МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

ВИЩА МАТЕМАТИКА

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

Навчальний посібник

*Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
як навчальний посібник для здобувачів ступеня бакалавра
за технічними спеціальностями*

Київ
КПІ ім. Ігоря Сікорського
2021

Вища математика: Диференціальне числення функцій багатьох змінних. Навчальний посібник. [Електронний ресурс] : навчальний посібник для здобувачів ступеня бакалавра за технічними спеціальностями / КПІ ім. Ігоря Сікорського; уклад. : В.А. Пилипенко, Є.В. Массалітіна. – Електронні текстові дані (1 файл: 3,466 Кбайт). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2021. – 62 с.

Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського (протокол №2 від 09.12.2021 р.) за поданням Вченої ради фізико-математичного факультету (протокол №1 від 23.09.2021 р.)

Електронне мережне навчальне видання

ВИЩА МАТЕМАТИКА

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

Навчальний посібник

Укладачі: *Пилипенко Віта Анатоліївна, канд. фіз.-мат. наук,*
Массалітіна Євгенія Вікторівна, канд. фіз.-мат. наук

Відповідальний редактор: *Дудкін Микола Євгенович, доктор фіз.-мат. наук,*
проф. кафедри МФ та ДР НТУУ «КПІ ім. Ігоря Сікорського»

Рецензент: *Диховичний Олександр Олександрович*, *канд. фіз.-мат. наук,*
доц. кафедри МА та ТЙ НТУУ «КПІ ім. Ігоря Сікорського»

Навчальний посібник до розділу «Диференціальне числення функцій багатьох змінних» з дисципліни «Вища математика» призначений для студентів технічних спеціальностей. Посібник містить теоретичний матеріал та приклади розв’язання типових завдань, що дозволяє студентам самостійно опрацьовувати дану тему.

Зміст

Вступ

Матеріал навчального посібника «Диференціальне числення функцій багатьох змінних» до відповідного розділу з дисципліни «Вища математика» відповідає навчальним програмам з вищої математики технічних спеціальностей «НТУУ КПІ ім. Ігоря Сікорського».

У навчальному посібнику «Диференціальне числення функцій багатьох змінних» містяться теоретичні відомості, а також широкий спектр прикладів та розв’язаних практичних завдань, які розкривають та ілюструють відповідні теоретичні питання, демонструють різноманітні характерні особливості функцій декількох змінних, формують основу математичного мислення та сприяють кращому засвоєнню теоретичного та практичного матеріалу.

Поняття і математичний апарат функцій, які залежать від декількох змінних, лежать в основі багатьох дисциплін таких, як диференціальні рівняння з частинними похідними, лінійне програмування та інше, і є необхідним набором знань для сучасного інженера.

Головна мета навчального посібника – допомогти студентам технічних спеціальностей засвоїти основні теоретичні поняття розділу «Диференціальне числення функцій багатьох змінних» та застосувати їх для розв’язання індивідуального (типового) розрахунку [10].

§1. Функції багатьох змінних. Основні означення

Поняття функції однієї змінної є досить вузьким і не в змозі описати всі залежності, які існують в природі. Навіть в самих простих задачах зустрічаються величини, значення яких визначаються сукупністю значень декількох величин. Наприклад, температура поверхні землі в довільній точці буде описуватися функцією двох змінних, де перша змінна – це довгота, а друга змінна – широта. Функція, яка описуватиме температуру атмосфери землі, залежатиме вже від трьох змінних, дві з яких вказуватимуть, над якою точкою земної поверхні проводиться вимірювання, а третя змінна задаватиме висоту, на якій вимірюється температура.

Функції декількох змінних, як природнє узагальнення функцій однієї змінної, виокремились в самостійний розділ математики достатньо давно і являються інструментом, який дозволяє описати велику кількість закономірностей, які існують у фізиці, техніці, економіці тощо.

Основні означення, які вводяться для функцій декількох змінних, є узагальненням відповідних означень для функцій однієї змінної.

Нехай задано множину $D \subset \mathbb{R}^2$ упорядкованих пар чисел (x, y) – точок $M(x, y)$ двовимірного простору $\mathbb{R}^2$.

- *Якщо кожній парі чисел $(x, y) \in D$ за певним законом поставлено у відповідність одне і тільки одне число $z \in \mathbb{R}$, то кажуть, що на множині D визначено **функцію z від двох змінних x і y** та записують $z = f(x, y)$ або $z = f(M)$.*

*Змінну z називають залежною змінною – **функцією**;*
*x і y – називають незалежними змінними – **аргументами**.*

- *Множину пар чисел (x, y), для яких функція $z = f(x, y)$ є визначеною, називають **областю визначення** цієї функції і позначають $D(f)$ або D.*

- *Множину значень функції* $z=f(x,y)$ *позначають*

$$E(f)=\{z\in\mathbb{R}:\ \forall(x,y)\in D(f),\ \ z=f(x,y)\}.$$

Функцію двох змінних можна задати аналітичним, графічним і табличним способом.

- *Графіком функції* $z=f(x,y)$ *в ПДСК*[1] *називається ГМТ*[2] $M(x,y,f(x,y))$, *проекції яких належать області* $D(f)$.

Це ГМТ утворює в просторі $\mathbb{R}^3$ *певну поверхню.*

Завдання 1.

Знайти $D(f)$ та $E(f)$ функції $z=-\sqrt{4-4x^2-y^2}$.

Розв'язання.

Областю визначення $D(f)$ заданої функції є множина тих точок, для яких вираз $\sqrt{4-4x^2-y^2}$ має зміст, тобто $4-4x^2-y^2\geq 0 \Rightarrow x^2+\dfrac{y^2}{4}\leq 1$ – це точки, які знаходяться на межі еліпса $x^2+\dfrac{y^2}{4}=1$ з півосями $a=1,\ b=2$ та всередині нього (рис. 1). Графіком функції $z=-\sqrt{4-4x^2-y^2}$ (рис. 2) є нижня по відношенню до площини Oxy частина еліпсоїда $x^2+\dfrac{y^2}{4}+\dfrac{z^2}{4}=1$ з півосями $a=1,\ b=2,\ c=2$. Отже, область визначення даної функції

$$D(f)=\left\{(x,y):\ x^2+\frac{y^2}{4}\leq 1\right\}.$$

Множина значень заданої функції – відрізок $E(f)=[-2,0]$.

Відповідь: $D(f)=\left\{(x,y):\ x^2+\dfrac{y^2}{4}\leq 1\right\},\ \ E(f)=[-2,0]$.

---

[1] ***ПДСК*** *– прямокутна Декартова система координат*
[2] ***ГМТ*** *– геометричне місце точок*

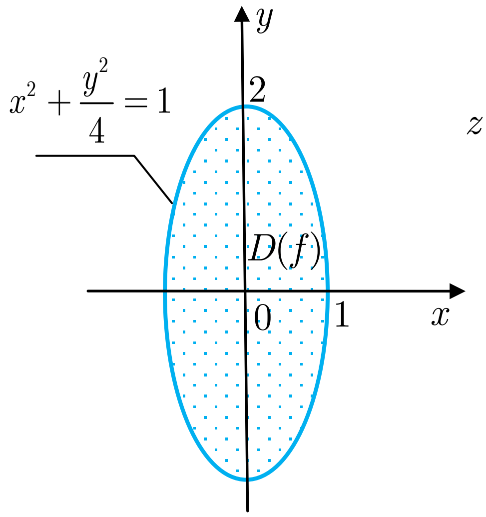

Рис. 1

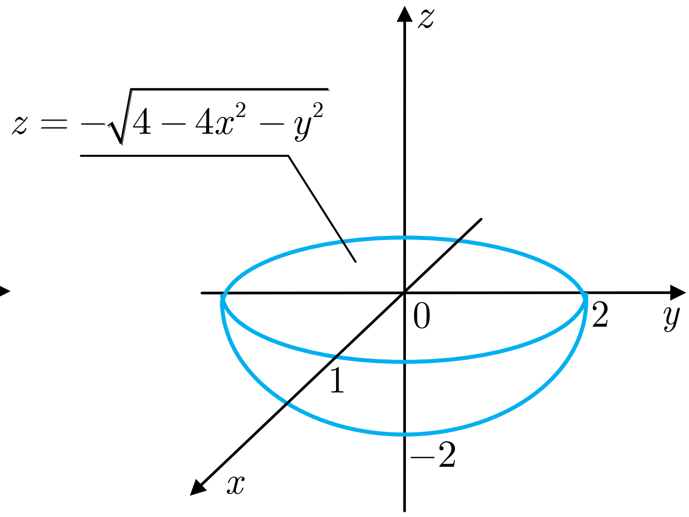

Рис. 2

Завдання 2.

Знайти області визначення функцій та зобразити їх на площині:

а) $z=\ln[x\ln(y-x)]$; **б)** $z=\sqrt{(x-2)\sin y}+\dfrac{3}{x-5}$.

Розв'язання.

а) Область визначення функції $z=\ln[x\ln(y-x)]$ знаходимо, розв'язуючи систему нерівностей:

$$D(f):\begin{cases} y-x>0,\\ x\ln(y-x)>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y>x,\\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x>0,\\ \ln(y-x)>0, \end{cases}\\ \begin{cases} x<0,\\ \ln(y-x)<0 \end{cases} \end{array}\right. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y>x,\\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x>0,\\ y-x>1, \end{cases}\\ \begin{cases} x<0,\\ y-x<1 \end{cases} \end{array}\right. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y>x,\\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x>0,\\ y>1+x, \end{cases}\\ \begin{cases} x<0,\\ y<1+x. \end{cases} \end{array}\right. \end{cases}$$

Отже, область визначення функції $z=\ln[x\ln(y-x)]$ – це відкрита область

$$y>x+1 \quad \text{при } x>0,$$

$$x<y<x+1 \quad \text{при } x<0.$$

Зробимо рисунок області визначення $D(f)$ (рис. 3).

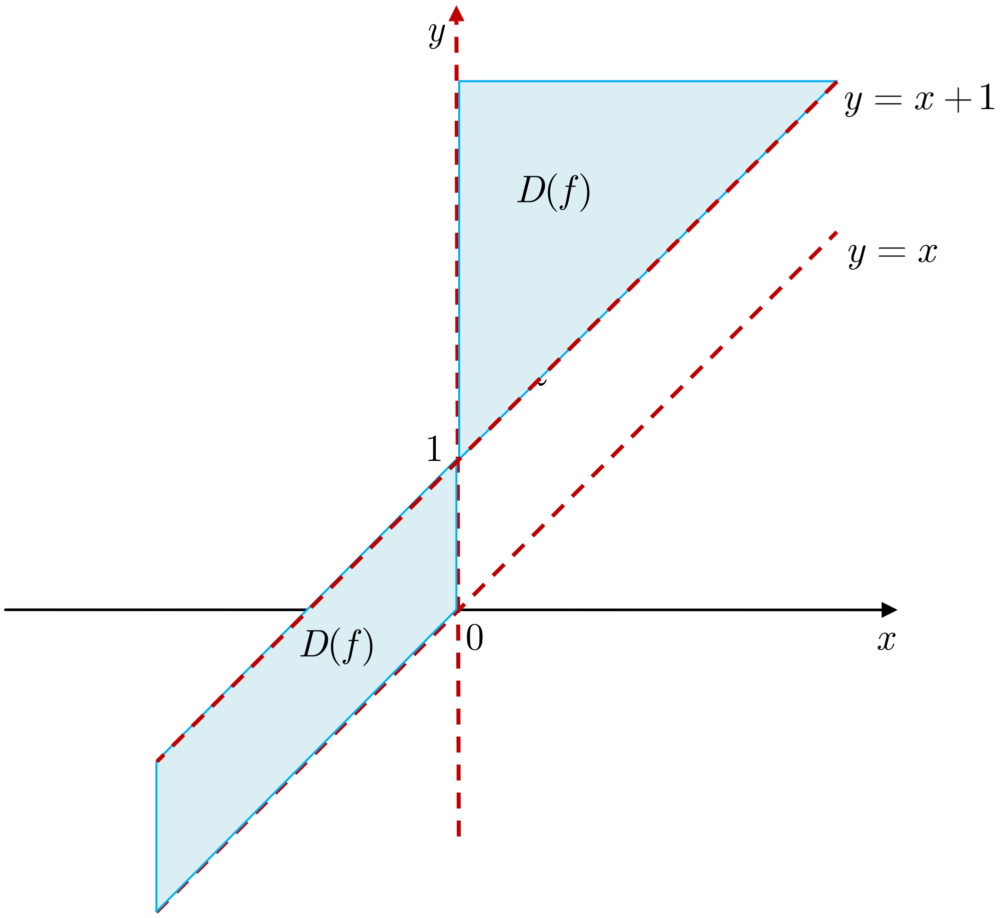

Рис. 3

б) Область визначення функції $z = \sqrt{(x-2)\sin y} + \dfrac{3}{x-5}$ знаходимо з системи:

$$D(f): \begin{cases} x-5 \neq 0, \\ (x-2)\sin y \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \neq 5, \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-2 \geq 0, \\ \sin y \geq 0, \end{cases} \\ \\ \begin{cases} x-2 \leq 0, \\ \sin y \leq 0 \end{cases} \end{array} \right. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \neq 5, \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geq 2, \\ 2\pi n \leq y \leq \pi + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \end{cases} \\ \\ \begin{cases} x \leq 2, \\ \pi + 2\pi k \leq y \leq 2\pi + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{cases} \end{array} \right. \end{cases}$$

Зробимо рисунок області визначення $D(f)$ (рис. 4).

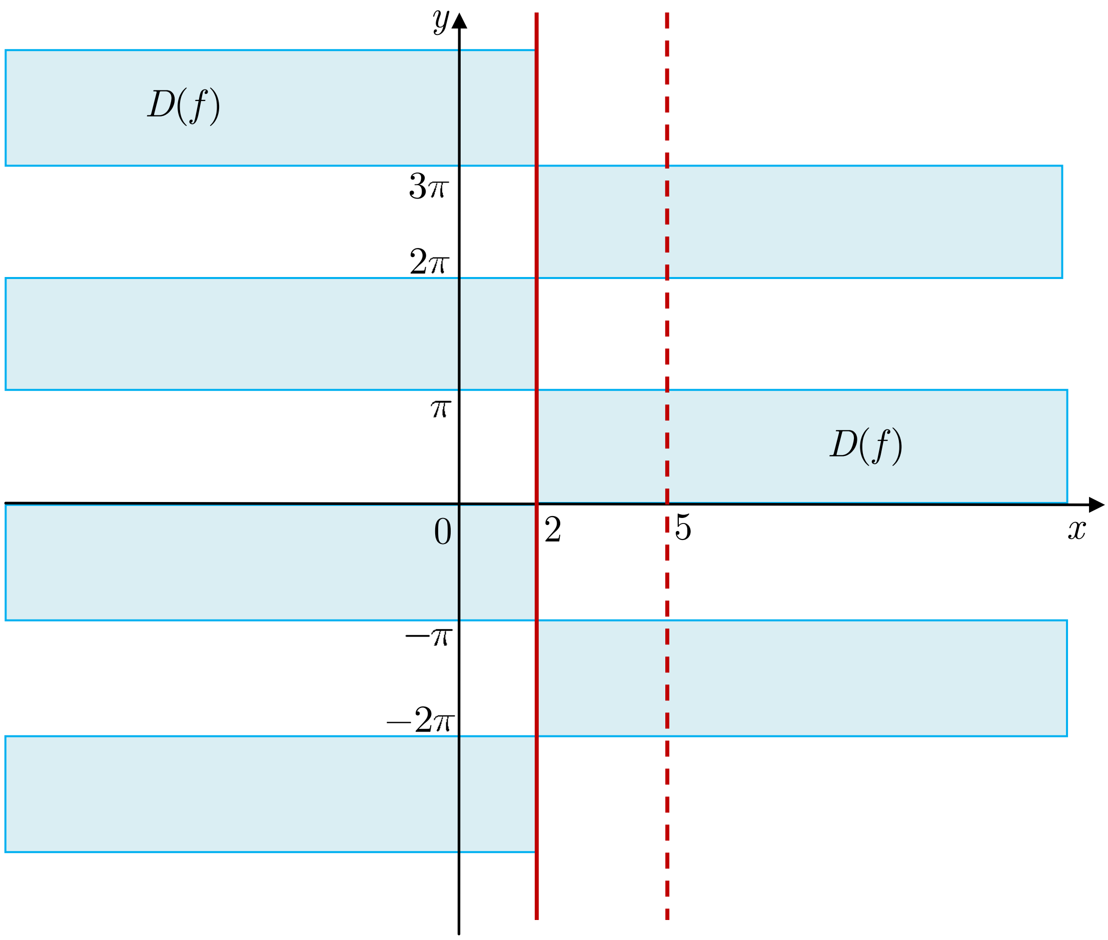

Рис. 4

Позначимо

$$\rho(M, M_0) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} -$$

відстань від точки $M_0(x_0, y_0)$ до точки $M(x, y)$.

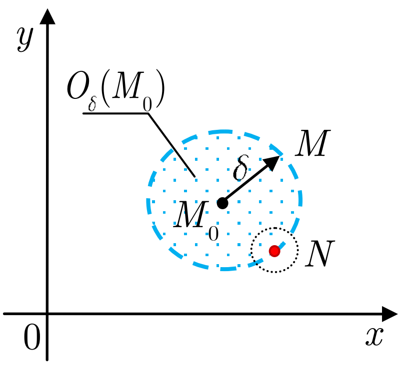

Рис. 5

- *δ - околом точки $M_0(x_0, y_0)$ називають множину точок, відстань яких до точки M_0 менша ніж δ:*

$$O_\delta(M_0) = \{(x, y): \ \rho(M, M_0) < \delta\}.$$

Отже, $O_\delta(M_0)$ – внутрішні точки круга радіуса δ з центром в M_0 (рис. 5).

- *Областю D називають множину точок площини, яка має властивість відкритості та зв'язності.*

Властивість відкритості: кожна точка належить множині разом з її δ - околом.

Властивість зв'язності: дві будь-які точки області можна сполучити неперервною лінією, яка повністю лежить в області D $(D \neq D_1 \cup D_2)$.

- *Точку N називають межовою точкою області $D \subset \mathbb{R}^2$, якщо будь-який її окіл містить як точки множини D, так і точки, які їй не належать (рис. 5).*
- *Сукупність межових точок області D називають її межею.*
- *Область D разом з її межею називають замкненою і позначають $\bar{D}$.*
- *Точки області D, які не лежать на її межі, називають внутрішніми.*
- *Область D називається обмеженою, якщо всі її точки належать деякому кругу скінченного радіуса R.*

Всі дані означення за аналогією можна узагальнити на випадок більшої кількості змінних.

Нехай задано множину D упорядкованих трійок (x, y, z) дійсних чисел, тобто точок $M(x, y, z)$ тривимірного простору $\mathbb{R}^3$.

- *Якщо кожній точці $(x, y, z) \in D$ за певним законом поставлено у відповідність єдине число $u \in \mathbb{R}$, то кажуть, що на множині D визначено функцію u від трьох змінних x, y і z та записують $u = f(x, y, z)$ або $u = f(M)$.*

Область визначення функції трьох змінних можна геометрично зобразити у вигляді деякої частини тривимірного простору. Саму функцію $u = f(x, y, z)$ геометрично зобразити неможливо. Надалі будемо розглядати в основному функції двох змінних.

§2. Границя функції багатьох змінних

• *(О. Коші[3]) Число A називають границею функції $z = f(M)$ в точці M_0 і позначають $A = \lim\limits_{M \to M_0} f(M)$, якщо для кожного числа $\varepsilon > 0$ знайдеться число $\delta > 0$ таке, що для всіх точок $M(x,y) \in D$, які задовольняють умову $0 < \rho(M, M_0) < \delta$, виконується нерівність $|f(M) - A| < \varepsilon$.*

$$A = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x,y) \quad \left(A = \lim_{M \to M_0} f(M)\right) \quad \Leftrightarrow$$

$$\forall \ \varepsilon > 0 \ \exists \ \delta(\varepsilon, M_0) > 0 \ \forall \ M(x,y) \in D: \ 0 < \rho(M, M_0) < \delta \ \Rightarrow \ |f(M) - A| < \varepsilon.$$

Користуючись означенням границі функції двох змінних, основні теореми про границі для функції однієї змінної можна перенести на функції двох змінних.

Теорема (про арифметичні властивості границь).

Нехай

1) *функції $f(M)$ і $g(M)$ визначені на множині D;*

2) $A = \lim\limits_{M \to M_0} f(M)$, $B = \lim\limits_{M \to M_0} g(M)$.

Тоді в точці M_0 $\exists$ границі:

$$\lim_{M \to M_0} (f(M) \pm g(M)) = \lim_{M \to M_0} f(M) \pm \lim_{M \to M_0} g(M) = A + B;$$

$$\lim_{M \to M_0} f(M) \cdot g(M) = \lim_{M \to M_0} f(M) \cdot \lim_{M \to M_0} g(M) = A \cdot B;$$

$$\lim_{M \to M_0} \frac{f(M)}{g(M)} = \frac{\lim\limits_{M \to M_0} f(M)}{\lim\limits_{M \to M_0} g(M)} = \frac{A}{B}, \quad g(M) \neq 0, \quad B \neq 0.$$

---

[3] ***Огюсте́н Луї́ Коші́*** *(фр. Augustin Louis Cauchy; 21 серпня 1789, Париж — 23 травня 1857) — французький математик, член Паризької академії наук (1816), Петербурзької академії наук (1831). Написав і опублікував понад 800 наукових робіт з арифметики і теорії чисел, алгебри, математичного аналізу, диференціальних рівнянь, теоретичної і небесної механіки, математичної фізики.*

Завдання 3.

Обчислити границі:

а) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+9}-3}$; **б)** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x-y}{x+y}$.

Розв'язання.

а) $$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+9}-3} = \left| M(x,y)\to M_0(0,0), \quad \rho(M,M_0)=\sqrt{x^2+y^2}\to 0 \right| =$$

$$= \lim_{\rho\to 0}\frac{\rho^2}{\sqrt{\rho^2+9}-3} = \lim_{\rho\to 0}\frac{\rho^2(\sqrt{\rho^2+9}+3)}{(\sqrt{\rho^2+9}-3)(\sqrt{\rho^2+9}+3)} = \lim_{\rho\to 0}\frac{\cancel{\rho^2}(\sqrt{\rho^2+9}+3)}{\cancel{\rho^2}} = 6.$$

б) $$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x-y}{x+y} = \left| \begin{array}{l} M(x,y)\to M_0(0,0), \\ \ell : y = kx, \quad k\in\mathbb{R} \end{array} \right| = \lim_{x\to 0}\frac{x-kx}{x+kx} = \lim_{x\to 0}\frac{1-k}{1+k} = \begin{cases} 1, & k=0, \\ 0, & k=1. \end{cases}$$

Якщо точка $M(x,y)$ наближається до точки $M_0(0;0)$ по прямій $y=kx$, то функція $z=f(x,y)=\dfrac{x-y}{x+y}$ в точці $M_0(0;0)$ не має границі, оскільки при різних значеннях числа k функція приймає різні граничні значення.

Відповідь: а) 6; **б)** границі не існує.

Зауваження.

Якщо границя $\lim\limits_{M\to M_0} f(M)=A$ *існує, то вона не залежить від шляху, за яким точка* M *прямує до точки* M_0.

§3. Неперервність функції двох змінних

Поняття неперервності функції двох змінних вводять за допомогою поняття границі.

- *Функцію $z = f(x,y)$ називають неперервною в точці $M_0(x_0,y_0)$, якщо:*

1) функція $z = f(x,y)$ визначена в точці M_0 та її околі;

2) $\exists$ границя $\lim\limits_{M\to M_0} f(x,y)$;

3) $\lim\limits_{M\to M_0} f(x,y) = f(x_0,y_0)$ – границя дорівнює значенню функції в точці.

Дамо рівносильне означення неперервності функції в точці.

Позначимо $\left.\begin{aligned}\Delta x &= x - x_0,\\ \Delta y &= y - y_0\end{aligned}\right\}$ – прирости аргументів x і y,

а Δz – повний приріст функції $z = f(M)$ в точці $M_0(x_0,y_0)$:

$$\Delta z = f(x,y) - f(x_0,y_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0,y_0).$$

Тоді з пункту 3) випливає, що $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} (f(x,y) - f(x_0,y_0)) = 0.$

- *Функцію $z = f(x,y)$ називають неперервною в точці $M_0(x_0,y_0)$, якщо повний її приріст в цій точці прямує до нуля, коли прирости її аргументів x і y прямують до нуля*

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \Delta z = 0.$$

- *Точки, в яких функція $z = f(M)$ є неперервною, називають точками неперервності функції, а точки, в яких неперервність порушується, називають точками розриву функції.*

Наприклад.

а) Функція $z = \dfrac{1}{x^2 + y^2}$ має розрив в точці $O(0,0)$.

б) Функція $z = \dfrac{1}{\sin \pi x} + \dfrac{1}{\sin \pi y}$ не визначена при

$$\left[\begin{array}{l}\sin\pi x=0,\\ \sin\pi y=0\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\pi x=\pi n,\\ \pi y=\pi k\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}x=n,\\ y=k,\end{array}\right. \quad n,k\in\mathbb{Z}.$$

Отже, функція $z=\dfrac{1}{\sin\pi x}+\dfrac{1}{\sin\pi y}$ має розриви на прямих $x=n,\quad y=k,$ $n,k\in\mathbb{Z}.$

- *Функцію $z=f(M)$ називають неперервною на множині $D\subset\mathbb{R}^2$, якщо вона неперервна в кожній точці цієї множини.*

Зауваження.

Використовуючи поняття неперервності функції декількох змінних і відповідні теореми про границі, можна довести, що в результаті арифметичних операцій над неперервними функціями отримуємо неперервну функцію. Крім того, побудова складеної функції з неперервних функцій також приводить до неперервної функції.

Основні властивості функції, неперервної в замкненій обмеженій області

Властивості функції однієї змінної, неперервної на відрізку, можна узагальнити на функцію декількох змінних, яка неперервна в замкненій обмеженій області $\bar{D}\in\mathbb{R}^2$.

Теореми Веєрштрасса[4] 1-2.

Якщо функція $z=f(M)$ неперервна в замкненій обмеженій області $\bar{D}$, то:

1) функція $z=f(M)$ є обмеженою в області $\bar{D}$;

2) $\exists$ точки $M_1, M_2\in\bar{D}$, в яких функція $z=f(M)$ набуває відповідно найменшого m^* та найбільшого M^* значення.

---

[4] ***Карл Теодор Вільгельм Веєрштрасс*** *(нім. Karl Theodor Wilhelm Weierstraß; 31 жовтня 1815 — 19 лютого 1897) — німецький математик, професор Берлінського університету (з 1856). Дослідження Веєрштрасса присвячені математичному аналізу, теорії функцій, варіаційному численню, диференціальній геометрії та лінійній алгебрі.*

Теорема Больцано[5]–Коші.
Якщо функція $z = f(M)$ неперервна в замкненій обмеженій області $\bar{D}$ і значення $m^* < c < M^*$, то $\exists$ точка $M_0 \in \bar{D}$, в якій $f(M_0) = c$.

§4. Частинні похідні

Нехай функція $z = f(M)$ визначена в деякому околі точки $M(x, y)$.

1. Зафіксуємо y і надамо змінній x приросту Δx так, щоб точка $x + \Delta x$ належала заданому околу.

Тоді змінна z отримає частинний приріст $\Delta_x z$ по змінній x:

$$\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y).$$

- *Якщо $\exists$ границя*

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x},$$

то її називають частинною похідною функції $z = f(x, y)$ в точці $M(x, y)$ по змінній x та позначають одним із таких символів: z'_x, f'_x, $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial x}$.

Отже,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x}.$$

2. Зафіксуємо x і надамо змінній y приросту Δy так, щоб точка $y + \Delta y$ належала заданому околу.

Тоді змінна z отримає частинний приріст $\Delta_y z$ по змінній y:

$$\Delta_y z = f(x, y + \Delta y) - f(x, y).$$

[5] ***Бернáрд Больцáно*** *(чеськ. Bernard Placidus Johann Nepomuk Bolzano; 5 жовтня 1781 м. Прага — 18 грудня 1848) — чеський католицький теолог, філософ і математик; професор філософії релігії. Автор першої строгої теорії дійсних чисел і один із основоположників теорії множин.*

- *Якщо $\exists$ границя*

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y},$$

то її називають частинною похідною функції $z = f(x, y)$ в точці $M(x, y)$ по змінній y та позначають одним із таких символів: z'_y, f'_y, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$.

Отже,

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y}.$$

Згідно з означенням, при знаходженні частинної похідної z'_x обчислюють звичайну похідну функції однієї змінної x, вважаючи змінну y константою, а при знаходженні частинної похідної z'_y константою вважають змінну x.

З означення випливає, що частинні похідні функції $z = f(x, y)$ знаходять за формулами і правилами обчислення похідних функцій однієї змінної.

Завдання 4.

Знайти частинні похідні функцій:

а) $z = y^2 + \arcsin\frac{x}{y}$; **б)** $z = (1 + xy)^y$.

Розв'язання.

а) Знайдемо частинні похідні функції $z = y^2 + \arcsin\frac{x}{y}$.

При обчисленні частинної похідної по змінній x, змінну y вважаємо фіксованою, тоді

$$\underset{y-const}{\frac{\partial z}{\partial x}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{y^2}}} \cdot \frac{1}{y} = \frac{1}{\sqrt{y^2 - x^2}}.$$

Аналогічно, фіксуючи змінну x, знаходимо частинну похідну по змінній y:

$$\underset{x-const}{\frac{\partial z}{\partial y}} = 2y + \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{y^2}}} \cdot \frac{-x}{y^2} = 2y - \frac{x}{y\sqrt{y^2 - x^2}}.$$

б) Знайдемо частинні похідні функції $z=(1+xy)^y$.

Зафіксуємо змінну y, тоді $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{y-const}=y(1+xy)^{y-1}\cdot y=y^2(1+xy)^{y-1}$.

Оскільки функція $z=(1+xy)^y$ є показниково-степеневою відносно змінної y, то для знаходження частинної похідної по змінній y, скористаємося методом логарифмічного диференціювання. Прологарифмуємо функцію $z=(1+xy)^y$:

$$\ln z=\ln(1+xy)^y \quad\Rightarrow\quad \ln z=y\ln(1+xy).$$

Фіксуючи змінну x, продиференціюємо останню рівність по y:

$$\frac{1}{z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=\ln(1+xy)+y\cdot\frac{x}{1+xy} \quad\Rightarrow\quad \frac{\partial z}{\partial y}=z\left(\ln(1+xy)+\frac{xy}{1+xy}\right) \quad\Rightarrow$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=(1+xy)^y\left(\ln(1+xy)+\frac{xy}{1+xy}\right)=(1+xy)^y\ln(1+xy)+xy(1+xy)^{y-1}.$$

Відповідь: а) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{1}{\sqrt{y^2-x^2}},\quad \dfrac{\partial z}{\partial y}=2y-\dfrac{x}{y\sqrt{y^2-x^2}};$

б) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=y^2(1+xy)^{y-1},\quad \dfrac{\partial z}{\partial y}=(1+xy)^y\ln(1+xy)+xy(1+xy)^{y-1}.$

Завдання 5.

Довести, що функція $z=\ln(x^2+xy+y^2)$ задовольняє рівняння

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=2.$$

Розв'язання.

Знайдемо частинні похідні першого порядку функції $z=\ln(x^2+xy+y^2)$:

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{y-const}=\frac{1}{x^2+xy+y^2}\cdot(2x+y),\qquad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{x-const}=\frac{1}{x^2+xy+y^2}\cdot(x+2y).$$

Підставимо отримані частинні похідні в рівняння $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=2$:

$$x \cdot \frac{1}{x^2 + xy + y^2} \cdot (2x + y) + y \cdot \frac{1}{x^2 + xy + y^2} \cdot (x + 2y) = 2,$$

$$\frac{2x^2 + xy}{x^2 + xy + y^2} + \frac{xy + 2y^2}{x^2 + xy + y^2} = 2,$$

$$\frac{2(x^2 + xy + y^2)}{x^2 + xy + y^2} = 2,$$

$$2 \equiv 2.$$

Отже, функція $z = \ln(x^2 + xy + y^2)$ задовольняє задане рівняння.

Геометричний зміст частинних похідних функції двох змінних

Графіком функції $z = f(x, y)$ є деяка поверхня (рис. 6).

Візьмемо точку (x_0, y_0) на площині Oxy. Перетнемо поверхню $z = f(x, y)$ площиною $y = y_0$, яка є паралельною площині Oxz.

В результаті отримаємо криву

$$L_1 : \begin{cases} z = f(x, y), \\ y = y_0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad z = f(x, y_0)$$ – це

функція однієї змінної x.

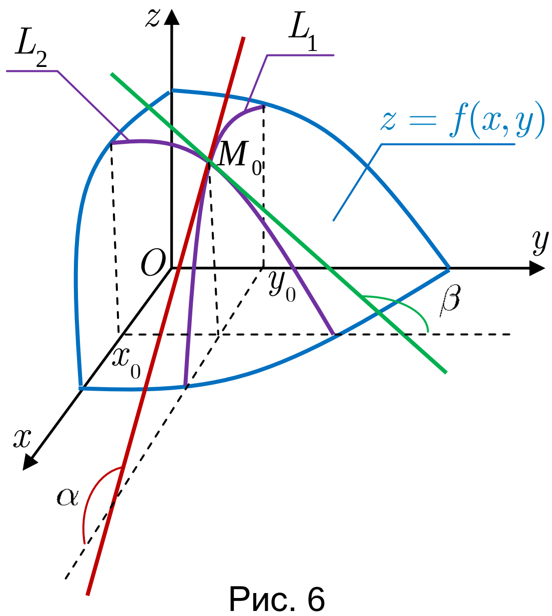

Рис. 6

Виходячи з геометричного змісту похідної функції однієї змінної, одержимо, що геометричний зміст частинної похідної функції $z = f(x, y)$ по змінній x в точці $M_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ виражається формулою

$$f'_x(x_0, y_0) = \operatorname{tg} \alpha,$$

де α – кут між додатнім напрямом осі Ox і дотичною прямою, проведеною до кривої L_1 в точці M_0.

Аналогічно частинна похідна функції $z = f(x, y)$ по змінній y в точці $M_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ дорівнює

$$f'_y(x_0, y_0) = \operatorname{tg}\beta,$$

де β – кут між додатнім напрямом осі Oy і дотичною прямою в точці M_0, проведеною до кривої L_2, яка є лінією перетину поверхні $z = f(x, y)$ площиною $x = x_0$, паралельною площині Oyz.

Завдання 6.

Знайти кут α, який утворює дотична до лінії

$$L: \quad \begin{cases} z = \dfrac{x^2}{8} + \dfrac{y^2}{4}, \\ y = 4 \end{cases}$$

з додатним напрямом осі абсцис в точці $M_0(4, 4, 6)$.

Розв'язання.

Скористаємося геометричним змістом частинної похідної функції двох змінних по змінній x:

$$\operatorname{tg}\alpha = f'_x(x_0, y_0).$$

Оскільки $f'_x(x, y) = \underset{y-const}{\dfrac{\partial z}{\partial x}} = \dfrac{x}{4}$, тоді $\operatorname{tg}\alpha = f'_x(x_0, y_0) = f'_x(4, 4) = 1 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 45^\circ$.

Відповідь: $\alpha = 45^\circ$.

§5. Диференційовність функції двох змінних

Нехай функція $z = f(x, y)$ визначена в деякому околі точки $M(x, y)$. Складемо повний приріст функції в точці M:

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y).$$

- *Функцію $z = f(x,y)$ називають диференційовною в точці $M(x,y)$, якщо її повний приріст в цій точці можна подати у вигляді*

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y,$$

де A, B – дійсні числа, які не залежать від Δx і Δy,

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= \alpha(\Delta x, \Delta y), \\ \beta &= \beta(\Delta x, \Delta y) \end{aligned}\right\} - \text{НМФ[6] при } \begin{aligned} \Delta x &\to 0, \\ \Delta y &\to 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} &\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \alpha(\Delta x, \Delta y) = 0, \\ &\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \beta(\Delta x, \Delta y) = 0. \end{aligned}$$

Теорема (необхідні умови диференційовності функції).

Нехай функція $z = f(x,y)$ диференційовна в точці $M(x,y)$, тоді:

1) функція $z = f(x,y)$ є неперервною в точці $M(x,y)$;

2) функція $z = f(x,y)$ має в точці $M(x,y)$ частинні похідні

$$f'_x(x,y) = A, \qquad f'_y(x,y) = B.$$

▷ 1. Доведемо неперервність. Оскільки функція $z = f(x,y)$ диференційовна в точці $M(x,y)$, то виконується рівність

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y.$$

Перейдемо в цій рівності до границі

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \Delta z = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} (A\Delta x + B\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y) = 0.$$

Отже, функція $z = f(x,y)$ – неперервна в точці $M(x,y)$.

2. Знайдемо частинні похідні та покажемо, що

$$f'_x(x,y) = A, \qquad f'_y(x,y) = B.$$

В рівності $\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y$ покладемо $\Delta y = 0, \quad \Delta x \neq 0.$

Отримаємо частинний приріст $\Delta_x z$ по змінній x:

$$\Delta_x z = A \cdot \Delta x + +\alpha(\Delta x, 0) \cdot \Delta x.$$

[6] ***НМФ** – нескінченно мала функція*

За означенням частинної похідної функції $z = f(x, y)$ по змінній x маємо

$$f'_x(x, y) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{A \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x, 0) \cdot \Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (A + \alpha(\Delta x, 0)) =$$

$$= A + \lim_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x, 0) = A \quad \Rightarrow \quad f'_x(x, y) = A.$$

Аналогічно доводиться, що $f'_y(x, y) = B.$ $\triangleleft$

Зауваження.

Необхідна умова диференційовності не є достатньою. Тобто з неперервності функції двох змінних та існування обох її частинних похідних в заданій точці не випливає диференційованість функції в цій точці.

Наприклад.

Функція $z = \sqrt[5]{x + y}$ є неперервною в точці $(0, 0)$, але не є диференційовною в цій точці.

Справді, обчислимо границю

$$f'_x(x, y) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0, 0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt[5]{(0 + \Delta x) + 0} - 0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt[5]{\Delta x^4}} = \infty.$$

Отже, функція $z = \sqrt[5]{x + y}$ не має частинної похідної по змінній x в точці $(0, 0)$, тому вона не диференційовна в цій точці.

Аналогічно можна показати, що задана функція не має частинної похідної і по змінній y в точці $(0, 0)$.

Теорема (достатня умова диференційовності функції).

Якщо функція $z = f(x, y)$ має в точці $M(x, y)$ неперервні частинні похідні $f'_x(x, y)$, $f'_y(x, y)$, то функція $z = f(x, y)$ є диференційовною в точці $M(x, y)$.

§ 6. Повний диференціал функції двох змінних

Розглянемо функцію $z = f(x, y)$ диференційовну в точці $M(x, y)$.

- *Суму двох перших доданків в рівності*

$$\Delta z = \underbrace{A\Delta x + B\Delta y} + \alpha\Delta x + \beta\Delta y,$$

називають головною частиною повного приросту функції .

- *Диференціалом незалежної змінної x називають приріст Δx:*

$$dx = \Delta x.$$

- *Диференціалом незалежної змінної y називають приріст Δy:*

$$dy = \Delta y.$$

- *Повним диференціалом функції $z = f(x, y)$ називають лінійну щодо Δx і Δy головну частину повного приросту функції $z = f(x, y)$ в точці $M(x, y)$*

$$dz = A\Delta x + B\Delta y \quad \xRightarrow[\text{умови диференційовності)}]{\text{за теоремою (про необхідні}}$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy.$$

Повний диференціал функції трьох змінних $u = f(x, y, z)$ має вигляд:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz.$$

Завдання 7.

Знайти повний диференціал функції трьох змінних $u = x^{\frac{y}{z}}$.

Розв'язання.

Знайдемо частинні похідні першого порядку функції $u = x^{\frac{y}{z}}$:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{y,z-const} = \frac{y}{z}x^{\frac{y}{z}-1}, \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{x,z-const} = x^{\frac{y}{z}}\ln x \cdot \frac{1}{z}, \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{x,y-const} = x^{\frac{y}{z}}\ln x \cdot \left(-\frac{y}{z^2}\right).$$

Підставимо отримані частинні похідні в формулу повного диференціала функції трьох змінних

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz =$$

$$= \frac{y}{z}x^{\frac{y}{z}-1}dx + \frac{1}{z}x^{\frac{y}{z}}\ln x\, dy - \frac{y}{z^2}x^{\frac{y}{z}}\ln x\, dz.$$

Відповідь: $du = \frac{y}{z}x^{\frac{y}{z}-1}dx + \frac{1}{z}x^{\frac{y}{z}}\ln x\, dy - \frac{y}{z^2}x^{\frac{y}{z}}\ln x\, dz.$

Застосування повного диференціала до наближених обчислень

Нехай функція $z = f(x,y)$ диференційовна в точці $M(x_0, y_0)$.

З означення повного диференціала функції $z = f(x,y)$ випливає, що для достатньо малих $|\Delta x|$ і $|\Delta y|$ має місце наближена рівність $\Delta z \approx dz$. Оскільки

$$\left.\begin{array}{l} \Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0), \\ dz = df = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\,\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\,\Delta y \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$f(x_0 + \Delta x,\, y_0 + \Delta y) \approx f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\,\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\,\Delta y.$$

Отже, формула для наближеного обчислення значення функції $z = f(x,y)$ в заданій точці $M(x,y)$, де $x = x_0 + \Delta x$, $y = y_0 + \Delta y$, за допомогою повного диференціала має вигляд:

$$f(x,y) = f(x_0 + \Delta x,\, y_0 + \Delta y) \approx f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\,\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\,\Delta y.$$

Завдання 8.

Обчислити наближено за допомогою повного диференціала:

а) $1{,}04^{2.03}$; **б)** $\sqrt{5\,e^{0{,}02} + (1{,}97)^2}$.

Розв'язання.

Будемо використовувати формулу для наближеного обчислення:

$$f(x,y)=f(x_0+\Delta x,\, y_0+\Delta y)\approx f(x_0,y_0)+\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\,\Delta x+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\,\Delta y.$$

а) Обчислимо $1,04^{2.03}$.

Шукане число будемо розглядати як значення функції $f(x,y)=x^y$ при $x=1,04$ і $y=2,03$, де

$$x=x_0+\Delta x=1+0,04=1,04,\quad x_0=1,\quad \Delta x=0,04,$$
$$y=y_0+\Delta y=2+0,03=2,03,\quad y_0=2,\quad \Delta y=0,03.$$

1. $f(x_0,y_0)=f(1,2)=1;$

2. $\underset{y-const}{\dfrac{\partial f}{\partial x}}=yx^{y-1};\qquad \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,2)=2;$

3. $\underset{x-const}{\dfrac{\partial f}{\partial y}}=x^y\ln x;\qquad \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=\dfrac{\partial f}{\partial y}(1,2)=0.$

Підставляючи всі знайдені значення в формулу наближеного обчислення, отримаємо:

$$1,04^{2.03}\approx f(1,2)+\frac{\partial f}{\partial x}(1,2)\,\Delta x+\frac{\partial f}{\partial y}(1,2)\,\Delta y\approx 1+2\cdot 0,04+0\cdot 0,03\approx 1,08.$$

б) Обчислимо $\sqrt{5\,e^{0,02}+(1,97)^2}$.

Для цього розглянемо функцію $f(x,y)=\sqrt{5\,e^x+y^2}$ і знайдемо її значення при $x=0,02$ і $y=1,97$, де

$$x=x_0+\Delta x=0+0,02=0,02,\quad x_0=0,\quad \Delta x=0,02,$$
$$y=y_0+\Delta y=2-0,03=1,97,\quad y_0=2,\quad \Delta y=-0,03.$$

1. $f(x_0,y_0)=f(0,2)=\sqrt{5\,e^0+2^2}=3;$

2. $\underset{y-const}{\dfrac{\partial f}{\partial x}}=\dfrac{5\,e^x}{2\sqrt{5\,e^x+y^2}};\qquad \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,2)=\dfrac{5}{6};$

3. $\underset{x-const}{\dfrac{\partial f}{\partial y}}=\dfrac{y}{\sqrt{5\,e^x+y^2}};\qquad \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,2)=\dfrac{2}{3};$

Підставимо всі знайдені значення в формулу наближеного обчислення, одержимо:

$$\sqrt{5\,\mathrm{e}^{0,02}+(1,97)^2} \approx f(0,2)+\frac{\partial f}{\partial x}(0,2)\ \Delta x+\frac{\partial f}{\partial y}(0,2)\ \Delta y \approx$$

$$\approx 3+\frac{5}{6}\cdot 0,02+\frac{2}{3}\cdot(-0,03) \approx 3+\frac{0,1}{6}-0,02 \approx 2,996(6).$$

Відповідь: а) $1,04^{2.03} \approx 1,08$; **б)** $\sqrt{5\,\mathrm{e}^{0,02}+(1,97)^2} \approx 2,996(6)$.

§7. Похідна складеної функції. Повна похідна

Нехай $z=f(x,y)$– функція двох змінних, причому $x=x(t)$, $y=y(t)$.

Тоді $z=f(x(t),y(t))$ – складена функція однієї змінної.

Теорема 1 (про похідну складеної функції).

Якщо

1) функція $z=f(x,y)$ – диференційована в точці $M(x,y)$,

2) функції $x=x(t)$, $y=y(t)$ – диференційовні функції однієї змінної t,

тоді похідну складеної функції $z=f(x(t),y(t))$ обчислюють за формулою

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}. \qquad (1)$$

▷ 1. Якщо функція $z=f(x,y)$ диференційовна в точці $M(x,y)$, то її повний приріст можна представити у вигляді

$$\Delta z=\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y+\alpha\Delta x+\beta\Delta y,$$ де $\left.\begin{matrix}\alpha=\alpha(\Delta x,\Delta y),\\ \beta=\beta(\Delta x,\Delta y)\end{matrix}\right\}$ – НМФ при $\begin{matrix}\Delta x\to 0,\\ \Delta y\to 0.\end{matrix}$

2. Оскільки $x=x(t)$, $y=y(t)$ – диференційовні функції, то вони неперервні.

За означенням неперервності $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\Delta x=0,\quad \lim\limits_{\Delta t\to 0}\Delta y=0.$

3. Надамо змінній t приросту Δt. Тоді функції $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = f(x, y)$ отримають відповідно прирости Δx, Δy та Δz.

Знайдемо похідну

$$\frac{dz}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta t} =$$

$$= \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \underbrace{\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}}_{\frac{dx}{dt}} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \underbrace{\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t}}_{\frac{dy}{dt}} + \underbrace{\lim_{\Delta t \to 0} \alpha}_{=0} \cdot \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} + \underbrace{\lim_{\Delta t \to 0} \beta}_{=0} \cdot \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} =$$

$$= \left| \Delta t \to 0, \quad \begin{matrix} \Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0 \end{matrix} \right| = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + 0 \cdot \frac{dx}{dt} + 0 \cdot \frac{dy}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}. \quad \lhd$$

Зауваження.

Якщо $u = f(x, y, z)$ *– функція трьох змінних, де* $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, *то похідну складеної функції* $u = f(x(t), y(t), z(t))$ *обчислюють за формулою*

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{dz}{dt}. \tag{2}$$

Завдання 9.

Знайти похідні складених функцій:

а) $z = (1 + y^2)\ln x$, де $x = t^3$, $y = \mathrm{e}^{t^3}$;

б) $u = \log_5(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^y + \mathrm{e}^z)$, де $x = \sin^2 t$, $y = \sqrt{t^3 + 1}$, $z = \mathrm{tg}\, t$.

Розв'язання.

а) Розглянемо складену функцію $z = (1 + y^2)\ln x$, де $x = t^3$, $y = \mathrm{e}^{t^3}$.

Обчислимо похідні:

$$\underset{y-const}{\frac{\partial z}{\partial x}} = (1 + y^2) \cdot \frac{1}{x}, \qquad \underset{x-const}{\frac{\partial z}{\partial y}} = 2y \ln x, \qquad \frac{dx}{dt} = 3t^2, \qquad \frac{dy}{dt} = \mathrm{e}^{t^3} \cdot 3t^2.$$

Підставимо знайдені похідні в формулу (1):

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt} =$$

$$= \frac{1+y^2}{x}\cdot 3t^2 + 2y\ln x\cdot 3t^2\,\mathrm{e}^{t^3} = \left| x = t^3,\ \ y = \mathrm{e}^{t^3} \right| =$$

$$= \frac{1+\mathrm{e}^{2t^3}}{t^3}\cdot 3t^2 + 2\,\mathrm{e}^{t^3}\cdot\ln t^3\cdot 3t^2\,\mathrm{e}^{t^3} = \frac{3}{t}(1+\mathrm{e}^{2t^3}) + 6t^2\,\mathrm{e}^{2t^3}\ln t^3.$$

б) Розглянемо функцію $u = \log_5(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^y + \mathrm{e}^z)$, де $x = \sin^2 t$, $y = \sqrt{t^3+1}$, $z = \mathrm{tg}\, t$.

Знайдемо похідні:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{y,z-const} = \frac{\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^y+\mathrm{e}^z)\ln 5}, \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{x,z-const} = \frac{\mathrm{e}^y}{(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^y+\mathrm{e}^z)\ln 5}, \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{x,y-const} = \frac{\mathrm{e}^z}{(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^y+\mathrm{e}^z)\ln 5},$$

$$\frac{dx}{dt} = 2\sin t\,\cos t = \sin 2t, \qquad \frac{dy}{dt} = \frac{3t^2}{2\sqrt{t^3+1}}, \qquad \frac{dz}{dt} = \frac{1}{\cos^2 t} = \sec^2 t.$$

Підставимо в формулу (2):

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{dz}{dt} =$$

$$= \frac{1}{(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^y+\mathrm{e}^z)\ln 5}\left(\mathrm{e}^x\sin 2t + \mathrm{e}^y\frac{3t^2}{2\sqrt{t^3+1}} + \mathrm{e}^z\sec^2 t\right) = \left|\begin{array}{l} x = \sin^2 t, \\ y = \sqrt{t^3+1}, \\ z = \mathrm{tg}\, t \end{array}\right| =$$

$$= \frac{1}{(\mathrm{e}^{\sin^2 t} + \mathrm{e}^{\sqrt{t^3+1}} + \mathrm{e}^{\mathrm{tg}\, t})\ln 5}\left(\mathrm{e}^{\sin^2 t}\sin 2t + \mathrm{e}^{\sqrt{t^3+1}}\frac{3t^2}{2\sqrt{t^3+1}} + \mathrm{e}^{\mathrm{tg}\, t}\sec^2 t\right).$$

Відповідь: а) $\dfrac{dz}{dt} = \dfrac{3}{t}(1+\mathrm{e}^{2t^3}) + 6t^2\,\mathrm{e}^{2t^3}\ln t^3;$

б) $\dfrac{du}{dt} = \dfrac{1}{(\mathrm{e}^{\sin^2 t} + \mathrm{e}^{\sqrt{t^3+1}} + \mathrm{e}^{\mathrm{tg}\, t})\ln 5}\left(\mathrm{e}^{\sin^2 t}\sin 2t + \mathrm{e}^{\sqrt{t^3+1}}\dfrac{3t^2}{2\sqrt{t^3+1}} + \mathrm{e}^{\mathrm{tg}\, t}\sec^2 t\right).$

Наслідок (формула повної похідної).

Якщо $z = f(x,y)$, *де* $y = y(x)$, *то похідну складеної функції* $z = f(x, y(x))$ *обчислюють за формулою*

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dx}. \qquad (3)$$

Зауваження.

Якщо $u = f(x, y, z)$ *– функція трьох змінних, де* $y = y(x)$, $z = z(x)$, *то* *формула повної похідної складеної функції* $u = f(x, y(x), z(x))$ *має вигляд*

$$\frac{du}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{dz}{dx}. \qquad (4)$$

Завдання 10.

Знайти повні похідні складених функцій:

а) $z = e^{xy}\sqrt{1-x^2}$, де $y = x\sin^3 x$;

б) $u = 3^{y^2-z^2}\cdot \operatorname{ctg} 2x$, де $y = \cos x$, $z = \sin x$.

Розв'язання.

а) Розглянемо функцію $z = e^{xy}\sqrt{1-x^2}$, де $y = x\sin^3 x$.

Обчислимо похідні:

$$\underset{y-const}{\frac{\partial z}{\partial x}} = y\,e^{xy}\sqrt{1-x^2} - e^{xy}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad \underset{x-const}{\frac{\partial z}{\partial y}} = x\,e^{xy}\sqrt{1-x^2},$$

$$\frac{dy}{dx} = (x\sin^3 x)' = \sin^3 x + x\cdot 3\sin^2 x\cdot\cos x = \sin^2 x\cdot(\sin x + 3x\cos x).$$

Підставимо в формулу повної похідної (3):

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dx} =$$

$$= y\,e^{xy}\sqrt{1-x^2} - \frac{x\,e^{xy}}{\sqrt{1-x^2}} + x\,e^{xy}\sqrt{1-x^2}\,\sin^2 x\cdot(\sin x + 3x\cos x) =$$

$$= \frac{e^{xy}}{\sqrt{1-x^2}}\left[y(1-x^2) - x + x(1-x^2)\sin^2 x\cdot(\sin x + 3x\cos x)\right] =$$

$$= \frac{e^{xy}}{\sqrt{1-x^2}}\left[(1-x^2)(y + x\sin^2 x\cdot(\sin x + 3x\cos x)) - x\right] = \left|y = x\sin^3 x\right| =$$

$$= \frac{e^{x^2\sin^3 x}}{\sqrt{1-x^2}}\left[(1-x^2)(x\sin^3 x + x\sin^2 x\cdot(\sin x + 3x\cos x)) - x\right] =$$

$$= \frac{e^{x^2\sin^3 x}}{\sqrt{1-x^2}}\left[(1-x^2)\cdot x\sin^2 x\cdot(\sin x+\sin x+3x\cos x)-x\right]=$$

$$= \frac{x\,e^{x^2\sin^3 x}}{\sqrt{1-x^2}}\left[(1-x^2)\sin^2 x\cdot(2\sin x+3x\cos x)-1\right].$$

б) Розглянемо функцію $u=3^{y^2-z^2}\cdot\operatorname{ctg}2x,$ де $y=\cos x,$ $z=\sin x.$

Знайдемо похідні:

$$\underset{y,z-const}{\frac{\partial u}{\partial x}}=\frac{-2}{\sin^2 2x}\cdot 3^{y^2-z^2},\quad \underset{x,z-const}{\frac{\partial u}{\partial y}}=2y\,3^{y^2-z^2}\ln 3\operatorname{ctg}2x,\quad \underset{x,y-const}{\frac{\partial u}{\partial z}}=-2z\,3^{y^2-z^2}\ln 3\operatorname{ctg}2x,$$

$$\frac{dy}{dx}=-\sin x,\qquad \frac{dz}{dx}=\cos x.$$

Підставимо в формулу повної похідної (4):

$$\frac{du}{dx}=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dx}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{dz}{dx}=$$

$$=\frac{-2}{\sin^2 2x}3^{y^2-z^2}-2y\,3^{y^2-z^2}\ln 3\operatorname{ctg}2x\,\sin x-2z\,3^{y^2-z^2}\ln 3\operatorname{ctg}2x\cos x=$$

$$=-2\cdot 3^{y^2-z^2}\left(\frac{1}{\sin^2 2x}+\ln 3\operatorname{ctg}2x\cdot(2y\sin x+2z\cos x)\right)=\left|\,y=\cos x,\quad z=\sin x\,\right|=$$

$$=-2\cdot 3^{\cos^2 x-\sin^2 x}\left(\frac{1}{\sin^2 2x}+\ln 3\operatorname{ctg}2x\cdot(2\cos x\sin x+2\sin x\cos x)\right)=$$

$$=-2\cdot 3^{\cos 2x}\left(\frac{1}{\sin^2 2x}+\ln 3\operatorname{ctg}2x\cdot 2\sin 2x\right)=-2\cdot 3^{\cos 2x}\left(\frac{1}{\sin^2 2x}+2\ln 3\,\cos 2x\right)=$$

$$=-2\cdot 3^{\cos 2x}(\operatorname{cosec}^2 2x+\ln 9\,\cos 2x).$$

Відповідь: а) $\frac{dz}{dx}=\frac{x\,e^{x^2\sin^3 x}}{\sqrt{1-x^2}}\left[(1-x^2)\sin^2 x\cdot(2\sin x+3x\cos x)-1\right];$

б) $\frac{dz}{dx}=-2\cdot 3^{\cos 2x}(\operatorname{cosec}^2 2x+\ln 9\,\cos 2x).$

Теорема 2 (загальний випадок).

Якщо

1) функція $z = f(x, y)$– диференційована в точці $M(x, y)$,

2) функції $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ – диференційовні в точці $M^*(u, v)$,

тоді частинні похідні складеної функції $z = f(x(u, v), y(u, v))$ обчислюють за формулами:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u},$$
$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}. \qquad (5)$$

$\triangleright$ Першу з цих формул можна отримати з рівності $\dfrac{dz}{dt} = \dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{dy}{dt}$, якщо покласти в ній $\begin{cases} t = u, \\ v = const, \end{cases}$ а другу, якщо покласти $\begin{cases} t = v, \\ u = const. \end{cases}$ $\triangleleft$

Завдання 11.

Знайти похідну складеної функції

$$z = \operatorname{arctg}\frac{x}{y}, \qquad x = 2uv, \qquad y = u^2 - v^2.$$

Розв'язання.

Обчислимо частинні похідні:

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{y-const} = \frac{1}{1 + \dfrac{x^2}{y^2}} \cdot \frac{1}{y} = \frac{y}{x^2 + y^2}, \qquad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{x-const} = \frac{1}{1 + \dfrac{x^2}{y^2}} \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right) = -\frac{x}{x^2 + y^2},$$

$$\frac{\partial x}{\partial u} = 2v, \quad \frac{\partial y}{\partial u} = 2u, \qquad \frac{\partial x}{\partial v} = 2u, \quad \frac{\partial y}{\partial v} = -2v.$$

Частинні похідні складеної функції $z = f(x(u, v), y(u, v))$ знайдемо за формулами (5):

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}=$$

$$=\frac{y}{x^2+y^2}\cdot 2v-\frac{x}{x^2+y^2}\cdot 2u=2\frac{yv-xu}{x^2+y^2}=\left|\begin{array}{l} x=2uv, \\ y=u^2-v^2 \end{array}\right|=$$

$$=2\frac{(u^2-v^2)v-2u^2v}{(2uv)^2+(u^2-v^2)^2}=2\frac{-v^3-u^2v}{(u^2+v^2)^2}=-2\frac{v(v^2+u^2)}{(u^2+v^2)^2}=\frac{-2v}{u^2+v^2};$$

$$\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}=$$

$$=\frac{y}{x^2+y^2}\cdot 2u-\frac{x}{x^2+y^2}\cdot(-2v)=2\frac{yu+xv}{x^2+y^2}=\left|\begin{array}{l} x=2uv, \\ y=u^2-v^2 \end{array}\right|=$$

$$=2\frac{(u^2-v^2)u+2uv^2}{(2uv)^2+(u^2-v^2)^2}=2\frac{(u^3+uv^2)}{(u^2+v^2)^2}=2\frac{u(u^2+v^2)}{(u^2+v^2)^2}=\frac{2u}{u^2+v^2}.$$

Відповідь: $\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{-2v}{u^2+v^2}, \quad \frac{\partial z}{\partial v}=\frac{2u}{u^2+v^2}.$

§8. Похідна неявно заданої функції

- *Функцію двох змінних* $z=f(x,y)$ *називають* *заданою неявно*, *якщо вона описується рівнянням, яке не розв'язане відносно* z, *тобто*

$$F(x,y,z)=0. \qquad (6)$$

Зауваження.

Рівняння (6) не завжди визначає одну змінну, як неявну функцію двох інших.

Наприклад.

а) З рівняння $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-9=0$ можна отримати дві функції $z_1=\sqrt{9-x^2-y^2}$ та $z_2=-\sqrt{9-x^2-y^2}$, які визначені в області $x^2+y^2\le 9$.

б) Рівняння $\sin(x-3y+z^2)-5=0$ не визначає жодної функції.

Виникає питання: яким умовам повинна задовольняти функція $F(x,y,z)$, щоб рівняння (5) визначало єдину неявну функцію $z=f(x,y)$?

Відповідь на це питання дає наступна теорема.

Теорема (про існування та диференційовність неявної функції двох змінних).

Якщо

1) функція $F(x,y,z)$ та її похідні $F'_x(x,y,z)$, $F'_y(x,y,z)$, $F'_z(x,y,z)$, визначені та неперервні в околі точки $M_0(x_0,y_0,z_0)$,

2) $F(x_0,y_0,z_0)=0$, а $F'_z(x_0,y_0,z_0)\neq 0$,

тоді $\exists$ окіл точки $M_0(x_0,y_0,z_0)$, в якому рівняння $F(x,y,z)=0$ визначає єдину функцію $z=f(x,y)$, неперервну та диференційовну в околі точки (x_0,y_0) і таку, що $z_0=f(x_0,y_0)$.

Знайдемо частинні похідні $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}$ від функції, яка задана неявно рівнянням $F(x,y,z)=0.$

Будемо вважати, що функція трьох змінних $F(x,y,z)$ диференційовна. Тоді диференціал цієї функції має вигляд

$$dF=F'_x dx+F'_y dy+F'_z dz=0 \quad\Rightarrow\quad F'_z dz=-F'_x dx-F'_y dy \quad\Rightarrow$$

$$dz=-\frac{F'_x}{F'_z}dx-\frac{F'_y}{F'_z}dy,\quad F'_z\neq 0. \tag{7}$$

Але, з іншого боку,

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy. \tag{8}$$

Порівнюючи диференціали (7) та (8), можна записати формули для обчислення частинних похідних $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}$ від функції, яка задана неявно:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F'_x}{F'_z},\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F'_y}{F'_z},\qquad F'_z\neq 0. \tag{9}$$

Зауваження.

Якщо функція однієї змінної $y=f(x)$ *задана неявно рівнянням* $F(x,y)=0$, *то її похідну обчислюють за формулою:*

$$y'_x=-\frac{F'_x}{F'_y},\qquad F'_y\neq 0. \tag{10}$$

Завдання 12.

Знайти похідні від функцій, заданих неявно:

а) $x^2+y^2+1=\sin\dfrac{x}{y}$; **б)** $xz^2+y^2\operatorname{arctg} z=x^2+1$.

Розв'язання.

а) Функція однієї змінної $y=f(x)$ задана неявно

$$F(x,y)=x^2+y^2+1-\sin\frac{x}{y}=0.$$

1-й спосіб (за формулою (10)).

Обчислимо частинні похідні функції $F(x,y)$:

$$\left.\begin{aligned} F'_x&=\underset{y-const}{\frac{\partial F}{\partial x}}=2x-\frac{1}{y}\cos\frac{x}{y},\\ F'_y&=\underset{x-const}{\frac{\partial F}{\partial y}}=2y+\frac{x}{y^2}\cos\frac{x}{y}\end{aligned}\right.\Rightarrow$$

$$y'_x=-\frac{F'_x}{F'_y}=-\frac{2x-\frac{1}{y}\cos\frac{x}{y}}{2y+\frac{x}{y^2}\cos\frac{x}{y}}=-\frac{2xy^2-y\cos\frac{x}{y}}{2y^3+x\cos\frac{x}{y}}.$$

2-й спосіб (для порівняння, як в першому семестрі).

Знайдемо похідну від функції заданої неявно $x^2+y^2+1=\sin\dfrac{x}{y}$:

$$(x^2+y^2+1)'=\left(\sin\frac{x}{y}\right)' \quad\Rightarrow\quad 2x+2yy'=\cos\frac{x}{y}\cdot\frac{y-xy'}{y^2} \quad\Rightarrow$$

$$2x+\underline{2yy'}=\frac{1}{y}\cos\frac{x}{y}-\underline{\frac{xy'}{y^2}\cos\frac{x}{y}} \quad\Rightarrow\quad 2yy'+\frac{xy'}{y^2}\cos\frac{x}{y}=\frac{1}{y}\cos\frac{x}{y}-2x \quad\Rightarrow$$

$$\left(2y+\frac{x}{y^2}\cos\frac{x}{y}\right)y'=-\left(2x-\frac{1}{y}\cos\frac{x}{y}\right) \quad\Rightarrow$$

$$y'=-\frac{2x-\frac{1}{y}\cos\frac{x}{y}}{2y+\frac{x}{y^2}\cos\frac{x}{y}}=-\frac{2xy^2-y\cos\frac{x}{y}}{2y^3+x\cos\frac{x}{y}}.$$

б) Функція двох змінних $z=f(x,y)$ задана неявно

$$F(x,y,z)=xz^2+y^2\operatorname{arctg} z-x^2-1=0.$$

Обчислимо частинні похідні функції $F(x,y,z)$:

$$F'_x=\underset{y,z-const}{\frac{\partial F}{\partial x}}=z^2-2x,\qquad F'_y=\underset{x,z-const}{\frac{\partial F}{\partial y}}=2y\operatorname{arctg} z,\qquad F'_z=\underset{x,y-const}{\frac{\partial F}{\partial z}}=2xz+\frac{y^2}{1+z^2}.$$

Тоді, використовуючи формули (9), знаходимо:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F'_x}{F'_z}=-\frac{z^2-2x}{2xz+\frac{y^2}{1+z^2}}=-\frac{(z^2-2x)(1+z^2)}{2xz(1+z^2)+y^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F'_y}{F'_z}=-\frac{2y\operatorname{arctg} z}{2xz+\frac{y^2}{1+z^2}}=-\frac{2y(1+z^2)\operatorname{arctg} z}{2xz(1+z^2)+y^2}.$$

Відповідь: а) $y'=-\dfrac{2xy^2-y\cos\frac{x}{y}}{2y^3+x\cos\frac{x}{y}}$,

б) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{(z^2-2x)(1+z^2)}{2xz(1+z^2)+y^2},\qquad \dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{2y(1+z^2)\operatorname{arctg} z}{2xz(1+z^2)+y^2}.$

§9. Інваріантність форми повного диференціала

Теорема (про інваріантність форми повного диференціала).
Повний диференціал функції двох змінних $z = f(x,y)$ зберігає свій вигляд незалежно від того, чи є аргументи x та y незалежними змінними, чи функціями двох інших незалежних змінних.

▷ 1. Якщо аргументи x, y функції $z = f(x,y)$ є незалежними змінними, то її повний диференціал обчислюють за формулою

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy. \tag{11}$$

2. Нехай $z = f(x,y)$, де $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$ – функції двох незалежних змінних u, v. Розглянемо складену функцію $z = f(x(u,v), y(u,v))$ та обчислимо її повний диференціал:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial u}du + \frac{\partial z}{\partial v}dv \underset{\substack{\text{(про частинні похідні}\\ \text{складеної функції)}}}{\overset{\text{Теорема 2}}{=}} \left(\underline{\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}} + \underline{\underline{\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}}}\right)du + \left(\underline{\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}} + \underline{\underline{\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}}}\right)dv =$$

$$= \frac{\partial z}{\partial x}\underbrace{\left(\frac{\partial x}{\partial u}du + \frac{\partial x}{\partial v}dv\right)}_{=dx} + \frac{\partial z}{\partial y}\underbrace{\left(\frac{\partial y}{\partial u}du + \frac{\partial y}{\partial v}dv\right)}_{=dy} = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy.$$

Отримали
$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy. \tag{12}$$

Отже, повний диференціал функції $z = f(x,y)$ має інваріантну (незмінну) форму незалежно від того, чи є аргументи x та y незалежними змінними, чи функціями від двох інших незалежних змінних.

Проте формули (11) та (12) однакові лише за формою, а по суті – різні, бо в формулі (11) dx і dy є диференціалами незалежних змінних, а в формулі (12) dx і dy – повні диференціали функцій $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$. ◁

Зауваження.
Диференціали вищих порядків властивості інваріантності не мають.

§10. Похідні вищих порядків. Теорема про мішані похідні

Нехай функція $z = f(x,y)$ в деякій області $D \subset \mathbb{R}^2$ має частинні похідні $f'_x(x,y)$, $f'_y(x,y)$, які називають також частинними похідними 1-го порядку. Частинні похідні $f'_x(x,y)$, $f'_y(x,y)$ є функціями змінних x, y.

• *Частинними похідними 2-го порядку* ***функції*** $z = f(x,y)$ ***називають частинні похідні, якщо вони існують, від частинних похідних першого порядку.***

Для функції двох змінних $z = f(x,y)$ існують 4 похідні другого порядку:

$$\left.\begin{aligned} &1.\ \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = z''_{xx} = f''_{xx}, \\ &2.\ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = z''_{yy} = f''_{yy} \end{aligned}\right\}$$

– частинні похідні вищого порядку, в яких диференціювання здійснюється тільки по одній змінній, називають *чистими.*

$$\left.\begin{aligned} &3.\ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = z''_{xy} = f''_{xy}, \\ &4.\ \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x} = z''_{yx} = f''_{yx} \end{aligned}\right\}$$

– частинні похідні вищого порядку, в яких диференціювання здійснюється по різних змінних, називають *мішаними.*

• *Частинними похідними 3-го порядку* ***функції*** $z = f(x,y)$ ***називають частинні похідні, якщо вони існують, від частинних похідних другого порядку.***

Для функції двох змінних $z = f(x,y)$ існують 8 похідних третього порядку. Процес утворення частинних похідних 1-го, 2-го та 3-го порядку можна зобразити наступною схемою:

<table>
<tr><td colspan="8">$z(x,y)$</td></tr>
<tr><td colspan="4">$z'_x(x,y)$</td><td colspan="4">$z'_y(x,y)$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$z''_{xx}(x,y)$</td><td colspan="2">$z''_{xy}(x,y)$</td><td colspan="2">$z''_{yx}(x,y)$</td><td colspan="2">$z''_{yy}(x,y)$</td></tr>
<tr><td>$z'''_{xxx}(x,y)$</td><td>$z'''_{xxy}(x,y)$</td><td>$z'''_{xyx}(x,y)$</td><td>$z'''_{xyy}(x,y)$</td><td>$z'''_{yxx}(x,y)$</td><td>$z'''_{yxy}(x,y)$</td><td>$z'''_{yyx}(x,y)$</td><td>$z'''_{yyy}(x,y)$</td></tr>
</table>

Серед мішаних частинних похідних є такі, які відрізняються тільки порядком диференціювання. Наприклад,

$$z'''_{xxy} = f'''_{xxy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right), \qquad z'''_{xyx} = f'''_{xyx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right), \qquad z'''_{yxx} = f'''_{yxx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right).$$

Виникає запитання: чи залежить результат диференціювання від порядку диференціювання? Наприклад, чи дорівнюють похідні f''_{xy} і f''_{yx} ?

Відповідь на це питання дає наступна теорема.

Теорема (про достатню умову рівності мішаних частинних похідних 2-го порядку) К. Г. Шварц[7].

Якщо

1) функція $z = f(x,y)$ та f'_x, f'_y, f''_{xy}, f''_{yx} – визначені в околі точки $M_0(x_0,y_0)$,

2) мішані похідні f''_{xy}, f''_{yx} – неперервні в точці $M_0(x_0,y_0)$, тоді

$$f''_{xy}(x_0,y_0) = f''_{yx}(x_0,y_0).$$

Приймемо цю теорему без доведення.

Аналогічна теорема справедлива для будь-яких неперервних мішаних похідних довільного порядку, які різняться між собою лише порядком диференціювання.

---

[7] ***Карл Герман Амандус Шварц*** *(нім. Karl Hermann Amandus Schwarz; 25 січня 1843 — листопада 1921) — німецький математик, член Берлінської академії наук, професор Гальського, Цюріхського, Геттінгенського і Берлінського університетів. Його наукові роботи відомі в різних областях математики: у комплексному аналізі, теорії диференціальних рівнянь, функціональному аналізі. Саме Шварцу належить перше строге доведення цієї теореми.*

Завдання 13.

Перевірити, що функція $z = \cos^2(x - \alpha y)$ задовольняє співвідношення:

а) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \alpha^2 \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$; б) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

Розв'язання.

а) Знайдемо частинні похідні першого порядку функції $z = \cos^2(x - \alpha y)$:

$$\underset{y-const}{\frac{\partial z}{\partial x}} = -2\cos(x-\alpha y)\sin(x-\alpha y) = -\sin 2(x-\alpha y),$$

$$\underset{x-const}{\frac{\partial z}{\partial y}} = -2\cos(x-\alpha y)\sin(x-\alpha y)(-\alpha) = \alpha \sin 2(x-\alpha y).$$

Знайдемо частинні похідні другого порядку:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \underset{y-const}{\frac{\partial}{\partial x}}(-\sin 2(x-\alpha y)) = -2\cos 2(x-\alpha y),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \underset{x-const}{\frac{\partial}{\partial y}}(\alpha \sin 2(x-\alpha y)) = -2\alpha^2 \cos 2(x-\alpha y).$$

Підставляючи отримані частинні похідні другого порядку в рівняння $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \alpha^2 \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, прийдемо до тотожності

$$-2\alpha^2 \cos 2(x-\alpha y) \equiv -2\alpha^2 \cos 2(x-\alpha y).$$

Отже, функція $z = \cos^2(x - \alpha y)$ задовольняє задане рівняння.

б) Перевіримо, що функція $z = \cos^2(x - \alpha y)$ задовольняє співвідношення

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}.$$

Для цього знайдемо мішані частинні похідні другого порядку:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\underset{x-const}{\frac{\partial}{\partial y}}\left(-\sin 2(x-\alpha y)\right)=2\alpha\cos 2(x-\alpha y),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\underset{y-const}{\frac{\partial}{\partial x}}\left(\alpha\sin 2(x-\alpha y)\right)=2\alpha\cos 2(x-\alpha y).$$

Отже, для заданої функції співвідношення $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}$ виконується.

Завдання 14.

Перевірити, що функція $z=x\,\mathrm{e}^y+y\,\mathrm{e}^x$ задовольняє рівняння

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}+\frac{\partial^3 z}{\partial y^3}=x\frac{\partial^3 z}{\partial x\,\partial y^2}+y\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\,\partial y}.$$

Розв'язання.

Частинні похідні 1-го порядку функції $z=x\,\mathrm{e}^y+y\,\mathrm{e}^x$:

$$\underset{y-const}{\frac{\partial z}{\partial x}}=\mathrm{e}^y+y\,\mathrm{e}^x,\qquad \underset{x-const}{\frac{\partial z}{\partial y}}=x\,\mathrm{e}^y+\mathrm{e}^x.$$

Обчислимо частинні похідні 2-го порядку:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\underset{y-const}{\frac{\partial}{\partial x}}\left(\mathrm{e}^y+y\,\mathrm{e}^x\right)=y\,\mathrm{e}^x,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\underset{x-const}{\frac{\partial}{\partial y}}\left(x\,\mathrm{e}^y+\mathrm{e}^x\right)=x\,\mathrm{e}^y,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\underset{x-const}{\frac{\partial}{\partial y}}\left(\mathrm{e}^y+y\,\mathrm{e}^x\right)=\mathrm{e}^y+\mathrm{e}^x.$$

Знайдемо частинні похідні 3-го порядку:

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)=\underset{y-const}{\frac{\partial}{\partial x}}\left(y\,\mathrm{e}^x\right)=y\,\mathrm{e}^x,\qquad \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)=\underset{x-const}{\frac{\partial}{\partial y}}\left(x\,\mathrm{e}^y\right)=x\,\mathrm{e}^y,$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x\,\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\right) = \underset{x-const}{\frac{\partial}{\partial y}}\left(e^y + e^x\right) = e^y, \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x^2\,\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^{\,2}}\right) = \underset{x-const}{\frac{\partial}{\partial y}}\left(y\,e^x\right) = e^x.$$

Підставляючи знайдені частинні похідні 3-го порядку в рівняння

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} = x\frac{\partial^3 z}{\partial x\,\partial y^2} + y\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\,\partial y},$$

отримаємо тотожність $\quad y\,e^x + x\,e^y \equiv x\,e^y + y\,e^x.$

Отже, функція $z = x\,e^y + y\,e^x$ задовольняє задане рівняння.

§11. Диференціали вищих порядків

Повний диференціал функції двох змінних також називають диференціалом 1-го порядку.

Нехай функція $z = f(x,y)$ має неперервні частинні похідні другого порядку.

• *Диференціалом другого порядку називають диференціал, якщо він існує, від диференціала першого порядку*

$$d^2 z = d(dz).$$

Знайдемо формулу для обчислення диференціала 2-го порядку функції двох змінних $z = f(x,y)$:

$$d^2 z = d(dz) = d\left(\frac{\partial z}{\partial x}\underset{const}{dx} + \frac{\partial z}{\partial y}\underset{const}{dy}\right) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right)dx + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right)dy =$$

$$= \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx + \underline{\frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}}dy\right)dx + \left(\underline{\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}}dx + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy\right)dy \overset{\text{Т. про рівність мішаних}}{\underset{\text{похідних}}{=}}$$

$$= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}dx\,dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2.$$

Формула для обчислення диференціала 2-го порядку функції двох змінних:

$$d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}dx\,dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2.$$

Формула для обчислення диференціала 3-го порядку функції двох змінних:

$$d^3z = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3}dx^3 + 3\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}dx^2dy + 3\frac{\partial^3 z}{\partial x\,\partial y^2}dx\,dy^2 + \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}dy^3.$$

Зауваження.

Отримані формули справедливі лише у випадку, коли змінні x та y незалежні.

Завдання 15.

Знайти диференціали 1-го та 2-го порядків для функції $z = \sin x^y$.

Розв'язання.

1. Знайдемо диференціал 1-го порядку:

$$\underset{y-const}{\frac{\partial z}{\partial x}} = \cos x^y \cdot yx^{y-1}, \qquad \underset{x-const}{\frac{\partial z}{\partial y}} = \cos x^y \cdot x^y \ln x,$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy =$$

$$= yx^{y-1}\underline{\cos x^y}dx + x^y \ln x \cdot \underline{\cos x^y}dy = x^{y-1}\cos x^y (y\,dx + x\ln x\,dy).$$

2. Знайдемо диференціал 2-го порядку:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \underset{y-const}{\frac{\partial}{\partial x}}\left(y\cos x^y \cdot x^{y-1}\right) =$$

$$= y(\underbrace{-\sin x^y \cdot yx^{y-1}}_{u'} \cdot x^{y-1} + \cos x^y \cdot \underbrace{(y-1)x^{y-2}}_{v'}) = yx^{y-2}(-yx^y \sin x^y + (y-1)\cos x^y),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \underset{x-const}{\frac{\partial}{\partial y}}\left(\cos x^y \cdot y \cdot x^{y-1}\right) = \left|\ (uvw)' = u'vw + uv'w + uvw'\ \right| =$$

$$= \underbrace{-\sin x^y \cdot x^y \ln x}_{u'} \cdot y \cdot x^{y-1} + \cos x^y \cdot x^{y-1} + \cos x^y \cdot y \cdot \underbrace{x^{y-1} \ln x}_{w'} =$$

$$= x^{y-1}(-y \sin x^y \cdot x^y \ln x + \cos x^y (1 + y \ln x)),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \underset{x-const}{\frac{\partial}{\partial y}} (\cos x^y \cdot x^y \ln x) =$$

$$= \ln x \cdot (\underbrace{-\sin x^y \cdot x^y \ln x}_{u'} \cdot x^y + \cos x^y \cdot \underbrace{x^y \ln x}_{v'}) = x^y \ln^2 x \cdot (-x^y \sin x^y + \cos x^y).$$

$$d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx\, dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2 =$$

$$= y x^{y-2}(-y x^y \sin x^y + (y-1) \cos x^y)\, dx^2 +$$

$$+2x^{y-1}(-y \sin x^y \cdot x^y \ln x + \cos x^y (1 + y \ln x))\, dx\, dy + x^y \ln^2 x \cdot (-x^y \sin x^y + \cos x^y)\, dy^2.$$

Відповідь: $dz = x^{y-1} \cos x^y (y\, dx + x \ln x\, dy)$;

$$d^2 z = y x^{y-2}(-y x^y \sin x^y + (y-1) \cos x^y)\, dx^2 +$$

$$+2x^{y-1}(-y \sin x^y \cdot x^y \ln x + \cos x^y (1 + y \ln x))\, dx\, dy + x^y \ln^2 x \cdot (-x^y \sin x^y + \cos x^y)\, dy^2.$$

Завдання 16.

Для функції $z = \sin(2x - y)$ знайти диференціал 3-го порядку та обчислити його в точці $\left(-\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{2}\right)$.

Розв'язання.

Знайдемо частинні похідні 1-го порядку функції $z = \sin(2x - y)$:

$$\underset{y-const}{\frac{\partial z}{\partial x}} = 2\cos(2x - y), \qquad \underset{x-const}{\frac{\partial z}{\partial y}} = -\cos(2x - y).$$

Частинні похідні 2-го порядку:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \underset{y-const}{\frac{\partial}{\partial x}} (2\cos(2x - y)) = -4\sin(2x - y),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \underset{x-const}{\frac{\partial}{\partial y}} \left(-\cos(2x-y)\right) = -\sin(2x-y),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \underset{x-const}{\frac{\partial}{\partial y}} \left(2\cos(2x-y)\right) = 2\sin(2x-y).$$

Частинні похідні 3-го порядку:

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right) = \underset{y-const}{\frac{\partial}{\partial x}} \left(-4\sin(2x-y)\right) = -8\cos(2x-y),$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right) = \underset{x-const}{\frac{\partial}{\partial y}} \left(-4\sin(2x-y)\right) = 4\cos(2x-y),$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x\,\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\right) = \underset{x-const}{\frac{\partial}{\partial y}} \left(2\sin(2x-y)\right) = -2\cos(2x-y),$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial y^3} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) = \underset{x-const}{\frac{\partial}{\partial y}} \left(-\sin(2x-y)\right) = \cos(2x-y).$$

Підставимо знайдені частинні похідні 3-го порядку в формулу диференціала 3-го порядку:

$$d^3 z = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} dx^3 + 3\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} dx^2 dy + 3\frac{\partial^3 z}{\partial x\,\partial y^2} dx\,dy^2 + \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} dy^3 =$$

$$= -8\cos(2x-y)dx^3 + 12\cos(2x-y)dx^2 dy - 6\cos(2x-y)dx\,dy^2 + \cos(2x-y)dy^3 =$$

$$= -\cos(2x-y)\cdot(8\,dx^3 - 12\,dx^2 dy + 6\,dx\,dy^2 - dy^3) =$$

$$= -\cos(2x-y)\cdot(2\,dx - dy)^3 = \cos(2x-y)\cdot(dy - 2dx)^3.$$

Обчислимо знайдений диференціал 3-го порядку в точці $\left(-\frac{\pi}{4};\,\frac{3\pi}{2}\right)$:

$$d^3 z\left(-\tfrac{\pi}{4};\,\tfrac{3\pi}{2}\right) = \cos\left(-\tfrac{\pi}{2} - \tfrac{3\pi}{2}\right)(dy-2dx)^3 = \cos(-2\pi)(dy-2dx)^3 = (dy-2dx)^3.$$

Відповідь: $d^3 z = \cos(2x-y)\cdot(dy-2dx)^3, \quad d^3 z\left(-\tfrac{\pi}{4};\,\tfrac{3\pi}{2}\right) = (dy-2dx)^3.$

§12. Дотична площина та нормаль до поверхні

Нехай поверхня σ задана рівнянням

$$F(x, y, z) = 0. \qquad (13)$$

Розглянемо довільну точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$, яка належить цій поверхні і припустимо, що функція $F(x, y, z)$ диференційовна в точці M_0, причому не всі частинні похідні функції $F(x, y, z)$ в точці M_0 дорівнюють нулю, тобто

$$(F'_x(M_0))^2 + (F'_y(M_0))^2 + (F'_z(M_0))^2 \neq 0.$$

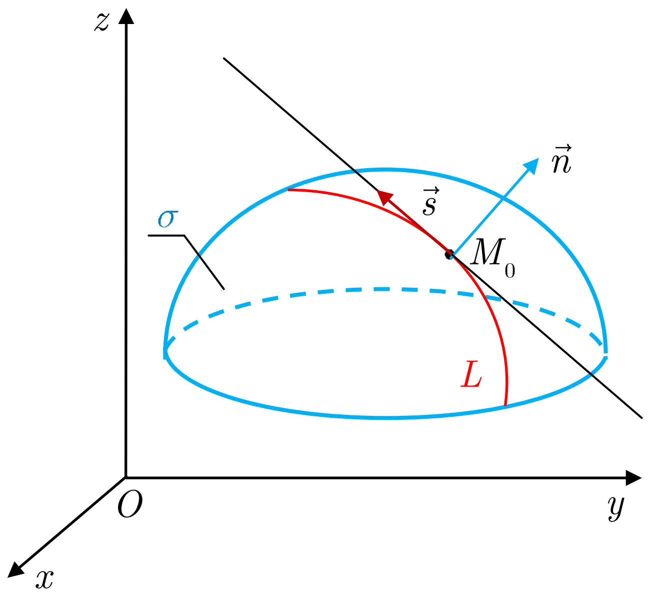

Рис. 7

Розглянемо довільну криву L (рис. 7), яка проходить через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ і повністю лежить на поверхні σ. Нехай криву L задано параметрично

$$L: \quad \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t), \end{cases}$$

де функції $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ визначені та диференційовні на інтервалі $(\alpha; \beta)$, а точка M_0 відповідає деякому значенню параметра $t_0 \in (\alpha; \beta)$.

Побудуємо в точці M_0 дотичну до кривої L, тоді вектор $\vec{s} = \{x'(t_0); y'(t_0); z'(t_0)\}$ є напрямним вектором цієї дотичної. Оскільки крива L лежить на поверхні σ, то координати її точок задовольняють рівняння (13), тобто:

$$F(x(t), y(t), z(t)) = 0. \qquad (14)$$

Продиференціюємо рівність (14):

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{dz}{dt} = 0. \qquad (15)$$

Рівність (15) показує, що вектори

$$\vec{n} = \{F'_x(M_0); F'_y(M_0); F'_z(M_0)\} \quad \text{та} \quad \vec{s} = \{x'(t_0); y'(t_0); z'(t_0)\}$$

є ортогональними.

Крім того, з рівності (15) випливає, що дотичні, які проведені до всіх кривих, що проходять через точку M_0 і повністю лежать на поверхні σ – ортогональні до одного й того самого вектора $\vec{n}$.

- *Площину, в якій лежать усі дотичні, проведені в точці M_0 до всіх можливих кривих, що лежать на поверхні σ і проходять через точку M_0, називають дотичною площиною до поверхні σ в точці M_0.*

Знайдемо рівняння дотичної площини**.**

Оскільки дотична площина проходить через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ перпендикулярно до вектора $\vec{n} = \{F'_x(M_0); F'_y(M_0); F'_z(M_0)\}$, то її рівняння має вигляд

$$P_{\text{дотична}}: \quad F'_x(M_0)(x - x_0) + F'_y(M_0)(y - y_0) + F'_z(M_0)(z - z_0) = 0.$$

- *Нормаллю до поверхні σ в точці M_0 називають пряму, що проходить через точку M_0 перпендикулярно до дотичної площини в цій точці.*

Оскільки нормаль проходить через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ і має напрямний вектор $\vec{n} = \{F'_x(M_0); F'_y(M_0); F'_z(M_0)\}$, то канонічне рівняння нормалі має такий вигляд:

$$\ell_{\text{нормаль}}: \quad \frac{x - x_0}{F'_x(M_0)} = \frac{y - y_0}{F'_y(M_0)} = \frac{z - z_0}{F'_z(M_0)}.$$

Зауваження.

Якщо рівняння поверхні задано в явному вигляді $z = f(x,y)$, *то покладають* $F(x,y,z) = f(x,y) - z = 0$, *тоді вектор* $\vec{n} = \{f'_x(M_0); f'_y(M_0); -1\}$ *і рівняння дотичної площини та нормалі набувають вигляду:*

$$P_{\text{дотична}}: \quad f'_x(M_0)(x - x_0) + f'_y(M_0)(y - y_0) - (z - z_0) = 0,$$

$$\ell_{\text{нормаль}}: \quad \frac{x - x_0}{f'_x(M_0)} = \frac{y - y_0}{f'_y(M_0)} = \frac{z - z_0}{-1}.$$

Завдання 17.

Скласти рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні σ в точці M_0.

а) $\sigma: \ x^3 + y^3 + z^3 - xy - xz - yz = 0, \quad M_0(1, 2, -1);$

б) $\sigma: \ z = \sin x \cos y, \quad M_0\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{1}{2}\right).$

Розв'язання.

а) Поверхня $\sigma: \ x^3 + y^3 + z^3 - xy - xz - yz = 0$ задана неявно.

Позначимо через $F(x,y,z)$ ліву частину рівняння поверхні, тобто

$$F(x,y,z) = x^3 + y^3 + z^3 - xy - xz - yz.$$

Знайдемо частинні похідні функції $F(x,y,z)$ і їхні значення в точці $M_0(1, 2, -1)$:

$$F'_x(x,y,z) = 3x^2 - y - z, \qquad F'_x(1, 2, -1) = 2;$$

$$F'_y(x,y,z) = 3y^2 - x - z, \qquad F'_y(1, 2, -1) = 12;$$

$$F'_z(x,y,z) = 3z^2 - x - y, \qquad F'_z(1, 2, -1) = 0.$$

Запишемо рівняння дотичної площини до поверхні заданої неявно:

$$F'_x(M_0)(x - x_0) + F'_y(M_0)(y - y_0) + F'_z(M_0)(z - z_0) = 0,$$

$$2 \cdot (x - 1) + 12 \cdot (y - 2) + 0 \cdot (z + 1) = 0,$$

$$P_{\text{дотична}}: \quad x + 6y - 13 = 0.$$

Запишемо рівняння нормалі:

$$\frac{x-x_0}{F'_x(M_0)}=\frac{y-y_0}{F'_y(M_0)}=\frac{z-z_0}{F'_z(M_0)},$$

$$\ell_{\text{нормаль}}:\quad \frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{12}=\frac{z+1}{0}.$$

б) Поверхня $\sigma:\ z=\sin x\cos y$ задана в явному вигляді.

Позначимо через $f(x,y)$ праву частину рівності, тобто

$$f(x,y)=\cos x\sin y.$$

Знайдемо частинні похідні функції $f(x,y)$ і їхні значення в точці M_0:

$$f'_x(x,y)=-\sin x\sin y,\qquad f'_x\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)=-\sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{4}=-\frac{1}{2};$$

$$f'_y(x,y)=\cos x\cos y,\qquad f'_y\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)=\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2}.$$

Запишемо рівняння дотичної площини до поверхні, яка задана явно:

$$f'_x(M_0)(x-x_0)+f'_y(M_0)(y-y_0)-(z-z_0)=0,$$

$$-\frac{1}{2}\cdot\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{1}{2}\cdot\left(y-\frac{\pi}{4}\right)+\left(z-\frac{1}{2}\right)=0,$$

$$x-\frac{\pi}{4}-\left(y-\frac{\pi}{4}\right)-2\left(z-\frac{1}{2}\right)=0,$$

$$P_{\text{дотична}}:\quad x-y-2z+1=0.$$

Запишемо рівняння нормалі:

$$\frac{x-x_0}{f'_x(M_0)}=\frac{y-y_0}{f'_y(M_0)}=\frac{z-z_0}{-1},$$

$$\frac{x-\frac{\pi}{4}}{-\frac{1}{2}}=\frac{y-\frac{\pi}{4}}{\frac{1}{2}}=\frac{z-\frac{1}{2}}{-1}$$

$$\ell_{\text{нормаль}}: \quad \frac{x-\frac{\pi}{4}}{1}=\frac{y-\frac{\pi}{4}}{-1}=\frac{z-\frac{1}{2}}{2}.$$

Відповідь: а) $P_{\text{дотична}}: \ x+6y-13=0$, $\quad \ell_{\text{нормаль}}: \ \frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{12}=\frac{z+1}{0}$;

б) $P_{\text{дотична}}: \ x-y-2z+1=0$, $\quad \ell_{\text{нормаль}}: \ \frac{x-\frac{\pi}{4}}{1}=\frac{y-\frac{\pi}{4}}{-1}=\frac{z-\frac{1}{2}}{2}$.

§13. Локальні екстремуми функції двох змінних

Нехай функція $z=f(x,y)$ визначена в області D, а точка $M_0(x_0,y_0)\in D$.

- *Точку $M_0(x_0,y_0)$ називають точкою локального максимуму функції $z=f(x,y)$, якщо існує такий $\delta-$окіл цієї точки $O_\delta(M_0)\subset D$, що для всіх точок $(x,y)\neq(x_0,y_0)$ з цього околу $O_\delta(M_0)$ виконується нерівність $f(x,y)<f(x_0,y_0)$ (рис. 8).*

- *Точку $M_0(x_0,y_0)$ називають точкою локального мінімуму функції $z=f(x,y)$, якщо існує такий $\delta-$окіл цієї точки $O_\delta(M_0)\subset D$, що для всіх точок $(x,y)\neq(x_0,y_0)$ з цього околу $O_\delta(M_0)$ виконується нерівність $f(x,y)>f(x_0,y_0)$ (рис. 9).*

- *Число $f(M_0)=f(x_0,y_0)$ називають максимумом (мінімумом) цієї функції.*
- *Точки максимуму та мінімуму функції називають точками екстремуму.*

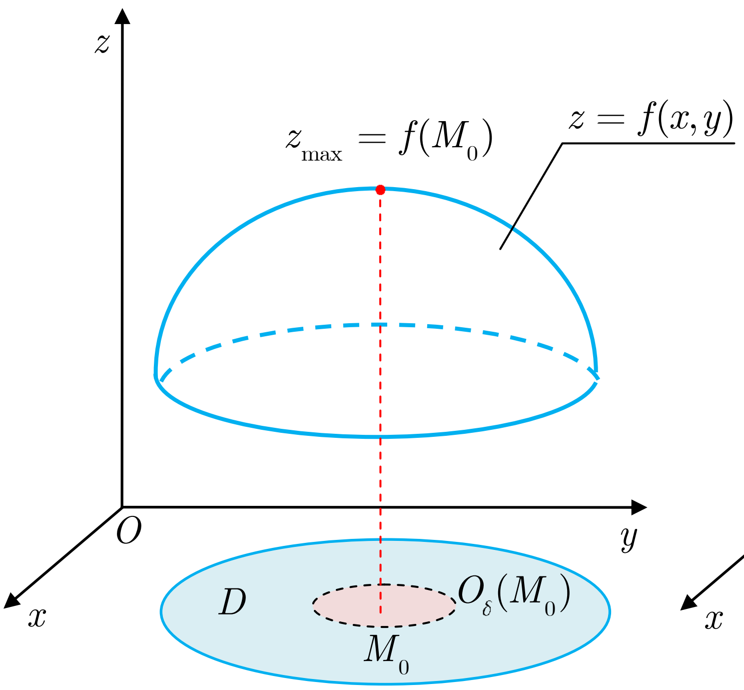

Рис. 8

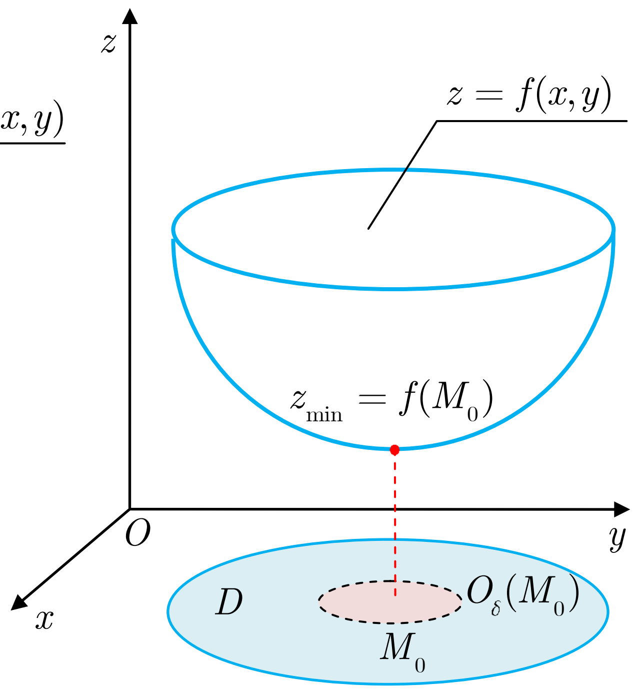

Рис. 9

Встановимо необхідні та достатні умови екстремуму.

Теорема (необхідні умови існування екстремуму функції двох змінних).

Якщо функція $z = f(x,y)$ в точці $M_0(x_0,y_0)$ має екстремум, тоді обидві її частинні похідні першого порядку в точці M_0 дорівнюють нулю

$$\begin{cases} f'_x(x_0,y_0) = 0, \\ f'_y(x_0,y_0) = 0 \end{cases} \qquad (16)$$

або хоча б одна з них не існує в цій точці.

▷ Нехай $M_0(x_0,y_0)$ – точка екстремуму функції $z = f(x,y)$. При фіксованому значенні $y = y_0$ функція $z = f(x,y_0)$, як функція однієї змінної x, в точці $x = x_0$ має екстремум. Отже, її похідна $f'_x(x_0,y_0)$ дорівнює нулю або не існує (за теоремою про необхідну умову екстремуму функції однієї змінної). Аналогічно, зафіксувавши $x = x_0$ і розглянувши функцію $z = f(x_0,y)$, як функцію однієї змінної y, отримаємо, що $f'_y(x_0,y_0)$ дорівнює нулю або не існує.

◁

Геометричний зміст теореми. Рівняння (16) означають, що в точках екстремуму дотична площина до поверхні $z = f(x, y)$ паралельна площині Oxy, оскільки рівняння дотичної площини має вигляд $z = z_0$.

• *Точку, в якій обидві частинні похідні першого порядку функції $z = f(x, y)$ дорівнюють нулю, називають стаціонарною точкою функції $f(x, y)$.*

Як і у випадку функції однієї змінної, не кожна стаціонарна точка є точкою екстремуму.

Наприклад.

Розглянемо функцію $z = xy$, графіком якої є гіперболічний параболоїд (рис. 10).

Частинні похідні функції існують $z'_x = y,\ z'_y = x$ і перетворюються в нуль в точці $O(0,0)$, тобто для функції $z = xy$ точка $O(0,0)$ є стаціонарною.

Значення функції в цій точці дорівнює $z(0,0) = 0.$

Водночас видно, що в як завгодно малому околі точки $O(0,0)$ знайдуться такі точки, в яких функція $z = xy$ набуває додатних значень, а саме при ($x < 0$ і $y < 0$) або ($x > 0$ і $y > 0$).

Тому, за означенням екстремуму, точка $O(0,0)$ не може бути точкою максимуму.

З іншого боку, як завгодно малий окіл точки $O(0,0)$ містить точки, в яких функція $z = xy$ може приймати від'ємні значення, зокрема, якщо ($x < 0$ і $y > 0$) або ($x > 0$ і $y < 0$).

Значить, $O(0,0)$ також не може бути точкою мінімуму.

Отже, функція $z = xy$ в точці $O(0,0)$ екстремуму не має.

Даний приклад демонструє, що умови (16) не є достатніми умовами для існування екстремуму функції двох змінних.

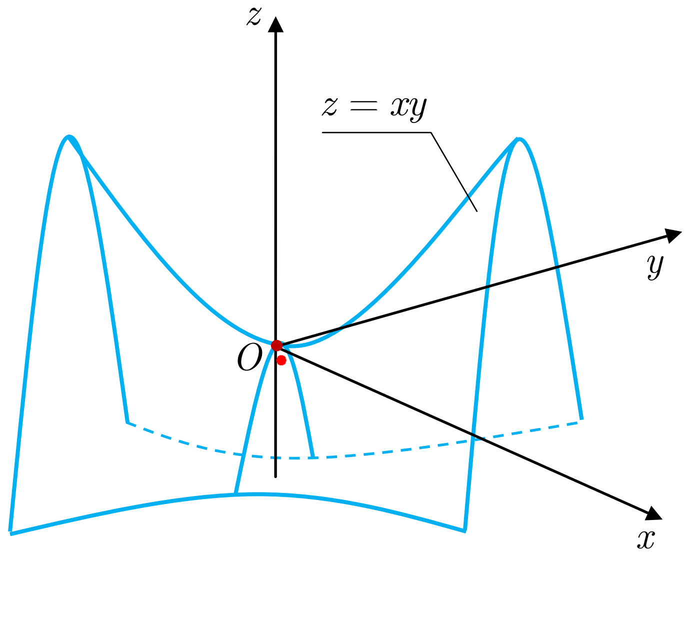

Рис. 10

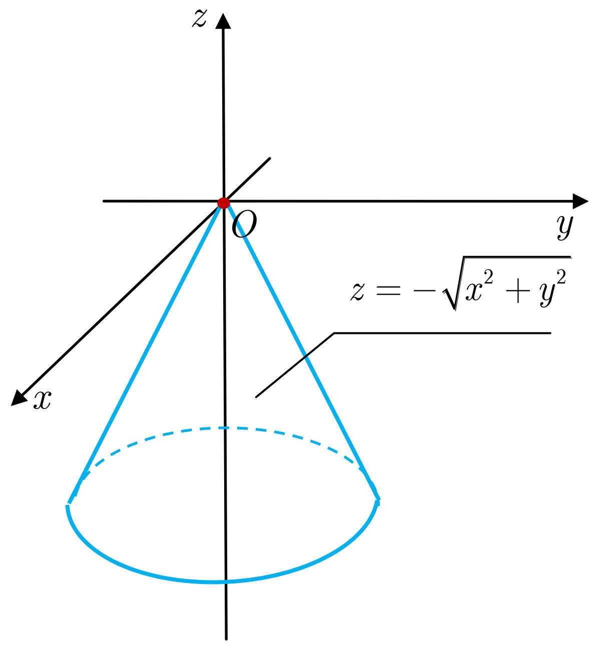

Рис. 11

- *Стаціонарну точку, яка не є точкою локального екстремуму, називають сідловою точкою функції.*

Для функції $z = xy$ точка $O(0,0)$ – сідлова (рис. 10).

Наведемо приклад функції двох змінних, що має екстремум в точці, в якій її частинні похідні не існують.

Наприклад.

Функція $z = -\sqrt{x^2 + y^2}$, графіком якої є нижня по відношенню до площини Oxy частина конуса $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ (рис. 11), має частинні похідні $z'_x = -\dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, $z'_y = -\dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, які не існують в точці $O(0,0)$. Тобто точка $O(0,0)$ для даної функції не є стаціонарною.

Дослідимо точку $O(0,0)$ за означенням екстремуму: $z(0,0) = 0$, а для будь-яких x, y, одночасно не рівних нулю, які лежать в довільному околі точки $O(0,0)$, функція може приймати тільки від'ємні значення

$$z(x, y) = -\sqrt{x^2 + y^2} < 0.$$

Отже, точка $O(0,0)$ є точкою максимуму для заданої функції.

• *Стаціонарні точки і точки, в яких частинні похідні не існують, називають точками можливого екстремуму або критичними точками.*

Сформулюємо достатні умови існування екстремуму.

Теорема (достатні умови існування екстремуму функції двох змінних).

Нехай у стаціонарній точці (x_0, y_0) *та деякому її околі функція* $z = f(x, y)$ *має неперервні частинні похідні до другого порядку включно.*

Обчислимо в точці (x_0, y_0) *значення* $A = f''_{xx}(x_0, y_0)$, $B = f''_{xy}(x_0, y_0)$, $C = f''_{yy}(x_0, y_0)$ *та складемо визначник*

$$\Delta(x_0, y_0) = \begin{vmatrix} f''_{xx}(x_0, y_0) & f''_{xy}(x_0, y_0) \\ f''_{yx}(x_0, y_0) & f''_{yy}(x_0, y_0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} =$$

$$= f''_{xx}(x_0, y_0) f''_{yy}(x_0, y_0) - (f''_{xy}(x_0, y_0))^2 = AC - B^2.$$

Тоді

1) якщо $\Delta(x_0, y_0) > 0$, *то функція* $z = f(x, y)$ *в точці* (x_0, y_0) *має екстремум:*

максимум, якщо $A = f''_{xx}(x_0, y_0) < 0,$

мінімум, якщо $A = f''_{xx}(x_0 . y_0) > 0;$

2) якщо $\Delta(x_0, y_0) < 0$, *то в точці* (x_0, y_0) *функція* $z = f(x, y)$ *екстремуму не має;*

У випадку, якщо $\Delta(x_0; y_0) = 0$, *то теорема відповіді не дає, тобто функція* $z = f(x, y)$ *в точці* (x_0, y_0) *може мати, а може і не мати екстремум; щоб зробити висновок, потрібно додатково досліджувати цю точку за допомогою означення екстремуму.*

Приймемо цю теорему без доведення.

На основі теорем про необхідні та достатні умови існування екстремуму функції двох змінних отримуємо наступне правило.

Правило дослідження функції двох змінних на екстремум.

Для того, щоб знайти екстремуми функції $z = f(x,y)$ необхідно:

1. Знайти стаціонарні точки функції з системи рівнянь:

$$\begin{cases} f'_x(x,y) = 0, \\ f'_y(x,y) = 0. \end{cases}$$

2. У кожній стаціонарній точці $M_0(x_0, y_0)$ обчислити визначник:

$$\Delta(x_0,y_0) = \begin{vmatrix} f''_{xx}(x_0,y_0) & f''_{xy}(x_0,y_0) \\ f''_{yx}(x_0,y_0) & f''_{yy}(x_0,y_0) \end{vmatrix} = f''_{xx}(x_0,y_0) \cdot f''_{yy}(x_0,y_0) - (f''_{xy}(x_0,y_0))^2.$$

Тоді можливі такі випадки:

$\Delta(x_0,y_0) > 0, \quad f''_{xx}(x_0,y_0) < 0$	$M_0(x_0,y_0)$ – точка локального максимуму.
$\Delta(x_0,y_0) > 0, \quad f''_{xx}(x_0,y_0) > 0$	$M_0(x_0,y_0)$ – точка локального мінімуму.
$\Delta(x_0,y_0) < 0$	$M_0(x_0,y_0)$ – не є точкою екстремуму.
$\Delta(x_0,y_0) = 0$	Висновок про характер стаціонарної точки зробити не можна. Потрібно робити додаткове дослідження, використовуючи означення екстремуму.

3. Обчислити значення функції $z = f(x,y)$ в точках максимуму та мінімуму.

Завдання 18.

Дослідити на екстремум функції двох змінних:

а) $z = 2x^3 + 6xy - y^2 + 12x$; **б)** $z = x^4 + y^4 - 4x^2 + 8xy - 4y^2$.

Розв'язання.

а) Розглянемо функцію $z = 2x^3 + 6xy - y^2 + 12x$ та знайдемо її частинні похідні

$$f'_x(x,y) = 6x^2 + 6y + 12 = 6(x^2 + y + 2), \qquad f'_y(x,y) = 6x - 2y = 2(3x - y).$$

1. Стаціонарні точки функції визначимо з системи:

$$\begin{cases} f'_x(x,y) = 0, \\ f'_y(x,y) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y + 2 = 0, \\ y = 3x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + 3x + 2 = 0, \\ y = 3x. \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x_1 = -2, \\ x_2 = -1, \end{array} \right. \\ y = 3x \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x_1 = -2, \\ y_1 = -6, \end{cases} \\ \begin{cases} x_2 = -1, \\ y_2 = -3. \end{cases} \end{array} \right.$$

Отже, функція має 2 стаціонарні точки $M_1(-2,-6)$, $M_2(-1,-3)$.

2. Знайдемо визначник $\Delta(x,y)$:

$$f''_{xx}(x,y) = 12x, \qquad f''_{yy}(x,y) = -2, \qquad f''_{xy}(x,y) = 6.$$

$$\Delta(x,y) = \begin{vmatrix} f''_{xx}(x,y) & f''_{xy}(x,y) \\ f''_{yx}(x,y) & f''_{yy}(x,y) \end{vmatrix} = f''_{xx}(x,y) \cdot f''_{yy}(x,y) - (f''_{xy}(x,y))^2 = -24x - 36.$$

3. Обчислимо величину $\Delta(x,y)$ в кожній стаціонарній точці:

$$\Delta(M_1) = \Delta(-2,-6) = -24(-2) - 36 = 12 > 0, \quad f''_{xx}(M_1) = -24 < 0 \quad \Rightarrow$$

$M_2(-2,-6)$ – точка локального максимуму,

$$z_{\max} = z(-2,-6) = 2(-2)^3 + 6(-2)(-6) - (-6)^2 + 12(-2) = -4.$$

$$\Delta(M_2) = \Delta(-1,-6) = -12(-1) - 36 = -24 < 0 \quad \Rightarrow$$

в точці $M_2(-1,-3)$ – екстремуму немає.

б) Дослідимо на екстремум функцію $z = x^4 + y^4 - 4x^2 + 8xy - 4y^2$.

Знайдемо частинні похідні першого порядку

$$f'_x(x,y) = 4(x^3 - 2x + 2y), \qquad f'_y(x,y) = 4(y^3 + 2x - 2y).$$

1. Стаціонарні точки функції визначимо з системи:

$$\begin{cases} f'_x(x,y) = 0, \\ f'_y(x,y) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^3 - 2x + 2y = 0, \\ x^3 + y^3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^3 - 4x = 0, \\ y = -x \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x(x^2-4)=0, \\ y=-x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x_1=2, \\ x_2=-2, \\ x_3=0, \end{array}\right. \\ y=-x \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x_1=2, \\ y_1=-2, \end{cases} \\ \begin{cases} x_2=-2, \\ y_2=2, \end{cases} \\ \begin{cases} x_3=0, \\ y_3=0. \end{cases} \end{array}\right.$$

Отже, функція має 3 стаціонарні точки $M_1(2,-2)$, $M_2(-2,2)$, $M_3(0,0)$.

2. Знайдемо визначник $\Delta(x,y)$:

$$f''_{xx}(x,y)=12x^2-8, \qquad f''_{yy}(x,y)=12y^2-8, \qquad f''_{xy}(x,y)=8.$$

$$\Delta(x,y)=\begin{vmatrix} f''_{xx}(x,y) & f''_{xy}(x,y) \\ f''_{yx}(x,y) & f''_{yy}(x,y) \end{vmatrix} = f''_{xx}(x,y)\cdot f''_{yy}(x,y)-(f''_{xy}(x,y))^2 =$$

$$=16(3x^2-2)(3y^2-2)-64=16(9x^2y^2-6x^2+6y^2).$$

3. Обчислимо величину $\Delta(x,y)$ в кожній стаціонарній точці:

$\Delta(M_1)=2304>0,\quad f''_{xx}(M_1)=140>0 \quad\Rightarrow\quad M_1(2,-2)$ – точка локального мінімуму, $z_{\min}=z(2,-2)=-32.$

$\Delta(M_2)=2304>0,\quad f''_{xx}(M_2)=140>0 \quad\Rightarrow\quad M_2(-2,2)$ – точка локального мінімуму, $z_{\min}=z(-2,2)=-32.$

$\Delta(M_3)=0 \quad\Rightarrow$ Потрібно робити додаткове дослідження. Висновку про характер стаціонарної точки $M_3(0,0)$ зробити не можна.

Покажемо, що в точці $M_3(0,0)$ відсутній екстремум.

При $y=0$ функція $z(x,0)=x^4-4x^2=x^2(x^2-4)<0$ – в околі точки $M_3(0,0)$.

Якщо покласти $y=x$, то функція $z(x,x)=z=2x^4>0$. Отже, в околі точки $M_3(0,0)$ значення функції z можуть бути як додатні, так і від'ємні, а це означає, що точка $M_3(0,0)$ не є екстремальною.

Відповідь: а) $M_1(-2,-6)$ – точка локального максимуму, $z_{\max}=-4.$

б) $M_2(2,-2)$, $M_3(-2,2)$ – точки локального мінімуму, $z_{\min}=-32.$

§14. Найменше та найбільше значення функції в замкненій області

Якщо функція $z = f(x, y)$ задана та неперервна в обмеженій замкненій області $\bar{D}$, то за теоремою Веєрштрасса функція в цій області досягає свого найменшого і найбільшого значень. Ці точки потрібно шукати серед критичних точок функції $z = f(x, y)$ всередині області D або серед точок межі області $\bar{D}$.

Алгоритм знаходження найменшого та найбільшого значень функції в замкненій області

1) На координатній площині побудувати задану область.
2) Знайти критичні точки функції, які розташовані в заданій області, і обчислити значення функції в цих точках.
3) Знайти найменше та найбільше значення функції на лініях, що утворюють межу області.
4) З усіх знайдених значень функції вибрати найменше та найбільше.

Завдання 19.

Знайти найменше та найбільше значення функції

$$z = x^2 + 2xy - 4x + 8y$$

в прямокутнику, обмеженому прямими:

$x = -2, \quad y = 0, \quad x = 1, \quad y = 2.$

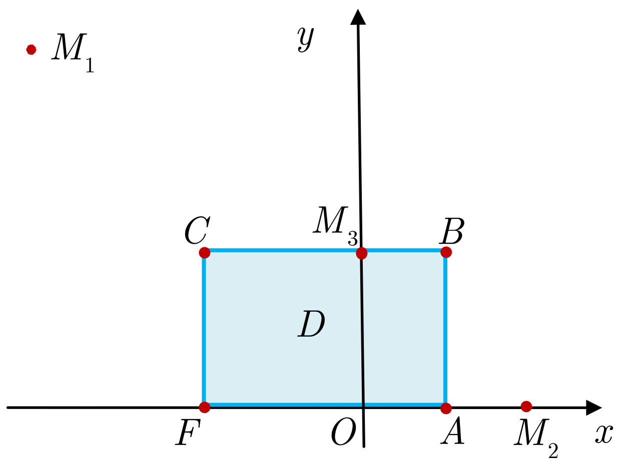

Рис. 12

Розв’язання.

1. Зобразимо на координатній площині Oxy задану область D – прямокутник $ABCF$ (рис. 12).

2. Дослідимо функцію $z = x^2 + 2xy - 4x + 8y$ всередині області D.

Обчислимо частинні похідні

$$z'_x(x,y) = 2x + 2y - 4 = 2(x + y - 2), \qquad z'_y(x,y) = 2x + 8 = 2(x + 4).$$

Стаціонарні точки функції визначимо з системи:

$$\begin{cases} z'_x(x,y) = 0, \\ z'_y(x,y) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y - 2 = 0, \\ x + 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2 - x, \\ x = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -4, \\ y = 6. \end{cases}$$

Розв'язком системи є одна стаціонарна точка $M_1(-4,6)$, але вона не належить області D.

3. Дослідження на межі області.

Область D складається з чотирьох відрізків $FA, AB, FC, CB.$ Проведемо дослідження функції $z = x^2 + 2xy - 4x + 8y$ на кожному з відрізків, включаючи кінцеві точки.

1) $FA: \ y = 0, \ -2 \le x \le 1.$ Підставляючи $y = 0$ у вираз функції, отримаємо

$$z(x,y)\Big|_{y=0} = z(x,0) = x^2 - 4x, \quad x \in [-2,1].$$

Стаціонарну точку одержаної функції знаходимо з рівняння $z'(x,0) = 0$, тобто $2x - 4 = 0 \ \Rightarrow \ x = 2$. Точка $M_2(2,0)$ не належить відрізку FA.

Обчислимо значення функції на кінцях даного відрізка:

$$z(F) = z(-2,0) = 12, \quad z(A) = z(1,0) = -3.$$

2) $AB: \ x = 1, \ 0 \le y \le 2.$ Підставляючи $x = 1$ у вираз функції, отримаємо

$$z(x,y)\Big|_{x=1} = z(1,y) = 10y - 3, \quad y \in [0,2].$$

Це лінійна функція, тому екстремумів вона не має.

Знаходимо значення функції на кінцях відрізка: в точці A уже обчислити в попередньому пункті, $z(B) = z(1,2) = 17.$

3) $CB: \ y = 2, \ -2 \le x \le 1.$ Підставляючи $y = 2$ у вираз функції, отримаємо

$$z(x,y)\Big|_{y=2} = z(x,2) = x^2 + 16, \quad x \in [-2,1].$$

Стаціонарну точку одержаної функції знаходимо з рівняння $z'(x,2)=0$, тобто $2x=0 \;\Rightarrow\; x=0$. Отримана точка $M_3(0,2)$ належить відрізку CB.

Обчислимо значення функції в стаціонарній точці та на кінцях даного відрізка: значення в точці B знайдено в попередньому пункті,

$$z(M_3)=z(0,2)=16, \quad z(C)=(-2,2)=20.$$

4) $FC:\; x=-2,\; 0\le y\le 2.$ Підставляючи $x=-2$ у вираз функції, отримаємо

$$z(x,y)\Big|_{x=-2}=z(-2,y)=12+4y, \;\; y\in[0,2].$$

Це лінійна функція, тому екстремумів вона не має.

Значення функції на кінцях відрізка вже обчислили в попередніх пунктах.

4. Порівнюємо всі знайдені значення функції:

$$z(-2,0)=12, \quad z(1,0)=-3, \quad z(1,2)=17, \quad z(0,2)=16, \quad z(-2,2)=20.$$

Отже, найменше значення функції $z_{\text{найм}}=-3$ в точці $(1,0)$,

найбільше значення функції $z_{\text{найб}}=20$ в точці $(-2,2)$.

Відповідь: $z_{\text{найм}}=z(1,0)=-3, \quad z_{\text{найб}}=z(-2,2)=20.$

Завдання 20.

Знайти найменше та найбільше значення функції

$$z=yx^2(4-x-y)$$

в трикутнику, який обмежений прямими:

$$x=0, \quad y=0, \quad x+y=6.$$

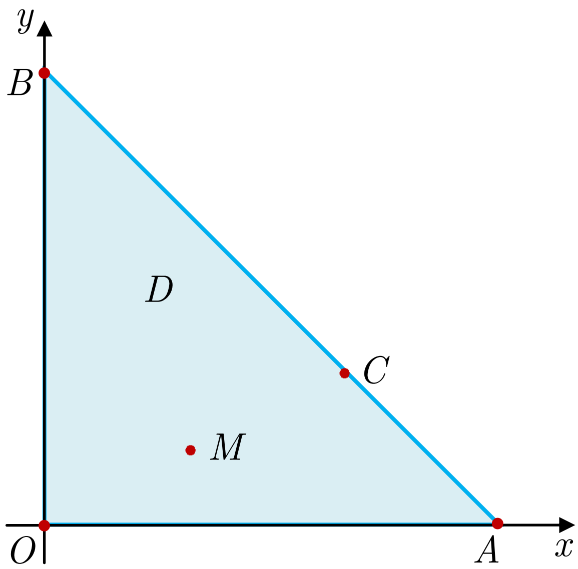

Рис. 13

Розв’язання.

1. Зобразимо на координатній площині Oxy задану область D – трикутник OAB (рис.13).

2. Дослідимо функцію $z = yx^2(4-x-y) = 4x^2y - x^3y - x^2y^2$ всередині області.

Знайдемо частинні похідні:

$$z'_x(x,y) = 8xy - 3x^2y - 2xy^2 = xy(8-3x-2y),$$

$$z'_y(x,y) = 4x^2 - x^3 - 2x^2y = x^2(4-x-2y).$$

Стаціонарні точки функції визначимо з системи

$$\begin{cases} z'_x(x,y) = 0, \\ z'_y(x,y) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} yx(8-3x-2y) = 0, \\ x^2(4-x-2y) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8-3x-2y = 0, \\ 4-x-2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2, \\ y = 1. \end{cases}$$

Скоротили на xy та x^2 (бо всередині $\Delta\, OAB$ $x \neq 0$, $y \neq 0$).

Розв'язком системи є стаціонарна точка $M(2,1) \in D$, тому обчислимо значення функції в цій точці: $z(M) = z(2,1) = 4.$

3. Дослідимо функцію $z = yx^2(4-x-y)$ на межі області, яка складається з відрізків OA, OB, AB.

1) На відрізку $OA:$ $y = 0,$ $0 \le x \le 6,$ тому $z(x,y)\big|_{y=0} = 0$ в усіх точках відрізка. Значення функції на кінцях відрізка: $z(O) = z(A) = 0.$

2) На відрізку $OB:$ $x = 0,$ $0 \le y \le 6,$ тому $z(x,y)\big|_{x=0} = 0$ в усіх точках відрізка. Значення функції на кінцях відрізка: $z(O) = z(B) = 0.$

3) На відрізку $AB:$ $y = 6-x,$ $0 \le x \le 6,$ тому

$$z(x,y)\big|_{y=6-x} = x^2(6-x)(4-x-6+x) = 2x^2(x-6).$$

Знайдемо стаціонарні точки функції $z = 2x^2(x-6)$:

$$z' = 2(x^3 - 6x^2)' = 2(3x^2 - 12x) = 2x(3x-12) = 0 \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x_1 = 0, \\ y_1 = 6, \end{cases} \\ \begin{cases} x_2 = 4, \\ y_2 = 2. \end{cases} \end{array} \right.$$

Отже, функція на відрізку AB має дві стаціонарні точки $B(0,6)$ та $C(4,2)$.

Обчислимо значення функції в цих точках: $z(B) = 0,$ $z(C) = -64.$

4. Порівнюємо всі знайдені значення функції:

$$z(M) = 4, \quad z(O) = z(A) = z(B) = 0, \quad z(C) = -64.$$

Отже, найменше значення функції $z_{\text{найм}} = -64$ в точці $C(4,2)$,

найбільше значення функції $z_{\text{найб}} = 4$ в точці $M(2,1)$.

Відповідь: $z_{\text{найм}} = -64$ в точці $C(4,2)$, $z_{\text{найб}} = 4$ в точці $M(2,1)$.

Завдання 21.

Знайти найменше та найбільше значення функції

$$z = x^2 + y^2$$

всередині еліпса $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{4} = 1.$

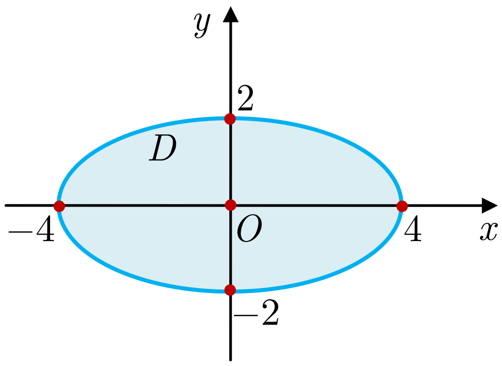

Рис. 14

Розв’язання.

1. Зобразимо на координатній площині Oxy задану область D – це еліпс з півосями $a = 4,\ \ b - 2$ (рис. 14).

2. Дослідимо функцію $z = x^2 + y^2$ всередині області D.

Обчислимо частинні похідні:

$$z'_x(x,y) = 2x, \qquad z'_y(x,y) = 2y.$$

Стаціонарні точки функції визначимо з системи:

$$\begin{cases} z'_x(x,y) = 0, \\ z'_y(x,y) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0, \\ y = 0. \end{cases}$$

Отримали одну стаціонарну точку $O(0,0)$, яка лежить в області D.

Значення функції в цій точці $z(0,0) = 0.$

3. Дослідимо функцію $z = x^2 + y^2$ на межі області D.

З рівняння еліпса $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$ знаходимо, що $y^2 = 4\left(1 - \frac{x^2}{16}\right) \Rightarrow y^2 = 4 - \frac{x^2}{4}$.

Підставляючи цей вираз в рівняння заданої функції, отримаємо

$$z(x,y)\Big|_{y^2 = 4 - \frac{x^2}{4}} = x^2 + 4 - \frac{x^2}{4} = \frac{3x^2}{4} + 4 = f(x), \text{ де } x \in [-4, 4].$$

Отже, знаходження найбільшого та найменшого значення функції $z = x^2 + y^2$ двох змінних на межі області звелося до знаходження найбільшого та найменшого значення функції $f(x) = \frac{3x^2}{4} + 4$ однієї змінної на проміжку $x \in [-4, 4]$.

Стаціонарні точки функції $f(x)$ знаходимо з рівняння $f'(x) = 0$, тобто

$$\frac{3}{2}x = 0 \Rightarrow x = 0.$$

Отже, маємо одну стаціонарну точку, яка належить відрізку $[-4, 4]$. Обчислимо значення функції $f(x) = \frac{3x^2}{4} + 4$ в стаціонарній точці та на кінцях відрізка:

$$f(0) = 4, \quad f(-4) = f(4) = 16.$$

Оскільки $y^2 = 4 - \frac{x^2}{4}$, то точці $x = 0$ функції $f(x)$ відповідають точки $(0, \pm 2)$ функції $z = x^2 + y^2$, відповідно точкам $x = \pm 4$ функції $f(x)$ відповідають точки $(\pm 4, 0)$ функції $z = x^2 + y^2$. Тому маємо

$$z(0, \pm 2) = 4, \quad z(\pm 4, 0) = 16.$$

4. Порівнюємо всі знайдені значення функції:

$$z(0,0) = 0, \quad z(0, \pm 2) = 4, \quad z(\pm 4, 0) = 16.$$

Отже, найменше значення $z_{\text{найм}} = 0$ задана функція приймає всередині області в точці $(0,0)$, а найбільше значення функції $z_{\text{найб}} = 16$ досягається на границі області в точках $(\pm 4, 0)$.

Відповідь: $z_{\text{найм}} = z(0,0) = 0, \quad z_{\text{найб}} = z(\pm 4, 0) = 16.$

Література

1. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: - Навчальний посібник - К.: А.С.К., 1993, 2001.
2. Бугров Я.С., Никольский С.М. Дифференциальное и интегральное исчисление. - М. Наука, 1981.
3. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление для вузов. Том I,II - М. Наука, 1972, 1978.
4. Сборник задач по математике (для ВТУЗов). Линейная алгебра и основы математического анализа. Под редакцией Ефимова А.В., Демидовича Б.П. - М. Наука, 1981, 1986.
5. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. - М. Наука, 1969, 1985.
6. Письменный Д. Т. Конспект лекций по высшей математике. 1 часть. - М.: Рольф, 2002. - 288 с.
7. Данко П.Е., Попов А.Г. Высшая математика в упражнениях и задачах. Части I,II. - М., Высшая школа, 1974.
8. Справочное пособие по математическому анализу. Ряды. Функции нескольких переменных, кратные и криволинейные интегралы. Ляшко И.И., Боярчук А.К., Гай Я.Г., Головач Г.П. - Киев, Вища школа, 1979.
9. И. А. Каплан. Практические занятия по высшей математике. Ч. 1-5. - Харьков, Издательство Харьковского университета, 1967-1972.
10. Вища математика. Диференціальне числення функцій багатьох змінних. Практикум. [Електронний ресурс] : навчальний посібник для здобувачів ступеня бакалавра за технічними спеціальностями / КПІ ім. Ігоря Сікорського ; уклад.: Є. В. Массалітіна, О. О. Кільчинський. – Електронні текстові дані (1 файл: 1,54 Мбайт). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2020. – 35 с.