Загальні положення

Практичний посібник «Елементи теорії кривих і поверхонь» розроблений з метою організації аудиторної та самостійної роботи студентів денної та заочної форм навчання геодезичних спеціальностей при вивченні курсу «Теорія поверхонь», що відповідає програмі з вищої математики підготовки спеціалістів відповідного напрямку.

У практичному посібнику «Елементи теорії кривих та поверхонь» наведено основні факти, ідеї та методи такої важливої математичної дисципліни, як диференціальна геометрія. Знайомство з основами диференціальної геометрії необхідно студентам геодезичних спеціальностей при вивченні геометрії земної поверхні.

Диференціальна геометрія – розділ математики, в якому вивчаються геометричні образи (у першу чергу, криві та поверхні) методами математичного аналізу. Диференціальна геометрія виділилась в окремий розділ математики у XVIII сторіччі завдяки роботам Л. Ейлера та Г. Монжа. У диференціальній геометрії криві та поверхні вивчаються в «малому», тобто розглядаються їх властивості в нескінченно малому околі точки. Такий підхід дає можливість виявити ряд важливих закономірностей у дослідженні геометричних об'єктів.

У зв'язку з тим, що метод дослідження пов'язаний з диференціальним численням, в диференціальній геометрії припускається, що всі функції однозначні та диференційовані, мають неперервні похідні необхідного порядку; точки, в яких проводиться дослідження - неособливі (якщо не зазначено інакше).

Вивчення основ диференціальної геометрії базується на основних положеннях математичного аналізу, векторної алгебри та аналітичної геометрії. В результаті вивчення курсу студенти мають засвоїти основні факти та методи диференціальної геометрії і вміти застосовувати їх при дослідженні кривих і поверхонь.

РОЗДІЛ І

Теорія кривих

§1. Вектор-функція скалярного аргумента

Вектор-функція одного скалярного аргумента. Границя, неперервність, похідна вектор-функції. Формула Тейлора. Годограф вектор-функції.

Означення вектор-функції одного скалярного аргумента.

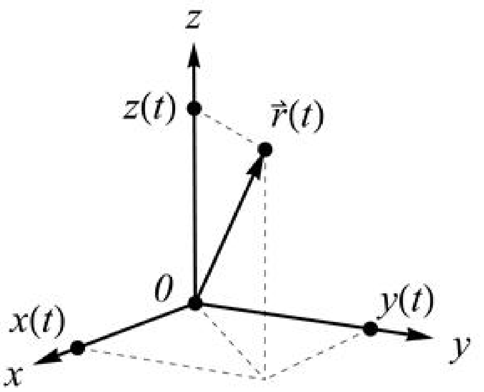

Рис. 1.1.

Виберемо у просторі прямокутну декартову систему координат *Oxyz*. Нехай задано відрізок $[a,b]$ числової осі *t.* За певним законом поставимо у відповідність кожному числу $t \in [a,b]$ радіус-вектор

$$\overline{r}(t) = \{x(t), y(t), z(t)\}.$$

Таким чином, вважатимемо, що задано вектор-функцію $\overline{r}(t)$*.* За кожного фіксованого t $\overline{r}(t)$ допускає розкладання за базисом єдиним чином, тобто $\overline{r}(t) = x(t)\overline{i} + y(t)\overline{j} + z(t)\overline{k}$, де скалярні функції $x(t), y(t), z(t)$ – коефіцієнти розкладу (рис.1.1).

Операції над вектор-функціями.

• Вираз $\lambda(t)\overline{r_1}(t) + \mu(t)\overline{r_2}(t)$, де $\lambda(t), \mu(t)$ – скалярні функції, є вектор-функцією.

• Скалярний добуток вектор-функцій $\overline{r_1}(t) \cdot \overline{r_2}(t)$ є скалярною функцією.

• Векторний добуток вектор-функцій $\overline{r_1}(t) \times \overline{r_2}(t)$ є вектор-функцією.

• Мішаний добуток вектор-функцій $\overline{r_1}(t) \times \overline{r_2}(t) \cdot \overline{r_3}(t)$ є скалярною функцією.

Модуль вектор-функції $\overline{r}(t)=\{x(t),y(t),z(t)\}$ можна знайти так само, як і модуль вектора: $|\overline{r}(t)|=\sqrt{x^2(t)+y^2(t)+z^2(t)}$. Очевидно, що модуль вектор-функції є скалярною функцією параметра *t* і за кожного фіксованого *t* виражає довжину відповідного вектора.

Границя вектор-функції (означення). Вектор $\overline{a}=\{\alpha,\beta,\gamma\}$ називається границею вектор-функції $\overline{r}(t)=\{x(t),y(t),z(t)\}$ в точці $t_0\in[a,b]$, якщо $\lim\limits_{t\to t_0}|\overline{r}(t)-\overline{a}|=0$.

Отже, $\lim\limits_{t\to t_0}|\overline{r}(t)-\overline{a}|=0 \Leftrightarrow \lim\limits_{t\to t_0}\overline{r}(t)=\overline{a}$.

Теорема про покомпонентний перехід до границь. Для того, щоб вектор-функція $\overline{r}(t)$ мала границю в точці t_0, необхідно і достатньо, щоб в даній точці мали границю всі її компоненти $x(t),y(t),z(t)$.

При цьому $\lim\limits_{t\to t_0}\overline{r}(t)=\left\{\lim\limits_{t\to t_0}x(t),\lim\limits_{t\to t_0}y(t),\lim\limits_{t\to t_0}z(t)\right\}$.

Наслідки. Якщо $\lim\limits_{t\to t_0}\overline{r}_i(t)=\overline{a}_i, i=1,2,3$, то

1. $\lim\limits_{t\to t_0}\left(\lambda(t)\overline{r}_1(t)+\mu(t)\overline{r}_2(t)\right)=\lambda(t_0)\overline{a}_1+\mu(t_0)\overline{a}_2$, $\lambda(t),\mu(t)$ – неперервні в точці t_0 скалярні функції.

2. $\lim\limits_{t\to t_0}\left(\overline{r}_1(t)\cdot\overline{r}_2(t)\right)=\overline{a}_1\cdot\overline{a}_2$.

3. $\lim\limits_{t\to t_0}\left(\overline{r}_1(t)\times\overline{r}_2(t)\right)=\overline{a}_1\times\overline{a}_2$.

4. $\lim\limits_{t\to t_0}\left(\overline{r}_1(t),\overline{r}_2(t),\overline{r}_3(t)\right)=\left(\overline{a}_1,\overline{a}_2,\overline{a}_3\right)$.

Властивості 2 – 4 означають, що знак границі можна вносити під знаки скалярного, векторного та мішаного добутків вектор-функцій.

Неперервність вектор-функцій. Нехай на відрізку $[a,b]$ задано вектор-функцію $\overline{r}(t)$. Вектор-функція $\overline{r}(t)$ називається неперервною в точці $t_0\in[a,b]$, якщо $\lim\limits_{t\to t_0}\overline{r}(t)=\overline{r}(t_0)$. Вектор-функція $\overline{r}(t)$

називається неперервною на відрізку, якщо вона неперервна в кожній точці відрізка.

Теорема про покомпонентну неперервність вектор-функції. Для того, щоб вектор-функція $\overline{r}(t)=\{x(t),y(t),z(t)\}$ була неперервна в точці (на відрізку), необхідно і достатньо, щоб в цій точці (на відрізку) були неперервними функції $x(t),y(t),z(t)$.

Наслідок. Якщо функції $\overline{r_i}(t), i=1,2,3$ неперервні в точці (на відрізку), то в цій точці (на відрізку) неперервні їх лінійні комбінації з неперервними коефіцієнтами, скалярний, векторний та мішаний добутки.

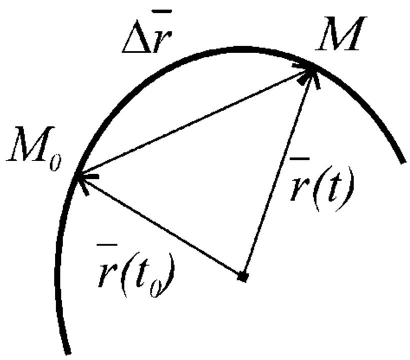

Рис.1.2.

Приріст вектор-функції. Приростом вектор-функції називається вектор $\Delta\overline{r}=\overline{M_0M}=\overline{r}(t)-\overline{r}(t_0)$ (рис.1.2).

Похідна вектор-функції. Нехай на відрізку $[a,b]$ задано вектор-функцію $\overline{r}(t)$. Вектор-функція $\overline{r}(t)$ називається диференційовною в точці $t_0\in[a,b]$, якщо існує $\lim\limits_{t\to t_0}\dfrac{\overline{r}(t)-\overline{r}(t_0)}{t-t_0}$. При цьому зазначена границя називається похідною вектор-функції $\overline{r}(t)$ в точці $t_0\in[a,b]$ і позначається $\overline{r}'(t)$. Таким чином, $\overline{r}'(t_0)=\lim\limits_{t\to t_0}\dfrac{\overline{r}(t)-\overline{r}(t_0)}{t-t_0}$.

Теорема про покомпонентне диференціювання вектор-функції. Вектор-функція $\overline{r}(t)=\{x(t),y(t),z(t)\}$ диференційовна в точці тоді і тільки тоді, якщо в цій точці диференційовні всі її компоненти, тобто $\overline{r}'(t)=\{x'(t),y'(t),z'(t)\}$.

Наслідок. Якщо функції $\overline{r_i}(t), i=1,2,3$ диференційовні в точці (на відрізку), то в цій точці (на відрізку) диференційовні їх лінійні комбінації з диференційовними коефіцієнтами, скалярний, векторний та мішаний добутки. При цьому дотримуються таких правил диференціювання:

- $\left(\overline{r_1}(t)+\overline{r_2}(t)\right)'=\overline{r_1}'(t)+\overline{r_2}'(t)$;
- $\left(\lambda(t)\overline{r}(t)\right)'=\lambda'(t)\overline{r}(t)+\lambda(t)\overline{r}'(t)$, де $\lambda(t)$ – скалярна функція;
- $\left(\overline{r_1}(t)\cdot\overline{r_2}(t)\right)'=\overline{r_1}'(t)\cdot\overline{r_2}(t)+\overline{r_1}(t)\cdot\overline{r_2}'(t)$;
- $\left(\overline{r_1}(t)\times\overline{r_2}(t)\right)'=\overline{r_1}'(t)\times\overline{r_2}(t)+\overline{r_1}(t)\times\overline{r_2}'(t)$.

Вправа 1.1. Знайдіть похідну вектор-функції $\overline{r}(t)=\{\cos 3t,\sin 3t,2t\}$ за $t=0$.

Розв'язання. За теоремою про покомпонентне диференціювання вектор-функції отримаємо: $\overline{r}'(t)=\{-3\sin 3t,3\cos 3t,2\}$. За $t=0$, $\overline{r}'(0)=\{0,3,2\}$.

Відповідь. $\overline{r}'(0)=\{0,3,2\}$.

Похідну від вектор-функції $\overline{r}'(t)$ називають другою похідною вектор-функції $\overline{r}(t)$ і позначають $\overline{r}''(t)$. Аналогічно отримують $\overline{r}'''(t),...,\overline{r}^{(n)}(t)$. Вважають, що вектор-функція $\overline{r}(t)$ належить до класу C^n на відрізку $[a,b]$ $\left(\overline{r}(t)\in C^n[a;b]\right)$, якщо на цьому відрізку існують та є неперервними всі її похідні до порядку *n* включно. З теореми про покомпонентне диференціювання вектор-функції випливає, що її компоненти також належать класу C^n і назад.

Формула Тейлора для вектор-функції. Якщо $\overline{r}(t)\in C^n[a;b]$, де *n*>1, то справедливою є рівність:

$$\overline{r}(t)=\overline{r}(t_0)+\overline{r}'(t_0)\Delta t+\frac{1}{2!}\overline{r}''(t_0)\Delta t^2+...+\frac{1}{n!}\left(\overline{r}^{(n)}(t_0)+\overline{\varepsilon}\right)\Delta t^n,$$

де $t_0\in[a,b]$, $\Delta t=t-t_0$, $\overline{\varepsilon}$ – вектор-функція від *t*, $\lim\limits_{t\to t_0}\overline{\varepsilon}(t)=\overline{0}$.

Поняття інтеграла для вектор-функції вводиться так само, як і для скалярної функції одного аргументу, та має аналогічні властивості.

Визначені та невизначені інтеграли від вектор-функції знаходять покоординатно: $\int \overline{r}(t)dt = \left\{ \int x(t)\,dt, \int y(t)\,dt, \int z(t)\,dt \right\}$.

У просторі вектор-функція скалярного аргументу $\overline{r}(t) = \{x(t), y(t), z(t)\}$ задає криву, яка називається **годографом** вектор-функції. Фактично годограф – крива, що описує кінець вектор-функції при закріпленому початку.

Вправа 1.2. Знайдіть годограф вектор-функції $\overline{r}(t) = \overline{i}\,\mathrm{c}ht + \overline{j}\,\mathrm{s}ht$**.**

Розв'язання. Запишемо параметричні рівняння кривої, що задається даним радіусом-вектором: $x(t) = cht$, $y(t) = sht$, $z(t) = 0$. Вилучимо параметр *t* з першого та другого рівнянь. За основною тотожністю для гіперболічних функцій $x^2(t) - y^2(t) = ch^2t - sh^2t = 1$. Отже, годографом даної вектор-функції є рівнобічна гіпербола:
$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 1 \\ z = 0 \end{cases}.$$

Відповідь. Рівнобічна гіпербола.

Зверніть увагу, що введені поняття для вектор - функції принципово не відрізняються від аналогічних понять для скалярної функції одного аргументу, висвітлені в курсі математичного аналізу. Так само принципово не відрізняються і доведення цих тверджень. Для кращого осмислення нових понять рекомендуємо письмово виконати таке порівняння за планом параграфа.

§2. Регулярна параметризація кривої. Супровідний тригранник кривої

Поняття про криву. Способи задавання кривої. Регулярна параметризація кривої. Супровідний тригранник кривої.

У курсах аналітичної геометрії та математичного аналізу вже розглядались різні плоскі та просторові криві, задані в певний спосіб в декартовій і полярній системах координат.

Відомо, що плоскі криві можуть бути задані явно $z = f(x)$, неявно $f(x, y) = 0$, параметрично $\begin{cases} x = x(t); \\ y = y(t), \end{cases}$ як результат перетину поверхні з площиною (варто пригадати про конічні перерізи) [6]. Просторові криві також задаються параметрично, або як результат перетину двох поверхонь.

Завдання. Пригадайте основні криві, з якими ознайомлювались раніше, запишіть їх рівняння та виконайте рисунки.

У пропонованому курсі застосовано новий спосіб задавання плоских і просторових кривих за допомогою вектор-функцій. Вектор-функції це фактично параметризації кривих, що є їх годографами. Оскільки далі йтиметься про поведінку кривої в околі точки, то хотілось би, щоб в цьому околі крива поводила б себе «добре», тобто була б гладкою, не мала точок самоперетину та особливих точок у вигляді точок перегину та «зламів». Тому потрібна не будь-яка параметризація, а тільки така, що забезпечить відповідну поведінку кривої в околі обраної точки. Яким умовам має задовольняти така параметризація? Відповідь на це запитання містить наступне означення.

Означення регулярної параметризації кривої. Нехай на відрізку $\left[a,b\right]$ задано вектор-функцію $\overline{r}\left(t\right)$, що **задовольняє трьом умовам:**

- $\overline{r}\left(t\right)\in C^{n}\left[a,b\right]$, $n\geq 1$, що означає існування неперервних похідних вектор-функції до порядку *n* на відрізку $\left[a,b\right]$;

- $\overline{r}'\left(t\right)\neq\overline{0}\left(\left|\overline{r}'\right|\neq 0\right)$ на $\left[a,b\right]$ - такою умовою унеможливлюється наявність особливих точок кривої на відрізку;

- якщо $t_1\neq t_2, \overline{r}\left(t_1\right)\neq\overline{r}\left(t_2\right)$ - виконання такої умови виключає точки самоперетину кривої на даному відрізку.

Якщо вектор-функція $\overline{r}\left(t\right)$ задовольняє зазначеним умовам на відрізку $\left[a,b\right]$, то її називають **регулярною параметризацією** кривої класу C^{n}. Зауважимо, що одна й та сама крива може допускати різні еквівалентні регулярні параметризації. Клас еквівалентності регулярних параметризацій називають **регулярною кривою,** а точкою регулярної кривої - кінець радіус вектора $\overline{r}\left(t\right)$, $t\in\left[a,b\right]$.

Зрозуміло, що не в кожній точці кривої існує така параметризація, але властивості кривої в таких точках зазвичай розглядають окремо (про особливі та звичайні точки кривої читайте [4]).

Диференціальна геометрія вивчає саме регулярні параметризації.

Супровідний тригранник кривої. Для дослідження поведінки кривої в околі звичайної точки прив'яжемо до кожної її точки ортонормований базис (три одиничні взаємно перпендикулярні вектори), що буде змінюватись за переходу від точки до точки по кривій. Під час руху по кривій будемо спостерігати за поведінкою кожного з векторів цього базису та робити відповідні висновки щодо характеру нашої кривої. Такий базис називають супровідним репером кривої.

Першим вектором цього базису зручно обрати одиничний вектор дотичної до кривої в вибраній точці. (Чому саме дотичної? Пригадайте її роль в математичному аналізі). Для цього введемо означення дотичної до регулярної кривої та доведемо теорему про її існування та єдиність в кожній точці регулярної кривої.

Розглянемо регулярну криву, що задано регулярною параметризацією $\bar{r}(t)$ і виберемо на ній деяку точку M_0. Відстань від довільної точки M кривої до M_0 позначимо ***d***, а до деякої прямої g, що проходить через точку M_0 – ***h***. Пряма g називається дотичною до кривої в точці M_0, якщо $\lim\limits_{M \to M_0} h/d = 0$ ($M \to M_0$ по кривій) (рис.1.3).

Теорема (про існування та єдиність дотичної). У кожній точці регулярної кривої існує, і при цьому єдина, дотична. Якщо $\bar{r}(t)$ – регулярна параметризація кривої, то **вектор** $\bar{r}'(t)$ **– напрямний вектор дотичної** в кожній фіксованій точці.

Доведемо останнє твердження.

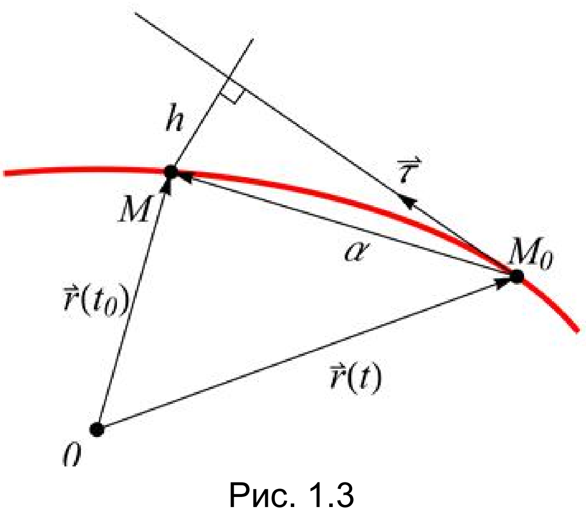

Рис. 1.3

Позначимо $\bar{\tau}$ одиничний вектор дотичної в точці M_0. Радіус-вектор точки M_0 – $\bar{r}(t_0)$, а точки M – $\bar{r}(t)$.

$$d = \left|\overline{M_0M}\right| = \left|\bar{r}(t) - \bar{r}(t_0)\right|.$$

Модуль векторного добутку векторів $\left|\overline{M_0M} \times \bar{\tau}\right|$ дорівнює площі паралелограма, побудованого на цих векторах як на сторонах, $\left|\bar{\tau}\right| = 1$, тому

$h = \left|\overline{M_0 M} \times \bar{\tau}\right| = \left|\left(\bar{r}(t) - \bar{r}(t_0)\right) \times \bar{\tau}\right|$. За означенням дотичної $\lim\limits_{M \to M_0} h/d = 0$. Маємо:

$$\lim_{M \to M_0} \frac{h}{d} = \lim_{t \to t_0} \frac{\left|\left(\bar{r}(t) - \bar{r}(t_0)\right) \times \bar{\tau}\right|}{\left|\bar{r}(t) - \bar{r}(t_0)\right|} = \lim_{t \to t_0} \frac{\left|\dfrac{\bar{r}(t) - \bar{r}(t_0)}{t - t_0} \times \bar{\tau}\right|}{\left|\dfrac{\bar{r}(t) - \bar{r}(t_0)}{t - t_0}\right|} =$$

$$= \lim_{t \to t_0} \frac{\left|\bar{r}'(t) \times \bar{\tau}\right|}{\left|\bar{r}'(t)\right|} = 0.$$

Оскільки $\bar{r}(t)$ – регулярна параметризація кривої, то $\left|\bar{r}'(t)\right| \neq 0$, тому $\left|\bar{r}'(t_0) \times \bar{\tau}\right| = 0$, що означає колінеарність цих векторів: $\bar{r}'(t_0) \| \bar{\tau}$. Перший вектор нашого тригранника – **одиничний вектор дотичної** (тангенціальний вектор) $\bar{\tau} = \bar{r}'(t_0) \Big/ \left|\bar{r}'(t_0)\right|$**.** Вектор $\bar{\tau}$ називають також вектором швидкості. Зрозуміло, що це пов’язано зі змістом похідної.

Вправа 1.3. Знайдіть тангенціальний вектор кривої $\bar{r}(t) = \left\{t^2, t^3, t^6\right\}$ в точці $t = 1$.

Розв’язання. $\bar{r}'(t) = \left\{2t, 3t^2, 6t^5\right\}$, $\bar{r}'(1) = \{2, 3, 6\}$, $\left|\bar{r}'(1)\right| = \sqrt{4 + 9 + 36} = 7$, $\bar{\tau} = \bar{r}'(t_0) \Big/ \left|\bar{r}'(t_0)\right|$.

Отже $\bar{\tau} = \dfrac{2}{7}\bar{i} + \dfrac{3}{7}\bar{j} + \dfrac{6}{7}\bar{k}$. Площина, що проходить через дану точку кривої перпендикулярно до $\bar{\tau}$, називається **нормальною** площиною. Скласти рівняння такої площини легко. Із курсу аналітичної геометрії відоме рівняння площини, що проходить через дану точку перпендикулярно до даного вектора:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0,$$

тут $\bar{\tau} = \{A, B, C\}$, $M_0(x_0, y_0, z_0)$.

Усі вектори, що проходять через дану точку перпендикулярно $\overline{\tau}$ лежать в нормальній площині. До супровідного тригранника увійдуть два з них – вектор головної нормалі та вектор бінормалі. Для вибору цих векторів введемо поняття **стичної площини** кривої, яка є площиною найкращого локального наближення до кривої в даній точці.

Теорема (про існування стичної площини). В кожній точці регулярної кривої класу $C^n, n \geq 2$ існує стична площина. Якщо $\overline{r}(t)$ – регулярна параметризація кривої, то стична площина в точці M_0 паралельна до векторів $\overline{r}'(t)$ та $\overline{r}''(t)$.

Стична площина в точці кривої або єдина, або існує безліч площин, що проходять через дотичну до кривої в даній точці. Другий випадок маємо, якщо $\overline{r}' \| \overline{r}''$ (пізніше дізнаємось, що такі точки кривої називаються точками спрямлення, кривина кривої в таких точках дорівнює нулю).

Вектор бінормалі до кривої в звичайній точці (позначимо його $\overline{\beta}$) є перпендикулярним до стичної площини, тобто перпендикулярним до векторів $\overline{r}'(t)$ та $\overline{r}''(t)$. Отже, відповідно до означення векторного добутку векторів вектор бінормалі колінеарний до векторного добутку векторів $\overline{r}'(t)$ та $\overline{r}''(t)$. Оскільки $\overline{|\beta|} = 1$, вектор бінормалі у звичайній точці регулярної кривої можна знайти за формулою $\overline{\beta} = \dfrac{\overline{r}' \times \overline{r}''}{\left|\overline{r}' \times \overline{r}''\right|}$.

Остання площина розгляданого тригранника – **спрямна площина.** Вона проходить через дану точку і містить вектори $\overline{\beta}$ і $\overline{\tau}$. Скласти рівняння такої площини легко. Вектор головної нормалі перпендикулярний до спрямної площини. Позначимо його як $\overline{\nu}$. Очевидно, що $\overline{\nu} = \overline{\beta} \times \overline{\tau}$. Таким чином, супровідний тригранник кривої в правильній (звичайній) точці побудовано. Він складається з трьох одиничних взаємно перпендикулярних векторів: $\overline{\tau}$ **– орт дотичної** (тангенціальний одиничний вектор); $\overline{\beta}$ **– орт бінормалі;** $\overline{\nu}$ **– орт головної нормалі** та трьох площин: **нормальної (I), стичної(II) та спрямної (III).**

Якщо точка правильна, то крива перетинає нормальну і стичну площини і лежить по один бік від спрямної площини. Головний вектор нормалі $\overline{\nu}$ напрямлений в бік угнутості кривої і лежить в стичній площині (рис.1.4).

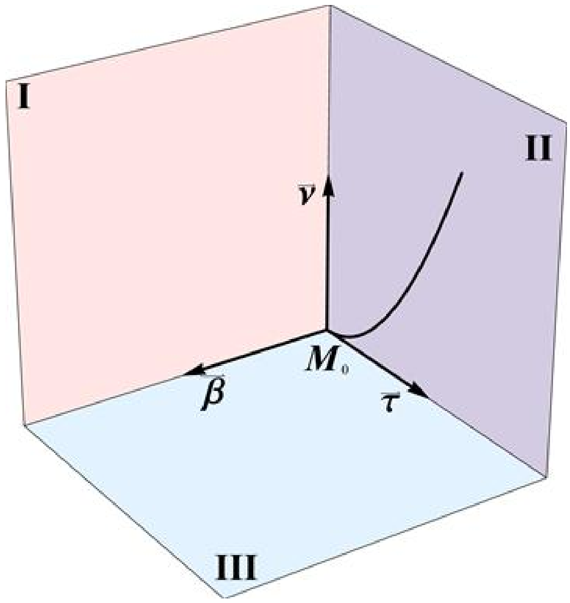

Рис. 1.4

Вправа 1.4 Знайти рівняння ребер та граней супровідного тригранника кривої $\overline{r}(t)=\left\{t,t^3,t^2+4\right\}$ за $t=1$.

Розв'язання. Точка кривої $M_0(1,1,5)$ відповідна значенню параметра $t=1$ в декартовій прямокутній системі координат. (згадайте, що називається точкою регулярної кривої). Спочатку знайдемо тангенціальний одиничний вектор $\overline{\tau}=\overline{r}'/\left|\overline{r}'\right|$, $\overline{r}'(t)=\left\{1,3t^2,2t\right\}$,

$\overline{r}'(1)=\{1,3,2\}$, $\left|\overline{r}'(1)\right|=\sqrt{1^2+3^2+2^2}=\sqrt{14}$. Отже,

$\overline{\tau}=\left\{\dfrac{1}{\sqrt{14}},\dfrac{3}{\sqrt{14}},\dfrac{2}{\sqrt{14}}\right\}$. Одиничний вектор бінормалі $\overline{\beta}=\dfrac{\overline{r}'\times\overline{r}''}{\left|\overline{r}'\times\overline{r}''\right|}$.

$\overline{r}''(t)=\{0,6t,2\}$, $\overline{r}''(1)=\{0,6,2\}$,

$$\overline{r}'\times\overline{r}''=\begin{vmatrix}\overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\\ 1 & 3 & 2\\ 0 & 6 & 2\end{vmatrix}=-6\overline{i}-2\overline{j}+6\overline{k},\quad \left|\overline{r}'\times\overline{r}''\right|=\sqrt{36+4+36}=2\sqrt{19}.$$

Отже $\overline{\beta}=\left\{\dfrac{-3}{\sqrt{19}},\dfrac{-1}{\sqrt{19}},\dfrac{3}{\sqrt{19}}\right\}$. Вектор головної нормалі $\overline{\nu}=\overline{\beta}\times\overline{\tau}$:

$$\bar{v}=\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{-3}{\sqrt{19}} & \frac{-1}{\sqrt{19}} & \frac{3}{\sqrt{19}} \\ \frac{1}{\sqrt{14}} & \frac{3}{\sqrt{14}} & \frac{2}{\sqrt{14}} \end{vmatrix}=\frac{-1}{\sqrt{266}}\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 3 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}=\frac{-1}{\sqrt{266}}\{11,-9,8\}.$$

Складемо рівняння стичної площини, що проходить через точку $M_0(1,1,5)$ і паралельна до векторів $\bar{r}'(1)=\{1,3,2\}$ і $\bar{r}''(1)=\{0,6,2\}$. Як відомо з курсу аналітичної геометрії, рівняння такої площини має вигляд:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-5 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 6 & 2 \end{vmatrix}=0.$$

Розкривши визначник за елементами першого рядка, отримаємо рівняння стичної площини в загальному вигляді: $3x+y-3z+11=0$. Рівняння даної площини можна скласти інакше, коли мати на увазі, що стична площина перпендикулярна до вектора бінормалі, отже, і до вектора $\overline{\beta_1}=\{3,1,-3\}$, який є колінеарним до $\bar{\beta}$. Маємо: $3(x-1)+(y-1)-3(z-5)=0$ як рівняння площини, що проходить через дану точку перпендикулярно до даного вектора. Розкривши дужки, отримаємо рівняння стичної площини в загальному вигляді. Аналогічно, скориставшись умовою перпендикулярності нормальної площини до вектора $\bar{r}'(1)=\{1,3,2\}$, отримуємо рівняння цієї площини $(x-1)+3(y-1)+2(z-5)=0$, або в загальному вигляді $x+3y+2z-14=0$. Рівняння спрямної площини можна легко скласти, скориставшись тим, що вона проходить через дану точку перпендикулярно вектору головної нормалі та будь-якому вектору, колінеарному $\bar{v}$, наприклад вектору $\overline{v_1}=\{11,-9,8\}$. Легко також скласти рівняння прямих, ребер супровідного тригранника, якщо відома точка та напрямні вектори цих прямих. Наприклад, канонічне рівняння дотичної матиме вигляд: $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{3}=\dfrac{z-5}{2}$.

§3. Довжина дуги кривої. Натуральна параметризація кривої. Формули Серре–Френе.

Довжина дуги кривої. Довжина змінного відрізка кривої. Натуральна параметризація кривої. Дві леми про похідну вектор-функції за натуральним параметром. Формули Серре–Френе.

Довжина дуги кривої. З курсу математичного аналізу відома формула для знаходження довжини дуги кривої, заданої рівняннями в параметричній формі $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$, $t \in [a,b]$: $s = \int\limits_a^b \sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2 + \left(z'(t)\right)^2}\,dt$. Якщо криву задано регулярною параметризацією $\bar{r}(t) = \{x(t), y(t), z(t)\}$, $\bar{r}(t) \in C^n[a,b]$, $n \geq 1$, то дану формулу можна переписати у такому вигляді $s = \int\limits_a^b \left|\bar{r}'(t)\right| dt$.

Вправа 1.5. Знайдіть довжину відрізка кривої $\bar{r}(t) = \{acht, asht, at\}, a > 0$ між точками *0 і t.*

Розв'язання.

$\bar{r}'(t) = \{asht, acht, a\}$, $\left|\bar{r}'(t)\right| = \sqrt{(asht)^2 + (acht)^2 + a^2}$. Для спрощення підкореневого виразу скористаємось основною тотожністю для гіперболічних функцій: $ch^2 x - sh^2 x = 1$, отже, $\left|\bar{r}'(t)\right| = \sqrt{(asht)^2 + (acht)^2 + a^2} = a\sqrt{2}cht$. Тому

$$s = \int\limits_0^t \left|\bar{r}'(t)\right| dt = a\sqrt{2}\int\limits_0^t chtdt = a\sqrt{2}\, sht\Big|_0^t = a\sqrt{2}sht.$$

Відповідь. $s = a\sqrt{2}sht$.

Раніше наголошено, що в ролі параметра у задаванні кривої може виступати довільне число. В геометрії в ролі параметра часто використовують довжину змінного відрізка кривої. Це досить природно, оскільки завжди корисно знати, наскільки ми віддалились від початку під час руху по кривій. Таку параметризацію називають натуральною (природною) параметризацією кривої.

Розглянемо вектор-функцію $\overline{r}(t) \in C^n[a,t], \quad n \geq 1, \quad t \in [a,b]$ Відповідну криву назвемо **змінним відрізком** кривої, довжина якого є функцією параметра *t*: $s(t) = \int\limits_a^t \left|\overline{r}'(t)\right| dt$. Функція *s(t)* має такі очевидні властивості: $s(t) \in C^n[a,b], \quad n \geq 1, \quad s'(t) = \left|\overline{r}'(t)\right| \neq 0, \quad s(a) = 0$, $s(b) = S$, S – довжина дуги кривої. Отже функція *s(t)* є монотонною і має обернену функцію $t(s) \in C^n[0,S], \quad n \geq 1$. Побудуємо вектор-функцію $\overline{R}(s) \equiv \overline{r}(t(s))$, яка є регулярною параметризацією (перевірте умови 1-3), що еквівалентна вихідній параметризації $\overline{r}(t)$ і тому є регулярною параметризацією заданої кривої. Таку параметризацію називають **натуральною**, а параметр ***s*** – **натуральним параметром.** Похідну вектор-функції за натуральним параметром будемо позначати точкою: $\dot{\overline{R}} = \overline{r}'_t \cdot t'_s$.

Сформулюємо дві важливі леми (допоміжні теореми) щодо похідної вектор-функції по натуральному параметру.

Лема 1. Похідною вектор-функції за натуральним параметром є одиничний вектор, тобто $\left|\dot{\overline{R}}(s)\right| = 1, \ s \in [0,S]$.

Доведення. Пригадаймо, що функції $s(t)$ і $t(s)$ є взаємно оберненими, тому за теоремою про похідну оберненої функції отримаємо: $\dot{\overline{R}} = \overline{r}'_t \cdot t'_s = \dfrac{\overline{r}'_t}{s'_t}$. Отже $\left|\dot{\overline{R}}\right| = \left|\dfrac{\overline{r}'_t}{s'_t}\right| = \dfrac{\left|\overline{r}'_t\right|}{\left|\overline{r}'_t\right|} = 1$. Така властивість похідної вектор-функції $\overline{R}(s)$ сприяє зручності у використанні. Із леми випливає, що $\dot{\overline{R}} \| \overline{r}'_t$, тобто має напрямок дотичної до кривої і є одиничним вектором, отже $\dot{\overline{R}} = \overline{\tau}$.

Лема 2. Якщо вектор-функція скалярного аргумента має постійний модуль, то похідна від неї за даним параметром буде до неї перпендикулярною.

Доведення. Нехай $\overline{m}(t)$ – деяка вектор-функція, $\left|\overline{m}(t)\right| = a, a - const$, тоді $\left|\overline{m}(t)\right|^2 = \left(\overline{m}(t)\right)^2 = a^2$, $2\overline{m}(t)\cdot\overline{m}'(t) = 0$, отже $\overline{m}(t) \perp \overline{m}'(t)$. Геометричний зміст цього твердження очевидний. Наприклад, на площині кінець сталого радіуса-вектора $\overline{m}(t)$ опише коло, а, як відомо, вектор $\overline{m}'(t)$ направлений по дотичній за кожного фіксованого *t*. Нагадаємо, що дотична до кола перпендикулярна радіусу, проведеному в точку дотику. Звідси випливає , що $\ddot{\overline{R}} \perp \dot{\overline{R}}$, а $\ddot{\overline{R}}$ лежить в стичній площині, тобто є колінеарним до вектора головної нормалі $\ddot{\overline{R}} \| \overline{\nu}$, отже $\ddot{\overline{R}} = k\overline{\nu}$. Зміст коефіцієнта *k* з'ясуємо в наступному параграфі.

Вправа 1.6. Перейдіть до натурального параметра для гвинтової лінії $\overline{r}(t) = \{a\cos t, a\sin t, bt\}$.

Розв'язання. $\overline{r}'(t) = \{-a\sin t, a\cos t, b\}$,

$\left|\overline{r}'(t)\right| = \sqrt{a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t + b^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Позначимо $\sqrt{a^2 + b^2} = c$, тоді $s(t) = \int\limits_a^t \left|\overline{r}'(t)\right| dt = \int\limits_0^t c\,dt = ct$. Обернена функція $t(s) = \dfrac{s}{c}$. Отже, $\overline{R}(s) = \left\{a\cos\dfrac{s}{c}, a\sin\dfrac{s}{c}, \dfrac{bs}{c}\right\}$, де $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ – натуральна параметризація гвинтової лінії. Зауважимо, що такий метод є зручним тільки у разі сталої швидкості. В загальному випадку, виникли б труднощі насамперед з інтегруванням або зі знаходженням оберненої залежності.

Покажемо, що дійсно $\left|\dot{\bar{R}}(s)\right| = 1.$ Знайдемо
$\dot{\bar{R}}(s) = \left\{-\frac{a}{c}\sin\frac{s}{c}, \frac{a}{c}\cos\frac{s}{c}, \frac{b}{c}\right\}$,

$$\left|\dot{\bar{R}}(s)\right| = \sqrt{\left(\frac{a}{c}\sin\frac{s}{c}\right)^2 + \left(\frac{a}{c}\cos\frac{s}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2} = \frac{1}{c}\sqrt{a^2 + b^2} = 1.$$

Вправа 1.8. Запишіть натуральну параметризацію лінії:
$\bar{r}(t) = \{acht, asht, at\}$.

Оскільки вже знайдено раніше (вправа 1.5), що $s = a\sqrt{2}sht$, отримаємо: $sht = \frac{s}{a\sqrt{2}}$, $ch^2 t = 1 + \frac{s^2}{2a^2}$. Скориставшись формулами (додавши відповідно їх ліві і праві частини)

$$\frac{e^t - e^{-t}}{2} = sht = \frac{s}{a\sqrt{2}}; \quad \frac{e^t + e^{-t}}{2} = cht = \sqrt{\frac{2a^2 + s^2}{2a^2}},$$

отримаємо: $e^t = \frac{s}{a\sqrt{2}} + \sqrt{\frac{2a^2 + s^2}{2a^2}} = \frac{s + \sqrt{2a^2 + s^2}}{a\sqrt{2}}$.

Обернена функція $t(s) = \ln\left(\frac{s}{a\sqrt{2}} + \sqrt{1 + \frac{s^2}{2a^2}}\right)$. Отже натуральна параметризація лінії має такий вигляд:

$$\bar{R}(s) = \left\{\frac{\sqrt{2a^2 + s^2}}{\sqrt{2}}, \frac{s}{\sqrt{2}}, \ln\left(\frac{s}{a\sqrt{2}} + \sqrt{1 + \frac{s^2}{2a^2}}\right)\right\}$$

У параграфі 2 зазначено, що досліджуючи поведінку кривої спостерігатимемо за зміною векторів рухомого ортонормованого базису, прив'язаного до точки кривої. Нагадаємо, що він складається з трьох одиничних взаємно перпендикулярних векторів: $\bar{\tau}$ – **орт дотичної** (тангенціальний одиничний вектор або вектор швидкості); $\bar{\beta}$ **– орт бінормалі;** $\bar{\nu}$ **– орт головної нормалі.**

Оскільки дані вектори одиничні та ортогональні, то їх скалярні квадрати – одиниці, попарні скалярні добутки – нулі. Зручно записати таблиці скалярного та векторного добутку цих векторів (див. рис. 1.4).

$$\begin{array}{c|ccc} & \bar\tau & \bar\nu & \bar\beta \\ \hline \bar\tau & 1 & 0 & 0 \\ \bar\nu & 0 & 1 & 0 \\ \bar\beta & 0 & 0 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{c|ccc} & \bar\tau & \bar\nu & \bar\beta \\ \hline \bar\tau & \bar0 & \bar\beta & -\bar\nu \\ \bar\nu & -\bar\beta & \bar0 & \bar\tau \\ \bar\beta & \bar\nu & -\bar\tau & \bar0 \end{array}$$

Вектори основної трійки змінюються під час руху точки по кривій. Для того щоб охарактеризувати цю зміну, знайдемо **розклад похідних цих векторів** за натуральним параметром **через самі вектори рухомого базису.** Для похідної вектора дотичної таке співвідношення було отримано в Лемі 2: $\dot{\bar\tau} = \ddot{\bar R} = k\bar\nu$. Отже, отримали співвідношення**:** $\dot{\bar\tau} = k\bar\nu$.

Далі шукатимемо розклад похідної вектора бінормалі: $\dot{\bar\beta} = \dfrac{d}{ds}\left(\bar\tau \times \bar\nu\right)$. Скористаємося правилом диференціювання векторного добутку вектор-функцій (див. §1). Маємо $\dot{\bar\beta} = \dot{\bar\tau} \times \bar\nu + \bar\tau \times \dot{\bar\nu} = k\bar\nu \times \bar\nu + \bar\tau \times \dot{\bar\nu} = \bar\tau \times \dot{\bar\nu}$.

Векторний добуток векторів є перпендикулярним до кожного з векторів-множників, тобто $\dot{\bar\beta} \perp \bar\tau$. З другого боку, згідно з Лемі 2 похідна вектора сталої довжини перпендикулярна до самого вектора, тобто $\dot{\bar\beta} \perp \bar\beta$. Отже, $\dot{\bar\beta} \| \bar\nu$. Позначивши коефіцієнт пропорційності æ (каппа) отримаємо: $\dot{\bar\beta} = -æ\,\bar\nu$. Знайдемо швидкість змінювання вектора головної нормалі:

$$\dot{\bar\nu} = \frac{d}{ds}\left(\bar\beta \times \bar\tau\right) = \dot{\bar\beta} \times \bar\tau + \bar\beta \times \dot{\bar\tau} = -æ\,\bar\nu \times \bar\tau + k\bar\beta \times \bar\nu = -k\bar\tau + æ\bar\beta .$$

Отже, $\dot{\bar\nu} = -k\bar\tau + æ\bar\beta$. Об’єднавши результати, отримаємо систему формул, що називаються **формулами Серре–Френе**:

$$\begin{cases} \dot{\bar\tau} = k\bar\nu, \\ \dot{\bar\nu} = -k\bar\tau + æ\bar\beta, \\ \dot{\bar\beta} = -æ\,\bar\nu \end{cases}$$

Формули Серре-Френе виражають розкладання похідних за натуральним параметром векторів рухомого базису кривої через самі базисні вектори. Матриця коефіцієнтів такого розкладу кососиметрична:

$$\begin{pmatrix} 0 & k & 0 \\ -k & 0 & æ \\ 0 & -æ & 0 \end{pmatrix}.$$

Коефіцієнти розкладу k і æ називаються відповідно **кривиною і скрутом кривої.** В наступному параграфі з'ясуємо їх геометричний зміст і знайдемо формули для їх обчислення.

§4. Кривина та скрут регулярної кривої. Основна теорема теорії кривих. Натуральні рівняння кривої

Кривина регулярної кривої. Формули для знаходження кривини. Обчислення кривини плоскої кривої. Кривина прямої. Абсолютна величина скруту кривої. Скрут регулярної кривої. Скрут плоскої кривої. Геометричний зміст знака скруту. Основна теорема теорії кривих. Натуральні рівняння кривої.

Перейдемо до вивчення такої важливої характеристики кривої як кривина. Нехай криву задано регулярною натуральною параметризацією $\overline{R}(s)$ класу $C^n, n \geq 2$. Під час руху точки по кривій змінюється напрямок її дотичної (рис.1.5).

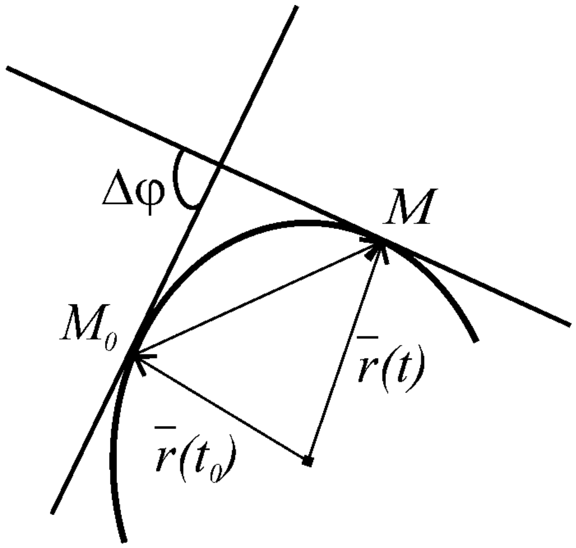

Рис.1.5

Для того щоб виміряти швидкість цієї зміни розглянемо дотичні на кінцях певної дуги, знайдемо кут між ними та поділимо на довжину цієї дуги. Якщо взяти границю такого відношення за $M \to M_0 (\Delta s \to 0)$ отримаємо величину, що дорівнює модулю швидкості обертання дотичної відносно довжини дуги: $\lim\limits_{\Delta s \to 0} \left| \frac{\Delta \varphi}{\Delta s} \right|$. Дану величину назвали кривиною регулярної кривої. Покажемо, що вона дорівнює коефіцієнту $k(k \geq 0)$ в формулах Френе. Розглянемо першу формулу $\dot{\overline{\tau}} = k\overline{\nu}$. Знайдемо модулі лівої та правої частин рівності: $|k\overline{\nu}| = k$, оскільки $k > 0, |\overline{\nu}| = 1$, $|\dot{\overline{\tau}}| = \left|\frac{d\overline{\tau}}{ds}\right| = \lim\limits_{\Delta s \to 0}\left|\frac{\Delta\overline{\tau}}{\Delta\varphi}\cdot\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}\right| = \lim\limits_{\Delta s \to 0}\left|\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}\right|$

Доведіть самостійно, що $\lim\limits_{\Delta s \to 0}\left|\frac{\Delta\overline{\tau}}{\Delta\varphi}\right| = 1$. Отже, за означенням величина $k = \lim\limits_{\Delta s \to 0}\left|\frac{\Delta\overline{\tau}}{\Delta\varphi}\right|$ є кривиною кривої $\overline{R}(s)$ і виражає швидкість зміни вектора дотичної під час переходу від точки до точки по кривій. Вимірюючи швидкість зміни напрямку дотичної, кривина показує, наскільки відхилюється крива за своєю формою від форми прямої лінії. Для визначення **кривини регулярної кривої, заданою натуральною параметризацією,** маємо формулу: $k = |\dot{\overline{\tau}}| = \left|\ddot{\overline{R}}(s)\right|$.

Вправа 1.8. Знайдіть кривину гвинтової лінії $\overline{r}(t) = \{a\cos t, a\sin t, bt\}$.

Розв'язання. Використаємо натуральну параметризацію гвинтової лінії (див.вправу 1.6) $\overline{R}(s) = \left\{a\cos\frac{s}{c}, a\sin\frac{s}{c}, \frac{bs}{c}\right\}$, $c = \sqrt{a^2 + b^2}$.

$$\dot{\overline{R}}(s) = \left\{-\frac{a}{c}\sin\frac{s}{c}, \frac{a}{c}\cos\frac{s}{c}, \frac{b}{c}\right\}, \ddot{\overline{R}}(s) = \left\{-\frac{a}{c^2}\cos\frac{s}{c}, -\frac{a}{c^2}\sin\frac{s}{c}, 0\right\},$$

$$k = \left|\ddot{\overline{R}}(s)\right| = \sqrt{\left(-\frac{a}{c^2}\cos\frac{s}{c}\right)^2 + \left(-\frac{a}{c^2}\sin\frac{s}{c}\right)^2} = \frac{a}{a^2 + b^2}.$$

Відповідь. $k = \dfrac{a}{a^2 + b^2}$.

Частіше в задачах маємо справу з кривими, заданими за допомогою довільного параметра. Знайдемо кривину кривої у разі довільної регулярної параметризації кривої. Нехай $\overline{r}(t)$ – довільна регулярна параметризація кривої класу $C^n, n \geq 2$. Знайдемо натуральну параметризацію цієї кривої: $\overline{R}(s) = \overline{r}(t(s))$. Як відомо, $t(s)$ – функція, обернена до $s(t)$, де $s(t) = \int\limits_a^t \left|\overline{r}'(t)\right| dt$, тому

$\left|\overline{r}'(t)\right| = s'(t)$. Продиференціюємо рівність $\overline{R}(s) = \overline{r}(t(s))$ за *s*.

Отримаємо: $\dot{\overline{R}} = \overline{r}'_t \cdot \dot{t}_s = \dfrac{\overline{r}'_t}{s'_t}$, $\ddot{\overline{R}} = k\overline{v} = \overline{r}_{tt}'' \cdot \dot{t}_s^2 + \overline{r}'_t \cdot \ddot{t}_{ss}$. Помножимо векторно ліву і праву частини рівності на вектор $\overline{\tau} = \dot{\overline{R}}$. Отримаємо: $\overline{\tau} \times k\overline{v} = \overline{r}'_t \times \overline{r}_{tt}'' \cdot \dot{t}_s^3$. Взявши за модулем, отримаємо формулу для **знаходження кривини кривої у випадку довільної параметризації**:

$$k = \frac{\left|\overline{r}'_t \times \overline{r}_{tt}''\right|}{\left|\overline{r}'_t\right|^3} \tag{1.1}$$

Вправа 1.9. Знайти кривину гвинтової лінії $\overline{r}(t) = \{a\cos t, a\sin t, bt\}$, $a > 0$ (рис.1.6).

Розв'язання.

$\overline{r}'(t) = \{-a\sin t, a\cos t, b\}$, $\overline{r}''(t) = \{-a\cos t, -a\sin t, 0\}$,

$$\overline{r}'(t) \times \overline{r}''(t) = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ -a\sin t & a\cos t & b \\ -a\cos t & -a\sin t & 0 \end{vmatrix} = \left\{ab\sin t, -ab\cos t, a^2\right\}.$$

$\left|\overline{r}'(t) \times \overline{r}''(t)\right| = \sqrt{a^2b^2 + a^4} = a\sqrt{a^2 + b^2}$, $\left|\overline{r}'(t)\right| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

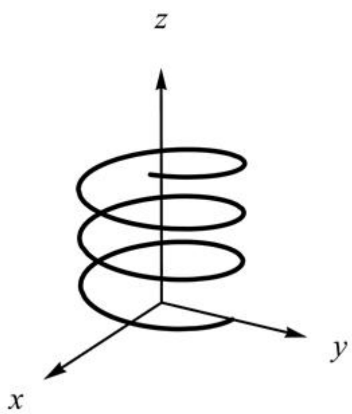

Рис. 1.6

Отже $$k = \frac{\left|\overline{r}'(t) \times \overline{r}''(t)\right|}{\left|\overline{r}'(t)\right|^3} = \frac{a}{a^2 + b^2}.$$

Використовуючи цю формулу, вдалось уникнути переходу до натуральної параметризації. Зверніть увагу, що кривина гвинтової лінії є сталою величиною.

Запишемо формулу для обчислення **кривини плоскої кривої**. Нехай всі точки кривої лежать в площині *Oxy*, тоді її можна задати регулярною параметризацією $\overline{r}(t)=\{x(t),y(t),0\}$. Знайшовши відповідні похідні та підставивши їх у формулу (1.1), отримаємо:

$$k=\frac{\left|\overline{r}'(t)\times\overline{r}''(t)\right|}{\left|\overline{r}'(t)\right|^3}=\frac{\left|x'(t)y''(t)-x''(t)y'(t)\right|}{\left(\sqrt{\left(x'(t)\right)^2+\left(y'(t)\right)^2}\right)^3}.$$

Якщо криву задано рівнянням $y=f(x)$, то $k=\dfrac{\left|y''(x)\right|}{\sqrt{\left(1+\left(y'\right)^2\right)^3}}$.

Якщо криву задано рівнянням $\rho=\rho(\theta)$ в полярній системі координат, то

$$k=\frac{\left|\rho^2+2\left(\rho'\right)^2-\rho\rho''\right|}{\sqrt{\left(\rho^2+\left(\rho'\right)^2\right)^3}}.$$

Перевірте самостійно. Кривина кривої дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли крива є прямолінійним відрізком.

Вправа 1.10. Покажіть, що кривина прямої при будь-якій параметризації дорівнює нулю.

Розв'язання. Дотична до прямої збігається з прямою і тому кривина дорівнює нулю, оскільки $\Delta\overline{\tau}=\overline{0}$ (вектор дотичної не змінюється).

Точка кривої, у якій кривина дорівнює нулю, називається точкою розпрямлення (спрямлення). Пряма складається з точок розпрямлення. В околі точки розпрямлення (спрямлення) крива близька до прямої. Величина, обернена до кривини називається **радіусом кривини** кривої в даній точці $\rho=1/k$.

Вправа 1.11. Знайти радіус кривини еліпса $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$ в точці $M(0,3)$.

Розв'язання. Запишемо регулярну параметризацію еліпса: $\overline{r}(t)=\{5\cos t,3\sin t,0\}$. Точка $M(0,3)$ відповідає значенню параметра $t = \pi/2$. $\overline{r}'(t) = \{-5\sin t, 3\cos t, 0\}$, $\overline{r}'(\pi/2) = \{-5, 0, 0\}$, $\overline{r}''(t) = \{-5\cos t, -3\sin t, 0\}$, $\overline{r}''(\pi/2) = \{0, -3, 0\}$, $\overline{r}' \times \overline{r}'' = 15\overline{k}$, $|\overline{r}' \times \overline{r}''| = 15$, $|\overline{r}'| = 5$. Згідно з формулою (1.1) кривина еліпса в даній точці $k = \dfrac{15}{5^3} = \dfrac{3}{25}$, тоді радіус кривини $\rho = \dfrac{1}{k} = \dfrac{25}{3}$.

Відповідь: $\rho = 25/3$.

Якщо від точки кривої на головній нормалі в додатному напрямку відкласти відрізок довжиною ρ, одержимо точку, яка називається центром кривини кривої.

Скрут кривої. У §3 скрутом названий коефіцієнт æ в формулах Серре – Френе. Покажемо, що абсолютна величина скруту в даній точці дорівнює границі відношення кута повороту бінормалі під час руху по дузі кривої, до довжини цієї дуги. Нехай M_0 – довільна фіксована точка регулярної кривої γ без особливих точок і M – точка цієї кривої близька до M_0, $M \to M_0 (\Delta s \to 0)$ Будемо вважати, що на відрізку $M_0 M$ немає точок розпрямлення. Розглянемо вектори бінормалей $\overline{b}(s)$ в точці M_0 та $\overline{b}(s + \Delta s)$ в точці M. Позначимо через $\Delta\theta$ - кут між цими векторами, а через Δs – довжину дуги MM_0.

Означення. Абсолютною величиною скруту кривої в точці M_0 називається границя відношення $\dfrac{\Delta\theta}{|\Delta s|}$ за $M \to M_0$, $|æ| = \lim\limits_{\Delta s \to 0} \dfrac{\Delta\theta}{|\Delta s|}$.

Нехай криву задано регулярною натуральною параметризацією $\overline{R}(s)$ класу $C^n, n \geq 3$. Розглянемо третю формулу Серре – Френе $\dot{\overline{\beta}} = -æ\,\overline{\nu}$ та покажемо, що модуль введеного раніше коефіцієнта æ – абсолютна величина скруту кривої в точці регулярної кривої, що не є точкою розпрямлення.

Дійсно, $|æ| = \left|\dot{\overline{\beta}}\right| = \lim\limits_{\Delta s \to 0} \left|\dfrac{\Delta\overline{\beta}}{\Delta s}\right| = \lim\limits_{\Delta s \to 0} \left|\dfrac{\Delta\overline{\beta}}{\Delta\theta} \cdot \dfrac{\Delta\theta}{\Delta s}\right| = \lim\limits_{\Delta s \to 0} \dfrac{\Delta\theta}{|\Delta s|}$.

Означення. Скрутом регулярної кривої в точці $\overline{R}(s)$ називається число $æ(s) = -\left(\dot{\overline{\beta}}, \overline{\nu}\right)$.

Виведемо формулу для знаходження скруту. Скористаємось формулами Френе та таблицями множення векторів супроводжуючого тригранника кривої.

$$\dot{\overline{R}}(s) = \overline{\tau}\,,\ \ddot{\overline{R}}(s) = \dot{\overline{\tau}} = k\overline{\nu}\,,\ \dot{\overline{R}}(s) \times \ddot{\overline{R}}(s) = \overline{\tau} \times k\overline{\nu} = k\overline{\beta}\,.$$

$$\left(\dot{\overline{R}}, \ddot{\overline{R}}, \dddot{\overline{R}}\right) = \left(\dot{\overline{R}} \times \ddot{\overline{R}}\right) \cdot \dddot{\overline{R}} = k\overline{\beta} \cdot \frac{d}{ds}\left(k\overline{\nu}\right) =$$

$$k\overline{\beta}\left(k'\overline{\nu} + k\dot{\overline{\nu}}\right) = k\overline{\beta}\left(k'\overline{\nu} - k^2\overline{\tau} + kæ\overline{\beta}\right) = k^2 æ\,.$$

У кожній точці регулярної кривої, що не є точкою розпрямлення, скрут можна визначити за формулою $æ = \dfrac{\left(\dot{\overline{R}}, \ddot{\overline{R}}, \dddot{\overline{R}}\right)}{k^2}$.

Зауваження. У разі довільної параметризації $\overline{r} = \overline{r}(t)$ скрут обчислюється за формулою $æ = \dfrac{\left(\overline{r}'(t), \overline{r}''(t), \overline{r}'''(t)\right)}{\left[\overline{r}'(t), \overline{r}''(t)\right]^2}$. Тут в чисельнику дробу записаний мішаний добуток векторів, а в знаменнику – квадрат векторного добутку. Скрут буде додатним, якщо крива поводитиметься як права гвинтова лінія. В околі точки з від’ємним скрутом крива поводитиметься як ліва гвинтова лінія. Тобто скрути дзеркально симетричних кривих в їх відповідних точках однакові за абсолютною величиною, але мають різні знаки.

Скрут характеризує відхилення форми кривої від форми плоскої кривої. Скрут плоскої кривої, очевидно, дорівнює нулю, оскільки вектор бінормалі збігається з нормальним вектором площини і залишається незмінним вздовж всієї кривої. І навпаки, якщо скрут кривої тотожно дорівнює нулю, то крива є плоскою. Тобто рівність нулю скруту кривої в усіх її точках є критерієм того, що крива є плоскою. Точки, в яких $æ = 0$, називаються **точками сплощення** кривої. В точках розпрямлення кривої, тобто в точках, в яких кривина $k = 0$, скрут є невизначеним.

Натуральні рівняння кривої. Якщо $\overline{R}=\overline{R}(s)$, то кривина і скрут є функціями параметра *s*: $k=k(s)$, $æ=æ(s)$. Система цих співвідношень $\begin{cases} k=k(s), \\ æ=æ(s) \end{cases}$ називається натуральними рівняннями кривої.

Основна теорема теорії кривих. Нехай задано дві скалярні функції на відрізку $[0,S]$: $k(s)>0$, $k(s)\in C^n$, $n\geq 1$ і $æ(s)\in C^{n-1}$, *s* – натуральний параметр. Існує, й до того ж єдина (з точністю до розміщення в просторі), регулярна крива класу C^{n+2}, для якої задані функції є відповідно кривиною і скрутом.

Іншими словами. за основною теоремою теорії кривих, кривина і скрут повністю характеризують криву (з точністю до розміщення в просторі).

Вправа 1.12. Знайдіть кривину та скрут лінії $\overline{r}(t)=\{acht, asht, at\}, a>0$.

Розв'язання. Знаходимо похідні: $\overline{r}'(t)=\{asht, acht, a\}$, $\overline{r}''(t)=\{acht, asht, 0\}$, $\overline{r}'''(t)=\{asht, acht, 0\}$, $|\overline{r}'(t)|=a\sqrt{2}cht$. Спрощуючи, слід користуватись основною тотожністю для гіперболічних функцій $ch^2t-sh^2t=1$. Знайдемо векторний та мішаний добутки відповідних векторів:

$$\overline{r}'(t)\times\overline{r}''(t)=\begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ asht & acht & a \\ acht & asht & 0 \end{vmatrix}=-a^2sht\cdot\overline{i}+a^2cht\cdot\overline{j}-a^2\cdot\overline{k}.$$

Мішаний добуток: $\left(\overline{r}'(t),\overline{r}''(t),\overline{r}'''(t)\right)=a^3$. Модуль векторного добутку $|\overline{r}'(t)\times\overline{r}''(t)|=a^2\sqrt{2}cht$. Тепер можна обчислити кривину

$$k=\frac{\left|\overline{r}'(t)\times\overline{r}''(t)\right|}{|\overline{r}'(t)|^3}=\frac{1}{2ach^2t} \text{ та скрут } æ=\frac{1}{2ach^2t}.$$

Вправа 1.13. Доведіть, що лінія $\overline{r}(t)=\left\{t^2-1, t^2+2, t^3\right\}$ плоска та знайдіть рівняння площини, якій вона належить.

Розв'язання. Знайдемо скрут кривої і покажемо, що він дорівнює нулю. Застосуємо формулу: $æ = \frac{\left(\overline{r}'(t), \overline{r}''(t), \overline{r}'''(t)\right)}{\left[\overline{r}'(t), \overline{r}''(t)\right]^2}$. Оскільки $\overline{r}'(t) = \left\{2t, 2t, 3t^2\right\}$, $\overline{r}''(t) = \{2, 2, 6t\}$, $\overline{r}'''(t) = \{0, 0, 6\}$, то мішаний добуток цих вектор-функцій дорівнює нулю. Отже, $æ = 0$ і крива є плоскою. Для того щоб скласти рівняння площини, в якій лежить задана крива, виберемо три точки цієї кривої за деякими довільними значеннями параметра *t.* Наприклад, M_1 (-1,2,0) за t=0, M_2 (0,3,1) за t=1, M_3 (0,3,-1) за t=-1. Складемо рівняння площини, що проходить через три задані точки і отримаємо – $x - y + 3 = 0$

Відповідь. $x - y + 3 = 0$.

Вправа 1.14. Написати натуральні рівняння лінії $\overline{r}(t) = \{acht, asht, at\}, a > 0$.

Розв'язання. Використовуючи результати, отримані у вправах 1.8 та 1.11, будемо мати $\frac{1}{2ach^2 t} = \frac{1}{2a\left(1 + \frac{s}{2a^2}\right)} = \frac{a}{2a^2 + s^2}$. Отже, натуральні рівняння даної кривої:

$$\begin{cases} k(s) = \dfrac{a}{2a^2 + s^2}, \\ æ(s) = \dfrac{a}{2a^2 + s^2} \end{cases}.$$

Вправи до розділу I

1. Знайдіть похідні вектор-функцій: *а*) $\overline{r}(t) = \left\{t, t^2, t^3\right\}$, б) $\overline{r}(t) = \{\sin t, \cos t, 2t\}$.

2. Знайдіть похідні скалярного та векторного добутку векторів $\overline{r_1} = 3t\overline{i} + 2\overline{j} + 5\overline{k}$ та $\overline{r_2} = 2\overline{i} - 3\overline{j} + \overline{k}$.

3. Доведіть, що вектори $\overline{r}(t) = \overline{i}\cos t + \overline{j}\sin t + \overline{k}$ та $d\overline{r}/dt$ взаємно перпендикулярні.

4. Рівняння руху має вигляд $\overline{r}\left(t\right)=\left\{t,t^2,t^3\right\}$. Визначити швидкість та прискорення руху в момент часу $t=1$.

5. Знайдіть годографи вектор-функцій: *а*) $\overline{r}\left(t\right)=\overline{i}\cos t+\overline{j}+\overline{k}\sin t$; *б*) $\overline{r}\left(t\right)=\overline{i}t+\overline{j}t+\overline{k}t$; *в*) $\overline{r}\left(t\right)=\overline{i}+\overline{j}+\overline{k}t$.

6. Знайдіть одиничний тангенціальний вектор кривої $\overline{r}\left(t\right)=5t\cdot\overline{i}+12\cos t\cdot\overline{j}+12\sin t\cdot\overline{k}$ в довільній точці.

7. Знайдіть вектори $\overline{\tau},\overline{\nu},\overline{\beta}$ кривої $x=y^2, z=x^2$ в точці $A\left(1,1,1\right)$ (рекомендуємо застосувати параметризацію $\overline{r}\left(t\right)=\left\{t^2,t,t^4\right\}$).

8. Для гвинтової лінії $\overline{r}\left(t\right)=\left\{\cos t,\sin t,t\right\}$ в точці $M\left(1,0,0\right)$ складіть рівняння ребер та граней супровідного тригранника. (Відповідь: рівняння дотичної – $\frac{x-1}{0}=\frac{y}{1}=\frac{z}{1}$, рівняння бінормалі – $\frac{x-1}{0}=\frac{y}{1}=\frac{z}{-1}$, стичної площини – $y-z=0$).

9. Знайдіть довжину дуги астроїди $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$.

10. Рівняння лінії $\overline{r}\left(t\right)=\left\{e^t\cos t,e^t\sin t,e^t\right\}$ запишіть в натуральній параметризації.

11. Для наступних кривих складіть рівняння дотичної, нормальної площини, бінормалі, стичної площини, головної нормалі, спрямної площини. Знайдіть вектори $\overline{\tau},\overline{\nu},\overline{\beta}$ супровідного репера. Знайдіть кривину та скрут кривої: *а*) $\overline{r}\left(t\right)=\left\{a\cos t,a\sin t,bt\right\}$ б) $\overline{r}\left(t\right)=\left\{t^2,1-t,t^3\right\}$; *в*) $\overline{r}\left(t\right)=\left\{2t,\ln t,t^2\right\}$.

12. Доведіть, що лінія $\begin{cases}x^2=2az,\\ y^2=2bz\end{cases}$ є плоскою і складіть рівняння площини в якій вона лежить.

13. Складіть натуральні рівняння гвинтової лінії.

14. Складіть натуральні рівняння лінії $\overline{r}\left(t\right)=\left\{e^t,e^{-t},t\sqrt{2}\right\}$.

РОЗДІЛ ІІ

Теорія поверхонь

§5. Вектор-функція двох скалярних аргументів. Регулярна параметризація в області. Регулярна поверхня

Способи задати поверхні. Вектор-функція двох скалярних аргументів. Регулярна параметризація в області. Регулярні поверхні.

З курсу математичного аналізу та аналітичної геометрії відомі три основні способи завдати поверхню в просторі: явний ($z = f(x, y)$), неявний ($F(x, y, z) = 0$) і параметричний. Як уже згадано, диференціальна геометрія вивчає регулярні параметризації. Для того щоб дати означення регулярної параметризації поверхні, ознайомимось з властивостями вектор-функції двох скалярних аргументів.

Вектор-функцію двох скалярних аргументів визначають аналогічно вектор-функції одного скалярного аргумента (див. §1). Поставимо у відповідність кожній точці (u, v) області *D* (рис.2.1) за певним законом вектор $\overline{r}(u, v) = \{x(u, v), y(u, v), z(u, v)\}$. Таким чином, в області *D* задано вектор-функцію двох скалярних аргументів *u* і *v*. При цьому функції $x(u, v), y(u, v), z(u, v)$ – це скалярні функції, які називаються компонентами вектор-функції $\overline{r}(u, v)$ в даному базисі.

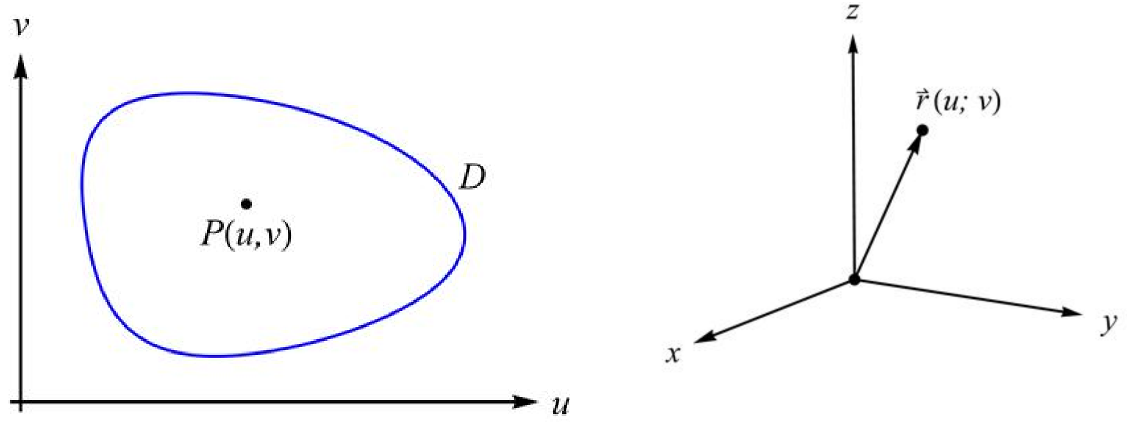

Рис. 2.1

Наведемо означення границі, неперервності, похідної для вектор-функції двох змінних. Порівняйте з аналогічними означеннями, введеними для функції багатьох змінних.

Вектор $\overline{a}=\{\alpha,\beta,\gamma\}$ називається **границею вектор-функції** $\overline{r}(u,v)=\{x(u,v),y(u,v),z(u,v)\}$ в точці $(u_0,v_0)\in D$, якщо $\lim\limits_{(u,v)\to(u_0,v_0)}\left|\overline{r}(u,v)-\overline{a}\right|=0$.

Вектор-функція $\overline{r}(u,v)=\{x(u,v),y(u,v),z(u,v)\}$ **неперервна в точці** $(u_0,v_0)\in D$, якщо $\lim\limits_{(u,v)\to(u_0,v_0)}\overline{r}(u,v)=\overline{r}(u_0,v_0)$, якщо вектор-функція неперервна в кожній точці області *D*, то вона **неперервна в області *D*.**

Частинною похідною вектор-функції $\overline{r}(u,v)$ за *u* в точці $(u,v)\in D$, називається $\lim\limits_{\Delta u\to 0}\dfrac{\overline{r}(u+\Delta u,v)-\overline{r}(u,v)}{\Delta u}=\overline{r}_u$ за умови, що така границя існує. Аналогічно $\lim\limits_{\Delta v\to 0}\dfrac{\overline{r}(u,v+\Delta v)-\overline{r}(u,v)}{\Delta v}=\overline{r}_v$.

Вектор-функція належить класу C^n $\left(\overline{r}(u,v)\in C^n, n\geq 1\right)$, якщо в області *D* існують та неперервні всі її частинні похідні до порядку *n* включно. Для вектор-функції двох скалярних аргументів справедливі теореми про покомпонентний перехід до границь, покомпонентне диференціювання, покомпонентну неперервність. Крім того, для вектор-функції $\overline{r}(u,v)\in C^n, n\geq 1$ справедлива **формула Тейлора** із залишковим членом в формі Пеано:

$$\overline{r}(u+\Delta u,v+\Delta v)=\overline{r}(u,v)+\overline{r}_u(u,v)\Delta u+\overline{r}_v(u,v)\Delta v+\ldots+$$

$$+\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\frac{\partial^n\overline{r}(u,v)}{\partial^{n-k}u\cdot\partial^k v}(\Delta u)^{n-k}(\Delta v)^k+R_{n+1}.$$

Диференціал вектор-функції $d\overline{r}(u,v)=\overline{r}_u du+\overline{r}_v dv$.

Вправа 2.1. Знайдіть частинні похідні першого та другого порядків вектор-функції $\overline{r}(u,v)=\left\{u^3-v,2uv,v^2\right\}$ в точці $(0,1)$.

Розв'язання. Згідно з теоремою про покомпонентне диференціювання вектор-функції $\overline{r}_u=\left\{3u^2,2v,0\right\}$, $\overline{r}_v(u,v)=\{-1,2u,2v\}$. В точці $(0,1)$ маємо: $\overline{r}_u(0,1)=\{0,2,0\}$,

$\overline{r}_v(0,1)=\{-1,0,2\}$. Частинні похідні другого порядку: $\overline{r}_{uu}=(\overline{r}_u)'_u=\{6u,0,0\}$, $\overline{r}_{uv}=(\overline{r}_u)'_v=\{0,2,0\}$, $\overline{r}_{vu}(u,v)=(\overline{r}_v)'_u=\{0,2,0\}$. Зверніть увагу, що $\overline{r}_{uv}=\overline{r}_{vu}$. $\overline{r}_{vv}(u,v)=\{0,0,2\}$. В точці $(0,1)$ $\overline{r}_{uu}(0,1)=\{0,0,0\}$, $\overline{r}_{uv}(0,1)=\{0,2,0\}$, $\overline{r}_{vv}(0,1)=\{0,0,2\}$.

Регулярною параметризацією класу $C^n, n\geq 1$ в області *D* називається вектор-функція $\overline{r}(u,v)$, що задовольняє таким умовам:

- $\overline{r}(u,v)\in C^n(D)$. Функція $\overline{r}(u,v)$ *n* разів неперервно диференційовна в області *D;*

- $[\overline{r}_u,\overline{r}_v]\neq\overline{0}$, тобто вектори $\overline{r}_u$ і $\overline{r}_v$ не колінеарні (ця умова унеможливлює наявність точок ребра звороту);

- якщо $(u_1,v_1)\neq(u_2,v_2)$, то $\overline{r}(u_1,v_1)\neq\overline{r}(u_2,v_2)$.

Кожна регулярна параметризація задає регулярну поверхню відповідного класу. Очевидно, що одну й ту саму поверхню можуть задавати різні еквівалентні параметризації.

Точкою регулярної поверхні називається кінець радіус-вектора $\overline{r}(u,v)$, де $\overline{r}(u,v)$ – деяка регулярна параметризація поверхні.

§6. Криві на регулярній поверхні. Дотична площина регулярної поверхні

Криві на регулярній поверхні. Координатні лінії на поверхні. Дотична площина регулярної поверхні. Теорема про існування та єдиність дотичної площини.

Розглянемо регулярну поверхню, задану регулярною параметризацією $\overline{r}(u,v)$ класу $C^n, n\geq 1$ в області *D*, $\overline{r}(u,v)\in C^n(D)$. В області $D(u,v)$ площини розглянемо регулярну криву класу $C^n, n\geq 1$. Нехай $\overline{\rho}(t)=\{u(t),v(t)\}$ – регулярна параметризація даної кривої в області *D*, $t\in[a,b]$ (рис. 2.2).

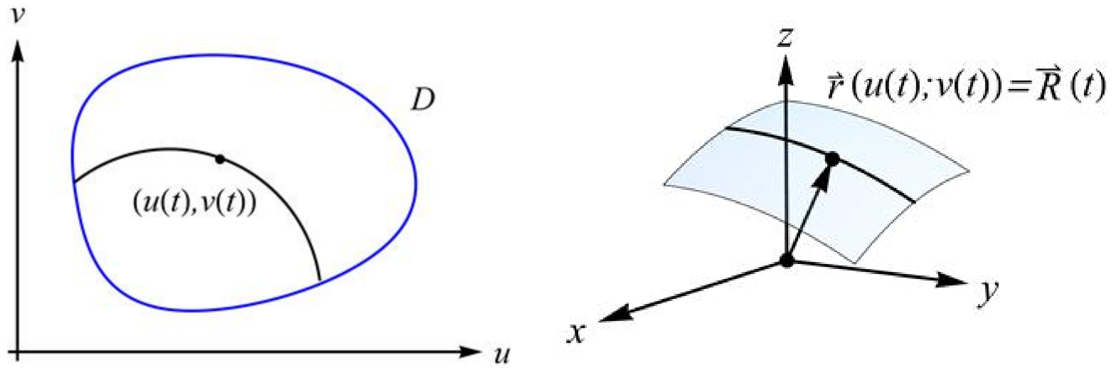

Рис.2.2

Вектор-функція $\overline{R}(t)=\overline{r}\left(u(t),v(t)\right)$ також є регулярною параметризацією кривої на відрізку $t\in[a,b]$ (перевірте самостійно виконання умов 1-3 означення регулярної параметризації кривої). Оскільки кожна точка даної кривої належить поверхні, то вектор-функція $\overline{R}(t)$ задає криву, яка лежить на даній поверхні. Рівняння $\begin{cases}u=u(t),\\ v=v(t)\end{cases}$ називаються **внутрішніми рівняннями кривої** $\overline{R}(t)$ **на поверхні.** Лінії на поверхні, визначувані внутрішніми рівняннями $\begin{cases}u=C\\ v=t\end{cases}$ і $\begin{cases}u=t\\ v=C\end{cases}$ називаються **координатними лініями** $u=C(v=C)$.

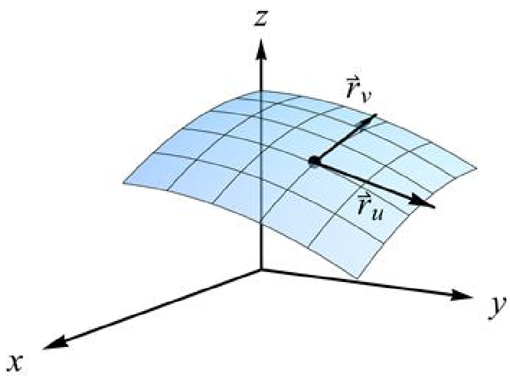

Рис.2.3

Покажемо, що координатні лінії на поверхні утворюють ненульові кути (що називають кутом між кривими?) Відомо, що вектор $\overline{R}'(t)$ є напрямним вектором дотичної до даної кривої в даній точці. Знайдемо $\overline{R}'(t)$ для координатних ліній: $\overline{R}_t'=\overline{r}_u u_t'+\overline{r}_v v_t'=\overline{r}_v$, $\overline{R}_t'=\overline{r}_u u_t'+\overline{r}_v v_t'=\overline{r}_u$. Отже, для координатних ліній $u=C$ напрямним вектором дотичної буде вектор $\overline{r}_v$, а для $v=C$ вектор $\overline{r}_u$. (Рис.2.3). Дані вектори непаралельні (чому?), тому координатні лінії в жодній точці не є дотичними одна одній.

Дотична площина регулярної поверхні. Розглянемо регулярну поверхню, задану регулярною параметризацією $\overline{r}(u,v)$ класу $C^n, n \ge 1$ і дві точки на поверхні *M* і M_0, що не збігаються – $M_0M = d$. Через точку M_0 проведемо площину π. З точки *M* опустимо перпендикуляр *h* на дану площину. Площина π називається дотичною площиною до поверхні в точці M_0, якщо $\lim\limits_{M \to M_0} \frac{h}{d} = 0$.

Теорема (про існування та єдиність дотичної площини). У кожній точці регулярної поверхні класу $C^n, n \ge 1$ існує дотична площина, і до того ж єдина. Якщо $\overline{r}(u,v)$ – регулярна параметризація поверхні, то дотична площина в точці $\overline{r}(u,v)$ паралельна векторам $\overline{r_u}$ і $\overline{r_v}$. Доведення можна знайти в літературі [3, с.72].

Дотична площина до регулярної поверхні в точці M_0 є множиною дотичних прямих до регулярних кривих на поверхні, що проходять через дану точку.

Нормаллю поверхні в даній точці називається пряма, що проходить через дану точку перпендикулярно дотичній площині поверхні в цій точці.

Вправа 2.2. Знайдіть рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні $\overline{r}(u,v) = \left\{2u - v, u^2 + v^2, u^3 - v^3\right\}$ в точці $P(3,5,7)$.

Розв'язання. Пригадайте основні типи рівнянь прямої та площини в просторі. Точка $P(3,5,7)$ відповідає значенням $u_0 = 2, v_0 = 1$. Згідно з теоремою про існування та єдиність дотичної площини, дотична площина в точці $\overline{r}(u,v)$ паралельна векторам $\overline{r_u}$ і $\overline{r_v}$, тому вектор $\overline{N} = \overline{r_u} \times \overline{r_v}$ є вектором нормалі до дотичної площини. Знайдемо його:

$\overline{r_u} = \left\{2, 2u, 3u^2\right\}$, $\overline{r_u}(2,1) = \{2,4,12\}$, $\overline{r_v} = \left\{-1, 2v, -3v^2\right\}$,

$$\overline{r_v}(2,1) = \{-1,2,-3\}, \quad \overline{N} = \overline{r_u} \times \overline{r_v} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 2 & 4 & 12 \\ -1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = -36\overline{i} - 6\overline{j} + 8\overline{k}.$$

Рівняння дотичної площини: $18(x-3) + 3(y-5) - 4(z-7) = 0$, $18x + 3y - 4z - 41 = 0$. Вектор $\{18,3,-4\}$ є напрямним вектором нормалі поверхні, тому канонічні рівняння нормалі: $\frac{x-3}{18}=\frac{y-5}{3}=\frac{z-7}{-4}$.

Вправа 2.3. Знайдіть рівняння дотичної площини до поверхні $xy^2+z^2=8$ в точці $(1,2,2)$. Визначити орт нормалі в цій точці.

Розв'язання. Перепишемо рівняння поверхні у вигляді $\Phi(x,y,z)=0$, $xy^2+z^2-8=0$.

Вектором нормалі до поверхні в даній точці буде вектор $\overrightarrow{grad\Phi}\Big|_M=\left\{\frac{\partial\Phi}{\partial x},\frac{\partial\Phi}{\partial y},\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right\}\Bigg|_M=\left\{y^2,2xy,2z\right\}\Big|_M=\{4,4,4\}$.

Очевидно, що вектор $\overrightarrow{N}=\{1,1,1\}$ також буде вектором нормалі до поверхні в даній точці, орт цього вектора $\overline{e}=\left\{\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right\}$. Рівняння дотичної площини: $(x-1)+(y-2)+(z-2)=0$, $x+y+z-5=0$.

§7. Перша квадратична диференціальна форма поверхні. Внутрішня геометрія поверхні

Перша квадратична диференціальна форма поверхні. Обчислення довжини кривої на поверхні. Напрямок на поверхні, обчислення кута між напрямками. Умова ортогональності двох напрямків. Площа регулярної поверхні. Поняття про згинання поверхні. Внутрішня геометрія поверхні.

Нехай задано регулярну поверхню класу $C^n, n\geq 1$. Першою диференціальною квадратичною формою поверхні називається вираз $I=\left(d\overline{r}\right)^2$. Знайдемо розгорнутий вигляд першої квадратичної форми. Нехай $\overline{r}(u,v)$ – регулярна параметризація поверхні, тоді $I=\left(\overline{r}_u du+\overline{r}_v dv\right)^2=\overline{r}_u^{\,2}du^2+2\overline{r}_u\overline{r}_v dudv+\overline{r}_v^{\,2}dv^2$. Позначимо $E=\overline{r}_u^{\,2}$, $F=\left(\overline{r}_u,\overline{r}_v\right)$, $G=\overline{r}_v^{\,2}$, тоді $I=Edu^2+2Fdudv+Gdv^2$. Коефіцієнти першої квадратичної форми *E, F, G* не числа, а числові функції, що залежать від внутрішніх координат *u* і *v і* мають певний геометричний зміст. Так $E=\overline{r}_u^{\,2}$ та $G=\overline{r}_v^{\,2}$ – квадрати масштабів координатних ліній (скалярний квадрат вектора дорівнює квадрату його модуля). $F=\left(\overline{r}_u,\overline{r}_v\right)=\left|\overline{r}_u\right|\cdot\left|\overline{r}_v\right|\cos\varphi$ за означенням скалярного добутку. Звідси $\cos\varphi=\dfrac{F}{\sqrt{EG}}$, φ – кут між координатними лініями. Якщо координатні лінії перпендикулярні, то $F=0$. Перша квадратична форма є додатно визначеною. Дійсно, $I=\left(d\overline{r}\right)^2\geq 0$, причому $I=\left(d\overline{r}\right)^2=0$ тільки якщо $d\overline{r}=\overline{0}$. $d\overline{r}=\overline{r}_u du+\overline{r}_v dv=\overline{0}$ тоді і тільки тоді, коли $du=0, dv=0$, оскільки $\left[\overline{r}_u,\overline{r}_v\right]\neq\overline{0}$, тобто вектори $\overline{r}_u,\overline{r}_v$ є лінійно незалежними. Тому $I=\left(d\overline{r}\right)^2>0$. З цього випливає, що визначник $\begin{vmatrix} E & F \\ F & G \end{vmatrix}=EG-F^2>0$ згідно з критерієм Сильвестра.

Вправа 2.4. Знайти першу квадратичну форму сфери, що задана регулярною параметризацією $\overline{r}\left(u,v\right)=\left\{\cos u\cos v,\cos u\sin v,\sin u\right\}$.

Розв'язання. $I=Edu^2+2Fdudv+Gdv^2$.

1. Знайдемо частинні похідні першого порядку від $\overline{r}\left(u,v\right)$:

$$\overline{r}_u=\left\{-\sin u\cos v,-\sin u\sin v,cosu\right\},$$

$$\overline{r}_v=\left\{-\cos u\sin v,\cos u\cos v,0\right\}.$$

2. Знаходимо коефіцієнти першої квадратичної форми:

$$E=\overline{r}_u^{\,2}=\sin^2 u\cos^2 v+\sin^2 u\sin^2 v+\cos^2 u=$$

$$=\sin^2 u\left(\cos^2 v+\sin^2 v\right)+\cos^2 u=1.$$

$$F=\overline{r}_u\cdot\overline{r}_v=\sin u\cos v\cos u\sin v-\sin u\cos v\cos u\sin v=0.$$

$$G=\overline{r}_v^{\,2}=\cos^2 u\sin^2 v+\cos^2 u\cos^2 v=\cos^2 u\left(\sin^2 v+\cos^2 v\right)=\cos^2 u$$

Відповідь. $I=du^2+\cos^2 udv^2$.

Вправа 2.5. Знайдіть коефіцієнти першої квадратичної форми поверхні, яку задано явним рівнянням $z=f\left(x,y\right)$.

Розв’язання. Параметризуємо поверхню: $\overline{r}\left(x,y\right)=\left\{x,y,f\left(x,y\right)\right\}$, тоді $\overline{r}_x=\left\{1,0,f_x'\right\}$, $\overline{r}_y'=\left\{0,1,f_y'\right\}$.

$E(x,y)=\overline{r}_x^{\,2}=1+f_x^{\,2}(x,y)$, $F(x,y)=\overline{r}_x\cdot\overline{r}_y=f_x(x,y)\cdot f_y(x,y)$,

$G(x,y)=\overline{r}_y^{\,2}=1+f_y^{\,2}(x,y)$.

Сукупність всіх властивостей поверхні, які можна виразити, якщо відомі тільки коефіцієнти її першої квадратичної форми, називається **внутрішньою геометрією поверхні.** Внутрішня геометрія поверхні зберігається в процесі **згинання поверхні,** тобто такій деформації поверхні, при якій відстань між двома точками поверхні змінюється на нескінченно малу величину більш високого порядку порівняно з порядком деформації. Простими словами – це «гладка» деформація. Без розтягів, розривів, зламів та ін. Перша квадратична форма не визначає поверхню однозначно. Можна привести приклади різних поверхонь, що мають однакову першу квадратичну форму. Такі поверхні називаються **ізометричними.**

Приклад. Прямокутна область $0<x<\dfrac{\pi}{2}$, $0<y<1$ на площині $0xy$ ізометрична області на циліндрі $x^2+y^2=1$, що визначається умовами $x>0$, $y>0$, $0<z<1$.

Справді, можна зауважити, що згадана область циліндра допускає параметризацію: $x=\cos u$, $y=\sin u$, $z=v$ $(0<u<\pi/2, 0<v<1)$. Частину площини параметризуємо наступним чином: $x=u$, $y=v$, $z=0$ $(0<u<\pi/2, 0<v<1)$.У такому разі перші квадратичні форми в обох випадках будуть рівні $I=du^2+dv^2$. Отже, ізометричність доведено.

Вправа 2.6 Покажіть, що прямий гелікоїд $\overline{r}=\{u\cos v, u\sin v, av\}$, $0\le u<\infty$, $-\infty<v<\infty$, $a\ne 0$ ізометричний катеноїду.

Розв'язання. Попередньо обчисліть перші квадратичні форми поверхонь. Перша квадратична форма даного гелікоїда матимемо вигляд: $I=du^2+\left(a^2+u^2\right)dv^2$. Таку саму квадратичну форму буде мати і катеноїд, якщо розглянути його параметризацію вигляду: $\vec{r}=\left(\sqrt{u^2+a^2}\cos v, \sqrt{u^2+a^2}\sin v, a\ln\left(u+\sqrt{u^2+a^2}\right)\right)$. Отже, поверхні мають однакові перші квадратичні форми, а тому вони є ізометричними.

Розглянемо основні **задачі на застосування першої квадратичної форми поверхні.**

Задача 1. Знаходження довжини кривої на поверхні. Нехай на регулярній поверхні з параметризацією $\overline{r}\left(u,v\right)$ задано криву своїми внутрішніми рівняннями $\begin{cases} u=u\left(t\right); \\ v=v\left(t\right). \end{cases}$ Параметризація кривої має вигляд $\overline{R}\left(t\right)=\overline{r}\left(u\left(t\right),v\left(t\right)\right)$. Довжину кривої знайдемо за формулою

$$s=\int_a^b\left|R'\left(t\right)\right|dt=\int_a^b\left|\overline{r}_u u_t'+\overline{r}_v v_t'\right|dt=\int_a^b\sqrt{\left(\overline{r}_u u_t'+\overline{r}_v v_t'\right)^2}=$$

$$=\int_a^b\sqrt{E\left(\frac{du}{dt}\right)^2+2F\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt}+G\left(\frac{dv}{dt}\right)^2}dt=$$

$$=\int_a^b\sqrt{Edu^2+2Fdudv+Gdv^2}=\int_a^b\sqrt{I}\,.$$

Отже

$$s=\int_a^b\sqrt{I}\,. \tag{2.1}$$

Дана формула має суттєві переваги порівняно з вихідною, оскільки виділені коефіцієнти *E, F, G* першої квадратичної форми не залежать від вибору кривої на поверхні, а тільки від самої поверхні та її параметризації. Тобто для знаходження довжин кривих на поверхні достатньо знати першу квадратичну форму поверхні, тому часто говорять, що **перша квадратична форма задає метрику поверхні.**

Довжину змінного відрізка кривої на поверхні, тобто натуральний параметр, знаходить за формулою

$$s\left(t\right)=\int_a^t\sqrt{E\left(\frac{du}{dt}\right)^2+2F\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt}+G\left(\frac{dv}{dt}\right)^2}dt\,.$$

$$s\left(t\right)=\int_a^t\sqrt{Edu^2+2Fdudv+Gdv^2}=\int_a^t\sqrt{I}\,.$$

Отже, $ds^2=d\overline{r}^2$, тобто $I=ds^2$ – перша квадратична форма поверхні є квадратом диференціала довжини кривої на поверхні.

Вправа 2.7. На поверхні $\overline{r}(u,v)=\left\{u^2+v^2,u^2-v^2,uv\right\}$ обчисліть довжину дуги лінії $v=2u$ між точками $(0,0)$ та $(1,2)$.

Розв'язання.

1. Знайдемо першу квадратичну форму поверхні:

$$\overline{r_u}=\{2u,2u,v\},$$

$$\overline{r_v}=\{2v,-2v,u\},\ I=\left(8u^2+v^2\right)du^2+2uvdudv+\left(8v^2+u^2\right)dv^2.$$

2. Запишемо параметричне рівняння лінії $\begin{cases}u=u,\\ v=2u\end{cases}$, $\begin{cases}du=du,\\ dv=2du\end{cases}$ і підставимо відповідні вирази в I.

3. За формулою (2.1): $s=\int\limits_0^1\sqrt{I}=\int\limits_0^1\sqrt{152}udu=\sqrt{38}$.

Відповідь. $\sqrt{38}$.

Задача 2. Визначення кута між кривими на поверхні. Розглянемо регулярну поверхню класу $C^n, n\geq 1$. $\overline{r_u},\overline{r_v}$ – вектори, паралельні дотичній площині, проведеній до поверхні у вибраній точці (рис.2.4).

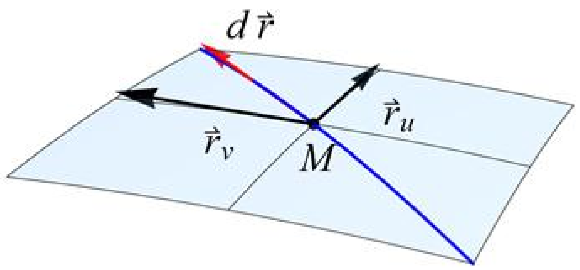

Рис. 2.4

Звернімо увагу на те, що $\overline{r_u},\overline{r_v}$ залежать тільки від вибору точки на поверхні. Вектор $d\overline{r}=\overline{r_u}du+\overline{r_v}dv$ є лінійною комбінацією векторів $\overline{r_u},\overline{r_v}$ і напрямлений по дотичній до кривої, заданої внутрішніми рівняннями $\begin{cases}u=u(t)\\ v=v(t)\end{cases}$. Припустимо, що $du\neq 0$ і запишемо вектор $d\overline{r}$ у вигляді: $d\overline{r}=\overline{r_u}du+\overline{r_v}dv=du\left(\overline{r_u}+\overline{r_v}\dfrac{dv}{du}\right)$. Очевидно, що тільки *du* не впливає на напрямок, оскільки будь-який вектор, колінеарний $d\overline{r}$, має такий самий напрямок. Отже, **напрямок на поверхні задається відношенням** $dv:du$**,** за умови $du\neq 0$**.**

Означення. Напрямком $du:dv$ на поверхні в точці М називається напрямок вектора $d\overline{r}$, а також вектора, йому протилежного.

Означення. Крива на поверхні має напрямок $du:dv$, якщо вектор $d\overline{r}=\overline{r}_u du+\overline{r}_v dv$ є дотичним до кривої.

Означення. Кутом між кривими на поверхні в точці їх перетину називається кут між напрямками цих кривих в даній точці.

Означення Кутом між напрямками $du:dv$ та $\delta u:\delta v$ називається кут між векторами $d\overline{r}=\overline{r}_u du+\overline{r}_v dv$ і $\delta\overline{r}=\overline{r}_u \delta u+\overline{r}_v \delta v$ в точці М.

Виведемо формулу для обчислення кута між напрямками (рис. 2.5). Використаємо відому формулу векторної алгебри для знаходження кута між векторами: $\cos\varphi=\dfrac{\overline{a}\cdot\overline{b}}{|\overline{a}||\overline{b}|}$.

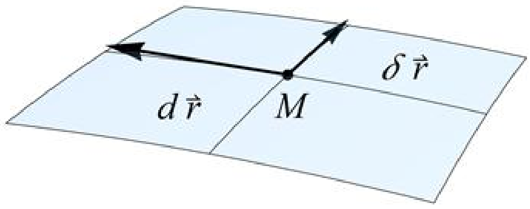

Рис.2.5

Отже, $\cos\varphi=\dfrac{d\overline{r}\cdot\delta\overline{r}}{|d\overline{r}||\delta\overline{r}|}=\dfrac{(\overline{r}_u du+\overline{r}_v dv)(\overline{r}_u\delta u+\overline{r}_v\delta v)}{\sqrt{(\overline{r}_u du+\overline{r}_v dv)^2}\sqrt{(\overline{r}_u\delta u+\overline{r}_v\delta v)^2}}$,

$$\cos(d\overline{r},\delta\overline{r})=\frac{Edu\delta u+F(du\delta v+dv\delta u)+Gdv\delta v}{\sqrt{I(du,dv)}\sqrt{I(\delta u,\delta v)}}. \qquad (2.2)$$

$Edu\delta u+F(du\delta v+dv\delta u)+Gdv\delta u=0$ – умова перпендикулярності двох напрямків.

Вправа 2.8. Знайдіть кут між координатними лініями на поверхні.

Розв'язання. Координатні лінії задаються внутрішніми рівняннями $\begin{cases}u=t\\ v=const\end{cases}$, $\begin{cases}u=const\\ v=t\end{cases}$. Звідки $\begin{cases}du=dt\\ dv=0\end{cases}$, $\begin{cases}\delta u=0\\ dv=dt\end{cases}$.

Скористаємося формулою (2.2): $\cos\varphi=\dfrac{Fdt\delta t}{\sqrt{Edt^2}\sqrt{G\delta t^2}}=\dfrac{F}{\sqrt{EG}}$.

Отже, умовою ортогональності координатних ліній на поверхні є $F=0$.

Вправа 2.9. Знайдіть кут між кривими $\gamma_1: v=1+u$ і $\gamma_2: v=3-u$ на поверхні $\overline{r}(u,v)=\{u\cos v, u\sin v, u^2\}$.

Розв'язання. Знайдемо точку перетину кривих, розв'язавши систему рівнянь: $\begin{cases} v = 1+u, \\ v = 3-u \end{cases}$, $M(u,v) = M(1,2)$.

1. Параметризуємо задані криві. Можна ввести нову змінну *t* як параметр, однак можна використовувати в ролі параметра змінні *u* чи *v*. Задамо криві внутрішніми рівняннями: $\gamma_1 : \begin{cases} u = t \\ v = 1+t \end{cases}$, звідси $\begin{cases} du = dt \\ dv = dt \end{cases}$.

$\gamma_2 : \begin{cases} u = t \\ v = 3-t \end{cases}$, $\begin{cases} \delta u = \delta t \\ \delta v = -\delta t \end{cases}$.

2. Знайдемо коефіцієнти першої квадратичної форми поверхні в точці *M*.

$\overline{r}_u = \{\cos v, \sin v, 2u\}$, $\overline{r}_v = \{-u\sin v, u\cos v, 0\}$.

$E = \overline{r}_u{}^2 = \cos^2 v + \sin^2 v + 4u^2 = 4u^2 + 1.$

$F = \overline{r}_u \cdot \overline{r}_v = -u\cos v\sin v + u\cos v\sin v = 0$.

$G = u^2\sin^2 v + u^2\cos^2 v = u^2$. В точці M(1,2) $E = 5$, $F = 0$ $G = 1$.

2. За формулою (2.2) маємо:

$$\cos\left(d\overline{r}, \delta\overline{r}\right) = \frac{Edu\delta u + F\left(du\delta v + dv\delta u\right) + Gdv\delta v}{\sqrt{I\left(du, dv\right)}\sqrt{I\left(\delta u, \delta v\right)}} =$$

$$= \frac{5dt\partial t - 1dt\partial t}{\sqrt{5dt^2 + 1dt^2}\sqrt{5dt^2 + 1dt^2}} = \frac{4dt\partial t}{6dt\partial t} = \frac{2}{3}.$$

Відповідь. 2/3.

Задача 3. Визначення площі поверхні. Нехай задано регулярну поверхню з параметризацією $\overline{r}(u,v)$ класу $C^n, n \geq 1$ в області *D*, $\overline{r}(u,v) \in C^n(D)$ Площу регулярної поверхні знаходять за формулою:

$$S = \iint\limits_D \sqrt{EG - F^2}\,dudv. \qquad (2.3)$$

Повне доведення цієї формули можна знайти в літературі [2, 3]. Наведемо тільки деякі міркування. Пригадаємо важливі відомості з векторної алгебри:

• $\left(\overline{a}, \overline{b}\right) = \left|\overline{a}\right|\left|\overline{b}\right|\cos\varphi$ – скалярний добуток векторів дорівнює добутку їх модулів на косинус кута між ними.

• $\overline{a}^2 = |\overline{a}|^2$ – скалярний квадрат вектора дорівнює квадрату його модуля.

• $\left|\overline{a}\times\overline{b}\right| = |\overline{a}|\left|\overline{b}\right|\sin\varphi$ – модуль векторного добутку дорівнює площі паралелограма, який побудовано на даних векторах як на сторонах.

• $\left(\overline{a}\times\overline{b}\right)^2 + \left(\overline{a},\overline{b}\right)^2 = \overline{a}^2\overline{b}^2$, $\sqrt{\left(\overline{a}\times\overline{b}\right)^2} = \sqrt{\overline{a}^2\overline{b}^2 - \left(\overline{a},\overline{b}\right)^2}$. (2.4)

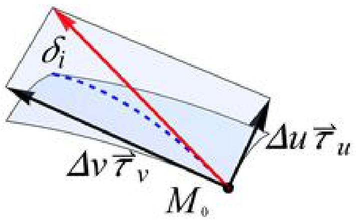

Рис. 2.6

Розіб'ємо поверхню на елементарні частини та розглянемо один з внутрішніх криволінійних паралелограмів (рис. 2.6). Його площа: $S_i = \left|\overline{r}_u\Delta u\times\overline{r}_v\Delta v\right| = \left|\overline{r}_u\times\overline{r}_v\right|\Delta u\Delta v$. Отже, додавши площі всіх елементарних частин та перейшовши до границі, отримаємо площу поверхні: $S = \lim\limits_{\max\delta_i\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} S_i = \iint\limits_D \sqrt{(\overline{r}_u\times\overline{r}_v)^2}\,dudv$. За формулою (2.4) отримаємо:

$$S = \iint\limits_D \sqrt{\overline{r}_u^{\,2}\cdot\overline{r}_v^{\,2} - \left(\overline{r}_u\cdot\overline{r}_v\right)^2}\,dudv = \iint\limits_D \sqrt{EG - F^2}\,dudv.$$

Підкреслимо геометричний зміст виразу $\sqrt{EG - F^2} = \left|\overline{r}_u\times\overline{r}_v\right|$ – площа паралелограма, що побудований на векторах $\overline{r}_u, \overline{r}_v$ як на сторонах.

Вправа 2.10. Обчисліть площу чотирикутника, що лежить на гелікоїді $\overline{r}\left(u,v\right) = \left\{2u\cos v, 2u\sin v, 4v\right\}$ та обмежений кривими $u = 0, u = 2, v = 0, v = 1.$

Розв'язання.

1. Зобразимо область $D\left(u,v\right)$, на яку проектується даний чотирикутник (рис. 2.7).

2. Знайдемо $\overline{r_u} = \{2\cos v, 2\sin v, 0\}$ $\overline{r_v} = \{-2u\sin v, 2u\cos v, 4\}$. Коефіцієнти першої квадратичної форми поверхні:

$$E = 4, F = 0, G = 4u^2 + 16.$$

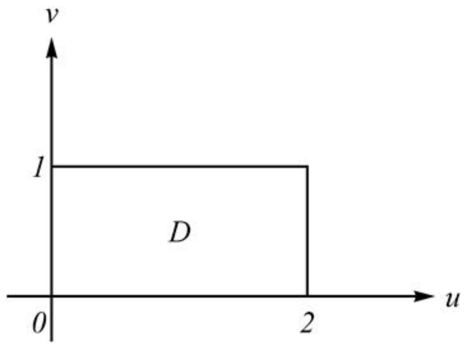

Рис. 2.7

3. За формулою (2.3):

$$S = \iint\limits_D \sqrt{EG - F^2}\,dudv = 4\iint\limits_D \sqrt{u^2 + 4}\,dudv$$

4. Обчислюємо подвійний інтеграл. Межі інтегрування: $0 \le u \le 2, 0 \le v \le 1$.

$S = 4\int\limits_0^1 dv \int\limits_0^2 \sqrt{1 + u^2}\,du$. Знайдемо первісну $\int \sqrt{1 + x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{1 + x^2}\right) + \ln\left|x + \sqrt{1 + x^2}\right| + C$, наприклад, за методом інтегрування частинами. Отримаємо: $S = 2\left(2\sqrt{5} + \ln\left(2 + \sqrt{5}\right)\right)$.

Відповідь: $S = 2\left(2\sqrt{5} + \ln\left(2 + \sqrt{5}\right)\right)$.

§8. Друга квадратична диференціальна форма поверхні. Нормальна кривина поверхні в даній точці та в даному напрямку. Теорема Меньє

Кривина кривої на поверхні. Друга квадратична диференціальна форма поверхні. Нормальна кривина поверхні в даній точці і в даному напрямку.

Перша квадратична форма поверхні дає змогу виконувати вимірювання на поверхні, але не дає можливості говорити про форму поверхні. Досліджуватиме далі локальну структуру поверхні в околі звичайної точки.

Нехай задано регулярну поверхню з параметризацією $\overline{r}(u,v)$ класу $C^n, n \ge 1$ в області *D*, $\overline{r}(u,v) \in C^n(D)$. Виберемо на поверхні неособливу точку M_0 і розглянемо в цій точці вектор $\overline{N} = \frac{\overline{r_u} \times \overline{r_v}}{\left|\overline{r_u} \times \overline{r_v}\right|}$ – одиничний вектор нормалі до поверхні.

Нагадаємо, що $\left|\overline{r}_u \times \overline{r}_v\right| = \sqrt{EG - F^2}$. З метою вивчення викривлення поверхні в довільній неособливій точці M_0 будемо досліджувати кривину різних ліній на поверхні, що проходять через дану точку. Розглянемо на поверхні деяку криву γ, яку задано внутрішніми

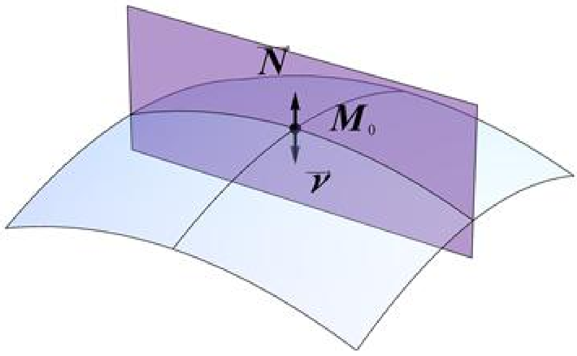

Рис.2.8

рівняннями $\begin{cases} u = u(s) \\ v = v(s) \end{cases}$, де $s \in [0; S]$. $\overline{r}\big(u(s), v(s)\big)$ – рівняння кривої на поверхні. Нехай $\overline{\nu}$ – одиничний вектор нормалі до даної кривої, φ – кут між $\overline{\nu}$ і $\overline{N}$, тоді $\cos\varphi = \dfrac{\overline{N} \cdot \overline{\nu}}{\left|\overline{N}\right|\left|\overline{\nu}\right|}$. Однак, зважаючи на те, що $\overline{\nu}$ і $\overline{N}$ – одиничні вектори, $\cos\varphi = \overline{N} \cdot \overline{\nu}$. Згідно з першою формулою Френе $k\overline{\nu} = \dot{\overline{\tau}}$, де k – кривина кривої γ. Помножимо скалярно ліву і праву частини цієї рівності на $\overline{N}$: $\overline{N} \cdot k\overline{\nu} = \overline{N} \cdot \dot{\overline{\tau}}$. Отримаємо: $k\cos\varphi = \overline{N} \cdot \dot{\overline{\tau}}$.

Знайдемо вираз для вектора $\dot{\overline{\tau}}$: $\overline{\tau} = \dot{\overline{r}} = \overline{r}_u \dot{u} + \overline{r}_v \dot{v}$,

$$\dot{\overline{\tau}} = \ddot{\overline{r}} = \left(\overline{r}_{uu}\dot{u} + \overline{r}_{uv}\dot{v}\right)\dot{u} + \overline{r}_u \ddot{u} + \left(\overline{r}_{vu}\dot{u} + \overline{r}_{vv}\dot{v}\right)\dot{v} + \overline{r}_v \ddot{v},$$

$$\dot{\overline{\tau}} = \overline{r}_{uu}\left(\frac{du}{ds}\right)^2 + 2\overline{r}_{uv}\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds} + \overline{r}_{vv}\left(\frac{dv}{ds}\right)^2 + \overline{r}_u \ddot{u} + \overline{r}_v \ddot{v}.$$

Знайдемо скалярний добуток $\overline{N} \cdot \dot{\overline{\tau}}$. Врахуємо, що $\overline{N} = \dfrac{\overline{r}_u \times \overline{r}_v}{\left|\overline{r}_u \times \overline{r}_v\right|}$, $\left|\overline{r}_u \times \overline{r}_v\right| = \sqrt{EG - F^2}$, $\overline{N} \perp \overline{r}_u, \overline{N} \perp \overline{r}_v$. Отримаємо:

$$\overline{N} \cdot \dot{\overline{\tau}} = \frac{1}{ds^2} \cdot \left(\frac{\left(\overline{r}_{uu}, \overline{r}_u, \overline{r}_v\right)}{\sqrt{EG - F^2}} du^2 + 2\frac{\left(\overline{r}_{uv}, \overline{r}_u, \overline{r}_v\right)}{\sqrt{EG - F^2}} dudv + \frac{\left(\overline{r}_{vv}, \overline{r}_u, \overline{r}_v\right)}{\sqrt{EG - F^2}} dv^2 \right)$$

Позначимо $\dfrac{\left(\overline{r}_{uu}, \overline{r}_u, \overline{r}_v\right)}{\sqrt{EG - F^2}} = L$, $\dfrac{\left(\overline{r}_{uv}, \overline{r}_u, \overline{r}_v\right)}{\sqrt{EG - F^2}} = M$, $\dfrac{\left(\overline{r}_{vv}, \overline{r}_u, \overline{r}_v\right)}{\sqrt{EG - F^2}} = N$, тоді вираз у дужках можна записати у вигляді:

$Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2$. Такий вираз називається другою квадратичною формою поверхні і позначається так: $II = \left(d^2\overline{r}, \overline{N}\right) = Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2$. Коефіцієнти другої квадратичної форми L, M, N так само, як і коефіцієнти першої квадратичної форми є функціями від (u, v).

Беручи до уваги всі попередні міркування, запишемо формулу, що пов'язує кривину кривої на поверхні з першою та другою квадратичними формами поверхні:

$$k\cos\varphi = \frac{II}{I}. \tag{2.5}$$

Обчислення довжин дуг, кутів між кривими на поверхні, площ областей фактично спиралось на можливість заміни в першому наближенні нескінченно малого елемента поверхні відповідним елементом дотичної площини. Друга квадратична форма – це міра відхилення поверхні від дотичної площини в околі даної точки. При знаходженні другої квадратичної форми поверхні враховуються нескінченно малі не тільки першого, а й другого порядків. Взагалі, другу квадратичну форму можна було б ввести, виходячи із задачі обчислення відстані точки поверхні до дотичної площини, проведені через близьку точку. Рекомендуємо самостійно розглянути цю задачу [2, с. 235] та зробити конспект.

Вправа 2.12. Знайдіть другу квадратичну форму поверхні, заданої явно $z = f(x, y)$.

Розв'язання. Параметризуємо поверхню: $\overline{r}(x, y) = \left\{x, y, f(x, y)\right\}$, тоді

$$\overline{r}_x = \left\{1, 0, f'_x\right\}, \ \overline{r}'_y = \left\{0, 1, f'_y\right\},$$

$$\overline{r}_{xx} = \left\{0, 0, f''_{xx}\right\}, \ \overline{r}_{xy} = \left\{0, 0, f''_{xy}\right\}, \ \overline{r}_{yy} = \left\{0, 0, f''_{yy}\right\},$$

$$E(x, y) = \overline{r}_x^{\,2} = 1 + f_x^{\,2}(x, y),$$

$$F(x, y) = \overline{r}_x \cdot \overline{r}_y = f_x(x, y) \cdot f_y(x, y),$$

$$G(x, y) = \overline{r}_y^{\,2} = 1 + f_y^{\,2}(x, y),$$

$$EG - F^2 = 1 + f_x^2 + f_y^2.$$

$$L=\frac{\left(\bar r_{xx},\bar r_x,\bar r_y\right)}{\sqrt{EG-F^2}}=\frac{1}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}\begin{vmatrix}0&0&f_{xx}\\1&0&f_x\\0&1&f_y\end{vmatrix}=\frac{f_{xx}}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}},$$

$$M=\frac{\left(\bar r_{xy},\bar r_x,\bar r_y\right)}{\sqrt{EG-F^2}}=\frac{1}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}\begin{vmatrix}0&0&f_{xy}\\1&0&f_x\\0&1&f_y\end{vmatrix}=\frac{f_{xy}}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}},$$

$$N=\frac{\left(\bar r_{yy},\bar r_x,\bar r_y\right)}{\sqrt{EG-F^2}}=\frac{1}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}\begin{vmatrix}0&0&f_{yy}\\1&0&f_x\\0&1&f_y\end{vmatrix}=\frac{f_{yy}}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}.$$

$$II=\frac{1}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}\left(f_{xx}dx^2+2f_{xy}dxdy+f_{yy}dy^2\right).$$

Звернімо увагу, що у випадку явного завдання функції, друга квадратична форма з точністю до множника являє собою сукупність членів другого порядку в розкладі функції $z=f\left(x,y\right)$ за формулою Тейлора.

Вправа 2.13. Показати, що за будь-якої параметризації площини її друга квадратична форма дорівнює нулю.

Розв'язання. Загальне рівняння площини запишемо у вигляді $z=ax+by+c$. Регулярна параметризація такої площини $\bar r\left(x,y\right)=\left\{x,y,ax+by+c\right\}$. $\bar r_x=\left\{1,0,a\right\}$, $\bar r'_y=\left\{0,1,b\right\}$, $\bar r_{xx}=\left\{0,0,0\right\}$, $\bar r_{xy}=\left\{0,0,0\right\}$, $\bar r_{yy}=\left\{0,0,0\right\}$. Отже, всі коефіцієнти другої квадратичної форми дорівнюють нулю, $L=M=N=0$. Твердження доведено.

Повернімося до формули (2.5):

$$k\cos\varphi=\frac{II}{I}=\frac{Ldu^2+2Mdudv+Ndv^2}{Edu^2+2Fdudv+Gdv^2}.$$

Із виразів du, dv хоча б один не дорівнює нулю, нехай $dv\neq 0$, тоді

$$k\cos\varphi = \frac{L\left(\frac{du}{dv}\right)^2 + 2M\frac{du}{dv} + N}{E\left(\frac{du}{dv}\right)^2 + 2F\frac{du}{dv} + Gdv^2}.$$

Цей вираз залежить тільки від координат точки M_0 поверхні, в якій обчислюються коефіцієнти першої та другої квадратичних форм та напрямку *du:dv* на поверхні, але не залежить від вибору кривої. Таким чином, довели **теорему Меньє:** *величина* $k\cos\angle\left(\bar{N},\bar{v}\right)$ ***є величиною сталою*** *для всіх кривих на поверхні, що проходять через дану точку в даному напрямку*.

Згідно з теоремою Меньє величина $k\cos\angle\left(\bar{N},\bar{v}\right)$ є характеристикою не кривої на поверхні, а самої поверхні, тому називається **нормальною кривиною поверхні в даній точці та в даному напрямку.** Нормальну кривину поверхні в даній точці та в даному напрямку знаходиться за формулою:

$$k_n = k\cos\left(\bar{N},\bar{v}\right) = \frac{II}{I}. \tag{2.6}$$

Зрозуміло, що результатом перетину поверхні з площиною буде деяка крива. Переріз поверхні площиною, що проходить через дану точку паралельно векторам $\bar{N}$ і $\bar{\tau}$, називається **нормальним перерізом** поверхні в напрямку вектора $\bar{\tau}$ (рис. 2.9).

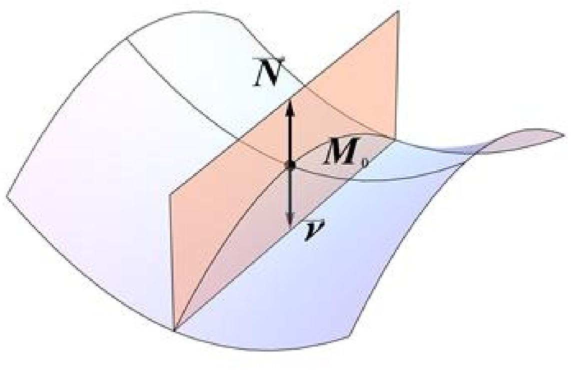

Рис. 2.9

З теореми Меньє випливає, що нормальна кривина поверхні в даній точці і в даному напрямку з точністю до знака збігається з кривиною нормального перерізу k_0 в тій самій точці та в тому ж напрямку. Дійсно, за теоремою Меньє

$$k_n = k_0\cos\left(\bar{N},\bar{v}_0\right) = \\ = k_0\cos\left(\bar{N},\pm\bar{N}\right) = \pm k_0.$$

Таким чином, кривина довільного перерізу достатньо просто пов’язана з кривиною нормального перерізу. Просту наочну ілюстрацію теореми Меньє можна виконати на сфері. Розгляньте її самостійно [2, с.244].

Вправа 2.14. Знайдіть нормальну кривину параболоїда $z=\frac{1}{2}\left(ax^2+by^2\right)$ в точці $M\left(0,0\right)$ в напрямку $dx:dy=2:1$.

Розв'язання. За формулою (2.6) $k_n=\frac{II}{I}$.

1. Запишемо рівняння поверхні у вигляді:
$\overline{r}\left(x,y\right)=\left\{x,y,\frac{1}{2}\left(ax^2+by^2\right)\right\}$.

2. $\overline{r}'_x=\left\{1,0,ax\right\}$, $\overline{r}'_y=\left\{0,1,by\right\}$. У точці $M\left(0,0\right)$: $\overline{r}'_x\left(0,0\right)=\left\{1,0,0\right\}$, $\overline{r}'_y\left(0,0\right)=\left\{0,1,0\right\}$.

3. Знайдемо коефіцієнти першої квадратичної форми поверхні в даній точці: $E=\overline{r}'^2_x=1$, $F=\overline{r}'_x\cdot\overline{r}'_y=0$, $G=\overline{r}'^2_y=1$, $EG-F^2=1$.

4. $\overline{r}''_{xx}=\left\{0,0,a\right\}$, $\overline{r}''_{xy}=\left\{0,0,0\right\}$, $\overline{r}''_{yy}=\left\{0,0,b\right\}$.

5. Знайдемо коефіцієнти другої квадратичної форми поверхні в даній точці:

$$L=\frac{\left(\overline{r}_{xx},\overline{r}_x,\overline{r}_y\right)}{\sqrt{EG-F^2}}=\begin{vmatrix}0&0&a\\1&0&0\\0&1&0\end{vmatrix}=a,\ M=0,$$

$$N=\frac{\left(\overline{r}_{yy},\overline{r}_x,\overline{r}_y\right)}{\sqrt{EG-F^2}}=\begin{vmatrix}0&0&b\\1&0&0\\0&1&0\end{vmatrix}=b.$$

6. $k_n=\frac{II}{I}=\frac{adx^2+bdy^2}{dx^2+dy^2}=\frac{a\left(\frac{dx}{dy}\right)^2+b}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2+1}$. Оскільки $dx:dy=2:1$, то $k_n=\frac{4a+b}{5}$.

Відповідь. $k_n=\frac{4a+b}{5}$.

§9. Класифікація точок поверхні

Стичний параболоїд поверхні. Індикатриса Дюпена. Класифікація точок поверхні. Асимптотичні напрямки та асимптотичні лінії на поверхні. Спряжені напрямки та спряжені лінії на поверхні.

Будь-яка регулярна поверхня класу $C^n, n \geq 2$ в нескінченно малому околі будь-якої своєї точки може бути задана рівнянням виду: $z = f\left(x, y\right)$, де $f\left(0,0\right) = f_x\left(0,0\right) = f_y\left(0,0\right) = 0$. За формулою Тейлора отримаємо:

$$z = f\left(0,0\right) + \left(f_x\left(0,0\right)x + f_y\left(0,0\right)y\right) +$$

$$+\frac{1}{2}\left(f_{xx}\left(0,0\right)x^2 + f_{yy}\left(0,0\right)y^2 + 2f_{xy}\left(0,0\right)xy\right) + \ldots$$

Форму регулярної поверхні в малому околі довільної точки за наближення першого порядку описують дотичною площиною, а за наближення другого порядку – стичним параболоїдом. Поверхню, яку задають рівнянням

$$f_{xx}\left(0,0\right)x^2 + f_{yy}\left(0,0\right)y^2 + 2f_{xy}\left(0,0\right)xy - 2z = 0 \quad (2.7)$$

називають **стичним параболоїдом** даної поверхні в точці (0,0). Стичний параболоїд – або поверхня другого порядку, або площина. Якщо знайти відповідні інваріанти та виконати класифікацію поверхонь, що задаються рівнянням (2.7), отримаємо таке:

- якщо $f_{xx}\left(0,0\right) f_{yy}\left(0,0\right) - f_{xy}^2\left(0,0\right) > 0$, то стичний параболоїд – еліптичний параболоїд;

- якщо $f_{xx}\left(0,0\right) f_{yy}\left(0,0\right) - f_{xy}^2\left(0,0\right) < 0$, то стичний параболоїд – гіперболічний параболоїд;

- якщо $f_{xx}\left(0,0\right) f_{yy}\left(0,0\right) - f_{xy}^2\left(0,0\right) = 0$, але $f_{xx}^2\left(0,0\right) + f_{yy}^2\left(0,0\right) + f_{xy}^2\left(0,0\right) \neq 0$ (тобто частинні похідні другого порядку одночасно в нуль не обертаються), то стичний параболоїд в даній точці – параболічний циліндр;

- якщо $f_{xx}(0,0)\,f_{yy}(0,0)-f_{xy}^2(0,0)=0$ і $f_{xx}^2(0,0)+f_{yy}^2(0,0)+f_{xy}^2(0,0)=0$, то стичний параболоїд поверхні в даній точці – площина, дотична до поверхні.

Залежно від виду стичного параболоїда поверхні в даній точці розрізняють вид точок поверхні: точка поверхні називається **еліптичною**, якщо стичний параболоїд еліптичний; точка поверхні називається **гіперболічною**, якщо стичний параболоїд гіперболічний; точку поверхні називають **параболічною**, якщо стичний параболоїд параболічний циліндр; точка поверхні називається точкою сплощення, якщо стичний параболоїд – дотична площина.

Врахувавши результати **Вправи 2.12,** а саме вираження коефіцієнтів L,M,N другої квадратичної форми поверхні $z=f(x,y)$ в даній точці отримаємо остаточну **класифікацію** точок поверхні:

- $LN-M^2>0$ – точка еліптична;
- $LN-M^2<0$ – точка гіперболічна;
- $LN-M^2=0, L^2+M^2+N^2\neq 0$ – точка параболічна;
- $LN-M^2=0, L^2+M^2+N^2=0$ – точка сплощення.

Вправа 2.14. Визначити тип точок на сфері $\overline{r}(u,v)=\{a\cos u\cos v; a\cos u\sin v; a\sin u\}$.

Розв'язання. Знаходимо похідні:

$\overline{r}_u=\{-a\sin u\cos v;-a\sin u\sin v;a\cos u\}$

$\overline{r}_v=\{-a\cos u\sin v;-a\cos u\cos v;0\}$,

$\overline{r}_{uu}=\{-a\cos u\cos v;-a\cos u\sin v;-a\sin u\}$,

$\overline{r}_{uv}=\{a\sin u\sin v;-a\sin u\cos v;0\}$,

$\overline{r}_{vv}=\{-a\cos u\cos v;-a\cos u\sin v;0\}$.

Далі обчислюємо коефіцієнти першої та другої квадратичних форм: $E=a^2,F=0,G=a^2\cos^2 u$, $\sqrt{EG-F^2}=a^2\cos u$, $L=a$, $M=0$, $N=a\cos^2 u$, $LN-M^2=a^2\cos^2 u>0$.

Оскільки $LN - M^2 > 0$, то всі точки поверхні є еліптичними. (Пізніше дізнаємось, що в даному випадку всі точки є точками округлення (кульовими точками)).

Перейдемо знову до вивчення нормальних перерізів поверхні, що проходять через дану точку. Зрозуміло, що в кожній точці поверхні можна побудувати безліч нормальних перерізів. Для того щоб з'ясувати, як змінюватиметься нормальна кривина поверхні внаслідок переходу від одного перерізу до іншого, скористаємось графічним методом, запропонованим Дюпеном.

Візьмемо на поверхні деяку точку M_0 і будемо відкладати від неї на дотичній до кожного нормального перерізу відрізок довжиною $1\big/\sqrt{|k_n|}$, k_n – нормальна кривина поверхні в даній точці. Геометричне місце кінців цих відрізків є деяка плоска крива, розміщена в дотичній площині поверхні. Така крива називається **індикатрисою Дюпена** (*від фр. Indicatrice – вказівна – лінія або поверхня, що унаочнює будь-яку властивість досліджуваного об'єкта. Індикатриса Дюпена унаочнює уявлення про характер викривлення поверхні в даній точці.* Рівняння індикатриси Дюпена в даній точці регулярної поверхні $\overline{r}(u,v)$в декартовій прямокутній системі координат має такий вигляд: $\left|Lx^2 + 2Mxy + Ny^2\right| = 1$, де L, M, N – коефіцієнти другої квадратичної форми поверхні, обчислені в даній точці [2; 3]. Якщо $Lx^2 + 2Mxy + Ny^2 = \pm 1$, то матимемо загальне рівняння лінії другого порядку. Таким чином, індикатриса кривини – пара кривих другого порядку, одна з яких може бути уявною.

Вправа 2.15. Для поверхні $z = 2x^2 + \dfrac{9}{2}y^2$ знайти на початку координат рівняння індикатриси Дюпена.

Розв'язання. Обчислюємо похідні $z'_x = 4x$, $z'_y = 9y$, $z''_{xx} = 4$, $z''_{xy} = 0$, $z''_{yy} = 9$ та коефіцієнти другої квадратичної форми в початку координат $L = 4, M = 0, N = 9$. Отримані значення підставляємо в рівняння індикатриси Дюпена. $Lx^2 + 2Mxy + Ny^2 = \pm 1$. Отримаємо рівняння еліпса: $4x^2 + 9y^2 = 1$.

Відповідь. $4x^2 + 9y^2 = 1$.

Відповідно до класифікації ліній другого порядку [6] в еліптичних точках поверхні індикатриса кривини – еліпс, в гіперболічній точці – пара спряжених гіпербол, в параболічній – пара паралельних прямих. В точках сплощення, а саме в точках, у яких $LN - M^2 = 0, L = M = N = 0$ – індикатриса Дюпена невизначена. На рис.2.10 зображено стичні параболоїди та індикатриси Дюпена в гіперболічній, еліптичній та параболічній точці відповідно.

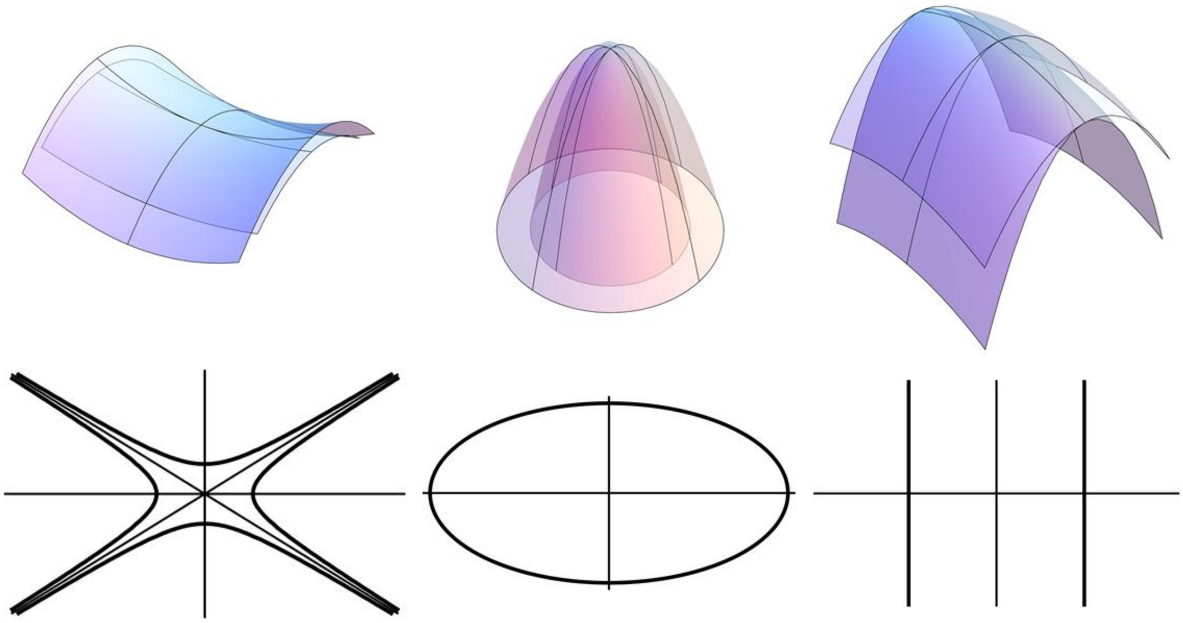

Рис.2.10

Розглянемо **асимптотичні лінії та асимптотичні напрямки на поверхні.** Нехай задано регулярну поверхню класу $C^n, n \geq 2$. Напрямок $du : dv$ на поверхні в даній точці називається **асимптотичним,** якщо він є асимптотичним напрямком індикатриси Дюпена в цій точці.

З курсу аналітичної геометрії відомо, що рівняння асимптотичних напрямків кривої другого порядку

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

має вигляд $a_{11}m^2 + 2a_{12}mn + a_{22}n^2 = 0$. Нагадаємо. що еліпс не має асимптотичних напрямків, гіпербола має два асимптотичні напрямки, пара паралельних прямих – один [6].

Оскільки $Lx^2 + 2Mxy + Ny^2 = \pm 1$ – рівняння індикатриси Дюпена для поверхні з даними коефіцієнтами другої квадратичної форми, то рівняння асимптотичних напрямків $du:dv$ на даній поверхні матимуть вигляд:

$$Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2 = 0. \qquad (2.8)$$

Якщо $LN - M^2 > 0$, то асимптотичних напрямків немає (**еліптична** точка). Якщо $LN - M^2 < 0$, то є два асимптотичних напрямку (**гіперболічна** точка). Якщо $LN - M^2 = 0$, $L^2 + M^2 + N^2 \neq 0$ то існує один асимптотичний напрямок (**параболічна** точка).

Згідно з формулою (2.6) нормальна кривина поверхні в даній точці та в даному напрямку обчислюється за формулою $k_n = \dfrac{II}{I}$, отже напрямок $du:dv$ на поверхні буде асимптотичним, тоді і тільки тоді, коли $k_n = 0$ в цьому напрямку.

Лінія на поверхні називається **асимптотичною**, якщо її напрямок в кожній точці є асимптотичним. Рівняння асимптотичних ліній має вигляд:

$$Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2 = 0. \qquad (2.9)$$

Звернемо увагу на той факт, що рівняння асимптотичних ліній (2.9) за формою збігається з рівнянням асимптотичних напрямків (2.8), однак рівняння асимптотичних ліній є диференціальним рівнянням, а рівняння асимптотичних напрямків – алгебраїчним.

Вправа 2.16. Знайдіть асимптотичні напрямки та асимптотичні лінії катеноїда $\overline{r}(u,v) = \{chu\cos v, chu\sin v, u\}$.

Розв'язання. Для складання відповідних рівнянь знайдемо коефіцієнти другої квадратичної форми поверхні в довільній точці.

$\overline{r}_u = \{shu\cos v, shu\sin v, 1\}$, $\overline{r}_v = \{-chu\sin v, chu\cos v, 0\}$,

$\overline{r}_{uu} = \{chu\cos v, chu\sin v, 0\}$, $\overline{r}_{uv} = \{-shu\sin v, shu\cos v, 0\}$,

$\overline{r}_{vv} = \{-chu\cos v, -chu\sin v, 0\}$,

$$L = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \begin{vmatrix} chu\cos v & chu\sin v & 0 \\ shu\cos v & shu\sin v & 1 \\ -chu\sin v & chu\cos v & 0 \end{vmatrix} = \frac{-ch^2u}{\sqrt{EG - F^2}},$$

$$M = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \begin{vmatrix} -shu\sin v & shu\cos v & 0 \\ shu\cos v & shu\cos v & 1 \\ -chu\sin v & chu\cos v & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

$$N = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \begin{vmatrix} -chu\cos v & -chu\sin v & 0 \\ shu\cos v & shu\cos v & 1 \\ -chu\sin v & chu\cos v & 0 \end{vmatrix} = \frac{ch^2 u}{\sqrt{EG - F^2}}.$$

Зауважимо, що визначати коефіцієнти першої квадратичної форми для виконання цього завдання не обов'язково.

Оскільки в будь-якій точці поверхні $LN - M^2 < 0$, то в кожній з них є два асимптотичних напрямки. Підставимо значення коефіцієнтів в рівняння $Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2 = 0$ та отримаємо $\frac{-ch^2 u}{\sqrt{EG - F^2}} du^2 + \frac{ch^2 u}{\sqrt{EG - F^2}} dv^2 = 0$. Оскільки $\frac{ch^2 u}{\sqrt{EG - F^2}} \neq 0$ рівняння асимптотичних напрямків матиме вигляд: $du^2 - dv^2 = 0$. Розглядаючи його як алгебраїчне відносно $\frac{du}{dv}\left(dv \neq 0\right)$ (пригадайте, що називається напрямком на поверхні), отримаємо $\left(\frac{du}{dv}\right)^2 = 1,$ $\frac{du}{dv} = \pm 1.$

Диференціальне рівняння $du^2 - dv^2 = 0$ розбиваємо на два $du = dv$ або $du = -dv$. Інтегруючи кожне з них, отримаємо дві сім'ї асимптотичних ліній на катеноїді $u = v + C_1$ та $u = -v + C_2$, де C_1 та C_2 – довільні сталі.

Відповідь. $\frac{du}{dv} = \pm 1, u = v + C_1, u = -v + C_2,\ C_1, C_2 \in R.$

Асимптотичні лінії на поверхні мають важливу геометричну властивість: у кожній точці асимптотичної лінії, що не є точкою розпрямлення, головна нормаль асимптотичної лінії ортогональна нормалі до поверхні.

Спряжені напрямки. Спряжена сітка на поверхні. Нехай $P(u;v)$ – довільна точка поверхні, а $du:dv$, $\partial u:\partial v$ – два напрямки в цій точці на поверхні.

Означення. Напрямки $du:dv$ і $\partial u:\partial v$ називаються спряженими, якщо прямі, що їх містять є спряженими діаметрами індикатриси Дюпена в даній точці.

Для того, щоб напрямки $du:dv$, $\partial u:\partial v$ були спряженими, необхідно і достатньо, щоб була дотримана умова: $Ldu\partial u + M\left(du\partial v + dv\partial u\right) + Ndv\partial v = 0$.

Нехай на поверхні задано два сімейства ліній, які утворюють сітку. Сітка ліній утворена цими сімействами ліній називається спряженою сіткою, якщо лінії сітки різних сімейств у кожній точці мають спряжені напрямки. Якщо координатна сітка є спряженою сіткою, то коефіцієнт *M* другої квадратичної форми дорівнює нулю. Дійсно, записавши умову спряженості для напрямків $0:dv$ $(u = const)$ та $\partial u:0$ $(v = const)$, отримаємо $Mdv\partial u = 0$, а, оскільки $dv \neq 0, \partial u \neq 0$, то $M = 0$.

Вправа 2.17. Знайдіть лінії, спряжені сімейству ліній $u + v = C$ на косому гелікоїді $\overline{r}(u,v) = \{u\cos v, u\sin v, u + v\}$. (Гелікоїдом загального вигляду називається поверхня, утворена деякою лінією, що обертається навколо осі й одночасно поступально рухається в напрямку цієї осі, причому швидкості цих рухів пропорційні).

Розв'язання. Знаходимо коефіцієнти першої та другої квадратичних форм поверхні:

$$E = 2, F = 1, G = 1 + u^2, \sqrt{EG - F^2} = \sqrt{1 + 2u^2}.$$

$$L = 0, M = -\frac{1}{\sqrt{1 + 2u^2}}, N = \frac{u^2}{\sqrt{1 + 2u^2}}.$$

Підставівши отримані значення в умову спряженості напрямків, отримаємо: $-\frac{1}{\sqrt{1+2u^2}}\left(du\partial v + dv\partial u\right) + \frac{u^2}{\sqrt{1+2u^2}}dv\partial v = 0$, або $u^2 dv\partial v - \left(du\partial v + dv\partial u\right) = 0$. Тепер, відповідно до напрямку $\partial u = -\partial v$

сімейства ліній $u+v=C$ отримаємо після спрощень диференціальне рівняння $dv=\frac{du}{1+u^2}$. Звідки, інтегруючи, отримаємо $v=arctgu+C_2$.

Відповідь. $v=arctgu+C_2$.

§10. Головні напрямки та головні кривини поверхні

Головні напрямки та головні кривини. Формула Ейлера. Головні напрямки на поверхні як екстремальні значення нормальної кривини. Лінії кривини поверхні. Гаусова (повна) та середня кривини поверхні. Зв'язок Гаусової кривини з типом точок на поверхні.

Продовжимо вивчення нормальних перерізів регулярної поверхні, що проходять через дану точку. Серед них важливу роль в характеристиці поверхні в околі даної точки відіграють головні кривини. Напрямок $(du:dv)$ на поверхні називається **головним напрямком**, якщо він є головним напрямком відносно індикатриси Дюпена в цій точці. Як відомо, головні напрямки кривої другого порядку збігаються з напрямками її осей. Будь-яка лінія другого порядку, яка не є колом, має два і тільки два головних напрямки. Для кола будь-який напрямок є головним. Точка поверхні, в якій індикатриса Дюпена є колом, називається **омбілічною** (точкою округлення). Для цього вираз $1/\sqrt{|k_n|}$ має бути сталим, тобто нормальна кривина поверхні в цій точці має бути сталою. Така властивість характерна для точок сфери. Нормальні кривини поверхні, відповідні головним напрямкам в даній точці, називаються **головними кривинами** поверхні в цій точці. В неомбілічній точці головні кривини є екстремальними значеннями нормальної кривини. Визначимо умови, за яких напрямок $du:dv$ на поверхні буде головним. Скористаємось формулою (2.5):

$$k_n=\frac{II}{I}=\frac{Ldu^2+2Mdudv+Ndv^2}{Edu^2+2Fdudv+Gdv^2}.$$

Права частина рівності є функцією (du,dv) і для головних кривин має екстремальні значення, тобто похідна за цими змінними дорівнює нулю (необхідна умова екстремуму функції двох змінних). Продиференціюємо праву частину рівності за du і dv:

$$\frac{\left(2Ldu+2Mdv\right)\cdot I-\left(2Edu+2Fdv\right)\cdot II}{I^2}=0,$$

$$\frac{\left(2Mdu+2Ndv\right)\cdot I-\left(2Fdu+2Gdv\right)\cdot II}{I^2}=0.$$

Звідси

$$\frac{Ldu+Mdv}{I}=\frac{\left(Edu+Fdv\right)\cdot II}{I^2},\ \frac{Mdu+Ndv}{I}=\frac{\left(Fdu+Gdv\right)\cdot II}{I^2},$$

тому

$$\frac{Ldu+Mdv}{Edu+Fdv}=\frac{II}{I}=k_n,\ \frac{Mdu+Ndv}{Fdu+Gdv}=\frac{II}{I}=k_n. \qquad (2.\ 10)$$

Отже, нормальну кривину поверхні в головних напрямках знаходить за формулами (2.10). Таким чином, отримаємо **диференціальне рівняння** для визначення головних напрямків:

$$\frac{Ldu+Mdv}{Edu+Fdv}-\frac{Mdu+Ndv}{Fdu+Gdv}=0.$$

Це рівняння можна записати в більш зручній формі (перевірте самостійно):

$$\begin{vmatrix} dv^2 & -dudv & du^2 \\ E & F & G \\ L & M & N \end{vmatrix}=0. \qquad (2.11)$$

Лінія на поверхні називається **лінією кривини,** якщо її напрямок в кожній точці є головним. Диференціальне рівняння (2.11) називається диференціальним рівнянням ліній кривини.

Виведемо формули для визначення головних кривин. Перепишемо рівності (2.10) у вигляді:

$$\begin{cases} Ldu+Mdv-k_n\left(Edu+Fdv\right)=0; \\ Mdu+Ndv-k_n\left(Fdu+Gdv\right)=0. \end{cases}$$

Перегрупувавши, отримаємо:

$$\begin{cases} \left(L-k_nE\right)du+\left(M-k_nF\right)dv=0; \\ \left(M-k_nF\right)du+\left(N-k_nG\right)dv=0. \end{cases}$$

Виключивши *du* та *dv,* отримаємо рівняння для знаходження **головних кривин:**

$$\begin{vmatrix} L-k_nE & M-k_nF \\ M-k_nF & N-k_nG \end{vmatrix}=0. \qquad (2.12)$$

Отже, головні кривини є коренями квадратного рівняння

$$k_n^{\ 2}-2\frac{EN+GL-2FM}{2\left(EG-F^2\right)}k_n+\frac{LN-M^2}{EG-F^2}=0.$$

За теоремою Вієта, якщо числа k_1 і k_2 є коренями зведеного квадратного рівняння, то їх добуток дорівнює вільному члену $k_1k_2=\frac{LN-M^2}{EG-F^2}$, а сума – другому коефіцієнту, взятому з протилежним знаком $\frac{k_1+k_2}{2}=\frac{EN+GL-2FM}{2\left(EG-F^2\right)}$. Величина

$$k_1k_2=\frac{LN-M^2}{EG-F^2}=K. \qquad (2.13)$$

називається гаусовою (повною) кривиною, а величина

$$\frac{k_1+k_2}{2}=\frac{EN+GL-2FM}{2\left(EG-F^2\right)}=H. \qquad (2.14)$$

– середньою кривиною поверхні.

Відповідно до введених позначень рівняння для визначення головних кривини можна записати так: $k_n^2-2Hk_n+K=0$.

Розглянемо вираз $K=\frac{LN-M^2}{EG-F^2}$. Оскільки $EG-F^2>0$, то знак гаусової кривини збігається зі знаком виразу $LN-M^2$ і тому можна встановлювати тип точок на поверхні за знаком Гаусової кривини: $K>0$ – точки еліптичні, $K<0$ – гіперболічні, $K=0, H\neq 0$ – параболічні, $K=0, H=0$ – точки сплощення. Глибшого розуміння того, як знаки головних кривин впливають на форму поверхні в околі обраної точки, можна досягти прочитавши літературу [2]. Зв'язок між головними кривинами поверхні та нормальною кривиною в довільному напрямку виражає **формула Ейлера:** $k_n=k_1\cos^2\varphi+k_2\sin^2\varphi$, де φ – кут між обраним напрямком та першим головним напрямком.

Вправа 2.18. Знайдіть головні кривини поверхні $z = a\left(x^2 + y^2\right)$ в точці (0,0,0).

Розв'язання. 1. Запишемо рівняння поверхні у такому вигляді: $\overline{r}\left(x, y\right) = \left\{x, y, a\left(x^2 + y^2\right)\right\}$.

2. Знайдемо коефіцієнти першої та другої квадратичних форм поверхні в даній точці: $\overline{r}'_x = \left\{1, 0, 2ax\right\}$, $\overline{r}'_y = \left\{0, 1, 2ay\right\}$.

У точці $M\left(0,0,0\right)$: $\overline{r}'_x\left(0,0\right) = \left\{1,0,0\right\}$, $\overline{r}'_y\left(0,0\right) = \left\{0,1,0\right\}$. $E = \overline{r}'^2_x = 1$, $F = \overline{r}'_x \cdot \overline{r}'_y = 0$, $G = \overline{r}'^2_y = 1$. $EG - F^2 = 1$, $\overline{r}''_{xx} = \left\{0, 0, 2a\right\}$, $\overline{r}''_{xy} = \left\{0,0,0\right\}$, $\overline{r}''_{yy} = \left\{0, 0, 2a\right\}$.

$$L = \frac{\left(\overline{r}_{xx}, \overline{r}_x, \overline{r}_y\right)}{\sqrt{EG - F^2}} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2a \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2a,\ M = 0,\ N = \frac{\left(\overline{r}_{yy}, \overline{r}_x, \overline{r}_y\right)}{\sqrt{EG - F^2}} = 2a.$$

3. Запишемо рівняння для знаходження головних кривин (2.12): $\begin{vmatrix} L - k_n E & M - k_n F \\ M - k_n F & N - k_n G \end{vmatrix} = 0$, тобто $\begin{vmatrix} 2a - k_n & 0 \\ 0 & 2a - k_n \end{vmatrix} = 0$. Звідси отримаємо квадратне рівняння $\left(2a - k_n\right)^2 = 0$, коренями якого є головні кривини даної поверхні в даній точці $k_1 = k_2 = 2a$.

Відповідь. $k_1 = k_2 = 2a$.

Вправа 2.19. Знайдіть середню та гаусову кривини поверхні $z = axy$, $a \neq 0$ в точці $x = y = 0$. Визначте тип точок на поверхні.

Розв'язання.

1. Запишемо рівняння поверхні у вигляді: $\overline{r}\left(x, y\right) = \left\{x, y, axy\right\}$.

2. Знайдемо коефіцієнти першої та другої квадратичних форм поверхні в даній точці:

$\overline{r}_x\left(x, y\right) = \left\{1, 0, ay\right\}$, $\overline{r}_x\left(0,0\right) = \left\{1,0,0\right\}$,

$\overline{r}_y\left(x, y\right) = \left\{0, 1, ax\right\}$, $\overline{r}_y\left(0,0\right) = \left\{0,1,0\right\}$. $E = 1, F = 0, G = 1$.

$\overline{r}_{xx}\left(x, y\right) = \overline{r}_{yy}\left(x, y\right) = \left\{0,0,0\right\}$, $\overline{r}_{yx}\left(x, y\right) = \left\{0, 0, a\right\}$,

$L = 0, M = a, N = 0$.

3. За формулами (2.13)-(2.14) знаходимо середню та гаусову кривини поверхні в даній точці:

$$H = 0, K = -a^2,\ K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = -a^2 < 0$$

в усіх точках поверхні, тому всі точки його гіперболічні.

Відповідь. $H = 0, K = -a^2$.

§11. Лінійчаті поверхні та поверхні, що розгортаються. Поверхні обертання та їх дослідження

Лінійчаті поверхні та їх рівняння. Поверхні, що розгортаються та їх рівняння. Поверхні перенесення. Поверхні обертання та їх дослідження.

Лінійчаті поверхні. Означення. Лінійчата поверхня – поверхня, утворена рухом прямої лінії.

Приклад: циліндр, конус, однопоржнинний гіперболоїд, гіперболічний параболоїд, гелікоїд та інші.

Прямі, що належать до лінійчатої поверхні, називаються прямолінійними твірними. А кожна крива, що перетинає всі прямолінійні твірні, називається напрямною.

Оскільки через кожну точку лінійчатої поверхні проходить прямолінійна твірна, то в кожній точці лінійчатої поверхні є напрямок, в якому нормальна кривина поверхні дорівнює нулю. Звідси випливає, що на лінійчатій поверхні не може бути еліптичних точок. Гаусова кривина лінійчатої поверхні від’ємна або дорівнює нулю.

Нехай рівняння напрямної має вигляд: $\overline{a} = \overline{a}(u)$, а одиничний вектор твірної, що проходить через точку, яка відповідає даному значенню параметра u визначається залежністю $\overline{b} = \overline{b}(u)$, тоді рівняння лінійчатої поверхні має вигляд: $\overline{r}(u,v) = \overline{a}(u) + v\overline{b}(u)$, де v – параметр, який виражає відстань від точки напрямної до довільної точки твірної.

Розглянемо клас лінійчатих поверхонь, які називаються поверхнями, що розгортаються. Поверхня називається поверхнею, що розгортається, якщо вона локально ізометрична площині. Така назва поверхні пов’язана з тим, що кожну достатньо малу частину поверхні можна деформувати вигинанням в частину площини («розгорнути» на площину). Для того, щоб поверхня була поверхнею, що розгортається, необхідно і достатньо, щоб в неї гаусова кривина K була всюди рівною нулю. Відомо три типи поверхонь, що розгортаються: поверхня, утворена дотичними до просторової кривої; конічні поверхні; циліндричні поверхні.

Вправа 2.19. Напишіть параметричне рівняння циліндричної поверхні, твірні якої паралельні осі Oz, а напрямна задана рівнянням: $x = f(u), y = g(u), z = 0$.

Розв'язання: В цьому випадку

$\overline{a}(u) = \{f(u), g(u), 0\}$, $\overline{b}(u) = \{0,0,1\}$. Тому шукане рівняння поверхні буде: $\overline{r}(u,v) = \overline{a}(u) + v\overline{b}(u) = \{f(u), g(u), v\}$.

Вправа 2.20. Написати рівняння конуса з вершиною в точці $M(a,b,c)$ і напрямною лінією $\gamma : x = x(u), y = y(u), z = z(u)$.

Розв'язання: У цьому випадку рівняння напрямної $\overline{a} = \overline{a}(u)$ має вигляд

$\overline{a} = \overline{a}(u) = \{x(u), y(u), z(u)\}$.

Нехай P – довільна точка поверхні. Тоді очевидно (рис. 2.11), що

$\overline{r}(u,v) = \overline{OP} = \overline{OM} + v\overline{MT}$,

$\overline{MT} = \overline{OT} - \overline{OM} = \overline{a}(u) - \overline{OM}$,

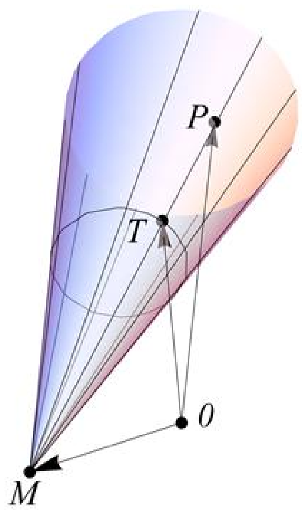

Рис. 2.11.

$$\overline{r}(u,v) = \overline{OM} + v\left(\overline{a}(u) - \overline{OM}\right) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + v\begin{pmatrix} x(u)-a \\ y(u)-b \\ z(u)-c \end{pmatrix}.$$

Отже, шукане рівняння поверхні:

$$\overline{r}(u,v) = \left\{a + v\left(x(u)-a\right), b + v\left(y(u)-b\right), c + v\left(z(u)-c\right)\right\}.$$

Поверхні перенесення. Означення. Поверхнею перенесення називається поверхня, утворена поступальним переміщенням однієї кривої вздовж іншої кривої. Щоб отримати рівняння поверхні перенесення, припустимо, що радіус-вектор точки її кривої задано рівнянням $\overline{a}=\overline{a}(u)$, а вектор перенесення кожної точки цієї кривої – рівнянням $\overline{b}=\overline{b}(v)$.

У такому випадку радіус-вектор довільної точки поверхні матиме вигляд: $\overline{r}(u,v)=\overline{a}(u)+\overline{b}(v)$. Очевидно, що вектори $\overline{a}=\overline{a}(u)$ та $\overline{b}=\overline{b}(v)$ можуть мінятись ролями. Тобто, якщо поверхня може бути утворена паралельним перенесенням кривої $\overline{a}=\overline{a}(u)$ вздовж кривої $\overline{b}=\overline{b}(v)$, то вона також може бути утворена перенесенням кривої $\overline{b}=\overline{b}(v)$ вздовж кривої $\overline{a}=\overline{a}(u)$. Лінії перенесення $\overline{a}=\overline{a}(u)$ та $\overline{b}=\overline{b}(v)$ утворюють сітку, яка називається сіткою перенесення. Ця сітка спряжена.

Приклад. Параболоїд є поверхнею перенесення параболи, що ковзає своєю вершиною по іншій параболі, розміщеній в площині, перпендикулярній площині першої.

Поверхня обертання. Означення. Поверхня обертання – поверхня, утворена обертанням деякої плоскої кривої навколо прямої, що лежить в її площині. При цьому пряма називається віссю обертання, а крива – твірною поверхні обертання. Лінії перетину поверхні обертання площинами, що проходять через вісь обертання, називаються меридіанами, а лінії перетину поверхні площинами перпендикулярними осі обертання називаються паралелями.

Приклад.

1. Нагадаємо, що поверхні обертання другого порядку утворюються при обертанні кривих другого порядку навколо їх осей симетрії.
2. Тор – отримується обертанням кола навколо осі, яка лежить в одній площині з колом, але не перетинає його.
3. Катеноїд – поверхня, утворена обертанням ланцюгової лінії $y=ach\dfrac{x}{a}$ навколо осі Ox.
4. Лінійчаті поверхні обертання – поверхні, утворені обертанням прямої лінії. Залежно від положення прямої відносно осі обертання можуть бути утворені поверхні – конічна, циліндрична, гіперболоїд.

Розглянемо поверхню, утворену обертанням навколо осі Oz якої-небудь кривої γ, розміщеної в площині Oxz. Припустимо, що криву задано параметричними рівняннями $x = f(u), z = g(u)$.

Для того щоб визначити положення довільної точки M на поверхні, будемо вказувати значення параметра u, тобто положення точки на вхідній кривій γ та кут v, на який крива повернулась навколо осі Oz.Тоді координати точки $M(x, y, z)$ визначають у такий спосіб: $x = f(u)\cos v$, $y = f(u)\sin v$, $z = g(u)$.

Знайдемо першу квадратичну форму поверхні обертання. Запишемо рівняння поверхні у вигляді: $\overline{r}(u,v) = \{ f(u)\cos v, f(u)\sin v, g(u)\}$. Знаходимо похідні: $\overline{r}'_u = \{ f'(u)\cos v, f'(u)\sin v, g'(u)\}$, $\overline{r}'_v = \{- f(u)\sin v, f(u)\cos v, 0\}$.

Далі визначаємо коефіцієнти першої квадратичної форми:

$E = \overline{r}_u^2 = (f'(u))^2 \cos^2 v + (f'(u))^2 \sin^2 v + (g'(u))^2$, отже

$E = (f'(u))^2 + (g'(u))^2$, $F = 0$, $G = (f(u))^2$

Таким чином, $ds^2 = (f'(u))^2 + (g'(u))^2 du^2 + f^2(u)dv^2$.

Зауваження.

1. Коефіцієнти першої квадратичної форми залежать лише від u.

2. Оскільки $F = 0$, то меридіани і паралелі поверхні обертання утворюють ортогональну сітку.

3. Поверхня обертання може бути параметризована так, що перша квадратична форма матиме вигляд $ds^2 = du^2 + G(u)dv^2$.

Тепер знайдемо другу квадратичну форму поверхні обертання. Знаходимо похідні другого порядку:

$$\overline{r}_{uu} = \{ f''(u)\cos v, f''(u)\sin v, g''(u)\},$$

$$\overline{r}_{uv} = \{- f'(u)\sin v, f'(u)\cos v, 0\},$$

$$\overline{r}_{vv} = \{- f(u)\cos v, - f(u)\sin v, 0\}.$$

Мішані добутки:

$$(\overline{r}_{uu},\overline{r}_u,\overline{r}_v)=\begin{vmatrix} f''(u)\cos v & f''(u)\sin v & g''(u) \\ f'(u)\cos v & f'(u)\sin v & g'(u) \\ -f(u)\sin v & f(u)\cos v & 0 \end{vmatrix}=$$

$$= f(u)(g''(u)f'(u)-g'(u)f''(u))$$

$$(\overline{r}_{uv},\overline{r}_u,\overline{r}_v)=\begin{vmatrix} -f'(u)\sin v & f'(u)\cos v & 0 \\ f'(u)\cos v & f'(u)\sin v & g'(u) \\ -f(u)\sin v & f(u)\cos v & 0 \end{vmatrix}=0,$$

$$(\overline{r}_{vv},\overline{r}_u,\overline{r}_v)=\begin{vmatrix} -f(u)\cos v & -f(u)\sin v & 0 \\ f'(u)\cos v & f'(u)\sin v & g'(u) \\ -f(u)\sin v & f(u)\cos v & 0 \end{vmatrix}=g'(u)f^2(u).$$

Коефіцієнти другої квадратичної форми:

$$L=\frac{(\overline{r}_{uu},\overline{r}_u,\overline{r}_v)}{\sqrt{EG-F^2}}=\frac{f(u)(g''(u)f'(u)-g'(u)f''(u))}{f(u)\sqrt{(f'(u))^2+(g'(u))^2}}=$$

$$=\frac{(g''(u)f'(u)-g'(u)f''(u))}{\sqrt{(f'(u))^2+(g'(u))^2}},$$

$$M=\frac{(\overline{r}_{uv},\overline{r}_u,\overline{r}_v)}{\sqrt{EG-F^2}}=\frac{0}{f(u)\sqrt{(f'(u))^2+(g'(u))^2}}=0,$$

$$N=\frac{(\overline{r}_{vv},\overline{r}_u,\overline{r}_v)}{\sqrt{EG-F^2}}=\frac{g'(u)f^2(u)}{f(u)\sqrt{(f'(u))^2+(g'(u))^2}}=\frac{g'(u)f(u)}{\sqrt{(f'(u))^2+(g'(u))^2}}.$$

Отже, друга квадратична форма матиме вигляд:

$$II=\frac{(g''(u)f'(u)-g'(u)f''(u))du^2+g'(u)f(u)dv^2)}{\sqrt{(f'(u))^2+(g'(u))^2}}.$$

Коефіцієнт M другої квадратичної форми поверхні обертання дорівнює нулю, отже паралелі та меридіани утворюють спряжену сітку. Оскільки, крім того, ця сітка ортогональна, то паралелі та меридіани є лініями кривини.

Вправа 2.21. Складіть рівняння поверхні, утвореної обертанням прямої $\begin{cases} x=az, \\ y=0 \end{cases}$ навколо осі Oz.

Розв'язання. 1-й спосіб. Запишемо параметричні рівняння прямої

$$\begin{cases} x = au; \\ y = 0; \\ z = u. \end{cases}$$

Згідно з отриманими формулами рівняння поверхні обертання:

$$\begin{cases} x = au\cos v; \\ y = au\sin v; \\ z = u. \end{cases}$$

2-й спосіб. Нагадаємо: для того, щоб отримати рівняння поверхні обертання кривої навколо якої-небудь координатної осі, потрібно в рівнянні кривої залишити без змін координату, відповідну осі обертання, а другу координату замінити на квадратний корінь із суми квадратів двох інших координат, взятий зі знаком «+» або «-». Згідно з цим правилом в рівнянні прямої $x = az$ залишаємо без змін координату z, а координату x замінимо на $\pm\sqrt{x^2 + y^2}$.

Отже, отримаємо $\pm\sqrt{x^2 + y^2} = az$ або $x^2 + y^2 = z^2$.

§12. Основні рівняння теорії поверхонь. Дериваційні рівняння. Формули Гауса–Петерсона–Кодацці. Геодезична кривина кривої на поверхні. Геодезичні лінії та геодезичні напрямки

Дериваційні рівняння. Символи Кристофеля. Формули Гауса–Петерсона–Кодацці. Теорема Бонне. Геодезична кривина кривої на поверхні. Геодезичні лінії та геодезичні напрямки. Теорема існування та єдиності геодезичної лінії, яка проходить через точку на поверхні. Теорема Гауса–Бонне. Повне дослідження поверхонь.

Раніше розглянуто ряд задачі з теорії поверхонь, для розв'язування яких достатньо знати лише першу і другу квадратичні форми поверхні. Виникає питання: наскільки перша та друга квадратичні форми визначають поверхню і яким умовам повинні задовольняти квадратичні форми $Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$, $Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2$, для того, щоб існувала поверхня, для якої ці квадратичні форми були б, відповідно, першою та другою квадратичними формами.

Дериваційні формули. Дериваційні формули для поверхні є аналогом формул Френе для кривих. Вони дають представлення похідних векторів $\overline{r}_u$, $\overline{r}_v$, $\overline{n}=\dfrac{\overline{r}_u\times\overline{r}_v}{\left|\overline{r}_u\times\overline{r}_v\right|}$ через ці вектори і коефіцієнти першої та другої квадратичних форм поверхні.

Оскільки вектори $\overline{r}_u$, $\overline{r}_v$, $\overline{n}$ не лежать в одній площині, то довільний вектор допускає представлення у вигляді лінійної комбінації цих векторів. Зокрема,

$$\overline{r}_{uu}=\Gamma_{11}^{1}\overline{r}_u+\Gamma_{11}^{2}\overline{r}_v+\beta_{11}\overline{n}\,,\ \overline{r}_{uv}=\Gamma_{12}^{1}\overline{r}_u+\Gamma_{12}^{2}\overline{r}_v+\beta_{12}\overline{n}\,,$$

$$\overline{r}_{vv}=\Gamma_{22}^{1}\overline{r}_u+\Gamma_{22}^{2}\overline{r}_v+\beta_{22}\overline{n}\,,\ \overline{n}_u=\alpha_{11}\overline{r}_u+\alpha_{12}\overline{r}_v+\alpha_{10}\overline{n}\,, \qquad (2\ .15)$$

$$\overline{n}_v=\alpha_{21}\overline{r}_u+\alpha_{22}\overline{r}_v+\alpha_{20}\overline{n}\,.$$

Коефіцієнти Γ_{ij}^{k} називаються символами Кристофеля. Покажемо, що коефіцієнти Γ_{ij}^{k}, β_{ij},α_{ij} виражаються через коефіцієнти першої та другої квадратичних форм поверхні. Одразу зауважимо, що коефіцієнти α_{10}та α_{20} дорівнюють нулю. Справді, помножимо скалярно дві останні рівності на вектор $\overline{n}$ (при цьому матимемо на увазі, що вектори $\overline{r}_u$ та $\overline{r}_v$ перпендикулярні до вектора $\overline{n}$ і тому $\overline{r}_u\overline{n}=0$ та $\overline{r}_v\overline{n}=0$). Дістанемо $\overline{n}_u\overline{n}=\alpha_{10}$, $\overline{n}_v\overline{n}=\alpha_{20}$.Зважаючи на те, що $\overline{n}_u\overline{n}=\dfrac{1}{2}(\overline{n}^2)'_u=0$ і $\overline{n}_v\overline{n}=\dfrac{1}{2}(\overline{n}^2)'_v=0$, отримуємо $\alpha_{10}=0$ і $\alpha_{20}=0.$

Щоб отримати вирази для α_{11} та α_{12}, помножимо рівність $\overline{n}_u=\alpha_{11}\overline{r}_u+\alpha_{12}\overline{r}_v$ скалярно на $\overline{r}_u$ та $\overline{r}_v$. $\overline{n}_u\overline{r}_u=\alpha_{11}\overline{r}_u\overline{r}_u+\alpha_{12}\overline{r}_v\overline{r}_u$, $\overline{n}_u\overline{r}_v=\alpha_{11}\overline{r}_u\overline{r}_v+\alpha_{12}\overline{r}_v\overline{r}_v$. Оскільки $(\overline{n},\overline{r}_u)'_u=(\overline{n}_u,\overline{r}_u)+(\overline{n},\overline{r}_{uu})=0$, $(\overline{n},\overline{r}_v)'_u=(\overline{n}_u,\overline{r}_v)+(\overline{n},\overline{r}_{uv})=0$, то будемо мати $\begin{cases}-L=\alpha_{11}E+\alpha_{12}F;\\ -M=\alpha_{11}F+\alpha_{12}G.\end{cases}$

Звідси

$$\alpha_{11} = \frac{\begin{vmatrix} -L & F \\ -M & G \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} E & F \\ F & G \end{vmatrix}} = \frac{-LG + MF}{EG - F^2}, \alpha_{12} = \frac{\begin{vmatrix} E & -L \\ F & -M \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} E & F \\ F & G \end{vmatrix}} = \frac{-EM + LF}{EG - F^2}.$$

Виконуючи аналогічні дії для $\overline{n}_v = \alpha_{21}\overline{r}_u + \alpha_{22}\overline{r}_v$, отримаємо систему $\begin{cases} -M = \alpha_{21}E + \alpha_{22}F; \\ -N = \alpha_{21}F + \alpha_{22}G, \end{cases}$ з якої одержимо:

$$\alpha_{11} = \frac{\begin{vmatrix} -M & F \\ -N & G \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} E & F \\ F & G \end{vmatrix}} = \frac{-MG + NF}{EG - F^2}, \ \alpha_{22} = \frac{\begin{vmatrix} E & -M \\ F & -N \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} E & F \\ F & G \end{vmatrix}} = \frac{-EN + MF}{EG - F^2}.$$

Для отримання коефіцієнтів $\beta_{11}, \beta_{12}, \beta_{22}$ помножимо перші три формули (2.15) скалярно на вектор $\overline{n}$ (при цьому матимемо на увазі, що $\overline{r}_u\overline{n} = 0$ та $\overline{r}_v\overline{n} = 0$, а $\overline{n}^2 = 1$). Одержимо $\beta_{11} = L, \beta_{12} = M, \beta_{22} = N$. Тепер ці формули можна переписати у такому вигляді:

$$\overline{r}_{uu} = \Gamma_{11}^1\overline{r}_u + \Gamma_{11}^2\overline{r}_v + L\overline{n},$$

$$\overline{r}_{uv} = \Gamma_{12}^1\overline{r}_u + \Gamma_{12}^2\overline{r}_v + M\overline{n}, \ \overline{r}_{vv} = \Gamma_{22}^1\overline{r}_u + \Gamma_{22}^2\overline{r}_v + N\overline{n}.$$

Для того щоб отримати вирази для коефіцієнтів Γ_{ij}^k, помножимо останні три формули на $\overline{r}_u$ та $\overline{r}_v$. Дістанемо шість співвідношень для визначення коефіцієнтів Γ_{ij}^k:

$$\Gamma_{11}^1E + \Gamma_{11}^2F = \frac{1}{2}E_u; \Gamma_{11}^1F + \Gamma_{11}^2G = F_u - \frac{1}{2}E_v;$$

$$\Gamma_{12}^1E + \Gamma_{12}^2F = \frac{1}{2}E_v; \Gamma_{12}^1F + \Gamma_{12}^2G = \frac{1}{2}G_u;$$

$$\Gamma_{22}^1E + \Gamma_{22}^2F = F_v - \frac{1}{2}G_u; \Gamma_{22}^1F + \Gamma_{22}^2G = \frac{1}{2}G_v.$$

Знайдемо представлення для коефіцієнтів Γ_{ij}^k:

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{\begin{vmatrix} \frac{1}{2}E_u & F \\ F_u - \frac{1}{2}E_v & G \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} E & F \\ F & G \end{vmatrix}} = \frac{GE_u - 2FF_u + FE_v}{2(EG - F^2)},$$

$$\Gamma_{11}^2 = \frac{\begin{vmatrix} E & \frac{1}{2}E_u \\ F & F_u - \frac{1}{2}E_v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} E & F \\ F & G \end{vmatrix}} = \frac{2EF_u - FE_u - EE_v}{2(EG - F^2)},$$

$$\Gamma_{12}^1 = \frac{GE_v - FG_u}{2(EG - F^2)}, \ \Gamma_{12}^2 = \frac{EG_u - FE_v}{2(EG - F^2)},$$

$$\Gamma_{22}^1 = \frac{2GF_v - GG_u - FG_v}{2(EG - F^2)}, \ \Gamma_{22}^2 = \frac{EG_v - 2FF_v + FG_u}{2(EG - F^2)}. \quad (2.16)$$

Зауважимо, що всі коефіцієнти Γ_{ij}^k в рівностях (2.16) виражаються лише через коефіцієнти першої квадратичної форми та їх похідні.

Приклад. Знайдемо коефіцієнти Γ_{ij}^k для випадку, коли перша квадратична форма має вигляд $I = du^2 + Gdv^2$. Підставляючи $E = 1, F = 0$ у формули (2.16), отримаємо:

$$\Gamma_{11}^1 = 0, \ \Gamma_{11}^2 = 0, \ \Gamma_{12}^1 = 0,$$

$$\Gamma_{12}^2 = -\frac{1}{2}\frac{G_u}{G}, \ \Gamma_{22}^1 = -\frac{1}{2}G_u, \ \Gamma_{22}^2 = -\frac{1}{2}\frac{G_v}{G}.$$

Формули Гауса–Петерсона–Кодацці. Перша та друга квадратичні форми не є незалежними. Зв’язок між коефіцієнтами цих форм може бути отриманий таким чином. Маємо очевидні рівності:

$$(\bar{r}_{uu})_v - (\bar{r}_{uv})_u = 0; (\bar{r}_{vv})_u - (\bar{r}_{uv})_v = 0; (\bar{n}_u)_v - (\bar{n}_v)_u = 0.$$

Якщо в цих рівностях вирази в дужках замінити згідно з деривацiйними формулами і після диференціювання знову скористатись такою заміною, то ми отримаємо три векторні рівності вигляду:

$$A_1\overline{r}_u + B_1\overline{r}_v + C_1\overline{n} = 0,\; A_2\overline{r}_u + B_2\overline{r}_v + C_2\overline{n} = 0,\; A_3\overline{r}_u + B_3\overline{r}_v + C_3\overline{n} = 0,$$

де коефіцієнти A_i, B_i, C_i – вирази з коефіцієнтів першої та другої квадратичних форм та їх похідних. З цих трьох векторних співвідношень випливає дев'ять скалярних:

$$\begin{aligned} &A_1 = 0, B_1 = 0, C_1 = 0, A_2 = 0, B_2 = 0, C_2 = 0, \\ &A_3 = 0, B_3 = 0, C_3 = 0 \end{aligned} \tag{2.17}$$

Знайдемо, наприклад, співвідношення $B_1 = 0$. B_1 є коефіцієнт при $\overline{r}_v$ у виразі $(\overline{r}_{uu})_v - (\overline{r}_{uv})_u = 0$.

$$(\Gamma_{11}^1\overline{r}_u + \Gamma_{11}^2\overline{r}_v + L\overline{n})_v - (\Gamma_{12}^1\overline{r}_u + \Gamma_{12}^2\overline{r}_v + M\overline{n})_u =$$

$$= (\Gamma_{11}^1)_v\overline{r}_u + \Gamma_{11}^1\overline{r}_{uv} + (\Gamma_{11}^2)_v\overline{r}_v + \Gamma_{11}^2\overline{r}_{vv} + L_v\overline{n} + L\overline{n}_v -$$

$$-((\Gamma_{12}^1)_u\overline{r}_u + \Gamma_{12}^1\overline{r}_{uu} + (\Gamma_{12}^2)_u\overline{r}_v + \Gamma_{12}^2\overline{r}_{vu} + M_u\overline{n} + M\overline{n}_u).$$

Коефіцієнтом при $\overline{r}_v$ буде

$$\Gamma_{11}^1\Gamma_{12}^2 + (\Gamma_{11}^1)_v + \Gamma_{11}^2\Gamma_{22}^2 + L\alpha_{22} - \Gamma_{12}^1\Gamma_{11}^2 - (\Gamma_{12}^2)_u - \Gamma_{12}^2\Gamma_{12}^2 - M\alpha_{12}.$$

Оскільки

$$L\alpha_{22} - M\alpha_{12} = \frac{L(MF - EN) - M(LF - ME)}{EG - F^2} = \frac{E(M^2 - LN)}{EG - F^2},$$

то співвідношення $B_1 = 0$ матиме такий вигляд:

$$\frac{LN - M^2}{EG - F^2} = \frac{1}{\mathrm{E}}(\Gamma_{11}^1\Gamma_{12}^2 + (\Gamma_{11}^1)_v + \Gamma_{11}^2\Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^1\Gamma_{11}^2 - (\Gamma_{12}^2)_u - \Gamma_{12}^2\Gamma_{12}^2).$$

З цього співвідношення випливають важливі наслідки:

- гаусова кривина поверхні виражається лише через коефіцієнти першої квадратичної форми та їх похідні (Теорема Гауса);

- оскільки ізометричні поверхні за відповідної параметризації мають однакові перші квадратичні форми, то у відповідних точках ізометричні поверхні мають однакові гаусові кривини;

- оскільки поверхні, що розгортаються, є локально ізометричними площині, то гаусова кривина поверхонь, що розгортаються, дорівнює нулю.

Виявляється, серед дев'яти співвідношень (2.17) різних є лише три. Одне з них, розглянуте нами, вперше було отримане Гаусом, два інші отримані К.М. Петерсоном, Майнарді та Кадацці. Цим трьом формулам можна надати вигляду:

$$\frac{LN-M^2}{EG-F^2}=-\frac{1}{4(EG-F^2)}\begin{vmatrix} E & E_u & E_v \\ F & F_u & F_v \\ G & G_u & G_v \end{vmatrix}-$$
$$-\frac{1}{2\sqrt{EG-F^2}}\left(\left(\frac{E_v-F_u}{\sqrt{EG-F^2}}\right)_v-\left(\frac{F_v-G_u}{\sqrt{EG-F^2}}\right)_u\right). \qquad (2.18)$$

Формула (2.18) – формула Гауса.

Формули Петерсона–Кодацці мають такий вигляд:

$$(EG-2FF+GE)(L_v-M_u)-(EN-2FM+GL)(E_v-F_u)+\begin{vmatrix} E & E_u & L \\ F & F_u & M \\ G & G_u & N \end{vmatrix}=0$$

$$(EG-2FF+GE)(M_v-N_u)-(EN-2FM+GL)(F_v-G_u)+\begin{vmatrix} E & E_v & L \\ F & F_v & M \\ G & G_v & N \end{vmatrix}=0$$

Вправа 2.22. Знайдіть гаусову кривину поверхні з лінійним елементом: *1.* $ds^2=\lambda(u,v)(du^2+dv^2)$;

2. $ds^2=du^2+2\cos w(u,v)dudv+dv^2$.

Розв'язання. *1.* Згідно з умови $E=\lambda(u,v), F=0, G=\lambda(u,v)$.

Отже, $\sqrt{EG-F^2}=\lambda(u,v)=\lambda$. Обчислимо похідні коефіцієнтів першої квадратичної форми: $E_u=(\lambda(u,v))'_u=\lambda_u$, $F_u=0$, $G_u=(\lambda(u,v))'_u=\lambda_u$, $E_v=(\lambda(u,v))'_v=\lambda_v$, $F_v=0,$ $G_v=(\lambda(u,v))'_v=\lambda_v$.

Знайдемо гаусову кривину поверхні:

$$K=\frac{LN-M^2}{EG-F^2}=-\frac{1}{4\lambda^2}\begin{vmatrix} \lambda & \lambda_u & \lambda_v \\ 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda_u & \lambda_v \end{vmatrix}-\frac{1}{2\lambda}\left(\left(\frac{\lambda_v}{\lambda}\right)_v-\left(\frac{-\lambda_u}{\lambda}\right)_u\right)=$$
$$=-\frac{1}{2\lambda}\left(\frac{\lambda\lambda_{vv}-(\lambda_v)^2+\lambda\lambda_{uu}-(\lambda_u)^2}{\lambda^2}\right).$$

2. $ds^2 = du^2 + 2\cos w(u,v)dudv + dv^2$.

Згідно з умовою $E = 1, F = \cos w, G = 1$.

Отже, $\sqrt{EG - F^2} = \sqrt{1 - \cos^2 w} = \sin w$. Обчислимо похідні коефіцієнтів першої квадратичної форми: $E_u = 0$, $F_u = -w'_u \sin w$, $G_u = 0$, $E_v = 0$, $F_v = -w'_v \sin w$, $G_v = 0$.

Знайдемо гаусову кривину поверхні:

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = -\frac{1}{4\sin^2 w}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \cos w & -w'_u \sin w & -w'_v \sin w \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} -$$

$$-\frac{1}{2\sin w}\left(\left(\frac{w'_u \sin w}{\sin w}\right)_v - \left(\frac{-w'_v \sin w}{\sin w}\right)_u\right) = -\frac{w''_{uv}}{\sin w}$$

Вправа 2.23. Доведіть, що поверхня, яка допускає параметризацію, за якої її перша квадратична форма має такий вигляд: $ds^2 = E(u)du^2 + G(v)dv^2$, локально ізометрична площині.

Справді, оскільки $F = 0$, $E_v = 0$, $G_u = 0,$ для гаусової кривини отримаємо:

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = -\frac{1}{4EG}\begin{vmatrix} E(u) & E'(u) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ G(v) & 0 & G'(v) \end{vmatrix} -$$

$$-\frac{1}{2\sqrt{EG}}\left(\left(\frac{0-0}{\sqrt{EG}}\right)_v - \left(\frac{0-0}{\sqrt{EG}}\right)_u\right) = 0.$$

Отже, поверхня локально ізометрична площині.

Теорема Бонне. Нехай $Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$ та $Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2$ дві довільні квадратичні форми, причому перша є додатно визначеною. Нехай також для коефіцієнтів цих форм дотримано умов Гауса–Петерсона–Кодацці. Тоді існує та єдина з точністю до розміщення в просторі поверхня, для якої ці квадратичні форми є відповідно першою та другою квадратичними формами [3].

Геодезична кривина кривої на поверхні. Нехай *Ф* – регулярна поверхня і γ – крива на ній. Проведемо в довільній точці *P* кривої γ дотичну площину до поверхні і спроектуємо малий окіл точки *P* кривої γ на цю площину. Тоді отримаємо криву $\overline{\gamma}$ в дотичній площині. Кривина цієї кривої в точці *P* називається геодезичною кривиною k_g кривої γ в точці *P*.

Знайдемо вираз для геодезичної кривини кривої. Проведемо через криву γ циліндричну поверхню з твірними, перпендикулярними дотичній площині. За теоремою Меньє, кривина k кривої γ та кривина k_g кривої $\overline{\gamma}$ в даній точці пов'язані співвідношенням: $k\cos\theta = k_g$, де θ – кут, утворений нормалями цих кривих.

Нехай $\overline{R} = \overline{R}(s)$ – натуральна параметризація кривої γ, $\overline{\tau}$ та $\overline{\nu}$ - одиничні вектори дотичної і головної нормалі кривої γ, $\overline{n}$ - одиничний вектор нормалі до поверхні. Тоді $\dot{\overline{R}} = k\overline{\nu}$, а вектор $\overline{\tau}\times\overline{n}$ спрямований по нормалі кривої $\overline{\gamma}$ в точці Р і, отже, з точністю до знака $k_g = k\cos\theta = (\ddot{\overline{R}}, \dot{\overline{R}}, \overline{n})$. У разі довільної параметризації кривої γ $\overline{r} = \overline{r}(t)$, геодезична кривина обчислюється за формулою:

$$k_g = \frac{1}{\left|\overline{r}'\right|^3}(\overline{r}'', \overline{r}', \overline{n}). \quad (2.19)$$

Нехай $\overline{r} = \overline{r}(u,v)$ – регулярна параметризація поверхні в околі точки Р, а $u = u(t), v = v(t)$ – рівняння кривої γ в околі цієї точки. Тоді:

$$\overline{r}(t) = \overline{r}(u(t), v(t)),\ \overline{r}'(t) = \overline{r}_u u' + \overline{r}_v v',$$

$$\overline{r}''(t) = \overline{r}_{uu}(u')^2 + 2\overline{r}_{uv}u'v' + \overline{r}_{vv}(v')^2 + \overline{r}_u u'' + \overline{r}_v v'' =$$
$$= (u'' + A)\overline{r}_u + (v'' + B)\overline{r}_v + C\overline{n}.$$

$A = \Gamma_{11}^1(u')^2 + 2\Gamma_{12}^1 v'u' + \Gamma_{22}^1(v')^2, B = \Gamma_{11}^2(u')^2 + 2\Gamma_{12}^2 v'u' + \Gamma_{22}^2(v')^2,$
$C = L(u')^2 + 2Mv'u' + N(v')^2$

Підставляючи отримані вирази для $\overline{r}'(t)$ та $\overline{r}''(t)$ у формулу (2.19) для k_g, отримаємо:

$$k_g = \frac{\sqrt{EG - F^2}}{(E(u')^2 + 2Fu'v' + G(v')^2)^{3/2}}(u''v' - v''u' + Av' - Bu'). \quad (2.20)$$

Оскільки величини A та B виражаються лише через коефіцієнти першої квадратичної форми поверхні, то геодезична кривина кривої на поверхні визначається лише метрикою поверхні і тому не змінюється при згинанні поверхні.

Вправа 2.24. Знайдіть формулу для геодезичної кривини кривої у випадку, коли перша квадратична форма має вигляд $I = du^2 + Gdv^2$.

Розв'язання. У цьому випадку, як вже було показано, $\Gamma_{11}^1 = 0$, $\Gamma_{11}^2 = 0, \Gamma_{12}^1 = 0, \Gamma_{12}^2 = -\frac{1}{2}\frac{G_u}{G}, \Gamma_{22}^1 = -\frac{1}{2}G_u, \Gamma_{22}^2 = -\frac{1}{2}\frac{G_v}{G}$. Тоді $A = -\frac{1}{2}G_u(v')^2$, $B = \frac{G_u}{G}u'v' + \frac{1}{2}\frac{G_v}{G}(v')^2$, і для геодезичної кривини отримаємо:

$$k_g = \frac{\sqrt{G}}{\left((u')^2 + G(v')^2\right)^{\frac{3}{2}}}(u''v' - v''u' - \frac{1}{2}G_u(v')^3 - \frac{G_u}{G}(u')^2 v' - \frac{1}{2}\frac{G_v}{G}(v')^2 u')$$

Вправа 2.25. Знайдіть геодезичні кривини координатних ліній

1) довільної поверхні; 2) у випадку, коли перша квадратична форма має вигляд: $I = Edu^2 + Gdv^2$.

Розв'язання. 1) для координатних ліній $u = const$ матимемо $u' = 0$, і тоді геодезичну кривину визначатимемо за формулою:

$$k_g = \frac{\sqrt{EG - F^2}}{(G(v')^2)^{3/2}}Av' = \frac{\sqrt{EG - F^2}}{G\sqrt{G}(v')^3}\Gamma_{22}^1(v')^2 v' = \frac{\sqrt{EG - F^2}}{G\sqrt{G}}\Gamma_{22}^1.$$

Для координатних ліній $v = const$, $v' = 0$, отримаємо:

$$k_g = \frac{\sqrt{EG - F^2}}{\left(E(u')^2\right)^{\frac{3}{2}}}(-Bu') = \frac{\sqrt{EG - F^2}}{E\sqrt{E}(u')^3}\left(-\Gamma_{11}^2(u')^2\right)u' = -\frac{\sqrt{EG - F^2}}{E\sqrt{E}}\Gamma_{11}^2$$

2) у випадку, коли перша квадратична форма має вигляд

$I = Edu^2 + Gdv^2$, скористаємось попередніми результатами і матимемо на увазі, що $F = 0$. Будемо мати $u = const$, отже $u' = 0$, і тоді

$$k_g = \frac{\sqrt{EG - F^2}}{G\sqrt{G}}\Gamma_{22}^1 = \frac{\sqrt{EG}}{G\sqrt{G}}\frac{(-\frac{1}{2}GG_u)}{EG} = \frac{-\frac{1}{2}G_u}{\sqrt{G}\sqrt{EG}},$$

Для $v = const$, $v' = 0$, тоді

$$k_g = -\frac{\sqrt{EG-F^2}}{E\sqrt{E}}\Gamma_{11}^2 = -\frac{\sqrt{EG}}{E\sqrt{E}}\frac{(-\frac{1}{2}EE_v)}{EG} = \frac{\frac{1}{2}EE_v}{\sqrt{E}\sqrt{EG}}.$$

Вправа 2.26. Знайдіть геодезичну кривину лінії $u = shv$ на прямому гелікоїді $\overline{r}(u,v) = \{u\cos v, u\sin v, v\}$.

Розв'язання. Для заданого гелікоїда коефіцієнти першої квадратичної форми матимуть такий вигляд (перевірити самостійно): $E=1$, $F=0$, $G=1+u^2$. Геодезична кривина обчислюється за формулою:

$$k_g = \frac{\sqrt{G}}{\left((u')^2 + G(v')^2\right)^{\frac{3}{2}}}\left(u''v' - v''u' - \frac{1}{2}G_u(v')^3 - \frac{G_u}{G}(u')^2 v' - \frac{1}{2}\frac{G_v}{G}(v')^2 u'\right).$$

Для лінії $u = shv$: $u' = chv \cdot v'$, $u'' = shv \cdot (v')^2 + chv \cdot v''$, $G_v = 0$, $G_u = 2u$. Тепер підставимо отримані значення в формулу для геодезичної кривини:

$$k_g = \frac{\sqrt{1+sh^2 v}}{((chv\cdot v')^2 + (1+sh^2 v)(v')^2)^{3/2}} \cdot ((shv\cdot(v')^2 + chv\cdot v'')v' -$$

$$-v''(chv\cdot v') - \frac{1}{2}2shv(v')^3 - \frac{2shv}{sh^2 v + 1}(chv\cdot v')^2 v').$$

Після спрощень отримаємо відповідь: $k_g = -\frac{shv}{\sqrt{2}ch^2 v}$.

Геодезичні лінії на поверхні. Означення. Крива на поверхні називається геодезичною лінією, якщо в кожній її точці геодезична кривина дорівнює нулю.

Теорема. Для того щоб крива була геодезичною, необхідно і достатньо, щоб її головна нормаль в кожній точці, де кривина відмінна від нуля, збігалась з нормаллю до поверхні.

Справді, як відомо, $k_g = (\ddot{\overline{R}}, \dot{\overline{R}}, \overline{n})$, де $\overline{R} = \overline{R}(s)$ – натуральна параметризація поверхні. Оскільки $\ddot{\overline{R}} = k\overline{v}$, то $k_g = 0$, тоді і лише тоді, коли вектор $\overline{v}$ збігається з вектором $\overline{n}$.

Для того щоб отримати диференціальне рівняння геодезичних, достатньо прирівняти до нуля вираз для геодезичної кривини. Таким чином, диференціальне рівняння геодезичних матиме вигляд:

$$u''v' - v''u' + Av' - Bu' = 0.$$

Теорема. Через кожну точку на регулярній поверхні в довільному напрямку можна провести єдину геодезичну.

Справді, нехай $P(u_0, v_0)$ – довільна точка поверхні і $u_0' : v_0'$ – довільний напрямок в цій точці. Розглянемо систему диференціальних рівнянь: $\begin{cases} u'' + A = 0, \\ v'' + B = 0 \end{cases}$ Нехай $u = u(t), v = v(t)$ – розв'язок цієї системи, який задовольняє початковим умовам: $u(t) = u_0, v(t) = v_0$, $u'(t) = u_0'$, $v'(t) = v_0'$. Тоді крива на поверхні, задана рівняннями $u = u(t), v = v(t)$ є геодезичною, оскільки в цьому випадку $u''v' - v''u' + Av' - Bu' = 0$. Ця геодезична проходить через точку $P(u_0, v_0)$ і має в цій точці напрямок $u_0' : v_0'$. Можна показати, що ця геодезична є єдиною [3].

Приклад. Показати, що геодезичні лінії на сфері – це великі кола.

Вправа 2.27. Знайдіть геодезичні лінії гелікоїда $\overline{r}(u,v) = \{u\cos v, u\sin v, v\}$.

Розв'язання. Для заданого гелікоїда коефіцієнти першої квадратичної форми будуть мати вигляд: $E = 1$, $F = 0$, $G = 1 + u^2$. $G_v = 0$, $G_u = 2u$. Отже, диференціальне рівняння геодезичних матиме вигляд:

$$u''v' - v''u' - \frac{1}{2}G_u(v')^3 - \frac{G_u}{G}(u')^2v' - \frac{1}{2}\frac{G_v}{G}(v')^2u' =$$
$$= u''v' - v''u' - \frac{1}{2}2u(v')^3 - \frac{2u}{1+u^2}(u')^2v' = 0.$$

Зауважимо, що геодезичними лініями є лінії $v = const$. Вважаючи тепер $v \neq const$, поділимо останнє рівняння на $(v')^3$:

$$\frac{u''v' - v''u'}{(v')^3} - u - \frac{2u}{1+u^2}\frac{(u')^2v'}{(v')^3} = \frac{u''v' - v''u'}{(v')^2}\frac{1}{v'} - u - \frac{2u}{1+u^2}\frac{(u')^2}{(v')^2} = 0$$

отримуємо: $\dfrac{d^2u}{dv^2}-\dfrac{2u}{1+u^2}\left(\dfrac{du}{dv}\right)^2-u=0$. Виконаємо заміну $p=p(u)=\dfrac{du}{dv}$ і запишемо рівняння у вигляді: $p\dfrac{dp}{du}-\dfrac{2u}{1+u^2}p^2-u=0$. Нехай $p^2=z$, тоді $\dfrac{dz}{du}-\dfrac{4u}{1+u^2}z-2u=0$.

Звідси $z=(1+u^2)^2\left(C_1-\dfrac{1}{1+u^2}\right)$, $v=\displaystyle\int\frac{du}{(1+u^2)\sqrt{C_1-\frac{1}{1+u^2}}}+C_2$.

Відповідь. $v=const$, $v=\displaystyle\int\frac{du}{(1+u^2)\sqrt{C_1-\frac{1}{1+u^2}}}+C_2$.

Параметризація на поверхні називається півгеодезичною, якщо вона ортогональна й одне сімейство координатних ліній складається з геодезичних.

Крива γ, що сполучає точки P та Q на поверхні, називається найкоротшою, якщо довільна крива на поверхні, що сполучає ці точки, має довжину не меншу, ніж крива γ.

Можна показати, що цією найкоротшою є геодезична крива на достатньо малій ділянці і рівняння геодезичних може бути записане у вигляді рівняння Ейлера для функціонала $\Phi=\int\sqrt{E(u')^2+2Fv'u'+G(v')^2dt}$ [3].

Після вивчення основних властивостей поверхонь можна перейти до їх **повного дослідження**. При дослідженні властивостей поверхонь рекомендуємо дотримуватись, по можливості, такого **плану**:

1. Задати поверхню однією з можливих регулярних параметризацій.
2. Скласти рівняння дотичної площини та нормалі в довільній точці.
3. Знайти першу квадратичну форму поверхні, лінійний елемент поверхні та елемент площі.
4. Знайти другу квадратичну форму поверхні.
5. Знайти Гаусову та середню кривини.
6. Провести класифікацію точок поверхні.
7. Скласти диференціальне рівняння асимптотичних ліній.
8. Скласти диференціальне рівняння ліній кривини.

9. Скласти диференціальне рівняння геодезичних ліній.

10. Зобразити поверхню.

Вправа 2.28. Виконайте повне дослідження (згідно з планом) прямого кругового циліндра радіуса a, вісь якого паралельна осі *Oz*.

Розв'язання. Загальне рівняння циліндра – $x^2+y^2=a^2$.

1. Задамо параметризацію у вигляді $r(u,v)=\{a\cos u, a\sin u, v\}$.

2. Знаходимо вектор нормалі дотичної площини:

$$\bar{r}_u=\{-a\sin u, a\cos u, 0\}, \bar{r}_v=\{0,0,1\},$$

$$\bar{n}=\bar{r}_u\times\bar{r}_v=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ -a\sin u & a\cos u & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=\bar{i}a\cos u+\bar{j}a\sin u,$$

тобто $\bar{n}=\{a\cos u, a\sin u, 0\}$. Якщо дотична площина проходить через точку $M_0(x_0,y_0,z_0)$, то існують такі u_0,v_0, що $x_0=a\cos u_0$, $y_0=a\sin u_0$, $z_0=v_0$. Записуємо рівняння дотичної площини: $a\cos u_0(x-x_0)+a\sin u_0(y-y_0)=0$, $x_0(x-x_0)+y_0(y-y_0)=0$, $x_0x+y_0y-x_0^2-y_0^2=0$ або $x_0x+y_0y=a^2$.

Записуємо рівняння нормалі:

$$\frac{x-x_0}{a\cos u_0}=\frac{y-y_0}{a\sin u_0}=\frac{z-z_0}{0} \text{ або } \frac{x-x_0}{x_0}=\frac{y-y_0}{y_0}=\frac{z-z_0}{0}.$$

3. Знаходимо коефіцієнти першої квадратичної форми:

$$E=\bar{r}_u^2=a^2\sin^2 u+a^2\cos^2 u=a^2,\ F=0,\ G=\bar{r}_v^2=1.$$

Таким чином, $I_1=Edu^2+2Fdudv+Gdv^2=a^2du^2+dv^2$. Оскільки *F=0*, то сітка координатних ліній є ортогональною. Лінійний елемент кривої $\begin{cases}u=u(t),\\ v=v(t)\end{cases}$ на поверхні розраховуємо за формулою:

$$dl=\sqrt{E\left(\frac{du}{dt}\right)^2+2F\left(\frac{du}{dt}\right)\left(\frac{dv}{dt}\right)+G\left(\frac{dv}{dt}\right)^2}dt=\sqrt{a^2\left(\frac{du}{dt}\right)^2+\left(\frac{dv}{dt}\right)^2}dt.$$

Елемент площі поверхні:

$$ds=\sqrt{EG-F^2}dudv=adudv.$$

4. Знаходимо другу квадратичну форму:

$$\bar{r}_{uu}=\{-a\cos u, -a\sin u,\ 0\},\ \bar{r}_{uv}=\{0,0,0\},\ \bar{r}_{vv}=\{0,0,0\},$$

$$L=\frac{(\bar{r}_{uu},\bar{r}_u,\bar{r}_v)}{\sqrt{EG-F^2}}=\frac{1}{a}\begin{vmatrix}-a\cos u & -a\sin u & 0\\ -a\sin u & a\cos u & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=$$

$$=\frac{1}{a}(-a^2\cos^2 u-a^2\sin^2 u)=-a,$$

$$M=\frac{(\bar{r}_{uv},\bar{r}_u,\bar{r}_v)}{\sqrt{EG-F^2}}=\frac{1}{a}\begin{vmatrix}0 & 0 & 0\\ -a\sin u & a\cos u & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=0,$$

$$N=\frac{(\bar{r}_{vv},\bar{r}_u,\bar{r}_v)}{\sqrt{EG-F^2}}=\frac{1}{a}\begin{vmatrix}0 & 0 & 0\\ -a\sin u & a\cos u & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=0.$$

Таким чином, друга квадратична форма має вигляд:

$$I_2=Ldu^2+2Mdudv+Ndv^2=-adu^2.$$

5. Знаходимо Гаусову кривину: $K=\dfrac{LN-M^2}{EG-F^2}=0$. Знаходимо середню кривину: $H=\dfrac{EN-2MF+GL}{2(EG-F^2)}=\dfrac{-a}{2a^2}=-\dfrac{1}{2a}$.

6. Оскільки $M^2-NL=0$ для всіх точок розгляданої поверхні, то всі точки є точками параболічного типу.

7. Диференціальне рівняння асимптотичних ліній: $Ldu^2+2Mdudv+Ndv^2=0$, тобто $du=0,\ u=const$. Таким чином, асимптотичними є *v*-лінії на поверхні.

8. Диференціальне рівняння ліній кривини:

$$\begin{vmatrix}du^2 & -dudv & dv^2\\ E & F & G\\ L & M & N\end{vmatrix}=0, \quad \text{тобто} \quad \begin{vmatrix}du^2 & -dudv & dv^2\\ a^2 & 0 & 1\\ -a & 0 & 0\end{vmatrix}=0,\ dudv=0.$$

Таким чином, лінії кривини – це *u*- та *v*-лінії.

9. Диференціальне рівняння геодезичних ліній:

$$\frac{d^2u}{dv^2}+\frac{E_v}{2G}\left(\frac{du}{dv}\right)^3+\left(\frac{E_u}{2E}-\frac{G_u}{G}\right)\left(\frac{du}{dv}\right)^2+\left(\frac{E_v}{E}-\frac{G_v}{2G}\right)\frac{du}{dv}-\frac{G_u}{2E}=0,$$

тобто $\frac{d^2u}{dv^2}=0,\ u=C_1v+C_2$.

Вправи до розділу II

1. Знайдіть частинні похідні першого та другого порядків вектор-функції $\overline{r}(u,v)=\{\cos u\cos v,\sin u\sin v,\sin v\}$ в точці $(0,\pi/2)$.

2. Доведіть, що вектор-функція $\overline{r}(u,v)=\left\{u+v,u-v,u^2+v^2\right\}$ є регулярною параметризацією еліптичного параболоїда $z=\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)$.

3. Складіть рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні $\overline{r}(u,v)=\left\{u,u^2-2v,u^3-uv\right\}$ в точці $M_0(1,3,4)$.

4. Складіть рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні $z=e^{x+y}+\arcsin xy$ в точці $M_0(1,0,e)$.

5. Дано гелікоїд $\overline{r}(u,v)=\{u\cos v,u\sin v,v\}$. Знайдіть: а) першу квадратичну форму поверхні; б) площу криволінійного трикутника $0\le u\le shv$, $0\le v\le 2$; в) довжини сторін цього трикутника; г) кути цього трикутника.

У задачах 6-14 знайдіть перші та другі квадратичні форми поверхонь, гаусову та середню кривини, дослідіть характер точок.

6. Сфера $\overline{r}(u,v)=\{a\cos u\cos v,a\cos u\sin v,a\sin u\}$.

7. Еліпсоїд $\overline{r}(u,v)=\{a\cos u\cos v,b\cos u\sin v,c\sin u\}$.

8. Конус $\overline{r}(u,v)=\{av\cos u,bv\sin u,cv\}$.

9. Еліптичний циліндр $\overline{r}(u,v)=\{a\cos u,b\sin u,v\}$.

10. Гіперболічний циліндр $\overline{r}(u,v)=\left\{\frac{a}{2}\left(u+\frac{1}{u}\right),\frac{b}{2}\left(u-\frac{1}{u}\right),v\right\}$.

11. Параболічний циліндр $\overline{r}(u,v)=\left\{2pu^2,2pu,v\right\}$.

12. Однопорожнинний гіперболоїд

$$\overline{r}(u,v)=\left\{\frac{a}{2}\left(v+\frac{1}{v}\right)\cos u,\frac{b}{2}\left(v+\frac{1}{v}\right)\sin u,\frac{c}{2}\left(v-\frac{1}{v}\right)\right\}.$$

13. Двопорожнинний гіперболоїд

$$\overline{r}(u,v)=\left\{\frac{a}{2}\left(v-\frac{1}{v}\right)\cos u,\frac{b}{2}\left(v-\frac{1}{v}\right)\sin u,\frac{c}{2}\left(v+\frac{1}{v}\right)\right\}.$$

14. Еліптичний параболоїд $\overline{r}(u,v)=\left\{v\sqrt{p}\cos u,v\sqrt{p}\sin u,\frac{v^2}{2}\right\}$.

У задачах 15-18 виконайте повне дослідження поверхонь.

15. $z=xy$.

16. $z=\frac{x^2}{2}-y^2$.

17. $\overline{r}(u,v)=\left\{u\cos v,u\sin v,e^{-\frac{u^2}{2}}\right\}$.

18. $\overline{r}(u,v)=\{u\cos v,u\sin v,\ln u\}$.

Список літератури

1. Дифференциальная геометрия, топология, тензорный анализ */ Н. И.Кованцов, Г.М. Зражевская, В.Г Кочаровский, В.И. Михайловский.*: сб. задач. – К.: Вища школа, 1982. – 376 с.
2. *Рашевский П.К.* Курс дифференциальной геометрии. – М.-Л.: Изд-во технико-теоретической литературы, 1950. – 428 с.
3. *Погорелов А.В.* Лекции по дифференциальной геометрии. – Х. – Изд-во харьковского ун-та, 1955. –148с.
4. *Гильберт Д.*, *Кон-Фоссен С.* Наглядная геометрия: пер. с нем. М.:Наука, 1981. – 344с.
5. *Теорія поверхонь:* методичні вказівки та варіанти задач розрахункової роботи / уклад.:А.В. Донченко, О.О. Килимник, В. К. Чибіряков та ін. – К.: КНУБА, 2008. – 32 с.
6. *Криві і поверхні другого порядку:* Практ. посіб. / уклад.: Д.В.Максименко, Л.В.Соколова, Ю.О. Чорноіван – К.: КНУБА, 2014. – 31 с.

ЗМІСТ