

Розрахункова робота з теорії кривих та поверхонь

Теорія кривих

Завдання 1. Задано рівняння лінії L векторно параметричним рівнянням $\vec{r} = \vec{r}(t)$. Точці M_0 відповідає значення параметра t_0 . Виконати завдання:

- 1) знайти координати векторів $\vec{\tau}$, $\vec{\nu}$, $\vec{\beta}$ базису Френе в даній точці M_0 ;
- 2) скласти рівняння дотичної прямої, головної нормалі, бінормалі даної кривої в точці M_0 ;
- 3) скласти рівняння стичної площини, нормальної площини і спрямної площини кривої в точці M_0 ;

4) знайти кривину та скрут кривої в точці M_0 .

1. $\vec{r}(t) = (2 - \sin t; t \cos t; 4e^t)$, $t_0 = 0$;
2. $\vec{r}(t) = (\cos^2 t; \sin^2 t; \cos 2t)$, $t_0 = \pi/4$;
3. $\vec{r}(t) = (3 - \sin t; 2(t - \cos t); e^t)$, $t_0 = 0$;
4. $\vec{r}(t) = (3 \cos t; e^{\sin t} \cos t; 2(t - \pi))$, $t_0 = \pi$;
5. $\vec{r}(t) = (2t; \ln t; t^2)$, $t_0 = 1$;
6. $\vec{r}(t) = (2 - \sin t; t \cos t; 4e^t)$, $t_0 = 0$;
7. $\vec{r}(t) = (e^{\sin t}; (t - \pi) \cos t; 3 \cos t)$, $t_0 = \pi$;
8. $\vec{r}(t) = (2t \ln t; t^3; e^{t-1})$, $t_0 = 1$;
9. $\vec{r}(t) = (e^{2(t-\pi)}; e^{\sin t}; 4 \cos t)$, $t_0 = \pi$;
10. $\vec{r}(t) = (e^{t-1}; 2te^{t-1}; t^2)$, $t_0 = 1$;
11. $\vec{r}(t) = (e^{\cos t} \sin t; 2 \sin t; 3 \cos t)$, $t_0 = \pi/2$;
12. $\vec{r}(t) = (2 \cos t; 3 \sin t; e^{t-\pi})$, $t_0 = \pi$;
13. $\vec{r}(t) = (2 \cos t; 4 \sin t; 3e^{\sin t})$, $t_0 = \pi$;
14. $\vec{r}(t) = (\frac{2}{t}; t \ln t; 3t^2)$, $t_0 = 1$;
15. $\vec{r}(t) = (\sin^2 t; \sin t \cos t; 1 - 2 \cos t)$, $t_0 = \pi/2$;
16. $\vec{r}(t) = (t - \cos t; 2(t + \sin t); e^t)$, $t_0 = 0$;
17. $\vec{r}(t) = (2te^{t-1}; 2(t - \ln t); t^3)$, $t_0 = 1$;
18. $\vec{r}(t) = (2t - \cos t; 2t + \sin t; t + \cos t)$, $t_0 = 0$;
19. $\vec{r}(t) = (2t \cos t; e^{\sin t} \cos t; 2t + 1)$, $t_0 = 0$;
20. $\vec{r}(t) = ((t - \pi) \cos t; 3 \sin t; 2e^{t-\pi})$, $t_0 = \pi$.

Завдання 2. Знайти довжину дуги кривої між точками $M_1(t_1)$ і $M_2(t_2)$.

Знайти натуральну параметризацію, скласти натуральні рівняння кривої.

1. $\vec{r}(t) = (t; \frac{1}{t}; \sqrt{2} \ln t)$, $t \in [1; +\infty)$ $t_1 = 1$, $t_2 = 2$;

2. $\vec{r}(t) = (3t^2 + 1; t^2 - 1; \frac{3}{2}t^2)$, $t_1 = 1$, $t_2 = 3$;

3. $\vec{r}(t) = (4\cos t; 4\sin t; 2t)$, $t_1 = 0$, $t_2 = \pi$;

4. $\vec{r}(t) = (2t^3 - 1; 2t^3 + 3; t^3)$, $t_1 = 1$, $t_2 = 3$;

5. $\vec{r}(t) = (e^t; \frac{1}{e^t}; \sqrt{2} t)$, $t \in [0; +\infty)$, $t_1 = 0$, $t_2 = 1$;

6. $\vec{r}(t) = (6t + 2; 5t^2; 8t)$, $t_1 = 0$, $t_2 = 1$;

7. $\vec{r}(t) = (6\cos t; 6\sin t; 8t)$, $t_1 = 0$, $t_2 = \pi$;

8. $\vec{r}(t) = (\sqrt{2} \ln t; \frac{1}{t}; t)$, $t \in [1; +\infty)$, $t_1 = 1$, $t_2 = 2$;

9. $\vec{r}(t) = (cht; sht; t)$, $t \in [0; +\infty)$, $t_1 = 0$, $t_2 = 1$;

10. $\vec{r}(t) = (t + 3; 2t - 4; 2t)$, $t_1 = 3$, $t_2 = 8$;

11. $\vec{r}(t) = (2t^2 + 1; 2t^2 - 1; t^2)$, $t_1 = 1$, $t_2 = 3$;

12. $\vec{r}(t) = (3\cos t; 3\sin t; 4t)$, $t_1 = 0$, $t_2 = \pi$;

13. $\vec{r}(t) = (5t + 3; 4t - 5; 2\sqrt{2}t)$, $t_1 = 0$, $t_2 = 2$;

14. $\vec{r}(t) = (t; \sqrt{2} \ln t; \frac{1}{t})$, $t \in [1; +\infty)$ $t_1 = 1$, $t_2 = 2$;

15. $\vec{r}(t) = (e^t; \sqrt{2} t; \frac{1}{e^t})$, $t \in [0; +\infty)$, $t_1 = 0$, $t_2 = 1$;

16. $\vec{r}(t) = (2t - 1; 3t + 2; 4t)$, $t_1 = 0$, $t_2 = 2$;

17. $\vec{r}(t) = (4t; 3\cos t; 3\sin t)$, $t_1 = 0$, $t_2 = \pi$;

18. $\vec{r}(t) = (2cht; 2sht; 2t)$, $t \in [0; +\infty)$, $t_1 = 0$, $t_2 = 1$;

19. $\vec{r}(t) = (\sin t; \frac{1}{\sin t}; \sqrt{2} \ln(\sin t))$, $t \in [\pi/2; \pi)$, $t_1 = \frac{\pi}{2}$, $t_2 = \frac{2\pi}{3}$.

20. $\vec{r}(t) = (sht; \frac{1}{sht}; \sqrt{2} \ln(sht))$, $t \in [\ln(1 + \sqrt{2}); +\infty)$,

$$t_1 = \ln(1 + \sqrt{2}), t_2 = \ln(2 + \sqrt{2});$$

Теорія поверхонь

Завдання 3. Задано поверхню $S: \vec{r} = \vec{r}(u, v)$, точку на ній M_0 , що відповідає вказаним значенням параметрів u_0, v_0 і лінію $L: u = u(t), v = v(t)$ на цій поверхні, що проходить через точку M_0 . Знайти:

- 1) для даної поверхні S у даній точці M_0 скласти рівняння дотичної площини і нормальної прямої;
- 2) першу квадратичну форму I поверхні S у точці M_0 ;
- 3) довжину дуги лінії $L: u = 2t, v = t$ між точками $A(u_1 = 0, v_1 = 0)$ та $B(u_2 = 2, v_2 = 1)$;
- 4) кут між лініями $u = 2v, v = 2u$ у точці їх перетину;
- 5) другу квадратичну форму II поверхні S у точці M_0 ;
- 6) нормальну кривину k_n поверхні S у точці M_0 у напрямку дотичної до кривої $L: u = 2t, v = t$;
- 7) головні кривини k_1 та k_2 , повну (гауссову) K і середню H кривини поверхні S у точці M_0 ;
- 8) геодезичну кривину k_g кривої $L: u = 2t, v = t$ на поверхні S у точці M_1 , що відповідає параметру $t_1 = v_0$.

1. $x = 5 \cos v, y = 5 \sin v, z = u, u_0 = \pi / 2, v_0 = 0$;
2. $x = u \cos v, y = u \sin v, z = u^2, u_0 = 1, v_0 = \pi / 2$;
3. $x = u \cos v, y = u \sin v, z = uv, u_0 = 1, v_0 = \pi$;
4. $x = u, y = v, z = 2u^2 - v^2, u_0 = 1, v_0 = 1$;
5. $x = u + v, y = u - v, z = uv, u_0 = 2, v_0 = 1$;
6. $x = 5u - v, y = u^2 + v^2, z = u^3 - v^3, u_0 = 2, v_0 = 1$;
7. $x = 2u + \cos v, y = 2u - \sin v, z = 3v, u_0 = 1, v_0 = 0$;
8. $x = 2u \cos v, y = 2u \sin v, z = u + v, u_0 = 1, v_0 = 0$;
9. $x = 2u \sin v, y = 2u \cos v, z = 5u^2, u_0 = 1, v_0 = \pi / 2$;
10. $x = u + 3, y = 2v + 1, z = u^2 + v^2, u_0 = 2, v_0 = 1$;
11. $x = 2 \cos u \cos v, y = 7 \sin u \cos v, z = 3 \sin v, u_0 = \pi / 2, v_0 = \pi / 2$;
12. $x = u^2 + v^2, y = 3u^2 - v^2, z = 5uv, u_0 = 1, v_0 = 2$;
13. $x = 2u - v, y = 4uv, z = u^3 + v^3, u_0 = 2, v_0 = 1$;
14. $x = 2u + \cos v, y = u - \sin v, z = u + 3, u_0 = 2, v_0 = \pi$;
15. $x = 3u, y = u^2 - 5v, z = u^3 + 3uv, u_0 = 2, v_0 = 2$;
16. $x = 8u \cos v, y = 8u \sin v, z = 5v, u_0 = 1, v_0 = \pi / 2$;

17. $x = 2u \cos v, y = 2u \sin v, z = 3u + 2v, u_0 = 1, v_0 = 0;$

18. $x = u^2 + v^2, y = u^2 - v^2, z = uv, u_0 = 2, v_0 = 1;$

19. $x = 3u, y = u^2 - 5v, z = u^3 + 3uv, u_0 = 2, v_0 = 2;$

20. $x = u \cos v, y = u \sin v, z = 3u^2 + 5, u_0 = 2, v_0 = \pi / 2.$