

Розрахункова робота з теорії кривих та поверхонь

Теорія кривих

Завдання 1. Задано рівняння лінії L векторно параметричним рівнянням $\vec{r} = \vec{r}(t)$. Точці M_0 відповідає значення параметра t_0 . Виконати завдання:

- 1) знайти координати векторів $\vec{\tau}$, $\vec{\nu}$, $\vec{\beta}$ базису Френе в даній точці M_0 ;
- 2) скласти рівняння дотичної прямої, головної нормалі, бінормалі даної кривої в точці M_0 ;
- 3) скласти рівняння стичної площини, нормальної площини і спрямної площини кривої в точці M_0 ;

4) знайти кривину та скрут кривої в точці M_0 .

1. $\vec{r}(t) = (t - \sin t; 1 - \cos t; \sin t)$, $t_0 = \pi/2$;

2. $\vec{r}(t) = (\cos^2 t; \sin^2 t; \cos 2t)$, $t_0 = \pi/4$;

3. $\vec{r}(t) = (t - \sin t; 2(t - \cos t); e^t)$, $t_0 = 0$;

4. $\vec{r}(t) = (2t - \sin t; 2t + \sin t; t + \cos t)$, $t_0 = 0$;

5. $\vec{r}(t) = (2t; \ln t; t^2)$, $t_0 = 1$;

6. $\vec{r}(t) = (2 - \sin t; t \cos t; 4e^t)$, $t_0 = 0$;

7. $\vec{r}(t) = (e^{\sin t}; (t - \pi) \sin t; 3 \cos t e^t)$, $t_0 = \pi$;

8. $\vec{r}(t) = (2t \ln t; t^3; e^{t-1})$, $t_0 = 1$;

9. $\vec{r}(t) = (1 - \cos t; e^{\sin t} \sin t; 4 \cos t)$, $t_0 = \pi$;

10. $\vec{r}(t) = (e^{t-1}; 2te^{t-1}; t^2)$, $t_0 = 1$;

11. $\vec{r}(t) = (e^{\cos t} \sin t; 2 \sin t; 3 \cos t)$, $t_0 = \pi/2$;

12. $\vec{r}(t) = (2 \cos t; 3 \sin t; e^{t-\pi})$, $t_0 = \pi$;

13. $\vec{r}(t) = (2 \cos t; 4 \sin t; 3e^{\sin t})$, $t_0 = \pi$;

14. $\vec{r}(t) = (\frac{2}{t}; t \ln t; 3t^2)$, $t_0 = 1$;

15. $\vec{r}(t) = (\sin^2 t; \sin t \cos t; 2 \cos t)$, $t_0 = \pi/2$;

16. $\vec{r}(t) = (t - \cos t; 2(t + \sin t); e^t)$, $t_0 = 0$;

17. $\vec{r}(t) = (2te^{t-1}; 2(t - \ln t); t^3)$, $t_0 = 1$;

18. $\vec{r}(t) = (3 \cos t; e^{\sin t} \cos t; 2(t - \pi))$, $t_0 = \pi$;

19. $\vec{r}(t) = (2t \sin t; e^{\sin t} \cos t; 2t)$, $t_0 = 0$;

20. $\vec{r}(t) = ((t - \pi) \cos t; 3 \sin t; 2e^{t-\pi})$, $t_0 = \pi$.

Завдання 2. Знайти довжину дуги кривої між точками $M_1(t_1)$ і $M_2(t_2)$.

Знайти натуральну параметризацію, скласти натуральні рівняння кривої.

1. $\vec{r}(t) = (t; \frac{1}{t}; \sqrt{2} \ln t)$, $t \in [1; +\infty)$ $t_1 = 1$, $t_2 = 2$;

2. $\vec{r}(t) = (\sin t; \frac{1}{\sin t}; \sqrt{2} \ln(\sin t))$, $t \in [\pi/2; \pi)$, $t_1 = \frac{\pi}{2}$, $t_2 = \frac{2\pi}{3}$;

3. $\vec{r}(t) = (4\cos t; 4\sin t; 2t)$, $t_1 = 0$, $t_2 = \pi$;

4. $\vec{r}(t) = (tgt; \frac{1}{tgt}; \sqrt{2} \ln(tgt))$, $t \in [\pi/4; \pi/2)$, $t_1 = \frac{\pi}{4}$, $t_2 = \frac{\pi}{3}$;

5. $\vec{r}(t) = (e^t; \frac{1}{e^t}; \sqrt{2} t)$, $t \in [0; +\infty)$, $t_1 = 0$, $t_2 = 1$;

6. $\vec{r}(t) = (6t + 2; 5t^2; 8t)$, $t_1 = 0$, $t_2 = 1$;

7. $\vec{r}(t) = (sht; \frac{1}{sht}; \sqrt{2} \ln(sht))$, $t \in [\ln(1 + \sqrt{2}); +\infty)$,

$$t_1 = \ln(1 + \sqrt{2}), t_2 = \ln(2 + \sqrt{2});$$

8. $\vec{r}(t) = (\sqrt{2} \ln t; \frac{1}{t}; t)$, $t \in [1; +\infty)$, $t_1 = 1$, $t_2 = 2$;

9. $\vec{r}(t) = (cht; sht; t)$, $t \in [0; +\infty)$, $t_1 = 0$, $t_2 = 1$;

10. $\vec{r}(t) = (t + 3; 2t - 4; 2t)$, $t_1 = 3$, $t_2 = 8$;

11. $\vec{r}(t) = (2t^2 + 1; 2t^2 - 1; t^2)$, $t_1 = 1$, $t_2 = 3$;

12. $\vec{r}(t) = (3\cos t; 3\sin t; 4t)$, $t_1 = 0$, $t_2 = \pi$;

13. $\vec{r}(t) = (t + 3; 2t - 5; 3t)$, $t_1 = 0$, $t_2 = 2$;

14. $\vec{r}(t) = (t; \sqrt{2} \ln t; \frac{1}{t})$, $t \in [1; +\infty)$ $t_1 = 1$, $t_2 = 2$;

15. $\vec{r}(t) = (6\cos t; 6\sin t; 8t)$, $t_1 = 0$, $t_2 = \pi$;

16. $\vec{r}(t) = (e^t; \sqrt{2} t; \frac{1}{e^t})$, $t \in [0; +\infty)$, $t_1 = 0$, $t_2 = 1$;

17. $\vec{r}(t) = (2t - 1; 3t + 2; 4t)$, $t_1 = 0$, $t_2 = 2$;

18. $\vec{r}(t) = (4t; 3\cos t; 3\sin t)$, $t_1 = 0$, $t_2 = \pi$;

19. $\vec{r}(t) = (2cht; 2sht; 2t)$, $t \in [0; +\infty)$, $t_1 = 0$, $t_2 = 1$;

20. $\vec{r}(t) = (3t^2 + 1; t^2 - 1; \frac{3}{2}t^2)$, $t_1 = 1$, $t_2 = 3$;

Завдання 3. Скласти параметричні рівняння плоскої кривої за її натуральним рівнянням.

1. $k = a$; 2. $\frac{1}{k} = a \cdot s$; 3. $\frac{1}{k} = \frac{a^2 + s^2}{a^2}$; 4. $s = ka^2$; 5. $kas = 5$, 6. $k \cdot s = 5a$.

Завдання 4. Знайти координати векторів базису Френе лінії перетину двох поверхонь $F_1(x; y; z) = 0$, $F_2(x; y; z) = 0$ в точці $M_0(x_0; y_0; z_0)$:

1. $x - 2y - z = 6$, $x - 2y^2 + z = 2$, $M_0(4; 0; -2)$;
2. $2x^2 - 3 - y = 0$, $4e^x + 1 - z = 0$, $M_0(0; -3; 5)$;
3. $\sin x + y - 2 = 0$, $\cos 2x - z = 0$, $M_0(\pi; 2; 1)$;
4. $x^2 + y^2 = 1$, $z = \ln(x + y)$, $M_0(0; 1; 0)$;
5. $x^2 - 2y = 0$, $2xy - 9z = 0$, $M_0(0; 0; 0)$;
6. $2x - y^2 - z^2 = 0$, $x - 2y + 4z - 10 = 0$, $M_0(2; 0; 2)$;
7. $x^2 + y^2 + z^2 - 19 = 0$, $x^2 - y^2 - 8 = 0$, $M_0(3; 1; 3)$;
8. $x - y^2 - z^2 = 0$, $x - 2y + 4z - 5 = 0$, $M_0(1; 0; 1)$;
9. $x^2 + y^2 - 8 = 0$, $y^2 + z^2 - 13 = 0$, $M_0(2; -2; 3)$;
10. $x^2 + y^2 + z^2 - 3 = 0$, $y^2 + z^2 - 2x = 0$, $M_0(1; 1; -1)$;
11. $x^2 + y^2 - z = 0$, $y^2 + z^2 - 5x = 0$, $M_0(1; 1; 2)$;
12. $x^2 + y^2 + z^2 - 9 = 0$, $x^2 - y^2 - 3 = 0$, $M_0(2; 1; 2)$;
13. $x^2 + y^2 + 2z^2 - 10 = 0$, $2x + 5y - 3z - 1 = 0$, $M_0(1; -1; 2)$;
14. $3x^2 + y^2 - 3 = 0$, $y^2 + 3z^2 - 12 = 0$, $M_0(-1; 0; 2)$;
15. $x^2 + 2y^2 + z^2 - 4 = 0$, $x^2 + y^2 - 2z = 0$, $M_0(-1; 1; 1)$;
16. $x^2 + 3y^2 - z = 0$, $2x - 3y + 4z - 15 = 0$, $M_0(1; 1; 4)$;
17. $x^2 + y^2 + 3z^2 - 4 = 0$, $x^2 + 2y^2 - 1 = 0$, $M_0(1; 0; 1)$;
18. $x^2 + 2y^2 + z^2 - 11 = 0$, $x^2 - y^2 - 8 = 0$, $M_0(3; 1; -1)$;
19. $x^2 + y^2 - 2z = 0$, $x + 3y - 4z + 6 = 0$, $M_0(2; 0; 2)$;
20. $3x^2 + y^2 - 3 = 0$, $y^2 + 3z^2 - 12 = 0$, $M_0(-1; 0; 2)$.

Теорія поверхонь

Завдання 5. Задано поверхню $S: \vec{r} = \vec{r}(u, v)$, точку на ній M_0 , що відповідає вказаним значенням параметрів u_0, v_0 і лінію $L: u = u(t), v = v(t)$ на цій поверхні, що проходить через точку M_0 . Знайти:

1) для даної поверхні S у даній точці M_0 скласти рівняння дотичної площини і нормальної прямої;

- 2) першу квадратичну форму I поверхні S у точці M_0 ;
- 3) довжину дуги лінії $L: u = 2t, v = t$ між точками $A(u_1 = 0, v_1 = 0)$ та $B(u_2 = 2, v_2 = 1)$;
- 4) кут між лініями $u = 2v, v = 2u$ у точці їх перетину;
- 5) другу квадратичну форму II поверхні S у точці M_0 ;
- 6) нормальну кривину k_n поверхні S у точці M_0 у напрямку дотичної до кривої $L: u = 2t, v = t$;
- 7) головні кривини k_1 та k_2 , повну (гауссову) K і середню H кривини поверхні S у точці M_0 ;
- 8) геодезичну кривину k_g кривої $L: u = 2t, v = t$ на поверхні S у точці M_1 , що відповідає параметру $t_1 = v_0$.

1. $x = 5 \cos v, y = 5 \sin v, z = u, u_0 = \pi / 2, v_0 = 0$;
2. $x = u \cos v, y = u \sin v, z = u^2, u_0 = 1, v_0 = \pi / 2$;
3. $x = u \cos v, y = u \sin v, z = uv, u_0 = 1, v_0 = \pi$;
4. $x = u, y = v, z = 2u^2 - v^2, u_0 = 1, v_0 = 1$;
5. $x = u + v, y = u - v, z = uv, u_0 = 2, v_0 = 1$;
6. $x = 5u - v, y = u^2 + v^2, z = u^3 - v^3, u_0 = 2, v_0 = 1$;
7. $x = 2u + \cos v, y = 2u - \sin v, z = 3v, u_0 = 1, v_0 = 0$;
8. $x = 2u \cos v, y = 2u \sin v, z = u + v, u_0 = 1, v_0 = 0$;
9. $x = 2u \sin v, y = 2u \cos v, z = 5u^2, u_0 = 1, v_0 = \pi / 2$;
10. $x = u + 3, y = 2v + 1, z = u^2 + v^2, u_0 = 2, v_0 = 1$;
11. $x = 2 \cos u \cos v, y = 7 \sin u \cos v, z = 3 \sin v, u_0 = \pi / 2, v_0 = \pi / 2$;
12. $x = u^2 + v^2, y = 3u^2 - v^2, z = 5uv, u_0 = 1, v_0 = 2$;
13. $x = 2u - v, y = 4uv, z = u^3 + v^3, u_0 = 2, v_0 = 1$;
14. $x = 2u + \cos v, y = u - \sin v, z = u + 3, u_0 = 2, v_0 = \pi$;
15. $x = 3u, y = u^2 - 5v, z = u^3 + 3uv, u_0 = 2, v_0 = 2$;
16. $x = 8u \cos v, y = 8u \sin v, z = 5v, u_0 = 1, v_0 = \pi / 2$;
17. $x = 2u \cos v, y = 2u \sin v, z = 3u + 2v, u_0 = 1, v_0 = 0$;
18. $x = u^2 + v^2, y = u^2 - v^2, z = uv, u_0 = 2, v_0 = 1$;
19. $x = 3u, y = u^2 - 5v, z = u^3 + 3uv, u_0 = 2, v_0 = 2$;
20. $x = u \cos v, y = u \sin v, z = 3u^2 + 5, u_0 = 2, v_0 = \pi / 2$.