

# Варіант №1

1. Розв'язати завдання з теми „Границя послідовності”.

- (а) Чи є нескінченно великою послідовність  $\{x_n\} = \{(-1)^n (2n + 1)\}$ ? Зобразити її зміну графічно.  
(б) Побудувати приклад послідовності, яка, зростаючи, прямує до нуля.

2. Знайти границю функції, не користуючись правилом Лопіталя.

(а)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + x^2 - 5}{x^3 + x - 2}$ ; (в)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - \cos 2x}}{|x|}$ ;  
(б)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - \sqrt{x}}{x^2 - x}$ ; (г)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{4x + 1}{4x} \right)^{2x}$ .

3. Задано функцію  $y = f(x)$ . Знайти точки розриву функції, якщо вони існують. а)  $y = 7^{\frac{1}{3+x}}$ ; б)  $y =$

$$\begin{cases} -\frac{x}{2}, \text{ якщо } -\infty < x \leq 0; \\ \cos x, \text{ якщо } 0 < x \leq \frac{\pi}{2}; \\ x - \frac{\pi}{2}, \text{ якщо } \frac{\pi}{2} < x < +\infty. \end{cases}$$

4. Знайти похідну  $\frac{dy}{dx}$ .

(а)  $y = ax^m + bx^{m+n}$ ; (д)  $y = (3 + 2x^2)^4$ ;  
(б)  $y = \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x$ ; (е)  $y = \sqrt{x}$ ;  
(в)  $y = (x - 1)e^x$ ; (ж)  $x = 2t - 1, y = t^3$ ;  
(г)  $y = \ln x \lg x - \ln a \log_a x$ ; (и)  $xy = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}$ .

5.  $x^3 + y^3 - 3axy = 0$ . Знайти  $\frac{d^2y}{dx^2}$ .

6. Застосувати диференціал першого порядку в наближених обчисленнях. Знайти наближене значення функції  $y = \frac{x^3 - x}{x - 2}$  при  $x = 2,98$ .

7. Провести загальне дослідження функції та побудувати її графік. а)  $y = \frac{8x}{(x - 2)^2}$ ; б)  $y = \frac{e^x}{x}$ .

8. Розв'язати задачу на відшукування найбільших чи найменших значень змінної величини. Число 60 розбити на дві частини так, щоб сума подвоєної першої частини та квадрата другої була найменшою.

9. Застосувати формулу Тейлора. Знайти три перших члени розкладу функції  $y = \operatorname{tg} x$  за степенями  $x$  та записати залишковий член.

10. Знайти граничне значення функції за правилом Лопіталя.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{3^x}$ .

# Варіант №2

1. Розв'язати завдання з теми „Границя послідовності”.

(а) Показати, що послідовність  $\{x_n\} = \left\{ \frac{n+1}{n^2} \right\}$  – нескінченно мала.

(б) Чи буде нескінченно великою необмеженою послідовність  $\{x_n\} = \left\{ \left( 1 + \sin \frac{n\pi}{2} \right) \lg n \right\}$ ?

2. Знайти границю функції, не користуючись правилом Лопіталя.

(а)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1}$ ;

(в)  $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{\arcsin(1 - 2x)}{4x^2 - 1}$ ;

(б)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - 3x} - x)$ ;

(г)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x [\ln x - \ln(x + 2)]$ .

3. Задано функцію  $y = f(x)$ . Знайти точки розриву функції, якщо вони існують. а)  $y = 1 - 2^{\frac{1}{x}}$ ; б)  $y = \begin{cases} 2, & \text{якщо } x = 0 \text{ або } x = \pm 2; \\ 4 - x^2, & \text{якщо } 0 < |x| < 2; \\ 4, & \text{якщо } |x| > 2. \end{cases}$

4. Знайти похідну  $\frac{dy}{dx}$ .

(а)  $y = x^5 - 4x^3 + 2x - 3$ ;

(д)  $y = (1 + 3x - 5x^2)^{30}$ ;

(б)  $y = 5 \sin x + 3 \cos x$ ;

(е)  $y = x^{\sin x}$ ;

(в)  $y = x^7 e^x$ ;

(ж)  $x = \sqrt{t}, y = \sqrt[3]{t}$ ;

(г)  $y = \frac{x^2}{\ln x}$ ;

(и)  $\operatorname{tg} y = xy$ .

5.  $\begin{cases} x = \sin t; \\ y = ae^{\sqrt{2t}} + be^{-\sqrt{2t}}. \end{cases}$  Знайти  $\frac{d^2 y}{dx^2}$ .

6. Застосувати диференціал першого порядку в наближених обчисленнях. Знайти наближене значення функції  $y = \ln(1 + x)$  при  $x = 0,0056$ .

7. Провести загальне дослідження функції та побудувати її графік. а)  $y = x^4 - 2x^2 + 2$ ; б)  $y = \frac{x^4}{x^3 + 1}$ .

8. Розв'язати задачу на відшукування найбільших чи найменших значень змінної величини. Бокові сторони та менша основа трапеції рівні по 10 см. Визначити її більшу основу так, щоб площа трапеції була найбільшою.

9. Застосувати формулу Тейлора. Знайти три перших члени розкладу функції  $y = \ln \cos x$  за степенями  $x$  та записати залишковий член.

10. Знайти граничне значення функції за правилом Лопіталя.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - a}{x^n - a^n}$ .

# Варіант №3

1. Розв'язати завдання з теми „Границя послідовності”.

(а) Показати, що послідовність  $\{x_n\} = n^{(-1)^n}$  не є обмеженою і є нескінченно великою.

(б) Представити послідовність  $\{x_n\} = \left\{ \frac{15n+1}{n} \right\}$  у вигляді суми  $x_n = a + \alpha_n$ , де  $a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ ,  $\alpha_n$  – нескінченно мала.

2. Знайти границю функції, не користуючись правилом Лопіталя.

(а)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 - 2x^2 - 7}{9x^4 + 3x + 5}$ ;

(в)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos^5 x}{x^2}$ ;

(б)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{2x+3} - 1}{\sqrt{5+x} - 2}$ ;

(г)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x+2) [\ln(2x+1) - \ln(2x-1)]$ .

3. Задано функцію  $y = f(x)$ . Знайти точки розриву функції, якщо вони існують. а)  $y = 8^{\frac{1}{5-x}}$ ; б)  $y = \begin{cases} -x, & \text{якщо } -\infty < x \leq 0; \\ x^2, & \text{якщо } 0 < x \leq 2; \\ x+1, & \text{якщо } 2 < x < +\infty. \end{cases}$

4. Знайти похідну  $\frac{dy}{dx}$ .

(а)  $y = \operatorname{ctg} x^2 + x^2$ ;

(д)  $y = \sqrt[5]{x + x\sqrt[3]{x}}$ ;

(б)  $y = (\arcsin 2x)^3$ ;

(е)  $y = (x^2 - 1)^{\ln x}$ ;

(в)  $y = \lg \frac{2+x}{2-x}$ ;

(ж)  $x = \arcsin(t-1)$ ,  $y = \arcsin(t^2+1)$ ;

(г)  $y = \ln \sqrt{e^{2x} + 3}$ ;

(и)  $2^x = e^{x-y}$ .

5.  $\begin{cases} x = \sec t; \\ y = \operatorname{tg} t. \end{cases}$  Знайти  $\frac{d^2y}{dx^2}$ .

6. Застосувати диференціал першого порядку в наближених обчисленнях. Знайти наближене значення функції  $y = (x^3 - 2x + 1)(x^2 - 3)$  при  $x = 2,003$ .

7. Провести загальне дослідження функції та побудувати її графік. а)  $y = 2x - 3\sqrt[3]{x^2}$ ; б)  $y = 2 - 3x - x^2$ .

8. Розв'язати задачу на відшукування найбільших чи найменших значень змінної величини. Перетин зрошувального каналу має форму рівнобічної трапеції, бокові сторони якої рівні меншій основі. За якого кута нахилу бокових сторін перетин каналу буде мати найбільшу площу?

9. Застосувати формулу Тейлора. Розкласти за степенями  $x+1$  багаточлен  $y = x^5 + 2x^4 - x^2 + x + 1$ .

10. Знайти граничне значення функції за правилом Лопіталя.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\operatorname{ctg} x}$ .

# Варіант №4

- Розв'язати завдання з теми „Границя послідовності”.
  - Чи має границю послідовність  $\{x_n\} = \left\{ \frac{(-1)^n n}{n+1} \right\}$ ? Зобразити її поведінку графічно.
  - Побудувати послідовність, що збігається до числа 2, таку, що кожен її член менший за 2.
- Знайти границю функції, не користуючись правилом Лопіталя.
  - $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 - 7x + 5}{4x^3 + 8x - 3}$ ;
  - $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\cos x - \cos a}{x - a}$ ;
  - $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + 3x^2} - 1}{x^2 + x^3}$ ;
  - $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\operatorname{cosec} x}$ .
- Задано функцію  $y = f(x)$ . Знайти точки розриву функції, якщо вони існують. а)  $y = 9^{\frac{1}{2+x}}$ ; б)  $y = \begin{cases} x + 4, & \text{якщо } -\infty < x < -1; \\ x^2 + 2, & \text{якщо } -1 \leq x < 1; \\ 2x, & \text{якщо } 1 \leq x < +\infty. \end{cases}$
- Знайти похідну  $\frac{dy}{dx}$ .
  - $y = x^2 + 2x^{\frac{1}{2}} + 1$ ;
  - $y = \ln \left( \operatorname{arctg} \frac{x}{2} + \cos^2 4x \right)$ ;
  - $y = x + \frac{8}{1 + e^{\frac{x}{4}}}$ ;
  - $y = \cos(\operatorname{ctg} x)$ ;
  - $y = \operatorname{tg}^2(x - x^2)$ ;
  - $y = (\sin x)^x$ ;
  - $x = \operatorname{arccos} t, y = \operatorname{arcsin} t$ ;
  - $\sqrt{\frac{x}{3}} + \sqrt{\frac{y}{3}} = 1$ .
- $\begin{cases} x = a \cos^3 t; \\ y = a \sin^3 t. \end{cases}$  Знайти  $\frac{d^2y}{dx^2}$ .
- Застосувати диференціал першого порядку в наближених обчисленнях. Знайти наближене значення функції  $y = \sqrt[3]{x-1}$  при  $x = 9,025$ .
- Провести загальне дослідження функції та побудувати її графік. а)  $y = x - \ln(x+1)$ ; б)  $y = e^{-x^2}$ .
- Розв'язати задачу на відшукування найбільших чи найменших значень змінної величини. Знайти відношення радіуса та висоти циліндра з об'ємом  $V$  та найменшою поверхнею.
- Застосувати формулу Тейлора. Розкласти багаточлен  $f(x) = x^{10} - 3x^5 + 1$  за степенями двочлена  $x - 1$ .
- Знайти граничне значення функції за правилом Лопіталя.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\ln x}$ .

# Варіант №5

1. Розв'язати завдання з теми „Границя послідовності”.

(а) Представити послідовність  $\{x_n\} = \left\{ \frac{n^2}{n^2 + 1} \right\}$  у вигляді суми  $x_n = a + \alpha_n$ , де  $a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ ,  $\alpha_n$  – нескінченно мала послідовність.

(б) Довести, що послідовність  $\{x_n\} = \left\{ \frac{3^n}{n!} \right\}$  – монотонно спадна при всіх  $n > 1$  та обмежена знизу.

2. Знайти границю функції, не користуючись правилом Лопіталя.

(а)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{10} - x^9 + 1}{5x^{10} + 7x^9 + x^8}$ ;

(в)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{8x^2}{\sin^2 5x}$ ;

(б)  $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{9 - x^2}{1 - \sqrt{4 + x}}$ ;

(г)  $\lim_{x \rightarrow \infty} 2x \ln \left( 1 + \frac{1}{x} \right)$ .

3. Задано функцію  $y = f(x)$ . Знайти точки розриву функції, якщо вони існують. а)  $y = 2^{\frac{1}{1-x}}$ ; б)  $y = \begin{cases} 3x + 4, & \text{якщо } -\infty < x \leq -1; \\ x^2 - 2, & \text{якщо } -1 < x < 2; \\ x, & \text{якщо } 2 \leq x < +\infty. \end{cases}$

4. Знайти похідну  $\frac{dy}{dx}$ .

(а)  $y = \frac{1 + \sqrt{x}}{1 - \sqrt{x}}$ ;

(д)  $y = \sin^3 5x \cos^2 \frac{x}{3}$ ;

(б)  $y = 2x \sin x - (x^2 - 2) \cos x$ ;

(е)  $y = x^{x^x}$ ;

(в)  $y = x^3 \ln x - \frac{x^3}{3}$ ;

(ж)  $x = \frac{2at}{1 + t^2}, y = \frac{a(1 - t^2)}{1 + t^2}$ ;

(г)  $y = \sqrt[3]{a + bx^3}$ ;

(и)  $y = \frac{x - y}{x + y}$ .

5.  $\ln \sqrt{x^2 + y^2} = a \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$ . Знайти  $\frac{d^2y}{dx^2}$ .

6. Застосувати диференціал першого порядку в наближених обчисленнях. Користуючись правилами наближеного обчислення знайти числове значення виразу  $\sqrt[4]{600}$ .

7. Провести загальне дослідження функції та побудувати її графік. а)  $y = \frac{x^3}{2(x-1)^2}$ ; б)  $y = x \ln x$ .

8. Розв'язати задачу на відшукування найбільших чи найменших значень змінної величини. У конус вписано циліндр із заданими висотою  $H$  та радіусом основи  $R$ . Знайти конус з найменшим об'ємом.

9. Застосувати формулу Тейлора. Розкласти за степенями  $x - 2$  багаточлен  $y = x^4 - 5x^3 + 5x^2 + x + 2$ .

10. Знайти граничне значення функції за правилом Лопіталя.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 e^{-x}$ .

# Варіант №6

1. Розв'язати завдання з теми „Границя послідовності”.

(а) Користуючись означенням, довести, що  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{2n+1} \neq 1$ .

(б) Подати приклад спадної розбіжної послідовності.

2. Знайти границю функції, не користуючись правилом Лопіталя.

(а)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3+x+5x^4}{x^4-12x+1}$ ;

(в)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \operatorname{ctg} 5x}{\sin 7x}$ ;

(б)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+3x}-\sqrt{1-2x}}{x+x^2}$ ;

(г)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x+1) [\ln(x+3) - \ln x]$ .

3. Задано функцію  $y = f(x)$ . Знайти точки розриву функції, якщо вони існують. а)  $y = e^{-\frac{1}{x^2}}$ ; б)  $y = \begin{cases} x^3, & \text{якщо } -\infty < x < 0; \\ 1+x, & \text{якщо } 0 \leq x < 3; \\ -5x+1, & \text{якщо } 3 \leq x < +\infty. \end{cases}$

4. Знайти похідну  $\frac{dy}{dx}$ .

(а)  $y = \sqrt{\frac{x^2+x^3}{x^2-x^3}}$ ;

(д)  $y = e^{-x^2} \cos^3(2x+3)$ ;

(б)  $y = \ln(1 + \sin 2x)$

(е)  $y = \left( \arccos \frac{x}{\sqrt{3}} \right)^x$ ;

(в)  $y = 2^{\operatorname{ctg}(5x+1)}$ ;

(ж)  $x = \operatorname{arctg}(1-t)$ ,  $y = \operatorname{arctg}(t-1)$ ;

(г)  $y = \arcsin(1-x^2)$ ;

(и)  $(x+y)^2 + (x-3y)^3 = 0$ .

5.  $\begin{cases} x = e^{-at}; \\ y = e^{at}. \end{cases}$  Знайти  $\frac{d^2y}{dx^2}$ .

6. Застосувати диференціал першого порядку в наближених обчисленнях. Радіус кола рівний 5 см. На скільки приблизно треба змінити радіус кола, щоб його площа збільшилась на  $0,628 \text{ см}^2$ ?

7. Провести загальне дослідження функції та побудувати її графік. а)  $y = \frac{1}{3}x^3 - 4x$ ; б)  $y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^2$ .

8. Розв'язати задачу на відшукання найбільших чи найменших значень змінної величини. Потрібно виготовити закритий циліндричний бак об'ємом  $V$ . Якими повинні бути його розміри, щоб на його виготовлення пішла найменша кількість матеріалу?

9. Застосувати формулу Тейлора. Знайти три перших члени розкладу функції  $y = x^5 - 5x^3 + x$  за степенями  $x - 2$  та записати залишковий член.

10. Знайти граничне значення функції за правилом Лопіталя.  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x \sin x} - \frac{1}{x^2} \right)$ .

# Варіант №7

1. Розв'язати завдання з теми „Границя послідовності”.

(а) Використовуючи означення, перевірити, чи є послідовність  $\{x_n\} = \left\{2n \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right\}$  нескінченно великою.

(б) Побудувати послідовність, яка збігається до 1, залишаючись більшою за 1.

2. Знайти границю функції, не користуючись правилом Лопіталя.

(а)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 6x - 5}{5x^2 - x - 1};$

(в)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} \frac{x}{5}}{5x};$

(б)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{x^2};$

(г)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x [\ln(x+2) - \ln x].$

3. Задано функцію  $y = f(x)$ . Знайти точки розриву функції, якщо вони існують. а)  $y = 14^{\frac{1}{6-x}}$ ; б)  $y =$

$$\begin{cases} -(x+1), & \text{якщо } -\infty < x \leq -1; \\ (x+1)^2, & \text{якщо } -1 < x \leq 1; \\ x, & \text{якщо } 1 < x < +\infty. \end{cases}$$

4. Знайти похідну  $\frac{dy}{dx}$ .

(а)  $y = \operatorname{ctg}^3 \frac{5}{x};$

(д)  $y = \sqrt[3]{\frac{1 + \sin 3x}{3 + 2 \sin 3x}};$

(б)  $y = \arcsin(2x - 1);$

(е)  $y = x^{2 \operatorname{arctg}^2 x};$

(в)  $y = \ln \frac{x^5}{1 - x^2};$

(ж)  $x = e^{-t-1}, y = e^{t^2+t+1};$

(г)  $y = 10^{\ln x - 4};$

(и)  $4^x = e^{x+y}.$

5.  $y = x + \operatorname{arctg} y$ . Знайти  $\frac{d^2y}{dx^2}$ .

6. Застосувати диференціал першого порядку в наближених обчисленнях. Користуючись правилами наближеного обчислення знайти числове значення виразу  $\sqrt{(1,002)^{-3}}$ .

7. Провести загальне дослідження функції та побудувати її графік. а)  $y = \sqrt{x^3 + 1}$ ; б)  $y = \frac{x}{1 + x^2}$ .

8. Розв'язати задачу на відшукання найбільших чи найменших значень змінної величини. Прямокутна площадка, що примикає однією стороною до довгої кам'яної стіни, з трьох боків обгороджена залізними ґратами. Якою повинна бути довжина сторін площадки, щоб вона мала найбільшу площу, якщо маємо 200 м ґрат?

9. Застосувати формулу Тейлора. Знайти три перших члени розкладу функції  $y = \cos 3x$  за степенями  $x$  та написати залишковий член.

10. Знайти граничне значення функції за правилом Лопіталя.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - b^x}{\operatorname{tg} x}$ .

# Варіант №8

1. Розв'язати завдання з теми „Границя послідовності”.

(а) Довести, що  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8 \cos \frac{n\pi}{2}}{n+4} = 0$ , використовуючи означення границі послідовності.

(б) Навести приклад послідовності, яка прямує до границі, приймаючи значення менше границі.

2. Знайти границю функції, не користуючись правилом Лопіталя.

(а)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^5 - 11x^2 + 3}{5x - 3x^5}$ ;

(в)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 2x}{3x}$ ;

(б)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+2} - \sqrt{x})$ ;

(г)  $\lim_{x \rightarrow \infty} x [\ln(x+1) - \ln x]$ .

3. Задано функцію  $y = f(x)$ . Знайти точки розриву функції, якщо вони існують. а)  $y = 12^{\frac{1}{x}}$ ; б)  $y =$

$$\begin{cases} -x, & \text{якщо } -\infty < x \leq 0; \\ -(x-1)^2 + 1, & \text{якщо } 0 < x < 2; \\ x-3, & \text{якщо } 2 \leq x < +\infty. \end{cases}$$

4. Знайти похідну  $\frac{dy}{dx}$ .

(а)  $y = \sin 2x \cos 2x$ ;

(д)  $y = \frac{x}{(x+1)^2 (x^2+1)^3}$ ;

(б)  $y = \operatorname{arctg} \frac{1-x^2}{2x}$ ;

(е)  $y = (\ln x)^{\sin x}$ ;

(в)  $y = 4^{x^2-x+3}$ ;

(ж)  $x = 1 - 10t, y = t^2 + t + 1$ ;

(г)  $y = \ln(2x + \sqrt{4x^2 + 1})$ ;

(и)  $(y^2 - x^2)^3 - x^2y - y - x = 0$ .

5.  $\begin{cases} x = e^{-t}; \\ y = t^3. \end{cases}$  Знайти  $\frac{d^2y}{dx^2}$ .

6. Застосувати диференціал першого порядку в наближених обчисленнях. Дано рівняння руху тіла  $S = 2t^3 + t$ . Знайти наближено довжину шляху, що пройшло тіло на момент  $t = 3,99$ с від початку відліку часу.

7. Провести загальне дослідження функції та побудувати її графік. а)  $y = 4xe^{-x}$ ; б)  $y = \frac{2x}{1+x^2}$ .

8. Розв'язати задачу на відшукання найбільших чи найменших значень змінної величини. В конус радіуса 4 дм та висотою 6 дм вписано циліндр найбільшого об'єму. Знайти цей об'єм.

9. Застосувати формулу Тейлора. Написати формулу Тейлора для функції  $y = x - e^{-x}$  при  $x_0 = 2$  та  $n = 2$ .

10. Знайти граничне значення функції за правилом Лопіталя.  $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 e^{\frac{1}{x^2}}$ .



# Варіант №9

1. Розв'язати завдання з теми „Границя послідовності”.

(а) З'ясувати, чи має границю послідовність  $\{x_n\} = \left\{(-1)^n + \frac{1}{2^n}\right\}$ . Зобразити її поведінку графічно.

(б) Нехай  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ , а  $\{y_n\}$  – довільна послідовність. Чи можна стверджувати, що  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = 0$ .  
Навести відповідні приклади.

2. Знайти границю функції, не користуючись правилом Лопіталя.

(а)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 - 1}{x^2 + 3x + 2}$ ;

(в)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \frac{x}{4}}{1 - \sqrt{1 - x^2}}$ ;

(б)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - 2x - x^2} - (1 + x)}{x}$ ;

(г)  $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[5]{1 - 3x}$ .

3. Задано функцію  $y = f(x)$ . Знайти точки розриву функції, якщо вони існують. а)  $y = 4^{\frac{1}{x-2}}$ ; б)  $y = \begin{cases} x^3, & \text{якщо } -\infty < x < -1; \\ 2x + 1, & \text{якщо } -1 \leq x \leq 3; \\ -x + 5, & \text{якщо } 3 < x < +\infty. \end{cases}$

4. Знайти похідну  $\frac{dy}{dx}$ .

(а)  $y = \operatorname{tg} x + \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 x$ ;

(д)  $y = \sqrt[3]{(1 + \sin^2 2x)^2}$ ;

(б)  $y = \arccos(1 - 2x)$ ;

(е)  $y = (\ln x)^{\cos x}$ ;

(в)  $y = \lg \sin x$ ;

(ж)  $x = \ln(t^2 - 1)$ ,  $y = \ln(t^2 + 1)$ ;

(г)  $y = 2^{\ln(1-x)}$ ;

(и)  $x - xy - y = 0$ .

5.  $\begin{cases} x = \operatorname{arctg} t; \\ y = \ln(1 + t^2). \end{cases}$  Знайти  $\frac{d^2y}{dx^2}$ .

6. Застосувати диференціал першого порядку в наближених обчисленнях. Знайти наближене значення функції  $y = (1 + x)^{-5}$  при  $x = 0, 2$ .

7. Провести загальне дослідження функції та побудувати її графік. а)  $y = \frac{x^3}{3} - 4x$ ; б)  $y = \frac{2 \ln x}{x}$ .

8. Розв'язати задачу на відшукання найбільших чи найменших значень змінної величини. Потрібно вирити яму конічної форми (вирву) з твірною  $a = 3$  м. За якої глибини об'єм вирви буде найбільшим?

9. Застосувати формулу Тейлора. Знайти три перших члени розкладу функції  $y = xe^x$  за степенями  $x$  та записати залишковий член.

10. Знайти граничне значення функції за правилом Лопіталя.  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{x - \frac{\pi}{4}}{\ln\left(2 - \frac{4}{\pi}x\right)}$ .

# Варіант №10

1. Розв'язати завдання з теми „Границя послідовності”.

(а) Користуючись визначенням, довести, що  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n-2} \neq 2$ .

(б) Навести приклад обмеженої послідовності, що не має границі.

2. Знайти границю функції, не користуючись правилом Лопіталя.

(а)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(1+x)(2+3x)(3-4x)}{(1+2x)(3+2x)(4+x)}$ ;

(в)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \sin x}{\sec x - 1}$ ;

(б)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4} - 2}{x\sqrt{x+4}}$ ;

(г)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x}\right)^{1-2x}$ .

3. Задано функцію  $y = f(x)$ . Знайти точки розриву функції, якщо вони існують. а)  $y = 13^{\frac{1}{5+x}}$ ; б)  $y =$

$$\begin{cases} -2x, & \text{якщо } -\infty < x \leq 0; \\ \sqrt{x}, & \text{якщо } 0 < x \leq 4; \\ 1, & \text{якщо } 4 \leq x < +\infty. \end{cases}$$

4. Знайти похідну  $\frac{dy}{dx}$ .

(а)  $y = \frac{x^2 + 3}{2 - x}$ ;

(д)  $y = \ln \frac{5 + \sqrt{25 - x^2}}{x}$ ;

(б)  $y = (2x - 1)\sqrt{x^2 - 1}$ ;

(е)  $y = (\operatorname{tg} x)^{\frac{1}{x}}$ ;

(в)  $y = 3^{\operatorname{arctg}^2(4x+1)}$ ;

(ж)  $x = \cos(2t + 1)$ ,  $y = \sin(3t - 1)$ ;

(г)  $y = \sin^3 5x \cos^5 3x$ ;

(и)  $x^3 + y + 3xy = 0$ .

5.  $\begin{cases} x = \ln(1 + t^2); \\ y = t^2. \end{cases}$  Знайти  $\frac{d^2y}{dx^2}$ .

6. Застосувати диференціал першого порядку в наближених обчисленнях. Кулю радіуса 2 см охолоджено, внаслідок чого її об'єм зменшився на 0,16 см<sup>3</sup>. Знайти зменшення радіуса кулі.

7. Провести загальне дослідження функції та побудувати її графік. а)  $y = x^4 - 2x^2 + 2$ ; б)  $y = \frac{1}{x^2 - 3x + 2}$ .

8. Розв'язати задачу на відшукування найбільших чи найменших значень змінної величини. Якими повинні бути катети прямокутного трикутника з гіпотенузою  $m$ , щоб його площа була найбільшою?

9. Застосувати формулу Тейлора. Знайти перші три члени розкладу за формулою Тейлора при  $x_0 = 2$  функції  $f(x) = x^{10} - 3x^6 + x^2 + 2$  та записати залишковий член.

10. Знайти граничне значення функції за правилом Лопіталя.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax} - e^{bx}}{\sin x}$ .

# Варіант №11

- Розв'язати завдання з теми „Границя послідовності”.
  - Користуючись означенням, знайти  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ 3 + \frac{(-1)^n}{2n} \right\}$ .
  - Навести приклад монотонно спадної обмеженої послідовності.
- Знайти границю функції, не користуючись правилом Лопіталя.
  - $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+1)^3}{-5x^2+1}$ ;
  - $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x^2}$ ;
  - $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1}-2}{\sqrt{x-2}-1}$ ;
  - $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+1}{x-2} \right)^{x^2}$ .
- Задано функцію  $y = f(x)$ . Знайти точки розриву функції, якщо вони існують. а)  $y = 5^{\frac{1}{6-x}}$ ; б)  $y = \begin{cases} \cos x, & \text{якщо } -\infty < x < 0; \\ 1-x, & \text{якщо } 0 \leq x < 5; \\ -x^2 - 20, & \text{якщо } 5 \leq x < +\infty. \end{cases}$
- Знайти похідну  $\frac{dy}{dx}$ .
  - $y = x^2 \cos 2x$ ;
  - $y = \ln(\sin^3 x)$ ;
  - $y = \arcsin(\operatorname{tg} x)$ ;
  - $y = x^4 4^x$ ;
  - $y = \frac{\sqrt{1+3x^2}}{2+3x^2}$ ;
  - $y = (\operatorname{arctg} x)^{\arcsin x}$ ;
  - $x = \arcsin(t^2 - 1)$ ,  $y = \arccos 2t$ ;
  - $(x+1)^3 + (y+1)^3 - 3(x+1)(y+1) = 0$ .
- $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ . Знайти  $\frac{d^2y}{dx^2}$ .
- Застосувати диференціал першого порядку в наближених обчисленнях. Знайти наближене значення функції  $y = (1+x)^6 - 1$  при  $x = 0,004$ .
- Провести загальне дослідження функції та побудувати її графік. а)  $y = \frac{e^x}{x}$ ; б)  $y = x + \operatorname{arctg} x$ .
- Розв'язати задачу на відшукування найбільших чи найменших значень змінної величини. Основа трикутника рівна  $a$ , його периметр  $2p$ . Визначити дві інші його сторони так, щоб площа його була найбільшою.
- Застосувати формулу Тейлора. Записати формулу Маклорена для функції  $y = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$  при  $n = 5$ .
- Знайти граничне значення функції за правилом Лопіталя.  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{1 - 2 \sin x}{\cos 3x}$ .

# Варіант №12

1. Розв'язати завдання з теми „Границя послідовності”.

(а) Користуючись означенням, довести, що  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - 1}{n^2 + n + 1} = 1$ .

(б) Навести приклад спадної послідовності, що прямує до 2.

2. Знайти границю функції, не користуючись правилом Лопіталя.

(а)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x - 3)(3x + 2)^3}{(2x + 1)^5}$ ;

(в)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 6x - \cos 4x}{x^2}$ ;

(б)  $\lim_{x \rightarrow \infty} 3x(\sqrt{x^2 + 1} - x)$ ;

(г)  $\lim_{x \rightarrow 1} (3x - 2)^{\frac{x}{2(x-1)}}$ .

3. Задано функцію  $y = f(x)$ . Знайти точки розриву функції, якщо вони існують. а)  $y = 4^{\frac{1}{3-x}}$ ; б)  $y =$

$$\begin{cases} x + 2, & \text{якщо } -\infty < x \leq -1; \\ x^2 + 1, & \text{якщо } -1 < x \leq 1; \\ -x + 3, & \text{якщо } 1 < x < +\infty. \end{cases}$$

4. Знайти похідну  $\frac{dy}{dx}$ .

(а)  $y = x^2 \ln x$ ;

(д)  $y = e^{\arcsin(1-x)}$ ;

(б)  $y = 7^{1-x^2}$ ;

(е)  $y = (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{ctg} x}$ ;

(в)  $y = \frac{\sin 4x}{4x}$ ;

(ж)  $x = \operatorname{ctg}^3 t, y = \operatorname{arcctg}(t + t^3)$ ;

(г)  $y = \arccos(\sqrt{\cos x})$ ;

(и)  $x \operatorname{arctg} y + y \operatorname{arctg} x = 0$ .

5.  $\begin{cases} x = a(t - \sin t); \\ y = a(1 - \cos t). \end{cases}$  Знайти  $\frac{d^2y}{dx^2}$ .

6. Застосувати диференціал першого порядку в наближених обчисленнях. Знайти наближене значення функції  $y = x^4 - 3x^2$  при  $x = 2,99$ .

7. Провести загальне дослідження функції та побудувати її графік. а)  $y = \ln(x^2 + 2x + 2)$ ; б)  $y = \frac{x}{e^x}$ .

8. Розв'язати задачу на відшукування найбільших чи найменших значень змінної величини. В півколо радіусу  $R$  вписано прямокутник найбільшої площі. Визначити його розміри.

9. Застосувати формулу Тейлора. Знайти три перших члени розкладу функції  $y = \sin^2 x$  за степенями  $x$  та записати залишковий член.

10. Знайти граничне значення функції за правилом Лопіталя.  $\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ (x > 2)}} \frac{\ln(x-1)}{4-x^2}$ .

# Варіант №13

1. Розв'язати завдання з теми „Границя послідовності”.

(а) Довести, що послідовність  $\{x_n\} = \left\{ \frac{2 + (-1)^n}{n} \right\}$  є нескінченно малою.

(б) Подати приклад послідовності, яка прямує до 1, коливаючись.

2. Знайти границю функції, не користуючись правилом Лопіталя.

(а)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^4 - 2x^3 + 2}{x^4 + 3}$ ;

(в)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{2x \operatorname{tg} 2x}$ ;

(б)  $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{1 + 3x} - \sqrt{2x + 6}}{x^2 - 5x}$ ;

(г)  $\lim_{x \rightarrow 2} (3x - 5)^{\frac{2x}{x^2 + 4}}$ .

3. Задано функцію  $y = f(x)$ . Знайти точки розриву функції, якщо вони існують. а)  $y = 6^{\frac{1}{x-5}}$ ; б)  $y =$

$$\begin{cases} \sqrt{-x}, & \text{якщо } -\infty < x \leq 0; \\ 2, & \text{якщо } 0 < x < 2; \\ x, & \text{якщо } 2 \leq x < +\infty. \end{cases}$$

4. Знайти похідну  $\frac{dy}{dx}$ .

(а)  $y = \frac{2}{\sin(x^2 - 1)}$ ;

(д)  $y = \ln \frac{\operatorname{ctg} \frac{x}{2}}{1 + e^{2x}}$ ;

(б)  $y = \sqrt{\operatorname{arcctg} x^2}$ ;

(е)  $y = (\log_2 x)^{x^2}$ ;

(в)  $y = \lg(\operatorname{tg}^3 x + 1)$ ;

(ж)  $x = t + \frac{1}{2} \sin 2t, y = \cos^3 t$ ;

(г)  $y = 2^x + 3^{2x} + 4^{3x}$ ;

(и)  $x^2 - y^2 = 1$ .

5.  $e^{x-y} + e^{\sqrt{xy}} = 0$ . Знайти  $\frac{d^2y}{dx^2}$ .

6. Застосувати диференціал першого порядку в наближених обчисленнях. Користуючись правилами наближеного обчислення знайти числове значення виразу  $\frac{100}{(1,008)^8}$ .

7. Провести загальне дослідження функції та побудувати її графік. а)  $y = \frac{x^4 + 1}{x^2}$ ; б)  $y = \ln(9 - x^2)$ .

8. Розв'язати задачу на відшукання найбільших чи найменших значень змінної величини. Потрібно вирити яму циліндричної форми з круглою основою, вертикальною боковою поверхнею та заданого об'єму  $V = 25 \text{ м}^3$  ( $V \approx 8\pi$ ). Якими повинні бути лінійні розміри ями (радіус  $R$  та висота  $H$ ), щоб на облицювання її дна та бокової поверхні було витрачено найменшу кількість матеріалу?

9. Застосувати формулу Тейлора. Написати формулу Маклорена для функції  $y = xe^x$  при  $n = 3$ .

10. Знайти граничне значення функції за правилом Лопіталя.  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} 3x}$ .

# Варіант №14

1. Розв'язати завдання з теми „Границя послідовності”.

(а) Користуючись визначенням, знайти  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n + 1}{3n}$ . Яким повинно бути  $n$ , щоб різниця між  $x_n$  та її границею за абсолютною величиною не перевищувала 0,0001?

(б) Показати, що послідовність  $\{x_n\} = \left\{ \frac{3 + n^2}{1 + n^2} \right\}$  обмежена.

2. Знайти границю функції, не користуючись правилом Лопіталю.

(а)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - 2x^2 + 5x^4}{2 + 3x^2 + x^4}$ ;

(в)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \operatorname{ctg} 2x}{\sin 3x}$ ;

(б)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{3x - 2} - 2}{\sqrt{2x + 5} - 3}$ ;

(г)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x + 3) [\ln(x + 1) - \ln x]$ .

3. Задано функцію  $y = f(x)$ . Знайти точки розриву функції, якщо вони існують. а)  $y = 10^{\frac{1}{1+x}}$ ; б)  $y = \begin{cases} -x, & \text{якщо } -\infty < x \leq 0; \\ \sin x, & \text{якщо } 0 < x \leq \pi; \\ x - 2, & \text{якщо } \pi < x < +\infty. \end{cases}$

4. Знайти похідну  $\frac{dy}{dx}$ .

(а)  $y = (\sqrt{2x + 5} + 1)^3$ ;

(д)  $y = (1 + \operatorname{tg}^2 3x) 8^{-x}$ ;

(б)  $y = \arcsin \frac{2x + 1}{3}$ ;

(е)  $y = (\operatorname{arctg} 2x)^{\sin 3x}$ ;

(в)  $y = e^{-\cos^4 5x}$ ;

(ж)  $x = \sin^3 2t, y = 2 \cos^3 2t$ ;

(г)  $y = \operatorname{ctg} \sqrt[3]{x}$ ;

(и)  $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$ .

5.  $\begin{cases} x = a \cos t; \\ y = a \sin t. \end{cases}$  Знайти  $\frac{d^2y}{dx^2}$ .

6. Застосувати диференціал першого порядку в наближених обчисленнях. Прискорення вільного падіння тіл на Місяці  $g_m = 1,6 \text{ м/с}^2$ . Який шлях пройде тіло при вільному падінні на Місяці за 10,04 с від початку падіння? Рівняння вільного падіння тіл  $H = \frac{g_m t^2}{2}$ .

7. Провести загальне дослідження функції та побудувати її графік. а)  $y = \frac{2x^2}{2x - 1}$ ; б)  $y = \frac{1}{2} (e^x - e^{-x})$ .

8. Розв'язати задачу на відшукання найбільших чи найменших значень змінної величини. З прямокутного листа жерсті  $24 \times 9$  см потрібно виготовити відкриту зверху коробку, вирізаючи з кутів листа рівні квадрати та загинаючи бокові смуги, що залишилися під прямим кутом. Якими повинні бути сторони квадратів, що вирізаються, щоб місткість коробки була найбільшою?

9. Застосувати формулу Тейлора. Знайти три перших члени розкладу функції  $y = \ln(1 + 2x)$  за степенями  $x$  та записати залишковий член.

10. Знайти граничне значення функції за правилом Лопіталю.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{1 - x^3}$ .

# Варіант №15

- Розв'язати завдання з теми „Границя послідовності”.
  - Довести, що загальний член  $x_n$  будь-якої арифметичної прогресії є нескінченно великою величиною при  $n \rightarrow \infty$ . За яких умов вона буде додатною а за яких від'ємною?
  - Навести приклад послідовності, що прямує до 3 коливаючись.
- Знайти границю функції, не користуючись правилом Лопіталю.
  - $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^6 - 2x^2 + 11}{5x^7 + 3x^4 + 2}$ ;
  - $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 3x - 1}{x \operatorname{tg} 3x}$ ;
  - $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{3 + x + x^2} - \sqrt{9 - x^3 + 2x^2}}{x^2 - 3x + 2}$ ;
  - $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x + 5}{x + 8} \right)^{2x+3}$ .
- Задано функцію  $y = f(x)$ . Знайти точки розриву функції, якщо вони існують. а)  $y = 3^{\frac{1}{5-x}}$ ; б)  $y = \begin{cases} x^2, & \text{якщо } -\infty < x \leq 0; \\ \lg x, & \text{якщо } 0 < x \leq 1; \\ 4(x - 1), & \text{якщо } 1 < x < +\infty. \end{cases}$
- Знайти похідну  $\frac{dy}{dx}$ .
  - $y = \cos(2x^2 + x + 1)$ ;
  - $y = \operatorname{arctg} \frac{1-x}{1+x}$ ;
  - $y = x^2 2^x$ ;
  - $y = \log_2(1 + \sin x)$ ;
  - $y = e^{-\frac{1}{\lg x}}$ ;
  - $y = (\operatorname{ctg} 2x)^{\sqrt{x}}$ ;
  - $x = 2t - 1, y = \operatorname{arccotg}(1 - 2t)$ ;
  - $xy - 2\sqrt[5]{y} = x^2$ .
- $\begin{cases} x = t^2 e^{t^3}; \\ y = (1 - t^2) e^{-t}. \end{cases}$  Знайти  $\frac{d^2 y}{dx^2}$ .
- Застосувати диференціал першого порядку в наближених обчисленнях. Знайти наближене значення функції  $y = (x^3 - 1)(x^2 + 1)$  при  $x = 2,05$ .
- Провести загальне дослідження функції та побудувати її графік. а)  $y = \frac{1}{e^x - 1}$ ; б)  $y = x - 2 + \frac{4}{x - 2}$ .
- Розв'язати задачу на відшукання найбільших чи найменших значень змінної величини. Щоб обгородити клумбу, яка повинна мати форму кругового сектора, маємо шматок дроту довжиною 20 м. Яким слід взяти радіус кола, щоб площа клумби була найбільшою?
- Застосувати формулу Тейлора. Знайти три перших члени розкладу функції  $y = \operatorname{arctg} x$  за степенями  $x$  та записати залишковий член.
- Знайти граничне значення функції за правилом Лопіталю.  $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x$ .

# Варіант №16

1. Розв'язати завдання з теми „Границя послідовності”.

(а) Користуючись означенням, показати, що  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n + 3}{2n + 1} = 1$ .

(б) Чи є нескінченно великою необмежена послідовність  $\{x_n\} = \left\{n \cos \frac{n\pi}{2}\right\}$ ?

2. Знайти границю функції, не користуючись правилом Лопіталя.

(а)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(5 - x)(2x - 1)}{3x^2 + 1}$ ;

(в)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x \operatorname{tg} x}{\sin^2 x}$ ;

(б)  $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{\sqrt{x^2 - 7} - 3}{x^2 + 4x}$ ;

(г)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{x}{2}\right)^{\frac{4}{x}}$ .

3. Задано функцію  $y = f(x)$ . Знайти точки розриву функції, якщо вони існують. а)  $y = 8^{\frac{1}{1+x}}$ ; б)  $y =$

$$\begin{cases} 2^x, & \text{якщо } -\infty < x < 0; \\ 2x^2 + 1, & \text{якщо } 0 \leq x < 2; \\ 4 - x, & \text{якщо } 2 \leq x < +\infty. \end{cases}$$

4. Знайти похідну  $\frac{dy}{dx}$ .

(а)  $y = x \sin \sqrt{x}$ ;

(д)  $y = \left(1 + \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)^3$ ;

(б)  $y = \operatorname{arctg}(1 + \sin x)$ ;

(е)  $y = (\arcsin x)^{\lg x}$ ;

(в)  $y = \ln(\operatorname{arctg} x)$ ;

(ж)  $x = \arccos t^2, y = \cos(1 - t^2)$ ;

(г)  $y = 4^{\cos 4x}$ ;

(и)  $x^2 y + y = x$ .

5.  $\begin{cases} x = \cos 2t; \\ y = \sin^2 t. \end{cases}$  Знайти  $\frac{d^2 y}{dx^2}$ .

6. Застосувати диференціал першого порядку в наближених обчисленнях. Знайти наближене значення функції  $y = \sqrt[10]{1-x}$  при  $x = 0,006$ .

7. Провести загальне дослідження функції та побудувати її графік. а)  $y = \frac{x}{2} + \frac{2}{x^2}$ ; б)  $y = x e^{-\frac{x^2}{2}}$ .

8. Розв'язати задачу на відшукання найбільших чи найменших значень змінної величини. З смуги жерсті шириною 11 см потрібно зробити відкритий зверху жолоб, поперечний переріз якого має форму рівнобічної трапеції. Дно жолоба повинно мати ширину 7 см. Якою повинна бути ширина жолоба зверху, щоб він вміщав найбільшу кількість води?

9. Застосувати формулу Тейлора. Функцію  $y = (x^2 - 3x + 1)^3$  розкласти за степенями  $x$ , користуючись формулою Тейлора.

10. Знайти граничне значення функції за правилом Лопіталя.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos ax}{1 - \cos bx}$ .



# Варіант №17

- Розв'язати завдання з теми „Границя послідовності”.
  - Довести, використовуючи визначення, що  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n + (-1)^n}{n} = 2$ .
  - Подати приклад послідовності, яка прямує до нуля, приймаючи додатні та від'ємні значення.
- Знайти границю функції, не користуючись правилом Лопіталю.
  - $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^5 + 3x^4 - 2x^2}{x - 2x^3 - 5x^5}$ ;
  - $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{5x^2}$ ;
  - $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{3x - 15}{\sqrt{2x - 6} - 2}$ ;
  - $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{x}\right)^{5x}$ .
- Задано функцію  $y = f(x)$ . Знайти точки розриву функції, якщо вони існують. а)  $y = 4^{\frac{1}{x+5}}$ ; б)  $y = \begin{cases} \sin x, & \text{якщо } -\infty < x \leq 0; \\ -x^2, & \text{якщо } 0 \leq x < 1; \\ 3x - 1, & \text{якщо } 1 \leq x < +\infty. \end{cases}$
- Знайти похідну  $\frac{dy}{dx}$ .
  - $y = \frac{1 - x^3}{x^3 - 2}$ ;
  - $y = e^x \arcsin(e^x)$ ;
  - $y = \sin^2 x \cos^3 x$ ;
  - $y = \ln(x^2 + \sqrt{x^4 + 1})$ ;
  - $y = 2^{\operatorname{ctg}^2 x}$ ;
  - $y = (\operatorname{tg} 2x)^{\sqrt[3]{x}}$ ;
  - $x = \cos^2 t, y = \frac{1}{\arccos t}$ ;
  - $\operatorname{arctg}(3x) + \operatorname{arctg}(4y) = 0$ .
- $\begin{cases} x = \ln t; \\ y = t^3. \end{cases}$  Знайти  $\frac{d^2y}{dx^2}$ .
- Застосувати диференціал першого порядку в наближених обчисленнях. Знайти просте наближене значення величини  $(1 - \alpha)^3$  при малому  $\alpha$  та обчислити її наближене значення за малого фіксованого  $\alpha = 0,00008$ .
- Провести загальне дослідження функції та побудувати її графік. а)  $y = x - 2 + \frac{4}{x - 2}$ ; б)  $y = x + \ln x$ .
- Розв'язати задачу на відшукання найбільших чи найменших значень змінної величини. Визначити розміри відкритого басейну з квадратним дном об'ємом  $32 \text{ м}^3$  так, щоб на облицювання його стін та дна було витрачено найменшу кількість матеріалу.
- Застосувати формулу Тейлора. Написати формулу Маклорена для функції  $y = \sqrt{x + 1}$  при  $n = 3$ .
- Знайти граничне значення функції за правилом Лопіталю.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^2}$ .

# Варіант №18

- Розв'язати завдання з теми „Границя послідовності”.
  - Показати, що послідовність  $\{x_n\} = \left\{ \frac{2^n}{n!} \right\}$  є монотонно спадною для всіх  $n$ .
  - Подати приклад розбіжної послідовності.
- Знайти границю функції, не користуючись правилом Лопіталя.
  - $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 - 3x + 1}{3x^2 + x - 5}$ ;
  - $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}^2 \frac{x}{5}}{x^2}$ ;
  - $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{2x-1} - \sqrt{5}}{x-3}$ ;
  - $\lim_{x \rightarrow 1} (7 - 6x)^{\frac{x}{3x-3}}$ .
- Задано функцію  $y = f(x)$ . Знайти точки розриву функції, якщо вони існують. а)  $y = 5^{\frac{1}{x+2}}$ ; б)  $y = \begin{cases} 0, 5x^2, & \text{якщо } |x| < 2; \\ 2, 5, & \text{якщо } |x| = 2; \\ 3, & \text{якщо } |x| > 2. \end{cases}$
- Знайти похідну  $\frac{dy}{dx}$ .
  - $y = \sqrt{\sin(x^2 - x)}$ ;
  - $y = \arccos\left(\frac{2}{x-1}\right)$ ;
  - $y = 3^{\frac{1}{4x}}$ ;
  - $y = \lg(\operatorname{arctg} x)$ ;
  - $y = \operatorname{tg}^3 x \operatorname{tg} 3x$ ;
  - $y = \frac{x-1}{x+1} e^{-x}$ ;
  - $x = \sin^2(2t+1)$ ,  $y = \cos^2(1-t)$ ;
  - $xy - x - y = 0$ .
- $\sin(x^2 - y^2) + \cos(x^2 + y^2) = 0$ . Знайти  $\frac{d^2y}{dx^2}$ .
- Застосувати диференціал першого порядку в наближених обчисленнях. Знайти наближене значення функції  $y = \frac{1}{\sqrt[3]{1+x}}$  при  $x = 0,00175$ .
- Провести загальне дослідження функції та побудувати її графік. а)  $y = 2x \ln x$ ; б)  $y = \frac{x^2 - 2x + 2}{x-1}$ .
- Розв'язати задачу на відшукання найбільших чи найменших значень змінної величини. Знайти розміри циліндра з поверхнею  $S$  та найбільшим об'ємом.
- Застосувати формулу Тейлора. Розкласти багаточлен  $y = x^5 - 3x^4 - 2x^3 + 4x^2 - x + 2$  за степенями  $x - 1$ .
- Знайти граничне значення функції за правилом Лопіталя.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\operatorname{ctg}^2 x}$ .

# Варіант №19

1. Розв'язати завдання з теми „Границя послідовності”.

(а) Користуючись означенням, довести, що  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ 1 + \left( -\frac{1}{2} \right)^n \right] = 1$ . Зобразити графічно цю послідовність.

(б) Побудувати приклад послідовності, що прямує до  $-1$ , залишаючись більше  $-1$ .

2. Знайти границю функції, не користуючись правилом Лопіталя.

(а)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - 2x^2 + 5x^4}{2 + 3x^2 + x^4}$ ;

(в)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 6x}{1 - \cos 2x}$ ;

(б)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + 3x^2} - 1}{x^2 + x^3}$ ;

(г)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 5) [\ln(x - 3) - \ln x]$ .

3. Задано функцію  $y = f(x)$ . Знайти точки розриву функції, якщо вони існують. а)  $y = 2 - \frac{1}{x}$ ; б)  $y = \begin{cases} -2x + 4, & \text{якщо } -\infty < x \leq -2; \\ -x^3, & \text{якщо } -2 < x \leq 1; \\ x + 2, & \text{якщо } 1 < x < +\infty. \end{cases}$

4. Знайти похідну  $\frac{dy}{dx}$ .

(а)  $y = \frac{x^3}{\cos 5x}$ ;

(д)  $y = \frac{e^{-\sqrt{x}}}{1 + e^{2x^3}}$ ;

(б)  $y = \operatorname{arctg} 3x + \operatorname{arcctg} 3x$ ;

(е)  $y = (\sin 3x)^{\sqrt{x}}$ ;

(в)  $y = \sqrt[5]{5} + 5^{-2x}$ ;

(ж)  $x = t^5 + 2t, y = t^3 + 8t$ ;

(г)  $y = \ln(\ln x^2)$ ;

(и)  $x^2y - y^2x + (x - y)^3 = 0$ .

5.  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ . Знайти  $\frac{d^2y}{dx^2}$ .

6. Застосувати диференціал першого порядку в наближених обчисленнях. Знайти просте наближене значення величини  $\frac{1}{1 - \alpha^3}$  при малому  $\alpha$  та обчислити її наближене значення за малого фіксованого  $\alpha = 0, 02$ .

7. Провести загальне дослідження функції та побудувати її графік. а)  $y = \frac{1}{1 + x^2}$ ; б)  $y = 4xe^{-x}$ .

8. Розв'язати задачу на відшукання найбільших чи найменших значень змінної величини. Резервуар, відкритий зверху, має форму прямокутного паралелепіпеда з квадратною основою. Якими повинні бути його розміри, щоб на виготовлення пішло якнайменша кількість матеріалу, якщо він повинен вмщати 256 л води?

9. Застосувати формулу Тейлора. Знайти три перших члена розкладу функції  $y = \sin x^2$  за степенями  $x$  та записати залишковий член.

10. Знайти граничне значення функції за правилом Лопіталя.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 - \ln x}{x^2 + 1}$ .

# Варіант №20

1. Розв'язати завдання з теми „Границя послідовності”.

(а) Зобразити графічно зміну послідовності  $\{x_n\} = \left\{1 + \frac{(-1)^n}{2n+1}\right\}$ . Починаючи з якого  $n$  модуль різниці  $x_n - 1$  зробиється та буде залишатися меншим за 0,01?

(б) Подати приклад нескінченно малої послідовності, що приймає як додатні так і від'ємні значення.

2. Знайти границю функції, не користуючись правилом Лопіталя.

(а)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(1-2x)x^2}{(3x-2)(x^2-1)}$ ;

(в)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{5x^2}$ ;

(б)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{3x}$ ;

(г)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{x-2}\right)^x$ .

3. Задано функцію  $y = f(x)$ . Знайти точки розриву функції, якщо вони існують. а)  $y = \frac{6}{3-x^2}$ ; б)  $y =$

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}x, \text{ якщо } -\infty < x \leq -2; \\ -x^2 + 5, \text{ якщо } -2 < x \leq 1; \\ 3x, \text{ якщо } 1 < x < +\infty. \end{cases}$$

4. Знайти похідну  $\frac{dy}{dx}$ .

(а)  $y = \frac{2}{2x-1} - \frac{1}{x}$ ;

(д)  $y = \operatorname{arctg} \left(\ln \frac{1}{x}\right)$ ;

(б)  $y = x^2 \arcsin(1-x^2)$ ;

(е)  $y = (\cos x)^{\sin x}$ ;

(в)  $y = e^{2x} \arccos(2x+1)$ ;

(ж)  $x = \frac{3at}{1+t^3}, y = \frac{3at^2}{1+t^3}$ ;

(г)  $y = \sqrt{\operatorname{ctg} x} - \sqrt{\operatorname{tg}(x-1)}$ ;

(и)  $\operatorname{arctg}(x+y) = x$ .

5.  $\begin{cases} x = \ln t; \\ y = t^m. \end{cases}$  Знайти  $\frac{d^2y}{dx^2}$ .

6. Застосувати диференціал першого порядку в наближених обчисленнях. Знайти просте наближене значення величини  $\sqrt[3]{1+\alpha^2}$  при малому  $\alpha$  та обчислити її наближене значення за малого фіксованого  $\alpha = 0,03$ .

7. Провести загальне дослідження функції та побудувати її графік. а)  $y = x^2 \ln x$ ; б)  $y = \frac{x^3}{x^2+1}$ .

8. Розв'язати задачу на відшукування найбільших чи найменших значень змінної величини. Серед усіх прямокутників, що мають площу  $S$ , знайти той, периметр якого найбільший.

9. Застосувати формулу Тейлора. Розкласти за степенями  $x-1$  функцію  $y = \sqrt{x}$  до члена  $(x-1)^2$  та написати залишковий член.

10. Знайти граничне значення функції за правилом Лопіталя.  $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 2^{-x}$ .

# Варіант №21

1. Розв'язати завдання з теми „Границя послідовності”.

(а) Представити послідовність  $\{x_n\} = \left\{ \frac{n^3}{n^3 - 1} \right\}$  у вигляді суми сталої величини (рівної границі) та деякої нескінченно малої послідовності.

(б) Навести приклад не монотонної необмеженої послідовності.

2. Знайти границю функції, не користуючись правилом Лопіталя.

(а)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^7 - x^6 + 5}{x - 3x^7};$

(в)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 5x - 1}{x \operatorname{tg} 2x};$

(б)  $\lim_{x \rightarrow \infty} x (\sqrt{x^2 + 1} - x);$

(г)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x + 5}{x + 8} \right)^{2x+3}.$

3. Задано функцію  $y = f(x)$ . Знайти точки розриву функції, якщо вони існують. а)  $y = e^{\frac{3}{x+1}}$ ; б)  $y =$

$$\begin{cases} -x + 2, \text{ якщо } -\infty < x < -1; \\ 4 - x^2, \text{ якщо } -1 \leq x \leq 1; \\ x - 3, \text{ якщо } 1 < x < +\infty. \end{cases}$$

4. Знайти похідну  $\frac{dy}{dx}$ .

(а)  $y = \operatorname{tg}^3 \frac{2}{x};$

(д)  $y = x 3^{x \cos^3 x};$

(б)  $y = \arccos \sqrt{1 - x^2};$

(е)  $y = x^{\arctg^3 5x};$

(в)  $y = 5^{\sin^2 x};$

(ж)  $x = \arctg(3t - 1), y = \arctg(2t - 1);$

(г)  $y = \ln \left( x^2 - \frac{1}{x} \right);$

(и)  $2^{y-3} = x^2.$

5.  $x^4 - xy + y^4 = 1$ . Знайти  $\frac{d^2y}{dx^2}$ .

6. Застосувати диференціал першого порядку в наближених обчисленнях. Користуючись правилами наближеного обчислення знайти числове значення виразу  $\sqrt[3]{67}$ .

7. Провести загальне дослідження функції та побудувати її графік. а)  $y = \frac{2}{x^2 + x + 1}$ ; б)  $y = x^2 e^{-x^2}$ .

8. Розв'язати задачу на відшукування найбільших чи найменших значень змінної величини. Розкласти число 9 на два співмножники так, щоб сума їх квадратів була найменшою.

9. Застосувати формулу Тейлора. Скласти формулу Маклорена для функції  $y = \sqrt[3]{x+1}$  при  $n = 3$ .

10. Знайти граничне значення функції за правилом Лопіталя.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4}{4^x}$ .

# Варіант №22

1. Розв'язати завдання з теми „Границя послідовності”.

(а) Довести, використовуючи визначення, що  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-n}{1+3n} = -\frac{1}{3}$ .

(б) Навести приклади послідовностей таких, що  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  та  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n$  не існує, а  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - y_n)$  існує.

2. Знайти границю функції, не користуючись правилом Лопіталя.

(а)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 - 8x + 1}{x^3 - 1}$ ;

(в)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x}$ ;

(б)  $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{2 - \sqrt{8+x}}{4+x}$ ;

(г)  $\lim_{x \rightarrow 0} (1+3x)^{\frac{2x+1}{3x}}$ .

3. Задано функцію  $y = f(x)$ . Знайти точки розриву функції, якщо вони існують. а)  $y = 3^{\frac{1}{4+x}}$ ; б)  $y =$

$$\begin{cases} \cos x, & \text{якщо } -\infty < x \leq 0; \\ x^2 + 1, & \text{якщо } 0 < x < 1; \\ x, & \text{якщо } 1 \leq x < +\infty. \end{cases}$$

4. Знайти похідну  $\frac{dy}{dx}$ .

(а)  $y = \frac{a+b(1-x)}{c+d(1-2x)}$ ;

(е)  $y = \frac{(x-2)^9}{\sqrt{(x-1)^5(x-3)^{11}}}$ ;

(б)  $y = \ln(1-2x) \lg(2x+1)$ ;

(в)  $y = \operatorname{tg} x - \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 x + \frac{1}{5} \operatorname{tg}^5 x$ ;

(ж)  $x = e^{-t}, y = e^{2t}$ ;

(г)  $y = \sqrt{xe^x + x^2}$ ;

(и)  $\operatorname{arctg} \frac{y}{x} = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2)$ .

(д)  $y = \frac{4}{3} \sqrt[4]{\frac{x-1}{x+2}}$ ;

5.  $\begin{cases} x = \arcsin t; \\ y = \sqrt{1-t^2}. \end{cases}$  Знайти  $\frac{d^2y}{dx^2}$ .

6. Застосувати диференціал першого порядку в наближених обчисленнях. Користуючись правилами наближеного обчислення знайти числове значення виразу  $\sqrt[5]{36}$ .

7. Провести загальне дослідження функції та побудувати її графік. а)  $y = \frac{1}{1-x^2}$ ; б)  $y = x^3 e^{-3x}$ .

8. Розв'язати задачу на відшукання найбільших чи найменших значень змінної величини. З круглої колоди радіусу  $R = 2\sqrt{3}$  потрібно вирізати балку прямокутного перетину з основою  $b$  та висотою  $h$ . Міцність балки пропорційна  $bh^2$ . За яких значень  $b$  та  $h$  міцність балки буде найбільшою.

9. Застосувати формулу Тейлора. Знайти три перших члени розкладу функції  $y = \sqrt[3]{1+x}$  за степенями  $x$  та записати залишковий член.

10. Знайти граничне значення функції за правилом Лопіталя.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x - x}{x^3}$ .

# Варіант №23

1. Розв'язати завдання з теми „Границя послідовності”.

(а) Представити послідовність  $\{x_n\} = \left\{ \frac{n^2}{2n^2 + 1} \right\}$  у вигляді сталого числа (її границі) та нескінченно малої послідовності.

(б) Чи буде нескінченно великою необмежена послідовність  $\{x_n\} = \left\{ \left( 2 + \sin \frac{n\pi}{2} \right) \lg n \right\}$ ?

2. Знайти границю функції, не користуючись правилом Лопіталя.

(а)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4 + 5x^2 - 3x^5}{8 - 6x - x^5}$ ;

(в)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 3x - \cos 5x}{x^2}$ ;

(б)  $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{1 - \sqrt{x-4}}{2 - \sqrt{2x-6}}$ ;

(г)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - 3) [\ln(x - 2) - \ln(x + 1)]$ .

3. Задано функцію  $y = f(x)$ . Знайти точки розриву функції, якщо вони існують. а)  $y = 11^{\frac{1}{4+x}}$ ; б)  $y = \begin{cases} -2x, & \text{якщо } -\infty < x \leq 0; \\ x^2 + 1, & \text{якщо } 0 < x \leq 1; \\ 2, & \text{якщо } 1 < x < +\infty. \end{cases}$

4. Знайти похідну  $\frac{dy}{dx}$ .

(а)  $y = \operatorname{tg} 3x - 3x$ ;

(д)  $y = (1 + \operatorname{tg}^2 x) e^{\operatorname{arctg}^2 x}$ ;

(б)  $y = \operatorname{arccos} \sqrt{\frac{2}{x}}$ ;

(е)  $y = (\operatorname{arcsin} 3x)^{x^2}$ ;

(в)  $y = e^{x^3+1}$ ;

(ж)  $x = \cos(t^2 - 1)$ ,  $y = \sin(t^2 + 1)$ ;

(г)  $y = \frac{x^3}{6^x}$ ;

(и)  $2^{x+y} = e^{x-y}$ .

5.  $x^2 + 5xy + y^2 - 2x + y - 6 = 0$ . Знайти  $\frac{d^2y}{dx^2}$ .

6. Застосувати диференціал першого порядку в наближених обчисленнях. Знайти наближене значення функції  $y = \sqrt{1+x}$  при  $x = 0,02$ .

7. Провести загальне дослідження функції та побудувати її графік. а)  $y = \ln(x^2 + 4x + 5)$ ; б)  $y = 2 - \sqrt[3]{x-1}$ .

8. Розв'язати задачу на відшукання найбільших чи найменших значень змінної величини. Перетин тунелю має форму прямокутника, завершеного півколом. Периметр перетину рівний 18 м. За якого радіуса півкола площа перетину буде найбільшою?

9. Застосувати формулу Тейлора. Знайти три перших члени розкладу функції  $y = \frac{x}{x-1}$  за степенями  $x-2$  та записати залишковий член.

10. Знайти граничне значення функції за правилом Лопіталя.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - 3 \ln x}{x + 2}$ .

# Варіант №24

1. Розв'язати завдання з теми „Границя послідовності”.

(а) Зобразити графічно зміну послідовностей  $\{x_n\} = \left\{\frac{1}{2^n}\right\}$ ,  $\{y_n\} = \left\{-\frac{1}{2^n}\right\}$ ,  $\{z_n\} = \left\{\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}$ .

Починаючи з якого  $n$  модуль кожної з послідовностей зробиться і буде залишатися меншим 0,001, менше за задане  $\varepsilon > 0$ ?

(б) Побудувати приклади нескінченно малих послідовностей таких, що  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = -\infty$ .

2. Знайти границю функції, не користуючись правилом Лопіталю.

(а)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 + x^3 - 6}{2x^4 - x + 2}$ ;

(в)  $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\cos \frac{x}{2}}{x - \pi}$ ;

(б)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{1 - 3x} - 1}$ ;

(г)  $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 2x)^{\frac{1}{x}}$ .

3. Задано функцію  $y = f(x)$ . Знайти точки розриву функції, якщо вони існують. а)  $y = 2^{\frac{1}{x-7}}$ ; б)  $y = \begin{cases} x^2 - 1, & \text{якщо } |x| > 1; \\ 1 - x, & \text{якщо } |x| \leq 1. \end{cases}$

4. Знайти похідну  $\frac{dy}{dx}$ .

(а)  $y = \frac{ax^6 + b}{\sqrt{a^2 + x^2}}$ ;

(д)  $y = \ln(x + \sqrt{a^2 + x^2})$ ;

(б)  $y = (x^2 + 2) \operatorname{ctg}(1 - x)$ ;

(е)  $y = x^x$ ;

(в)  $y = \frac{\log_2(1 + 10x)}{\log_3(1 - 10x)}$ ;

(ж)  $x = a \cos^3 t, y = b \sin^3 t$ ;

(г)  $y = \arcsin(x^2 - 1)$ ;

(и)  $\ln x + e^{-\frac{y}{x}} = C$ .

5.  $1 + xy - \ln(e^{xy} + e^{-xy}) = 0$ . Знайти  $\frac{d^2y}{dx^2}$ .

6. Застосувати диференціал першого порядку в наближених обчисленнях. Тіло масою  $m = 20$  кг рухається зі швидкістю  $v = 10,02$  м/с. Обчислити наближено кінетичну енергію тіла.

7. Провести загальне дослідження функції та побудувати її графік. а)  $y = x^3 e^{-x}$ ; б)  $y = x - \frac{8}{x^4}$ .

8. Розв'язати задачу на відшукання найбільших чи найменших значень змінної величини. З квадратного листа картону зі стороною  $A$  вирізаються з кутів однакові квадрати, а з частини, що залишилася клеїться прямокутна коробка. Якою повинна бути сторона відрізаного квадрата, щоб об'єм коробки був найбільшим?

9. Застосувати формулу Тейлора. Знайти три перших члени розкладу функції  $y = e^{x^2 - x}$  за степенями  $x$  та записати залишковий член.

10. Знайти граничне значення функції за правилом Лопіталю.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{3^x}$ .



# Варіант №25

1. Розв'язати завдання з теми „Границя послідовності”.

(а) Чи існує  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n \sin \frac{n\pi}{2}}{n+1}$ ? Зобразити графічно зміну послідовності.

(б) Побудувати збіжну послідовність, яка приймає значення, що рівні її границі.

2. Знайти границю функції, не користуючись правилом Лопіталя.

(а)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 1}{2x^3 + 1}$ ;

(в)  $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \left(1 - \cos \frac{1}{x}\right)$ ;

(б)  $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{\sqrt{2+x} - 3}{x - 7}$ ;

(г)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-1}{2x+1}\right)^x$ .

3. Задано функцію  $y = f(x)$ . Знайти точки розриву функції, якщо вони існують. а)  $y = \frac{4}{x^2 - 9}$ ; б)  $y =$

$$\begin{cases} 5x, \text{ якщо } -\infty < x < 0; \\ x^2 + 1, \text{ якщо } 0 \leq x \leq 1; \\ x - 1, \text{ якщо } 1 < x < +\infty. \end{cases}$$

4. Знайти похідну  $\frac{dy}{dx}$ .

(а)  $y = x\sqrt{4x - x^4}$ ;

(д)  $y = \frac{\sqrt{1 + \cos^2 x}}{1 + \sin 3x}$ ;

(б)  $y = \ln(\sin x + \cos x)$ ;

(е)  $y = (\arctg x)^{\sqrt{\sin x}}$ ;

(в)  $y = \frac{x+2}{\sin(x+2)}$ ;

(ж)  $x = \frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} + t, y = \frac{t^2}{2} + \frac{1}{t}$ ;

(г)  $y = \arctg \sqrt{\sin x}$ ;

(и)  $x \ln(1 + y^2) + y \ln(1 + x^2) = 0$ .

5.  $y = x + \ln y$ . Знайти  $\frac{d^2y}{dx^2}$ .

6. Застосувати диференціал першого порядку в наближених обчисленнях. Знайти просте наближене значення величини  $\frac{1}{(1 + \alpha)^3}$  при малому  $\alpha$  та обчислити її наближене значення за малого фіксованого  $\alpha = 0,02$ .

7. Провести загальне дослідження функції та побудувати її графік. а)  $y = \frac{x}{2} - \arctg x$ ; б)  $y = \frac{4x^3 + 5}{x}$ .

8. Розв'язати задачу на відшукування найбільших чи найменших значень змінної величини. Якими повинні бути розміри циліндричного бака об'ємом  $V$ , щоб на його виготовлення пішло якнайменше матеріалів?

9. Застосувати формулу Тейлора. Написати формулу Тейлора для функції  $y = \ln(1 + x^2)$  при  $x_0 = 1$  та  $n = 2$ .

10. Знайти граничне значення функції за правилом Лопіталя.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^2}$ .

# Варіант №26

1. Розв'язати завдання з теми „Границя послідовності”.

(а) Користуючись означенням, знайти  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n + (-1)^{n+1}}{n}$ .

(б) Чи буде монотонно зростаючою послідовність  $\{x_n\} = \frac{(n+1)!}{2^n}$ ?

2. Знайти границю функції, не користуючись правилом Лопіталя.

(а)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^5 - 3x^2 + 9}{2x^5 + 2x^2 + 5}$ ;

(в)  $\lim_{x \rightarrow 0} 5x \operatorname{ctg} 3x$ ;

(б)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{\sqrt{2x}-2}$ ;

(г)  $\lim_{x \rightarrow 3} (3x-8)^{\frac{2}{x-3}}$ .

3. Задано функцію  $y = f(x)$ . Знайти точки розриву функції, якщо вони існують. а)  $y = \frac{3}{4-x^2}$ ; б)  $y =$

$$\begin{cases} 5, & \text{якщо } -\infty < x \leq -1; \\ x+1, & \text{якщо } -1 < x \leq 1; \\ -x^2, & \text{якщо } 1 < x < +\infty. \end{cases}$$

4. Знайти похідну  $\frac{dy}{dx}$ .

(а)  $y = 3x^{\frac{2}{3}} - 2x^{\frac{5}{2}} - x^{-3}$ ;

(д)  $y = \log_3 (\operatorname{tg} 3x)$ ;

(б)  $y = \frac{x^5}{e^x}$ ;

(е)  $y = (\operatorname{arctg} x)^{\operatorname{arctg} x}$ ;

(в)  $y = \frac{3 \operatorname{ctg} x}{\ln x}$ ;

(ж)  $x = a \cos^2 t, y = b \sin^2 t$ ;

(г)  $y = (3 - 2 \sin x)^5$ ;

(и)  $x^y = y^x$ .

5.  $x^2 + 2xy + y^2 - 4x - 2y - 2 = 0$ . Знайти  $\frac{d^2y}{dx^2}$ .

6. Застосувати диференціал першого порядку в наближених обчисленнях. Знайти наближене значення функції  $y = \sqrt[3]{9x^2 + x}$  при  $x = -0,88$ .

7. Провести загальне дослідження функції та побудувати її графік. а)  $y = \frac{x}{1+x^2}$ ; б)  $y = \frac{x}{2} - \operatorname{arctg} x$ .

8. Розв'язати задачу на відшукання найбільших чи найменших значень змінної величини. Ґратами довжиною 120 м треба обгородити прилеглу до будинку прямокутну площадку найбільшої площі. Визначити розмір найбільшої площадки.

9. Застосувати формулу Тейлора. Розкласти за степенями  $x$  функцію  $y = e^x$  до члена з  $x^4$  та записати залишковий член.

10. Знайти граничне значення функції за правилом Лопіталя.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^x}{x^2}$ .

# Варіант №27

1. Розв'язати завдання з теми „Границя послідовності”.

(а) Навести приклад не монотонної послідовності, що має границю.

(б) Довести обмеженість послідовності  $\{x_n\} = 2^{(-1)^n}$ .

2. Знайти границю функції, не користуючись правилом Лопіталя.

(а)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 + x^2 - 3x^3}{1 - 3x + 6x^3}$ ;

(в)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x \sin x}$ ;

(б)  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{\sqrt{x} - 2}$ ;

(г)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x + 3}{2x + 1} \right)^{x+1}$ .

3. Задано функцію  $y = f(x)$ . Знайти точки розриву функції, якщо вони існують. а)  $y = \frac{4x}{1 - x^2}$ ; б)  $y =$

$$\begin{cases} -x^2 + 1, & \text{якщо } -\infty < x < 0; \\ -2x + 1, & \text{якщо } 0 \leq x < 1; \\ x^3, & \text{якщо } 1 \leq x < +\infty. \end{cases}$$

4. Знайти похідну  $\frac{dy}{dx}$ .

(а)  $y = \frac{a}{\sqrt[3]{x^2}} - \frac{b}{x\sqrt[3]{x}}$ ;

(д)  $y = \sqrt[3]{7 + \sqrt{x}}$ ;

(б)  $y = \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$ ;

(е)  $y = x^{x^2}$ ;

(в)  $y = (x^2 - 1) \ln(1 - x^2)$ ;

(ж)  $x = a(\sin t - t \cos t)$ ,  $y = a(\cos t + t \sin t)$ ;

(г)  $y = \sqrt{\frac{3 \sin x - 2 \cos x}{5}}$ ;

(и)  $\ln y + \frac{x}{y} = 0$ .

5.  $y^2 = 2px$ . Знайти  $\frac{d^2y}{dx^2}$ .

6. Застосувати диференціал першого порядку в наближених обчисленнях. Знайти наближене значення функції  $y = \sqrt{\frac{x^2 - 4}{x + 9}}$  при  $x = 8,225$ .

7. Провести загальне дослідження функції та побудувати її графік. а)  $y = \frac{x^3 + 16}{x}$ ; б)  $y = 3x - x^3$ .

8. Розв'язати задачу на відшукання найбільших чи найменших значень змінної величини. Перетин тунелю має форму трапеції, бокові сторони та основа якої рівні по 10 м. Визначити її більшу основу так, щоб площа перетину була найбільшою.

9. Застосувати формулу Тейлора. Записати формулу Тейлора для функції  $y = \ln x$  при  $x_0 = 2$  та  $n = 3$ .

10. Знайти граничне значення функції за правилом Лопіталя.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x}{x}$ .

# Варіант №28

- Розв'язати завдання з теми „Границя послідовності”.
  - Подати приклад монотонної обмеженої послідовності.
  - Використовуючи означення, показати, що  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ 1 + \frac{(-1)^n}{n} \right] = 1$ .
- Знайти границю функції, не користуючись правилом Лопіталя.
  - $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(1-x)(1+3x)^2}{x^3 - 4x + 1}$ ;
  - $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{\sqrt{x+1} - 1}$ ;
  - $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 3x + 2}$ ;
  - $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+1}{x-2} \right)^{3x^2}$ .
- Задано функцію  $y = f(x)$ . Знайти точки розриву функції, якщо вони існують. а)  $y = 4^{\frac{1}{3-x}}$ ; б)  $y = \begin{cases} -\frac{1}{2}x, & \text{якщо } -\infty < x \leq 0; \\ 2x^2 - 1, & \text{якщо } 0 < x < 1; \\ 8x - 7, & \text{якщо } 1 \leq x < +\infty. \end{cases}$
- Знайти похідну  $\frac{dy}{dx}$ .
  - $y = \sin^3 2x \left( \cos^2 2x + \frac{2}{3} \right)$ ;
  - $y = \arctg \sqrt{x}$ ;
  - $y = 4^{1-\ln x}$ ;
  - $y = \ln \frac{(x-2)^3}{x+2}$ ;
  - $y = \arctg(x^3)$ ;
  - $y = (\sqrt{a^2 - x^2})^x$ ;
  - $x = t^2 \cos(1+t^2), y = t \sin t$ ;
  - $x^3 = 2^{\sin x + y}$ .
- $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ . Знайти  $\frac{d^2y}{dx^2}$ .
- Застосувати диференціал першого порядку в наближених обчисленнях. Знайти наближене значення функції  $y = \frac{4x}{x+3}$  при  $x = 3,06$ .
- Провести загальне дослідження функції та побудувати її графік. а)  $y = \frac{3 \ln x}{x}$ ; б)  $y = x^4 - 2x^2 + 2$ .
- Розв'язати задачу на відшукання найбільших чи найменших значень змінної величини. Розкласти 8 на два доданки, щоб сума їх кубів була найменшою.
- Застосувати формулу Тейлора. Розкласти за степенями  $x$  функцію  $y = \sin 3x$  до члена з  $x^5$ .
- Знайти граничне значення функції за правилом Лопіталя.  $\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ (x < 2)}} \frac{\ln(3-x)}{4-x^2}$ .

# Варіант №29

1. Розв'язати завдання з теми „Границя послідовності”.

(а) Навести приклад послідовності обмеженої, але такої, що не має границі.

(б) Користуючись означенням, знайти  $\lim_{n \rightarrow \infty} 2^{-n} \cos n\pi$ . Зобразити графічно зміну послідовності  $\{x_n\} = \{2^{-n} \cos n\pi\}$ .

2. Знайти границю функції, не користуючись правилом Лопіталя.

(а)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(3x - 2)(1 - x)(2 + x)}{2x^3 + x^2 - 1}$ ;

(в)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{\sin(x + 1)}$ ;

(б)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{9 + x} - \sqrt{9 - x}}{x^2 + 6x}$ ;

(г)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x - 3}{x}\right)^{3x-1}$ .

3. Задано функцію  $y = f(x)$ . Знайти точки розриву функції, якщо вони існують. а)  $y = 15^{\frac{1}{8-x}}$ ; б)  $y =$

$$\begin{cases} -x^2, & \text{якщо } -\infty < x \leq 0; \\ \operatorname{tg} x, & \text{якщо } -1 < x \leq \frac{\pi}{4}; \\ 2, & \text{якщо } \frac{\pi}{4} < x < +\infty. \end{cases}$$

4. Знайти похідну  $\frac{dy}{dx}$ .

(а)  $y = \frac{2x + 3}{x^2 - 5x + 5}$ ;

(д)  $y = -\frac{1}{6(1 - 3\cos x)^2}$ ;

(б)  $y = \frac{(1 + x^2) \operatorname{arctg} x - x}{2}$ ;

(е)  $y = x^{\sqrt{x}}$ ;

(в)  $y = (x^2 - 2x + 2)e^x$ ;

(ж)  $x = \frac{1}{t + 1}, y = \left(\frac{t}{t + 1}\right)^2$ ;

(г)  $y = (3 - 2\sin x)^5$ ;

(и)  $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[2]{y^3} = \sqrt[3]{a^2}$ .

5.  $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$ . Знайти  $\frac{d^2y}{dx^2}$ .

6. Застосувати диференціал першого порядку в наближених обчисленнях. Знайти просте наближене значення величини  $\frac{1}{1 + \alpha^2}$  при малому  $\alpha$  та обчислити її наближене значення за малого фіксованого  $\alpha = 0,03$ .

7. Провести загальне дослідження функції та побудувати її графік. а)  $y = \frac{x^2}{2(x - 1)}$ ; б)  $y = \ln(x^2 + 1)$ .

8. Розв'язати задачу на відшукання найбільших чи найменших значень змінної величини. Знайти відношення радіусу основи до висоти конуса найменшої поверхні з об'ємом  $V$ .

9. Застосувати формулу Тейлора. Розкласти за степенями  $x - 1$  функцію  $y = \sqrt{x}$  до члена з  $(x - 1)^2$  та записати залишковий член.

10. Знайти граничне значення функції за правилом Лопіталя.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x - \sin x}$ .

# Варіант №30

1. Розв'язати завдання з теми „Границя послідовності”.

(а) Користуючись означенням, довести, що  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n-1}{5n+1} = \frac{3}{5}$ . Починаючи з якого  $n$  величина  $\left| \frac{3n-1}{5n+1} - \frac{3}{5} \right|$  не перевищує 0,0001?

(б) Довести, що послідовність  $\{x_n\} = \left\{ \frac{a^n}{n!} \right\}$  – монотонно спадна для  $n > n_0$ , де  $n_0$  – достатньо велике число за довільного  $a > 0$ .

2. Знайти границю функції, не користуючись правилом Лопіталю.

(а)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^4 - 3x^2 + 1}{3x^4 - 5x + 2}$ ;

(в)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos^3 x}{x^2}$ ;

(б)  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2x+1} - 3}{\sqrt{x-2} - \sqrt{2}}$ ;

(г)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2+1}{x^2-1} \right)^{x^2}$ .

3. Задано функцію  $y = f(x)$ . Знайти точки розриву функції, якщо вони існують. а)  $y = 3^{\frac{1}{x+4}}$ ; б)  $y = \begin{cases} x+3, & \text{якщо } -\infty < x \leq -3; \\ -x^2+4, & \text{якщо } -3 < x < 2; \\ x-2, & \text{якщо } 2 \leq x < +\infty. \end{cases}$

4. Знайти похідну  $\frac{dy}{dx}$ .

(а)  $y = x^2 \sqrt[3]{x^2}$ ;

(д)  $y = \operatorname{arccotg} \frac{1-x}{1+x}$ ;

(б)  $y = \operatorname{arctg}(\log_2 x)$ ;

(е)  $y = (1 + \operatorname{tg} x)^{\operatorname{ctg} x}$ ;

(в)  $y = \frac{1}{x} + 2 \ln x - \frac{\lg x}{x}$ ;

(ж)  $x = \sqrt{t^2-1}, y = \frac{t-1}{\sqrt{t^2+1}}$ ;

(г)  $y = (1 + \sqrt{\sin x})^2$ ;

(и)  $y^2 \cos^2(x+y) = a$ .

5.  $\begin{cases} x = \arcsin(1-t^2); \\ y = \arccos(1-2t^2). \end{cases}$  Знайти  $\frac{d^2y}{dx^2}$ .

6. Застосувати диференціал першого порядку в наближених обчисленнях. Дано рівняння руху тіла  $S = St^3 - t^2$ . Знайти наближено довжину шляху, що пройде тіло на момент  $t = 2,08$ с від початку відліку часу.

7. Провести загальне дослідження функції та побудувати її графік. а)  $y = x - \ln x$ ; б)  $y = \frac{x}{x^2+1}$ .

8. Розв'язати задачу на відшукання найбільших чи найменших значень змінної величини. Знайти висоту циліндра найбільшого об'єму, який можна вписати до кулі радіусом  $R$ .

9. Застосувати формулу Тейлора. Знайти три перших члени розкладу функції  $y = x^2 e^x$  за степенями  $x$  та записати залишковий член.

10. Знайти граничне значення функції за правилом Лопіталю.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\ln \sin x}$ .