Варіант №1

1. Знайти невизначені інтеграли:

   (а) $\int \ln\left(x^2+4\right)\mathrm{d}x$;

   (б) $\int \dfrac{\operatorname{tg}(x+1)}{\cos^2(x+1)}\mathrm{d}x$;

   (в) $\int \dfrac{x^3+6x^2+10x+10}{(x-1)(x+2)^3}\mathrm{d}x$;

   (г) $\int \dfrac{\sqrt[3]{\left(1+\sqrt{x}\right)^2}}{x\sqrt[6]{x^5}}\mathrm{d}x$.

2. Обчислити визначені інтеграли: а) $\int\limits_0^{2\operatorname{arctg}(1/2)} \dfrac{1+\sin x}{(1-\sin x)^2}\mathrm{d}x$; б) $\int\limits_0^{\operatorname{arctg}2} \dfrac{(12+\operatorname{tg}x)\cdot\mathrm{d}x}{3\sin^2 x+12\cos^2 x}$.

3. Обчислити площі фігур, обмежених лініями: а) $y=\sqrt{4-x^2}; y=0; x=0; x=1$. б) $r=2\cos\varphi; r=2\sqrt{3}\sin\varphi\ \left(0\leqslant\varphi\leqslant\dfrac{\pi}{2}\right)$.

4. Обчислити довжину дуги кривої, заданої рівняннями

$$\begin{cases} x=2\left(2\cos t-\cos 2t\right), \\ y=2\left(2\sin t-\sin 2t\right), \end{cases} \quad 0\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{3}.$$

5. Обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}-\dfrac{z^2}{36}=-1;\ z=12\ (z\geqslant 0)$.

6. Обчислити об'єм тіла, утвореного при обертанні фігури, обмеженої графіками вказаних функцій, навколо вісі Oy. $y=x^2; x=2; y=0$.

7. Дослідити на абсолютну та умовну збіжність невласні інтеграли:

   (а) $\int\limits_1^{+\infty} \dfrac{2^x}{x^4}\mathrm{d}x$;

   (б) $\int\limits_{-1}^{1} \sin\dfrac{1-x}{1+x}\dfrac{\mathrm{d}x}{\left(1-x^2\right)^{5/4}}$.

Варіант №2

1. Знайти невизначені інтеграли:

   (а) $\int (2-9x)\, e^{-3x} \mathrm{d}x$;

   (б) $\int \dfrac{x^3+x}{x^4+1} \mathrm{d}x$;

   (в) $\int \dfrac{x^3-6x^2+10x-10}{(x+1)\,(x-2)^3} \mathrm{d}x$;

   (г) $\int \dfrac{\sqrt[4]{\left(1+\sqrt[3]{x^2}\right)^3}}{x^2\sqrt[6]{x}} \mathrm{d}x$.

2. Обчислити визначені інтеграли: а) $\int\limits_0^{2\,\mathrm{arctg}(1/2)} \dfrac{(1-\sin x)\,\mathrm{d}x}{\cos x\,(1+\cos x)}$; б) $\int\limits_0^{\pi/4} \dfrac{(5\,\mathrm{tg}\, x+2)\cdot \mathrm{d}x}{2\sin 2x+5}$.

3. Обчислити площі фігур, обмежених лініями: а) $y = x^2\sqrt{8-x^2}; y = 0,\ \left(0 \leqslant x \leqslant 2\sqrt{2}\right)$. б) $r = \sin\varphi; r = 2\sin\varphi$.

4. Обчислити довжину дуги кривої, заданої рівняннями

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{2}\cos t - \dfrac{1}{4}\cos 2t, \\ y = \dfrac{1}{2}\sin t - \dfrac{1}{4}\sin 2t, \end{cases} \quad \frac{\pi}{2} \leqslant t \leqslant \frac{2\pi}{3}.$$

5. Обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} - \dfrac{z^2}{64} = -1; z = 16$.

6. Обчислити об'єм тіла, утвореного при обертанні фігури, обмеженої графіками вказаних функцій, навколо вісі Oy. $y = \arccos\dfrac{x}{3}; y = \arccos x; y = 0$.

7. Дослідити на абсолютну та умовну збіжність невласні інтеграли:

   (а) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x}+x^3}$;

   (б) $\int\limits_0^{\pi/4} \sin\left(\dfrac{1}{\sin x}\right) \dfrac{\mathrm{d}x}{(\sin x)^{3/2}}$.

Варіант №3

1. Знайти невизначені інтеграли:

   (а) $\int \left(x\sqrt{2}-3\right)\cos 2x \cdot \mathrm{d}x$;

   (б) $\int \dfrac{x^3}{x^2+4}\mathrm{d}x$;

   (в) $\int \dfrac{2x^3+6x^2+7x}{(x-2)\,(x+1)^3}\mathrm{d}x$;

   (г) $\int \dfrac{\sqrt[5]{\left(1+\sqrt[3]{x^2}\right)^4}}{x^2\sqrt[5]{x}}\mathrm{d}x$.

2. Обчислити визначені інтеграли: а) $\int\limits_{-\pi/2}^{0} \dfrac{\cos x \cdot \mathrm{d}x}{(1+\cos x-\sin x)^2}$; б) $\int\limits_{\arcsin\left(2/\sqrt{5}\right)}^{\arcsin\left(3/\sqrt{10}\right)} \dfrac{(2\operatorname{tg} x+5)\cdot \mathrm{d}x}{(5-\operatorname{tg} x)\sin 2x}$.

3. Обчислити площі фігур, обмежених лініями: а) $y=2x-x^2+3; y=x^2-4x+3$. б) $r=\dfrac{1}{2}+\sin\varphi$.

4. Обчислити довжину дуги кривої, заданої рівняннями

$$\begin{cases} x=(t^2-2)\sin t+2t\cos t, \\ y=(2-t^2)\cos t+2t\sin t, \end{cases} \quad 0\leqslant t\leqslant \frac{\pi}{3}.$$

5. Обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}-\frac{z^2}{100}=-1; z=20\ (z\geqslant 0)\,.$$

6. Обчислити об'єм тіла, утвореного при обертанні фігури, обмеженої графіками вказаних функцій, навколо вісі Oy. $y=x^2+1; y=x; x=0; x=1$.

7. Дослідити на абсолютну та умовну збіжність невласні інтеграли:

   (а) $\int\limits_{0}^{+\infty} \dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x\ln x+1}}$;

   (б) $\int\limits_{0}^{1} \dfrac{\cos x^{-1}\cdot \mathrm{d}x}{x^2\left(\dfrac{1}{x}+\sin\dfrac{1}{x}\right)^{3/2}}$.

Варіант №4

1. Знайти невизначені інтеграли:

   (а) $\int (5x+6)\cos 2x \cdot \mathrm{d}x$;

   (б) $\int \frac{(x^2+1)\cdot \mathrm{d}x}{(x^3+3x+1)^5}$;

   (в) $\int \frac{2x^3+6x^2+7x+4}{(x+2)(x+1)^3}\mathrm{d}x$;

   (г) $\int \frac{\sqrt[5]{(1+\sqrt{x})^4}}{x\sqrt[10]{x^9}}\mathrm{d}x$.

2. Обчислити визначені інтеграли: а) $\int\limits_0^{2\pi/3} \frac{1+\sin x}{1+\cos x+\sin x}\mathrm{d}x$; б) $\int\limits_{\pi/4}^{\operatorname{arctg} 3} \frac{(1+\operatorname{ctg} x)\cdot \mathrm{d}x}{(\sin x+2\cos x)^2}$.

3. Обчислити площі фігур, обмежених лініями: а) $y=(x-1)^2$; $y^2=x-1$. б) $r=3\sin\varphi$; $r=5\sin\varphi$.

4. Обчислити довжину дуги кривої, заданої рівняннями $\begin{cases} x=10\cos^3 t, \\ y=10\sin^3 t, \end{cases}$ $0\leqslant t\leqslant \frac{\pi}{2}$.

5. Обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{100}=-1;\, z=20\ (z\geqslant 0)\,.$$

6. Обчислити об'єм тіла, утвореного при обертанні фігури, обмеженої графіками вказаних функцій, навколо вісі Oy. $y=\arccos x$; $y=\arcsin x$; $x=0$.

7. Дослідити на абсолютну та умовну збіжність невласні інтеграли:

   (а) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} xe^{-x^2}\mathrm{d}x$;

   (б) $\int\limits_0^1 \frac{\cos x^{-3/2}}{1+x^2}\mathrm{d}x$.

Варіант №5

1. Знайти невизначені інтеграли:

   (а) $\int \operatorname{arctg}\sqrt{2x-1}\cdot \mathrm{d}x$;

   (б) $\int \dfrac{x\cdot \mathrm{d}x}{\sqrt{x^4-x^2-1}}$;

   (в) $\int \dfrac{x^3+x+2}{(x+2)\,x^3}\mathrm{d}x$;

   (г) $\int \dfrac{\sqrt{1+\sqrt[4]{x^3}}}{x^2\sqrt[8]{x}}\mathrm{d}x$.

2. Обчислити визначені інтеграли: а) $\int\limits_0^{\pi/2} \dfrac{\cos x-\sin x}{(1+\sin x)^2}\mathrm{d}x$; б) $\int\limits_0^{\operatorname{arctg}(1/3)} \dfrac{(8+\operatorname{tg} x)\,\mathrm{d}x}{18\sin^2 x+2\cos^2 x}$.

3. Обчислити площі фігур, обмежених лініями: а) $x=\sqrt{e^y-1}; x=0; y=\ln 2$. б) $r=1+\sqrt{2}\cos\varphi$.

4. Обчислити довжину дуги кривої, заданої рівняннями

$$\begin{cases} x=2,5\,(t-\sin t)\,, \\ y=2,5\,(1-\cos t)\,, \end{cases} \quad \frac{\pi}{2}\leqslant t\leqslant \pi.$$

5. Обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями $z=2x^2+18y^2; z=6$.

6. Обчислити об'єм тіла, утвореного при обертанні фігури, обмеженої графіками вказаних функцій, навколо вісі Ox. $x=\sqrt[3]{y-2}; x=1; y=1$.

7. Дослідити на абсолютну та умовну збіжність невласні інтеграли:

   (а) $\int\limits_0^{+\infty} x^{\alpha-101}\operatorname{arctg}^{\alpha}\dfrac{x}{x+1}\mathrm{d}x$;

   (б) $\int\limits_{-2}^{0} \dfrac{\mathrm{d}x}{(x+1)\sqrt[3]{x+1}}$.

Варіант №6

1. Знайти невизначені інтеграли:

   (а) $\int (1-6x)\, e^{2x} \mathrm{d}x$;

   (б) $\int \operatorname{tg} x \ln \cos x \cdot \mathrm{d}x$;

   (в) $\int \dfrac{2x^3+6x^2+7x+1}{(x-1)\,(x+1)^3} \mathrm{d}x$;

   (г) $\int \dfrac{\sqrt[3]{\left(1+\sqrt[3]{x^2}\right)^2}}{x^2\sqrt[9]{x}} \mathrm{d}x$.

2. Обчислити визначені інтеграли: а) $\int\limits_0^{\pi/2} \dfrac{\cos x \cdot \mathrm{d}x}{(1+\cos x+\sin x)^2}$; б) $\int\limits_{-\arccos\left(1/\sqrt{10}\right)}^{0} \dfrac{3\operatorname{tg}^2 x-50}{2\operatorname{tg} x+7}\, \mathrm{d}x$.

3. Обчислити площі фігур, обмежених лініями: а) $y = \dfrac{1}{1+\cos x}; y = 0; x = \dfrac{\pi}{2}; x = -\dfrac{\pi}{2}$. б) $r = \dfrac{5}{2}\sin\varphi; r = \dfrac{3}{2}\sin\varphi$.

4. Обчислити довжину дуги кривої, заданої рівняннями

$$\begin{cases} x = 8\,(\cos t + t\sin t)\,, \\ y = 8\,(\sin t - t\cos t)\,, \end{cases} \quad 0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{4}.$$

5. Обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями

$$\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{16}=1; z=\sqrt{3}y; z=0\,(y \geqslant 0)\,.$$

6. Обчислити об'єм тіла, утвореного при обертанні фігури, обмеженої графіками вказаних функцій, навколо вісі Ox. $y = x^2; y = 1; x = 2$.

7. Дослідити на абсолютну та умовну збіжність невласні інтеграли:

   (а) $\int\limits_1^{+\infty} \dfrac{y \cdot \mathrm{d}x}{4+y^2x^4} \quad (y \in \mathbb{R})\,;$

   (б) $\int\limits_0^1 \dfrac{x^2 \mathrm{d}x}{\sqrt[3]{(1-x^2)^5}}$.

Варіант №7

1. Знайти невизначені інтеграли:

   (а) $\int \frac{x}{\sin^2 x}\mathrm{d}x$;

   (б) $\int \frac{x^3}{x^2+1}\mathrm{d}x$;

   (в) $\int \frac{x^3+6x^2-10x+52}{(x-2)(x+2)^3}\mathrm{d}x$;

   (г) $\int \frac{\sqrt[4]{1+\sqrt[3]{x^2}}}{x\sqrt[6]{x^5}}\mathrm{d}x$.

2. Обчислити визначені інтеграли: а) $\int\limits_0^{2\,\mathrm{arctg}(1/3)} \frac{\cos x\cdot \mathrm{d}x}{(1+\cos x)(1-\sin x)}$; б) $\int\limits_0^{\arcsin\sqrt{3/7}} \frac{\mathrm{tg}^2\, x\cdot \mathrm{d}x}{3\sin^2 x+4\cos^2 x-7}$.

3. Обчислити площі фігур, обмежених лініями: а) $y=x^2\sqrt{16-x^2}; y=0,\ (0\leqslant x\leqslant 4)$. б) $r=2\cos 6\varphi$.

4. Обчислити довжину дуги кривої, заданої рівняннями

$$\begin{cases} x=3,5\,(2\cos t-\cos 2t)\,, \\ y=3,5\,(2\sin t-\sin 2t)\,, \end{cases} \quad 0\leqslant t\leqslant \frac{\pi}{2}.$$

5. Обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{36}=-1; z=12\,(z\geqslant 0)\,.$$

6. Обчислити об'єм тіла, утвореного при обертанні фігури, обмеженої графіками вказаних функцій, навколо вісі Ox. $y=2x-x^2; y=-x+2$.

7. Дослідити на абсолютну та умовну збіжність невласні інтеграли:

   (а) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x}\cdot \mathrm{d}x}{(1+x)^2}$;

   (б) $\int\limits_1^{2} \frac{x\cdot \mathrm{d}x}{x^2-3x+2}$.

Варіант №8

1. Знайти невизначені інтеграли:

   (а) $\int \operatorname{arctg}\sqrt{6x-1}\cdot \mathrm{d}x$;

   (б) $\int \dfrac{\sin x-\cos x}{(\cos x+\sin x)^5}\mathrm{d}x$;

   (в) $\int \dfrac{x^3-6x^2+13x-7}{(x+1)(x-2)^3}\mathrm{d}x$;

   (г) $\int \dfrac{\sqrt[4]{(1+\sqrt{x})^3}}{x\sqrt[8]{x^7}}\mathrm{d}x$.

2. Обчислити визначені інтеграли: а) $\displaystyle\int\limits_{2\operatorname{arctg}(1/3)}^{2\operatorname{arctg}(1/2)} \frac{\mathrm{d}x}{\sin x\,(1-\sin x)}$; б) $\displaystyle\int\limits_{\arcsin\left(1/\sqrt{37}\right)}^{\pi/4} \frac{6\operatorname{tg}x\cdot \mathrm{d}x}{3\sin 2x+5\cos^2 x}$.

3. Обчислити площі фігур, обмежених лініями: а) $y=x\operatorname{arctg}x; y=0;\ x=\sqrt{3}$. б) $r=\cos\varphi; r=2\cos\varphi$.

4. Обчислити довжину дуги кривої, заданої рівняннями

$$\begin{cases} x=e^t(\cos t+\sin t), \\ y=e^t(\cos t-\sin t), \end{cases} \quad 0\leqslant t\leqslant \frac{3\pi}{2}.$$

5. Обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями $z=x^2+9y^2; z=0; z=3$.

6. Обчислити об'єм тіла, утвореного при обертанні фігури, обмеженої графіками вказаних функцій, навколо вісі Ox. $y=e^{1-x}; y=0; x=0; x=1$.

7. Дослідити на абсолютну та умовну збіжність невласні інтеграли:

   (а) $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty} \operatorname{arctg}\frac{x^\alpha}{1+x^2}\frac{\mathrm{d}x}{x}$;

   (б) $\displaystyle\int\limits_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}\arccos x}$.

Варіант №9

1. Знайти невизначені інтеграли:

   (а) $\int \left(\sqrt{2} - 8x\right) \sin 3x \cdot \mathrm{d}x$;

   (б) $\int \dfrac{\operatorname{arctg} x + x}{1 + x^2} \mathrm{d}x$;

   (в) $\int \dfrac{2x^3 - 6x^2 + 7x - 4}{(x-2)(x-1)^3} \mathrm{d}x$;

   (г) $\int \dfrac{\sqrt[3]{\left(1 + \sqrt[4]{x}\right)^2}}{x \sqrt[12]{x^5}} \mathrm{d}x$.

2. Обчислити визначені інтеграли: а) $\int\limits_0^{\pi/2} \dfrac{\mathrm{d}x}{(1 + \cos x + \sin x)^2}$; б) $\int\limits_{\pi/4}^{\arcsin\sqrt{2/3}} \dfrac{8 \operatorname{tg} x \cdot \mathrm{d}x}{8 \sin^2 x + 3 \cos^2 x - 7}$.

3. Обчислити площі фігур, обмежених лініями: а) $x = \dfrac{1}{y\sqrt{1 + \ln y}}$; $x = 0$; $y = 1$; $y = e^3$. б) $r = \cos\varphi + \sin\varphi$.

4. Обчислити довжину дуги кривої, заданої рівняннями

$$\begin{cases} x = e^t (\cos t + \sin t), \\ y = e^t (\cos t - \sin t), \end{cases} \quad \frac{\pi}{2} \leqslant t \leqslant \pi.$$

5. Обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{16} - \dfrac{z^2}{64} = -1$; $z = 16$ $(z \geqslant 0)$.

6. Обчислити об'єм тіла, утвореного при обертанні фігури, обмеженої графіками вказаних функцій, навколо вісі Oy. $y = \arcsin \dfrac{x}{5}$; $y = \arcsin x$; $y = \dfrac{\pi}{2}$.

7. Дослідити на абсолютну та умовну збіжність невласні інтеграли:

   (а) $\int\limits_1^{+\infty} x^2 e^{-\alpha x} \mathrm{d}x \ \ (\alpha > 0)$;

   (б) $\int\limits_0^1 \dfrac{\mathrm{d}x}{e^x - \cos x}$.

Варіант №10

1. Знайти невизначені інтеграли:

   (а) $\int \operatorname{arctg}\sqrt{5x-1}\cdot \mathrm{d}x$;

   (б) $\int \dfrac{1+\ln(x-1)}{x-1}\mathrm{d}x$;

   (в) $\int \dfrac{2x^3+x+1}{(x+1)\,x^3}\mathrm{d}x$;

   (г) $\int \dfrac{\sqrt[3]{\left(1+\sqrt[4]{x^3}\right)^2}}{x^2\sqrt[4]{x}}\mathrm{d}x$.

2. Обчислити визначені інтеграли: а) $\int\limits_0^{\pi/2} \dfrac{\sin^2 x\cdot \mathrm{d}x}{(1+\cos x+\sin x)^2}$; б) $\int\limits_{\pi/4}^{\arccos\left(1/\sqrt{26}\right)} \dfrac{36\cdot \mathrm{d}x}{(6-\operatorname{tg} x)\sin 2x}$.

3. Обчислити площі фігур, обмежених лініями: а) $y=\dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}$; $y=0$; $x=2$; $x=1$. б) $r=2\sin 4\varphi$.

4. Обчислити довжину дуги кривої, заданої рівняннями

$$\begin{cases} x=2\left(\cos t+t\sin t\right), \\ y=2\left(\sin t-t\cos t\right), \end{cases} \quad 0\leqslant t\leqslant \frac{\pi}{2}.$$

5. Обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями

$$\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4}=1, z=y\sqrt{3}; z=0\ (y\geqslant 0)\,.$$

6. Обчислити об'єм тіла, утвореного при обертанні фігури, обмеженої графіками вказаних функцій, навколо вісі Ox.$y=3\sin x; y=\sin x; 0\leqslant x\leqslant \pi$.

7. Дослідити на абсолютну та умовну збіжність невласні інтеграли:

   (а) $\int\limits_{\sqrt{2}}^{+\infty} \dfrac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-1}}$;

   (б) $\int\limits_3^5 \dfrac{x^3\mathrm{d}x}{\sqrt{(x-3)(5-x)}}$.

Варіант №11

1. Знайти невизначені інтеграли:

   (а) $\int (x+5)\sin 3x \cdot \mathrm{d}x$;

   (б) $\int \dfrac{\dfrac{1}{2\sqrt{x}}+1}{\left(\sqrt{x}+x\right)^2}\mathrm{d}x$;

   (в) $\int \dfrac{x^3+6x^2+18x-4}{(x-2)\,(x+2)^3}\mathrm{d}x$;

   (г) $\int \dfrac{\sqrt[3]{1+\sqrt[5]{x^4}}}{x^2\,\sqrt[15]{x}}\mathrm{d}x$.

2. Обчислити визначені інтеграли: а) $\int\limits_0^2 \dfrac{\cos x \cdot \mathrm{d}x}{1+\cos x+\sin x}$; б) $\int\limits_0^{\operatorname{arctg}(2/3)} \dfrac{(6+\operatorname{tg} x)\cdot \mathrm{d}x}{9\sin^2 x+4\cos^2 x}$.

3. Обчислити площі фігур, обмежених лініями: а) $y=(x-2)^3$; $y=4x-8$; б) $r=4\cos 3\varphi$; $r=2\ (r\geqslant 2)$.

4. Обчислити довжину дуги кривої, заданої рівняннями

$$\begin{cases} x=(t^2-2)\sin t+2t\cos t, \\ y=(2-t^2)\cos t+2t\sin t, \end{cases} \quad 0\leqslant t\leqslant \frac{\pi}{2}.$$

5. Обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями

$$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{64}=1;\ z=4;\ z=0.$$

6. Обчислити об'єм тіла, утвореного при обертанні фігури, обмеженої графіками вказаних функцій, навколо вісі Oy. $y=x^2-2x+1$; $x=2$; $y=0$.

7. Дослідити на абсолютну та умовну збіжність невласні інтеграли:

   (а) $\int\limits_1^{+\infty} \dfrac{\ln\left(1+x+x^{\alpha}\right)}{\sqrt{x^3}}\mathrm{d}x$;

   (б) $\int\limits_0^1 \dfrac{\mathrm{d}x}{1-x^2+2\sqrt{1-x^2}}$.

Варіант №12

1. Знайти невизначені інтеграли:

   (а) $\int \frac{x \cdot \mathrm{d}x}{\cos^2 x}$;

   (б) $\int \frac{x - \operatorname{arctg}^4 x}{1 + x^2} \mathrm{d}x$;

   (в) $\int \frac{2x^3 - 6x^2 + 7x}{(x+2)(x-1)^3} \mathrm{d}x$;

   (г) $\int \frac{\sqrt[4]{1 + \sqrt[3]{x}}}{x \sqrt[12]{x^5}} \mathrm{d}x$.

2. Обчислити визначені інтеграли: а) $\int\limits_{2\operatorname{arctg} 2}^{2\operatorname{arctg} 3} \frac{\mathrm{d}x}{\cos x\,(1 - \cos x)}$; б) $\int\limits_{0}^{\arccos\sqrt{2/3}} \frac{(2 + \operatorname{tg} x)\,\mathrm{d}x}{\sin^2 x + 2\cos^2 x - 3}$.

3. Обчислити площі фігур, обмежених лініями: а) $y = x\sqrt{9 - x^2}; y = 0,\ (0 \leqslant x \leqslant 3)$. б) $r = \cos 2\varphi$.

4. Обчислити довжину дуги кривої, заданої рівняннями

$$\begin{cases} x = 4\,(2\cos t - \cos 2t)\,, \\ y = 4\,(2\sin t - \sin 2t)\,, \end{cases} \quad 0 \leqslant t \leqslant \pi.$$

5. Обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{100} = 1; z = 5; z = 0$.

6. Обчислити об'єм тіла, утвореного при обертанні фігури, обмеженої графіками вказаних функцій, навколо вісі Oy. $y = \ln x; x = 2; y = 0$.

7. Дослідити на абсолютну та умовну збіжність невласні інтеграли:

   (а) $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{\sqrt[3]{x^4 + \alpha^4}} \mathrm{d}x \ \ (\alpha \in \mathbb{R})$;

   (б) $\int\limits_{0}^{1} \frac{\sqrt{x} \cdot \mathrm{d}x}{e^{\sin x} - 1}$.

Варіант №13

1. Знайти невизначені інтеграли:

   (а) $\int \ln\left(4x^2+1\right)\mathrm{d}x$;

   (б) $\int \dfrac{x^3}{\left(x^2+1\right)^2}\mathrm{d}x$;

   (в) $\int \dfrac{2x^3+6x^2+7x+2}{x\left(x+1\right)^3}\mathrm{d}x$;

   (г) $\int \dfrac{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}}{x^2}\mathrm{d}x$.

2. Обчислити визначені інтеграли: а) $\int\limits_{\pi/2}^{2\operatorname{arctg}2} \dfrac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x\left(1-\cos x\right)}$; б) $\int\limits_{\pi/4}^{\operatorname{arctg}3} \dfrac{\mathrm{d}x}{\sin 2x\left(3\operatorname{tg}x+5\right)}$.

3. Обчислити площі фігур, обмежених лініями: а) $y=x^2\sqrt{4-x^2}; y=0,\ (0\leqslant x\leqslant 2)$. б) $r=\sin 3\varphi$.

4. Обчислити довжину дуги кривої, заданої рівняннями

$$\begin{cases} x=4\left(t-\sin t\right), \\ y=4\left(1-\cos t\right), \end{cases} \quad \frac{\pi}{2}\leqslant t\leqslant\frac{2\pi}{3}.$$

5. Обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями $z=2x^2+8y^2; z=4$.

6. Обчислити об'єм тіла, утвореного при обертанні фігури, обмеженої графіками вказаних функцій, навколо вісі Ox. $y=-x^2+5x-6; y=0$.

7. Дослідити на абсолютну та умовну збіжність невласні інтеграли:

   (а) $\int\limits_1^{+\infty} \dfrac{\ln^\alpha \operatorname{ch}x}{x^2\ln^3\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}\mathrm{d}x$;

   (б) $\int\limits_0^2 \dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{|x^2-1|}}$.

Варіант №14

1. Знайти невизначені інтеграли:

   (а) $\int (4x+3)\sin 5x \cdot \mathrm{d}x$;

   (б) $\int \dfrac{x+\dfrac{1}{x}}{\sqrt{x^2+1}}\mathrm{d}x$;

   (в) $\int \dfrac{x^3-6x^2+14x-4}{(x+2)(x-2)^3}\mathrm{d}x$;

   (г) $\int \dfrac{\sqrt[4]{\left(1+\sqrt[5]{x^4}\right)^3}}{x^2\sqrt[5]{x^2}}\mathrm{d}x$.

2. Обчислити визначені інтеграли: а) $\int\limits_{2\,\mathrm{arctg}(1/2)}^{\pi/2} \dfrac{\cos x \cdot \mathrm{d}x}{(1-\cos x)^3}$; б) $\int\limits_{\pi/4}^{\mathrm{arctg}\,3} \dfrac{4\,\mathrm{tg}\,x-5}{1-\sin 2x+4\cos^2 x}\mathrm{d}x$.

3. Обчислити площі фігур, обмежених лініями: а) $y=\sqrt{e^x-1}; y=0,\ x=\ln 2$. б) $r=\cos 3\varphi$.

4. Обчислити довжину дуги кривої, заданої рівняннями

$$\begin{cases} x = e^t(\cos t+\sin t), \\ y = e^t(\cos t-\sin t), \end{cases} \quad 0\leqslant t\leqslant \pi.$$

5. Обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями $\dfrac{x^2}{81}+\dfrac{y^2}{25}-z^2=1; z=0; z=2$.

6. Обчислити об'єм тіла, утвореного при обертанні фігури, обмеженої графіками вказаних функцій, навколо вісі Oy. $y=(x-1)^2; y=1$.

7. Дослідити на абсолютну та умовну збіжність невласні інтеграли:

   (а) $\int\limits_0^{+\infty}\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^{\alpha}\ln\left(1+x^{-3\alpha}\right)\mathrm{d}x\ \ (\alpha>0)$;

   (б) $\int\limits_0^1 \dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$.

Варіант №15

1. Знайти невизначені інтеграли:

   (а) $\int (8-3x)\cos 5x \cdot \mathrm{d}x$;

   (б) $\int \dfrac{8x - \operatorname{arctg} 2x}{1+4x^2}\mathrm{d}x$;

   (в) $\int \dfrac{x^3+6x^2+14x+4}{(x-2)(x+2)^3}\mathrm{d}x$;

   (г) $\int \dfrac{\sqrt{1+\sqrt[5]{x^4}}}{x^2\sqrt[5]{x}}\mathrm{d}x$.

2. Обчислити визначені інтеграли: а) $\int\limits_{-2\pi/3}^{0} \dfrac{\cos x \cdot \mathrm{d}x}{1+\cos x - \sin x}$; б) $\int\limits_{0}^{\pi/4} \dfrac{(7+3\operatorname{tg} x)\cdot \mathrm{d}x}{(\sin x + 2\cos x)^2}$.

3. Обчислити площі фігур, обмежених лініями: а) $x=\sqrt{4-y^2}; x=0;\ y=0;\ y=1$. б) $r=\cos\varphi - \sin\varphi$.

4. Обчислити довжину дуги кривої, заданої рівняннями $\begin{cases} x = 4(\cos t + t\sin t), \\ y = 5(\sin t - t\cos t), \end{cases}$ $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$.

5. Обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями

$$\frac{x^2}{27}+\frac{y^2}{25}=1; z=\frac{y}{\sqrt{3}}; z=0\ (y\geqslant 0).$$

6. Обчислити об'єм тіла, утвореного при обертанні фігури, обмеженої графіками вказаних функцій, навколо вісі Ox. $y=5\cos x; y=\cos x; x=0; x\geqslant 0$.

7. Дослідити на абсолютну та умовну збіжність невласні інтеграли:

   (а) $\int\limits_{0}^{+\infty} x^{\frac{4\alpha}{3}} \operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{x}}{1+x^{\alpha}} \cdot \mathrm{d}x$;

   (б) $\int\limits_{0}^{e^{-1}} \dfrac{\mathrm{d}x}{x\ln^2 x}$.

Варіант №16

1. Знайти невизначені інтеграли:

   (а) $\int \operatorname{arctg}\sqrt{4x-1}\cdot \mathrm{d}x$;

   (б) $\int \dfrac{1+\ln x}{x}\mathrm{d}x$;

   (в) $\int \dfrac{x^3+6x^2+13x+8}{x\,(x+2)^3}\mathrm{d}x$;

   (г) $\int \dfrac{\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}}{x\sqrt[3]{x^2}}\mathrm{d}x$.

2. Обчислити визначені інтеграли: а) $\int\limits_0^{\pi/2} \dfrac{\cos x\cdot \mathrm{d}x}{5+4\cos x}$; б) $\int\limits_{-\arcsin(1/3)}^{0} \dfrac{(3\operatorname{tg} x+1)\cdot \mathrm{d}x}{2\sin 2x-5\cos 2x+1}$.

3. Обчислити площі фігур, обмежених лініями: а) $y=\sin x\cos^2 x; y=0,\ \left(0\leqslant x\leqslant \dfrac{\pi}{2}\right)$. б) $r=4\sin 3\varphi; r=2\ (r\geqslant 2)$.

4. Обчислити довжину дуги кривої, заданої рівняннями

$$\begin{cases} x=e^t\left(\cos t+\sin t\right), \\ y=e^t\left(\cos t-\sin t\right), \end{cases} \quad 0\leqslant t\leqslant 2\pi.$$

5. Обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}+\dfrac{z^2}{144}=1; z=6; z=0$.

6. Обчислити об'єм тіла, утвореного при обертанні фігури, обмеженої графіками вказаних функцій, навколо вісі Oy. $y=\sqrt{x-1}; y=0; y=1; x=0,5$.

7. Дослідити на абсолютну та умовну збіжність невласні інтеграли:

   (а) $\int\limits_0^{+\infty} \dfrac{\mathrm{d}x}{1+x^{\alpha}\sin^2 x}$;

   (б) $\int\limits_0^{1} \dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(1-x^2)\arcsin x}}$.

Варіант №17

1. Знайти невизначені інтеграли:

   (а) $\int x \sin^2 x \cdot \mathrm{d}x$;

   (б) $\int \dfrac{\arcsin^2 x + 1}{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}x$;

   (в) $\int \dfrac{x^3 - 6x^2 + 13x - 6}{(x+2)(x-2)^3} \mathrm{d}x$;

   (г) $\int \dfrac{\sqrt[3]{1+\sqrt[5]{x}}}{x\sqrt[15]{x^4}} \mathrm{d}x$.

2. Обчислити визначені інтеграли: а) $\int\limits_{2\,\mathrm{arctg}(1/2)}^{\pi/2} \dfrac{\mathrm{d}x}{(1+\sin x - \cos x)^2}$; б) $\int\limits_0^{\pi/4} \dfrac{2\,\mathrm{tg}^2 x - 11\,\mathrm{tg}\, x - 22}{4 - \mathrm{tg}\, x} \mathrm{d}x$.

3. Обчислити площі фігур, обмежених лініями: а) $y = \cos x \sin^2 x; y = 0, \left(0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2}\right)$. б) $r = 6 \sin 3\varphi; r = 3\ (r \geqslant 3)$.

4. Обчислити довжину дуги кривої, заданої рівняннями

$$\begin{cases} x = 2(t - \sin t), \\ y = 2(1 - \cos t), \end{cases} \quad 0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

5. Обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями $\dfrac{x^2}{9} + y^2 = 1;\ z = y,\ z = 0\ (y \geqslant 0)$.

6. Обчислити об'єм тіла, утвореного при обертанні фігури, обмеженої графіками вказаних функцій, навколо вісі Oy. $y^2 = x - 2; y = 0; y = x^3; y = 1$.

7. Дослідити на абсолютну та умовну збіжність невласні інтеграли:

   (а) $\int\limits_3^{+\infty} \dfrac{e^{-x} - \ln x}{(1 + x^\alpha)^{\alpha - 2}} \mathrm{d}x$;

   (б) $\int\limits_0^{\pi/4} \dfrac{\sin x + \cos x}{\sqrt[3]{\sin x - \cos x}} \mathrm{d}x$.

Варіант №18

1. Знайти невизначені інтеграли:

   (а) $\int (2x-5)\cos 4x \cdot \mathrm{d}x$;

   (б) $\int \dfrac{2\cos x + 3\sin x}{(2\sin x - 3\cos x)^3}\,\mathrm{d}x$;

   (в) $\int \dfrac{x^3+6x^2+4x+24}{(x-2)(x+2)^3}\mathrm{d}x$;

   (г) $\int \dfrac{\sqrt[5]{\left(1+\sqrt[5]{x^4}\right)^4}}{x^2\sqrt[25]{x^{11}}}\mathrm{d}x$.

2. Обчислити визначені інтеграли: а) $\int\limits_{\pi/3}^{\pi/2} \dfrac{\cos x \cdot \mathrm{d}x}{1+\sin x - \cos x}$; б) $\int\limits_{\pi/4}^{\arccos\left(1/\sqrt{3}\right)} \dfrac{\operatorname{tg} x \cdot \mathrm{d}x}{\sin^2 x - 5\cos^2 x + 4}$.

3. Обчислити площі фігур, обмежених лініями: а) $y = 4 - x^2; y = x^2 - 2x$. б) $r = \sqrt{3}\cos\varphi; r = \sin\varphi\ \left(0 \leqslant \varphi \leqslant \dfrac{\pi}{2}\right)$.

4. Обчислити довжину дуги кривої, заданої рівняннями

$$\begin{cases} x = 2\cos^3 t, \\ y = 2\sin^3 t, \end{cases} \quad 0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{4}.$$

5. Обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} + \dfrac{z^2}{4} = 1;\ z = 1;\ z = 0$.

6. Обчислити об'єм тіла, утвореного при обертанні фігури, обмеженої графіками вказаних функцій, навколо вісі Oy. $y = \arcsin x; y = \arccos x; y = 0$.

7. Дослідити на абсолютну та умовну збіжність невласні інтеграли:

   (а) $\int\limits_0^{\pi/2} \dfrac{\ln\sin x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$;

   (б) $\int\limits_1^{+\infty} \dfrac{\sin x}{\sqrt[3]{x^2+10}}\mathrm{d}x$.

Варіант №19

1. Знайти невизначені інтеграли:

   (а) $\int \operatorname{arctg}\sqrt{3x-1}\cdot \mathrm{d}x$;

   (б) $\int \dfrac{x\cdot \mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x-1}}$;

   (в) $\int \dfrac{3x^3+9x^2+10x+2}{(x-1)(x+1)^3}\mathrm{d}x$;

   (г) $\int \dfrac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x^3}}}{x^2}\mathrm{d}x$.

2. Обчислити визначені інтеграли: а) $\int\limits_0^{2\pi/3} \dfrac{\cos^2 x\cdot \mathrm{d}x}{(1+\cos x+\sin x)^2}$; б) $\int\limits_0^{\pi/4} \dfrac{4-7\operatorname{tg} x}{2+3\operatorname{tg} x}\mathrm{d}x$.

3. Обчислити площі фігур, обмежених лініями: а) $y=x\sqrt{4-x^2}; y=0,\ (0\leqslant x\leqslant 2)$. б) $r=\dfrac{1}{2}+\cos\varphi$.

4. Обчислити довжину дуги кривої, заданої рівняннями

$$\begin{cases} x=(t^2-2)\sin t+2t\cos t, \\ y=(2-t^2)\cos t+2t\sin t, \end{cases} \quad 0\leqslant t\leqslant \pi.$$

5. Обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}+\dfrac{z^2}{36}=1; z=3; z=0$.

6. Обчислити об'єм тіла, утвореного при обертанні фігури, обмеженої графіками вказаних функцій, навколо вісі Ox. $y=x^3; y=\sqrt{x}$.

7. Дослідити на абсолютну та умовну збіжність невласні інтеграли:

   (а) $\int\limits_0^{+\infty} \dfrac{x\operatorname{arctg} x}{\sqrt{1+x^3}}\mathrm{d}x$;

   (б) $\int\limits_0^{1} (1-x)^2\sin\dfrac{\pi}{1-x}\mathrm{d}x$.

Варіант №20

1. Знайти невизначені інтеграли:

   (а) $\int (4x-3)\, e^{-2x} \mathrm{d}x$;

   (б) $\int \dfrac{x\cos x + \sin x}{(x\sin x)^2} \mathrm{d}x$;

   (в) $\int \dfrac{x^3 - 6x^2 + 14x - 6}{(x+1)(x-2)^3} \mathrm{d}x$;

   (г) $\int \dfrac{\sqrt[4]{(1+\sqrt[3]{x})^3}}{x\sqrt[12]{x^7}} \mathrm{d}x$.

2. Обчислити визначені інтеграли: а) $\int\limits_0^{\pi/4} \dfrac{\mathrm{d}x}{\cos x\,(1+\cos x)}$; б) $\int\limits_0^{\pi/3} \dfrac{\mathrm{tg}^2\, x \cdot \mathrm{d}x}{4 + 3\cos 2x}$.

3. Обчислити площі фігур, обмежених лініями: а) $y = x\sqrt{36 - x^2}; y = 0,\ (0 \leqslant x \leqslant 6)$. б) $r = \cos\varphi; r = \sin\varphi\ \left(0 \leqslant \varphi \leqslant \dfrac{\pi}{2}\right)$.

4. Обчислити довжину дуги кривої, заданої рівняннями

$$\begin{cases} x = 3\,(t - \sin t)\,, \\ y = 3\,(1 - \cos t)\,, \end{cases} \quad \pi \leqslant t \leqslant 2\pi.$$

5. Обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} - z^2 = 1; z = 0; z = 2$.

6. Обчислити об'єм тіла, утвореного при обертанні фігури, обмеженої графіками вказаних функцій, навколо вісі Oy. $y = x^3; y = x^2$.

7. Дослідити на абсолютну та умовну збіжність невласні інтеграли:

   (а) $\int\limits_1^{+\infty} \dfrac{\ln\left(x^\alpha + e^x\right)}{\sqrt{x^3 + x^5}} \mathrm{d}x$;

   (б) $\int\limits_{-1}^{1} \dfrac{\mathrm{d}x}{(2-x)\sqrt{1-x^2}}$.

Варіант №21

1. Знайти невизначені інтеграли:

   (а) $\int (4x-2)\cos 2x \cdot \mathrm{d}x$;

   (б) $\int \dfrac{x^2+\ln x^2}{x}\mathrm{d}x$;

   (в) $\int \dfrac{x^3+6x^2+14x+10}{(x+1)(x+2)^3}\mathrm{d}x$;

   (г) $\int \dfrac{\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x}}}{x\sqrt[9]{x^4}}\mathrm{d}x$.

2. Обчислити визначені інтеграли: а) $\int\limits_0^{\pi/2} \dfrac{\cos x \cdot \mathrm{d}x}{2+\cos x}$; б) $\int\limits_{\arccos\left(4/\sqrt{17}\right)}^{\pi/4} \dfrac{2\operatorname{ctg} x+1}{(3\sin x+\cos x)^2}\mathrm{d}x$.

3. Обчислити площі фігур, обмежених лініями: а) $x=\arccos y; x=0; y=0$. б) $r=\sqrt{2}\cos\left(\varphi-\dfrac{\pi}{4}\right); r=\sqrt{2}\sin\left(\varphi-\dfrac{\pi}{4}\right)$ $\left(\dfrac{\pi}{4}\leqslant\varphi\leqslant\dfrac{3\pi}{4}\right)$.

4. Обчислити довжину дуги кривої, заданої рівняннями

$$\begin{cases} x=(t^2-2)\sin t+2t\cos t, \\ y=(2-t^2)\cos t+2t\sin t, \end{cases} \quad 0\leqslant t\leqslant 3\pi.$$

5. Обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями $x^2+\dfrac{y^2}{4}-z^2=1; z=0; z=3$.

6. Обчислити об'єм тіла, утвореного при обертанні фігури, обмеженої графіками вказаних функцій, навколо вісі Ox. $y=xe^x; y=0; x=1$.

7. Дослідити на абсолютну та умовну збіжність невласні інтеграли:

   (а) $\int\limits_{\alpha^2}^{+\infty} \dfrac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1+x^2}}$;

   (б) $\int\limits_0^{0,5} \dfrac{\cos^3 \ln x}{x\ln x}\mathrm{d}x$.

Варіант №22

1. Знайти невизначені інтеграли:

   (а) $\int (2-3x)\sin 2x \cdot \mathrm{d}x$;

   (б) $\int \dfrac{x \cdot \mathrm{d}x}{x^4+1}$;

   (в) $\int \dfrac{x^3+6x^2+10x+12}{(x-2)(x+2)^3}\mathrm{d}x$;

   (г) $\int \dfrac{\sqrt[3]{\left(1+\sqrt[5]{x^4}\right)^2}}{x^2\sqrt[3]{x}}\mathrm{d}x$.

2. Обчислити визначені інтеграли: а) $\int\limits_{\pi/2}^{2\operatorname{arctg}2} \dfrac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x\,(1+\cos x)}$; б) $\int\limits_{0}^{\arccos\left(1/\sqrt{7}\right)} \dfrac{3+2\operatorname{tg}x}{2\sin^2 x+3\cos^2 x-1}\mathrm{d}x$.

3. Обчислити площі фігур, обмежених лініями: а) $y=\dfrac{1}{x\sqrt{1+\ln x}}; y=0; x=1; x=e^3$. б) $r=\cos\varphi; r=\sqrt{2}\cos\left(\varphi-\dfrac{\pi}{4}\right)\ \left(-\dfrac{\pi}{4}\leqslant\varphi\leqslant\dfrac{\pi}{2}\right)$.

4. Обчислити довжину дуги кривої, заданої рівняннями

$$\begin{cases} x=e^t(\cos t+\sin t), \\ y=e^t(\cos t-\sin t), \end{cases} \quad \frac{\pi}{6}\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{4}.$$

5. Обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями $z=x^2+4y^2; z=2$.

6. Обчислити об'єм тіла, утвореного при обертанні фігури, обмеженої графіками вказаних функцій, навколо вісі Oy. $y=x^3; y=x$.

7. Дослідити на абсолютну та умовну збіжність невласні інтеграли:

   (а) $\int\limits_{1}^{+\infty}\left(1+\dfrac{e^{\sqrt{x}}-1}{\alpha}\right)\mathrm{d}x\ \ (\alpha\neq 0)$;

   (б) $\int\limits_{0}^{1}\dfrac{\sin\dfrac{1}{x}\cdot\mathrm{d}x}{x^2+\sqrt{x^3}+x^2\cos\dfrac{1}{x}}$.

Варіант №23

1. Знайти невизначені інтеграли:

   (а) $\int (7x-10)\sin 4x \cdot \mathrm{d}x$;

   (б) $\int \dfrac{x-\dfrac{1}{x}}{\sqrt{x^2+1}}\mathrm{d}x$;

   (в) $\int \dfrac{x^3+6x^2+15x+2}{(x-2)(x+2)^3}\mathrm{d}x$;

   (г) $\int \dfrac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{x\sqrt[3]{x}}\mathrm{d}x$.

2. Обчислити визначені інтеграли: а) $\int\limits_0^{\pi/2} \dfrac{(1+\cos x)\,\mathrm{d}x}{1+\cos x+\sin x}$; б) $\int\limits_0^{\pi/4} \dfrac{6\sin^2 x}{3\cos 2x-4}\,\mathrm{d}x$.

3. Обчислити площі фігур, обмежених лініями: а) $x=4-y^2; x=y^2-2y$. б) $r=2\cos\varphi; r=3\cos\varphi$.

4. Обчислити довжину дуги кривої, заданої рівняннями

$$\begin{cases} x=4\cos^3 t, \\ y=4\sin^3 t, \end{cases} \quad \frac{\pi}{6}\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{4}.$$

5. Обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями

$$\frac{x^2}{27}+y^2=1; z=\frac{y}{\sqrt{3}}; z=0\,(y\geqslant 0)\,.$$

6. Обчислити об'єм тіла, утвореного при обертанні фігури, обмеженої графіками вказаних функцій, навколо вісі Ox. $x^2+(y-2)^2=1$.

7. Дослідити на абсолютну та умовну збіжність невласні інтеграли:

   (а) $\int\limits_1^{+\infty} \dfrac{\sqrt{1+x^3+x^\alpha}-1}{x^3}\mathrm{d}x$;

   (б) $\int\limits_0^2 \left(x\sin\dfrac{\pi}{x^2}-\dfrac{\pi}{x}\cos\dfrac{\pi}{x^2}\right)\mathrm{d}x$.

Варіант №24

1. Знайти невизначені інтеграли:

   (а) $\int (5x-2)\, e^{3x} \mathrm{d}x$;

   (б) $\int \dfrac{\arccos^3 x - 1}{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}x$;

   (в) $\int \dfrac{x^3+6x^2+11x+7}{(x+1)(x+2)^3} \mathrm{d}x$;

   (г) $\int \dfrac{\sqrt[3]{(1+\sqrt[3]{x})^2}}{x\sqrt[9]{x^5}} \mathrm{d}x$.

2. Обчислити визначені інтеграли: а) $\int\limits_0^{\pi/2} \dfrac{\sin x \cdot \mathrm{d}x}{(1+\cos x+\sin x)^2}$; б) $\int\limits_0^{\arcsin\sqrt{7/8}} \dfrac{6\sin^2 x \cdot \mathrm{d}x}{4+3\cos 2x}$.

3. Обчислити площі фігур, обмежених лініями: а) $y=(x+1)^2$; $y^2=x+1$. б) $r=6\cos 3\varphi$; $r=3$ $(r\geqslant 3)$.

4. Обчислити довжину дуги кривої, заданої рівняннями $\begin{cases} x=5(t-\sin t), \\ y=5(1-\cos t), \end{cases}$ $0\leqslant t\leqslant \pi$.

5. Обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}-z^2=1$; $z=0$; $z=4$.

6. Обчислити об'єм тіла, утвореного при обертанні фігури, обмеженої графіками вказаних функцій, навколо вісі Ox. $y=x^2$; $x=y^2$.

7. Дослідити на абсолютну та умовну збіжність невласні інтеграли:

   (а) $\int\limits_1^{+\infty} \dfrac{2+\arcsin\dfrac{1}{x}}{1+\sqrt{x}} \mathrm{d}x$.

   (б) $\int\limits_0^{1/2} \left(\dfrac{x}{1-x}\right)^2 \cos\dfrac{1}{x^2} \mathrm{d}x$,

Варіант №25

1. Знайти невизначені інтеграли:

   (а) $\int (2-4x)\sin 2x \cdot \mathrm{d}x$;

   (б) $\int \dfrac{1-\cos x}{(x-\sin x)^2}\mathrm{d}x$;

   (в) $\int \dfrac{x^3-6x^2+13x-8}{x\,(x-2)^3}\mathrm{d}x$;

   (г) $\int \dfrac{\sqrt{1+x}}{x^2\sqrt{x}}\mathrm{d}x$.

2. Обчислити визначені інтеграли: а) $\int\limits_{-\pi/2}^{0} \dfrac{\sin x \cdot \mathrm{d}x}{(1+\cos x-\sin x)^2}$; б) $\int\limits_{-\arccos\left(1/\sqrt{5}\right)}^{\pi/4} \dfrac{11-3\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} x+3}\mathrm{d}x$.

3. Обчислити площі фігур, обмежених лініями: а) $y=\dfrac{x}{(x^2+1)^2}; y=0; x=1$. б) $r=\sin 6\varphi$.

4. Обчислити довжину дуги кривої, заданої рівняннями

$$\begin{cases} x = 6\cos^3 t, \\ y = 6\sin^3 t, \end{cases} \quad 0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{3}.$$

5. Обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}+\dfrac{z^2}{16}=1; z=2; z=0$.

6. Обчислити об'єм тіла, утвореного при обертанні фігури, обмеженої графіками вказаних функцій, навколо вісі Oy. $y=(x-1)^2; x=0; x=2; y=0$.

7. Дослідити на абсолютну та умовну збіжність невласні інтеграли:

   (а) $\int\limits_{\pi/2}^{+\infty} \dfrac{2+\sin x}{x^2}\mathrm{d}x$;

   (б) $\int\limits_{0}^{2} \dfrac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x}-2x+\sqrt{x}}$.

Варіант №26

1. Знайти невизначені інтеграли:

   (а) $\int (4-16x)\sin 4x \cdot \mathrm{d}x$;

   (б) $\int \dfrac{x \cdot \mathrm{d}x}{\sqrt{x^4+x^2+1}}$;

   (в) $\int \dfrac{x^3-6x^2+11x-10}{(x+2)(x-2)^3}\mathrm{d}x$;

   (г) $\int \dfrac{\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x^2}}}{x\sqrt[9]{x^8}}\mathrm{d}x$.

2. Обчислити визначені інтеграли: а) $\int\limits_0^{\pi/2} \dfrac{\sin x \cdot \mathrm{d}x}{(1+\sin x)^2}$; б) $\int\limits_{\pi/4}^{\arcsin\left(2/\sqrt{5}\right)} \dfrac{(4\operatorname{tg} x-5)\cdot \mathrm{d}x}{4\cos^2 x-\sin 2x+1}$.

3. Обчислити площі фігур, обмежених лініями: а) $y=\dfrac{x}{1+\sqrt{x}}$; $y=0$; $x=1$. б) $r=1+\sqrt{2}\sin\varphi$.

4. Обчислити довжину дуги кривої, заданої рівняннями

$$\begin{cases} x=3(\cos t+t\sin t), \\ y=3(\sin t-t\cos t), \end{cases} \quad 0\leqslant t\leqslant \frac{\pi}{3}.$$

5. Обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями $x^2+y^2=9$; $z=y$; $z=0$ $(y\geqslant 0)$.

6. Обчислити об'єм тіла, утвореного при обертанні фігури, обмеженої графіками вказаних функцій, навколо вісі Ox. $y=2x-x^2$; $y=4x-2x^2$.

7. Дослідити на абсолютну та умовну збіжність невласні інтеграли:

   (а) $\int\limits_1^{+\infty} \dfrac{\ln\left(1+x^{-2\alpha}\right)}{\sqrt{x^\alpha+x^{-\alpha}}}\mathrm{d}x \ \ (\alpha>0)$.

   (б) $\int\limits_0^{\pi} \dfrac{|\cos x|}{\sqrt{\sin x}}\mathrm{d}x$.

Варіант №27

1. Знайти невизначені інтеграли:

   (а) $\int (4-3x)\, e^{-3x} \mathrm{d}x$;

   (б) $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2+1}}$;

   (в) $\int \dfrac{x^3+6x^2+13x+9}{(x+1)\,(x+2)^3}\mathrm{d}x$;

   (г) $\int \dfrac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{x\sqrt[4]{x^3}}\mathrm{d}x$.

2. Обчислити визначені інтеграли: а) $\int\limits_{-2\pi/3}^{0} \dfrac{\cos^2 x \cdot \mathrm{d}x}{(1+\cos x-\sin x)^2}$; б) $\int\limits_{0}^{\arcsin\left(3/\sqrt{10}\right)} \dfrac{(2\,\mathrm{tg}\, x-5)\cdot \mathrm{d}x}{(4\cos x-\sin x)^2}$.

3. Обчислити площі фігур, обмежених лініями: а) $x=(y-2)^3\,; x=4y-8$. б) $r=\dfrac{3}{2}\cos\varphi;\ r=\dfrac{5}{2}\cos\varphi$.

4. Обчислити довжину дуги кривої, заданої рівняннями $\begin{cases} x=3\,(2\cos t-\cos 2t)\,, \\ y=3\,(2\sin t-\sin 2t)\,, \end{cases}$ $0\leqslant t\leqslant 2\pi$.

5. Обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}-z^2=1;\ z=0;\ z=3$.

6. Обчислити об'єм тіла, утвореного при обертанні фігури, обмеженої графіками вказаних функцій, навколо вісі Ox. $y=2x-x^2; y=-x+2; x=0$.

7. Дослідити на абсолютну та умовну збіжність невласні інтеграли:

   (а) $\int\limits_{2}^{+\infty} \dfrac{e^{\alpha x}}{(x-1)^{\alpha}\ln x}\mathrm{d}x$;

   (б) $\int\limits_{0}^{1} \dfrac{1}{x\sqrt{x}}\cos\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$.

Варіант №28

1. Знайти невизначені інтеграли:

   (а) $\int (4x+7)\cos 3x \cdot \mathrm{d}x$;

   (б) $\int \dfrac{x+\cos x}{x^2+2\sin x}\mathrm{d}x$;

   (в) $\int \dfrac{x^3+6x^2+5x+4}{(x-2)(x+1)^3}\mathrm{d}x$;

   (г) $\int \dfrac{\sqrt[5]{\left(1+\sqrt[4]{x^3}\right)^4}}{x^2\sqrt[20]{x^7}}\mathrm{d}x$.

2. Обчислити визначені інтеграли: а) $\int\limits_0^{\pi/2} \dfrac{\sin x \cdot \mathrm{d}x}{2+\sin x}$; б) $\int\limits_{\arccos\left(1/\sqrt{10}\right)}^{\arccos\left(1/\sqrt{26}\right)} \dfrac{12\cdot \mathrm{d}x}{(6+5\operatorname{tg} x)\sin 2x}$.

3. Обчислити площі фігур, обмежених лініями: а) $y=\arccos x; y=0; x=0$.
   б) $r=\sin\varphi; r=\sqrt{2}\cos\left(\varphi-\dfrac{\pi}{4}\right)$ $\left(0\leqslant\varphi\leqslant\dfrac{3\pi}{4}\right)$.

4. Обчислити довжину дуги кривої, заданої рівняннями

$$\begin{cases} x=(t^2-2)\sin t+2t\cos t, \\ y=(2-t^2)\cos t+2t\sin t, \end{cases} \quad 0\leqslant t\leqslant 2\pi.$$

5. Обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями $\dfrac{x^2}{4}+y^2-z^2=1; z=0; z=3$.

6. Обчислити об'єм тіла, утвореного при обертанні фігури, обмеженої графіками вказаних функцій, навколо вісі Oy. $y=\arccos\dfrac{x}{5}$; $y=\arccos\dfrac{x}{3}$; $y=0$.

7. Дослідити на абсолютну та умовну збіжність невласні інтеграли:

   (а) $\int\limits_1^{+\infty} \dfrac{x^2}{2^x}\mathrm{d}x$;

   (б) $\int\limits_0^{\pi/4} \operatorname{tg}^2 x \cdot \cos\operatorname{ctg} x \cdot \mathrm{d}x$.

Варіант №29

1. Знайти невизначені інтеграли:

   (а) $\int (3x-2)\cos 5x \cdot \mathrm{d}x$;

   (б) $\int \dfrac{4\,\mathrm{arctg}\,x - x}{1+x^2}\mathrm{d}x$;

   (в) $\int \dfrac{2x^3+6x^2+5x}{(x+2)\,(x+1)^3}\mathrm{d}x$;

   (г) $\int \dfrac{\sqrt[5]{(1+\sqrt[3]{x})^4}}{x\sqrt[5]{x^3}}\mathrm{d}x$.

2. Обчислити визначені інтеграли: а) $\int\limits_0^{\pi/2} \dfrac{\sin x \cdot \mathrm{d}x}{1+\cos x+\sin x}$; б) $\int\limits_0^{\mathrm{arctg}\,3} \dfrac{(4+\mathrm{tg}\,x)\cdot \mathrm{d}x}{2\sin^2 x + 18\cos^2 x}$.

3. Обчислити площі фігур, обмежених лініями: а) $y=\cos^5 x \sin 2x; y=0,\ \left(0\leqslant x\leqslant \dfrac{\pi}{2}\right)$. б) $r=4\cos 4\varphi$.

4. Обчислити довжину дуги кривої, заданої рівняннями $\begin{cases} x = 8\cos^3 t, \\ y = 8\sin^3 t, \end{cases}\ 0\leqslant t\leqslant \dfrac{\pi}{6}$.

5. Обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями $z=4x^2+9y^2; z=6$.

6. Обчислити об'єм тіла, утвореного при обертанні фігури, обмеженої графіками вказаних функцій, навколо вісі Ox. $y=\sin^2 x; x=\dfrac{\pi}{2}; y=0$.

7. Дослідити на абсолютну та умовну збіжність невласні інтеграли:

   (а) $\int\limits_0^{+\infty} \dfrac{\mathrm{arctg}\,(x-1)}{\sqrt[3]{(x-1)^4}}\mathrm{d}x$;

   (б) $\int\limits_0^{\pi/2} \dfrac{\mathrm{d}x}{1+5\sin^2 x}$.

Варіант №30

1. Знайти невизначені інтеграли:

   (а) $\int (3x+4)\, e^{3x} \mathrm{d}x$;

   (б) $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-1}}$;

   (в) $\int \dfrac{x^3-6x^2+13x-6}{(x+2)\,(x-2)^3}\mathrm{d}x$;

   (г) $\int \dfrac{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}}{x\sqrt{x}}\mathrm{d}x$.

2. Обчислити визначені інтеграли: а) $\int\limits_{\pi/2}^{2\operatorname{arctg}2} \dfrac{\mathrm{d}x}{\sin x\,(1+\sin x)}$; б) $\int\limits_{-\arcsin\left(2/\sqrt{5}\right)}^{\pi/4} \dfrac{(2-\operatorname{tg}x)\cdot \mathrm{d}x}{(3\cos x+\sin x)^2}$.

3. Обчислити площі фігур, обмежених лініями: а) $y = x^2\cos x; y = 0, \left(0\leqslant x\leqslant \dfrac{\pi}{2}\right)$. б) $r = 2\sin\varphi$; $r = 4\sin\varphi$.

4. Обчислити довжину дуги кривої, заданої рівняннями

$$\begin{cases} x = 6\,(\cos t + t\sin t)\,, \\ y = 6\,(\sin t - t\cos t)\,, \end{cases} \quad 0\leqslant t\leqslant \pi.$$

5. Обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями $z = x^2+5y^2; z = 5$.

6. Обчислити об'єм тіла, утвореного при обертанні фігури, обмеженої графіками вказаних функцій, навколо вісі Ox. $y = 1-x^2; x = 0; x = \sqrt{y-2}; x = 1$.

7. Дослідити на абсолютну та умовну збіжність невласні інтеграли:

   (а) $\int\limits_{1}^{+\infty} \dfrac{xy}{9+y^2x^5}\cdot \mathrm{d}x \;\; (y\in\mathbb{R})$;

   (б) $\int\limits_{0}^{1} \dfrac{6e^{2x^2}+24\cos x-13x^2-30}{\sin^{\alpha} x}\mathrm{d}x$.