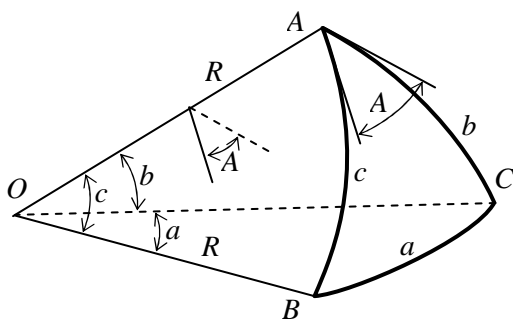


М. П. Данилевський
А. І. Колосов
А. В. Якунін

ОСНОВИ СФЕРИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ

Та



ТРИГОНОМЕТРІЇ

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ,
МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ
ХАРКІВСЬКА НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ
МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА

М. П. Данилевський,
А. І. Колосов,
А. В. Якунін

ОСНОВИ СФЕРИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ та ТРИГОНОМЕТРІЇ

Навчальний посібник

*Рекомендовано
Міністерством освіти і науки,
молоді та спорту України*

Харків
ХНАМГ
2011

УДК [514.113+514.116]((075ю8)

ББК 22.151.05я73-1

Д18

Рецензенти:

О. М. Литвин, доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри вищої та прикладної математики (Українська інженерно-педагогічна академія);

М. В. Новожилова, доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри економічної кібернетики та інформаційних технологій (Харківський державний технічний університет будівництва і архітектури);

А. Д. Тевяшев, доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри прикладної математики (Харківський національний університет радіоелектроніки);

І. М. Патракеєв, кандидат технічних наук, доцент, завідувач кафедри геоінформаційних систем і геодезії (Харківська національна академія міського господарства)

*Рекомендовано Міністерством освіти і науки, молоді та спорту України
як навчальний посібник для студентів геодезичних спеціальностей*

вищих навчальних закладів

(лист № 1/11-3562 від 11.05.2011 р.)

Данилевський М. П.

Д18 Основи сферичної геометрії та тригонометрії: навч. посібник / М. П. Данилевський, А. І. Колосов, А. В. Якунін; Харк. нац. акад. міськ. госп-ва. – Х.: ХНАМГ, 2011. – 92 с.

ISBN 978-966-695-213-7

Теоретичний матеріал подається у досить стислій формі – наводяться основні означення і факти з концентрацією уваги на розкритті суті понять, їх взаємозв'язків без надмірної строгості викладу. Для кращого розуміння використовуються відповідні графічні ілюстрації. Закріпленню знань сприяють детально розібрані типові приклади. Для самостійного опрацювання наведено контрольні запитання та вправи, а також індивідуальні розрахунково-графічні завдання.

Рис. 17

Бібл. 8

УДК [514.113+514.116](075ю8)

ББК 22.151.05я73-1

© Данилевський М. П., Колосов А. І.,
Якунін А. В., 2011

ISBN 978-966-695-213-7

© ХНАМГ, 2011

Вступ

Сферичною геометрією називається розділ математики, в якому вивчаються геометричні фігури, що лежать на поверхні кулі.

Сферична тригонометрія розглядає методи розв'язання сферичних трикутників, що утворюються при перетині дуг великих кіл на кульовій поверхні.

Кулею називається тіло, що утворюється обертанням півкруга навколо його діаметра.

Поверхня, що утворюється при цьому, називається **кульовою** або **сферичною поверхнею**, а частіше просто **сферою**.

Сфера – геометричне місце точок у просторі, рівновіддалених від однієї точки, що називається її **центром** (рис. 1). Відрізок, який сполучає довільну точку сфери з її центром, називається **радіусом**. Відрізок, який проходить через центр і сполучає дві точки сферичної поверхні, називається **діаметром**.

1. Основи сферичної геометрії.

Загальні відомості про сферичні трикутники

1.1. Точки та дуги на поверхні сфери.

Сферичний двокутник. Сферичний трикутник

Найпростіші фігури на сферичній поверхні – точки і дуги великих та малих кіл.

При перетині сфери площиною, що проходить через її центр O , утворюється **велике коло** типу $CABD$ (рис. 1). Січна площина, що не проходить через центр сфери, утворює **мале коло** типу $LMNT$.

Діаметр PP_1 , що проходить через центр O великого кола $CABD$ перпендикулярно до його площини, перетинає поверхню сфери у двох точках P та P_1 . Ці **дві діаметрально протилежні точки** P та P_1 називаються **полюсами** даного великого кола $CABD$. Саме коло $CABD$ по відношенню до точок P та P_1 називається **полярною**.

Кожна точка полярі $CABD$ називається **полярно спряженою** з кожним з її полюсів P та P_1 . Точки A і P сферичної поверхні є

полярно спряженими, коли радіуси OA і OP перпендикулярні.

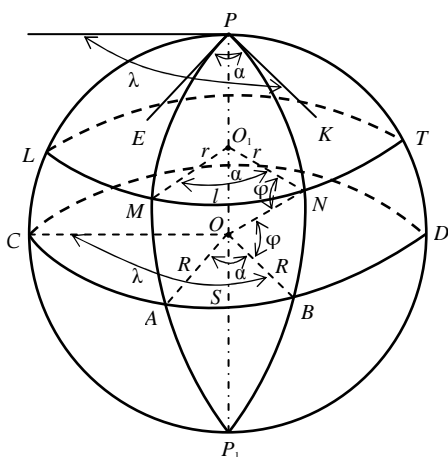


Рис. 1

Кожному великому колу взаємно однозначно відповідає пара його полюсів, а кожній парі діаметрально протилежних точок взаємно однозначно відповідає їх поляр. Якщо велике коло проходить через пару діаметрально протилежних точок, то полюси цього кола лежать на полярі даної пари. Звідси випливає

принцип двоїстості: у сферичній геометрії кожному твердженню відповідає інше двоїсте, що одержується з даного взаємною заміною слів:

“пара діаметрально протилежних точок” і “велике коло”, “лежить на” і “проходить через”, “сполучаються” і “перетинаються в” і т.д.

Згідно з цим принципом, якщо одне з двох двоїстих тверджень доведене, то доведення іншого може бути одержане переходом від кожного великого кола до його полюсів, а від кожної пари діаметрально протилежних точок – до відповідної полярі.

У геометрії на сфері великі кола відіграють роль прямих на площині. Зокрема, велике коло ділить сферу на дві **півсфери**, для яких це коло служить **межею**.

Через довільні дві різні точки A та B на сферичній поверхні, що не є діаметрально протилежними, проходить єдине велике коло $SABD$. Це аналогічно тому, що на площині через довільні дві різні точки проходить єдина пряма. Але через діаметрально протилежні точки P та P_1 можна провести нескінченну кількість великих кіл. Будь-які два різні великі кола перетинаються у двох діаметрально протилежних точках. У цьому відмінність сферичної геометрії від плоскої, де дві різні прямі перетинаються не більш як в одній точці.

Величина дуги AB великого кола визначається центральним кутом $\alpha = \angle AOB$, що утворюється радіусами сфери OA та OB .

Кут α є лінійним кутом двогранного кута, який утворений півплощинами великих півкіл PAP_1 та PBP_1 .

Зв'язок кутової (градусної, радіанної) та лінійної мір дуги великого кола встановлюється за формулою

$$S = \alpha R = \alpha^\circ R / \rho^\circ, \quad (1.1)$$

де S , α , α° – лінійна, радіанна та градусна міри дуги великого кола; R – радіус сфери; ρ° – число градусних одиниць в радіані, $\rho^\circ = 180^\circ / \pi = 57^\circ,2957795\dots$

З рис. 1 видно, що радіус $r = O_1N$ малого кола $LMNT$ дорівнює

$$r = R \cos \varphi. \quad (1.2)$$

Дузі MN малого кола $LMNT$ відповідає центральний кут $\alpha = \angle MO_1N$. Довжина l цієї дуги обчислюється за формулою

$$l = \alpha r = \alpha R \cos \varphi = S \cos \varphi. \quad (1.3)$$

Для малого кола $LMNT$, площина якого перпендикулярна діаметрові PP_1 , ближчий полюс P називається **сферичним центром**, а дуга PM великого кола – **сферичним радіусом** малого кола $LMNT$.

Кутом між двома просторовими лініями, що перетинаються, називається кут між дотичними до цих ліній у точці їх перетину. Окремим випадком є кут APB між дугами великих півкіл PAP_1 та PBP_1 , що називається **сферичним кутом** (рис. 1). Він визначається кутом між дотичними EP та KP до цих дуг. Неважко довести, що $\angle EPK = \alpha$, тому що $EP \perp PP_1$ та $KP \perp PP_1$.

Оскільки обидва кути APB і AP_1B , утворені двома великими півколами PAP_1 та PBP_1 при їх різних кінцях P та P_1 , рівні одному й тому ж куту $\alpha = \angle AOB$, то ці кути рівні між собою. Величина кожного з них називається **кутом між двома великими півколами**.

Два великих кола визначають чотири кути між двома півколами, попарно рівні один одному. Ті з кутів, обидві сторони яких є

продовженням сторін другого, рівні між собою і називаються **вертикальними кутами** (рис. 2). А ті з них, що мають одну спільну сторону, в сумі складають розгорнутий кут у 180° і називаються **суміжними кутами** (рис. 3).

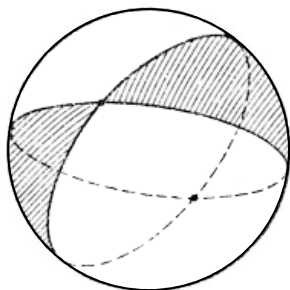


Рис. 2

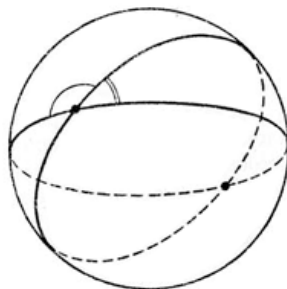


Рис. 3

На поверхні сфери звичайно розглядають фігури, що утворюються перетином дуг великих кіл.

Частина PAP_1B поверхні сфери, що обмежена двома великими півколами PAP_1 та PBP_1 , які мають спільний діаметр PP_1 , називається **сферичним двокутником** (рис. 1). Сторони двокутника завжди рівні 180° . Сферичний двокутник визначається значенням кутів при його вершинах – кутом між двома великими півколами. У разі двокутника PAP_1B цей кут – $\alpha = \angle AOB$.

Сферичним трикутником називається частина поверхні сфери, що обмежена трьома попарно сполученими дугами великих кіл.

Сферичний трикутник ABC має шість основних елементів: три кути A , B , C та три сторони a , b , c . Кути позначають тими ж великими літерами, що й вершини трикутника, а протилежні їм сторони – відповідними малими буквами.

У подальшому будемо розглядати тільки так звані **ейлерові** сферичні трикутники – такі, що задовольняють **обмеженням Ейлера**: кути та сторони можуть приймати значення лише в межах від 0° до 180° .

Оскільки через дві різні точки, що не лежать на одному діаметрі, можна провести тільки одну дугу великого кола, меншу за

180° , то побудова трикутника заданої орієнтації є однозначною.

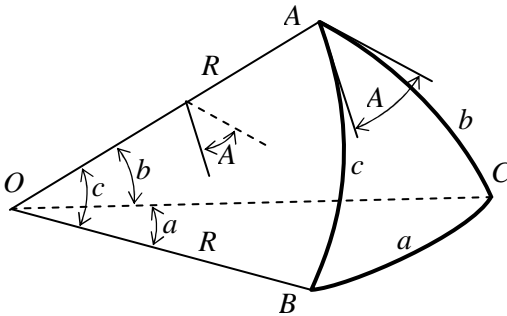


Рис. 4

Площини великих кіл, дуги яких служать сторонами сферичного трикутника ABC , перетинаються між собою у центрі сфери O та утворюють тригранник $OABC$ (рис. 4).

З рис. 4 видно, що кути сферичного трикутника рівні відповідним двограним кутам тригранника.

Сторони трикутника, визначені у кутовій мірі, дорівнюють відповідним плоским кутам тригранника. Тобто, усі шість елементів сферичного трикутника дорівнюють відповідним елементам тригранника.

Сторони сферичного трикутника a , b та c прийнято вимірювати у кутовій мірі, тому вибір радіуса сфери стає не суттєвим. На рис. 5 трикутники ABC та $A_1B_1C_1$ мають різні (пропорційні) лінійні розміри, але їх елементи, що відображені в кутовій мірі, є відповідно рівними. Тому з метою спрощення доведення формул радіус R сфери приймають за одиницю: $R = 1$.

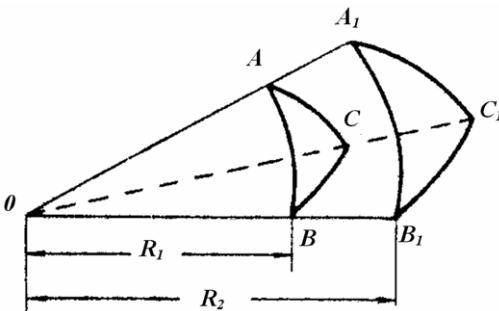


Рис. 5

За формою сферичні трикутники поділяють на:

- 1) **прямокутні**, якщо хоча б один із кутів трикутника дорівнює 90° ;
- 2) **прямосторонні**, якщо хоча б одна зі сторін трикутника дорівнює 90° ;
- 3) **косокутні** – в інших випадках.

Сферичні трикутники (за означенням) одночасно можуть бути прямокутними та прямосторонніми. Таким, наприклад, є трикутник

PAB на рис. 1, який має кути при вершинах A та B , а також сторони PA та PB , що дорівнюють 90° . Можна побудувати сферичний трикутник, який має всі сторони та всі кути, що дорівнюють 90° . Такий трикутник є восьмою частиною поверхні сфери й утворюється перетином трьох великих кіл, які лежать на взаємно перпендикулярних площинах.

У сферичній геометрії (за аналогією з плоскою) прийняті також поняття про *різносторонні*, *рівнобедрені* та *рівносторонні* трикутники.

Сферичні трикутники мають *висоти*, *медіани* та *бісектриси*, означення яких аналогічні означенням цих елементів у плоскій геометрії. Наприклад, бісектрисою кута A сферичного трикутника ABC називається дуга AL великого кола, що ділить цей кут пополам.

Бісектриси трьох кутів сферичного трикутника перетинаються у сферичному центрі малого кола, вписаного в трикутник.

Серединні перпендикуляри до трьох сторін сферичного трикутника перетинаються у сферичному центрі малого кола, описаного навколо трикутника.

Розв'язання сферичних трикутників складає предмет сферичної тригонометрії та знаходить застосування в астрономії, картографії, навігації, вищій геодезії, кристалографії, фотограмметрії та при розгляді геометричних задач у ряді інших дисциплін.

1.2. Сферична відстань.

Географічна сферична система координат

Менша дуга AB великого кола $CABD$ визначає *сферичну відстань (метрику)* між точками A та B на сферичній поверхні (рис. 1) і називається *ортодромією*. Ортодромія AB є найкоротшою геодезичною лінією на сфері, що з'єднує A та B . Звичайно її визначають у кутовій мірі.

Для введеної таким чином метрики справджується *нерівність трикутника*:

Сума двох сторін сферичного трикутника завжди більша за третю сторону:

$$a + b > c; \quad b + c > a; \quad a + c > b. \quad (1.4)$$

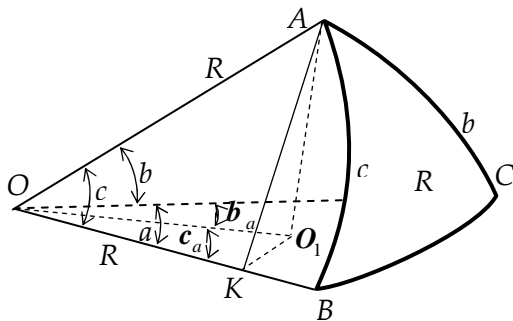


Рис. 6

Нерівності (1.4) впливають зі співвідношень між плоскими кутами відповідного тригранника (рис. 6).

Доведемо, наприклад, другу нерівність $b + c > a$. Нехай

$$AO_1 \perp (OBC)$$

$$\text{і } OB \perp O_1K.$$

Тоді $OO_1 \perp AO_1$ і

$OB \perp AK$. З прямокутних трикутників AOK і O_1OK маємо: $OK = OA \cos c$; $OK = OO_1 \cos c_a$. Звідси $OA \cos c = OO_1 \cos c_a$. Оскільки $OO_1 < OA$ (як катет і гіпотенуза прямокутного ΔAO_1O), то $\cos c < \cos c_a$. Звідки $c > c_a$. Аналогічно можна показати, що $b > b_a$. Тоді $b + c > b_a + c_a = a$.

Для суми плоских кутів тригранника $OABC$ виконується нерівність

$$0^\circ < a + b + c < 360^\circ, \quad (1.5)$$

яку можна перефразувати так:

Сума сторін сферичного трикутника завжди більша за 0° і менша за 360° .

Безпосередньо з нерівностей (1.4) випливає, що:

а) кожна зі сторін сферичного трикутника більша за різницю двох інших:

$$a > c - b; \quad c > a - b; \quad b > a - c; \quad (1.6)$$

б) півпериметр $p = (a + b + c) / 2$ сферичного трикутника більший за кожну з його сторін:

$$p > a; \quad p > b; \quad p > c. \quad (1.7)$$

Положення довільної точки N на сферичній поверхні може бути визначене введенням деякої системи координат.

Географічна сферична система координат (рис. 1) задається двома взаємно перпендикулярними великими колами $CABD$ та $PLCP_1DT$. Коло $CABD$ називається **екватором**, а півколо $PLCP_1$ – **початковим меридіаном**. Координатна сітка цієї системи утворюється **паралелями** – колами малих кіл, що паралельні екватору, та **меридіанами** – півколами великих кіл, що перпендикулярні до екватора. Кожний меридіан з'єднує **північний** P та **південний** P_1 **полюси**.

Місцезнаходження довільної точки N на сфері визначається двома координатами (φ, λ) , де φ – **широта** та λ – **довгота**. Широта φ вимірюється кутом $\varphi = BON$ або сферичною відстанню $\varphi = BN$ уздовж меридіана від екватора до відповідної паралелі $LMNT$ (на північ або південь від 0° до 90°). Довгота λ вимірюється кутом $\lambda = CPB$ між початковим меридіаном $PLCP_1$ та відповідним меридіаном $PNBP_1$ або відстанню $\lambda = CB$ уздовж екватора від початкового меридіану до відповідного меридіану $PNBP_1$ (на схід чи захід від 0° до 180°).

Для двох довільних точок M_1 та M_2 на поверхні сфери **азимутом** точки M_2 по відношенню до точки M_1 називається

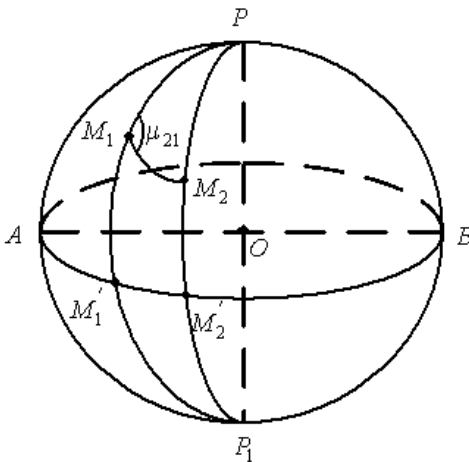


Рис. 7

сферичний кут μ_{21} , який утворюється ортодромією M_1M_2 та меншою дугою меридіана PM_1P_1 , що проходить через точку M_1 (рис. 7).

Зауваження. У навігації при виборі траєкторії часто відмовляються від ортодромії, оскільки остання (крім випадків, коли нею служить дуга екватора чи меридіана) перетинає ме-

ридiани пiд рiзними кутами, що вимагає постійної змiни курсу судна. Зручнiше рухатися по *локсодромi* – лiнii, що утворює з кожним меридiаном сталий кут K . На сферi при $K = 0^\circ$ i $K = 180^\circ$ локсодромiя спiвпадає з меридiаном, а при $K = 90^\circ$ i $K = 270^\circ$ – з паралеллю чи екватором. В iнших випадках вона має вигляд спiралi з нескiнченним числом виткiв, що необмежено наближається до полюсiв (рис. 8). При перемiщеннi на великi вiдстанi, коли рiзниця довжин локсодромiї та ортодромiї стає суттєвою, спочатку розраховують ортодромiю, потiм вiдмiчають на нiй промiжнi точки i наближено замiнюють кожну дiлянку мiж сусiднiми точками вiдповiдною локсодромiєю.

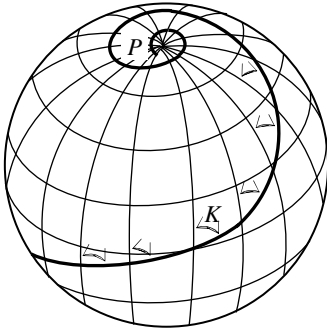


Рис. 8

Довжина S та кут K локсодромiї мiж точками $M_1(\varphi_1, \lambda_1)$ та $M_2(\varphi_2, \lambda_2)$

визначаються зi спiввiдношень:

$$\text{а) при } \varphi_1 = \varphi_2: \quad K = 90^\circ; \quad S = R \cos \varphi_1^\circ \cdot |\Delta \lambda^\circ| / \rho^\circ;$$

$$\text{б) при } \varphi_1 \neq \varphi_2:$$

$$\operatorname{tg} K = \frac{\Delta \lambda^\circ / \rho^\circ}{\ln \operatorname{tg} (45^\circ + \varphi_2^\circ / 2) - \ln \operatorname{tg} (45^\circ + \varphi_1^\circ / 2)}; \quad S = \frac{R \Delta \varphi^\circ}{\rho^\circ \cos K}.$$

Тут широта φ° i довгота λ° подаються в градусах; $\Delta \lambda^\circ = \lambda_2^\circ - \lambda_1^\circ$; $\Delta \varphi^\circ = \varphi_2^\circ - \varphi_1^\circ$. (Через складнiсть доведення формул опускаємо).

1.3. Полярнi сферичнi трикутники

Розглянемо сферичний трикутник ABC i вiдповiдний тригранник $OABC$ (рис. 4). Проведемо через центр O три променi OA_1 , OB_1 i OC_1 , що перпендикулярнi вiдповiдно до граней OBC , OAC i OAB та направленi всередину тригранника. Точки перетину A_1 , B_1 i C_1 цих променiв зi сферою служать полюсами вiдповiдно поляр BC , AC i AB – сторiн ΔABC . Сферичний трикутник

$A_1B_1C_1$ називають **полярним** до даного трикутника ABC .

Виявляється, що трикутники ABC та $A_1B_1C_1$ **взаємополярні**: якщо вершини трикутника ABC є полюсами сторін трикутника $A_1B_1C_1$, то і, навпаки, вершини трикутника $A_1B_1C_1$ є полюсами сторін трикутника ABC (рис. 9).

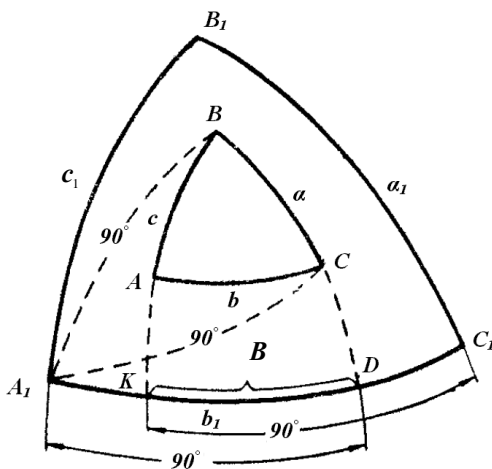


Рис. 9

Сферичний трикутник, що співпадає зі своїм полярним, називають **автополярним**. Такий трикутник є восьмою частиною поверхні сфери.

Користуючись рис. 9, знайдемо співвідношення між елементами B і b_1 взаємополярних трикутників ABC і $A_1B_1C_1$:

$$\begin{aligned} A_1K &= A_1D - KD = 90^\circ - B; \quad b_1 = A_1C_1 = A_1K + KC_1 = \\ &= 90^\circ - B + 90^\circ = 180^\circ - B. \quad \text{Звідси } b_1 + B = 180^\circ. \end{aligned}$$

Аналогічні вирази можна знайти для пар A і a_1 , C і c_1 .

Ці співвідношення

$$a_1 + A = 180^\circ; \quad b_1 + B = 180^\circ; \quad c_1 + C = 180^\circ. \quad (1.8)$$

Виражають основну властивість полярних трикутників: сума довільного кута даного трикутника ABC та відповідної йому сторони полярного трикутника $A_1B_1C_1$ дорівнює 180° :

З того, що трикутники ABC та $A_1B_1C_1$ – взаємополярні, випливає

$$a + A_1 = 180^\circ; \quad b + B_1 = 180^\circ; \quad c + C_1 = 180^\circ. \quad (1.9)$$

Таким чином, кожне твердження про сторони та кути сферичного трикутника може бути перетворене у відповідне твердження про кути та сторони полярного трикутника.

Розглянемо два взаємополярні трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ (рис. 9). Застосовуючи співвідношення (1.5) до полярного трикутника $A_1B_1C_1$, дістанемо

$$0^\circ < a_1 + b_1 + c_1 < 360^\circ. \quad (1.10)$$

На підставі властивостей полярних трикутників (1.8), можна написати:

$$a_1 = 180^\circ - A, \quad b_1 = 180^\circ - B, \quad c_1 = 180^\circ - C. \quad (1.11)$$

Підставимо значення сторін a_1 , b_1 та c_1 (1.11) у нерівність (1.10) та знайдемо: $0^\circ < 540^\circ - (A + B + C) < 360^\circ$.

Відніmemo з усіх частин останньої нерівності 540° , змінимо знак на протилежний та одержимо вираз

$$180^\circ < A + B + C < 540^\circ. \quad (1.12)$$

Тобто,

сума кутів сферичного трикутника завжди більша за 180° і менша за 540° .

Для полярного трикутника $A_1B_1C_1$ у відповідності з формулами (1.4) маємо: $a_1 + b_1 > c_1$. Підставимо в цю нерівність значення сторін a_1 , b_1 та c_1 з формул (1.11) і дістанемо:

$$360^\circ - A - B > 180^\circ - C \quad \text{або} \quad A + B - C < 180^\circ.$$

Отже,

сума двох кутів сферичного трикутника без третього менша за 180° :

$$A + B - C < 180^\circ, \quad A + C - B < 180^\circ, \quad B + C - A < 180^\circ. \quad (1.13)$$

1.4. Рівність сферичних трикутників. Спряжені трикутники

Рухом (переміщенням) на сфері називається таке її перетворення, що зберігає відстані між точками. Відомо [1], що:

будь-який рух на сфері є композицією повороту навколо осі та дзеркальної симетрії відносно площини;

будь-який рух на сфері переводить пару діаметрально протилежних точок знову в таку ж пару.

Два сферичні трикутники називаються *рівними*, якщо їх можна сумістити один з одним переміщенням на сфері.

Рівність трикутників на сфері, як і на площині, визначається рівністю їх трьох елементів.

Два сферичних трикутники, що розміщені на одній і тій же сфері, рівні між собою, якщо вони мають відповідно рівні:

1) дві сторони та кут між ними; 2) одну сторону та два прилеглих до неї кути; 3) три сторони; 4) три кути.

Перші три випадки аналогічні відповідним у геометрії на площині та можуть бути доведені суміщенням трикутників один з одним рухом на сфері. Справедливість рівності трикутників у четвертому випадку випливає з наступних міркувань. Відомо, що три двогранні кути повністю визначають тригранник. Але два тригранники, що мають відповідно рівні двогранні кути, будуть рівними, отже їх можна сумістити один з одним усіма їхніми точками. Такі тригранники будуть утворювати на поверхні однієї і тієї ж сфери трикутники, що мають усі відповідно рівні елементи.

Зауваження 1. Порівнюючи попарно перший випадок з другим, а третій з четвертим, зазначимо, що коли для двох сферичних трикутників виконується перша ознака кожної пари, то для полярних по відношенню до них трикутників справедлива друга ознака тієї ж пари.

Зауваження 2. На поверхні сфери, як і на площині, можливий випадок, коли два рівних трикутники мають протилежну орієнтацію. Якщо розглядати ці трикутники як тверде тіло, то їх не можна сумістити один з одним, не виходячи зі сферичної поверхні, тобто використовуючи тільки обертання навколо осі. Для цього потрібно застосувати також дзеркальну симетрію. Такі трикутники називають *дзеркальними*, а в геодезії для них більш вживаним є термін “*симетричні*”.

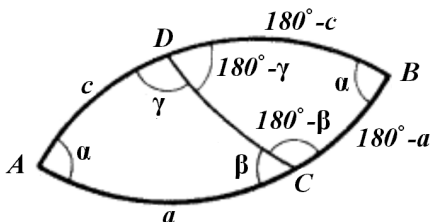


Рис. 10

На рис. 10 зображений двокутник з кутом α та проведена дуга великого кола CD . Ця дуга ділить даний двокутник на два сферичних трикутники ACD та $B CD$, що називаються *спряженими* за стороною CD .

Для будь-якого сферичного трикутника існує три спряжених (за кожною зі сторін).

У спряжених трикутників завжди є одна спільна сторона. Протилежні цій стороні кути рівні між собою (на рис. 10 сторона CD та кути α). Кути при двох інших вершинах C та D , а також прилеглі до них сторони, доповнюють один одного до 180° .

1.5. Площа сферичного трикутника

Спочатку одержимо формулу для площі сферичного двокутника. Якщо площу поверхні кулі поділити на 360 рівних частин, то кожна із них дорівнюватиме площі F_{1° двокутника з кутом при вершині в 1° : $F_{1^\circ} = 4\pi R^2 / 360 = 2\pi R^2 / 180$.

Тоді площа двокутника з кутом α° буде

$$F_\alpha = F_{1^\circ} \alpha^\circ = (2\pi / 180) R^2 \alpha^\circ = 2\alpha^\circ R^2 / \rho^\circ, \quad (1.14)$$

де $\rho^\circ = 180^\circ / \pi = 57,2957795\dots$ та α° подано у градусах.

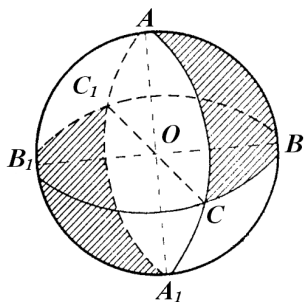


Рис. 11

Виразимо α у радіанній мірі і дістанемо:

$$F_\alpha = 2\alpha R^2. \quad (1.15)$$

На рис. 11 подано два рівних (точніше, дзеркальних) трикутники ABC та $A_1B_1C_1$. Трикутник $A_1B_1C_1$ утворюється дугами великих кіл, що є продовженням сторін $\triangle ABC$. Відповідні вершини обох трикутників лежать у діаметрально протилежних точках.

Площа сферичного трикутника ABC , згідно з рис. 11, може бути виражена такими трьома співвідношеннями:

$$\left. \begin{aligned} F_{ABC} &= F_A - F_{A_1BC} \\ F_{ABC} &= F_B - F_{AB_1C} \\ F_{ABC} &= F_C - F_{ABC_1} \end{aligned} \right\}, \quad (1.16)$$

де F_A, F_B, F_C – площі двокутників ABA_1C, BAB_1C та CAC_1B ; $F_{A_1BC}, F_{AB_1C}, F_{ABC_1}$ – площі трикутників A_1BC, AB_1C та ABC_1 .

Складемо окремо ліві та праві частини рівнянь (1.16) і врахуємо формулу (1.15). Тоді

$$3F_{ABC} = 2R^2(A + B + C) - (F_{A_1BC} + F_{AB_1C} + F_{ABC_1}).$$

Оскільки трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ – рівні, то їх площі однакові. Тоді

$$3F_{ABC} = 2R^2(A + B + C) - (F_{A_1BC} + F_{AB_1C} + F_{A_1B_1C_1}). \quad (1.17)$$

Другий доданок правої частини рівняння (1.17), що видно з рис. 11, дорівнює площі $2\pi R^2$ півсфери без площі ΔABC :

$$F_{A_1BC} + F_{AB_1C} + F_{A_1B_1C_1} = 2\pi R^2 - F_{ABC}.$$

Тоді зі співвідношення (1.17) випливає

$$2F_{ABC} = 2R^2(A + B + C - \pi) \quad \text{або} \quad F_{ABC} = R^2(A + B + C - \pi).$$

Різниця між сумою всіх внутрішніх кутів сферичного трикутника і сумою всіх таких же кутів плоского трикутника називається **сферичним надлишком (ексцесом)** ε даного трикутника:

$$\varepsilon^\circ = A + B + C - 180^\circ \quad \text{або} \quad \varepsilon = A + B + C - \pi. \quad (1.18)$$

Застосовуючи це поняття, для площі сферичного трикутника остаточно одержуємо

$$F_{ABC} = R^2\varepsilon, \quad (1.19)$$

де сферичний надлишок ΔABC взято у радіанній мірі.

Площа сферичного трикутника дорівнює добутку квадрата радіуса великого кола на сферичний надлишок.

1.6. Поняття про сферичний многокутник

Сферичним многокутником називається замкнена частина поверхні сфери, що обмежена послідовно сполученими дугами великих кіл, які менші півкола.

Сферичний многокутник називається *опуклим*, якщо він розміщений по один бік від кожного з великих кіл, частиною яких служать його сторони.

Кожному сферичному многокутнику відповідає многогранний кут, вершиною якого служить центр сфери, а ребрами – відрізки, що сполучають центр з вершинами многокутника. Навпаки, будь-який многогранний кут з вершиною в центрі сфери перетинає її по сферичному многокутнику.

Куты сферичного многокутника рівні відповідним двогранним кутам многогранника. Можна довести, що

периметр опуклого сферичного многокутника менше великого кола.

Сполучимо одну з вершин опуклого сферичного n -кутника дугами великих кіл зі всіма іншими його вершинами. Одержимо $n-2$ сферичних трикутника. Площа n -кутника дорівнює сумі площ отриманих трикутників. Тому площу F_n n -кутника обчислюють за формулою $F_n = R^2 (\Sigma_n - (n-2)\pi)$, де Σ_n – сума всіх його внутрішніх кутів.

2. Основи сферичної тригонометрії. Основні формули

Основні формули (формули першого порядку) зв'язують чотири чи п'ять елементів сферичного трикутника. Вони дають можливість за відомими трьома чи чотирма елементами знайти четвертий чи п'ятий.

2.1. Формули косинусів сторін сферичного трикутника

Розглянемо рис. 12, на якому зображено трикутник ABC на сфері з радіусом, що дорівнює одиниці, та центром у точці O . У вершині A проведені дотичні AE та AD до сторін b та c . Ці дотичні перетинаються у точках D і E з продовженням радіусів сфери, що проходять через вершини C і B .

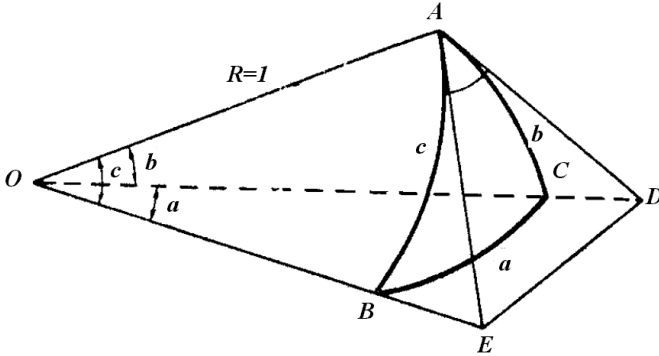


Рис. 12

Застосуємо теорему косинусів тригонометрії на площині до трикутників AED та OED і запишемо її для сторони DE :

$$\left. \begin{aligned} DE^2 &= AE^2 + AD^2 - 2AE \cdot AD \cos A \\ DE^2 &= OD^2 + OE^2 - 2OD \cdot OE \cos \alpha \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

Прирівняємо між собою праві частини рівнянь (2.1) і знайдемо:

$$(OE^2 - AE^2) + (OD^2 - AD^2) - 2OD \cdot OE \cos \alpha + 2AE \cdot AD \cos A = 0.$$

Зважаючи, що радіус сфери $R = 1$ маємо:

$$(OE^2 - AE^2) + (OD^2 - AD^2) = OA^2 + OA^2 = 2;$$

$$AD = \operatorname{tg} b; \quad AE = \operatorname{tg} c; \quad OE = 1/\cos c; \quad OD = 1/\cos b.$$

$$\text{Далі одержуємо: } 1 - \frac{\cos a}{\cos b \cos c} + \operatorname{tg} b \operatorname{tg} c \cos A = 0.$$

Помножимо всі доданки останнього рівняння на $\cos b \cos c$ і остаточно дістанемо:

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A. \quad (2.2)$$

Побудова на рис. 12 можлива, якщо кожна зі сторін b і c менша 90° . Тому вираз (2.2) потрібно узагальнити на той випадок, коли трикутник має сторони більші за 90° . Для цього звернемося до

рис. 13. На ньому зображено $\triangle ABC$, що має сторони $b > 90^\circ$ і $c > 90^\circ$. Якщо продовжимо сторони b і c до їх перетину в точці D , то одержимо спряжений трикутник BCD , в якому кожна зі сторін $180^\circ - b$ і $180^\circ - c$ буде менша за 90° . Застосовуючи на цій основі вираз (2.2) до трикутника BCD , можемо записати:

$$\begin{aligned} \cos a = & \cos(180^\circ - b) \cos(180^\circ - c) + \\ & + \sin(180^\circ - b) \sin(180^\circ - c) \cos A \end{aligned}$$

або $\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$,

що співпадає з формулою (2.2).

Зауваження. При написанні формул сферичної тригонометрії часто використовують **метод перестановки елементів по колу**: кожному зі сторін та кожний з кутів трикутника замінюють у формулі, яку розглядають, наступними за ходом сторонами та кутами (у довільному напрямі), при цьому останній елемент завжди замінюють на перший (схема на рис. 14).

Застосуємо цей метод до співвідношення (2.2) і запишемо **формули косинусів сторін сферичного трикутника**:

$$\left. \begin{aligned} \cos a &= \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A \\ \cos b &= \cos a \cos c + \sin a \sin c \cos B \\ \cos c &= \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

Косинус сторони сферичного трикутника дорівнює добутку косинусів двох інших сторін, складеному з добутком синусів цих же сторін на косинус кута між ними.

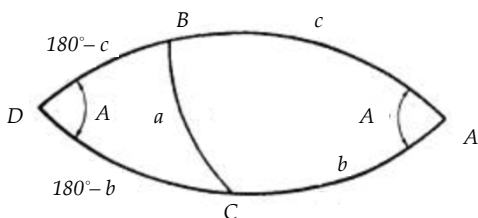


Рис. 13

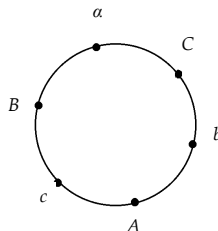


Рис. 14

2.2. Формули косинусів кутів сферичного трикутника

Запишемо формули (2.3) для сторін полярного трикутника $A_1B_1C_1$ по відношенню до трикутника ABC :

$$\left. \begin{aligned} \cos a_1 &= \cos b_1 \cos c_1 + \sin b_1 \sin c_1 \cos A_1 \\ \cos b_1 &= \cos a_1 \cos c_1 + \sin a_1 \sin c_1 \cos B_1 \\ \cos c_1 &= \cos a_1 \cos b_1 + \sin a_1 \sin b_1 \cos C_1 \end{aligned} \right\} . \quad (2.4')$$

Згідно з основною властивістю взаємополярних трикутників $A_1B_1C_1$ і ABC :

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= 180^\circ - A; \quad b_1 = 180^\circ - B; \quad c_1 = 180^\circ - C; \\ A_1 &= 180^\circ - a; \quad B_1 = 180^\circ - b; \quad C_1 = 180^\circ - c \end{aligned} \right\} . \quad (2.4'')$$

Підставимо (2.4'') у (2.4') і дістанемо:

$$\left. \begin{aligned} \cos(180^\circ - A) &= \cos(180^\circ - B) \cos(180^\circ - C) + \\ &+ \sin(180^\circ - B) \sin(180^\circ - C) \cos(180^\circ - a) \\ \cos(180^\circ - B) &= \cos(180^\circ - A) \cos(180^\circ - C) + \\ &+ \sin(180^\circ - A) \sin(180^\circ - C) \cos(180^\circ - b) \\ \cos(180^\circ - C) &= \cos(180^\circ - A) \cos(180^\circ - B) + \\ &+ \sin(180^\circ - A) \sin(180^\circ - B) \cos(180^\circ - c) \end{aligned} \right\} . \quad (2.4''')$$

Скористаємося формулами зведення тригонометричних функцій і помножимо на від'ємну одиницю ліву та праву частини кожного співвідношення (2.4'''). У результаті одержимо **формули косинусів кутів сферичного трикутника**:

$$\left. \begin{aligned} \cos A &= -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a \\ \cos B &= -\cos A \cos C + \sin A \sin C \cos b \\ \cos C &= -\cos A \cos B + \sin A \sin B \cos c \end{aligned} \right\} . \quad (2.4)$$

Косинус кута сферичного трикутника дорівнює добутку синусів двох інших кутів на косинус сторони між ними без добутку косинусів цих же кутів.

2.3. Сферична теорема синусів

Сферична теорема синусів. Відношення синуса кута сферичного трикутника до синуса протилежної сторони є величина стала для даного трикутника:

$$\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c} = K, \text{ де } K = \text{const}. \quad (2.5)$$

Іншими словами, синуси кутів сферичного трикутника відносяться як синуси протилежних сторін.

Доведення. З першої формули (2.3) знайдемо:

$$\cos A = (\cos a - \cos b \cos c) / (\sin b \sin c).$$

$$\begin{aligned} \text{Тоді } \sin^2 A &= 1 - \cos^2 A = 1 - (\cos a - \cos b \cos c)^2 / (\sin b \sin c)^2 = \\ &= \frac{\sin^2 b \sin^2 c - \cos^2 a + 2 \cos a \cos b \cos c - \cos^2 b \cos^2 c}{\sin^2 b \sin^2 c} = \\ &= \frac{(1 - \cos^2 b)(1 - \cos^2 c) - \cos^2 a + 2 \cos a \cos b \cos c - \cos^2 b \cos^2 c}{\sin^2 b \sin^2 c} = \\ &= (1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2 \cos a \cos b \cos c) / (\sin^2 b \sin^2 c). \end{aligned}$$

Поділимо обидві частини одержаного виразу на $\sin^2 a$:

$$\frac{\sin^2 A}{\sin^2 a} = \frac{1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2 \cos a \cos b \cos c}{\sin^2 a \sin^2 b \sin^2 c} = K^2. \quad (2.6)$$

Звідси $\sin A / \sin a = K$. До величини K кожна зі сторін сферичного трикутника входить однаково. Тому заміна сторін по колу не змінить значення величини K . Тобто, значення K є сталим для даного трикутника. Отже, $\sin B / \sin b = K$ і $\sin C / \sin c = K$.

Наслідок. Теорема синусів установлює зв'язок між сторонами та протилежними їм кутами сферичного трикутника:

а) *Напроти рівних сторін сферичного трикутника лежать рівні кути і навпаки:* $a = b \Leftrightarrow A = B$. (2.5')

б) *Напроти більшого кута сферичного трикутника лежить більша сторона і, навпаки, проти більшої сторони сферичного трикутника лежить більший кут:* $A > B \Leftrightarrow a > b$. (2.5'')

2.4. Формули п'яти елементів сферичного трикутника

Формули п'яти елементів установлюють зв'язок: а) між трьома сторонами та двома кутами сферичного трикутника (**основні формули п'яти елементів**); б) між трьома кутами та двома сторонами сферичного трикутника (**змінені формули п'яти елементів**).

Скористаємося формулами косинусів сторін сферичного трикутника. Розглянемо пару з другого та третього співвідношень (2.3):

$$\left. \begin{aligned} \cos b &= \cos a \cos c + \sin a \sin c \cos B \\ \cos c &= \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C \end{aligned} \right\}. \quad (2.6')$$

Виключимо $\cos c$ з першої формули (2.6'), застосовуючи другу:

$$\cos b = \cos a (\cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C) + \sin a \sin c \cos B;$$

$$\cos b = (1 - \sin^2 a) \cos b + \cos a \sin a \sin b \cos C + \sin a \sin c \cos B;$$

$$\cos b = \cos b - \sin^2 a \cos b + \cos a \sin a \sin b \cos C + \sin a \sin c \cos B.$$

Зведемо подібні члени, а потім розділимо обидві частини рівності на $\sin a$. Дістанемо:

$$\sin c \cos B = \sin a \cos b - \cos a \sin b \cos C. \quad (2.6'')$$

Якщо у формулах (2.6') виключити $\cos b$, то одержимо:

$$\sin b \cos C = \sin a \cos c - \cos a \sin c \cos B. \quad (2.6''')$$

Зробимо аналогічні перетворення для двох інших пар формул (2.3). Отримаємо **основні формули п'яти елементів**:

$$\left. \begin{aligned} \sin c \cos B &= \sin a \cos b - \cos a \sin b \cos C \\ \sin b \cos C &= \sin a \cos c - \cos a \sin c \cos B \\ \sin c \cos A &= \sin b \cos a - \cos b \sin a \cos C \\ \sin a \cos C &= \sin b \cos c - \cos b \sin c \cos A \\ \sin a \cos B &= \sin c \cos b - \cos c \sin b \cos A \\ \sin b \cos A &= \sin c \cos a - \cos c \sin a \cos B \end{aligned} \right\}. \quad (2.7)$$

Добуток синуса сторони на косинус прилеглого кута дорівнює добутку синуса третьої сторони на косинус протилежної цьому куту сторони без добутку косинуса третьої сторони на синус тієї

ж протилежної сторони і на косинус кута між ними.

Формули (2.7) однорідні відносно синусів сторін сферичного трикутника. Згідно зі сферичною теоремою синусів (2.5) зробимо таку заміну в цих співвідношеннях:

$$\sin a = \frac{1}{K} \sin A; \quad \sin b = \frac{1}{K} \sin B; \quad \sin c = \frac{1}{K} \sin C.$$

Після простих перетворень одержимо так звані **змінені формули п'яти елементів**, що встановлюють зв'язок між трьома кутами і двома сторонами сферичного трикутника:

$$\left. \begin{aligned} \sin A \cos b &= \sin C \cos B + \cos C \sin B \cos a \\ \sin A \cos c &= \sin B \cos C + \cos B \sin C \cos a \\ \sin B \cos a &= \sin C \cos A + \cos C \sin A \cos b \\ \sin B \cos c &= \sin A \cos C + \cos A \sin C \cos b \\ \sin C \cos b &= \sin A \cos B + \cos A \sin B \cos c \\ \sin C \cos a &= \sin B \cos A + \cos B \sin A \cos c \end{aligned} \right\}. \quad (2.8)$$

Добуток синуса кута на косинус прилеглої сторони дорівнює добутку косинуса кута, що протилежний цій стороні, на синус третього кута плюс добуток синуса протилежного кута на косинус третього кута і на косинус сторони між ними.

2.5. Формули чотирьох елементів сферичного трикутника

Якщо у лівій частині кожного співвідношення (2.7) зробити відповідну заміну синусів сторін за наступними парами формул, що впливають з теореми синусів:

$$\begin{aligned} \text{а) } \sin c &= \frac{\sin b}{\sin B} \sin C; \quad \sin b = \frac{\sin c}{\sin C} \sin B; \quad \text{б) } \sin c = \frac{\sin a}{\sin A} \sin C; \\ \sin a &= \frac{\sin c}{\sin C} \sin A; \quad \text{в) } \sin a = \frac{\sin b}{\sin B} \sin A; \quad \sin b = \frac{\sin a}{\sin A} \sin B, \end{aligned}$$

то після простих перетворень одержимо **формули чотирьох елементів (формули котангенсів)**:

$$\left. \begin{aligned}
 \cos a \cos C &= \operatorname{ctg} b \sin a - \operatorname{ctg} B \sin C \\
 \cos a \cos B &= \operatorname{ctg} c \sin a - \operatorname{ctg} C \sin B \\
 \cos b \cos C &= \operatorname{ctg} a \sin b - \operatorname{ctg} A \sin C \\
 \cos b \cos A &= \operatorname{ctg} c \sin b - \operatorname{ctg} C \sin A \\
 \cos c \cos A &= \operatorname{ctg} b \sin c - \operatorname{ctg} B \sin A \\
 \cos c \cos B &= \operatorname{ctg} a \sin c - \operatorname{ctg} A \sin B
 \end{aligned} \right\}. \quad (2.9)$$

Якщо у сферичному трикутнику ABC згідно зі схемою на рис. 14 узяти ряд із чотирьох поруч розташованих елементів, наприклад, b, C, a, B , то елементи C, a є середніми, а елементи b, B – крайніми. Тоді добуток косинусів середніх елементів дорівнює добутку котангенса крайньої сторони на синус середньої без добутку котангенса крайнього кута на синус середнього кута.

Одержані вище шість груп (2.3), (2.4), (2.5), (2.8) та (2.9) основних формул надають можливість розв'язати довільний сферичний трикутник за відомими трьома його елементами. Для практичних розрахунків у типових задачах звичайно використовують більш прості співвідношення, що знаходяться перетворенням основних формул. Вони будуть наведені нижче.

3. Розв'язання прямокутних і прямокутних сферичних трикутників

3.1. Формули для розв'язання прямокутних трикутників

$$\left. \begin{aligned}
 \cos a &= \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A \\
 \cos A &= -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a \\
 \cos B &= -\cos A \cos C + \sin A \sin C \cos b \\
 \cos C &= -\cos A \cos B + \sin A \sin B \cos c \\
 \sin A \sin b &= \sin a \sin B; \quad \sin A \sin c = \sin a \sin C \\
 \cos b \cos C &= \operatorname{ctg} a \sin b - \operatorname{ctg} A \sin C \\
 \cos b \cos A &= \operatorname{ctg} c \sin b - \operatorname{ctg} C \sin A \\
 \cos c \cos B &= \operatorname{ctg} a \sin c - \operatorname{ctg} A \sin B \\
 \cos c \cos A &= \operatorname{ctg} b \sin c - \operatorname{ctg} B \sin A
 \end{aligned} \right\}. \quad (3.1)$$

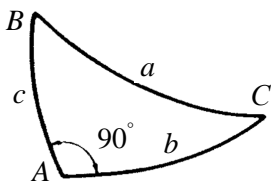


Рис. 15

У наведених десяти співвідношеннях (3.1), виділених із шести груп основних формул, використані позначення: A – прямий кут, a – *гіпотенуза*, b і c – *катети* (рис. 15).

Враховуючи, що $A = 90^\circ$ і

$$(\cos 90^\circ = 0; \sin 90^\circ = 1; \operatorname{ctg} 90^\circ = 0),$$

дістанемо десять робочих формул для розв’язання прямокутних сферичних трикутників:

$$\left. \begin{aligned} \cos a &= \cos b \cos c \\ \cos a &= \operatorname{ctg} B \operatorname{ctg} C \\ \cos B &= \sin C \cos b \\ \cos C &= \sin B \cos c \\ \sin b &= \sin a \sin B \\ \sin c &= \sin a \sin C \\ \cos C &= \operatorname{ctg} a \operatorname{tg} b \\ \sin b &= \operatorname{ctg} C \operatorname{tg} c \\ \cos B &= \operatorname{ctg} a \operatorname{tg} c \\ \sin c &= \operatorname{ctg} B \operatorname{tg} b \end{aligned} \right\} \cdot \quad (3.2)$$

Непер замінив у формулах (3.2) катети b і c їх доповненнями до 90° і запропонував зручне мнемонічне правило для написання формул (3.2) та поділив їх на дві групи:

$$\left. \begin{aligned} &\text{Перша група формул} \\ \cos a &= \sin(90^\circ - b) \sin(90^\circ - c) \\ \cos B &= \sin C \sin(90^\circ - b) \\ \cos C &= \sin B \sin(90^\circ - c) \\ \cos(90^\circ - b) &= \sin a \sin B \\ \cos(90^\circ - c) &= \sin a \sin C \end{aligned} \right\} \cdot \quad (3.3')$$

Друга група формул

$$\left. \begin{aligned} \cos a &= \operatorname{ctg} B \operatorname{ctg} C \\ \cos B &= \operatorname{ctg} a \operatorname{ctg} (90^\circ - c) \\ \cos C &= \operatorname{ctg} a \operatorname{ctg} (90^\circ - b) \\ \cos (90^\circ - c) &= \operatorname{ctg} B \operatorname{ctg} (90^\circ - b) \\ \cos (90^\circ - b) &= \operatorname{ctg} C \operatorname{ctg} (90^\circ - c) \end{aligned} \right\} \cdot \quad (3.3'')$$

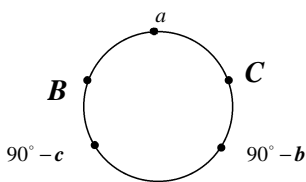


Рис. 16

Формули (3.3') та (3.3'') називають **правилом Непера**.

Якщо прийняти, що катети b та c лежать поруч, тобто не рахувати прямого кута A , і замінити катети їх доповненнями до 90° (схема на рис. 16), тоді **косинус довільного елемента прямокутного трикутника дорівнює добутку котангенсів прилеглих до нього елементів або добутку синусів елементів, що лежать окремо**.

Це мнемонічне правило можна подати для запам'ятовування у віршованій формі:

“Помнить нужно нам о том,

Элементов нужно три.

Там, где косинус внутри,

(косинус середнього елемента)

Там котангенсы кругом.

Дальний косинус где нужен,

(косинус окремого елемента)

Синус с синусом там дружен”.

3.2. Зв'язок між величинами сторін і кутів прямокутного сферичного трикутника

Зв'язок гіпотенузи з катетами виражає сферична теорема Піфагора (перша з формул (3.2)):

$$\cos a = \cos b \cos c.$$

Косинус гіпотенузи дорівнює добутку косинусів катетів.

Нехай кожний з катетів менше 90° , тоді $\cos b$ та $\cos c$ – додатні, але тоді $\cos a$ також додатний, тому $a < 90^\circ$.

Якщо кожний з катетів більше 90° , тоді $\cos b$ і $\cos c$ обидва від'ємні, а тому $\cos a$ додатний і $a < 90^\circ$.

Якщо один з катетів більше 90° , а другий менше 90° , то косинус одного катета додатний, а другого – від'ємний. Тому $\cos a$ буде від'ємний і $a > 90^\circ$.

Два елементи трикутника називають *однорідними*, якщо обидва вони більші або менші за 90° , і *різномірними*, коли один з них більший, а другий менший за 90° .

Користуючись цими поняттями, залежність між величинами катетів і гіпотенузи можна сформулювати так:

якщо катети однорідні, то гіпотенуза менша за 90° ; якщо ж катети різномірні, то гіпотенуза більша за 90° .

Для зв'язку гіпотенузи з прилеглими до неї кутами маємо співвідношення (друга з формул (3.2)):

$$\cos a = \operatorname{ctg} B \operatorname{ctg} C .$$

Проаналізувавши цей вираз аналогічно проведеному аналізу формули Піфагора, встановимо наступну залежність між гіпотенузою та прилеглими до неї кутами:

якщо прилеглі до гіпотенузи кути однорідні, то гіпотенуза менша за 90° ; якщо ж ці кути різномірні, то гіпотенуза більша за 90° .

Для зв'язку одного катета та двох кутів, що прилягають до гіпотенузи, маємо співвідношення (третья з формул (3.2)):

$$\cos B = \sin C \cos b .$$

Оскільки $\sin C$ завжди додатний незалежно від того, гострий чи тупий кут C , то знаки $\cos B$ і $\cos b$ завжди співпадають:

довільний катет і протилежний йому кут завжди однорідні.

Одержані співвідношення між величинами сторін і кутів прямокутного сферичного трикутника допомагають, при знаходженні елементів такого трикутника за їх синусами, вибирати, яке з двох можливих значень елемента є допустимим.

Наприклад, якщо в прямокутному $\triangle ABC$ катет $b > 90^\circ$ і в задачі для протилежного кута B одержано, що $\sin B = 1/2$, то за його значення приймається $B = 150^\circ$.

3.3. Основні випадки розв'язання прямокутних і прямосторонніх сферичних трикутників

Можливі шість різних випадків розв'язання прямокутних трикутників за даними:

1) гіпотенузою та катетом; 2) двома катетами; 3) гіпотенузою та прилеглим до неї кутом; 4) катетом та прилеглим до нього кутом; 5) двома кутами; 6) катетом та протилежним йому кутом.

При розв'язуванні необхідно стежити, щоб значення елементів відповідали *умови існування сферичного трикутника*, що виражаються співвідношеннями (1.4) – (1.7), (1.12), (1.13), (2.5'), (2.5'').

Якщо розв'язок трикутника за даними значеннями елементів існує, то у перших п'яти випадках він однозначний, а у шостому – двозначний. У шостому випадку перший з трьох шуканих елементів обчислюють за його синусом, що має додатне значення у першій та другій чвертях. Тому для першого елемента одержуємо два значення, що доповнюють один одного до 180° . Геометрично це означає, що дістаємо два спряжених прямокутних сферичних трикутники. Вони мають задані спільну сторону і протилежний їй кут при вершині двокутника.

При розв'язанні прямосторонніх сферичних трикутників сторону, що дорівнює 90° , позначають через a . Трикутник, полярний по відношенню до прямостороннього, є прямокутним. Це дозволяє звести розв'язання прямосторонніх трикутників до розв'язання прямокутних трикутників.

Розв'язування прямосторонніх трикутників здійснюють так:

1) за відомими елементами прямостороннього трикутника ABC за допомогою формул (1.8) та (1.9) знаходять відповідні елементи полярного прямокутного трикутника $A_1B_1C_1$;

2) розв'язують прямокутний $\Delta A_1B_1C_1$ за формулами (3.2);

3) за знайденими елементами трикутника $A_1B_1C_1$, користуючись формулами (1.8) і (1.9), знаходять елементи прямостороннього трикутника ABC .

Можливі шість різних випадків розв'язання прямосторонніх сферичних трикутників. Переходом до полярних трикутників вони зводяться до шести наведених вище випадків стосовно прямокутних трикутників.

4. Розв'язання косокутних сферичних трикутників

4.1. Формули синусів, косинусів і тангенсів половини кутів сферичного трикутника

Розглянемо довільний косокутний сферичний $\triangle ABC$. Враховуючи, що внутрішні кути лежать у межах від 0° до 180° , скористаємося тригонометричними формулами зниження степеня

$$\sin^2(\alpha/2) = (1 - \cos \alpha)/2, \quad \cos^2(\alpha/2) = (1 + \cos \alpha)/2,$$

а також співвідношенням для кута $\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}$,

що випливає з (2.2), і поняттям півпериметра $p = (a + b + c)/2$. За допомогою тотожних перетворень одержимо вказані групи формул.

1) Формули синусів половини кутів.

$$\begin{aligned} \sin^2(A/2) &= (1/2) (1 - (\cos a - \cos b \cos c)/(\sin b \sin c)) = \\ &= \frac{\sin b \sin c - \cos a + \cos b \cos c}{2 \sin b \sin c} = \frac{(\cos b \cos c + \sin b \sin c) - \cos a}{2 \sin b \sin c} = \\ &= \frac{\cos(b-c) - \cos a}{2 \sin b \sin c} = 2 \sin \frac{b-c+a}{2} \sin \frac{a-b+c}{2} / (2 \sin b \sin c) = \\ &= \sin \frac{a+b+c-2c}{2} \sin \frac{a+b+c-2b}{2} / (\sin b \sin c) = \\ &= \frac{\sin(p-c) \sin(p-b)}{\sin b \sin c}; \quad \sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\sin(p-b) \sin(p-c)}{\sin b \sin c}}. \end{aligned}$$

Виконавши аналогічні перетворення для $\sin(B/2)$ і $\sin(C/2)$, остаточно дістанемо **формули синусів половини кутів**:

$$\left. \begin{aligned} \sin \frac{A}{2} &= \sqrt{\sin(p-b) \sin(p-c) / (\sin b \sin c)} \\ \sin \frac{B}{2} &= \sqrt{\sin(p-a) \sin(p-c) / (\sin a \sin c)} \\ \sin \frac{C}{2} &= \sqrt{\sin(p-a) \sin(p-b) / (\sin a \sin b)} \end{aligned} \right\}. \quad (4.1)$$

2) Формули косинусів половини кутів.

$$\begin{aligned} \cos^2(A/2) &= (1/2) \left(1 + (\cos a - \cos b \cos c) / (\sin b \sin c) \right) = \\ &= \frac{\sin b \sin c + \cos a - \cos b \cos c}{2 \sin b \sin c} = \frac{\cos a - (\cos b \cos c - \sin b \sin c)}{2 \sin b \sin c} = \\ &= \frac{\cos a - \cos(b+c)}{2 \sin b \sin c} = 2 \sin \frac{a+b+c}{2} \sin \frac{b+c-a}{2} / (2 \sin b \sin c) = \\ &= \sin p \sin \frac{a+b+c-2a}{2} / (\sin b \sin c) = \frac{\sin p \sin(p-a)}{\sin b \sin c}; \\ \cos(A/2) &= \sqrt{\sin p \sin(p-a) / (\sin b \sin c)}. \end{aligned}$$

Виконавши аналогічні перетворення для $\cos(B/2)$ і $\cos(C/2)$, у підсумку отримаємо **формули косинусів половини кутів**:

$$\left. \begin{aligned} \cos(A/2) &= \sqrt{\sin p \sin(p-a) / (\sin b \sin c)} \\ \cos(B/2) &= \sqrt{\sin p \sin(p-b) / (\sin a \sin c)} \\ \cos(C/2) &= \sqrt{\sin p \sin(p-c) / (\sin a \sin b)} \end{aligned} \right\}. \quad (4.2)$$

Зауваження 1. Формули (4.1) рекомендують застосовувати, коли шуканий кут значно відрізняється від 180° . Якщо його величина близька до 180° , то краще користуватися формулами (4.2).

3) Формули тангенсів половини кутів.

Розділивши ліві та праві частини формул (4.1) на відповідні ліві та праві частини співвідношень (4.2), одержимо

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{A}{2} &= \sqrt{\frac{\sin(p-b) \sin(p-c)}{\sin p \sin(p-a)}} \\ \operatorname{tg} \frac{B}{2} &= \sqrt{\frac{\sin(p-a) \sin(p-c)}{\sin p \sin(p-b)}} \\ \operatorname{tg} \frac{C}{2} &= \sqrt{\frac{\sin(p-a) \sin(p-b)}{\sin p \sin(p-c)}} \end{aligned} \right\} \quad (4.3)$$

– **формули тангенсів половини кутів.**

Введемо допоміжну величину

$$M = \sqrt{\sin(p-a)\sin(p-b)\sin(p-c)/\sin p} \quad (4.4)$$

і дістанемо формули тангенсів половини кутів у вигляді:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{A}{2} &= \frac{M}{\sin(p-a)} \\ \operatorname{tg} \frac{B}{2} &= \frac{M}{\sin(p-b)} \\ \operatorname{tg} \frac{C}{2} &= \frac{M}{\sin(p-c)} \end{aligned} \right\}. \quad (4.5)$$

Тангенс половини кута сферичного трикутника дорівнює допоміжній величині M , поділеній на синус різниці півпериметра і протилежної куту сторони.

Перемножимо окремо ліві та праві частини формул (4.5) і, враховуючи (4.4), отримаємо:

$$\operatorname{tg} \frac{A}{2} \operatorname{tg} \frac{B}{2} \operatorname{tg} \frac{C}{2} = \frac{M}{\sin p}. \quad (4.6)$$

Зауваження 2. Величина M дорівнює тангенсу сферичного радіуса r_m малого кола, вписаного у даний трикутник: $M = \operatorname{tg} r_m$.

4.2. Формули синусів, косинусів і тангенсів половини сторін сферичного трикутника

Щоб одержати зазначені формули, необхідно співвідношення (4.1) та (4.2) написати для кутів трикутника $A_1B_1C_1$, полярного до даного ΔABC .

Нехай $p_1 = (a_1 + b_1 + c_1)/2$ – півпериметр полярного трикутника $A_1B_1C_1$.

Для елементів взаємополярних трикутників виконуються відомі співвідношення:

$$a_1 = 180^\circ - A; \quad b_1 = 180^\circ - B; \quad c_1 = 180^\circ - C; \quad A_1 = 180^\circ - a. \quad (4.7)$$

Тоді

$$\left. \begin{aligned} p_1 &= (540^\circ - A - B - C)/2 = 180^\circ - \varepsilon/2; \quad p_1 - a_1 = A - \varepsilon/2; \\ p_1 - b_1 &= B - \varepsilon/2; \quad p_1 - c_1 = C - \varepsilon/2; \quad A_1/2 = 90^\circ - a/2, \end{aligned} \right\}, \quad (4.8)$$

де $\varepsilon = A + B + C - 180^\circ$ – сферичний надлишок трикутника ABC .

Скористаємося формулами (4.1) і (4.2), записаними для трикутника $A_1B_1C_1$ та підставимо у них значення величин із формул (4.7) та (4.8) і одержимо:

1) Формули синусів половини сторін.

Запишемо першу з формул (4.2) для полярного $\Delta A_1B_1C_1$:

$$\cos(A_1/2) = \sqrt{\sin p_1 \sin(p_1 - a_1) / (\sin b_1 \sin c_1)}$$

і підставимо в неї замість елементів полярного трикутника $A_1B_1C_1$ відповідні вирази через елементи трикутника ABC з формул (4.7) та (4.8). Отримаємо:

$$\cos \frac{180^\circ - a}{2} = \sqrt{\frac{\sin(180^\circ - \varepsilon/2) \sin(A - \varepsilon/2)}{\sin(180^\circ - B) \sin(180^\circ - C)}}.$$

За тригонометричними формулами зведення дістанемо:

$$\sin \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{\sin(\varepsilon/2) \sin(A - \varepsilon/2)}{\sin B \sin C}}.$$

Виконавши аналогічні тотожні перетворення з другим і третім співвідношеннями з (4.2), остаточно одержимо

$$\left. \begin{aligned} \sin \frac{a}{2} &= \sqrt{\frac{\sin(\varepsilon/2) \sin(A - \varepsilon/2)}{\sin B \sin C}} \\ \sin \frac{b}{2} &= \sqrt{\frac{\sin(\varepsilon/2) \sin(B - \varepsilon/2)}{\sin A \sin C}} \\ \sin \frac{c}{2} &= \sqrt{\frac{\sin(\varepsilon/2) \sin(C - \varepsilon/2)}{\sin A \sin B}} \end{aligned} \right\} \quad (4.9)$$

– *формули синусів половини сторін.*

2) Формули косинусів половини сторін.

Запишемо першу з формул (4.1) для полярного $\Delta A_1B_1C_1$:

$$\sin(A_1/2) = \sqrt{\sin(p_1 - b_1)\sin(p_1 - c_1)/(\sin b_1 \sin c_1)}.$$

Підставимо в це співвідношення замість елементів полярного $\Delta A_1 B_1 C_1$ відповідні значення з формул (4.7) та (4.8). Дістанемо:

$$\sin \frac{180^\circ - a}{2} = \sqrt{\frac{\sin(B - \varepsilon/2)\sin(C - \varepsilon/2)}{\sin(180^\circ - B)\sin(180^\circ - C)}}.$$

Застосуємо до цього виразу формули зведення й отримаємо:

$$\cos \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{\sin(B - \varepsilon/2)\sin(C - \varepsilon/2)}{\sin B \sin C}}.$$

Співвідношення для $\cos(b/2)$ і $\cos(c/2)$ дістаємо аналогічно. У підсумку маємо **формули косинусів половини сторін**:

$$\left. \begin{aligned} \cos \frac{a}{2} &= \sqrt{\frac{\sin(B - \varepsilon/2)\sin(C - \varepsilon/2)}{\sin B \sin C}} \\ \cos \frac{b}{2} &= \sqrt{\frac{\sin(A - \varepsilon/2)\sin(C - \varepsilon/2)}{\sin A \sin C}} \\ \cos \frac{c}{2} &= \sqrt{\frac{\sin(A - \varepsilon/2)\sin(B - \varepsilon/2)}{\sin A \sin B}} \end{aligned} \right\} \quad (4.10)$$

3) Формули тангенсів половини сторін.

Діленням окремо лівих і правих частин формул (4.9) і (4.10) одержимо **формули тангенсів половини сторін**:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{a}{2} &= \sqrt{\frac{\sin(\varepsilon/2)\sin(A - \varepsilon/2)}{\sin(B - \varepsilon/2)\sin(C - \varepsilon/2)}} \\ \operatorname{tg} \frac{b}{2} &= \sqrt{\frac{\sin(\varepsilon/2)\sin(B - \varepsilon/2)}{\sin(A - \varepsilon/2)\sin(C - \varepsilon/2)}} \\ \operatorname{tg} \frac{c}{2} &= \sqrt{\frac{\sin(\varepsilon/2)\sin(C - \varepsilon/2)}{\sin(A - \varepsilon/2)\sin(B - \varepsilon/2)}} \end{aligned} \right\} \quad (4.11)$$

Введемо допоміжну величину

$$N = \sqrt{\frac{\sin(\varepsilon/2)}{\sin(A - \varepsilon/2)\sin(B - \varepsilon/2)\sin(C - \varepsilon/2)}} \quad (4.12)$$

і запишемо формули тангенсів половини сторін у вигляді:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{a}{2} &= N \sin(A - \varepsilon/2) \\ \operatorname{tg} \frac{b}{2} &= N \sin(B - \varepsilon/2) \\ \operatorname{tg} \frac{c}{2} &= N \sin(C - \varepsilon/2) \end{aligned} \right\}. \quad (4.13)$$

Тангенс половини сторони сферичного трикутника дорівнює добутку допоміжної величини N на синус різниці протилежного кута та половини сферичного надлишку.

Перемножимо окремо ліві та праві частини (4.13), скористаємося співвідношенням (4.12) і дістанемо:

$$\operatorname{tg} \frac{a}{2} \operatorname{tg} \frac{b}{2} \operatorname{tg} \frac{c}{2} = N \sin \frac{\varepsilon}{2}. \quad (4.14)$$

Зауваження. Величина N дорівнює тангенсу сферичного радіуса R_m малого кола, описаного навколо даного трикутника:

$$N = \operatorname{tg} R_m.$$

4.3. Формули Даламбера – Гаусса й аналогії Непера

Якщо у тригонометричні тотожності:

$$\left. \begin{aligned} \sin \frac{A \pm B}{2} &= \sin \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \pm \cos \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \\ \cos \frac{A \pm B}{2} &= \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \mp \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \end{aligned} \right\} \quad (4.15)$$

підставити відповідні значення з (4.1), (4.2), (4.9) та (4.10), зробити необхідні тотожні перетворення, то дістанемо чотири **формули Даламбера – Гаусса**:

$$\left. \begin{aligned} 1) \sin \frac{A+B}{2} &= \cos \frac{a-b}{2} \cos \frac{C}{2} / \cos \frac{c}{2} \\ 2) \sin \frac{A-B}{2} &= \sin \frac{a-b}{2} \cos \frac{C}{2} / \sin \frac{c}{2} \\ 3) \cos \frac{A+B}{2} &= \cos \frac{a+b}{2} \sin \frac{C}{2} / \cos \frac{c}{2} \\ 4) \cos \frac{A-B}{2} &= \sin \frac{a+b}{2} \sin \frac{C}{2} / \sin \frac{c}{2} \end{aligned} \right\}. \quad (4.16)$$

Для прикладу виведемо першу формулу з (4.16). Для цього підставимо у першу тотожність (4.15) (з вибором знаку “+”) значення синусів і косинусів половини кутів зі співвідношень (4.1) і (4.2), а потім виконаємо тотожні перетворення:

$$\begin{aligned} \sin \frac{A+B}{2} &= \sqrt{\frac{\sin(p-b)\sin(p-c)}{\sin b \sin c}} \cdot \sqrt{\frac{\sin p \sin(p-b)}{\sin a \sin c}} + \\ &+ \sqrt{\frac{\sin p \sin(p-a)}{\sin b \sin c}} \cdot \sqrt{\frac{\sin(p-a)\sin(p-c)}{\sin a \sin c}} = \frac{\sin(p-b)}{\sin c} \times \\ &\times \sqrt{\frac{\sin p \sin(p-c)}{\sin a \sin b}} + \frac{\sin(p-a)}{\sin c} \cdot \sqrt{\frac{\sin p \sin(p-c)}{\sin a \sin b}} = \\ &= \sqrt{\frac{\sin p \sin(p-c)}{\sin a \sin b}} \cdot \left(\frac{\sin(p-b)}{\sin c} + \frac{\sin(p-a)}{\sin c} \right) = \cos \frac{C}{2} \times \\ &\times \frac{2 \sin(p-a/2-b/2) \cos((a-b)/2)}{2 \sin(c/2) \cos(c/2)} = \cos \frac{a-b}{2} \cos \frac{C}{2} / \cos \frac{c}{2}. \end{aligned}$$

Аналогічно виводяться інші формули Даламбера – Гаусса.

Поділимо першу формулу із (4.16) почастинно на третю, а другу на четверту. У результаті одержимо **першу та другу аналогії Непера**:

$$\left. \begin{aligned} 1) \operatorname{tg} \frac{A+B}{2} &= \cos \frac{a-b}{2} \operatorname{ctg} \frac{C}{2} / \cos \frac{a+b}{2} \\ 2) \operatorname{tg} \frac{A-B}{2} &= \sin \frac{a-b}{2} \operatorname{ctg} \frac{C}{2} / \sin \frac{a+b}{2} \end{aligned} \right\}. \quad (4.17)$$

Тангенс півсуми двох кутів сферичного трикутника так відноситься до котангенса половини третього кута, як косинус піврізниці протилежних їм сторін до косинуса півсуми тих же сторін.

Тангенс піврізниці двох кутів сферичного трикутника так відноситься до котангенса половини третього кута, як синус піврізниці протилежних їм сторін до синуса півсуми тих же сторін.

Поділивши четверту формулу Даламбера – Гаусса на третю, а другу на першу, дістанемо **третю і четверту аналогії Непера**:

$$\left. \begin{array}{l} 3) \operatorname{tg} \frac{a+b}{2} = \cos \frac{A-B}{2} \operatorname{tg} \frac{c}{2} / \cos \frac{A+B}{2} \\ 4) \operatorname{tg} \frac{a-b}{2} = \sin \frac{A-B}{2} \operatorname{tg} \frac{c}{2} / \sin \frac{A+B}{2} \end{array} \right\}. \quad (4.18)$$

Тангенс півсуми двох сторін сферичного трикутника так відноситься до тангенса половини третьої сторони, як косинус піврізниці протилежних їм кутів до косинуса півсуми цих же кутів.

Тангенс піврізниці двох сторін сферичного трикутника так відноситься до тангенса половини третьої сторони, як синус піврізниці протилежних їм кутів до синуса півсуми цих же кутів.

Зауваження. Загальне число аналогій Непера дорівнює дванадцяти. Інші вісім аналогій можна одержати, застосовуючи метод перестановки елементів по колу.

Поділивши почастино першу і другу, або третю і четверту аналогії Непера, отримаємо **контрольну формулу Гаусса**:

$$\operatorname{tg} \frac{A+B}{2} / \operatorname{tg} \frac{A-B}{2} = \operatorname{tg} \frac{a+b}{2} / \operatorname{tg} \frac{a-b}{2}. \quad (4.19)$$

4.4. Формули для обчислення сферичного надлишку

Перемножимо почленно перші дві формули з (4.9) і скористаємося третім співвідношенням з (4.10). Дістанемо:

$$\begin{aligned} \sin \frac{a}{2} \sin \frac{b}{2} &= \sqrt{\frac{\sin(\varepsilon/2) \sin(A-\varepsilon/2)}{\sin B \sin C}} \cdot \sqrt{\frac{\sin(\varepsilon/2) \sin(B-\varepsilon/2)}{\sin A \sin C}} = \\ &= \frac{\sin(\varepsilon/2)}{\sin C} \cdot \sqrt{\frac{\sin(A-\varepsilon/2) \sin(B-\varepsilon/2)}{\sin A \sin B}} = \frac{\sin(\varepsilon/2)}{\sin C} \cdot \cos \frac{c}{2}. \end{aligned}$$

Знайдемо звідси $\sin(\varepsilon/2)$: $\sin \frac{\varepsilon}{2} = \sin \frac{a}{2} \sin \frac{b}{2} \sin C / \cos \frac{c}{2}$.

Аналогічні вирази для $\sin(\varepsilon/2)$ можна отримати, перетворивши ще два добутки $\sin \frac{b}{2} \sin \frac{c}{2}$ і $\sin \frac{a}{2} \sin \frac{c}{2}$ за формулами (4.9) та застосовуючи співвідношення (4.10). У результаті маємо **першу формулу Каньйолі**, що задається одним з виразів:

$$\left. \begin{aligned} \sin \frac{\varepsilon}{2} &= \sin \frac{a}{2} \sin \frac{b}{2} \sin C / \cos \frac{c}{2} \\ \sin \frac{\varepsilon}{2} &= \sin \frac{b}{2} \sin \frac{c}{2} \sin A / \cos \frac{a}{2} \\ \sin \frac{\varepsilon}{2} &= \sin \frac{a}{2} \sin \frac{c}{2} \sin B / \cos \frac{b}{2} \end{aligned} \right\} \quad (4.20)$$

Співвідношення (4.20) виражають сферичний надлишок як функцію трьох сторін і одного кута сферичного трикутника.

Синус половини сферичного надлишку трикутника дорівнює добутку синусів половини двох сторін на синус кута між ними, поділеному на косинус половини третьої сторони.

Зауваження 1. Формули (4.20) можна одержати одну з одної методом перестановки елементів по колу.

Друга формула Каньйолі:

$$\sin \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\sqrt{\sin p \sin(p-a) \sin(p-b) \sin(p-c)}}{2 \cos(a/2) \cos(b/2) \cos(c/2)} \quad (4.21)$$

подає сферичний надлишок як функцію трьох сторін трикутника. Її одержують заміною у першій формулі з (4.20) $\sin C$ виразом:

$$\sin C = 2 \sin \frac{C}{2} \cos \frac{C}{2} = \frac{2 \sqrt{\sin p \sin(p-a) \sin(p-b) \sin(p-c)}}{\sin a \sin b},$$

що впливає зі співвідношень (4.1) та (4.2).

Сферичний надлишок можна обчислити ще за **формулою Люїльє**:

$$\operatorname{tg} \frac{\varepsilon}{4} = \sqrt{\operatorname{tg} \frac{p}{2} \operatorname{tg} \frac{p-a}{2} \operatorname{tg} \frac{p-b}{2} \operatorname{tg} \frac{p-c}{2}}, \quad (4.22)$$

що також дає сферичний надлишок як функцію трьох сторін сферичного трикутника. Вона є аналогом формули Герона в планіметрії. Її одержують на основі першої і третьої формул Даламбера – Гаусса (4.16) з використанням співвідношень:

$$\begin{aligned} A + B = 180^\circ + \varepsilon - C; \quad a + b + c = 2p; \quad a + b - c = 2(p - c); \\ a - b + c = 2(p - b); \quad b + c - a = 2(p - a). \end{aligned}$$

Зауваження 2. Наведені співвідношення (4.20) – (4.22) не рекомендуються безпосередньо застосовувати для знаходження сферичного надлишку трикутників зі сторонами малої кутової величини, оскільки при цьому спостерігається значний вплив похибок обчислень.

4.5. Основні випадки розв'язання косокутних сферичних трикутників

Сферичний трикутник повністю визначений, якщо з шести його елементів задані три. Можливі шість геометрично різних випадків розв'язання косокутних трикутників за даними: 1) трьома сторонами; 2) трьома кутами; 3) двома сторонами та кутом між ними; 4) стороною та двома прилеглими до неї кутами; 5) двома сторонами і кутом, що лежить проти однієї з них; 6) двома кутами та стороною, що лежить проти одного з них.

При розв'язуванні необхідно стежити, щоб значення елементів задовольняли *умови існування сферичного трикутника*, що виражаються співвідношеннями (1.4) – (1.7), (1.12), (1.13), (2.5'), (2.5'').

При визначенні усіх трьох невідомих елементів розв'язання трикутника у першому і другому випадках виконують за формулами (4.5) та (4.13), у третьому та четвертому випадках – за аналогіями Непера (4.17) та (4.18). У п'ятому та шостому випадках розв'язання трикутника виконують за теоремою синусів та аналогіями Непера.

Якщо розв'язок сферичного трикутника за даними значеннями елементів існує, то в перших чотирьох випадках він однозначний, а в п'ятому та шостому – двозначний. Пояснення цього аналогічне

відповідним випадкам розв'язання прямокутних трикутників.

Зауваження. Хід розв'язування завжди необхідно контролювати, виконуючи додаткові обчислення за формулами, що не використовувались при знаходженні невідомих величин, або визначаючи значення однієї й тієї ж невідомої величини за різними формулами.

5. Розв'язання малих сферичних трикутників за теоремою Лежандра

У геодезичних вимірюваннях Землю часто ототожнюють з кулею, радіус якої $R \approx 6370$ км. Тоді трикутники, що утворюються геодезичними пунктами на поверхні Землі, можна розглядати як сферичні. Сторони цих трикутників порядку $40 \div 60$ км і, в порівнянні з радіусом Землі, малі. Такі трикутники називають *сферичними трикутниками малого вигину (малими сферичними трикутниками)*.

Застосовувати загальні формули сферичної тригонометрії до розв'язання малих трикутників недоцільно за наступних причин. У геодезії оперують з лінійними величинами, а у сферичній тригонометрії обчислення проводять у кутовій мірі. При використанні загальних співвідношень знадобиться оперувати з тригонометричними функціями малих кутів ($\sim 20'$), що може призвести до великих обчислювальних похибок.

Ці незручності усуваються використанням для розв'язання малих сферичних трикутників теорема Лежандра:

кути сферичного трикутника приблизно на третину сферичного надлишку більші відповідних кутів плоского трикутника, що має сторони відповідно рівні сторонам сферичного трикутника.

Нехай сферичний трикутник ABC та плоский трикутник $A_1B_1C_1$ мають однакові по довжині сторони a , b і c . Тоді за теоремою Лежандра відповідні кути цих трикутників пов'язані між собою співвідношеннями:

$$A - A_1 \approx \frac{1}{3}\varepsilon; \quad B - B_1 \approx \frac{1}{3}\varepsilon; \quad C - C_1 \approx \frac{1}{3}\varepsilon, \quad (5.1)$$

де ε – сферичний надлишок трикутника ABC .

Зауваження 1. У співвідношеннях (5.1) нехтують величинами четвертого та вищих порядків мализни, розуміючи під величинами першого порядку відношення довжин сторін трикутника до довжини радіуса сфери.

Зауваження 2. Хоча на практиці в малому трикутнику вимірюють всі три кути, знаходити ε безпосередньо за означенням (1.18) не рекомендується, оскільки похибки у вимірюванні кутів часто перевищують сам ексцес. Обчислення його за загальними формулами (4.20) - (4.22), як зазначено вище, також недоцільне.

Кутова величина ε° сферичного надлишку малого трикутника наближено може бути обчислена за однією зі спрощених формул:

$$\varepsilon^\circ \approx \frac{\rho^\circ}{2R^2} bc \sin A_1; \quad \varepsilon^\circ \approx \frac{\rho^\circ}{2R^2} ac \sin B_1; \quad \varepsilon^\circ \approx \frac{\rho^\circ}{2R^2} ab \sin C_1. \quad (5.2)$$

Формули (5.2) одержані зі співвідношення (1.19) з використанням наступних виразів для площі плоского трикутника $A_1B_1C_1$:

$$F = \frac{1}{2} bc \sin A_1; \quad F = \frac{1}{2} ac \sin B_1; \quad F = \frac{1}{2} ab \sin C_1,$$

де $\rho^\circ = 57^\circ,2957795\dots$; R – радіус Землі; A_1, B_1 і C_1 – кути плоского трикутника; a, b і c – довжини сторін (величини R, a, b і c вимірюються у лінійних одиницях). При цьому припускається, що трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ приблизно рівновеликі $F_{ABC} \approx F_{A_1B_1C_1}$.

Зауваження 3. У співвідношеннях (5.2) нехтують величинами четвертого та вищих порядків мализни порівняно з відношенням довжин сторін трикутника до довжини радіуса сфери.

Значення теореми Лежандра полягає в тому, що вона дозволяє застосовувати при розв'язанні малих сферичних трикутників формули плоскої тригонометрії.

Для цього обчислюють сферичний надлишок за якою-небудь з формул (5.2) і переходять на основі співвідношень (5.1) від кутів сферичного трикутника ABC до кутів плоского трикутника $A_1B_1C_1$, який має ті ж самі довжини відповідних сторін, що і трикутник ABC , після чого розв'язують плоский трикутник $A_1B_1C_1$.

Приклади розв'язання типових задач*

• Різні задачі

Приклад 1. Визначити довжину дуги l паралелі земної кулі ($R = 6370$ км) на широті $\varphi = 42^\circ 31' 25''$, якщо різниця довгот $\Delta\lambda = 8^\circ 12' 11''$.

□ Довжина дуги паралелі визначається за формулою:

$$l = r \Delta\lambda,$$

де r – радіус малого кола, частиною якого є дуга l ;

$\Delta\lambda$ – різниця довгот (у радіанах) кінців дуги;

$$\Delta\lambda = \frac{\Delta\lambda^\circ}{\rho^\circ}; \rho^\circ = 57^\circ, 2957795.$$

Радіус малого кола (1.2): $r = R \cos \varphi$, де R – радіус сфери (у даному випадку – земної кулі); φ – широта паралелі.

Тоді $l = R \Delta\lambda \cos \varphi$.

Обчислення:

Оскільки величина $R = 6370$ має чотири значущі цифри, то інші величини для розрахунку візьмемо з п'ятьма значущими цифрами, а потім результат округлимо до чотирьох, тобто:

є величина R задана в км, отже:

Відповідь: 672 км. ■

Приклад 2. Довжина дуги AB паралелі земної кулі на широті $\varphi = 42^\circ 31' 25''$ дорівнює $l = 672$ км. Визначити довжину дуги екватора S між меридіанами, що проходять через точки A та B .

□ Довжина дуги екватора S , що розташована між двома меридіанами, визначається за формулою: $S = R\Delta\lambda$, де R – радіус земної кулі; $\Delta\lambda$ – різниця довгот (у радіанах).

* Усі розрахунки мають наближений характер: перехід від величини кута, поданого у градусах, мінутах і секундах, до величини кута, вираженого тільки в градусах; визначення за даними кутами (або сторонами у кутовій мірі) тригонометричних функцій і т.д. При обчисленнях застосовуються правила підрахунку цифр. Замість знаку “ \approx ” для зручності використовується знак “ $=$ ”. Похибки усіх розрахунків становлять $\sim 0,5$ одиниці розряду останньої значущої цифри результату.

Різниця довгот $\Delta\lambda = l/(R \cos \varphi)$, де l – довжина дуги паралелі; φ – широта паралелі. Тоді $S = l/R \cos \varphi$.

Обчислення:

$$\varphi = 42^\circ,5236111; \cos \varphi = 0,7369989; S = \frac{672}{0,737} = 912.$$

Відповідь: 912 км ■

Приклад 3. Визначити радіус сфери R , якщо площа сферичного трикутника $F = 687200$ км², а його кути:

$$A = 123^\circ,251744; B = 50^\circ,00671 \text{ і } C = 84^\circ,12262.$$

□ Площа сферичного трикутника визначається за формулою (1.19): $F = R^2 \varepsilon$, де R – радіус сфери (в кілометрах); ε – сферичний надлишок (у радіанах).

Обчислення:

$$\varepsilon = A + B + C - 180^\circ = 123^\circ,251744 + 50^\circ,00671 + 84^\circ,12262 - 180^\circ = 77^\circ,381074; \varepsilon = 1,35055 \text{ (у радіанах);}$$

$$R = \sqrt{\frac{F}{\varepsilon}} = \sqrt{\frac{687200}{1,35055}} \cong 713.$$

Відповідь: 713 км. ■

Приклад 4. Визначити найкоротшу відстань (ортодромію) між двома точками $M_1(52^\circ 11'; 49^\circ 30')$ та $M_2(58^\circ 17'; 55^\circ 36')$, що лежать у північній частині земної кулі ($R = 6370$ км). Знайти азимут μ_{21} точки M_2 по відношенню до точки M_1 .

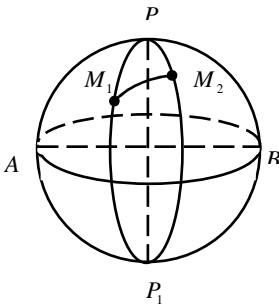


Рис. 17

□ Розглянемо сферичний трикутник M_1PM_2 (рис. 17). Тут P – полюс; AB – екватор; PM_1P_1 та PM_2P_1 – меридіани, що проходять відповідно через точки M_1 та M_2 ; M_1M_2 – дуга великого кола, що проходить через точки M_1 та M_2 . Дуга M_1M_2 визначає найкоротшу

відстань між точками M_1 та M_2 .

У цьому трикутнику кути:

$\angle M_1 P M_2 = \Delta\lambda$; $\angle P M_1 M_2 = \mu_{21}$ і $\angle P M_2 M_1 = \mu_{12}$, а сторони $M_1 P = 90^\circ - \varphi_1$ та $M_2 P = 90^\circ - \varphi_2$.

Різниця довгот:

$$\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1 = 55^\circ 36' - 49^\circ 30'; \quad \Delta\lambda = 6^\circ 06'.$$

Для визначення ортодромії $M_1 M_2$ скористаємося формулою косинуса сторони сферичного трикутника (2.2.):

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A.$$

У даному випадку формула набуває вигляду:

$$\begin{aligned} \cos M_1 M_2 &= \cos(90^\circ - \varphi_1) \cos(90^\circ - \varphi_2) + \\ &+ \sin(90^\circ - \varphi_1) \sin(90^\circ - \varphi_2) \cos \Delta\lambda; \end{aligned}$$

$$\cos M_1 M_2 = \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \cos \Delta\lambda.$$

Обчислення:

$$\Delta\lambda = 6^\circ,100000; \quad \cos \Delta\lambda = 0,9943379;$$

$$\varphi_1 = 52^\circ,183333; \quad \sin \varphi_1 = 0,789977; \quad \cos \varphi_1 = 0,613137;$$

$$\varphi_2 = 58^\circ,283333; \quad \sin \varphi_2 = 0,850658; \quad \cos \varphi_2 = 0,525719;$$

$$\cos M_1 M_2 = 0,992513, \quad M_1 M_2 = 7^\circ,015608;$$

$$M_1 M_2 = 0,122445 \text{ (рад);}$$

$$M_1 M_2 = R \cdot 0,122445 = 6370 \cdot 0,122445 = 780 \text{ (км).}$$

Азимут $\mu_{21} = \angle P M_1 M_2$ – сферичний кут трикутника $M_1 P M_2$.

Для обчислення азимуту μ_{21} точки M_2 по відношенню до точки M_1 , що задані своїми координатами, необхідно розв'язати косокутний трикутник за двома сторонами та кутом між ними.

Обчислення азимуту μ_{21} проведемо двома способами.

1) Скористаємося першою та другою аналогіями Непера (4.17):

$$\operatorname{tg} \frac{A+B}{2} = \cos \frac{a-b}{2} \operatorname{ctg} \frac{C}{2} / \cos \frac{a+b}{2};$$

$$tg \frac{A-B}{2} = \sin \frac{a-b}{2} ctg \frac{C}{2} / \sin \frac{a+b}{2}.$$

У даному випадку аналогії набувають вигляду:

$$tg \frac{\mu_{12} + \mu_{21}}{2} = \cos \frac{(90^\circ - \varphi_1) - (90^\circ - \varphi_2)}{2} ctg \frac{\Delta\lambda}{2} ;$$

$$: \cos \frac{(90^\circ - \varphi_1) + (90^\circ - \varphi_2)}{2} ;$$

$$tg \frac{\mu_{12} - \mu_{21}}{2} = \sin \frac{(90^\circ - \varphi_1) - (90^\circ - \varphi_2)}{2} ctg \frac{\Delta\lambda}{2} ;$$

$$: \sin \frac{(90^\circ - \varphi_1) + (90^\circ - \varphi_2)}{2} .$$

Тоді:

$$tg \frac{\mu_{12} + \mu_{21}}{2} = \cos \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} ctg \frac{\Delta\lambda}{2} : \sin \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} ;$$

$$tg \frac{\mu_{12} - \mu_{21}}{2} = \sin \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} ctg \frac{\Delta\lambda}{2} : \cos \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} .$$

Для контролю обчислень використаємо формулу Гаусса (4.19):

$$tg \frac{A+B}{2} / tg \frac{A-B}{2} = tg \frac{a+b}{2} / tg \frac{a-b}{2} ,$$

яка у даному випадку набуває вигляду:

$$tg \frac{\mu_{12} + \mu_{21}}{2} : tg \frac{\mu_{12} - \mu_{21}}{2} = ctg \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} ctg \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} .$$

Обчислення

$$\frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} = 55^\circ,23333333; \quad \cos \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} = 0,5702357 ;$$

$$\sin \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} = 0,8214811; \quad \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} = 3^\circ,050000 ;$$

$$\cos \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} = 0,9985835; \quad \sin \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} = 0,0532074 ;$$

$$\frac{\Delta\lambda}{2} = 3^\circ,0500000 ; \quad ctg \frac{\Delta\lambda}{2} = 18,7677543 ;$$

$$\operatorname{tg} \frac{\mu_{12} + \mu_{21}}{2} = 0,9985835 \cdot 18,7677543 : 0,8214811 =$$

$$= 22,8138782 ; \quad \frac{\mu_{12} + \mu_{21}}{2} = 87^{\circ},4901625 ;$$

$$\operatorname{tg} \frac{\mu_{12} - \mu_{21}}{2} = 0,0532074 \cdot 18,7677543 : 0,5702357 =$$

$$= 1,7511766 ; \quad \frac{\mu_{12} - \mu_{21}}{2} = 60^{\circ},2717046 ;$$

$$\mu_{21} = 87^{\circ},4901625 - 60^{\circ},2717046 = 27^{\circ},2184579 =$$

$$= 27^{\circ}13'06'' .$$

Проведемо контроль:

$$\operatorname{tg} \frac{\mu_{12} + \mu_{21}}{2} : \operatorname{tg} \frac{\mu_{12} - \mu_{21}}{2} = 13,0277427 ;$$

$$\operatorname{ctg} \frac{\Phi_1 + \Phi_2}{2} \operatorname{ctg} \frac{\Phi_2 - \Phi_1}{2} = 13,0277369 .$$

Контроль зійшовся.

Відповідь: $M_1M_2 = 780$ км ; $\mu_{21} = 27^{\circ}13'06''$.

2) У даному випадку знайти азимут μ_{21} можна за формулою:

$$\cos PM_2 = \cos M_1P \cos M_1M_2 + \sin M_1P \sin M_1M_2 \cos PM_1M_2 ,$$

де $PM_2 = 90^{\circ} - \varphi_2$; $M_1P = 90^{\circ} - \varphi_1$; $M_1M_2 = 7^{\circ},0156078$

(знайдено у першій частині) ; $\angle PM_1M_2 = \mu_{21}$.

Обчислення:

$$\cos \mu_{21} = \frac{\cos(90^{\circ} - \varphi_2) - \cos(90^{\circ} - \varphi_1) \cos M_1M_2}{\sin(90^{\circ} - \varphi_1) \sin M_1M_2} =$$

$$= \frac{\sin \varphi_2 - \sin \varphi_1 \cos M_1M_2}{\cos \varphi_1 \sin M_1M_2} = \frac{0,850658 - 0,789977 \cdot 0,992513}{0,613137 \cdot 0,122140} =$$

$$= 0,889262$$

$$\mu_{21} = 27^{\circ},219322 = 27^{\circ}13'09'' .$$

У даному прикладі відносна похибка між знайденими вели-

чинами азимуту становить $\sim 0,024\%$, але другий спосіб набагато коротший та простіший. ■

Приклад 5. Визначити довжину S та кут K локсодромії між заданими двома точками, що лежать у північній частині земної кулі ($R = 6370$ км):

а) $M_1(47^\circ 29'; 36^\circ 43')$; $M_2(47^\circ 29'; 53^\circ 12')$;

б) $M_1(52^\circ 11'; 49^\circ 30')$; $M_2(58^\circ 17'; 55^\circ 36')$.

□ Скористаємося співвідношеннями, наведеними в п.1.1.

а) Оскільки $\varphi_1 = \varphi_2 = 47^\circ 29'$, то

$$K = 90^\circ; \quad S = R \cos \varphi_1^\circ \cdot |\Delta \lambda^\circ| / \rho^\circ.$$

Обчислення: $\varphi_1^\circ = 47^\circ,4833333$; $\cos \varphi_1^\circ = 0,6758046$;

$$\lambda_1^\circ = 36^\circ,7166667; \quad \lambda_2^\circ = 53^\circ,2000000;$$

$$\Delta \lambda^\circ = \lambda_2^\circ - \lambda_1^\circ = 16^\circ,4833333;$$

$$S = 6370 \cdot 0,6758046 \cdot 16^\circ,4833333 / 57^\circ,2957795 = 1238 \text{ (км)}.$$

Відповідь: $S = 1238$ км; $K = 90^\circ$.

б) Оскільки $\varphi_1 = 52^\circ 11' \neq \varphi_2 = 58^\circ 17'$, то

$$\operatorname{tg} K = \frac{\Delta \lambda^\circ / \rho^\circ}{\ln \operatorname{tg} (45^\circ + \varphi_2^\circ / 2) - \ln \operatorname{tg} (45^\circ + \varphi_1^\circ / 2)}; \quad S = \frac{R \Delta \varphi^\circ}{\rho^\circ \cos K}.$$

Обчислення: $\varphi_1^\circ = 52^\circ,1833333$; $\varphi_2^\circ = 58^\circ,2833333$;

$$\Delta \varphi^\circ = 6^\circ,1000000; \quad \lambda_1^\circ = 49^\circ,5000000; \quad \lambda_2^\circ = 55^\circ,6000000;$$

$$\Delta \lambda^\circ = \lambda_2^\circ - \lambda_1^\circ = 6^\circ,1000000; \quad \operatorname{tg} (45^\circ + \varphi_1^\circ / 2) = \operatorname{tg} 71^\circ,0916667 =$$

$$= 2,9193754; \quad \operatorname{tg} (45^\circ + \varphi_2^\circ / 2) = \operatorname{tg} 74^\circ,1416667 = 3,5202414;$$

$$\ln \operatorname{tg} (45^\circ + \varphi_1^\circ / 2) = 1,0713697; \quad \ln \operatorname{tg} (45^\circ + \varphi_2^\circ / 2) = 1,2585296;$$

$$\operatorname{tg} K = \frac{6^\circ,1000000 / 57^\circ,2957795}{1,2585296 - 1,0713697} = 0,5688456;$$

$$K = \operatorname{arctg} 0,5688456 = 29^\circ,6331929 = 29^\circ 37' 59'';$$

$$\cos K = \cos 29^\circ,6331929 = 0,8692086;$$

$$S = \frac{6370 \cdot 6^\circ,1000000}{57^\circ,2957795 \cdot 0,8692086} = 780 \text{ (км)}.$$

Відповідь: $S = 780$ км; $K = 29^\circ 37' 59''$. ■

Порівнюючи знайдену в прикладі 5б довжину локсодромії $S = 780$ км між даними точками M_1 і M_2 з довжиною відповідної ортодромії $M_1M_2 = 780$ км, яка визначена в прикладі 4, переко-нуємося в їх близькості (з точністю до 1 км результати співпали).

Зауважимо, що розв'язування будь-якої задачі необхідно виконувати безпосередньо за її вхідними даними (якщо це можливо) і уникати використання величин, значення яких визначаються в процесі розв'язування.

• Розв'язання прямокутних сферичних трикутників

Приклад ба. Дано гіпотенузу $a = 80^\circ 00' 25''$ і катет $b = 47^\circ 38' 36''$. Знайти: 1) катет c , кути B і C ; 2) ε , P , r_m і R_m ; 3) F сферичного трикутника в км^2 , якщо $R = 6370$ км.

□ 1) Спираючись на правило Непера (3.3') і (3.3''), для визначення c маємо:

$$\cos a = \sin(90^\circ - b) \sin(90^\circ - c); \quad \cos a = \cos b \cos c.$$

Для визначення кута B маємо:

$$\cos(90^\circ - b) = \sin a \sin B.$$

Для визначення кута C маємо:

$$\cos C = \operatorname{ctg} a \operatorname{ctg}(90^\circ - b) = \operatorname{ctg} a \operatorname{tg} b.$$

Звідси невідомі елементи можна визначити за наступними формулами:

$$1. \cos c = \frac{\cos a}{\cos b}; \quad 2. \sin B = \frac{\sin b}{\sin a}; \quad 3. \cos C = \frac{\operatorname{tg} b}{\operatorname{tga}}.$$

Для катета c з формули (1) одержимо один розв'язок. Для кута B із формули (2) одержимо два значення: $<90^\circ$ і $>90^\circ$. Із двох розв'язків згідно (3.2) виберемо таке значення кута B , щоб кут B та сторона b були однорідні, тобто $B < 90^\circ$. Для кута C за формулою (3) одержимо одне значення.

Для того, щоб трикутник був можливий, необхідно, щоб $\cos c$, $\sin B$ і $\cos C$ у формулах (1) – (3) були менші одиниці. Для цього необхідно і достатньо, щоб гіпотенуза знаходилась за величиною між катетом та доповненням його до 180° .

Дійсно, з $\sin B = \frac{\sin b}{\sin a}$ бачимо, що умова $\sin B < 1$ приводить до нерівностей $\sin b < \sin a$ і $\sin(180^\circ - b) < \sin a$. Обидві частини цих нерівностей – додатні, тому що b і a менші за 180° . Для того, щоб ці нерівності справджувалися, необхідно, щоб виконувались нерівності: при $a < 90^\circ$, $b < a < 180^\circ - 90^\circ$, а при $a > 90^\circ$, $b > a > 180^\circ - b$.

При цих же умовах $\cos c$ і $\cos C$ завжди будуть менші за одиницю.

Формулою для контролю обчислень має бути співвідношення, що пов'яже усі три знайдені елементи c , B та C . Такою є третя формула першої групи формул (3.3'):

$$\cos C = \sin B \sin(90^\circ - c); \cos C = \sin B \cdot \cos c.$$

Дано:

$$a = 80^\circ 00' 25'' = 80,0069444; \quad b = 47^\circ 38' 36'' = 47,6433333.$$

Проміжні обчислення:

$$\begin{array}{ll} \sin a = 0,9848288; & \sin b = 0,7389665; \\ \cos a = 0,1735288; & \cos b = 0,6737434; \\ \operatorname{tga} = 5,6753041; & \operatorname{tgb} = 1,0968045. \end{array}$$

Обчислення невідомих:

$$\cos c = \frac{0,1735288}{0,6737434} = 0,2575592; \quad c = 75^\circ,0747181 = 75^\circ 04' 29'';$$

$$\sin B = \frac{0,7389665}{0,9848288} = 0,7503502; \quad B_1 = 48^\circ,620724 = 48^\circ 37' 15'';$$

$$B_2 = 180^\circ - B_1 = 131^\circ,3792756 = 131^\circ 22' 45''.$$

Згідно зі сказаним вище вибираємо кут B_1 .

$$\cos C = \frac{1,0968045}{5,6753041} = 0,1931253; \quad C = 78^\circ,8647684 = 78^\circ 51' 53''.$$

Контроль обчислень:

$$0,1931253 = 0,7503502 \cdot 0,2575592; \quad 0,1931253 = 0,1932596.$$

Відповідь: $c = 75^\circ 04' 29''$; $B = 48^\circ 37' 15''$; $C = 78^\circ 51' 53''$.

2) Знаходимо ε , p , r_m і R_m :

$$\begin{aligned} \varepsilon &= A + B + C - 180^\circ = 90^\circ + 48^\circ 37' 15'' + 78^\circ 51' 53'' - 180^\circ = \\ &= 37^\circ 29' 08'' \end{aligned}$$

$$p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{80^\circ 00' 25'' + 47^\circ 38' 36'' + 75^\circ 04' 29''}{2} = 101^\circ 21' 45'';$$

$$\operatorname{tgr}_m = M; \quad M = \sqrt{\frac{\sin(p-a)\sin(p-b)\sin(p-c)}{\sin p}};$$

$$p-a = 101^\circ,3625 - 80^\circ,0069444 = 21,3555556;$$

$$\sin(p-a) = 0,36415445;$$

$$p-b = 53^\circ,719167; \quad \sin(p-b) = 0,8061263;$$

$$p-c = 26^\circ,2877819; \quad \sin(p-c) = 0,4428800;$$

$$\sin p = 0,9804003; \quad M = 0,3641545;$$

$$r_m = 20^\circ,0093217 = 20^\circ 00' 33'';$$

$$\operatorname{tg}R_m = N; \quad N = \sqrt{\frac{\sin(\varepsilon/2)}{\sin\left(A - \frac{\varepsilon}{2}\right)\sin\left(B - \frac{\varepsilon}{2}\right)\sin\left(C - \frac{\varepsilon}{2}\right)}};$$

$$\frac{\varepsilon}{2} = 18^\circ,7427778; \quad \sin\frac{\varepsilon}{2} = 0,3213201;$$

$$A - \frac{\varepsilon}{2} = 71^\circ,2572222; \quad \sin\left(A - \frac{\varepsilon}{2}\right) = 0,9469706;$$

$$B - \frac{\varepsilon}{2} = 29^\circ,8779462; \quad \sin\left(B - \frac{\varepsilon}{2}\right) = 0,4981540;$$

$$C - \frac{\varepsilon}{2} = 60^\circ,1219906; \quad \sin\left(C - \frac{\varepsilon}{2}\right) = 0,8670880;$$

$$N = 0,8863134; \quad R_m = 41^\circ 55' 1000 = 41^\circ 33' 04''.$$

Відповідь: $\varepsilon = 37^\circ 29' 08''$; $p = 101^\circ 21' 45''$;

$$r_m = 20^\circ 00' 33''; \quad R_m = 41^\circ 33' 04''.$$

3) Знаходимо площу F сферичного трикутника в км²:

$$F = R^2 \cdot \varepsilon; \quad \varepsilon = 0,6542464; \quad F = 26,55 \cdot 10^6 \text{ км}^2. \quad \blacksquare$$

Приклад 6б. Дано катети $b = 150^\circ 52' 40''$ і $c = 114^\circ 15' 54''$ прямокутного сферичного трикутника ABC . Знайти: a , B , C .

□ За правилом Непера (3.3') та (3.3'') одержуємо формули для розв'язання трикутника:

– для визначення a : $\cos a = \sin(90^\circ - b) \cdot \sin(90^\circ - c)$;

– для визначення B : $\cos(90^\circ - c) = \text{ctg}B \text{ctg}(90^\circ - b)$;

– для визначення C : $\cos(90^\circ - b) = \text{ctg}C \text{ctg}(90^\circ - c)$.

$$\text{Звідси: } \cos a = \cos b \cos c; \quad \text{tg}B = \frac{\text{tgb}}{\sin c}; \quad \text{tg}C = \frac{\text{tgc}}{\sin b}.$$

Шукані величини визначаються за косинусом і тангенсами. Отже, задача завжди має і при тому єдиний розв'язок.

Для контролю обчислень візьмемо формулу:

$$\cos a = \text{ctg}B \cdot \text{ctg}C.$$

Дано: $b = 150^\circ 52' 40'' = 150^\circ,8777778$;

$$c = 114^\circ 15' 54'' = 114^\circ,265.$$

Проміжні обчислення:

$$\cos b = 0,8735835;$$

$$\cos c = -0,4109575;$$

$$\sin b = 0,4866742;$$

$$\sin c = 0,9116545;$$

$$tgb = 0,5571010; \quad tgc = -2,2183666.$$

Обчислення невідомих:

$$\cos a = (-0,8735835)(-0,4109575) = 0,3590057;$$

$$a = 68^\circ,9608553 = 68^\circ 57' 39'';$$

$$tgB = \frac{-0,5571010}{0,9116545} = -0,6110879;$$

$$B = 148^\circ,5801337 = 148^\circ 34' 48'';$$

$$tgC = \frac{-2,2183666}{0,48667212} = -4,558217;$$

$$C = 102^\circ,3737509 = 102^\circ 22' 25''.$$

Контроль обчислень:

$$0,3590057 = \frac{1}{(-0,6110879)} \cdot \frac{1}{(-4,558217)} = 0,3590057.$$

Контроль зійшовся.

Відповідь: $a = 68^\circ 57' 39''$; $B = 148^\circ 34' 48''$; $C = 102^\circ 22' 25''$. ■

Приклад бв. Дано гіпотенузу $a = 110^\circ 46' 20''$ та прилеглий до неї кут $C = 153^\circ 58' 28''$ прямокутного сферичного трикутника ABC . Знайти: b , c , B .

□ На основі правила Непера (3.3') та (3.3'') запишемо формули:

$$- \text{ для визначення } b: \cos C = ctga \cdot ctg(90^\circ - b); \cos C = ctga \cdot tgb;$$

$$- \text{ для визначення } c: \cos(90^\circ - c) = \sin a \cdot \sin C; \sin c = \sin a \cdot \sin C;$$

$$- \text{ для визначення } B: \cos a = ctgBctgC$$

Для розв'язання трикутника маємо три формули:

$$1. tgb = tga \cos C; 2. \sin c = \sin a \cdot \sin C; 3. ctgB = \cos a \operatorname{tg} C.$$

Для контролю обчислень візьмемо формулу:

$$\cos(90^\circ - c) = ctgBctg(90^\circ - b), \sin c = ctgB \cdot tgb.$$

Формула (2) визначає c за синусом. Величину для c з двох її значень вибирають таку, щоб вона була в одній чверті з кутом C . Формули (1) і (3) визначають b і D за тангенсами і дають для них

по одному значенню. Ці два елементи завжди знаходяться в одній чверті. Отже, трикутник завжди можливий і має єдиний розв'язок.

$$\text{Дано: } a = 110^{\circ}46'20'' = 110^{\circ},7722222 ;$$

$$C = 153^{\circ}58'28'' = 153^{\circ},9744444 .$$

Проміжні обчислення:

$$\sin a = 0,9349977 ;$$

$$\sin C = 0,4387720 ;$$

$$\cos a = -0,3546537 ;$$

$$\cos C = -0,8985984 ;$$

$$\operatorname{tga} = -2,6363681 ;$$

$$\operatorname{tg}C = -0,4882848 .$$

Обчислення невідомих:

$$\operatorname{tgb} = (-2,6363681) \cdot (-0,8985984) = 2,3690362 ;$$

$$b = 67^{\circ},1147794 = 67^{\circ}06'53'' ;$$

$$\sin c = 0,9349977 \cdot 0,4387720 = 0,4102508 ;$$

$$c = 24^{\circ},2205913 = 24^{\circ}13'14'' ; c_2 = 155^{\circ},7794087 = 155^{\circ}46'46'' .$$

В одній чверті з кутом C буде c_2 , отже за розв'язок беремо $c = 155^{\circ}46'46''$.

$$\operatorname{ctg}B = (-0,3546537) \cdot (-0,4882848) = 0,1731720 ;$$

$$B = 80^{\circ},1754098 = 80^{\circ}10'31'' ;$$

Контроль обчислень:

$$0,4102508 = 0,1731720 \cdot 2,3690362 = 0,4102507 .$$

Контроль зійшовся.

$$\text{Відповідь: } b = 67^{\circ}06'53'' ; c = 155^{\circ}46'46'' ;$$

$$B = 80^{\circ}10'31'' . \blacksquare$$

Приклад бг. Дано катет $b = 37^{\circ}52'09''$ та прилеглий до нього кут $C = 45^{\circ}34'35''$. Знайти: a , c , B .

□ За правилом Непера (3.3') і (3.3'') маємо такі співвідношення:

$$\text{– для визначення } a : \cos C = \operatorname{ctg}(90^{\circ} - b) \operatorname{ctga} ,$$

$$\cos C = \operatorname{tgb} \operatorname{ctga} ;$$

$$\text{– для визначення } c : \cos(90^{\circ} - b) = \operatorname{ctg}(90^{\circ} - c) \operatorname{ctg}C ,$$

$$\sin b = \operatorname{tg} c \operatorname{ctg} C;$$

– для визначення B : $\cos B = \sin(90^\circ - b) \sin C$,

$$\cos B = \cos b \cdot \sin C.$$

Звідси одержимо для визначення невідомих елементів наступні три формули:

$$1. \operatorname{tga} = \frac{\operatorname{tgb}}{\cos C}; \quad 2. \operatorname{tgc} = \sin b \cdot \operatorname{tg} C; \quad 3. \cos B = \cos b \cdot \sin C.$$

Елементи a і c визначаються за тангенсами і мають по одному значенню. Кут B визначається за косинусом і теж має одне значення. Що стосується знаку косинуса B , то $\cos B$ має той же знак, що і косинус b . Отже трикутник завжди можливий і задача має єдиний розв'язок.

Для контролю обчислень візьмемо формулу:

$$\cos B = \operatorname{ctga} \cdot \operatorname{tgc} = \frac{\operatorname{tgc}}{\operatorname{tga}}.$$

$$\text{Дано: } b = 37^\circ 52' 09'' = 37,8691666;$$

$$C = 45^\circ 34' 35'' = 45,5763888.$$

Проміжні обчислення:

$$\sin b = 0,6138605;$$

$$\sin C = 0,7141843;$$

$$\cos b = 0,7894145;$$

$$\cos C = 0,6999577;$$

$$\operatorname{tgb} = 0,7776148;$$

$$\operatorname{tg} C = 1,0203249.$$

Обчислення невідомих:

$$\operatorname{tga} = \frac{0,7776148}{0,6999577} = 1,1109454; \quad a = 48,0085387 = 48^\circ 00' 31'';$$

$$\operatorname{tgc} = 0,6138605 \cdot 1,0203249 = 0,6263372;$$

$$c = 32,0604428 = 32^\circ 03' 38'';$$

$$\cos B = 0,7894145 \cdot 0,7141843 = 0,5637874;$$

$$B = 55,6818686 = 55^\circ 40' 55''.$$

Контроль обчислень:

$$0,5637874 = \frac{0,6263372}{1,1109454} = 0,5637875.$$

Контроль зійшовся.

Відповідь: $a = 48^{\circ}00'31''$, $C = 32^{\circ}03'38''$,
 $B = 55^{\circ}40'55''$. ■

Приклад бд. Дано кути: $B = 80^{\circ}10'32''$; $C = 154^{\circ}58'28''$.
 Знайти: b , c , a .

□ Користуючись правилом Непера (3.3') і (3.3''), маємо:

– для визначення b : $\cos B = \sin(90^{\circ} - b) \sin C$;

– для визначення c : $\cos C = \sin(90^{\circ} - c) \sin B$;

– для визначення a : $\cos a = \operatorname{ctg} B \operatorname{ctg} C$.

Звідси дістаємо для розв'язання трикутника наступні співвідношення:

$$\cos a = \operatorname{ctg} B \cdot \operatorname{ctg} C; \quad \cos b = \frac{\cos B}{\sin C}; \quad \cos c = \frac{\cos C}{\sin B}.$$

Для контролю обчислень візьмемо сферичну формулу Піфагора:

$$\cos a = \cos b \cos c.$$

Розв'язок матиме одне значення, тому що всі елементи трикутника визначаються за косинусами.

Трикутник можливий тільки тоді, коли сума даних кутів знаходиться між 90° і 270° , а різниця їх між -90° і 90° .

Насправді: уявимо для даного сферичного прямокутного трикутника полярний, у нього будуть сторони: 90° , $180^{\circ} - B$ і $180^{\circ} - C$.

Зважаючи на те, що сума сторін сферичного трикутника повинна бути менша за 360° , а кожна з них менша за суму двох інших, маємо чотири наступні нерівності:

1) $450^{\circ} - (B + C) < 360^{\circ}$; $90^{\circ} < B + C$;

2) $90^{\circ} < 360^{\circ} - (B + C)$; $270^{\circ} > B + C$;

3) $180^{\circ} - B < 270^{\circ} - C$; $-90^{\circ} < B - C$;

4) $180^{\circ} - C < 270^{\circ} - B$; $90^{\circ} > B - C$.

Об'єднавши першу нерівність з другою, а третю з четвертою, одержимо:

$$90^{\circ} < B + C < 270^{\circ}; \quad -90^{\circ} < B - C < 90^{\circ}.$$

Дано: $B = 80^{\circ}10'32'' = 80^{\circ},1755556$;

$C = 154^{\circ}58'28'' = 154^{\circ},9744444$.

Проміжні обчислення:

$\sin B = 0,9853352$;

$\sin C = 0,4230225$;

$\cos B = 0,1706299$;

$\cos C = -0,9061192$;

$\operatorname{tg} B = 5,7746926$;

$\operatorname{tg} C = -0,4668508$.

Обчислення невідомих:

$$\cos a = \frac{-1}{5,7746926 \cdot 0,4668508} = -0,3709309;$$

$$a = 111^{\circ},7730402 = 111^{\circ}46'23'';$$

$$\cos b = \frac{0,1706299}{0,4230225} = 0,40335894;$$

$$b = 66^{\circ},2116955 = 66^{\circ}12'42'';$$

$$\cos c = -\frac{0,9061192}{0,9853352} = -0,9196050;$$

$$c = 156^{\circ},8684086 = 156^{\circ}52'06''.$$

Контроль обчислень:

$$-0,3709309 = 0,40335894 \cdot (-0,9196050) = -0,3709490.$$

Контроль хороший.

Відповідь: $a = 111^{\circ}46'23''$; $b = 66^{\circ}12'42''$;

$c = 156^{\circ}52'06''$. ■

Приклад 6е. Дано катет $b = 38^{\circ}27'50''$ і протилежний йому кут $B = 56^{\circ}00'34''$. Знайти: a , c , C .

□ За правилом Непера одержуємо:

– для визначення a : $\cos(90^{\circ} - b) = \sin B \sin a$;

$$\sin b = \sin B \sin a$$
;

– для визначення c : $\cos(90^{\circ} - c) = \operatorname{ctg} B \operatorname{ctg}(90^{\circ} - b)$;

$$\sin c = \operatorname{ctg} B \operatorname{tg} b$$
;

– для визначення C : $\cos B = \sin(90^{\circ} - b) \sin C$;

$$\cos B = \cos b \sin C .$$

Звідси невідомі елементи визначають за наступними формулами:

$$\sin a = \frac{\sin b}{\sin B} ; \sin c = \frac{\operatorname{tg} b}{\operatorname{tg} B} ; \sin C = \frac{\cos B}{\cos b} .$$

Для контролю обчислень візьмемо формулу з (3.3'):

$$\cos(90^\circ - c) = \sin a \sin C ; \sin c = \sin a \sin C .$$

Для існування трикутника необхідно, щоб $\sin a$, $\sin c$ і $\sin C$ були додатні та менші одиниці. Тобто, щоб b та B були однорідними – обидва або більші за 90° , або менші за 90° . Для виконання нерівності $\sin a < 1$, потрібно, щоб $\sin b$ був менше за $\sin B$. Виходячи з того, що b та B повинні знаходитись в одній чверті, то при $b < 90^\circ$ повинно виконуватися $b < B < 90^\circ$, а при $b > 90^\circ$ – відповідно $90^\circ < B < b$.

Якщо задача можлива, то дістанемо два розв'язки, тобто два сферичних трикутники. Сторони a_1 , c_1 і кут C_1 першого трикутника будуть доповненнями відповідних сторін a_2 , c_2 і кута C_2 другого трикутника до 180° . Ці трикутники матимуть спільний катет b , а протилежні цьому катету кути будуть рівні B .

$$\text{Дано: } b = 38^\circ 27' 50'' = 38^\circ,4638889 ;$$

$$B = 56^\circ 00' 34'' = 56^\circ,0094444 .$$

Проміжні обчислення:

$$\sin b = 0,6220213 ;$$

$$\sin B = 0,8291297 ;$$

$$\cos b = 0,7830003 ;$$

$$\cos B = 0,5590562 ;$$

$$\operatorname{tg} b = 0,7944074 ;$$

$$\operatorname{tg} B = 1,4830882 .$$

Обчислення невідомих:

$$\sin a = \frac{0,6220213}{0,8291297} = 0,7502099 ;$$

$$a_1 = 48^\circ,6085624 = 48^\circ 36' 31'' ;$$

$$a_2 = 131^\circ,3914376 = 131^\circ 23' 29'' ;$$

$$\sin c = \frac{0,7944074}{1,4830882} = 0,5356441;$$

$$c_1 = 32^\circ,3876012 = 32^\circ 23' 15'';$$

$$c_2 = 147^\circ,6123988 = 147^\circ 36' 45'';$$

$$\sin C = \frac{0,5590562}{0,7830003} = 0,7139923;$$

$$C_1 = 45^\circ,5606768 = 45^\circ 33' 38'';$$

$$C_2 = 134^\circ,4393232 = 134^\circ 26' 22''.$$

Контроль обчислень:

$$0,5356441 = 0,7502099 \cdot 0,789923 = 0,5356441.$$

Контроль зійшовся.

Відповідь 1:

$$a_1 = 48^\circ 36' 31'';$$

$$c_1 = 32^\circ 23' 15'';$$

$$C_1 = 45^\circ 33' 38'';$$

Відповідь 2:

$$a_2 = 131^\circ 23' 29'';$$

$$c_2 = 147^\circ 36' 45'';$$

$$C_2 = 134^\circ 26' 22''. \quad \blacksquare$$

• Розв'язання косокутних сферичних трикутників

Приклад 7а. Розв'язання сферичного трикутника за трьома сторонами. Дано: $a = 60^\circ 31' 42''$; $b = 117^\circ 28' 19''$; $c = 78^\circ 42' 23''$. Знайти: 1) A, B, C ; 2) ε, r_m, R_m ; 3) F , якщо $R = 6370$ км.

□ 1) Обчислення виконаємо за формулами (4.5):

$$\operatorname{tg} \frac{A}{2} = \frac{M}{\sin(p-a)}; \operatorname{tg} \frac{B}{2} = \frac{M}{\sin(p-b)}; \operatorname{tg} \frac{C}{2} = \frac{M}{\sin(p-c)},$$

$$\text{де } M = \sqrt{\frac{\sin(p-a) \sin(p-b) \sin(p-c)}{\sin p}}.$$

Для контролю обчислення скористаємося співвідношенням (4.6):

$$\operatorname{tg} \frac{A}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{B}{2} \operatorname{tg} \frac{C}{2} = \frac{M}{\sin p}.$$

Для можливості задачі необхідно, щоб синуси, що входять

під радикал, були додатні. Для цього необхідно, щоб виконувались нерівності: $p < 180^\circ$; $p - a > 0^\circ$; $p - b > 0^\circ$; $p - c > 0$, або $a + b + c < 360^\circ$, $c + b > a$; $a + c > b$, $a + b > c$. Всі нерівності є загальними для існування кожного сферичного трикутника.

Задача допускає єдиний повністю визначений розв'язок, оскільки невідомі елементи знаходяться за тангенсами аргументів $\frac{A}{2}$, $\frac{B}{2}$ та $\frac{C}{2}$, які менші за 90° .

$$\text{Дано: } a = 60^\circ 31' 42'' = 60,52833333;$$

$$b = 117^\circ 28' 19'' = 117,4719444;$$

$$c = 78^\circ 42' 23'' = 78,7063889.$$

Розглянувши дані величини, приходимо до висновку, що завдання відповідає умовам існування сферичного трикутника, а тому розв'язок задачі можливий.

Проміжні обчислення:

$$2p = 256,7066667;$$

$$p = 128,3533333; \quad \sin p = 0,7841991;$$

$$p - a = 67,825; \quad \sin(p - a) = 0,9260354;$$

$$p - b = 10,8813889; \quad \sin(p - b) = 0,1887765;$$

$$p - c = 49,6469444; \quad \sin(p - c) = 0,7620691;$$

$$M = \sqrt{\frac{0,9260354 \cdot 0,1887765 \cdot 0,7620691}{0,7841991}} = 0,4121656.$$

Обчислення невідомих:

$$\operatorname{tg} \frac{A}{2} = \frac{0,4121656}{0,9260354} = 0,4450862; \quad \frac{A}{2} = 23,9931876;$$

$$A = 47,9863752 = 47^\circ 59' 11'';$$

$$\operatorname{tg} \frac{B}{2} = \frac{0,4121656}{0,1887765} = 2,1833523; \quad \frac{B}{2} = 65,3916854;$$

$$B = 130,7833707 = 130^\circ 47' 00'';$$

$$\operatorname{tg} \frac{C}{2} = \frac{0,4121656}{0,7620691} = 0,5408507; \quad \frac{C}{2} = 28,4067698;$$

$$C = 56^{\circ},8135397 = 56^{\circ},48'49''.$$

Контроль обчислень:

$$0,4450862 \cdot 2,1833523 \cdot 0,5408507 = \frac{0,4121656}{0,7841991};$$

$$0,5255879 = 0,5255879.$$

Контроль зійшовся.

$$\text{Відповідь: } A = 47^{\circ}59'11''; B = 130^{\circ}47'00'';$$

$$C = 56^{\circ}48'49''.$$

2) Ексцес знайдемо за формулою Люїльє (4.22):

$$\operatorname{tg} \frac{\varepsilon}{4} = \sqrt{\operatorname{tg} \frac{p}{2} \operatorname{tg} \frac{p-a}{2} \operatorname{tg} \frac{p-b}{2} \operatorname{tg} \frac{p-c}{2}};$$

$$\frac{p}{2} = 64^{\circ},1766666; \operatorname{tg} \frac{p}{2} = 2,0664513;$$

$$\frac{p-a}{2} = 33^{\circ},9125000; \operatorname{tg} \frac{p-a}{2} = 0,6722888;$$

$$\frac{p-b}{2} = 5^{\circ},4406946; \operatorname{tg} \frac{p-b}{2} = 0,0952444;$$

$$\frac{p-c}{2} = 24^{\circ},8234722; \operatorname{tg} \frac{p-c}{2} = 0,4625621;$$

$$\operatorname{tg} \frac{\varepsilon}{4} = \sqrt{2,0664513 \cdot 0,6722888 \cdot 0,0952444 \cdot 0,4625621} =$$

$$= 0,2473975$$

$$\frac{\varepsilon}{4} = 13^{\circ},8958157; \varepsilon = 55^{\circ},5832629 = 55^{\circ}34'59''.$$

Радіус вписаного кола r_m знайдемо за формулою:

$$\operatorname{tg} r_m = M = 0,4121656; r_m = 22^{\circ},3997719 = 22^{\circ}23'59''.$$

Радіус описаного кола R_m знайдемо за формулою (4.14):

$$\operatorname{tg} \frac{a}{2} \operatorname{tg} \frac{b}{2} \operatorname{tg} \frac{c}{2} = N \sin \frac{\varepsilon}{2}, \text{ звідки } \operatorname{tg} R_m = N = \frac{\operatorname{tg} \frac{a}{2} \operatorname{tg} \frac{b}{2} \operatorname{tg} \frac{c}{2}}{\sin \frac{\varepsilon}{2}}.$$

$$tg \frac{a}{2} = 0,5835142; \quad tg \frac{b}{2} = 1,6470396; \quad tg \frac{c}{2} = 0,8200421;$$

$$sin \frac{\varepsilon}{2} = 0,4662574;$$

$$tg R_m = N = \frac{0,5835142 \cdot 1,6470396 \cdot 0,8200421}{0,4662574} = 1,6903081;$$

$$R_m = 59^\circ,3910968 = 59^\circ 23' 28''.$$

Відповідь: $\varepsilon = 55^\circ 34' 59''$; $r_m = 22^\circ 23' 59''$;

$$R_m = 59^\circ 23' 28''.$$

3) Площа сферичного трикутника визначається за формулою (1.19): $F = R^2 \varepsilon$. За умовою $R = 6370$ км і знайдено вище, що

$$\varepsilon = 55^\circ 34' 59'' = 55^\circ,5832629.$$

У радіанах $\varepsilon = 0,9700$. Тоді

$$F = (6370)^2 \cdot 0,97 = 3,94 \cdot 10^7 \text{ (км)}^2. \quad \blacksquare$$

Приклад 7б. Розв'язання сферичного трикутника за трьома його кутами. Дано: $A = 47^\circ 59' 12''$; $B = 130^\circ 46' 58''$; $C = 56^\circ 48' 52''$. Знайти: a, b, c .

□ Обчислення виконаємо за формулами (4.13):

$$tg \frac{a}{2} = N \sin \left(A - \frac{\varepsilon}{2} \right); \quad tg \frac{b}{2} = N \sin \left(B - \frac{\varepsilon}{2} \right);$$

$$tg (c/2) = N \sin (C - \varepsilon/2),$$

де
$$N = \sqrt{\frac{\sin(\varepsilon/2)}{\sin(A - \varepsilon/2) \sin(B - \varepsilon/2) \sin(C - \varepsilon/2)}}.$$

Контроль обчислень проведемо за формулою (4.14):

$$tg \frac{a}{2} tg \frac{b}{2} tg \frac{c}{2} = N \sin \frac{\varepsilon}{2}.$$

При розв'язанні задачі одержимо єдиний повністю визначений розв'язок.

Трикутник можливий, оскільки дані відповідають умовам (1.12) і (1.13) з пункту 1.3.

Дано: $A = 47^{\circ}59'12'' = 47,9866667$;

$$B = 130^{\circ}46'58'' = 130,7827778;$$

$$C = 56^{\circ}48'52'' = 56,8144444 .$$

Проміжні обчислення:

$$\varepsilon = A + B + C - 180^{\circ} = 55,5838889 = 55^{\circ}35'02'';$$

$$\frac{\varepsilon}{2} = 27,7919445 = 27^{\circ}47'31''; \sin \frac{\varepsilon}{2} = 0,4662623;$$

$$A - \frac{\varepsilon}{2} = 20,1947222; \sin \left(A - \frac{\varepsilon}{2} \right) = 0,3452117;$$

$$B - \frac{\varepsilon}{2} = 102,9908333; \sin \left(B - \frac{\varepsilon}{2} \right) = 0,9744060;$$

$$C - \frac{\varepsilon}{2} = 29,0224999; \sin \left(C - \frac{\varepsilon}{2} \right) = 0,4851530;$$

$$N = \sqrt{\frac{0,4662623}{0,3452117 \cdot 0,9744060 \cdot 0,4851530}} = 1,6902972 .$$

Обчислення невідомих:

$$\operatorname{tg} \frac{a}{2} = 1,6902972 \cdot 0,3452117 = 0,5835104; \frac{a}{2} = 30,2640048;$$

$$a = 60,5280095 = 60^{\circ}31'41'';$$

$$\operatorname{tg} \frac{b}{2} = 1,6902972 \cdot 0,9744060 = 1,6470336; \frac{b}{2} = 58,7359120;$$

$$b = 117,471824 = 117^{\circ}28'18'';$$

$$\operatorname{tg} \frac{c}{2} = 1,6902972 \cdot 0,4851530 = 0,8200528; \frac{c}{2} = 39,3535600;$$

$$c = 78,707112 = 78^{\circ}42'26'' .$$

Контроль обчислень:

$$0,5835104 \cdot 1,6470336 \cdot 0,8200528 = 1,6902972 \cdot 0,4662623;$$

$$0,78812096 = 0,78812186;$$

Контроль хороший.

Відповідь: $a = 60^{\circ}31'41''$; $b = 117^{\circ}28'18''$;

$$c = 78^{\circ}42'26'' . \blacksquare$$

Приклад 7в. Розв'язання сферичного трикутника за двома сторонами та кутом між ними. Дано: $a = 40^{\circ}28'36''$; $b = 110^{\circ}18'32''$; $C = 56^{\circ}40'54''$. Знайти: A, B, c .

□ Для обчислення кутів A і B застосуємо аналогії Непера (4.17):

$$\left. \begin{aligned} 1) \quad \operatorname{tg} \frac{A+B}{2} &= \cos \frac{a-b}{2} \operatorname{ctg} \frac{C}{2} / \cos \frac{a+b}{2} \\ 2) \quad \operatorname{tg} \frac{A-B}{2} &= \sin \frac{a-b}{2} \operatorname{ctg} \frac{C}{2} / \sin \frac{a+b}{2} \end{aligned} \right\},$$

а для обчислення сторони c скористаємося третьою формулою з (2.3):

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C.$$

Контроль за обчисленням виконаємо за третім співвідношенням з (2.4):

$$\cos C = -\cos A \cos B + \sin A \sin B \cos c.$$

Аналіз вихідних даних задачі показує, що вони відповідають умовам існування сферичного трикутника. Використані для обчислення невідомих формули дають єдиний повністю визначений розв'язок.

$$\text{Дано: } a = 40^{\circ}28'36'' = 40^{\circ},4766667;$$

$$b = 110^{\circ}18'32'' = 110^{\circ},3088889;$$

$$C = 56^{\circ}40'54'' = 56^{\circ},6816667.$$

Проміжні обчислення:

$$\cos a = 0,7606704; \quad \sin a = 0,6491383;$$

$$\cos b = -0,3470812; \quad \sin b = 0,9378351;$$

$$\frac{a-b}{2} = -34^{\circ},9161112; \quad \cos \frac{a-b}{2} = 0,8199910;$$

$$\sin \frac{a-b}{2} = -0,5723765; \quad \operatorname{tg} \frac{a-b}{2} = -0,6980278;$$

$$\frac{a+b}{2} = 75^{\circ},3927778; \quad \cos \frac{a+b}{2} = 0,2521913;$$

$$\sin \frac{a+b}{2} = 0,9676774; \quad \operatorname{tg} \frac{a+b}{2} = 3,8370762;$$

$$\cos C = 0,5492902; \quad \operatorname{ctg} \frac{C}{2} = 1,8540349.$$

Обчислення невідомих:

$$\operatorname{tg} \frac{A+B}{2} = \frac{0,8199910}{0,2521913} \cdot 1,8540349 = 6,0283282;$$

$$\frac{A+B}{2} = 80^\circ,5813444;$$

$$\operatorname{tg} \frac{A-B}{2} = \frac{-0,5723765}{0,9676776} \cdot 1,8540349 = -1,0966524;$$

$$\frac{A-B}{2} = -47^\circ,6393785;$$

$$+ \begin{cases} \frac{A}{2} + \frac{B}{2} = 80^\circ,5813444 \\ \frac{A}{2} - \frac{B}{2} = -47^\circ,6393785 \end{cases} \quad - \begin{cases} \frac{A}{2} + \frac{B}{2} = 80^\circ,5813444 \\ \frac{A}{2} - \frac{B}{2} = -47^\circ,6393785 \end{cases}$$

$$A = 32^\circ,9419659 =$$

$$B = 128^\circ,2207229 =$$

$$= 32^\circ 56' 32''$$

$$= 128^\circ 13' 15''$$

$$\cos c = 0,7606704(-0,3470812) + 0,6491383 \cdot 0,9378351 \times \\ \times 0,5492902 = 0,0703808$$

$$c = 85^\circ,9641415 = 85^\circ 57' 51''.$$

Контроль обчислень:

$$0,5492902 = -\cos A \cdot \cos B + \sin A \sin B \cos c;$$

$$\cos A = 0,8392218; \quad \sin A = 0,5437889;$$

$$\cos B = -0,6200628; \quad \sin B = 0,7845521;$$

$$0,5492902 = -0,8392218(-0,6186941) + 0,5437899 \times \\ \times 0,7845521 \cdot 0,0703808$$

$$0,549202 = 0,549248. \text{ Контроль хороший.}$$

$$\text{Відповідь: } A = 32^\circ 56' 31''; \quad B = 128^\circ 13' 15'';$$

$$c = 85^\circ 57' 51''. \quad \blacksquare$$

Приклад 7г. Розв'язання сферичного трикутника за стороною та двома прилеглими кутами. Дано: $A = 59^{\circ}32'16''$; $B = 77^{\circ}18'20''$ і $c = 31^{\circ}29'34''$. Знайти: a , b , C .

□ Задача розв'язується безпосередньо за третьою і четвертою аналогіями Непера (4.18):

$$\operatorname{tg} \frac{a+b}{2} = \operatorname{tg} \frac{c}{2} \cdot \frac{\cos \frac{A-B}{2}}{\cos \frac{A+B}{2}}; \quad \operatorname{tg} \frac{a-b}{2} = \operatorname{tg} \frac{c}{2} \cdot \frac{\sin \frac{A-B}{2}}{\sin \frac{A+B}{2}}.$$

$$\text{Дано: } A = 59^{\circ}32'16'' = 59,537778;$$

$$B = 77^{\circ}18'20'' = 77,3055556;$$

$$c = 31^{\circ}29'34'' = 31,4927778.$$

Проміжні обчислення:

$$\frac{A-B}{2} = -8,8838889; \quad \cos \frac{A-B}{2} = 0,9880033;$$

$$\sin \frac{A-B}{2} = -0,1544325; \quad \operatorname{tg} \frac{A-B}{2} = -0,1563077;$$

$$\frac{A+B}{2} = 68,4216668; \quad \cos \frac{A+B}{2} = 0,3677729;$$

$$\sin \frac{A+B}{2} = 0,9299156; \quad \operatorname{tg} \frac{A+B}{2} = 2,5285049;$$

$$\frac{c}{2} = 15,7463889; \quad \operatorname{tg} \frac{c}{2} = 0,2819611.$$

Обчислення невідомих:

$$\operatorname{tg} \frac{a+b}{2} = 0,2819611 \cdot \frac{0,9880033}{0,3677729} = 0,7574743;$$

$$\frac{a+b}{2} = 37,1429939;$$

$$\operatorname{tg} \frac{a-b}{2} = 0,2819611 \cdot \frac{(-0,1544325)}{0,9299156} = -0,0468257;$$

$$\frac{a-b}{2} = -2,6809572;$$

$$\frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2} = a = 34^\circ,4534222 = 34^\circ 27' 12'';$$

$$\frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2} = b = 39^\circ,8239511 = 39^\circ 49' 26''.$$

Контроль обчислень при визначенні сторін a і b виконаємо за формулою Гаусса (4.19):

$$\frac{tg \frac{a+b}{2}}{tg \frac{a-b}{2}} = \frac{tg \frac{A+B}{2}}{tg \frac{A-B}{2}}; \quad \frac{0,7574743}{-0,0468257} = \frac{2,5285049}{-0,1563077};$$

$$-16,1764651 = -16,1764575. \quad \text{Контроль хороший.}$$

Для визначення кута C візьємо першу та другу аналогії Непера (4.17):

$$ctg \frac{C}{2} = \frac{tg \frac{A+B}{2} \cos \frac{a+b}{2}}{\cos \frac{a-b}{2}}; \quad ctg \frac{C}{2} = \frac{tg \frac{A-B}{2} \sin \frac{a+b}{2}}{\sin \frac{a-b}{2}}.$$

Проміжні обчислення:

$$\cos \frac{a+b}{2} = 0,7971311; \quad \cos \frac{a-b}{2} = 0,9989055;$$

$$\sin \frac{a+b}{2} = 0,6038063; \quad \sin \frac{a-b}{2} = -0,0467746.$$

Обчислення невідомого:

$$ctg \frac{C}{2} = \frac{2,5285049 \cdot 0,7971311}{0,9989055} = 2,0177583;$$

$$\frac{C}{2} = 26^\circ,3629922; \quad C = 52^\circ,7259844 = 52^\circ 43' 34'';$$

$$ctg \frac{C}{2} = \frac{-0,1563077 \cdot 0,6038063}{-0,0467746} = 2,0177567;$$

$$\frac{C}{2} = 26^\circ,3630558; \quad C = 52^\circ,7261116 = 52^\circ 43' 34''.$$

Контролем точності при знаходженні кута C є обчислення його за двома різними формулами. Одержані результати співпа-

дають.

При розв'язуванні цієї задачі дістаємо дійсні та цілком певні значення шуканих елементів за умови, що величини кожного з даних елементів розташовані між 0° та 180° . Розв'язок задачі завжди існує і при цьому єдиний.

$$\begin{aligned} \text{Відповідь: } a &= 34^\circ 27' 13''; b = 39^\circ 49' 26''; \\ C &= 52^\circ 43' 34''. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Приклад 7д. Розв'язання сферичного трикутника за двома сторонами та кутом, що лежить проти однієї з них. Дано: $a = 57^\circ 41' 13''$; $b = 76^\circ 34' 42''$; $A = 40^\circ 23' 28''$. Знайти: B, C та c .

□ Кут B визначимо за формулою синусів (25):

$$\sin B = \sin A \cdot \frac{\sin b}{\sin a}.$$

Кут C та сторону c визначимо за формулами, що випливають з аналогій Непера (4.17) і (4.18):

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{C}{2} &= \operatorname{ctg} \frac{A+B}{2} \cdot \frac{\cos \frac{a-b}{2}}{\cos \frac{a+b}{2}}; & \operatorname{tg} \frac{C}{2} &= \operatorname{ctg} \frac{A-B}{2} \cdot \frac{\sin \frac{a-b}{2}}{\sin \frac{a+b}{2}}; \\ \operatorname{tg} \frac{c}{2} &= \operatorname{tg} \frac{a+b}{2} \cdot \frac{\cos \frac{A+B}{2}}{\cos \frac{A-B}{2}}; & \operatorname{tg} \frac{c}{2} &= \operatorname{tg} \frac{a-b}{2} \cdot \frac{\sin \frac{A+B}{2}}{\sin \frac{A-B}{2}}. \end{aligned}$$

Контролем знаходження величин C та c служить обчислення кожної з них за двома різними співвідношеннями. Обчислення кута B перевіримо за формулою Гаусса (4.19):

$$\operatorname{tg} \frac{A+B}{2} \Big/ \operatorname{tg} \frac{A-B}{2} = \operatorname{tg} \frac{a+b}{2} \Big/ \operatorname{tg} \frac{a-b}{2}.$$

При обчисленні кута B за формулою синусів можливі три випадки:

- а) $\sin B > 1$, при цьому розв'язок задачі не існує;
- б) $\sin B = 1$, тоді кут $B = 90^\circ$ і задача має єдиний розв'язок;
- в) $\sin B < 1$, тоді для кута B дістанемо два значення: перше

менше за 90° , а друге більше за 90° . Задача матиме два розв'язки.

Оскільки в трикутнику проти більшої сторони лежить більший кут і навпаки, то шуканий кут мусить задовольняти умові, щоб різниці $A - B$ і $a - b$ мали один і той же знак. Якщо ця умова не справджується, то сферичний трикутник не можливий. Якщо ж ця умова виконана одним або двома одержаними значеннями кута B , то дістанемо один або два розв'язки трикутника. Справді, при кожному певному значенні кута B , що задовольняє попередній умові, за формулами Непера для кута C і сторони c отримаємо єдині цілком певні значення.

З того, що різниці $A - B$ і $a - b$ мають однакові знаки, спираючись на умову: якщо $A + B \leq 180^\circ$, то і $a + b \leq 180^\circ$, маємо:

$$0^\circ < \frac{C}{2} < 90^\circ; \quad 0^\circ < \frac{c}{2} < 90^\circ, \quad \text{або} \quad C < 180^\circ, \quad c < 180^\circ. \quad \text{Звідси очевид-$$

но, що знаходження кута C і сторони c за тангенсами $\frac{C}{2}$ і $\frac{c}{2}$ для кожного значення B буде однозначним.

$$\text{Дано: } a = 57^\circ 41' 13'' = 57,6869444;$$

$$b = 76^\circ 34' 42'' = 76,5783333;$$

$$A = 40^\circ 23' 28'' = 40,3911111.$$

Проміжні обчислення:

$$\sin a = 0,8451400; \quad \sin b = 0,97268817; \quad \sin A = 0,6480017;$$

$$\sin B = 0,6480017 \frac{0,97268817}{0,8451400} = 0,7457929;$$

$$B_1 = 48^\circ,2272247; \quad B_2 = 131^\circ,7727534;$$

$$B_1 = 48^\circ 13' 38''; \quad B_2 = 131^\circ 46' 22'';$$

$$a + b = 134^\circ,2652777 < 180^\circ; \quad A + B_1 = 88^\circ,6183358 < 180^\circ;$$

$$A + B_2 = 172^\circ,1638645 < 180^\circ; \quad a - b = -18^\circ,8913889;$$

$$A - B_1 = -7,8361136; \quad A - B_2 = -91^\circ,3816423.$$

Оскільки $a - b < 0$, $A - B_1 < 0$ і $A - B_2 < 0$, то обидва розв'язки задачі можливі.

$$\begin{aligned}
1) \quad & \frac{A+B_1}{2} = 44^\circ,3091679; & \cos \frac{A+B_1}{2} = 0,715581; \\
& \sin \frac{A+B_1}{2} = 0,6985298; & \operatorname{tg} \frac{A+B_1}{2} = 0,9761716; \\
& \operatorname{ctg} \frac{A+B_1}{2} = 1,0244101; & \frac{A-B_1}{2} = -3,9180568; \\
& \cos \frac{A-B_1}{2} = 0,9976628; & \sin \frac{A-B_1}{2} = -0,0683297; \\
& \operatorname{tg} \frac{A-B_1}{2} = -0,0684898; & \operatorname{ctg} \frac{A-B_1}{2} = -14,6007179; \\
& \frac{a+b}{2} = 67^\circ,1326388; & \cos \frac{a+b}{2} = 0,3885991; \\
& \sin \frac{a+b}{2} = 0,9214069; & \operatorname{tg} \frac{a+b}{2} = 2,3710988; \\
& \frac{a-b}{2} = -9,4456944; & \cos \frac{a-b}{2} = 0,9864416; \\
& \sin \frac{a-b}{2} = -0,1641127; & \operatorname{tg} \frac{a-b}{2} = -0,1663684; \\
2) \quad & \frac{A+B_2}{2} = 86^\circ,0819322; & \cos \frac{A+B_2}{2} = 0,0683299; \\
& \sin \frac{A+B_2}{2} = 0,9976628; & \operatorname{tg} \frac{A+B_2}{2} = 14,600677; \\
& \operatorname{ctg} \frac{A+B_2}{2} = 0,0684899; & \frac{A-B_2}{2} = -45,6908212; \\
& \cos \frac{A-B_2}{2} = 0,6985299; & \sin \frac{A-B_2}{2} = -0,7155808; \\
& \operatorname{tg} \frac{A-B_2}{2} = -1,0244097; & \operatorname{ctg} \frac{A-B_2}{2} = -0,9761719.
\end{aligned}$$

Контроль обчислення кута $B_{1,2}$:

$$B_1: \quad \operatorname{tg} \frac{A+B_1}{2} / \operatorname{tg} \frac{A-B_1}{2} = \operatorname{tg} \frac{a+b}{2} / \operatorname{tg} \frac{a-b}{2};$$

$$\frac{0,9761716}{-0,0684898} = \frac{2,3710988}{-0,1663684}; -14,2528026 = -14,2520984;$$

$$B_2: \quad \operatorname{tg} \frac{A+B_2}{2} / \operatorname{tg} \frac{A-B_2}{2} = \operatorname{tg} \frac{a+b}{2} / \operatorname{tg} \frac{a-b}{2};$$

$$\frac{14,600677}{-1,0244097} = \frac{2,3710988}{-0,1663684}; -14,2527711 = -14,2520984.$$

Узгодженість хороша.

Обчислення кута С:

$$C_1: \operatorname{tg} \frac{C_1}{2} = \operatorname{ctg} \frac{A+B_1}{2} \cdot \frac{\cos \frac{a-b}{2}}{\cos \frac{a+b}{2}} =$$

$$= 1,0244101 \cdot \frac{0,9864416}{0,3885991} = 2,6004197$$

$$\frac{C_1}{2} = 68^\circ,9655871 = 68^\circ 57' 56'';$$

$$\operatorname{tg} \frac{C_1}{2} = \operatorname{ctg} \frac{A-B_1}{2} \cdot \frac{\sin \frac{a-b}{2}}{\sin \frac{a+b}{2}} = -14,6007179 \times$$

$$\times \frac{-0,1641127}{0,9214069} = 2,6005484$$

$$\frac{C_1}{2} = 68^\circ,9665373 = 68^\circ 57' 59''.$$

Візьмемо C_1 як середнє з двох розрахунків:

$$C_1 = 137^\circ,9321244 = 137^\circ 55' 56''.$$

$$C_2: \operatorname{tg} \frac{C_2}{2} = \operatorname{ctg} \frac{A+B_2}{2} \cdot \frac{\cos \frac{a-b}{2}}{\cos \frac{a+b}{2}} =$$

$$= 0,0684899 \cdot \frac{0,9864416}{0,3885991} = 0,1738586$$

$$\frac{C_2}{2} = 9^\circ,8627778 = 9^\circ 51' 46'' ;$$

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{C_2}{2} &= \operatorname{ctg} \frac{A-B_2}{2} \cdot \frac{\sin \frac{a-b}{2}}{\sin \frac{a+b}{2}} = -0,9761719 \times \\ &\times \frac{-0,1641127}{0,9214069} = 0,1738669 \end{aligned}$$

$$\frac{C_2}{2} = 9^\circ,8632434 = 9^\circ 51' 48'' .$$

Візьмемо C_2 як середнє з двох розрахунків:

$$C_2 = 19^\circ,7260212 = 19^\circ 43' 34'' .$$

Обчислення сторони c :

$$\begin{aligned} c_1 : \operatorname{tg} \frac{c_1}{2} &= \operatorname{tg} \frac{a+b}{2} \cdot \frac{\cos \frac{A+B_1}{2}}{\cos \frac{A-B_1}{2}} = \\ &= 2,3710988 \cdot \frac{0,715581}{0,9976628} = 1,7373178 \end{aligned}$$

$$\frac{c_1}{2} = 60^\circ,0752730 = 60^\circ 04' 31'' ;$$

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{c_1}{2} &= \operatorname{tg} \frac{a-b}{2} \cdot \frac{\sin \frac{A+B_1}{2}}{\sin \frac{A-B_1}{2}} = -0,1663684 \times \\ &\times \frac{0,6985298}{-0,0683297} = 1,7007726 \end{aligned}$$

$$\frac{c_1}{2} = 59^\circ,5458316 = 59^\circ 32' 45'' .$$

Візьмемо c_1 як середнє з двох розрахунків:

$$c_1 = 119^\circ,6211046 = 119^\circ 37' 16'' .$$

$$c_2 : tg \frac{c_2}{2} = tg \frac{a+b}{2} \frac{\cos \frac{A+B_2}{2}}{\cos \frac{A-B_2}{2}} =$$

$$= 2,3710988 \cdot \frac{0,0683299}{0,6985299} = 0,23193988$$

$$\frac{c_2}{2} = 13^\circ,0582826 = 13^\circ 03' 30'';$$

$$tg \frac{c_2}{2} = tg \frac{a-b}{2} \frac{\sin \frac{A+B_2}{2}}{\sin \frac{A-B_2}{2}} = -0,1663684 \times$$

$$\times \frac{0,9976628}{-0,7155808} = 0,2319508$$

$$\frac{c_2}{2} = 13^\circ,0588780 = 13^\circ 05' 20''.$$

Візьмемо c_2 як середнє з двох розрахунків

$$c_2 = 26^\circ,1470622 = 26^\circ 08' 49''.$$

Відповідь: $B_1 = 48^\circ 13' 48''$; $C_1 = 137^\circ 55' 56''$; $c_1 = 119^\circ 37' 16''$;

$B_2 = 131^\circ 46' 22''$; $C_2 = 19^\circ 43' 34''$; $c_2 = 26^\circ 08' 49''$. ■

Приклад 7е. Розв'язання сферичного трикутника за двома кутами та стороною, що лежить проти одного з них. Дано: $A = 60^\circ 57' 33''$; $B = 72^\circ 40' 32''$; $a = 57^\circ 17' 28''$ Знайти: b, c та C .

□ Для розв'язання даної задачі скористаємося методом безпосереднього обчислення за допомогою основних формул і аналогій Непера.

Визначимо сторону b за формулою синусів:

$$\sin b = \sin B \sin a / \sin A.$$

Перевірку обчислення виконаємо за контрольною формулою Гаусса:

$$tg \frac{A+B}{2} / tg \frac{A-B}{2} = tg \frac{a+b}{2} / tg \frac{a-b}{2}.$$

Кут C та сторону c , як і у прикладі 7д, обчислимо за аналогіями Непера:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{C}{2} &= \operatorname{ctg} \frac{A+B}{2} \cdot \frac{\cos \frac{a-b}{2}}{\cos \frac{a+b}{2}}; & \operatorname{tg} \frac{c}{2} &= \operatorname{tg} \frac{a+b}{2} \cdot \frac{\cos \frac{A+B}{2}}{\cos \frac{A-B}{2}}; \\ \operatorname{tg} \frac{C}{2} &= \operatorname{ctg} \frac{A-B}{2} \cdot \frac{\sin \frac{a-b}{2}}{\sin \frac{a+b}{2}}; & \operatorname{tg} \frac{c}{2} &= \operatorname{tg} \frac{a-b}{2} \cdot \frac{\sin \frac{A+B}{2}}{\sin \frac{A-B}{2}}. \end{aligned}$$

Контролем точності знаходження C та c є подвійне обчислення кожної величини за двома різними формулами.

$$\text{Дано: } A = 60^{\circ}57'33'' = 60,9591667;$$

$$B = 72^{\circ}40'32'' = 72,6755556; \quad a = 57^{\circ}17'28'' = 57,2911111.$$

Обчислення сторони b :

$$\sin b = \sin B \sin a / \sin A; \quad \sin B = 0,9546338;$$

$$\sin a = 0,8414270; \quad \sin A = 0,8742740;$$

$$\sin b = \frac{0,9546338 \cdot 0,8414270}{0,8742740} = 0,9187677;$$

$$\begin{aligned} b_1 &= 66^{\circ},7465823 = \\ &= 67^{\circ}44'48'' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_2 &= 113^{\circ},2534177 = \\ &= 113^{\circ}15'12'' \end{aligned}$$

Різниці $A - B < 0$ та $a - b_1 < 0$ і, відповідно, $A - B < 0$ та $a - b_2 < 0$ мають однакові знаки, а тому існують два розв'язки:

$$b_1 = 67^{\circ}44'48'' \quad \text{та} \quad b_2 = 113^{\circ}15'12''.$$

Обчислення C та c :

$$\frac{A+B}{2} = 66,8773612; \quad \operatorname{ctg} \frac{A+B}{2} = 0,4282419;$$

$$\cos \frac{A+B}{2} = 0,3936634; \quad \sin \frac{A+B}{2} = 0,9192547;$$

$$\frac{A-B}{2} = -5,8581944; \quad \operatorname{ctg} \frac{A-B}{2} = -9,7463449;$$

$$\cos \frac{A-B}{2} = 0,9947776; \quad \sin \frac{A-B}{2} = -0,1020667;$$

$$\frac{a+b_1}{2} = 62^\circ,0188467; \quad \cos \frac{a+b_1}{2} = 0,4691811;$$

$$\sin \frac{a+b_1}{2} = 0,8831020; \quad \operatorname{tg} \frac{a+b_1}{2} = 1,8822198;$$

$$\frac{a-b_1}{2} = -4^\circ,7273559; \quad \cos \frac{a-b_1}{2} = 0,9965982;$$

$$\sin \frac{a-b_1}{2} = -0,0824143; \quad \operatorname{tg} \frac{a-b_1}{2} = -0,0826957;$$

$$\frac{a+b_2}{2} = 85^\circ,2722644; \quad \cos \frac{a+b_2}{2} = 0,0824209;$$

$$\sin \frac{a+b_2}{2} = 0,9965976; \quad \operatorname{tg} \frac{a+b_2}{2} = 12,0915571;$$

$$\frac{a-b_2}{2} = -27^\circ,9811533; \quad \cos \frac{a-b_2}{2} = 0,8831020;$$

$$\sin \frac{a-b_2}{2} = -0,4691811; \quad \operatorname{tg} \frac{a-b_2}{2} = -0,5312876.$$

$$\begin{aligned} \text{Кут } C_1: \quad \operatorname{tg} \frac{C_1}{2} &= \operatorname{ctg} \frac{A+B}{2} \cos \frac{a-b_1}{2} / \cos \frac{a+b_1}{2} = \\ &= 0,4282419 \cdot \frac{0,9864136}{0,4691811} = 0,9003424; \end{aligned}$$

$$\frac{C_1}{2} = 41^\circ,9980491 = 41^\circ 59' 59''; \quad C_1 = 83^\circ,9996098 = 83^\circ 59' 59'';$$

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{C_1}{2} &= \operatorname{ctg} \frac{A-B}{2} \cdot \frac{\sin \frac{a-b_1}{2}}{\sin \frac{a+b_1}{2}} = \\ &= -9,7463449 \cdot \frac{-0,0824143}{0,8831020} = 0,9095649 \end{aligned}$$

$$\frac{C_1}{2} = 42^\circ, 2885564; \quad C_1 = 84^\circ, 5771129 = 84^\circ 34' 38''.$$

C_1 беремо як середнє за двома розрахунками:

$$C_1 = 84^\circ, 2883614 = 84^\circ 17' 18''.$$

$$\begin{aligned} \text{Кут } C_2: \quad \operatorname{tg} \frac{C_2}{2} &= \operatorname{ctg} \frac{A+B}{2} \cos \frac{a-b_2}{2} \Big/ \cos \frac{a+b_2}{2} = \\ &= 0,4282419 \cdot \frac{0,8831020}{0,0824209} = 4,5884148; \end{aligned}$$

$$\frac{C_2}{2} = 74^\circ, 7052000; \quad C_2 = 155^\circ, 4104 = 155^\circ 24' 37'';$$

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{C_2}{2} &= \operatorname{ctg} \frac{A-B}{2} \frac{\sin \frac{a-b_2}{2}}{\sin \frac{a+b_2}{2}} = \\ &= -9,7463449 \cdot \frac{-0,4691811}{0,9965976} = 4,5884124 \end{aligned}$$

$$\frac{C_2}{2} = 77^\circ, 7051938; \quad C_2 = 155^\circ, 4103876 = 155^\circ 24' 37''.$$

C_2 беремо як середнє за двома розрахунками:

$$C_2 = 155^\circ 24' 37''.$$

$$\begin{aligned} \text{Сторона } c_1: \quad \operatorname{tg} \frac{c_1}{2} &= \operatorname{tg} \frac{a+b_1}{2} \cdot \frac{\cos \frac{A+B}{2}}{\cos \frac{A-B}{2}} = \\ &= 1,8822198 \cdot \frac{0,3936634}{0,9947776} = 0,7448510; \end{aligned}$$

$$\frac{c_1}{2} = 36^\circ, 6806187; \quad c_1 = 73^\circ, 3612374 = 73^\circ 21' 40'';$$

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{c_1}{2} &= \operatorname{tg} \frac{a-b_1}{2} \cdot \frac{\sin \frac{A+B}{2}}{\sin \frac{A-b}{2}} = \\ &= -0,0826957 \cdot \frac{0,9192547}{-0,1020667} = 0,7447915 \end{aligned}$$

$$\frac{c_1}{2} = 36^\circ,6784277; \quad c_1 = 73^\circ,3568555 = 73^\circ 21' 25''.$$

c_1 беремо як середнє за двома розрахунками: $c_1 = 73^\circ 21' 33''$.

$$\begin{aligned} \text{Сторона } c_2: \quad \operatorname{tg} \frac{c_2}{2} &= \operatorname{tg} \frac{a+b_2}{2} \cdot \frac{\cos \frac{A+B}{2}}{\cos \frac{A-B}{2}} = \\ &= 12,0915571 \cdot \frac{0,3936634}{0,9947776} = 4,7849926; \end{aligned}$$

$$\frac{c_2}{2} = 78^\circ,1958357; \quad c_2 = 156^\circ,3916714 = 156^\circ 23' 30'';$$

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{c_2}{2} &= \operatorname{tg} \frac{a-b_2}{2} \cdot \frac{\sin \frac{A+B}{2}}{\sin \frac{A-B}{2}} = \\ &= -0,5312876 \cdot \frac{0,9192547}{-0,1020667} = 4,7849947 \end{aligned}$$

$$\frac{c_2}{2} = 78^\circ,1958408; \quad c_2 = 156^\circ,3916816 = 156^\circ 23' 30''.$$

Середнє значення c_2 за двома розрахунками:

$$c_2 = 156^\circ 23' 30''.$$

Відповідь: $b_1 = 67^\circ 44' 48''$; $c_1 = 73^\circ 21' 33''$; $C_1 = 84^\circ 17' 18''$;

$b_2 = 113^\circ 15' 12''$; $c_2 = 156^\circ 23' 30''$; $C_2 = 155^\circ 24' 37''$. ■

Контрольні запитання та вправи

1. Що вивчає сферична геометрія?
2. Які задачі розв'язує сферична тригонометрія?
3. Що таке ортодромія та локсодромія?
4. Яким співвідношенням задається зв'язок кутової (градусної, радіанної) та лінійної мір дуги великого кола?
5. Що таке полюс і полюра?
6. У чому полягає принцип двоїстості?
7. Що таке “сферичний центр” і “сферичний радіус” малого кола?
8. Як визначають положення точки в географічній сферичній системі координат?
9. За якими формулами обчислюють лінійну величину дуги великого та малого кіл?
10. Що таке “сферичний кут” і як він вимірюється?
11. Дайте означення вертикальних і суміжних сферичних кутів.
12. Подайте у звичайному вигляді градусної міри (градус – мінута – секунда, з точністю до секунд) сферичний кут, виміряний тільки в градусах: $\varphi_1 = 40^\circ,3876057$, $\varphi_2 = 132^\circ,9152183$.
(Відповідь: $\varphi_1 = 40^\circ 23'15''$, $\varphi_2 = 132^\circ 54'55''$)
13. Подайте у звичайному вигляді градусної міри (градус – мінута – секунда, з точністю до секунд) сферичний кут, виміряний у радіанах: $\varphi_1 = 0,58420$, $\varphi_2 = 2,32598$.
(Відповідь: $\varphi_1 = 33^\circ 28'20''$, $\varphi_2 = 133^\circ 16'8''$)
14. Подайте у радіанах (з точністю до сьомого знака після коми) сферичний кут, виміряний у градусній мірі: $\varphi_1 = 42^\circ 54'6''$, $\varphi_2 = 160^\circ 9'47''$.
(Відповідь: $\varphi_1 = 0,7487753$, $\varphi_2 = 2,7953727$)
15. Подайте у лінійній мірі (з точністю до км) дугу S великого кола земної кулі ($R = 6370$ км), виміряну в градусній мірі: $\varphi_1 = 63^\circ 0'42''$, $\varphi_2 = 154^\circ 28'7''$.
(Відповідь: $S_1 = 7006$ км; $S_2 = 17173$ км)

16. Подайте у лінійній мірі (з точністю до км) дугу S великого кола земної кулі ($R = 6370$ км), виміряну в радіанній мірі: $\varphi_1 = 1,73924$, $\varphi_2 = 0,82107$.

(Відповідь: $S_1 = 11079$ км; $S_2 = 5230$ км)

17. Подайте у лінійній мірі (з точністю до км) довжину дуги l паралелі земної кулі ($R = 6370$ км) на широті $\varphi = 16^\circ 52' 14''$, якщо її кутлова величина (різниця довгот) $\alpha = \Delta\lambda = 124^\circ 48' 27''$.

(Відповідь: $l = 13279$ км)

18. Що таке “сферичний двокутник”? Які в нього елементи?

19. Що таке “сферичний трикутник”? Які в нього елементи?

20. У чому полягають обмеження Ейлера?

21. Дайте означення висоти, медіани, бісектриси та серединного перпендикуляра сферичного трикутника.

22. Яке перетворення називають рухом на сфері? Композицією яких простих рухів можна його подати?

23. У чому полягає рівність сферичних трикутників?

24. Що таке “спряжені сферичні трикутники”?

25. Що таке “взаємополярні сферичні трикутники”? Наведіть їх властивості.

26. Як класифікують сферичні трикутники за сторонами та кутами?

27. Наведіть співвідношення між сторонами та кутами сферичного трикутника.

28. Чи може сферичний трикутник ABC бути заданим наступними значеннями його елементів? Якщо не може, то чому?

а) $A = 59^\circ 24'$; $B = 70^\circ 56'$; $C = 81^\circ 40'$;

б) $A = 37^\circ 16'$; $B = 51^\circ 27'$; $C = 75^\circ 17'$;

в) $A = 171^\circ 46'$; $B = 151^\circ 19'$; $C = 87^\circ 55'$;

г) $a = 116^\circ 12'$; $b = 44^\circ 30'$; $c = 64^\circ 18'$;

д) $a = 116^\circ 8'$; $b = 129^\circ 2'$; $c = 114^\circ 50'$.

29. Що таке “сферичний надлишок”? Які межі його зміни?

30. Як обчислюють площу сферичного двокутника?

31. Як обчислюють площу сферичного трикутника?

32. Що таке “сферичний многокутник”?
33. Який сферичний многокутник називають опуклим?
34. Як зв’язані сферичний многокутник і відповідний многогранний кут?
35. Як обчислюють площу сферичного многокутника?
36. У чому полягає метод перестановки елементів по колу?
37. Як читають формулу косинуса сторони сферичного трикутника? Формулу косинуса кута сферичного трикутника?
38. Яка залежність визначається сферичною теоремою синусів?
39. Як читають формулу добутку синуса сторони на косинус прилеглого кута (формулу п’яти елементів)?
40. Як читають формулу добутку синуса кута на косинус прилеглої сторони (змінену формулу п’яти елементів)?
41. Як читають формулу котангенсів (формулу чотирьох елементів)?
42. Чи можливий сферичний трикутник ABC при наступних значеннях його елементів?

- а) $a = 35^{\circ}32'$; $b = 38^{\circ}56'$; б) $a = 41^{\circ}18'$; $b = 20^{\circ}15'$;
 в) $a = 20^{\circ}33'$; $b = 68^{\circ}10'$; г) $A = 25^{\circ}27'$; $B = 64^{\circ}9'$;
 д) $A = 35^{\circ}21'$; $B = 46^{\circ}10'$; е) $A = 43^{\circ}7'$; $B = 47^{\circ}35'$;
 є) $c = 80^{\circ}15'$; $A = 17^{\circ}22'$; ж) $C = 101^{\circ}6'$; $a = 21^{\circ}43'$.

43. Що таке “прямокутний сферичний трикутник”? Які його елементи?
44. Сформулюйте мнемонічне правило Непера та умови його застосування.
45. Наведіть усі шість випадків розв’язання прямокутних сферичних трикутників.
46. Чи можливий прямокутний сферичний трикутник ABC при наступних значеннях його елементів?

- а) $a = 150^{\circ}25'$; $b = 110^{\circ}12'$; $c = 136^{\circ}43'$;
 б) $a = 71^{\circ}23'$; $b = 140^{\circ}54'$; $c = 114^{\circ}16'$;
 в) $b = 33^{\circ}18'$; $B = 60^{\circ}24'$; $C = 37^{\circ}5'$.

47. Складіть схеми обчислень для кожного випадку розв'язання прямокутних сферичних трикутників.

48. Як розв'язують прямокутні сферичні трикутники?

49. Що таке “косокутний сферичний трикутник”?

50. Наведіть усі шість випадків розв'язання косокутних сферичних трикутників.

51. У яких випадках неможливо розв'язати косокутний сферичний трикутник?

52. Складіть схеми безпосереднього обчислення шуканих елементів косокутного сферичного трикутника для кожного випадку його розв'язання.

53. За якими формулами розв'язують косокутний сферичний трикутник, якщо задані три сторони?

54. За якими формулами розв'язують косокутний сферичний трикутник, якщо задані три кути?

55. Коли краще застосовувати формули синусів, а коли – формули косинусів половини кутів?

56. Наведіть формули Даламбера – Гаусса.

57. Що виражають аналогії Непера?

58. За якими формулами розв'язується косокутний сферичний трикутник, якщо задані дві сторони та кут між ними?

59. За якими формулами розв'язують косокутний сферичний трикутник, якщо задані сторона та два прилеглих до неї кути?

60. Наведіть формули для обчислення сферичного надлишку.

61. Як обчислюють сферичний радіус малого кола, вписаного в даний сферичний трикутник?

62. Як обчислюють сферичний радіус малого кола, описаного навколо даного сферичного трикутника?

63. Як записують контрольну формулу Гаусса?

64. У чому полягають формули Каньйоли та Люїльє? Для чого їх застосовують?

65. Як контролюють хід розв'язування сферичних трикутників?

66. Що таке “малі сферичні трикутники”?

67. Сформулюйте теорему Лежандра. У чому її значення?

68. За якими спрощеними формулами обчислюють ексцес малого сферичного трикутника?

69. Як розв'язують малі сферичні трикутники за теоремою Лежандра?

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Борисенко О.А., Ушакова Л.М. Аналітична геометрія. – Х.: Основа, 1993. – 192 с.
2. Волынский Б.А. Сферическая тригонометрия. – М.: Наука, 1977. – 135 с.
3. Кашкаха В.Е., Откидач В.В. Сферическая тригонометрия и вычислительные методы в маркшейдерском деле. – Донецк: ДонГУ, 1984. – 112 с.
4. Кранц П. Сферическая тригонометрия. – М.: URSS.ЛКИ, 2007. – 93 с.
5. Матвиевская Г.П. Становление плоской и сферической тригонометрии. Из истории математических идей. – М.: Знание, 1982. – 64 с.
6. Пандул И.С. Сферическая тригонометрия и сферическая астрономия применительно к решению инженерно-геодезических задач. – Л.: ЛГИ, 1982. – 99 с.
7. Сандраков П.В. Решение сферических треугольников. – Пермь: ПермПИ, 1970. – 81 с.
8. Тарасенкова Н.А., Петрова Є.В. Вступ до сферичної геометрії. – Черкаси: ЧНУ, 2008. – 80 с.

Завдання для самостійної роботи

1. Визначити довжину дуги l паралелі земної кулі ($R = 6370$ км) на широті φ , якщо різниця довгот дорівнює $\Delta\lambda$.

№	$\Delta\lambda$	φ	№	$\Delta\lambda$	φ
1	1°10'15"	55°45'00"	11	17°19'21"	31°45'17"
2	5°12'17"	54°31'25"	12	20°17'18"	35°40'01"
3	2°11'18"	56°29'30"	13	26°30'17"	40°31'02"
4	25°17'19"	56°50'40"	14	11°29'11"	43°17'07"
5	5°20'30"	89°10'10"	15	9°33'18"	45°18'19"
6	4°31'49"	45°10'02"	16	7°41'35"	46°19'17"
7	10°29'03"	40°21'05"	17	6°31'17"	80°20'03"
8	11°30'41"	39°31'42"	18	15°17'13"	82°17'07"
9	30°10'29"	49°27'12"	19	19°21'34"	85°20'20"
10	26°11'30"	44°31'11"	20	13°31'11"	81°30'15"

2. Довжина дуги AB паралелі земної кулі ($R = 6370$ км) на широті φ дорівнює l . Визначити довжину дуги S екватора між меридіанами, що проходять через точки A та B .

№	l (км)	φ	№	l (км)	φ
1	73.26	55°45'00"	11	1637.04	31°45'17"
2	335.83	54°31'25"	12	1832.50	35°40'01"
3	134.31	56°29'30"	13	2240.13	40°31'02"
4	1537.65	56°50'40"	14	929.61	43°17'07"
5	8.61	89°10'10"	15	747.15	45°18'19"
6	355.10	45°10'02"	16	590.67	46°19'17"
7	886.88	40°21'05"	17	121.73	80°20'03"
8	987.13	39°31'42"	18	228.15	82°17'07"
9	2180.82	49°27'12"	19	174.95	85°20'20"
10	2076.23	44°31'11"	20	222.07	81°30'15"

3. Різні задачі

3.1. Знайти довжину дуги S великого кола земної кулі ($R = 6370$ км), на яку спирається центральний кут $\alpha = 40^\circ 10'$.

3.2. Довжина дуги S великого кола земної кулі ($R = 6370$ км) дорівнює 1132 км. Знайти центральний кут α , що спирається на цю дугу.

3.3. Визначити різницю довгот $\Delta\lambda$, якщо довжина дуги паралелі $l = 102,5$ км на широті $\varphi = 55^\circ 45'$. Взяти $R = 6370$ км.

3.4. Визначити відстань S від Москви ($\varphi = 55^\circ 45'$) до Північного полюса. Взяти $R = 6370$ км.

3.5. Визначити радіус сфери R , якщо площа сферичного трикутника $F = 288,39$ кв. од., а його кути $A = 49^\circ 19' 32''$, $B = 81^\circ 30' 12''$ та $C = 53^\circ 27' 56''$.

3.6. Довжина дуги паралелі $l = 1000$ км на широті $\varphi = 55^\circ 45'$. Визначити різницю довгот $\Delta\lambda$. Взяти $R = 6370$ км.

3.7. Визначити центральний кут α , що спирається на дугу великого кола земної кулі ($R = 6370$ км) довжиною $S = 23286$ км.

3.8. Знайти довжину дуги S великого кола, на яку спирається центральний кут $\alpha = 42^\circ 54' 50''$. Взяти $R = 6370$ км.

3.9. Визначити площу F сферичного трикутника з кутами $A = 46^\circ 29' 24''$, $B = 69^\circ 55' 23''$ та $C = 74^\circ 41' 46''$ та $R = 10$ м.

3.10. Визначити площу F двокутника, якщо довжина дуги малого кола $l = 200$ м, обмежена сторонами двокутника на широті $\varphi = 30^\circ$, а $R = 3180$ м.

3.11. Визначити радіус сфери R , якщо площа сферичного трикутника $F = 729843$ кв. од., а його кути $A = 52^\circ 09' 47''$, $B = 74^\circ 27' 19''$ та $C = 84^\circ 52' 56''$.

3.12. Центральний кут великого кола земної кулі ($R = 6370$ км) $\alpha = 160^\circ 08' 35''$. Визначити довжину дуги S , на яку спирається цей кут.

3.13. Довжина дуги S великого кола земної кулі ($R = 6370$ км) дорівнює 10000 км, визначити величину відповідного центрального кута α .

3.14. Довжина дуги паралелі $l = 111$ км на широті $\varphi = 30^\circ$ земної поверхні ($R = 6370$ км). Визначити різницю довгот $\Delta\ell$.

3.15. Визначити площу F двокутника, якщо довжина дуги малого кола $l = 57$ км, що обмежена сторонами двокутника на широті $\varphi = 60^\circ 10'$, а $R = 6370$ км.

3.16. Визначити радіус сфери R , якщо площа сферичного трикутника $F = 23684388 \text{ км}^2$, а кути $A = 80^\circ 17' 13''$, $B = 100^\circ 17' 10''$ та $C = 32^\circ 52' 12''$.

3.17. Визначити площу F сферичного трикутника, якщо $A = 37^\circ 12' 17''$, $B = 120^\circ 17' 37''$, $C = 33^\circ 17' 19''$ і $R = 100 \text{ см}$.

3.18. Знайти центральний кут α великого кола земної кулі ($R = 6370 \text{ км}$), що спирається на дугу $S = 23286 \text{ км}$.

3.19. Визначити площу двокутника F , якщо довжина дуги малого кола $l = 111 \text{ км}$, що обмежена сторонами двокутника на широті $\varphi = 55^\circ 45'$, а $R = 6370 \text{ км}$.

3.20. Визначити довжину дуги S великого кола земної кулі ($R = 6370 \text{ км}$), на яку спирається центральний кут $\alpha = 208^\circ 42' 17''$.

4. Визначити найкоротшу (ортодромічну) відстань $M_1 M_2$ між двома точками M_1 та M_2 земної кулі ($R = 6370 \text{ км}$), що задані їх географічними координатами $(\varphi, \lambda)^*$. Знайти азимут μ_{21} точки M_2 відносно точки M_1 . Знайти довжину S та кут K локсодромії між точками M_1 та M_2 .

№	M_1	M_2	№	M_1	M_2
1	(55°50'; 60°35')	(56°45'; 37°30')	11	(59°56'; 30°17')	(56°52'; 35°53')
2	(53°20'; 61°31')	(50°30'; 41°31')	12	(37°16'; 42°18')	(45°27'; 61°30')
3	(45°11'; 60°29')	(56°45'; 37°30')	13	(41°18'; 60°17')	(51°19'; 62°18')
4	(51°12'; 45°30')	(51°12'; 62°11')	14	(44°19'; 64°23')	(52°21'; 65°19')
5	(41°39'; 81°20')	(60°14'; 69°13')	15	(47°20'; 62°20')	(54°37'; 63°11')
6	(49°18'; 72°31')	(30°28'; 80°17')	16	(49°21'; 61°31')	(52°41'; 64°15')
7	(31°21'; 10°37')	(45°30'; 60°17')	17	(52°31'; 60°47')	(61°13'; 80°16')
8	(48°31'; 21°45')	(60°42'; 45°18')	18	(54°11'; 49°30')	(58°17'; 72°13')
9	(51°39'; 32°16')	(62°17'; 41°19')	19	(56°27'; 48°31')	(60°17'; 70°01')
10	(55°46'; 37°30')	(59°56'; 30°17')	20	(62°17'; 45°30')	(70°18'; 50°11')

* Скрізь λ – східна довгота, φ – північна широта.

5. За даними елементами прямокутного сферичного трикутника ($A = 90^\circ$) знайти:

1) невідомі елементи та дослідити їх на існування трикутника;

2) ε (сферичний надлишок), p (півпериметр), r_m та R_m (сферичні радіуси вписаного та описаного малих кіл) даного трикутника;

3) площу F трикутника в км^2 , за радіус сфери взяти $R = 6370$ км.

Завдання 2) і 3) виконати тільки для випадку а).

а) Дано гіпотенузу та катет:

№	a	b	№	a	b
1	61°07'08"	33°18'17"	11	61°07'08"	54°41'47"
2	32°08'00"	23°50'48"	12	32°08'00"	22°12'00"
3	64°03'10"	40°04'16"	13	64°03'10"	55°07'35"
4	107°17'00"	143°12'03"	14	107°17'00"	68°13'15"
5	83°01'04"	73°02'12"	15	83°01'04"	65°22'56"
6	58°40'13"	15°15'42"	16	58°40'13"	12°22'39"
7	78°21'49"	13°02'17"	17	78°21'49"	78°03'04"
8	83°01'04"	73°02'12"	18	83°01'04"	65°22'56"
9	115°56'50"	124°52'25"	19	58°40'13"	15°15'42"
10	80°52'27"	72°13'48"	20	64°03'10"	40°04'16"

б) Дано два катета:

№	b	c	№	b	c
1	48°27'21"	33°07'37"	11	50°00'00"	52°55'26"
2	51°02'48"	12°16'42"	12	57°13'00"	98°47'00"
3	48°54'54"	12°16'42"	13	108°07'00"	39°03'05"
4	50°00'00"	52°55'26"	14	43°18'02"	118°53'58"
5	2°44'00"	11°38'11"	15	75°18'12"	118°09'21"
6	43°18'02"	118°53'58"	16	98°47'00"	57°13'00"
7	75°18'12"	118°09'21"	17	52°55'26"	50°00'00"
8	47°15'00"	56°25'00"	18	56°25'00"	47°15'00"
9	63°31'26"	58°40'30"	19	58°40'30"	63°31'26"
10	2°44'00"	11°38'11"	20	12°16'42"	48°54'54"

в) Дано гіпотенузу та прилеглий кут:

№	a	B	№	a	B
1	40°33'40"	65°58'47"	11	120°38'43"	116°56'17"
2	127°32'26"	21°08'18"	12	115°17'20"	19°13'50"
3	120°38'43"	44°54'44"	13	60°21'19"	32°39'23"
4	115°17'20"	98°28'30"	14	87°16'00"	76°57'43"
5	60°21'19"	72°24'40"	15	44°44'18"	47°37'21"
6	87°16'00"	78°21'49"	16	60°22'25"	38°57'12"
7	44°44'18"	52°05'54"	17	87°16'00"	78°21'49"
8	60°22'25"	68°12'58"	18	120°38'43"	116°56'17"
9	40°33'40"	30°23'50"	19	115°17'20"	19°13'50"
10	127°32'26"	103°15'23"	20	60°16'00"	78°03'04"

г) Дано катет і прилеглий кут:

№	b	C	№	b	C
1	54°06'20"	73°11'06"	11	118°12'48"	55°30'20"
2	60°38'07"	40°56'23"	12	74°21'53"	52°05'54"
3	50°00'00"	59°56'10"	13	54°08'20"	73°11'06"
4	28°07'10"	8°19'25"	14	37°52'18"	49°21'45"
5	64°30'09"	132°44'57"	15	60°38'07"	40°56'23"
6	37°52'18"	49°21'45"	16	38°25'51"	47°30'18"
7	50°00'00"	59°56'10"	17	28°07'10"	8°19'25"
8	2°44'00"	78°21'49"	18	64°30'09"	132°44'57"
9	28°07'10"	8°19'25"	19	54°06'20"	73°11'06"
10	64°30'09"	132°44'57"	20	60°38'07"	40°56'23"

д) Дано два кута:

№	B	C	№	B	C
1	58°27'40"	53°43'14"	11	53°43'14"	58°27'40"
2	32°14'03"	64°59'40"	12	64°59'40"	32°14'13"
3	42°38'51"	63°13'22"	13	63°13'22"	42°38'51"
4	11°56'56"	87°16'00"	14	66°20'00"	74°30'00"
5	77°43'18"	52°05'51"	15	87°16'00"	11°56'56"
6	74°30'00"	66°20'00"	16	52°30'00"	48°12'17"
7	48°12'47"	52°30'00"	17	140°10'04"	70°05'02"
8	13°19'00"	87°16'00"	18	87°16'00"	13°19'00"
9	70°05'02"	140°10'04"	19	58°27'40"	53°43'14"
10	87°16'00"	13°19'00"	20	42°38'51"	63°13'22"

е) Дано катет і протилежний кут:

№	b	B	№	b	B
1	29°31'40"	60°28'05"	11	18°42'58"	34°30'20"
2	38°29'00"	55°34'00"	12	33°01'24"	46°14'48"
3	35°03'00"	49°07'00"	13	37°23'43"	53°05'00"
4	108°41'36"	102°35'40"	14	41°19'28"	42°52'09"
5	4°33'27"	71°26'24"	15	1°32'06"	18°38'15"
6	162°37'18"	111°17'43"	16	7°00'26"	22°22'04"
7	51°02'48"	80°14'41"	17	12°16'42"	15°38'07"
8	108°41'36"	102°35'40"	18	41°19'28"	42°52'09"
9	138°40'32"	137°07'57"	19	161°17'02"	145°20'40"
10	146°58'36"	133°45'12"	20	142°58'36"	126°55'00"

6. За даними елементами косокутного сферичного трикутника знайти:

- 1) невідомі елементи та дослідити їх на існування трикутника;
- 2) ε (сферичний надлишок), p (півпериметр), r_m та R_m (сферичні радіуси вписаного та описаного малих кіл) даного трикутника;
- 3) площу F сферичного трикутника в км^2 , якщо радіус сфери $R = 6370$ км.

Завдання 2) і 3) виконати тільки для випадку а).

а) Дано три сторони:

№	a	b	c	№	a	b	c
1	34°12'48"	42°55'12"	51°02'30"	11	109°14'32"	65°46'04"	80°38'18"
2	59°46'20"	83°17'38"	96°04'22"	12	129°16'54"	45°09'46"	112°58'04"
3	82°11'17"	64°19'21"	31°31'30"	13	39°01'40"	77°18'34"	69°32'35"
4	69°34'26"	57°49'22"	114°16'14"	14	60°31'41"	117°28'18"	78°42'26"
5	60°31'42"	117°28'19"	78°42'23"	15	142°47'00"	118°48'00"	83°17'00"
6	171°18'12"	54°07'16"	133°09'24"	16	51°12'26"	75°03'10"	45°55'52"
7	42°18'00"	17°12'00"	58°30'00"	17	42°55'12"	34°12'48"	51°02'30"
8	79°33'20"	65°28'20"	37°51'40"	18	64°19'12"	82°11'17"	31°31'30"
9	30°04'56"	27°32'22"	32°15'48"	19	117°27'59"	60°32'00"	78°42'23"
10	69°30'36"	62°20'54"	39°46'43"	20	65°28'20"	37°51'40"	79°33'20"

б) Дано три кути:

№	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	№	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>
1	62°05'40"	54°36'10"	70°14'30"	11	132°54'22"	44°08'36"	36°17'49"
2	90°40'16"	71°00'36"	43°04'39"	12	112°56'18"	70°56'10"	57°54'54"
3	116°08'04"	60°07'25"	69°45'17"	13	118°19'56"	31°16'39"	48°37'53"
4	123°15'06"	50°00'20"	84°07'18"	14	32°56'31"	128°13'15"	56°40'54"
5	40°00'48"	95°02'16"	73°04'34"	15	36°28'26"	111°50'54"	52°14'16"
6	47°59'12"	130°46'58"	56°48'52"	16	106°59'00"	56°55'00"	100°40'00"
7	148°14'00"	130°18'00"	120°12'00"	17	121°15'13"	81°36'20"	34°15'36"
8	49°54'13"	108°30'47"	44°50'42"	18	64°40'30"	22°48'09"	106°43'40"
9	83°42'39"	54°16'13"	55°05'54"	19	120°26'21"	39°04'28"	57°46'10"
10	132°54'22"	44°08'36"	36°17'49"	20	74°32'10"	49°10'18"	61°09'50"

в) Дано дві сторони та кут між ними:

№	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>C</i>	№	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>C</i>
1	48°12'36"	37°30'42"	55°05'54"	11	40°28'36"	110°18'32"	56°40'54"
2	104°23'15"	67°04'28"	36°17'49"	12	38°15'06"	75°10'08"	52°14'16"
3	105°40'00"	62°21'14"	70°56'10"	13	118°31'00"	50°20'00"	100°40'00"
4	35°00'28"	56°01'25"	118°19'26"	14	50°10'30"	40°00'10"	121°36'20"
5	30°04'56"	27°32'22"	70°14'04"	15	45°09'46"	112°58'04"	123°15'06"
6	62°20'54"	39°46'43"	90°40'16"	16	39°01'40"	77°18'34"	73°04'34"
7	69°30'36"	62°20'54"	43°04'39"	17	69°32'35"	39°01'40"	95°02'16"
8	109°14'32"	65°46'04"	69°45'17"	18	60°31'41"	117°28'18"	56°48'52"
9	65°46'04"	80°38'18"	116°08'04"	19	78°42'26"	60°31'41"	130°46'58"
10	129°16'54"	45°09'46"	84°07'18"	20	118°48'00"	83°17'00"	148°14'00"

г) Дано сторону та прилеглі до неї кути:

№	<i>a</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	№	<i>a</i>	<i>B</i>	<i>C</i>
1	64°02'41"	22°48'09"	106°43'40"	11	55°25'20"	36°28'26"	111°50'54"
2	100°00'00"	39°04'28"	57°46'10"	12	85°57'50"	32°56'31"	128°13'15"
3	22°04'47"	74°32'10"	61°09'50"	13	76°34'55"	31°16'39"	48°37'53"
4	118°50'00"	49°18'00"	61°40'00"	14	81°10'58"	112°56'18"	57°54'54"
5	34°29'34"	59°32'16"	77°18'20"	15	51°31'20"	132°54'22"	44°08'36"
6	68°12'58"	56°52'23"	76°00'32"	16	37°58'00"	83°42'39"	54°16'13"
7	68°50'00"	114°35'00"	30°19'00"	17	30°04'56"	54°36'10"	70°14'30"
8	66°32'00"	111°32'00"	75°51'00"	18	62°20'54"	90°40'16"	43°20'39"
9	76°56'00"	42°15'13"	34°15'36"	19	39°46'43"	90°40'16"	71°00'13"
10	115°28'00"	106°59'00"	56°55'00"	20	45°09'46"	123°15'06"	84°07'18"

д) Дано дві сторони та кут, що лежить проти однієї з них:

№	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>A</i>	№	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>A</i>
1	47°04'46"	36°39'51"	56°16'50"	11	28°36'22"	20°04'47"	49°10'18"
2	54°33'51"	97°12'25"	51°18'13"	12	28°36'22"	25°47'46"	74°32'10"
3	63°22'30"	81°14'20"	54°39'10"	13	58°54'43"	83°51'23"	49°18'00"
4	112°40'26"	58°27'42"	98°22'40"	14	36°52'33"	42°46'04"	59°32'16"
5	82°33'51"	27°16'09"	26°31'57"	15	52°05'54"	66°06'04"	56°52'23"
6	57°41'13"	76°34'42"	40°23'28"	16	85°03'00"	33°34'00"	114°35'00"
7	66°02'00"	108°49'00"	64°28'00"	17	107°16'00"	84°30'00"	111°32'00"
8	113°03'00"	82°39'00"	116°20'00"	18	72°17'58"	22°40'34"	106°43'40"
9	22°40'34"	72°17'58"	22°48'09"	19	100°00'00"	75°04'07"	120°26'21"
10	46°31'13"	75°04'07"	39°03'13"	20	22°04'47"	25°47'46"	49°10'18"

е) Дано сторону та два кути, один з яких лежить проти даної сторони:

№	<i>a</i>	<i>A</i>	<i>B</i>	№	<i>a</i>	<i>A</i>	<i>B</i>
1	54°12'28"	66°10'42"	41°00'24"	11	113°15'13"	72°40'32"	60°57'47"
2	124°10'48"	96°48'12"	46°07'06"	12	66°44'47"	72°40'32"	155°24'40"
3	52°35'25"	54°42'20"	81°26'35"	13	103°27'00"	73°13'22"	143°30'11"
4	26°50'14"	39°37'09"	69°25'27"	14	76°33'00"	73°13'22"	100°23'23"
5	61°05'12"	59°30'40"	73°13'22"	15	92°55'30"	100°23'23"	59°30'40"
6	57°17'28"	60°57'33"	72°40'32"	16	155°47'40"	144°36'36"	69°25'27"
7	51°24'00"	50°32'00"	109°51'00"	17	138°29'08"	69°25'27"	39°37'09"
8	44°55'05"	100°02'04"	152°03'10"	18	44°21'16"	81°02'25"	69°25'27"
9	160°21'47"	152°03'10"	169°21'35"	19	105°46'00"	81°26'35"	54°42'20"
10	122°24'00"	109°51'00"	103°25'00"	20	74°57'51"	82°54'46"	81°26'35"

ДОДАТОК

Основні необхідні формули геометрії та тригонометрії на площині

Довільний трикутник (a , b , c – сторони; α , β , γ – протилежні їм кути, R – радіус описаного кола; S – площа).

$$S = \frac{1}{2}bc \sin \alpha; \quad (1)$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha \quad (\text{теорема косинусів}); \quad (2)$$

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R \quad (\text{теорема синусів}). \quad (3)$$

Співвідношення між тригонометричними функціями одного й того самого аргументу (Z – множина всіх цілих чисел)

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1; \quad (4)$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad x \neq \frac{\pi}{2}(2n+1), \quad n \in Z; \quad (5)$$

$$\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}, \quad x \neq \pi n, \quad n \in Z; \quad (6)$$

$$\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x = 1; \quad x \neq \frac{\pi n}{2}; \quad n \in Z; \quad (7)$$

$$1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad x \neq \frac{\pi}{2}(2n+1), \quad n \in Z; \quad (8)$$

$$1 + \operatorname{ctg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}; \quad x \neq \pi n, \quad n \in Z. \quad (9)$$

Формули додавання

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y; \quad (10)$$

$$\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y; \quad (11)$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y; \quad (12)$$

$$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y; \quad (13)$$

$$\operatorname{tg}(x+y) = \frac{\operatorname{tg}x + \operatorname{tg}y}{1 - \operatorname{tg}x\operatorname{tg}y}, \quad x, y, x+y \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}; \quad (14)$$

$$\operatorname{tg}(x-y) = \frac{\operatorname{tg}x - \operatorname{tg}y}{1 - \operatorname{tg}x\operatorname{tg}y}, \quad x, y, x-y \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (15)$$

Формули подвійного аргументу

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x; \quad (16)$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1 = 1 - 2 \sin^2 x; \quad (17)$$

$$\operatorname{tg} 2x = \frac{2 \operatorname{tg}x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}, \quad x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} k, \quad k \in \mathbb{Z}; \quad x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (18)$$

Формули половинного аргументу (для функцій \sin і \cos – формули зниження степеня)

$$\sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{2}; \quad (19)$$

$$\cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1 + \cos x}{2}; \quad (20)$$

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1 + \cos x} = \frac{1 - \cos x}{\sin x}, \quad x \neq \pi + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (21)$$

Формули перетворення суми в добуток

$$\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}; \quad (22)$$

$$\sin x - \sin y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}; \quad (23)$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}; \quad (24)$$

$$\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}. \quad (25)$$

$$\operatorname{tg}x + \operatorname{tg}y = \frac{\sin(x+y)}{\cos x \cos y}, \quad x, y \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}; \quad (26)$$

$$\operatorname{tg}x - \operatorname{tg}y = \frac{\sin(x-y)}{\cos x \cos y}, \quad x, y \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (27)$$

Формули перетворення добутку в суму

$$\sin x \sin y = \frac{1}{2} (\cos(x-y) - \cos(x+y)); \quad (28)$$

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2} (\cos(x+y) + \cos(x-y)); \quad (29)$$

$$\sin x \cos y = \frac{1}{2} (\sin(x-y) + \sin(x+y)). \quad (30)$$

Співвідношення між $\sin x$, $\cos x$ і $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$

$$\sin x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}, \quad x \neq (2n+1)\pi, \quad n \in \mathbb{Z}; \quad (31)$$

$$\cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}, \quad x \neq (2n+1)\pi, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (32)$$

Формули зведення

Функція <i>u</i>	Назва функції не змінюється			Назва функції змінюється на схожу			
	$-\alpha$	$\pi - \alpha$	$\pi + \alpha$	$\frac{\pi}{2} - \alpha$	$\frac{\pi}{2} + \alpha$	$\frac{3\pi}{2} - \alpha$	$\frac{3\pi}{2} + \alpha$
<i>sin</i>	$-\sin \alpha$	$\sin \alpha$	$-\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\cos \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\cos \alpha$
<i>cos</i>	$\cos \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\cos \alpha$	$\sin \alpha$	$-\sin \alpha$	$-\sin \alpha$	$\sin \alpha$
<i>tg</i>	$-\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$
	$\alpha \neq \pi(2n+1)/2, \quad n \in \mathbb{Z}$			$\alpha \neq \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$			
<i>ctg</i>	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$
	$\alpha \neq \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$			$\alpha \neq \pi(2n+1)/2, \quad n \in \mathbb{Z}$			

З М І С Т

Вступ	3
1. Основи сферичної геометрії.	
Загальні відомості про сферичні трикутники	3
1.1. Точки та дуги на поверхні сфери. Сферичний двокутник.	
Сферичний трикутник	3
1.2. Сферична відстань.	
Географічна сферична система координат	8
1.3. Полярні сферичні трикутники	11
1.4. Рівність сферичних трикутників. Спряжені трикутники	14
1.5. Площа сферичного трикутника	15
1.6. Поняття про сферичний многокутник	17
2. Основи сферичної тригонометрії. Основні формули	17
2.1. Формули косинусів сторін сферичного трикутника	17
2.2. Формули косинусів кутів сферичного трикутника	20
2.3. Сферична теорема синусів	21
2.4. Формули п'яти елементів сферичного трикутника	22
2.5. Формули чотирьох елементів сферичного трикутника	23
3. Розв'язання прямокутних та прямокутних сферичних трикутників	24
3.1. Формули для розв'язання прямокутних трикутників	24
3.2. Зв'язок між величинами сторін і кутів прямокутного сферичного трикутника	26
3.3. Основні випадки розв'язання прямокутних і прямокутних сферичних трикутників	28
4. Розв'язання косокутних сферичних трикутників	29
4.1. Формули синусів, косинусів та тангенсів половини кутів сферичного трикутника	29
4.2. Формули синусів, косинусів та тангенсів половини сторін сферичного трикутника	31
4.3. Формули Даламбера – Гаусса й аналогії Непера	34
4.4. Формули для обчислення сферичного надлишку	36
4.5. Основні випадки розв'язання косокутних сферичних трикутників	38
5. Розв'язання малих сферичних трикутників за теоремою Лежандра	39
Приклади розв'язання типових задач	41
Контрольні запитання та вправи	76
Список літератури	80
Завдання для самостійної роботи	81
Додаток	89

НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ

Данилевський Микола Прокопович,
Колосов Анатолій Іванович,
Якунін Анатолій Вікторович

ОСНОВИ
СФЕРИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ
та ТРИГОНОМЕТРІЇ

Навчальний посібник

Редактор *Д. Ф. Курильченко*

Підп. до друку 22.06.2011	Формат 60x84 1/16
Друк на ризографі	Ум. друк. арк. 5,5
Тираж 500 пр.	Зам. №

Видавець і виготовлювач:
Харківська національна академія міського господарства,
вул. Революції, 12, Харків, 61002
Електронна адреса: rectorat@ksame.kharkov.ua
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи:
ДК №4064 від 12.05.2011