

1. Знайти всі комплексні корені рівняння

$$z^3 + 1 + i\sqrt{3} = 0.$$

2. Обчислити визначник четвертого порядку

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 3 & 0 \\ 4 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

3. Знайти ранг матриці $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & -2 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 3 & 2 & 0 \\ 3 & 8 & 1 & -10 & -5 & 3 \end{pmatrix}$.

4. Розв'язати матричне рівняння

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 8 & -15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 12 \\ -3 & 8 \end{pmatrix}.$$

5. Розв'язати систему лінійних рівнянь:

- методом Гауса;
- за правилом Крамера;
- матричним методом;

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 2x_3 = -3; \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -8; \\ 5x_1 + 2x_2 - x_3 = -7. \end{cases}$$

6. Розкласти вектор \vec{a} за базисом $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$. $\vec{a} = \{4, 12, 15\}$, $\vec{e}_1 = \{3, 0, 2\}$, $\vec{e}_2 = \{-1, 5, 2\}$, $\vec{e}_3 = \{2, 3, -3\}$.

7. Знайти фундаментальну систему розв'язків однорідної системи рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 5x_3 + 9x_4 = 0; \\ 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 7x_4 = 0; \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0. \end{cases}$$

8. З'ясувати, за яких значень параметрів λ та μ система не-сумісна; має єдиний розв'язок; має нескінченно багато розв'язків

$$\begin{cases} x + y = 0; \\ \lambda x + y = 0; \\ x + \mu y = 1. \end{cases}$$

9. Знайти власні значення і власні вектори лінійного оператора, заданого матрицею

$$B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

10. Обчислити довжину діагоналей паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a} = 5\vec{p} + 2\vec{q}$, $\vec{b} = \vec{p} - 3\vec{q}$, якщо $|\vec{p}| = 2\sqrt{2}$, $|\vec{q}| = 3$ та $\widehat{(\vec{p}, \vec{q})} = \frac{\pi}{4}$.

11. Визначити координати точки, симетричної точці $A(-6;4)$ відносно прямої $4x - 5y + 3 = 0$.

12. Скласти рівняння площини, що проходить через пряму перетину площин $5x - 2y - z - 3 = 0$ та $x + 3y - 2z + 5 = 0$ паралельно вектору $\vec{e} = \{1; 4; -5\}$.

13. Дано координати вершин чотиригранника $ABCD$. Засобами векторної алгебри знайти:

- довжину ребра AB ;
- рівняння прямої AB ;
- рівняння площини ABC ;
- кут нахилу ребра AD до площини ABC ;
- площу грані ABC ;
- об'єм тетраедра;
- рівняння висоти DE , опущеної з вершини D на грань ABC ;
- довжину висоти DE ;
- проєкцію E вершини D на площину ABC ;
- точку D' , симетричну точці D відносно грані ABC ;
- площину, що проходить через ребро AD перпендикулярно до площини ABC .

$$A(-1; -1; -3); B(7; 5; 0); C(-5; -4; -2); D(0; 6; -3).$$

14. З фокуса параболи $y^2 = 8x$ як з центра, описано коло, що проходить через найближчу до центра вершину гіперболи $x^2 - 2y^2 = 16$. Написати рівняння цього кола. Зробити креслення.

15. Побудувати криву, задану рівнянням в полярних координатах. $r = 3 \cos\left(\frac{\pi}{6} + \varphi\right)$.

16. Використовуючи теорію квадратичних форм, звести рівняння кривої другого порядку до канонічного вигляду. Зобразити стару та нову системи координат та накреслити криву $4xy + 4x - 4y + 4 = 0$.

17. Дослідити і побудувати поверхні другого порядку, що задані рівняннями $x^2 + 2x + y^2 - 6y = 0$; $x^2 - y^2 + z^2 + 20z = 0$.

ВАРІАНТ №2

1. Знайти всі комплексні корені рівняння

$$z^3 + 3 + i\sqrt{3} = 0.$$

2. Обчислити визначник четвертого порядку

$$\begin{vmatrix} -1 & 5 & -1 & 4 \\ -3 & 6 & 2 & 3 \\ -1 & -4 & -5 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \end{vmatrix}.$$

3. Знайти ранг матриці $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & 0 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & 2 & -1 & 3 & 4 \\ 8 & 8 & 5 & -2 & 8 & 5 \\ -2 & 1 & 1 & -1 & 1 & 7 \end{pmatrix}$.

4. Розв'язати матричне рівняння

$$\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 5 & -7 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 3 & 10 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

5. Розв'язати систему лінійних рівнянь:

- методом Гауса;
- за правилом Крамера;
- матричним методом;

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 4; \\ 5x_2 + 3x_3 = 12; \\ 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 15. \end{cases}$$

6. Розкласти вектор \vec{a} за базисом $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$. $\vec{a} = \{7, -3, 2\}$, $\vec{e}_1 = \{-1, 2, 5\}$, $\vec{e}_2 = \{1, 2, 3\}$, $\vec{e}_3 = \{-3, 1, 0\}$.

7. Знайти фундаментальну систему розв'язків однорідної системи рівнянь

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 - x_4 = 0; \\ 7x_1 + 5x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 0; \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

8. З'ясувати, за яких значень параметрів λ та μ система не-сумісна; має єдиний розв'язок; має нескінченно багато розв'язків

$$\begin{cases} \mu x + \lambda y - \mu z = 1; \\ y + z = 0; \\ x + z = \lambda. \end{cases}$$

9. Знайти власні значення і власні вектори лінійного оператора, заданого матрицею

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

10. Знайти вектор \vec{a} такий, що $(\vec{a}, \vec{i}) = (\vec{a}, \vec{j}) = (\vec{a}, \vec{k})$ а $|\vec{a}| = 100$.

11. Дано дві протилежні вершини квадрата $A(2;1)$ та $C(4;5)$. Знайти дві інші вершини.

12. Скласти рівняння площини, що проходить через дві точки $M_1(1; -1; -2)$ та $M_2(3; 1; 1)$ перпендикулярно до площини $x - 2y - 3z - 6 = 0$.

13. Дано координати вершин чотиригранника $ABCD$. Засобами векторної алгебри знайти:

- довжину ребра AB ;
- рівняння прямої AB ;
- рівняння площини ABC ;
- кут нахилу ребра AD до площини ABC ;
- площу грані ABC ;
- об'єм тетраедра;
- рівняння висоти DE , опущеної з вершини D на грань ABC ;
- довжину висоти DE ;
- проєкцію E вершини D на площину ABC ;
- точку D' , симетричну точці D відносно грані ABC ;
- площину, що проходить через ребро AD перпендикулярно до площини ABC .

$$A(-2;2;-4); B(1;10;2); C(-1;-2;-7); D(-2;3;3).$$

14. Дано еліпс $x^2 + 2y^2 = 8$ та параболу $y = 8x^2 + 1$. Знайти відстань фокуса параболи від фокусів еліпса. Зробити креслення.

15. Побудувати криву, задану рівнянням в полярних координатах. $r = \frac{2}{\sin \varphi}$.

16. Використовуючи теорію квадратичних форм, звести рівняння кривої другого порядку до канонічного вигляду. Зобразити стару та нову системи координат та накреслити криву $x^2 + y^2 - 4xy - 2x + 4y = 1$.

17. Дослідити і побудувати поверхні другого порядку, що задані рівняннями $2x^2 - y^2 + 2z^2 + 8 = 0$; $y^2 = 2x + 4$.

ВАРІАНТ №3

1. Знайти всі комплексні корені рівняння

$$z^3 - 1 - i = 0.$$

2. Обчислити визначник четвертого порядку

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 7 & 2 \\ 4 & -1 & -3 & 4 \\ 1 & 2 & 8 & 1 \\ -2 & 3 & 0 & -3 \end{vmatrix}.$$

3. Знайти ранг матриці $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & -1 & -1 & -2 \\ 6 & 7 & 5 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & -1 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$.

4. Розв'язати матричне рівняння

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 10 & 2 \\ 10 & 7 \end{pmatrix}.$$

5. Розв'язати систему лінійних рівнянь:

- методом Гауса;
- за правилом Крамера;
- матричним методом;

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 2; \\ -x_1 + 3x_2 - 2x_3 = -3; \\ 4x_1 + 2x_2 - x_3 = 2. \end{cases}$$

6. Розкласти вектор \vec{a} за базисом $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$. $\vec{a} = \{0, -1, 4\}$, $e_1 = \{-1, 2, 1\}$, $e_2 = \{1, 3, 1\}$, $e_3 = \{3, -2, 3\}$.

7. Знайти фундаментальну систему розв'язків однорідної системи рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 0; \\ x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 0; \\ 3x_1 - x_3 + 5x_4 = 0. \end{cases}$$

8. З'ясувати, за яких значень параметрів λ та μ система не-сумісна; має єдиний розв'язок; має нескінченно багато

$$\text{розв'язків} \begin{cases} \lambda x + \lambda y + 4z = \mu; \\ y + z = \lambda; \\ x + z = 0. \end{cases}$$

9. Знайти власні значення і власні вектори лінійного оператора, заданого матрицею

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

10. Знайти внутрішній кут $\triangle ABC$ при вершині A , якщо його вершини: $A(-2; 1; 3)$, $B(1; -5; 7)$ і $C(5; -3; -4)$.

11. Дано дві вершини рівностороннього $\triangle ABC$ $A(2; 1)$ та $B(2; 5)$. Визначити координати третьої вершини C .

12. Знайти проєкцію точки $P(3; -4; -6)$ на площину, що проходить через точки $M_1(-6; 1; -5)$, $M_2(7; -2; -1)$ та $M_3(10; -7; 1)$.

13. Дано координати вершин чотиригранника $ABCD$. Засобами векторної алгебри знайти:

- довжину ребра AB ;
- рівняння прямої AB ;
- рівняння площини ABC ;
- кут нахилу ребра AD до площини ABC ;
- площу грані ABC ;
- об'єм тетраедра;
- рівняння висоти DE , опущеної з вершини D на грань ABC ;
- довжину висоти DE ;
- проєкцію E вершини D на площину ABC ;
- точку D' , симетричну точці D відносно грані ABC ;
- площину, що проходить через ребро AD перпендикулярно до площини ABC .

$$A(-2; -6; -2); B(1; 0; 6); C(-1; -9; -6); D(-2; 1; -1).$$

14. Дано гіперболу $x^2 - y^2 = 8$. Знайти співфокусний еліпс, що проходить через точку $A(5; 0)$. Зробити креслення.

15. Побудувати криву, задану рівнянням в полярних координатах. $r = 3\sqrt{\sin 2\varphi}$.

16. Використовуючи теорію квадратичних форм, звести рівняння кривої другого порядку до канонічного вигляду. Зобразити стару та нову системи координат та накреслити криву $2x^2 + 2y^2 + 4xy + 8x + 6y + 1 = 0$.

17. Дослідити і побудувати поверхні другого порядку, що задані рівняннями $z - 1 = 6y^2$; $x^2 + y^2 = 3x - 6y - 2z - z^2 + 5$.

ВАРІАНТ №4

1. Знайти всі комплексні корені рівняння

$$z^3 - 3 + 3i = 0.$$

2. Обчислити визначник четвертого порядку

$$\begin{vmatrix} 3 & 3 & 2 & 6 \\ -1 & 1 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & -3 & 3 \end{vmatrix}.$$

3. Знайти ранг матриці $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 & 0 & 4 \\ 6 & 2 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & -1 & 2 & 1 & 2 & -3 \\ 4 & -4 & 3 & -1 & 2 & -7 \end{pmatrix}$.

4. Розв'язати матричне рівняння

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 7 & -6 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

5. Розв'язати систему лінійних рівнянь:

- методом Гауса;
- за правилом Крамера;
- матричним методом;

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 = -5; \\ -x_1 - 3x_2 + x_3 = -4; \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 4. \end{cases}$$

6. Розкласти вектор \vec{a} за базисом $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$. $\vec{a} = \{-5, -4, 4\}$, $\vec{e}_1 = \{2, -1, 3\}$, $\vec{e}_2 = \{1, -3, 2\}$, $\vec{e}_3 = \{-3, 1, -1\}$.

7. Знайти фундаментальну систему розв'язків однорідної системи рівнянь

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 0; \\ -x_1 + 5x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0; \\ 4x_1 + 7x_2 + 12x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$$

8. З'ясувати, за яких значень параметрів λ та μ система не-сумісна; має єдиний розв'язок; має нескінченно багато розв'язків

$$\begin{cases} x + \lambda y = 0; \\ \mu x - y = 1; \\ 2x + y = 0. \end{cases}$$

9. Знайти власні значення і власні вектори лінійного оператора, заданого матрицею

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

10. Дано два вектори $\vec{a} = \{3; -1; 5\}$ та $\vec{b} = \{1; 2; -3\}$. Знайти вектор \vec{x} за умови, що він перпендикулярний до осі Oz та задовольняє умовам: $(\vec{x}, \vec{a}) = 9$, $(\vec{x}, \vec{b}) = -4$.

11. Дано рівняння двох сторін прямокутника $3x - 2y - 5 = 0$, $2x + 3y + 7 = 0$ а одна з його вершин $A(-2; 1)$. Написати рівняння інших його сторін та обчислити площу цього прямокутника.

12. Скласти рівняння площини, що проходить через пряму $x = 3t + 1$, $y = 2t + 3$, $z = -t - 2$ паралельно прямій $\frac{x}{3} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z+5}{4}$.

13. Дано координати вершин чотиригранника $ABCD$ Засобами векторної алгебри знайти:

- довжину ребра AB ;
- рівняння прямої AB ;
- рівняння площини ABC ;
- кут нахилу ребра AD до площини ABC ;
- площу грані ABC ;
- об'єм тетраедра;
- рівняння висоти DE , опущеної з вершини D на грань ABC ;
- довжину висоти DE ;
- проєкцію E вершини D на площину ABC ;
- точку D' , симетричну точці D відносно грані ABC ;
- площину, що проходить через ребро AD перпендикулярно до площини ABC .

$$A(0; -2; -3); B(8; 1; 3); C(-4; -1; -6); D(1; -2; 4).$$

14. Гіпербола, симетрична відносно осей координат, має ексцентриситет $\varepsilon = \sqrt{2}$ та проходить через точку $A(1, \sqrt{3})$. Знайти відстань вершин цієї гіперболи від фокуса параболу $y^2 = 2x$. Зробити креслення.

15. Побудувати криву, задану рівнянням в полярних координатах. $r = 2(1 + \cos \varphi)$.

16. Використовуючи теорію квадратичних форм, звести рівняння кривої другого порядку до канонічного вигляду. Зобразити стару та нову системи координат та накреслити криву $x^2 + y^2 - 4xy + 4x - 2y + 1 = 0$.

17. Дослідити і побудувати поверхні другого порядку, що задані рівняннями $x^2 + z^2 - 2y = 0$; $x^2 - 4x + y = 5$.

ВАРІАНТ №5

1. Знайти всі комплексні корені рівняння

$$z^3 - \sqrt{6} - i\sqrt{2} = 0.$$

2. Обчислити визначник четвертого порядку

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 & 2 \\ -1 & -5 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -2 & 1 \\ -5 & -3 & -1 & -3 \end{vmatrix}.$$

3. Знайти ранг матриці $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 & 3 \\ -2 & 3 & 3 & 3 & 2 & -2 \\ -1 & 4 & 1 & 4 & 6 & 1 \\ -3 & 2 & 5 & 2 & -2 & -5 \end{pmatrix}$.

4. Розв'язати матричне рівняння

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 7 & -6 \\ 4 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

5. Розв'язати систему лінійних рівнянь:

- методом Гауса;
- за правилом Крамера;
- матричним методом;

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 - 3x_3 = 7; \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = -3; \\ 5x_1 + 3x_2 = 2. \end{cases}$$

6. Розкласти вектор \vec{a} за базисом $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$. $\vec{a} = \{3, -6, 2\}$, $\vec{e}_1 = \{1, -2, 1\}$, $\vec{e}_2 = \{0, 3, 2\}$, $\vec{e}_3 = \{1, 1, 2\}$.

7. Знайти фундаментальну систему розв'язків однорідної системи рівнянь

$$\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 0; \\ 7x_1 - 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 0; \\ 5x_1 + 7x_2 - 4x_3 - 6x_4 = 0. \end{cases}$$

8. З'ясувати, за яких значень параметрів λ та μ система не-сумісна; має єдиний розв'язок; має нескінченно багато розв'язків

$$\begin{cases} x + y + \lambda z = \mu; \\ \lambda y + z = 0; \\ y + \lambda z = 0. \end{cases}$$

9. Знайти власні значення і власні вектори лінійного оператора, заданого матрицею

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 4 & -1 & -2 \\ 4 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

10. Знайти $\text{Pr}_{(\vec{a} + 3\vec{b})} \vec{c}$, де $\vec{c} = \{2; -1; 0\}$, $\vec{a} = \{5; 3; -2\}$, $\vec{b} = \{3; -1; -8\}$.

11. В трикутнику з вершинами $A(2;1)$, $B(-1;-1)$ та $C(3;2)$ визначити точку перетину висот (ортоцентр).

12. Скласти рівняння площини, що проходить через пряму перетину площин $3x - y + 2z + 9 = 0$, $x + z - 3 = 0$ та через точку $M(4;-2;-3)$.

13. Дано координати вершин чотиригранника $ABCD$

Засобами векторної алгебри знайти:

- довжину ребра AB ;
- рівняння прямої AB ;
- рівняння площини ABC ;
- кут нахилу ребра AD до площини ABC ;
- площу грані ABC ;
- об'єм тетраедра;
- рівняння висоти DE , опущеної з вершини D на грань ABC ;
- довжину висоти DE ;
- проєкцію E вершини D на площину ABC ;
- точку D' , симетричну точці D відносно грані ABC ;
- площину, що проходить через ребро AD перпендикулярно до площини ABC .

$A(1;-3;-5)$; $B(9;0;1)$; $C(-3;-2;-8)$; $D(2;-3;2)$.

14. На якій відстані від директриси параболи $x^2 = 8y$ знаходяться фокуси еліпса, піввісі якого рівні 5 та 3? Зробити креслення, якщо велика вісь еліпса лежить на осі Ox .

15. Побудувати криву, задану рівнянням в полярних координатах. $r = 2 + \cos \varphi$.

16. Використовуючи теорію квадратичних форм, звести рівняння кривої другого порядку до канонічного вигляду. Зобразити стару та нову системи координат та накреслити криву $x^2 + y^2 - 2xy - 2x + 4y - 7 = 0$.

17. Дослідити і побудувати поверхні другого порядку, що задані рівняннями $x^2 + 6y^2 + z^2 + 12y = 0$; $x = y^2 + 3$.

ВАРІАНТ №6

1. Знайти всі комплексні корені рівняння

$$z^3 - 3 = 0.$$

2. Обчислити визначник четвертого порядку

$$\begin{vmatrix} 3 & 3 & -1 & 3 \\ -3 & -1 & 2 & 5 \\ 5 & -3 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & -2 & -4 \end{vmatrix}.$$

3. Знайти ранг матриці $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 2 & 0 & 6 \\ 2 & 1 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

4. Розв'язати матричне рівняння

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 8 & 10 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & -2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

5. Розв'язати систему лінійних рівнянь:

- методом Гауса;
- за правилом Крамера;
- матричним методом;

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = -2; \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 12; \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = -6. \end{cases}$$

6. Розкласти вектор \vec{a} за базисом $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$. $\vec{a} = \{11, -5, -14\}$, $\vec{e}_1 = \{2, 1, -3\}$, $\vec{e}_2 = \{1, -2, -3\}$, $\vec{e}_3 = \{-2, 3, 1\}$.

7. Знайти фундаментальну систему розв'язків однорідної системи рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 10x_3 + x_4 = 0; \\ 5x_1 - x_2 + 8x_3 - 2x_4 = 0; \\ 3x_1 - 3x_2 - 12x_3 - 4x_4 = 0. \end{cases}$$

8. З'ясувати, за яких значень параметрів λ та μ система не сумісна; має єдиний розв'язок; має нескінченно багато розв'язків

$$\begin{cases} x + y + z = 0; \\ \lambda y + 2z = \mu; \\ x - z = 0. \end{cases}$$

9. Знайти власні значення і власні вектори лінійного оператора, заданого матрицею

$$B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

10. Обчислити площу трикутника, побудованого на векторах $\vec{a} - 2\vec{b}$ та $3\vec{a} + 2\vec{b}$, якщо $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$ та $(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{4}$.

11. Знайти рівняння прямої, паралельної до прямої $3x - 4y + 2 = 0$, яка знаходиться від цієї прямої на відстані 3 одиниці довжини.

12. Знайти найкоротшу відстань між двома прямими $\frac{x-9}{-3} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z}{1}$ та $x = -2t, y = 9t - 7, z = 2t + 2$.

13. Дано координати вершин чотиригранника $ABCD$. Засобами векторної алгебри знайти:

- довжину ребра AB ;
- рівняння прямої AB ;
- рівняння площини ABC ;
- кут нахилу ребра AD до площини ABC ;
- площу грані ABC ;
- об'єм тетраедра;
- рівняння висоти DE , опущеної з вершини D на грань ABC ;
- довжину висоти DE ;
- проєкцію E вершини D на площину ABC ;
- точку D' , симетричну точці D відносно грані ABC ;
- площину, що проходить через ребро AD перпендикулярно до площини ABC .

$$A(0; -3; -1); B(8; 3; 1); C(-4; -6; 0); D(1; 4; -1).$$

14. З лівого фокуса гіперболи $2x^2 - y^2 = 6$, як із центру, описане коло, що проходить через найближчу до центра вершину еліпса $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{5} = 1$. Написати рівняння цього кола. Зробити креслення.

15. Побудувати криву, задану рівнянням в полярних координатах. $r = 2 \cos 3\varphi$.

16. Використовуючи теорію квадратичних форм, звести рівняння кривої другого порядку до канонічного вигляду. Зобразити стару та нову системи координат та накреслити криву $3x^2 + 3y^2 - 2xy - 12y + 4x + 4 = 0$.

17. Дослідити і побудувати поверхні другого порядку, що задані рівняннями $x^2 + y^2 - z^2 + 2y = 0$; $x^2 - 4y^2 = 4$.

ВАРІАНТ №7

1. Знайти всі комплексні корені рівняння

$$z^3 - 1 - i\sqrt{3} = 0.$$

2. Обчислити визначник четвертого порядку

$$\begin{vmatrix} -3 & -2 & -2 & 4 \\ 2 & 7 & 1 & -2 \\ 1 & 4 & -1 & -1 \\ 5 & 2 & 2 & -6 \end{vmatrix}.$$

3. Знайти ранг матриці $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

4. Розв'язати матричне рівняння

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 16 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}.$$

5. Розв'язати систему лінійних рівнянь:

- методом Гауса;
- за правилом Крамера;
- матричним методом;

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 2; \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 4; \\ -2x_1 - x_2 - 3x_3 = 2. \end{cases}$$

6. Розкласти вектор \vec{a} за базисом $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$. $\vec{a} = \{6, -10, 2\}$, $\vec{e}_1 = \{2, -5, 1\}$, $\vec{e}_2 = \{-1, 1, 2\}$, $\vec{e}_3 = \{3, -1, -2\}$.

7. Знайти фундаментальну систему розв'язків однорідної системи рівнянь

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 0; \\ x_1 + 5x_2 - x_3 + x_4 = 0; \\ x_1 + 16x_2 - 6x_3 + 4x_4 = 0. \end{cases}$$

8. З'ясувати, за яких значень параметрів λ та μ система не-сумісна; має єдиний розв'язок; має нескінченно багато розв'язків

$$\begin{cases} \lambda x + y = 1; \\ y - z = 1; \\ y + z = \mu. \end{cases}$$

9. Знайти власні значення і власні вектори лінійного оператора, заданого матрицею

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 5 & -2 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

10. Знайти координати вектора \vec{x} , якщо $\vec{x} \perp \vec{a}$ та $\vec{x} \perp \vec{b}$, $|\vec{x}| = 4\sqrt{33}$, де $\vec{a} = \{3; 2; -2\}$, $\vec{b} = \{1; -1; 0\}$. Кут між вектором \vec{x} та віссю Ox – гострий.

11. Через точку $A(-1; 7; 5)$ і точку B перетину прямої $\frac{x-7}{5} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-5}{1}$ та площини $3x - y + 2z + 3 = 0$ провести пряму.

12. Знайти відстань між паралельними прямими $\frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-5}{2}$ та $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{2}$.

13. Дано координати вершин чотиригранника $ABCD$. Засобами векторної алгебри знайти:

- довжину ребра AB ;
- рівняння прямої AB ;
- рівняння площини ABC ;
- кут нахилу ребра AD до площини ABC ;
- площу грані ABC ;
- об'єм тетраедра;
- рівняння висоти DE , опущеної з вершини D на грань ABC ;
- довжину висоти DE ;
- проєкцію E вершини D на площину ABC ;
- точку D' , симетричну точці D відносно грані ABC ;
- площину, що проходить через ребро AD перпендикулярно до площини ABC .

$$A(-2; -1; -3); B(4; 7; 0); C(-5; -5; -2); D(5; 0; -3).$$

14. Дано еліпс $x^2 + 2y^2 = 4$. Написати рівняння співфокусної рівнобічної гіперболи. Зробити креслення.

15. Побудувати криву, задану рівнянням в полярних координатах. $r = 3 \sin 2\varphi$.

16. Використовуючи теорію квадратичних форм, звести рівняння кривої другого порядку до канонічного вигляду. Зобразити стару та нову системи координат та накреслити криву $4xy + 4x - 4y - 2 = 0$.

17. Дослідити і побудувати поверхні другого порядку, що задані рівняннями $x^2 + 2y^2 - 2z = 0$; $x^2 - 2z + 4x = 0$.

ВАРІАНТ №8

1. Знайти всі комплексні корені рівняння

$$z^3 + \sqrt{3} - i3 = 0.$$

2. Обчислити визначник четвертого порядку

$$\begin{vmatrix} -3 & 6 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & -1 & -1 \\ -4 & 4 & 3 & 2 \\ -2 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

3. Знайти ранг матриці $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 3 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

4. Розв'язати матричне рівняння

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

5. Розв'язати систему лінійних рівнянь:

- методом Гауса;
- за правилом Крамера;
- матричним методом;

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 3; \\ -2x_1 + 3x_2 + x_3 = -6; \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 2. \end{cases}$$

6. Розкласти вектор \vec{a} за базисом $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$. $\vec{a} = \{9, -3, 16\}$, $\vec{e}_1 = \{2, -1, 4\}$, $\vec{e}_2 = \{3, 5, 4\}$, $\vec{e}_3 = \{-1, 3, -2\}$.

7. Знайти фундаментальну систему розв'язків однорідної системи рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 9x_3 - x_4 = 0; \\ 2x_1 - 2x_2 - 7x_3 + 2x_4 = 0; \\ x_1 - 5x_2 - 16x_3 + 3x_4 = 0. \end{cases}$$

8. З'ясувати, за яких значень параметрів λ та μ система не-сумісна; має єдиний розв'язок; має нескінченно багато розв'язків

$$\begin{cases} x - \lambda y + z = 2; \\ x + \mu z = 1; \\ y - z = 0. \end{cases}$$

9. Знайти власні значення і власні вектори лінійного оператора, заданого матрицею

$$B = \begin{pmatrix} -2 & -6 & -6 \\ 3 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

10. Обчислити висоту паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{k}$ та $\vec{b} = \vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$.

11. Промінь світла направлено по прямій $x - 2y + 5 = 0$. Дійшовши до прямої $3x - 2y + 7 = 0$, промінь від неї відбився. Скласти рівняння прямої, на якій лежить відбитий промінь.

12. Знайти рівняння площини, що проходить через пряму $x = 3t + 1, y = 2t + 3, z = -t - 2$ паралельно прямій $\begin{cases} 2x - y + z - 3 = 0; \\ x + 2y - z - 5 = 0. \end{cases}$

13. Дано координати вершин чотиригранника $ABCD$

Засобами векторної алгебри знайти:

- довжину ребра AB ;
- рівняння прямої AB ;
- рівняння площини ABC ;
- кут нахилу ребра AD до площини ABC ;
- площу грані ABC ;
- об'єм тетраедра;
- рівняння висоти DE , опущеної з вершини D на грань ABC ;
- довжину висоти DE ;
- проєкцію E вершини D на площину ABC ;
- точку D' , симетричну точці D відносно грані ABC ;
- площину, що проходить через ребро AD перпендикулярно до площини ABC .

$$A(-6; -4; -2); B(0; -1; 6); C(-9; -3; -6); D(1; -4; -1).$$

14. Через правий фокус еліпса $x^2 + 2y^2 = 16$ проведено пряму, перпендикулярну до осі Ox . Знайти точки її перетину з асимптотами гіперболи $x^2 - 2y^2 = 16$. Зробити креслення.

15. Побудувати криву, задану рівнянням в полярних координатах. $r = 2 \cos\left(\frac{\pi}{4} - \varphi\right)$.

16. Використовуючи теорію квадратичних форм, звести рівняння кривої другого порядку до канонічного вигляду. Зобразити стару та нову системи координат та накреслити криву $7x^2 + 13y^2 - 6\sqrt{3}xy - 28x + 12\sqrt{3}y + 12 = 0$.

17. Дослідити і побудувати поверхні другого порядку, що задані рівняннями $x^2 + 3y^2 - 3z + 3 = 0$; $4x^2 + y^2 = 8$.

1. Знайти всі комплексні корені рівняння

$$z^3 - 2\sqrt{3} + 2i = 0.$$

2. Обчислити визначник четвертого порядку

$$\begin{vmatrix} -1 & -3 & -2 & 2 \\ 6 & 2 & -1 & -6 \\ -1 & 4 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & -5 \end{vmatrix}.$$

3. Знайти ранг матриці $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & -2 & 2 & 1 \\ -3 & 5 & 1 & -4 & 6 & 1 \\ -4 & 9 & 2 & -7 & 10 & 2 \end{pmatrix}$.

4. Розв'язати матричне рівняння

$$X \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

5. Розв'язати систему лінійних рівнянь:

- методом Гауса;
- за правилом Крамера;
- матричним методом;

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 11; \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -5; \\ -3x_1 - 3x_2 + x_3 = -14. \end{cases}$$

6. Розкласти вектор \vec{a} за базисом $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$. $\vec{a} = \{2, 5, 6\}$, $\vec{e}_1 = \{3, 2, 1\}$, $\vec{e}_2 = \{2, 3, 2\}$, $\vec{e}_3 = \{1, 1, 3\}$.

7. Знайти фундаментальну систему розв'язків однорідної системи рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 = 0; \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 0; \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 5x_4 = 0. \end{cases}$$

8. З'ясувати, за яких значень параметрів λ та μ система не-сумісна; має єдиний розв'язок; має нескінченно багато розв'язків

$$\begin{cases} x + y + z = \mu; \\ x - y + z = \mu; \\ x - y - \lambda z = 0. \end{cases}$$

9. Знайти власні значення і власні вектори лінійного оператора, заданого матрицею

$$B = \begin{pmatrix} -4 & -6 & -6 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

10. З'ясувати, чи є тупий кут серед внутрішніх кутів трикутника з вершинами $A(3; 3; 3)$, $B(-4; 5; -1)$, $C(2; -3; 5)$.

11. Дано вершини трикутника: $A(1; -2)$, $B(5; 4)$ та $C(-2; 0)$. Скласти рівняння бісектрис його внутрішнього та зовнішнього кутів при вершині A .

12. Знайти точку, симетричну точці $P(4; 3; 10)$ відносно прямої $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-3}{5}$.

13. Дано координати вершин чотиригранника $ABCD$. Засобами векторної алгебри знайти:

- довжину ребра AB ;
- рівняння прямої AB ;
- рівняння площини ABC ;
- кут нахилу ребра AD до площини ABC ;
- площу грані ABC ;
- об'єм тетраедра;
- рівняння висоти DE , опущеної з вершини D на грань ABC ;
- довжину висоти DE ;
- проєкцію E вершини D на площину ABC ;
- точку D' , симетричну точці D відносно грані ABC ;
- площину, що проходить через ребро AD перпендикулярно до площини ABC .

$$A(-3; -2; -4); B(3; 6; -1); C(-6; -6; -3); D(4; -1; -4).$$

14. Через фокуси еліпса $x^2 + 9y^2 = 36$ проведено прямі, паралельні асимптотам гіперболи, ексцентриситет якої рівний 2. Написати рівняння цих чотирьох прямих. Зробити креслення.

15. Побудувати криву, задану рівнянням в полярних координатах. $r = 3 \sin 3\varphi$.

16. Використовуючи теорію квадратичних форм, звести рівняння кривої другого порядку до канонічного вигляду. Зобразити стару та нову системи координат та накреслити криву $x^2 + y^2 + 4xy + 4x + 2y - 5 = 0$.

17. Дослідити і побудувати поверхні другого порядку, що задані рівняннями $x^2 - y - z^2 = 1$; $2x^2 + 2y^2 - 4x = 7$.

1. Знайти всі комплексні корені рівняння

$$z^3 - 3i = 0.$$

2. Обчислити визначник четвертого порядку

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 & -2 & -1 \\ 5 & 1 & 1 & -1 \\ 4 & 3 & 1 & -3 \\ 3 & -2 & 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

3. Знайти ранг матриці $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & 5 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

4. Розв'язати матричне рівняння

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

5. Розв'язати систему лінійних рівнянь:

- методом Гауса;
- за правилом Крамера;
- матричним методом;

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = -6; \\ -x_1 + 5x_3 = 12; \\ 5x_1 - x_2 + 3x_3 = -5. \end{cases}$$

6. Розкласти вектор \vec{a} за базисом $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$. $\vec{a} = \{8, -3, 8\}$, $\vec{e}_1 = \{5, -2, 1\}$, $\vec{e}_2 = \{-3, 2, -3\}$, $\vec{e}_3 = \{0, 1, 4\}$.

7. Знайти фундаментальну систему розв'язків однорідної системи рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0; \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 = 0; \\ x_1 + x_2 + 5x_3 - 5x_4 = 0. \end{cases}$$

8. З'ясувати, за яких значень параметрів λ та μ система не-сумісна; має єдиний розв'язок; має нескінченно багато розв'язків

$$\begin{cases} x + z = \mu; \\ x + y = \lambda; \\ y - \lambda z = 0. \end{cases}$$

9. Знайти власні значення і власні вектори лінійного оператора, заданого матрицею

$$B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

10. Визначити роботу сили $\vec{F} = \{3; -2; 5\}$, коли її точка прикладання пересувається прямолінійно з точки $A(1;1;1)$ в точку $B(3;4;5)$.

11. Кінцями однієї діагоналі квадрата слугують точки $A(-1;3)$ та $C(3;1)$. Знайти рівняння діагоналей і сторін квадрата.

12. Дано вершини трикутника: $A(4;1;-2)$, $B(2;0;0)$, $C(-2;3;-5)$ через сторону AB провести площину, перпендикулярну до площини трикутника.

13. Дано координати вершин чотиригранника $ABCD$ Засобами векторної алгебри знайти:

- довжину ребра AB ;
- рівняння прямої AB ;
- рівняння площини ABC ;
- кут нахилу ребра AD до площини ABC ;
- площу грані ABC ;
- об'єм тетраедра;
- рівняння висоти DE , опущеної з вершини D на грань ABC ;
- довжину висоти DE ;
- проєкцію E вершини D на площину ABC ;
- точку D' , симетричну точці D відносно грані ABC ;
- площину, що проходить через ребро AD перпендикулярно до площини ABC .

$$A(-3;-1;-4); B(0;7;2); C(-2;-5;-7); D(-3;0;3).$$

14. Записати рівняння еліпса та знайти його ексцентриситет, якщо відстань між його фокусами рівна відстані між кінцями великої та малої напівосей, а одна з вершин лежить в фокусі параболу $y^2 = \sqrt{40}x$. Зробити креслення.

15. Побудувати криву, задану рівнянням в полярних координатах. $r = 3 \cos\left(\frac{3\pi}{4} + \varphi\right)$.

16. Використовуючи теорію квадратичних форм, звести рівняння кривої другого порядку до канонічного вигляду. Зобразити стару та нову системи координат та накреслити криву $x^2 - xy + y^2 - 2x - 2y - 2 = 0$.

17. Дослідити і побудувати поверхні другого порядку, що задані рівняннями $x^2 - 2y^2 + z - 6 = 0$; $x^2 - 4z = 1$.

1. Знайти всі комплексні корені рівняння

$$z^3 + \sqrt{2} - i\sqrt{6} = 0.$$

2. Обчислити визначник четвертого порядку

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 5 & 3 & 1 \\ 5 & -4 & -4 & 5 \\ 3 & 2 & -1 & 3 \end{vmatrix}.$$

3. Знайти ранг матриці $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & -3 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$

4. Розв'язати матричне рівняння

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & -1 & 7 \\ 2 & 5 & 1 & 2 & 8 \\ 3 & 6 & 0 & 1 & 9 \end{pmatrix}.$$

5. Розв'язати систему лінійних рівнянь:

- методом Гауса;
- за правилом Крамера;
- матричним методом;

$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 + 2x_3 = 6; \\ -x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -3; \\ 3x_1 + x_2 - 5x_3 = -5. \end{cases}$$

6. Розкласти вектор \vec{a} за базисом $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$. $\vec{a} = \{6, 3, -5\}$, $\vec{e}_1 = \{4, -1, 3\}$, $\vec{e}_2 = \{-1, 2, 1\}$, $\vec{e}_3 = \{2, -3, -5\}$.

7. Знайти фундаментальну систему розв'язків однорідної системи рівнянь

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 7x_3 - x_4 = 0; \\ -4x_1 + 6x_2 - 14x_3 + 2x_4 = 0; \\ 6x_1 - 9x_2 + 21x_3 - 3x_4 = 0. \end{cases}$$

8. З'ясувати, за яких значень параметрів λ та μ система не-сумісна; має єдиний розв'язок; має нескінченно багато розв'язків

$$\begin{cases} x - y + z = \mu; \\ x + 2y = 1; \\ y + \lambda z = 0. \end{cases}$$

9. Знайти власні значення і власні вектори лінійного оператора, заданого матрицею

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & 7 & 6 \\ -3 & -3 & -2 \end{pmatrix}.$$

10. З'ясувати, чи лежать точки $A(2; -1; 1)$, $B(5; 5; 4)$, $C(3; 2; -1)$, $D(1; -3; 0)$ в одній площині?

11. Дано дві вершини трикутника: $A(-6; 2)$, $B(2; -2)$ та точка перетину медіан $K(1; 2)$. Обчислити відстань від третьої вершини C до сторони AB .

12. Знайти відстань від точки $M(2; 3; -1)$ до прямої $x = t + 1$, $y = t + 2$, $z = 4t + 13$.

13. Дано координати вершин чотиригранника $ABCD$. Засобами векторної алгебри знайти:

- довжину ребра AB ;
- рівняння прямої AB ;
- рівняння площини ABC ;
- кут нахилу ребра AD до площини ABC ;
- площу грані ABC ;
- об'єм тетраедра;
- рівняння висоти DE , опущеної з вершини D на грань ABC ;
- довжину висоти DE ;
- проєкцію E вершини D на площину ABC ;
- точку D' , симетричну точці D відносно грані ABC ;
- площину, що проходить через ребро AD перпендикулярно до площини ABC .

$$A(-3; -3; -1); B(0; 3; 7); C(-2; -6; -5); D(-3; 4; 0).$$

14. Гіпербола симетрична відносно осей координат а відстані однієї з її вершин від фокусів, розташованих на осі Oy , рівні 9 та 1. Знайти точки перетину еліпса $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1$ з асимптотами цієї гіперболи. Зробити креслення.

15. Побудувати криву, задану рівнянням в полярних координатах. $r = -4 \cos 3\varphi$.

16. Використовуючи теорію квадратичних форм, звести рівняння кривої другого порядку до канонічного вигляду. Зобразити стару та нову системи координат та накреслити криву $x^2 - 6xy + y^2 - 4x - 4y + 12 = 0$.

17. Дослідити і побудувати поверхні другого порядку, що задані рівняннями $x^2 + y^2 + z^2 - 8z = 0$; $x^2 + 4(z - 1)^2 = 4$.

1. Знайти всі комплексні корені рівняння

$$z^3 + 1 - i = 0.$$

2. Обчислити визначник четвертого порядку

$$\begin{vmatrix} 5 & -6 & -9 & 2 \\ -2 & 5 & 1 & -2 \\ -7 & 2 & -2 & -8 \\ 8 & 2 & 3 & 9 \end{vmatrix}.$$

3. Знайти ранг матриці $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 4 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

4. Розв'язати матричне рівняння

$$X \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 1 \\ -7 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

5. Розв'язати систему лінійних рівнянь:

- методом Гауса;
- за правилом Крамера;
- матричним методом;

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 6; \\ -5x_1 + x_2 - x_3 = -10; \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 2. \end{cases}$$

6. Розкласти вектор \vec{a} за базисом $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$. $\vec{a} = \{-1, 2, 0\}$, $\vec{e}_1 = \{1, 3, -5\}$, $\vec{e}_2 = \{3, 1, -1\}$, $\vec{e}_3 = \{-2, -1, 3\}$.

7. Знайти фундаментальну систему розв'язків однорідної системи рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 10x_4 = 0; \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 10x_4 = 0; \\ x_1 + 6x_2 - 9x_3 + 3x_4 = 0. \end{cases}$$

8. З'ясувати, за яких значень параметрів λ та μ система не-сумісна; має єдиний розв'язок; має нескінченно багато розв'язків

$$\begin{cases} \mu x + y + z = 0; \\ x + y + z = 0; \\ y - z = \lambda. \end{cases}$$

9. Знайти власні значення і власні вектори лінійного оператора, заданого матрицею

$$B = \begin{pmatrix} -5 & 3 & 0 \\ -6 & 4 & 0 \\ -6 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

10. Дано вектор $\vec{c} = 16\vec{i} - 15\vec{j} + 12\vec{k}$. Знайти координати вектора \vec{d} , паралельного вектору \vec{c} та протилежного з ним напрямку, за умови, що $|\vec{d}| = 5$.

11. Дано рівняння сторін трикутника $3x - 2y + 6 = 0$ та $x + y - 3 = 0$, висоти якого перетинаються у початку координат. Знайти рівняння третьої сторони.

12. Скласти рівняння площини, що проходить через прямої $\begin{cases} 3x + 2y + 5z + 6 = 0 \\ x + 4y + 3z + 4 = 0 \end{cases}$ паралельно прямій $\frac{x-1}{3} = \frac{y-5}{2} = \frac{z+1}{-3}$.

13. Дано координати вершин чотиригранника $ABCD$

Засобами векторної алгебри знайти:

- довжину ребра AB ;
- рівняння прямої AB ;
- рівняння площини ABC ;
- кут нахилу ребра AD до площини ABC ;
- площу грані ABC ;
- об'єм тетраедра;
- рівняння висоти DE , опущеної з вершини D на грань ABC ;
- довжину висоти DE ;
- проєкцію E вершини D на площину ABC ;
- точку D' , симетричну точці D відносно грані ABC ;
- площину, що проходить через ребро AD перпендикулярно до площини ABC .

$$A(-2;8;-4); B(6;2;-1); C(-6;-7;-3); D(-1;3;-4).$$

14. Малу вісь еліпса видно з фокуса під прямим кутом. Знайти ексцентриситет цього еліпса ε . Написати рівняння рівнобічної гіперболи, симетричної осі Ox з вершиною у точці $A(\varepsilon, 0)$. Зробити креслення.

15. Побудувати криву, задану рівнянням в полярних координатах. $r = 3 \cos\left(\frac{3\pi}{4} - \varphi\right)$.

16. Використовуючи теорію квадратичних форм, звести рівняння кривої другого порядку до канонічного вигляду. Зобразити стару та нову системи координат та накреслити криву $5x^2 + 5y^2 + 8xy - 8x - 10y - 4 = 0$.

17. Дослідити і побудувати поверхні другого порядку, що задані рівняннями $(y-5)^2 = 2z$; $x^2 + y^2 + 4z^2 - 2x - 15 = 0$.

1. Знайти всі комплексні корені рівняння

$$z^3 + 3i = 0.$$

2. Обчислити визначник четвертого порядку

$$\begin{vmatrix} 6 & 4 & 3 & 4 \\ -3 & -3 & -1 & -3 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 5 & 4 & 3 & 3 \end{vmatrix}.$$

3. Знайти ранг матриці $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 2 & 3 & -1 \\ 5 & 3 & 7 & 8 & 7 & 1 \\ 1 & 7 & 3 & 0 & -5 & 5 \end{pmatrix}$.

4. Розв'язати матричне рівняння

$$\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 4 & -5 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 2 & 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

5. Розв'язати систему лінійних рівнянь:

- методом Гауса;
- за правилом Крамера;
- матричним методом;

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = -1; \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -4; \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -2. \end{cases}$$

6. Розкласти вектор \vec{a} за базисом $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$. $\vec{a} = \{4, 0, -3\}$, $\vec{e}_1 = \{3, -1, 2\}$, $\vec{e}_2 = \{-1, 2, 0\}$, $\vec{e}_3 = \{-8, 3, 1\}$.

7. Знайти фундаментальну систему розв'язків однорідної системи рівнянь

$$\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 0; \\ x_1 - 4x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 0; \\ 6x_1 + 2x_2 - 2x_4 = 0. \end{cases}$$

8. З'ясувати, за яких значень параметрів λ та μ система не-сумісна; має єдиний розв'язок; має нескінченно багато розв'язків

$$\begin{cases} \lambda x + y = \mu; \\ x - y = 0; \\ x + \lambda y = -\mu. \end{cases}$$

9. Знайти власні значення і власні вектори лінійного оператора, заданого матрицею

$$B = \begin{pmatrix} -2 & 6 & -3 \\ 0 & 4 & -3 \\ 0 & 6 & -5 \end{pmatrix}.$$

10. З вершини прямокутника зі сторонами 6 та 4 см проведено прями, що ділять сторони навпіл. Знайти кут між ними.

11. Знайти проєкцію точки $P(2; -1; 3)$ на пряму $x = 3t; y = 5t - 7; z = 2t + 2$.

12. Знайти проєкцію точки $P(5; 2; -1)$ на площину $2x - y + 3z + 23 = 0$.

13. Дано координати вершин чотиригранника $ABCD$ Засобами векторної алгебри знайти:

- довжину ребра AB ;
- рівняння прямої AB ;
- рівняння площини ABC ;
- кут нахилу ребра AD до площини ABC ;
- площу грані ABC ;
- об'єм тетраедра;
- рівняння висоти DE , опущеної з вершини D на грань ABC ;
- довжину висоти DE ;
- проєкцію E вершини D на площину ABC ;
- точку D' , симетричну точці D відносно грані ABC ;
- площину, що проходить через ребро AD перпендикулярно до площини ABC .

$$A(-5; -3; -1); B(1; 0; 7); C(-8; -2; -5); D(2; -3; 0).$$

14. Точка M ділить відстань між фокусами гіперболи $9x^2 - 16y^2 = 144$ у відношенні $F_1M : MF_2 = 2 : 3$, де F_1 – лівий фокус. Записати рівняння параболи, фокус якої знаходиться у точці M , а вершина – у початку координат. Зробити креслення.

15. Побудувати криву, задану рівнянням в полярних координатах. $r = 3(1 - \sin \varphi)$.

16. Використовуючи теорію квадратичних форм, звести рівняння кривої другого порядку до канонічного вигляду. Зобразити стару та нову системи координат та накреслити криву $x^2 + y^2 + 2xy - 8x - 4y + 1 = 0$.

17. Дослідити і побудувати поверхні другого порядку, що задані рівняннями $5(x+1)^2 + 3y^2 = 15z$; $4x^2 - y^2 - 4x + 4y - 3 = 0$.

1. Знайти всі комплексні корені рівняння

$$z^3 + 3 + 3i = 0.$$

2. Обчислити визначник четвертого порядку

$$\begin{vmatrix} 4 & -8 & -2 & -10 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & -1 & -2 \\ 1 & -4 & -1 & -4 \end{vmatrix}.$$

3. Знайти ранг матриці $\begin{pmatrix} -2 & 3 & -2 & 1 & 0 & -3 \\ 2 & 3 & 1 & -2 & 1 & 3 \\ 3 & -2 & 5 & 1 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & -2 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

4. Розв'язати матричне рівняння

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

5. Розв'язати систему лінійних рівнянь:

- методом Гауса;
- за правилом Крамера;
- матричним методом;

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 = -4; \\ -x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 2; \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

6. Розкласти вектор \vec{a} за базисом $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$. $\vec{a} = \{-4, 2, 0\}$, $\vec{e}_1 = \{3, -1, 1\}$, $\vec{e}_2 = \{5, 3, 1\}$, $\vec{e}_3 = \{0, -2, 1\}$.

7. Знайти фундаментальну систему розв'язків однорідної системи рівнянь

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 = 0; \\ 7x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 = 0; \\ 2x_1 + 5x_2 + 2x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

8. З'ясувати, за яких значень параметрів λ та μ система не-сумісна; має єдиний розв'язок; має нескінченно багато

$$\text{розв'язків } \begin{cases} x + y + z = 1; \\ \lambda y + z = 1; \\ y - z = \mu. \end{cases}$$

9. Знайти власні значення і власні вектори лінійного оператора, заданого матрицею

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

10. Нехай $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j} + \alpha\vec{k}$, $\vec{b} = 3\vec{i} + \vec{j}$. При якому значенні $\alpha \cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \frac{5}{12}$?

11. Обчислити координати вершин ромба, якщо відомі рівняння двох його сторін $2x - y + 4 = 0$ та $2x - y + 10 = 0$ а рівняння однієї з його діагоналей $x + y + 2 = 0$.

12. Написати рівняння перпендикуляра, опущеного з точки $A(2;3;1)$ на пряму $\frac{x+1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z-2}{3}$.

13. Дано координати вершин чотиригранника $ABCD$. Засобами векторної алгебри знайти:

- довжину ребра AB ;
- рівняння прямої AB ;
- рівняння площини ABC ;
- кут нахилу ребра AD до площини ABC ;
- площу грані ABC ;
- об'єм тетраедра;
- рівняння висоти DE , опущеної з вершини D на грань ABC ;
- довжину висоти DE ;
- проєкцію E вершини D на площину ABC ;
- точку D' , симетричну точці D відносно грані ABC ;
- площину, що проходить через ребро AD перпендикулярно до площини ABC .

$$A(-3; -2; -1); B(3; 7; 2); C(-6; -5; 0); D(4; -1; -1).$$

14. Основами трапеції слугують велика вісь еліпса $x^2 + 4y^2 = 4$ та фокальна хорда параболи $x^2 = 6y$. Знайти площу цієї трапеції. Зробити креслення.

15. Побудувати криву, задану рівнянням в полярних координатах. $r = -3 \sin 2\varphi$.

16. Використовуючи теорію квадратичних форм, звести рівняння кривої другого порядку до канонічного вигляду. Зобразити стару та нову системи координат та накреслити криву $2x^2 + 2y^2 + 4xy + 8x + 4y + \frac{1}{2} = 0$.

17. Дослідити і побудувати поверхні другого порядку, що задані рівняннями $3x^2 - (z - 1)^2 = 3$; $3x^2 + 3y^2 - 6x + 4y - 1 = 0$.

1. Знайти всі комплексні корені рівняння

$$z^3 - 2 - i2\sqrt{3} = 0.$$

2. Обчислити визначник четвертого порядку

$$\begin{vmatrix} -4 & -8 & 5 & 3 \\ -6 & 17 & 3 & 6 \\ -2 & 3 & -1 & 2 \\ 3 & 8 & -5 & -2 \end{vmatrix}.$$

3. Знайти ранг матриці $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 4 & 2 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 9 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

4. Розв'язати матричне рівняння

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

5. Розв'язати систему лінійних рівнянь:

- методом Гауса;
- за правилом Крамера;
- матричним методом;

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 5; \\ -x_1 + 2x_2 + 4x_3 = -13; \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 2. \end{cases}$$

6. Розкласти вектор \vec{a} за базисом $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$. $\vec{a} = \{-2, 12, -6\}$, $\vec{e}_1 = \{1, 2, 1\}$, $\vec{e}_2 = \{2, -1, 3\}$, $\vec{e}_3 = \{0, 3, -1\}$.

7. Знайти фундаментальну систему розв'язків однорідної системи рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0; \\ x_1 + 2x_2 + 7x_3 - 4x_4 = 0; \\ x_1 + 2x_2 + 11x_3 - 2x_4 = 0. \end{cases}$$

8. З'ясувати, за яких значень параметрів λ та μ система не-сумісна; має єдиний розв'язок; має нескінченно багато розв'язків

$$\begin{cases} \lambda x + z = 0; \\ y + z = \mu; \\ y - z = 1. \end{cases}$$

9. Знайти власні значення і власні вектори лінійного оператора, заданого матрицею

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

10. Знайти одиничний вектор напрямку, перпендикулярного до векторів $\vec{a} = 2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = 4\vec{i} + 5\vec{j} + 3\vec{k}$.

11. Знайти точку M_1 , симетричну точці $M_2(8; -9)$ відносно прямої, що проходить через точки $A(3; -4)$ та $B(-1; -2)$.

12. Знайти точку, симетричну до точки $P(1; -1; 1)$ відносно площини $2x - y + z + 2 = 0$.

13. Дано координати вершин чотиригранника $ABCD$. Засобами векторної алгебри знайти:

- довжину ребра AB ;
- рівняння прямої AB ;
- рівняння площини ABC ;
- кут нахилу ребра AD до площини ABC ;
- площу грані ABC ;
- об'єм тетраедра;
- рівняння висоти DE , опущеної з вершини D на грань ABC ;
- довжину висоти DE ;
- проекцію E вершини D на площину ABC ;
- точку D' , симетричну точці D відносно грані ABC ;
- площину, що проходить через ребро AD перпендикулярно до площини ABC .

$$A(-2; 0; -2); B(6; 3; 4); C(-6; 1; -5); D(-1; 0; 5).$$

14. Відстань між вершинами гіперболи рівна 2, між фокусами $-2\sqrt{2}$. Знайти площу трикутника, утвореного асимптотами цієї гіперболи і директрисою параболи $y^2 = 4x$. Зробити креслення.

15. Побудувати криву, задану рівнянням в полярних координатах. $r = 3(1 + \sin \varphi)$.

16. Використовуючи теорію квадратичних форм, звести рівняння кривої другого порядку до канонічного вигляду. Зобразити стару та нову системи координат та накреслити криву $2xy - x^2 - y^2 + 2x - 4y + \frac{1}{4} = 0$.

17. Дослідити і побудувати поверхні другого порядку, що задані рівняннями $y^2 = 8x + 16$; $z = x^2 + 3y^2 - 6y + 1$.

1. Знайти всі комплексні корені рівняння

$$z^3 + 1 - i\sqrt{3} = 0.$$

2. Обчислити визначник четвертого порядку

$$\begin{vmatrix} -3 & -2 & -1 & 5 \\ -3 & -5 & 1 & 3 \\ -2 & -2 & 1 & 2 \\ 7 & 11 & -2 & -7 \end{vmatrix}.$$

3. Знайти ранг матриці $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}$.

4. Розв'язати матричне рівняння

$$X \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

5. Розв'язати систему лінійних рівнянь:

- методом Гауса;
- за правилом Крамера;
- матричним методом;

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 9; \\ -x_1 + 5x_2 + 3x_3 = -3; \\ 4x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 16. \end{cases}$$

6. Розкласти вектор \vec{a} за базисом $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$. $\vec{a} = \{0, 2, 6\}$, $\vec{e}_1 = \{1, 5, 1\}$, $\vec{e}_2 = \{2, -2, 5\}$, $\vec{e}_3 = \{-3, -1, 0\}$.

7. Знайти фундаментальну систему розв'язків однорідної системи рівнянь

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + 7x_4 = 0; \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 5x_4 = 0; \\ -x_1 + 7x_2 - 10x_3 + 22x_4 = 0. \end{cases}$$

8. З'ясувати, за яких значень параметрів λ та μ система не-сумісна; має єдиний розв'язок; має нескінченно багато розв'язків

$$\begin{cases} x - y = \mu; \\ \lambda x + \mu y = 0; \\ -x + y = \lambda. \end{cases}$$

9. Знайти власні значення і власні вектори лінійного оператора, заданого матрицею

$$B = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

10. Знайти проєкцію вектора $\vec{a} = \{4; -3; 2\}$ на вісь, що складає з координатними осями рівні гострі кути.

11. Написати рівняння прямої, що проходить через точку $M(2;1)$ під кутом $\frac{\pi}{4}$ до прямої $x = 1 + t$, $y = -2 - \frac{2}{3}t$.

12. Скласти канонічні рівняння прямої, яка проходить через точку $M(3; -2; -4)$ паралельно площині $3x - 2y - 3z - 7 = 0$ і перетинає пряму $\frac{x-2}{3} = \frac{y+4}{-2} = \frac{z-1}{2}$.

13. Дано координати вершин чотиригранника $ABCD$. Засобами векторної алгебри знайти:

- довжину ребра AB ;
- рівняння прямої AB ;
- рівняння площини ABC ;
- кут нахилу ребра AD до площини ABC ;
- площу грані ABC ;
- об'єм тетраедра;
- рівняння висоти DE , опущеної з вершини D на грань ABC ;
- довжину висоти DE ;
- проєкцію E вершини D на площину ABC ;
- точку D' , симетричну точці D відносно грані ABC ;
- площину, що проходить через ребро AD перпендикулярно до площини ABC .

$$A(-4; -2; 0); B(2; 1; 8); C(-7; -1; -4); D(3; -2; 1).$$

14. Знайти відстань фокусів еліпса $x^2 + 4y^2 = 4$ від асимптот гіперболи $2x^2 - y^2 = 2$. Зробити креслення.

15. Побудувати криву, задану рівнянням в полярних координатах. $r = 4 \cos\left(\frac{\pi}{6} - \varphi\right)$.

16. Використовуючи теорію квадратичних форм, звести рівняння кривої другого порядку до канонічного вигляду. Зобразити стару та нову системи координат та накреслити криву $2x^2 + 2y^2 - 4xy - 4x + 8y + \frac{1}{2} = 0$.

17. Дослідити і побудувати поверхні другого порядку, що задані рівняннями $2x^2 + 3y^2 + z^2 - 2 = 0$; $x^2 + 4 - y = 0$.

1. Знайти всі комплексні корені рівняння

$$z^3 + 1 + i = 0.$$

2. Обчислити визначник четвертого порядку

$$\begin{vmatrix} 11 & 2 & -6 & 4 \\ 6 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 & 2 \\ 4 & -1 & 3 & -2 \end{vmatrix}.$$

3. Знайти ранг матриці $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

4. Розв'язати матричне рівняння

$$X \begin{pmatrix} 3 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

5. Розв'язати систему лінійних рівнянь:

- методом Гауса;
- за правилом Крамера;
- матричним методом;

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 - 8x_3 = 4; \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0; \\ 2x_1 + x_3 = -3. \end{cases}$$

6. Розкласти вектор \vec{a} за базисом $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$. $\vec{a} = \{1, -6, 3\}$, $\vec{e}_1 = \{2, 1, 4\}$, $\vec{e}_2 = \{-1, 10, -2\}$, $\vec{e}_3 = \{2, -3, 1\}$.

7. Знайти фундаментальну систему розв'язків однорідної системи рівнянь

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 12x_3 - x_4 = 0; \\ -2x_1 + x_2 - 10x_3 + x_4 = 0; \\ x_1 + 2x_3 = 0. \end{cases}$$

8. З'ясувати, за яких значень параметрів λ та μ система не-сумісна; має єдиний розв'язок; має нескінченно багато розв'язків

$$\begin{cases} 2x + y - \lambda z = 0; \\ -\lambda x + z = 0; \\ x - y = \mu. \end{cases}$$

9. Знайти власні значення і власні вектори лінійного оператора, заданого матрицею

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & -4 & 3 \end{pmatrix}.$$

10. Який кут утворюють одиничні вектори \vec{p} та \vec{q} , якщо вектори $\vec{a} = \vec{p} + 2\vec{q}$ та $\vec{b} = 5\vec{p} - 4\vec{q}$ взаємно перпендикулярні?

11. Дано дві суміжні вершини паралелограма $A(1;5)$, $B(-2;-1)$ та точка перетину його діагоналей $K(4;1)$. Скласти рівняння сторін паралелограма.

12. Знайти відстань від точки $A(-1;2;3)$ до площини, що проходить через точки $B(1;2;1)$, $C(2;-3;4)$, $D(-4;5;1)$.

13. Дано координати вершин чотиригранника $ABCD$ Засобами векторної алгебри знайти:

- довжину ребра AB ;
- рівняння прямої AB ;
- рівняння площини ABC ;
- кут нахилу ребра AD до площини ABC ;
- площу грані ABC ;
- об'єм тетраедра;
- рівняння висоти DE , опущеної з вершини D на грань ABC ;
- довжину висоти DE ;
- проєкцію E вершини D на площину ABC ;
- точку D' , симетричну точці D відносно грані ABC ;
- площину, що проходить через ребро AD перпендикулярно до площини ABC .

$$A(0;-2;-6); B(3;6;0); C(1;-6;-9); D(0;-1;1).$$

14. Записати рівняння гіперболи, що має вершини в фокусах, а фокуси – у вершинах еліпса $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$. Зробити креслення.

15. Побудувати криву, задану рівнянням в полярних координатах. $r = -4 \cos 2\varphi$.

16. Використовуючи теорію квадратичних форм, звести рівняння кривої другого порядку до канонічного вигляду. Зобразити стару та нову системи координат та накреслити криву $3x^2 - 2xy + 3y^2 - 4x - 4y = 12$.

17. Дослідити і побудувати поверхні другого порядку, що задані рівняннями $x^2 + 6y^2 - 5z^2 = 0$; $y^2 - x = 4$.

1. Знайти всі комплексні корені рівняння

$$z^3 - 3 - i\sqrt{3} = 0.$$

2. Обчислити визначник четвертого порядку

$$\begin{vmatrix} 8 & 4 & 3 & 5 \\ -1 & 0 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & -3 \\ 2 & 0 & 2 & -2 \end{vmatrix}.$$

3. Знайти ранг матриці $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 2 & 1 & -2 & 0 \\ 6 & 1 & 2 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

4. Розв'язати матричне рівняння

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & -6 & 4 \end{pmatrix}.$$

5. Розв'язати систему лінійних рівнянь:

- методом Гауса;
- за правилом Крамера;
- матричним методом;

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + 3x_3 = 0; \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = -1; \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 4. \end{cases}$$

6. Розкласти вектор \vec{a} за базисом $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$. $\vec{a} = \{0, -1, 4\}$, $\vec{e}_1 = \{-1, 2, 1\}$, $\vec{e}_2 = \{1, 3, 1\}$, $\vec{e}_3 = \{3, -2, 3\}$.

7. Знайти фундаментальну систему розв'язків однорідної системи рівнянь

$$\begin{cases} 6x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0; \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 0; \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

8. З'ясувати, за яких значень параметрів λ та μ система не-сумісна; має єдиний розв'язок; має нескінченно багато розв'язків

$$\begin{cases} \lambda x + y - z = 1; \\ \lambda x - y = 0; \\ \mu x - z = 0. \end{cases}$$

9. Знайти власні значення і власні вектори лінійного оператора, заданого матрицею

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

10. Дано три послідовні вершини трапеції: $A(-2; -3; 5)$, $B(1; 4; 8)$, $C(3; 1; -1)$. Знайти четверту її вершину D за умови, що основа AD у 5 разів більша за основу BC .

11. Дано дві протилежні вершини ромба $A(3; 4)$ та $C(1; -2)$. Сторона AB нахилена до вісі Ox під кутом 45° . Знайти вершини B та D .

12. Знайти відстань від точки $C(3; -4; -2)$ до площини, що проходить через дві прямі $\frac{x-5}{13} = \frac{y-6}{1} = \frac{z+3}{-4}$ та $\frac{x-2}{13} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+3}{-4}$.

13. Дано координати вершин чотиригранника $ABCD$. Засобами векторної алгебри знайти:

- довжину ребра AB ;
- рівняння прямої AB ;
- рівняння площини ABC ;
- кут нахилу ребра AD до площини ABC ;
- площу грані ABC ;
- об'єм тетраедра;
- рівняння висоти DE , опущеної з вершини D на грань ABC ;
- довжину висоти DE ;
- проєкцію E вершини D на площину ABC ;
- точку D' , симетричну точці D відносно грані ABC ;
- площину, що проходить через ребро AD перпендикулярно до площини ABC .

$$A(2; 2; -2); B(5; 10; 4); C(3; -2; -5); D(2; 3; 5).$$

14. Написати рівняння директриси параболи, вершина якої у початку координат, а фокус збігається з правою вершиною еліпса $x^2 + 2y^2 = 18$. Зробити креслення.

15. Побудувати криву, задану рівнянням в полярних координатах. $r = 2\sqrt{\cos 2\varphi}$.

16. Використовуючи теорію квадратичних форм, звести рівняння кривої другого порядку до канонічного вигляду. Зобразити стару та нову системи координат та накреслити криву $7x^2 - 2xy + 7y^2 - 48x - 48y + 144 = 0$.

17. Дослідити і побудувати поверхні другого порядку, що задані рівняннями $z = y^2 + 2$; $z^2 - 4z = 4x^2 + y^2$.

1. Знайти всі комплексні корені рівняння

$$z^3 + 3 = 0.$$

2. Обчислити визначник четвертого порядку

$$\begin{vmatrix} 2 & -2 & 3 & 4 \\ -2 & 4 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & 3 & 3 \end{vmatrix}.$$

3. Знайти ранг матриці $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -7 & 8 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -3 & 7 & 4 & -1 \end{pmatrix}$.

4. Розв'язати матричне рівняння

$$X \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -6 \\ 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

5. Розв'язати систему лінійних рівнянь:

- методом Гауса;
- за правилом Крамера;
- матричним методом;

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 1; \\ x_1 + 10x_2 - 3x_3 = -6; \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 = 5. \end{cases}$$

6. Розкласти вектор \vec{a} за базисом $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$. $\vec{a} = \{0, -1, 3\}$, $\vec{e}_1 = \{2, -1, 2\}$, $\vec{e}_2 = \{2, 5, -1\}$, $\vec{e}_3 = \{-1, 3, -1\}$.

7. Знайти фундаментальну систему розв'язків однорідної системи рівнянь

$$\begin{cases} 6x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 0; \\ 7x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 0; \\ x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = 0. \end{cases}$$

8. З'ясувати, за яких значень параметрів λ та μ система не-сумісна; має єдиний розв'язок; має нескінченно багато розв'язків

$$\begin{cases} x - y - z = \mu; \\ x + y - z = \lambda; \\ \lambda x + y + z = 1. \end{cases}$$

9. Знайти власні значення і власні вектори лінійного оператора, заданого матрицею

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

10. Методами векторної алгебри довести, що чотирикутник з вершинами $A(2; -3; 5)$, $B(3; 1; -2)$, $C(0; 0; -3)$, $D(-1; -4; 4)$ – трапеція, що має два прямих кута.

11. Дано дві точки: $A(8; -1)$ та $B(2; 5)$. Знайти відношення, в якому пряма $x - 2y + 4 = 0$ ділить відрізок AB .

12. Скласти рівняння площини, що проходить через пряму $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z-2}{-2}$ перпендикулярно до площини $3x + 2y - z - 5 = 0$.

13. Дано координати вершин чотиригранника $ABCD$ Засобами векторної алгебри знайти:

- довжину ребра AB ;
- рівняння прямої AB ;
- рівняння площини ABC ;
- кут нахилу ребра AD до площини ABC ;
- площу грані ABC ;
- об'єм тетраедра;
- рівняння висоти DE , опущеної з вершини D на грань ABC ;
- довжину висоти DE ;
- проєкцію E вершини D на площину ABC ;
- точку D' , симетричну точці D відносно грані ABC ;
- площину, що проходить через ребро AD перпендикулярно до площини ABC .

$$A(0; -4; 6); B(8; -1; 0); C(-4; -3; -9); D(1; -4; 1).$$

14. Написати рівняння кола з центром у фокусі параболи $y^2 = 4x$, яке проходить через лівий фокус еліпса $x^2 + 2y^2 = 4$. Зробити креслення.

15. Побудувати криву, задану рівнянням в полярних координатах. $r = 3 - \sin \varphi$.

16. Використовуючи теорію квадратичних форм, звести рівняння кривої другого порядку до канонічного вигляду. Зобразити стару та нову системи координат та накреслити криву $2x^2 - 2y^2 - 4\sqrt{3}xy + 12\sqrt{3}x + 12y - 54 = 0$.

17. Дослідити і побудувати поверхні другого порядку, що задані рівняннями $x^2 - 2z^2 - 3y = 0$; $3y^2 + 4z - 1 = 0$.

1. Знайти всі комплексні корені рівняння

$$z^3 + \sqrt{3} - i = 0.$$

2. Обчислити визначник четвертого порядку

$$\begin{vmatrix} -5 & 2 & -1 & 2 \\ -4 & -3 & 2 & 4 \\ -2 & 0 & 3 & 2 \\ -9 & -4 & 2 & -3 \end{vmatrix}.$$

3. Знайти ранг матриці $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 0 & 5 & 5 & 7 \end{pmatrix}$.

4. Розв'язати матричне рівняння

$$\begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 9 & 1 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 10 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

5. Розв'язати систему лінійних рівнянь:

- методом Гауса;
- за правилом Крамера;
- матричним методом;

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 0; \\ -x_1 + 5x_2 + 3x_3 = -1; \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 7. \end{cases}$$

6. Розкласти вектор \vec{a} за базисом $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$. $\vec{a} = \{5, -13, 2\}$, $\vec{e}_1 = \{3, -1, 2\}$, $\vec{e}_2 = \{-2, 2, -1\}$, $\vec{e}_3 = \{1, 4, 1\}$.

7. Знайти фундаментальну систему розв'язків однорідної системи рівнянь

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = 0; \\ x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = 0; \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0. \end{cases}$$

8. З'ясувати, за яких значень параметрів λ та μ система не-сумісна; має єдиний розв'язок; має нескінченно багато розв'язків

$$\begin{cases} x + y + z = \mu; \\ -x - y + \lambda z = 1. \end{cases}$$

9. Знайти власні значення і власні вектори лінійного оператора, заданого матрицею

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

10. Знайти одиничний вектор \vec{p} одночасно перпендикулярний до вектора $\vec{a} = \{3; 6; 8\}$ та до осі Ox .

11. Дано дві вершини: $A(2; -2)$, $B(3; -1)$ та точка $P(1; 0)$ перетину медіан ABC . Скласти рівняння висоти трикутника, проведеної через третю вершину C .

12. Переконайтеся, що прямі $x = 6t - 1$, $y = -2t + 3$, $z = 8t - 9$ і $\frac{x+7}{3} = \frac{y-5}{-1} = \frac{z-9}{4}$ паралельні і обчислити відстань між ними.

13. Дано координати вершин чотиригранника $ABCD$. Засобами векторної алгебри знайти:

- довжину ребра AB ;
- рівняння прямої AB ;
- рівняння площини ABC ;
- кут нахилу ребра AD до площини ABC ;
- площу грані ABC ;
- об'єм тетраедра;
- рівняння висоти DE , опущеної з вершини D на грань ABC ;
- довжину висоти DE ;
- проєкцію E вершини D на площину ABC ;
- точку D' , симетричну точці D відносно грані ABC ;
- площину, що проходить через ребро AD перпендикулярно до площини ABC .

$$A(-1; 0; -2); B(5; 8; 1); C(-4; -4; -1); D(6; 1; -2).$$

14. На параболі $y^2 = 24x$ обрано точку з фокальним радіусом-вектором, рівним 14. Визначити відстань цієї точки від вершин гіперболи $x^2 - 4y^2 = 16$. Зробити креслення.

15. Побудувати криву, задану рівнянням в полярних координатах. $r = -3 \sin \varphi$.

16. Використовуючи теорію квадратичних форм, звести рівняння кривої другого порядку до канонічного вигляду. Зобразити стару та нову системи координат та накреслити криву $x^2 - y^2 - 4xy - 4x - 2y + 2 = 0$.

17. Дослідити і побудувати поверхні другого порядку, що задані рівняннями $x^2 = 6z^2 + 12$; $x^2 + y^2 + z^2 = 6x - 4z$.

1. Знайти всі комплексні корені рівняння

$$z^3 - \sqrt{2} + i\sqrt{6} = 0.$$

2. Обчислити визначник четвертого порядку

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & -3 & -2 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \\ -2 & 5 & -3 & -2 \\ 4 & -1 & 6 & 5 \end{vmatrix}.$$

3. Знайти ранг матриці $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 6 & 0 & 6 & 6 \end{pmatrix}$.

4. Розв'язати матричне рівняння

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 6 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 10 \\ 8 & -4 \end{pmatrix}.$$

5. Розв'язати систему лінійних рівнянь:

- методом Гауса;
- за правилом Крамера;
- матричним методом;

$$\begin{cases} 5x_1 - 3x_2 = 8; \\ -2x_1 + 2x_2 + x_3 = -3; \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 8. \end{cases}$$

6. Розкласти вектор \vec{a} за базисом $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$. $\vec{a} = \{4, -6, 7\}$, $\vec{e}_1 = \{4, -1, 1\}$, $\vec{e}_2 = \{-2, 3, -2\}$, $\vec{e}_3 = \{-1, -1, 2\}$.

7. Знайти фундаментальну систему розв'язків однорідної системи рівнянь

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 - 2x_4 = 0; \\ 6x_1 - 9x_2 + 3x_3 - 6x_4 = 0; \\ -8x_1 + 12x_2 - 4x_3 + 8x_4 = 0. \end{cases}$$

8. З'ясувати, за яких значень параметрів λ та μ система не-сумісна; має єдиний розв'язок; має нескінченно багато

$$\text{розв'язків } \begin{cases} \lambda x + y = 1; \\ \mu x + y = 1; \\ x + y = 1. \end{cases}$$

9. Знайти власні значення і власні вектори лінійного оператора, заданого матрицею

$$B = \begin{pmatrix} -3 & -4 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

10. Перевірити, що вектори $\vec{a} = -2\vec{i} + 6\vec{j} - 9\vec{k}$ та $\vec{b} = -6\vec{i} + 7\vec{j} + 6\vec{k}$ можуть бути взяті за ребра куба; знайти третє ребро.

11. Через точку $A(-1;2)$ провести пряму під кутом 135° до прямої, що відсікає на координатних осях відрізки $a = 1$ та $b = -2$.

12. Знайти точку, симетричну точці $A(-1;-2;5)$ відносно прямої $\frac{x-1}{3} = \frac{y-8}{2} = \frac{z}{0}$.

13. Дано координати вершин чотиригранника $ABCD$
Засобами векторної алгебри знайти:

- довжину ребра AB ;
- рівняння прямої AB ;
- рівняння площини ABC ;
- кут нахилу ребра AD до площини ABC ;
- площу грані ABC ;
- об'єм тетраедра;
- рівняння висоти DE , опущеної з вершини D на грань ABC ;
- довжину висоти DE ;
- проєкцію E вершини D на площину ABC ;
- точку D' , симетричну точці D відносно грані ABC ;
- площину, що проходить через ребро AD перпендикулярно до площини ABC .

$$A(1;-3;1); B(4;3;9); C(2;-6;-3); D(1;4;2).$$

14. Написати рівняння рівнобічної гіперболи, якщо відстань між її вершинами (що лежать на осі Oy) рівна ексцентриситету еліпса $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$. Зробити креслення.

15. Побудувати криву, задану рівнянням в полярних координатах. $r = 4(\cos \varphi - 1)$.

16. Використовуючи теорію квадратичних форм, звести рівняння кривої другого порядку до канонічного вигляду. Зобразити стару та нову системи координат та накреслити криву $2x^2 + 4x + 2y^2 + 2xy + 2y = 1$.

17. Дослідити і побудувати поверхні другого порядку, що задані рівняннями $4x^2 - y^2 = 2(z - 1)$; $x^2 + y^2 + 9z^2 - 18z = 0$.

ВАРІАНТ №22

1. Знайти всі комплексні корені рівняння

$$z^3 - 1 + i = 0.$$

2. Обчислити визначник четвертого порядку

$$\begin{vmatrix} 4 & 1 & 3 & 2 \\ -1 & 3 & 2 & -1 \\ 9 & -2 & 2 & 7 \\ 1 & -1 & -3 & 3 \end{vmatrix}.$$

3. Знайти ранг матриці $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & -3 & -5 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

4. Розв'язати матричне рівняння

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 5 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

5. Розв'язати систему лінійних рівнянь:

- методом Гауса;
- за правилом Крамера;
- матричним методом;

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 7; \\ -2x_1 + x_2 - x_3 = 1; \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 3. \end{cases}$$

6. Розкласти вектор \vec{a} за базисом $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$. $\vec{a} = \{11, -1, 2\}$, $\vec{e}_1 = \{-1, 3, 4\}$, $\vec{e}_2 = \{4, 1, -2\}$, $\vec{e}_3 = \{2, -3, 1\}$.

7. Знайти фундаментальну систему розв'язків однорідної системи рівнянь

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 8x_3 + x_4 = 0; \\ x_1 + 11x_2 - 12x_3 - 5x_4 = 0; \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0. \end{cases}$$

8. З'ясувати, за яких значень параметрів λ та μ система не сумісна; має єдиний розв'язок; має нескінченно багато розв'язків

$$\begin{cases} \lambda x - z = \mu; \\ x + y = 1; \\ x + z = 0. \end{cases}$$

9. Знайти власні значення і власні вектори лінійного оператора, заданого матрицею

$$B = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

10. Знайти довжину вектора $\vec{w} = \vec{a} \times \vec{b}$, якщо $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$.

11. Через точку перетину прямих $2x - 5y - 1 = 0$ та $x + 4y - 7 = 0$ провести пряму, що ділить відрізок між точками $A(4; -3)$ та $B(-1; 2)$ у відношенні 2:3.

12. Визначити відстань між прямими, що схрещуються $\frac{x+5}{3} = \frac{y+5}{2} = \frac{z-1}{-2}$ та $\begin{cases} x = 9 + 6t; \\ y = -2t; \\ z = 2 - t. \end{cases}$

13. Дано координати вершин чотиригранника $ABCD$

Засобами векторної алгебри знайти:

- довжину ребра AB ;
- рівняння прямої AB ;
- рівняння площини ABC ;
- кут нахилу ребра AD до площини ABC ;
- площу грані ABC ;
- об'єм тетраедра;
- рівняння висоти DE , опущеної з вершини D на грань ABC ;
- довжину висоти DE ;
- проєкцію E вершини D на площину ABC ;
- точку D' , симетричну точці D відносно грані ABC ;
- площину, що проходить через ребро AD перпендикулярно до площини ABC .

$$A(-2; -2; 0); B(4; 6; 3); C(-5; -6; -1); D(5; -1; 0).$$

14. Дано гіперболу $y^2 - x^2 = 8$. Написати рівняння співфокусного еліпса, що проходить через точку $A(3; 0)$. Зробити креслення.

15. Побудувати криву, задану рівнянням в полярних координатах. $r = 4 - \cos \varphi$.

16. Використовуючи теорію квадратичних форм, звести рівняння кривої другого порядку до канонічного вигляду. Зобразити стару та нову системи координат та накреслити криву $7x^2 + 5y^2 - 2\sqrt{3}xy + 2\sqrt{3}x - 10y = 3$.

17. Дослідити і побудувати поверхні другого порядку, що задані рівняннями $3x - 6 = z^2$; $x^2 - y^2 = 2(z - 1)^2$.

1. Знайти всі комплексні корені рівняння
 $z^3 + \sqrt{3} + i = 0$.

2. Обчислити визначник четвертого порядку

$$\begin{vmatrix} 12 & -3 & -2 & 4 \\ 4 & 3 & -1 & -3 \\ 1 & 2 & -1 & -2 \\ 4 & 1 & 3 & -2 \end{vmatrix}.$$

3. Знайти ранг матриці $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & 2 & 1 \\ -3 & 2 & 1 & 0 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 4 & 3 & 7 & 3 \end{pmatrix}$.

4. Розв'язати матричне рівняння

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

5. Розв'язати систему лінійних рівнянь:

- методом Гауса;
- за правилом Крамера;
- матричним методом;

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 11; \\ 3x_1 - 3x_2 + x_3 = -1; \\ 4x_1 + x_2 - 2x_3 = 2. \end{cases}$$

6. Розкласти вектор \vec{a} за базисом $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$. $\vec{a} = \{7, 1, 3\}$,
 $\vec{e}_1 = \{1, -2, 2\}$, $\vec{e}_2 = \{2, 1, -1\}$, $\vec{e}_3 = \{3, -1, 3\}$.

7. Знайти фундаментальну систему розв'язків однорідної системи рівнянь $\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 0; \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0; \\ 6x_1 + 3x_2 - 9x_3 = 0. \end{cases}$

8. З'ясувати, за яких значень параметрів λ та μ система не-сумісна; має єдиний розв'язок; має нескінченно багато розв'язків $\begin{cases} 2x - z = 0; \\ \lambda x - y = 1; \\ y + z = 2\mu. \end{cases}$

9. Знайти власні значення і власні вектори лінійного оператора, заданого матрицею

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

10. Дано вершини трикутника $A(1; -3; -5)$; $B(2; -2; 3)$; $C(1; 2; 2)$; $D(-3; 0; 4)$. Знайти кут між його діагоналями.

11. Дано дві суміжні вершини квадрата $A(2; 0)$ та $B(-1; 4)$. Скласти рівняння його сторін. Знайти сторони квадрата.

12. Через точку $A(-1; 7; 5)$ і точку B перетину прямої $\frac{x-7}{5} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-5}{1}$ та площини $3x - y + 2z + 3 = 0$ провести пряму.

13. Дано координати вершин чотиригранника $ABCD$. Засобами векторної алгебри знайти:

- довжину ребра AB ;
- рівняння прямої AB ;
- рівняння площини ABC ;
- кут нахилу ребра AD до площини ABC ;
- площу грані ABC ;
- об'єм тетраедра;
- рівняння висоти DE , опущеної з вершини D на грань ABC ;
- довжину висоти DE ;
- проєкцію E вершини D на площину ABC ;
- точку D' , симетричну точці D відносно грані ABC ;
- площину, що проходить через ребро AD перпендикулярно до площини ABC .

$$A(-2; 0; 2); B(4; 3; 10); C(-5; 1; -2); D(5; 0; 3).$$

14. Знайти кути трикутника, вершини якого лежать в фокусах еліпса $2x^2 + y^2 = 16$ та гіперболи $x^2 - y^2 = 4$. Зробити креслення.

15. Побудувати криву, задану рівнянням в полярних координатах. $r = \frac{3}{\cos(\varphi + \frac{\pi}{4})}$.

16. Використовуючи теорію квадратичних форм, звести рівняння кривої другого порядку до канонічного вигляду. Зобразити стару та нову системи координат та накреслити криву $3x^2 + 10xy + 3y^2 - 12x + 12y + 4 = 0$.

17. Дослідити і побудувати поверхні другого порядку, що задані рівняннями $x^2 - 4x + z^2 = 0$; $4x^2 - z^2 = y$.

1. Знайти всі комплексні корені рівняння

$$z^3 - \sqrt{3} + i = 0.$$

2. Обчислити визначник четвертого порядку

$$\begin{vmatrix} -2 & 3 & -1 & 7 \\ 5 & -6 & -4 & -5 \\ -3 & -1 & 1 & 3 \\ -2 & 3 & 2 & 2 \end{vmatrix}.$$

3. Знайти ранг матриці $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 2 & 3 & -1 \\ -1 & 3 & 2 & 0 & 1 & 4 \\ 3 & 3 & 4 & 4 & 13 & 2 \\ 7 & -3 & 1 & 6 & 14 & -7 \end{pmatrix}$.

4. Розв'язати матричне рівняння

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & -3 \\ 2 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

5. Розв'язати систему лінійних рівнянь:

- методом Гауса;
- за правилом Крамера;
- матричним методом;

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 2; \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 5; \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6. \end{cases}$$

6. Розкласти вектор \vec{a} за базисом $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$. $\vec{a} = \{-1, -4, -2\}$, $\vec{e}_1 = \{1, 2, 4\}$, $\vec{e}_2 = \{1, -1, 1\}$, $\vec{e}_3 = \{2, 2, 4\}$.

7. Знайти фундаментальну систему розв'язків однорідної системи рівнянь

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 7x_4 = 0; \\ x_1 + 11x_2 - 12x_3 + 34x_4 = 0; \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 16x_4 = 0. \end{cases}$$

8. З'ясувати, за яких значень параметрів λ та μ система не-сумісна; має єдиний розв'язок; має нескінченно багато розв'язків

$$\begin{cases} x + \lambda z = 1; \\ \lambda y - z = \mu; \\ \lambda x + y = 0. \end{cases}$$

9. Знайти власні значення і власні вектори лінійного оператора, заданого матрицею

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

10. В точці $A(2;1;-1)$ прикладено силу \vec{R} таку, що $|\vec{R}| = 7$. Знаючи, що дві координати цієї сили мають значення $x = 2$, $y = -3$, а третя — $z = 0$, знайти точку кінця вектора, що зображає силу.

11. З точки $M(5,4)$ виходить промінь світла під кутом $\varphi = \arctg 2$ до осі Ox і відбивається від неї. Написати рівняння падаючого та відбитого променів.

12. Обчислити відстань від точки $P(1;-1;-2)$ до прямої $\frac{x+3}{2} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-8}{2}$

13. Дано координати вершин чотиригранника $ABCD$
Засобами векторної алгебри знайти:

- довжину ребра AB ;
- рівняння прямої AB ;
- рівняння площини ABC ;
- кут нахилу ребра AD до площини ABC ;
- площу грані ABC ;
- об'єм тетраедра;
- рівняння висоти DE , опущеної з вершини D на грань ABC ;
- довжину висоти DE ;
- проєкцію E вершини D на площину ABC ;
- точку D' , симетричну точці D відносно грані ABC ;
- площину, що проходить через ребро AD перпендикулярно до площини ABC .

$$A(6;-2;2); B(9;4;10); C(7;-5;-2); D(6;5;3).$$

14. Парабола проходить через точки перетину асимптот гіперболи $x^2 - y^2 = 1$ та кола $x^2 + y^2 + 6x = 0$ та симетрична відносно осі Ox . Написати рівняння параболи та її директриси. Зробити креслення.

15. Побудувати криву, задану рівнянням в полярних координатах. $r = 3 \cos(\frac{\pi}{4} + \varphi)$.

16. Використовуючи теорію квадратичних форм, звести рівняння кривої другого порядку до канонічного вигляду. Зобразити стару та нову системи координат та накреслити криву $x^2 + y^2 - 2xy - 2x + 4y - 7 = 0$.

17. Дослідити і побудувати поверхні другого порядку, що задані рівняннями $y^2 = 4(x+2)$; $x^2 = y^2 - z + 1$.

1. Знайти всі комплексні корені рівняння

$$z^3 + \sqrt{6} + i\sqrt{2} = 0.$$

2. Обчислити визначник четвертого порядку

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & 6 & 3 & 1 \\ 3 & -2 & -2 & 5 \end{vmatrix}.$$

3. Знайти ранг матриці $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 2 & 1 & 1 & -1 \\ 5 & 4 & 2 & 6 & 4 & 10 \end{pmatrix}$.

4. Розв'язати матричне рівняння

$$X \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 3 \\ 1 & 8 & -2 \end{pmatrix}.$$

5. Розв'язати систему лінійних рівнянь:

- методом Гауса;
- за правилом Крамера;
- матричним методом;

$$\begin{cases} 7x_1 - x_3 = 5; \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = -1; \\ -3x_1 - x_2 + 2x_3 = 3. \end{cases}$$

6. Розкласти вектор \vec{a} за базисом $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$. $\vec{a} = \{-6, 12, -5\}$, $\vec{e}_1 = \{3, -1, 5\}$, $\vec{e}_2 = \{2, 0, -1\}$, $\vec{e}_3 = \{-1, 5, 3\}$.

7. Знайти фундаментальну систему розв'язків однорідної системи рівнянь

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 = 0; \\ -2x_1 - 5x_2 - 3x_3 + x_4 = 0; \\ -2x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$$

8. З'ясувати, за яких значень параметрів λ та μ система не-сумісна; має єдиний розв'язок; має нескінченно багато розв'язків

$$\begin{cases} 2x + y = \lambda; \\ \lambda x + \mu y = 0; \\ x + y = 0. \end{cases}$$

9. Знайти власні значення і власні вектори лінійного оператора, заданого матрицею

$$B = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -3 \\ 6 & -1 & -3 \\ 6 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

10. Обчислити проєкцію вектора $\vec{a} = 3\vec{i} - 12\vec{j} + 4\vec{k}$ на вісь вектора $\vec{b} = (\vec{i} - 2\vec{k}) \times (\vec{i} + 3\vec{j} - 4\vec{k})$.

11. Дві суміжні вершини квадрата $ABCD$ лежать в точках $A(-5;4)$ та $D(-3;2)$, а його діагональ AC паралельна до осі Ox . Визначити координати двох інших його вершин.

12. Знайти проєкцію точки $P(2;-1;3)$ на пряму $x = 3t; y = 5t - 7; z = 2t + 2$.

13. Дано координати вершин чотиригранника $ABCD$. Засобами векторної алгебри знайти:

- довжину ребра AB ;
- рівняння прямої AB ;
- рівняння площини ABC ;
- кут нахилу ребра AD до площини ABC ;
- площу грані ABC ;
- об'єм тетраедра;
- рівняння висоти DE , опущеної з вершини D на грань ABC ;
- довжину висоти DE ;
- проєкцію E вершини D на площину ABC ;
- точку D' , симетричну точці D відносно грані ABC ;
- площину, що проходить через ребро AD перпендикулярно до площини ABC .

$$A(-2;-2;0); B(1;4;8); C(-1;-5;-4); D(-2;5;1).$$

14. Через фокус параболи $y^2 = 4x$ проходить коло з центром у початку координат. Знайти точки перетину цього кола з асимптотами гіперболи $x^2 - y^2 = 6$. Зробити креслення.

15. Побудувати криву, задану рівнянням в полярних координатах. $r = 3 + \sin \varphi$.

16. Використовуючи теорію квадратичних форм, звести рівняння кривої другого порядку до канонічного вигляду. Зобразити стару та нову системи координат та накреслити криву $4xy + 4x - 4y = 0$.

17. Дослідити і побудувати поверхні другого порядку, що задані рівняннями $x^2 + y^2 - 2z^2 = 0$; $z^2 + y^2 - 2y + 3z = 0$.

1. Знайти всі комплексні корені рівняння

$$z^3 - \sqrt{3} + i3 = 0.$$

2. Обчислити визначник четвертого порядку

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 8 & 1 \\ 1 & -3 & -2 & 1 \\ 3 & -2 & 3 & 3 \\ -1 & 4 & 3 & -2 \end{vmatrix}.$$

3. Знайти ранг матриці $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

4. Розв'язати матричне рівняння

$$X \begin{pmatrix} -4 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 3 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. Розв'язати систему лінійних рівнянь:

- методом Гауса;
- за правилом Крамера;
- матричним методом;

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 = -1; \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 2; \\ -5x_1 - x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$$

6. Розкласти вектор \vec{a} за базисом $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$. $\vec{a} = \{2, -3, 2\}$, $\vec{e}_1 = \{2, -1, 4\}$, $\vec{e}_2 = \{-1, 3, 2\}$, $\vec{e}_3 = \{1, -2, -1\}$.

7. Знайти фундаментальну систему розв'язків однорідної системи рівнянь

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0; \\ x_1 - 10x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 0; \\ 4x_1 + 19x_2 - 4x_3 - 5x_4 = 0. \end{cases}$$

8. З'ясувати, за яких значень параметрів λ та μ система не-сумісна; має єдиний розв'язок; має нескінченно багато розв'язків

$$\begin{cases} 2x - y = \mu; \\ \lambda x + y = 0; \\ x + \lambda y = 0. \end{cases}$$

9. Знайти власні значення і власні вектори лінійного оператора, заданого матрицею

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

10. Знайти $\text{Pr}_{\vec{b}}(\vec{a} + 3\vec{b})$, де $\vec{a} = \{2; -2; 5\}$, $\vec{b} = \{1; 2; 3\}$.

11. Скласти рівняння катетів прямокутного рівнобедреного трикутника, знаючи рівняння гіпотенузи $y = 3x + 5$ та вершину прямого кута $(4; -1)$.

12. Знайти проєкцію точки $P(3; -4; -6)$ на площині, що проходить через три точки $M_1(-6; 1; -5)$, $M_2(7; -2; -1)$ та $M_3(10; -7; 1)$.

13. Дано координати вершин чотиригранника $ABCD$

Засобами векторної алгебри знайти:

- довжину ребра AB ;
- рівняння прямої AB ;
- рівняння площини ABC ;
- кут нахилу ребра AD до площини ABC ;
- площу грані ABC ;
- об'єм тетраедра;
- рівняння висоти DE , опущеної з вершини D на грань ABC ;
- довжину висоти DE ;
- проєкцію E вершини D на площину ABC ;
- точку D' , симетричну точці D відносно грані ABC ;
- площину, що проходить через ребро AD перпендикулярно до площини ABC .

$$A(-1; -1; -3); B(7; 2; 3); C(-5; 0; -6); D(0; -1; 4).$$

14. Парабола проходить через точки перетину асимптот гіперболи $x^2 - y^2 = 1$ та кола $x^2 + y^2 + 4y = 0$ та симетрична відносно осі Oy . Записати рівняння параболи та її директриси. Зробити креслення.

15. Побудувати криву, задану рівнянням в полярних координатах. $r = 3 \cos\left(\frac{\pi}{3} + \varphi\right)$.

16. Використовуючи теорію квадратичних форм, звести рівняння кривої другого порядку до канонічного вигляду. Зобразити стару та нову системи координат та накреслити криву $x^2 + y^2 - 8xy - 20x + 20y + 1 = 0$.

17. Дослідити і побудувати поверхні другого порядку, що задані рівняннями $3x^2 + 4y^2 - 12 = 0$; $2y^2 + z^2 = 1 - x$.

1. Знайти всі комплексні корені рівняння

$$z^3 + 2 + i2\sqrt{3} = 0.$$

2. Обчислити визначник четвертого порядку

$$\begin{vmatrix} 4 & -3 & -2 & -5 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \\ 5 & -3 & -1 & -5 \\ 1 & -3 & 2 & -5 \end{vmatrix}.$$

3. Знайти ранг матриці $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 & 4 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

4. Розв'язати матричне рівняння

$$X \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 5 & 1 & 0 \\ -5 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 0 \\ 9 & 4 & 0 \\ 15 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

5. Розв'язати систему лінійних рівнянь:

- методом Гауса;
- за правилом Крамера;
- матричним методом;

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 10; \\ 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 3; \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 = -5. \end{cases}$$

6. Розкласти вектор \vec{a} за базисом $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$. $\vec{a} = \{-6, 12, -5\}$, $\vec{e}_1 = \{3, -1, 5\}$, $\vec{e}_2 = \{2, 0, -1\}$, $\vec{e}_3 = \{-1, 5, 3\}$.

7. Знайти фундаментальну систему розв'язків однорідної системи рівнянь

$$\begin{cases} 8x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0; \\ 3x_1 - 3x_2 - 2x_3 + x_4 = 0; \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0. \end{cases}$$

8. З'ясувати, за яких значень параметрів λ та μ система не-сумісна; має єдиний розв'язок; має нескінченно багато розв'язків

$$\begin{cases} \lambda x + y = 1; \\ \lambda y + z = 1; \\ y = \mu. \end{cases}$$

9. Знайти власні значення і власні вектори лінійного оператора, заданого матрицею

$$B = \begin{pmatrix} -1 & -4 & -4 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

10. Вершини $\triangle ABC$ – точки $A(3;2;-3)$, $B(5;1;-1)$, $C(1;-2;1)$. Визначити зовнішній кут при вершині B .

11. Дано рівняння однієї зі сторін квадрата $x + 3y - 7 = 0$ та точка перетину його діагоналей $P(0;-1)$. Знайти рівняння трьох інших сторін.

12. Довести, що прямі $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z-5}{4}$ та $x = 3t + 7$, $y = 2t + 2$, $z = -2t + 1$ лежать у одній площині; скласти рівняння цієї площини.

13. Дано координати вершин чотиригранника $ABCD$ Засобами векторної алгебри знайти:

- довжину ребра AB ;
- рівняння прямої AB ;
- рівняння площини ABC ;
- кут нахилу ребра AD до площини ABC ;
- площу грані ABC ;
- об'єм тетраедра;
- рівняння висоти DE , опущеної з вершини D на грань ABC ;
- довжину висоти DE ;
- проєкцію E вершини D на площину ABC ;
- точку D' , симетричну точці D відносно грані ABC ;
- площину, що проходить через ребро AD перпендикулярно до площини ABC .

$$A(0;-2;0); B(8;4;3); C(-4;-5;1); D(1;5;0).$$

14. На якій відстані від асимптот гіперболи $x^2 - y^2 = 4$ знаходяться фокуси еліпса з на піввісьями 2 та 3 (велика вісь лежить на осі Oy)? Зробити креслення.

15. Побудувати криву, задану рівнянням в полярних координатах. $r = \frac{2}{\cos \varphi}$.

16. Використовуючи теорію квадратичних форм, звести рівняння кривої другого порядку до канонічного вигляду. Зобразити стару та нову системи координат та накреслити криву $x^2 + 2xy + y^2 - \sqrt{2}x - 3\sqrt{2}y + 4 = 0$.

17. Дослідити і побудувати поверхні другого порядку, що задані рівняннями $x^2 + 6x + 10 - y = 0$; $x^2 + y^2 = (z + 1)^2$.

1. Знайти всі комплексні корені рівняння

$$z^3 - 1 + i\sqrt{3} = 0.$$

2. Обчислити визначник четвертого порядку

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 3 & 1 \\ -2 & -1 & 4 & 1 \\ -4 & -4 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

3. Знайти ранг матриці $\begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 & 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 0 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & -1 & -4 & 3 & -4 \\ 7 & -7 & -3 & -5 & 8 & -11 \end{pmatrix}$.

4. Розв'язати матричне рівняння

$$X \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

5. Розв'язати систему лінійних рівнянь:

- методом Гауса;
- за правилом Крамера;
- матричним методом;

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1; \\ x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 2; \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 4. \end{cases}$$

6. Розкласти вектор \vec{a} за базисом $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$. $\vec{a} = \{2, 4, 2\}$, $\vec{e}_1 = \{1, 2, -2\}$, $\vec{e}_2 = \{-2, 1, -1\}$, $\vec{e}_3 = \{1, -3, -3\}$.

7. Знайти фундаментальну систему розв'язків однорідної системи рівнянь

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 8x_3 + 2x_4 = 0; \\ x_1 + 11x_2 - 12x_3 + 34x_4 = 0; \\ 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 7x_4 = 0. \end{cases}$$

8. З'ясувати, за яких значень параметрів λ та μ система не-сумісна; має єдиний розв'язок; має нескінченно багато розв'язків

$$\begin{cases} x + y + z = 0; \\ 2x + z = \mu; \\ \lambda x - z = 0. \end{cases}$$

9. Знайти власні значення і власні вектори лінійного оператора, заданого матрицею

$$B = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -2 \\ 4 & 1 & -2 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

10. Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a} = \vec{k} - \vec{j}$ та $\vec{b} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$.

11. Дано дві вершини трикутника $A(3; -1)$ $B(5; 7)$ та точка $H(4; -1)$ перетину його висот. Записати рівняння сторін цього трикутника.

12. Скласти рівняння проєкції прямої $\begin{cases} 5x - 4y - 2z - 5 = 0 \\ x + 2z - 2 = 0 \end{cases}$ на площину $2x - y + z - 1 = 0$.

13. Дано координати вершин чотиригранника $ABCD$ Засобами векторної алгебри знайти:

- довжину ребра AB ;
- рівняння прямої AB ;
- рівняння площини ABC ;
- кут нахилу ребра AD до площини ABC ;
- площу грані ABC ;
- об'єм тетраедра;
- рівняння висоти DE , опущеної з вершини D на грань ABC ;
- довжину висоти DE ;
- проєкцію E вершини D на площину ABC ;
- точку D' , симетричну точці D відносно грані ABC ;
- площину, що проходить через ребро AD перпендикулярно до площини ABC .

$$A(-3; -1; 1); B(3; 2; 9); C(-6; 0; -3); D(4; -1; 2).$$

14. Коло з центром у початку координат проходить через фокуси гіперболи $x^2 - y^2 = 28$. Знайти точки перетину цього кола з директрисою параболи $y^2 - 4\sqrt{7}x = 0$. Зробити креслення.

15. Побудувати криву, задану рівнянням в полярних координатах. $r = 2 \cos\left(\frac{\pi}{3} - \varphi\right)$.

16. Використовуючи теорію квадратичних форм, звести рівняння кривої другого порядку до канонічного вигляду. Зобразити стару та нову системи координат та накреслити криву $2x^2 + 5xy + 2y^2 - 6x - 3y - 8 = 0$.

17. Дослідити і побудувати поверхні другого порядку, що задані рівняннями $z = 4 - y^2$; $x^2 + y^2 - 2x + 1 = z$.

1. Знайти всі комплексні корені рівняння

$$z^3 - \sqrt{3} - i = 0.$$

2. Обчислити визначник четвертого порядку

$$\begin{vmatrix} 10 & -4 & 2 & 11 \\ -2 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 3 & -4 & 1 \\ 3 & 4 & -2 & 2 \end{vmatrix}.$$

3. Знайти ранг матриці $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & 2 & 3 & -3 & -1 \end{pmatrix}.$

4. Розв'язати матричне рівняння

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

5. Розв'язати систему лінійних рівнянь:

- методом Гауса;
- за правилом Крамера;
- матричним методом;

$$\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 - x_3 = 4; \\ -x_1 + 3x_2 - x_3 = -6; \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 7. \end{cases}$$

6. Розкласти вектор \vec{a} за базисом $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$. $\vec{a} = \{1, 2, 4\}$, $\vec{e}_1 = \{1, 1, 2\}$, $\vec{e}_2 = \{1, -2, -1\}$, $\vec{e}_3 = \{1, -3, -2\}$.

7. Знайти фундаментальну систему розв'язків однорідної системи рівнянь

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 0; \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0; \\ x_1 - 2x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 0. \end{cases}$$

8. З'ясувати, за яких значень параметрів λ та μ система не-сумісна; має єдиний розв'язок; має нескінченно багато розв'язків

$$\begin{cases} \lambda x + y = 0; \\ \lambda y + z = 0; \\ y + \lambda z = \mu. \end{cases}$$

9. Знайти власні значення і власні вектори лінійного оператора, заданого матрицею

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & -4 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

10. Силу $\vec{P} = \{2; -4; 5\}$ прикладено до точки $M(4; -2; 3)$. Визначити величину та напрямні косинуси моменту цієї сили відносно точки $A(3; 2; -1)$.

11. З точки $M(-2; 3)$ під кутом α до осі Ox направлено промінь світла. Відомо, що $\operatorname{tg} \alpha = 3$. Дійшовши до вісі Ox , промінь від неї відбився. Скласти рівняння прямих, на яких лежать падаючий та відбитий промені.

12. Записати рівняння перпендикуляра, проведеного з точки $M(4; 0; -3)$ до прямої $\frac{x+2}{-1} = \frac{y}{3} = \frac{z-2}{4}$.

13. Дано координати вершин чотиригранника $ABCD$. Засобами векторної алгебри знайти:

- довжину ребра AB ;
- рівняння прямої AB ;
- рівняння площини ABC ;
- кут нахилу ребра AD до площини ABC ;
- площу грані ABC ;
- об'єм тетраедра;
- рівняння висоти DE , опущеної з вершини D на грань ABC ;
- довжину висоти DE ;
- проєкцію E вершини D на площину ABC ;
- точку D' , симетричну точці D відносно грані ABC ;
- площину, що проходить через ребро AD перпендикулярно до площини ABC .

$$A(2; -4; -2); B(10; 2; 1); C(-2; -7; -1); D(3; 3; -2).$$

14. Написати рівняння рівнобічної гіперболи, вершини якої лежать у фокусах еліпса $4x^2 + y^2 = 4$. Зробити креслення.

15. Побудувати криву, задану рівнянням в полярних координатах. $r = 2 \cos 2\varphi$.

16. Використовуючи теорію квадратичних форм, звести рівняння кривої другого порядку до канонічного вигляду. Зобразити стару та нову системи координат та накреслити криву $2x^2 + 2y^2 - 2xy - 2x - 2y + 1 = 0$.

17. Дослідити і побудувати поверхні другого порядку, що задані рівняннями $x^2 + y^2 = (z - 4)^2$; $x^2 + 2y^2 - 3z + 4y = 0$.

1. Знайти всі комплексні корені рівняння

$$z^3 + 2\sqrt{3} - 2i = 0.$$

2. Обчислити визначник четвертого порядку

$$\begin{vmatrix} 7 & 6 & 3 & 5 \\ -2 & 0 & 1 & -2 \\ 10 & 9 & -4 & 8 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

3. Знайти ранг матриці $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & -2 & 0 \\ 5 & 1 & 4 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

4. Розв'язати матричне рівняння

$$X \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 \\ -5 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 3 & 0 \\ -5 & 9 & 0 \end{pmatrix}.$$

5. Розв'язати систему лінійних рівнянь:

- методом Гауса;
- за правилом Крамера;
- матричним методом;

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0; \\ -2x_1 - x_2 + 5x_3 = 2; \\ 5x_1 + x_3 = 6. \end{cases}$$

6. Розкласти вектор \vec{a} за базисом $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$. $\vec{a} = \{10, 3, -5\}$, $\vec{e}_1 = \{1, 2, 1\}$, $\vec{e}_2 = \{3, -2, -5\}$, $\vec{e}_3 = \{-5, -3, 2\}$.

7. Знайти фундаментальну систему розв'язків однорідної системи рівнянь

$$\begin{cases} -x_1 + 7x_2 + 11x_3 - x_4 = 0; \\ -2x_1 + 14x_2 + 22x_3 - 2x_4 = 0; \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

8. З'ясувати, за яких значень параметрів λ та μ система не-сумісна; має єдиний розв'язок; має нескінченно багато розв'язків

$$\begin{cases} x - y + z = 1; \\ \lambda x - y = 1; \\ y + z = \mu. \end{cases}$$

9. Знайти власні значення і власні вектори лінійного оператора, заданого матрицею

$$B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 3 \\ -6 & 4 & 3 \\ -6 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

10. Вектор \vec{a} складає з координатними осями Ox та Oy $\angle\alpha = 60^\circ$ та $\angle\beta = 120^\circ$. Обчислити його координати, якщо $|\vec{a}| = 2$ а кут з віссю Oz γ – тупий.

11. Скласти рівняння прямої, що проходить через $A(2;6)$ та утворює з осями координат трикутник, який знаходиться у другій чверті та має площу 3 кв. од.

12. Знайти точку, симетричну точці $P(1;1;1)$ відносно прямої $\frac{x-11}{2} = \frac{y-18}{5} = \frac{z-4}{-2}$.

13. Дано координати вершин чотиригранника $ABCD$ Засобами векторної алгебри знайти:

- довжину ребра AB ;
- рівняння прямої AB ;
- рівняння площини ABC ;
- кут нахилу ребра AD до площини ABC ;
- площу грані ABC ;
- об'єм тетраедра;
- рівняння висоти DE , опущеної з вершини D на грань ABC ;
- довжину висоти DE ;
- проєкцію E вершини D на площину ABC ;
- точку D' , симетричну точці D відносно грані ABC ;
- площину, що проходить через ребро AD перпендикулярно до площини ABC .

$$A(1;1;-3); B(4;9;3); C(2;-3;-6); D(1;2;4).$$

14. Знайти площу трапеції, основами якої слугують мала вісь еліпса $x^2 + 4y^2 = 4$ та директриса параболи $x^2 = 6y$. Зробити креслення.

15. Побудувати криву, задану рівнянням в полярних координатах. $r = \frac{2}{\sin(\frac{\pi}{3} - \varphi)}$.

16. Використовуючи теорію квадратичних форм, звести рівняння кривої другого порядку до канонічного вигляду. Зобразити стару та нову системи координат та накреслити криву $2xy + 2x + 2y = 1$.

17. Дослідити і побудувати поверхні другого порядку, що задані рівняннями $x^2 + y^2 - z^2 - 2x = 0$; $3x^2 + z^2 + 2z = 3$.