  $\int \frac{\sqrt[3]{(1 + \sqrt[3]{x^2})^2}}{x^2 \sqrt[9]{x}} dx$ .

2. Обчислити визначені інтеграли: а)  $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{(1 + \cos x + \sin x)^2}$ ; б)  $\int_{\pi/4}^{\arcsin \sqrt{2/3}} \frac{8 \operatorname{tg} x \cdot dx}{8 \sin^2 x + 3 \cos^2 x - 7}$ .

3. Обчислити площі фігур, обмежених лініями: а)  $x = \arccos y$ ;  $x = 0$ ;  $y = 0$ . б)  $r = \sqrt{2} \cos\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right)$ ;  $r = \sqrt{2} \sin\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right)$   $\left(\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{3\pi}{4}\right)$ .

4. Обчислити довжину дуги кривої, заданої рівняннями  $\begin{cases} x = 8 \cos^3 t, \\ y = 8 \sin^3 t, \end{cases} 0 \leq t \leq \frac{\pi}{6}$ .

5. Обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{100} = -1; z = 20 \quad (z \geq 0).$$

6. Обчислити об'єм тіла, утвореного при обертанні фігури, обмеженої графіками вказаних функцій, навколо вісі  $Oy$ .  $y^2 = x - 2$ ;  $y = 0$ ;  $y = x^3$ ;  $y = 1$ .

7. Дослідити на абсолютну та умовну збіжність невластні інтеграли:

(а)  $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(1 + x + x^\alpha)}{\sqrt{x^3}} dx$ ;

(б)  $\int_0^1 \frac{dx}{1 - x^2 + 2\sqrt{1 - x^2}}$ .

# Варіант №24

1. Знайти невизначені інтеграли:

(а)  $\int \operatorname{arctg} \sqrt{3x-1} \cdot dx;$

(в)  $\int \frac{3x^3 + 9x^2 + 10x + 2}{(x-1)(x+1)^3} dx;$

(б)  $\int \frac{x \cdot dx}{\sqrt[3]{x-1}};$

(г)  $\int \frac{\sqrt[3]{1 + \sqrt[4]{x^3}}}{x^2} dx.$

2. Обчислити визначені інтеграли: а)  $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x \cdot dx}{2 + \sin x};$  б)  $\int_{\arccos(1/\sqrt{10})}^{\arccos(1/\sqrt{26})} \frac{12 \cdot dx}{(6 + 5 \operatorname{tg} x) \sin 2x}.$

3. Обчислити площі фігур, обмежених лініями: а)  $y = \cos x \sin^2 x; y = 0, (0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}).$  б)  $r = 6 \sin 3\varphi; r = 3 (r \geq 3).$

4. Обчислити довжину дуги кривої, заданої рівняннями

$$\begin{cases} x = e^t (\cos t + \sin t), & \frac{\pi}{2} \leq t \leq \pi. \\ y = e^t (\cos t - \sin t), & \end{cases}$$

5. Обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} - z^2 = 1; z = 0; z = 4.$

6. Обчислити об'єм тіла, утвореного при обертанні фігури, обмеженої графіками вказаних функцій, навколо вісі  $Ox. y = x^2; y = 1; x = 2.$

7. Дослідити на абсолютну та умовну збіжність невластні інтеграли:

(а)  $\int_0^{+\infty} x^{\alpha-101} \operatorname{arctg}^\alpha \frac{x}{x+1} dx;$

(б)  $\int_{-2}^0 \frac{dx}{(x+1)\sqrt[3]{x+1}}.$



# Варіант №25

1. Знайти невизначені інтеграли:

(а)  $\int (4x - 2) \cos 2x \cdot dx;$

(в)  $\int \frac{x^3 + 6x^2 + 14x + 10}{(x + 1)(x + 2)^3} dx;$

(б)  $\int \frac{x^2 + \ln x^2}{x} dx;$

(г)  $\int \frac{\sqrt[3]{1 + \sqrt[3]{x}}}{x\sqrt{x^4}} dx.$

2. Обчислити визначені інтеграли: а)  $\int_0^{2\pi/3} \frac{1 + \sin x}{1 + \cos x + \sin x} dx;$  б)  $\int_{\pi/4}^{\arctg 3} \frac{(1 + \operatorname{ctg} x) \cdot dx}{(\sin x + 2 \cos x)^2}.$

3. Обчислити площі фігур, обмежених лініями: а)  $y = (x + 1)^2; y^2 = x + 1.$  б)  $r = 6 \cos 3\varphi; r = 3 (r \geq 3).$

4. Обчислити довжину дуги кривої, заданої рівняннями  $\begin{cases} x = 3(2 \cos t - \cos 2t), \\ y = 3(2 \sin t - \sin 2t), \end{cases} 0 \leq t \leq 2\pi.$

5. Обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями

$$\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} = 1, z = y\sqrt{3}; z = 0 (y \geq 0).$$

6. Обчислити об'єм тіла, утвореного при обертанні фігури, обмеженої графіками вказаних функцій, навколо вісі  $Oy$ .  $y = \ln x; x = 2; y = 0.$

7. Дослідити на абсолютну та умовну збіжність невластні інтеграли:

(а)  $\int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-x^2} dx;$

(б)  $\int_0^1 \frac{\cos x^{-3/2}}{1 + x^2} dx.$

# Варіант №26

1. Знайти невизначені інтеграли:

(а)  $\int (x\sqrt{2} - 3) \cos 2x \cdot dx;$

(б)  $\int \frac{x^3}{x^2 + 4} dx;$

(в)  $\int \frac{2x^3 + 6x^2 + 7x}{(x - 2)(x + 1)^3} dx;$

(г)  $\int \frac{\sqrt[5]{(1 + \sqrt[3]{x^2})^4}}{x^2 \sqrt[5]{x}} dx.$

2. Обчислити визначені інтеграли: а)  $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x \cdot dx}{1 + \cos x + \sin x};$  б)  $\int_0^{\operatorname{arctg} 3} \frac{(4 + \operatorname{tg} x) \cdot dx}{2 \sin^2 x + 18 \cos^2 x}.$

3. Обчислити площі фігур, обмежених лініями: а)  $y = 2x - x^2 + 3; y = x^2 - 4x + 3.$  б)  $r = \frac{1}{2} + \sin \varphi.$

4. Обчислити довжину дуги кривої, заданої рівняннями

$$\begin{cases} x = 2(\cos t + t \sin t), \\ y = 2(\sin t - t \cos t), \end{cases} \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}.$$

5. Обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями  $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1; z = 1; z = 0.$

6. Обчислити об'єм тіла, утвореного при обертанні фігури, обмеженої графіками вказаних функцій, навколо вісі  $Ox.$   $y = x^3; y = \sqrt{x}.$

7. Дослідити на абсолютну та умовну збіжність невластні інтеграли:

(а)  $\int_0^{+\infty} \left(x + \frac{1}{x}\right)^\alpha \ln(1 + x^{-3\alpha}) dx \quad (\alpha > 0);$

(б)  $\int_0^1 \frac{\arcsin x}{\sqrt{1 - x^2}} dx.$

# Варіант №27

1. Знайти невизначені інтеграли:

(а)  $\int x \sin^2 x \cdot dx;$

(в)  $\int \frac{x^3 - 6x^2 + 13x - 6}{(x + 2)(x - 2)^3} dx;$

(б)  $\int \frac{\arcsin^2 x + 1}{\sqrt{1 - x^2}} dx;$

(г)  $\int \frac{\sqrt[3]{1 + \sqrt[5]{x}}}{x \sqrt[15]{x^4}} dx.$

2. Обчислити визначені інтеграли: а)  $\int_0^{2 \operatorname{arctg}(1/2)} \frac{1 + \sin x}{(1 - \sin x)^2} dx;$  б)  $\int_0^{\operatorname{arctg} 2} \frac{(12 + \operatorname{tg} x) \cdot dx}{3 \sin^2 x + 12 \cos^2 x}.$

3. Обчислити площі фігур, обмежених лініями: а)  $y = \arccos x; y = 0; x = 0.$

б)  $r = \sin \varphi; r = \sqrt{2} \cos \left( \varphi - \frac{\pi}{4} \right) \left( 0 \leq \varphi \leq \frac{3\pi}{4} \right).$

4. Обчислити довжину дуги кривої, заданої рівняннями

$$\begin{cases} x = 4(2 \cos t - \cos 2t), \\ y = 4(2 \sin t - \sin 2t), \end{cases} \quad 0 \leq t \leq \pi.$$

5. Обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями  $z = x^2 + 9y^2; z = 0; z = 3.$

6. Обчислити об'єм тіла, утвореного при обертанні фігури, обмеженої графіками вказаних функцій, навколо вісі  $Ox$ .  $y = x^2; x = y^2.$

7. Дослідити на абсолютну та умовну збіжність невласні інтеграли:

(а)  $\int_1^{+\infty} \frac{x^2}{2^x} dx;$

(б)  $\int_0^{\pi/4} \operatorname{tg}^2 x \cdot \cos \operatorname{ctg} x \cdot dx.$

# Варіант №28

1. Знайти невизначені інтеграли:

(а)  $\int (8 - 3x) \cos 5x \cdot dx;$

(в)  $\int \frac{x^3 + 6x^2 + 14x + 4}{(x - 2)(x + 2)^3} dx;$

(б)  $\int \frac{8x - \operatorname{arctg} 2x}{1 + 4x^2} dx;$

(г)  $\int \frac{\sqrt{1 + \sqrt[5]{x^4}}}{x^2 \sqrt[5]{x}} dx.$

2. Обчислити визначені інтеграли: а)  $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 x \cdot dx}{(1 + \cos x + \sin x)^2};$  б)  $\int_{\pi/4}^{\arccos(1/\sqrt{26})} \frac{36 \cdot dx}{(6 - \operatorname{tg} x) \sin 2x}.$

3. Обчислити площі фігур, обмежених лініями: а)  $y = x\sqrt{36 - x^2}; y = 0, (0 \leq x \leq 6).$  б)  $r = \cos \varphi; r = \sin \varphi (0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}).$

4. Обчислити довжину дуги кривої, заданої рівняннями

$$\begin{cases} x = e^t (\cos t + \sin t), \\ y = e^t (\cos t - \sin t), \end{cases} \quad 0 \leq t \leq \pi.$$

5. Обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями  $x^2 + \frac{y^2}{4} - z^2 = 1; z = 0; z = 3.$

6. Обчислити об'єм тіла, утвореного при обертанні фігури, обмеженої графіками вказаних функцій, навколо вісі  $Oy. y = x^3; y = x^2.$

7. Дослідити на абсолютну та умовну збіжність невластні інтеграли:

(а)  $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x^\alpha + e^x)}{\sqrt{x^3 + x^5}} dx;$

(б)  $\int_{-1}^1 \frac{dx}{(2 - x) \sqrt{1 - x^2}}.$

# Варіант №29

1. Знайти невизначені інтеграли:

(а)  $\int (4x - 3) e^{-2x} dx$ ;

(в)  $\int \frac{x^3 - 6x^2 + 14x - 6}{(x + 1)(x - 2)^3} dx$ ;

(б)  $\int \frac{x \cos x + \sin x}{(x \sin x)^2} dx$ ;

(г)  $\int \frac{\sqrt[4]{(1 + \sqrt[3]{x})^3}}{x \sqrt[12]{x^7}} dx$ .

2. Обчислити визначені інтеграли: а)  $\int_{-2\pi/3}^0 \frac{\cos^2 x \cdot dx}{(1 + \cos x - \sin x)^2}$ ; б)  $\int_0^{\arcsin(3/\sqrt{10})} \frac{(2 \operatorname{tg} x - 5) \cdot dx}{(4 \cos x - \sin x)^2}$ .

3. Обчислити площі фігур, обмежених лініями: а)  $y = x^2 \sqrt{16 - x^2}$ ;  $y = 0$ ,  $(0 \leq x \leq 4)$ . б)  $r = 2 \cos 6\varphi$ .

4. Обчислити довжину дуги кривої, заданої рівняннями  $\begin{cases} x = 10 \cos^3 t, \\ y = 10 \sin^3 t, \end{cases} 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ .

5. Обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями  $z = 2x^2 + 8y^2$ ;  $z = 4$ .

6. Обчислити об'єм тіла, утвореного при обертанні фігури, обмеженої графіками вказаних функцій, навколо вісі  $Ox$ .  $y = -x^2 + 5x - 6$ ;  $y = 0$ .

7. Дослідити на абсолютну та умовну збіжність невласні інтеграли:

(а)  $\int_1^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{\sqrt[3]{x^4 + \alpha^4}} dx \quad (\alpha \in \mathbb{R})$ ;

(б)  $\int_0^1 \frac{\sqrt{x} \cdot dx}{e^{\sin x} - 1}$ .

# Варіант №30

1. Знайти невизначені інтеграли:

(а)  $\int (4 - 16x) \sin 4x \cdot dx;$

(в)  $\int \frac{x^3 - 6x^2 + 11x - 10}{(x + 2)(x - 2)^3} dx;$

(б)  $\int \frac{x \cdot dx}{\sqrt{x^4 + x^2 + 1}};$

(г)  $\int \frac{\sqrt[3]{1 + \sqrt[3]{x^2}}}{x \sqrt[9]{x^8}} dx.$

2. Обчислити визначені інтеграли: а)  $\int_{\pi/2}^{2 \operatorname{arctg} 2} \frac{dx}{\sin^2 x (1 + \cos x)}$ ; б)  $\int_0^{\arccos(1/\sqrt{7})} \frac{3 + 2 \operatorname{tg} x}{2 \sin^2 x + 3 \cos^2 x - 1} dx.$

3. Обчислити площі фігур, обмежених лініями: а)  $y = \sin x \cos^2 x; y = 0, (0 \leq x \leq \frac{\pi}{2})$ . б)  $r = 4 \sin 3\varphi; r = 2 (r \geq 2)$ .

4. Обчислити довжину дуги кривої, заданої рівняннями

$$\begin{cases} x = 6 \cos^3 t, \\ y = 6 \sin^3 t, \end{cases} \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{3}.$$

5. Обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями  $z = 4x^2 + 9y^2; z = 6$ .

6. Обчислити об'єм тіла, утвореного при обертанні фігури, обмеженої графіками вказаних функцій, навколо вісі  $Ox. y = 3 \sin x; y = \sin x; 0 \leq x \leq \pi$ .

7. Дослідити на абсолютну та умовну збіжність невластні інтеграли:

(а)  $\int_3^{+\infty} \frac{e^{-x} - \ln x}{(1 + x^\alpha)^{\alpha-2}} dx;$

(б)  $\int_0^{\pi/4} \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt[3]{\sin x - \cos x}} dx.$