МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
«ХАРКІВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ»

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

для самостійної роботи над розділом
«Диференціальне числення функції однієї змінної»
з курсу Вищої математики для студентів
спеціальності 101 – «Технології захисту довкілля»

Затверджено редакційно-
видавничою радою університету,
протокол № 1 від15.02.24р.

Харків
НТУ «ХПІ»
2024

Методичні вказівки для самостійної роботи над розділом «Диференціальне числення функції однієї змінної» з курсу вищої математики для студентів спеціальності 101 – «Технології захисту довкілля» / уклад.: Католик І.М., Олексенко В.М. – Харків : НТУ «ХПІ». – 2024. – 22 с.

Укладачі: І.М. Католик, В. М. Олексенко

Рецензент проф. Ю.І. Першина

Кафедра вищої математики

ПЕРЕДМОВА

Вища математика – фундаментальна дисципліна, яка сприяє підготовці висококваліфікованих фахівців інженерних спеціальностей. Сьогодення вимагає підвищення уваги до самостійної роботи студентів. Тому ця праця покликана допомогти студентам оволодіти запропонованим матеріалом самостійно.

На основі наукових досягнень наглядно і доступно викладено основи диференціального числення функції однієї змінної в процесі розв'язання задач. Така форма викладення навчального матеріалу найбільш зручна для засвоєння методів розв'язування задач. З метою самостійно навчитися диференціювати функції та систематизувати свої математичні знання детально розв'язано понад сорок задач. Запропоновані таблиці похідних та диференціалів функцій бажано знати, що значно допоможе при розв'язуванні задач з вищої математики як за вказаною темою, так і при вивченні деяких інших розділів вищої математики в майбутньому.

Методичні вказівки створено за програмою підготовки бакалаврів в технічних університетах для студентів спеціальності 101 – «Технології захисту довкілля».

Автор висловлює щиру вдячність професору кафедри вищої математики Першиній Юлії Ігорівні за вдумливе рецензування.

У результаті вивчення теми «Диференціальне числення функції однієї змінної» студент має знати:

– основні правила знаходження похідних та диференціалів функцій,
– таблицю похідних,
– умови зростання (спадання) функції, існування екстремуму функції,
– необхідну і достатню умови опуклості (угнутості) та існування точок перегину графіка функції.

Уміти:

– знаходити похідну та диференціали функцій першого та вищих порядків,
– досліджувати функції на монотонність,
– знаходити екстремуми функцій,
– знаходити точки перегину графіка функції,
– знаходити найбільше та найменше значення функції на відрізку.

Розв'язання типових задач

Задача 1. Знайти похідну функції $f(x)=\sqrt{x}$ у довільній точці x з області визначення функції.

Розв'язання. Відомо, що похідною $f'(x)$ функції $f(x)$ у точці x називається границя

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x},$$

якщо ця границя існує і скінченна.

Нехай x – довільна точка області визначення функції $f(x)=\sqrt{x}$, а саме $x\geq 0$. Знайдемо приріст функції при зміні аргументу від x до $x+\Delta x$, $(\Delta x>0)$, одержимо

$$\Delta f=f(x+\Delta x)-f(x)=\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}.$$

Звідси

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left(\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}\right)}{\Delta x\left(\sqrt{x+\Delta x}+\Delta x\right)}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x+\Delta x-x}{\Delta x\left(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}\right)}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Таким чином, $\left(\sqrt{x}\right)'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

Задача розв'язана.

Задача 2. Довести, що не існує похідної функції $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$ у точці $x=0$.

Розв'язання. Очевидно, що приріст заданої функції у довільній точці x дорівнює $\Delta f=\sqrt[3]{(x+\Delta x)^2}-\sqrt[3]{x^2}$. Якщо $x=0$, одержимо $\Delta f=\sqrt[3]{(\Delta x)^2}$.

Тому $f'(0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{(\Delta x)^2}}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{1}{\sqrt[3]{\Delta x}}=\pm\infty,$ тобто не існує похідної.

Задача розв'язана.

Наведемо таблицю похідних для зручності розв'язування задач:

1. $c'=0, \quad c=const;$	8. $(\cos x)'=-\sin x;$
2. $\left(x^n\right)'=n\cdot x^{n-1}, \quad n\in R;$	9. $(\mathrm{tg}\, x)'=\dfrac{1}{\cos^2 x};$
3. $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}, \quad x>0;$	10. $(\mathrm{ctg}\, x)'=-\dfrac{1}{\sin^2 x};$
4. $(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}, \quad a>0, \quad a\neq 1;$	11. $(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \ \lvert x\rvert<1;$
5. $\left(a^x\right)'=a^x\ln a, \quad a>0, \quad a\neq 1;$	12. $(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \ \lvert x\rvert<1;$

6. $\left(e^{x}\right)' = e^{x}$;	13. $\left(\operatorname{arctg} x\right)' = \dfrac{1}{1+x^{2}}$;
7. $\left(\sin x\right)' = \cos x$;	14. $\left(\operatorname{arcctg} x\right)' = -\dfrac{1}{1+x^{2}}$.

Задача 3. Знайти y', якщо $y = \log_2 x$.

Розв'язання. Порівняємо формулу 4 таблиці похідних з умовою задачі, отримаємо, що $a = 2$. Звідси маємо $\left(\log_2 x\right)' = \dfrac{1}{x\ln 2}$.

Відповідь: $\dfrac{1}{x\ln 2}$.

Задача 4. Знайти y', якщо $y = 2^{x}$.

Розв'язання. Порівняємо формулу 5 таблиці похідних з умовою задачі, отримаємо, що $a = 2$. Звідси маємо, $\left(2^{x}\right)' = 2^{x}\ln 2$.

Відповідь: $2^{x}\ln 2$.

Задача 5. Знайти y', якщо $y = \log_2 x + 2^{x}$.

Розв'язання. Згідно з основними правилами диференціювання для диференційованих у точці x функцій $u = u(x),\quad v = v(x)$, маємо

$$\left(u \pm v\right)' = u' \pm v'.$$

З розв'язань задач 3 і 4 випливає рівність

$$\left(\log_2 x + 2^{x}\right)' = \left(\log_2 x\right)' + \left(2^{x}\right)' = \frac{1}{x\ln 2} + 2^{x}\ln 2\ .$$

Відповідь: $\dfrac{1}{x\ln 2} + 2^{x}\ln 2$.

Задача 6. Знайти y', якщо $y = x^3 - 5.$

Розв'язання. Згідно з основними правилами диференціювання для диференційованих у точці x функцій $u = u(x),\quad v = v(x),$ маємо

$$(u \pm v)' = u' \pm v'.$$

За таблицею похідних (див. 2, 1), одержуємо $\left(x^3\right)' = 3x^2,\quad 5' = 0.$

Звідси $y' = \left(x^3 - 5\right)' = \left(x^3\right)' - 5' = 3x^2 - 0 = 3x^2.$

Відповідь: $\left(x^3 - 5\right)' = 3x^2.$

Задача 7. Знайти y', якщо $y = x^3 - e^x.$

Розв'язання. Згідно з основними правилами диференціювання для диференційованих у точці x функцій $u = u(x),\quad v = v(x),$ маємо

$$(u \pm v)' = u' \pm v'.$$

Звідси $\left(x^3 - e^x\right)' = \left(x^3\right)' - \left(e^x\right)' = 3x^2 - e^x.$

Остання рівність випливає з таблиці похідних (див. 2, 6).

Відповідь: $3x^2 - e^x.$

Задача 8. Знайти y', якщо $y = 4x^3.$

Розв'язання. Згідно з основними правилами диференціювання для диференційованої в точці x функції $u = u(x),$ маємо

$$(cu)' = cu',\quad \text{де } c = const.$$

За таблицею похідних (див. 2): $\left(x^3\right)' = 3x^2.$

Звідси $y' = \left(4x^3\right)' = 4\left(x^3\right)' = 4 \cdot 3x^2 = 12x^2.$

Відповідь: $\left(4x^3\right)' = 12x^2.$

Задача 9. Знайти y', якщо $y = 2\sin x + 3\cos x$.

Розв'язання. Згідно з основними правилами диференціювання функцій та таблицею похідних, маємо:

$$y' = \left(2\sin x + 3\cos x\right)' = 2\left(\sin x\right)' + 3\left(\cos x\right)' = 2\cos x - 3\sin x.$$

Відповідь: $2\cos x - 3\sin x$.

Задача 10. Знайти y', якщо $y = 2\sin x + 3\cos x + 2024$.

Розв'язання. Згідно з основними правилами диференціювання функцій, таблицею похідних та результатами попередньої задачі, маємо

$$y' = \left(2\sin x + 3\cos x + 2024\right)' = \left(2\sin x + 3\cos x\right)' + \left(2024\right)' =$$

$$= 2\left(\sin x\right)' + 3\left(\cos x\right)' + 0 = 2\cos x - 3\sin x.$$

В передостанній рівності додається нуль, бо похідна від константи дорівнює нулю.

Відповідь: $2\cos x - 3\sin x$.

Задача 11. Знайти y', якщо $y = 3\operatorname{ctg} x - 4\arcsin x$.

Розв'язання. Згідно з основними правилами диференціювання функцій та таблицею похідних, маємо

$$y' = \left(3\operatorname{ctg} x - 4\arcsin x\right)' = 3\left(\operatorname{ctg} x\right)' - 4\left(\arcsin x\right)' = -\frac{3}{\sin^2 x} - \frac{4}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Відповідь: $-\dfrac{3}{\sin^2 x} - \dfrac{4}{\sqrt{1-x^2}}$.

Задача 12. Знайти y', якщо $y = 5\operatorname{tg} x + 7\operatorname{arcctg} x$.

Розв'язання. Згідно з основними правилами диференціювання функцій та таблицею похідних, маємо

$$y' = (5\operatorname{tg} x + 7\operatorname{arcctg} x)' = 5(\operatorname{tg} x)' + 7(\operatorname{arcctg} x)' = \frac{5}{\cos^2 x} - \frac{7}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Відповідь: $\dfrac{5}{\cos^2 x} - \dfrac{7}{\sqrt{1-x^2}}$.

Задача 13. Знайти y' , якщо $y = 5\arccos x + 7\operatorname{arctg} x$.

Розв'язання. Згідно з основними правилами диференціювання функцій та таблицею похідних, маємо

$$y' = (5\arccos x + 7\operatorname{arctg} x)' = 5(\arccos x)' + 7(\operatorname{arctg} x)' = -\frac{5}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{7}{\cos^2 x}.$$

Відповідь: $-\frac{5}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{7}{\cos^2 x}.$

Задача 14. Знайти y', якщо $y = x^3 \sin x.$

Розв'язання. Згідно з основними правилами диференціювання для диференційованих у точці x функцій $u = u(x)$, $v = v(x)$, маємо

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'.$$

За таблицею похідних (див. 2, 7), одержуємо

$$\left(x^3\right)' = 3x^2, \qquad (\sin x)' = \cos x.$$

Звідси $y' = \left(x^3 \sin x\right)' = \left(x^3\right)' \sin x + x^3 (\sin x)' = 3x^2 \sin x + x^3 \cos x.$

Відповідь: $3x^2 \sin x + x^3 \cos x.$

Задача 15. Знайти y', якщо $y = x^3 \arcsin x$.

Розв'язання. Згідно з основними правилами диференціювання для диференційованих у точці x функцій $u = u(x)$, $v = v(x)$, маємо

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'.$$

За таблицею похідних (див. 2, 11), одержуємо

$$\left(x^3\right)' = 3x^2, \quad (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$y' = \left(x^3 \arcsin x\right)' = \left(x^3\right)' \arcsin x + x^3 (\arcsin x)' = 3x^2 \arcsin x + x^3 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Відповідь: $3x^2 \arcsin x + \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}.$

Задача 16. Знайти y', якщо $y = \operatorname{ctg} x \cdot \sin x$.

Розв'язання. Спочатку спростимо задану функцію та отримаємо

$$y = \operatorname{ctg} x \cdot \sin x = \frac{\cos x}{\sin x} \cdot \sin x = \cos x .$$

За таблицею похідних (див. 8), одержуємо $(\cos x)' = -\sin x.$

Відповідь: $-\sin x$.

Задача 17. Знайти y', якщо $y = (4 - x^2)(4 + x^2)$.

Розв'язання. Спочатку спростимо задану функцію за допомогою відомої з шкільної математики формули різниці квадратів та отримаємо

$$y = (4 - x^2)(4 + x^2) = 16 - x^4.$$

За таблицею похідних (див. 2), одержуємо $(16 - x^4)' = -4x^3$.

Відповідь: $-4x^3$.

Задача 18. Знайти y', якщо $y = \dfrac{e^x}{x^4}$.

Розв'язання. Згідно з основними правилами диференціювання для диференційованих у точці x функцій $u = u(x)$, $v = v(x)$, $v(x) \neq 0$, маємо $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$.

За таблицею похідних одержуємо $\left(e^x\right)' = e^x$, $\left(x^4\right)' = 4x^3$.

Звідси $$y' = \left(\frac{e^x}{x^4}\right)' = \frac{\left(e^x\right)' x^4 - e^x \left(x^4\right)'}{\left(x^4\right)^2} = \frac{e^x x^4 - e^x 4x^3}{x^8} =$$

$$= \frac{x^3(xe^x - 4e^x)}{x^8} = \frac{xe^x - 4e^x}{x^5} = \frac{e^x(x-4)}{x^5}.$$

Відповідь: $\dfrac{e^x(x-4)}{x^5}$.

Задача 19. Знайти y', якщо $y=\dfrac{3^x}{x^4}$.

Розв'язання. Згідно з основними правилами диференціювання для диференційованих у точці x функцій $u=u(x)$, $v=v(x)$, $v(x)\neq 0$, маємо $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$.

За таблицею похідних одержуємо $\left(3^x\right)'=3^x\ln 3$, $\left(x^4\right)'=4x^3$.

Звідси $y'=\left(\dfrac{3^x}{x^4}\right)'=\dfrac{\left(3^x\right)'x^4-3^x\left(x^4\right)'}{\left(x^4\right)^2}=\dfrac{3^x\ln 3\cdot x^4-3^x 4x^3}{x^8}=$

$$=\frac{x^3\left(x3^x\ln 3-4\cdot 3^x\right)}{x^8}=\frac{x3^x\ln 3-4\cdot 3^x}{x^5}.$$

Відповідь: $\dfrac{x3^x\ln 3-4\cdot 3^x}{x^5}$.

Задача 20. Знайти y', якщо $y=\sin\left(4x^3-5\right)$.

Розв'язання. Відомо, що похідна складної функції по незалежній змінній дорівнює добутку похідної цієї функції по проміжній змінній на похідну проміжної змінної по незалежній змінній: $y=f'(u)\cdot u'$.

За таблицею похідних, одержуємо

$$(\sin u)'=\cos u,\qquad u'=\left(4x^3-5\right)'=12x^2.$$

Звідси $y'=\left(\sin\left(4x^3-5\right)\right)'=\cos\left(4x^3-5\right)\cdot\left(4x^3-5\right)'=\cos\left(4x^3-5\right)\cdot 12x^2$.

Відповідь: $12x^2\cos\left(4x^3-5\right)$.

Задача 21. Знайти y', якщо $y=\sin^6\left(4x^3-5\right)$.

Розв'язання. За таблицею похідних (див. 2) одержуємо $\left(u^6\right)'=6u^5$.

Нехай $u = \sin\left(4x^3 - 5\right)$. Згідно з правилом знаходження похідної складної функції, маємо

$$y' = \left(\sin^6\left(4x^3 - 5\right)\right)' = 6\sin^5\left(4x^3 - 5\right)\cdot\left(\sin(4x^3 - 5)\right)' =$$

$$= 6\sin^5\left(4x^3 - 5\right)\cdot\cos\left(4x^3 - 5\right)\cdot\left(4x^3 - 5\right)' = 6\sin^5\left(4x^3 - 5\right)\cdot\cos\left(4x^3 - 5\right)\cdot 12x^2 =$$

$$= 72x^2\sin^5\left(4x^3 - 5\right)\cos\left(4x^3 - 5\right).$$

Задача розв’язана.

Задача 22. Знайти похідну функції $y = 2\sin 4x + 3\cos 5x$.

Розв’язання. Застосуємо основні правила диференціювання функцій та одержимо

$$y' = (2\sin 4x + 3\cos 5x)' = 2\left(\sin 4x\right)' + 3\left(\cos 5x\right)' =$$

$$= 2\cdot 4\cos 4x + 3\cdot 5\left(-\sin 5x\right) = 8\cos 4x - 15\sin 5x.$$

Відповідь: $8\cos 4x - 15\sin 5x$.

Задача 23. Знайти похідну функції $y = 4\arcsin x - 5\operatorname{arctg} 2x$.

Розв’язання. Застосуємо основні правила диференціювання функцій:

$$y' = (4\arcsin x - 5\operatorname{arctg} 2x)' = \left(4\arcsin x\right)' - \left(5\operatorname{arctg} 2x\right)' =$$

$$= 4(\arcsin x)' - 5(\operatorname{arctg} 2\mathrm{x})' = \frac{4}{\sqrt{1 - x^2}} - \frac{5\cdot 2}{1 + \left(2x\right)^2} = \frac{4}{\sqrt{1 - x^2}} - \frac{10}{1 + 4x^2}.$$

Відповідь: $\frac{4}{\sqrt{1 - x^2}} - \frac{10}{1 + 4x^2}$.

Задача 24. Знайти похідну функції $y = (2x + 1)^3 \sin x$.

Розв’язання. Застосуємо основні правила диференціювання функцій.

$$y' = \left(\left(2x+1\right)^3 \sin x\right)' = \left(\left(2x+1\right)^3\right)' \sin x + \left(2x+1\right)^3 \left(\sin x\right)' =$$

$$= 3\left(2x+1\right)^2 \cdot \left(2x+1\right)' \sin x + \left(2x+1\right)^3 \cos x = 6\left(2x+1\right)^2 \sin x + \left(2x+1\right)^3 \cos x.$$

Відповідь: $6\left(2x+1\right)^2 \sin x + \left(2x+1\right)^3 \cos x$.

Задача 25. Знайти похідну функції $y = (2x+1)^3 \sin 7x$.

Розв'язання.

$$y' = ((2x+1)^3)' \sin 7x + (2x+1)^3 (\sin 7x)' = 3(2x+1) \sin 7x + (2x+1)^3 7 \cos 7x.$$

Відповідь: $3(2x+1)\sin 7x + 7(2x+1)^3 \cos 7x.$.

Задача 26. Знайти похідну функції $y = e^{2x} \ln\left(4x-5\right)$.

Розв'язання.

$$y' = (e^{2x})' \ln\left(4x-5\right) + e^{2x}\left(\ln\left(4x-5\right)\right)' = 2e^{2x} \ln\left(4x-5\right) + e^{2x} \frac{4}{4x-5} =$$

$$= 2e^{2x}\left(\ln\left(4x-5\right) + \frac{2}{4x-5}\right).$$

Відповідь: $2e^{2x}\left(\ln\left(4x-5\right) + \frac{2}{4x-5}\right)$.

Задача 27. Знайти похідну функції $y = \mathrm{tg}^2 3x \cdot \mathrm{arcctg}\, 5x$.

Розв'язання.

$$y' = (\mathrm{tg}^2 3x)' \cdot \mathrm{arcctg}\, 5x + \mathrm{tg}^2 3x \cdot (\mathrm{arcctg}\, 5x)' =$$

$$= 2\,\mathrm{tg}\, 3x (\mathrm{tg}\, 3x)' \cdot \mathrm{arcctg}\, 5x + \mathrm{tg}^2 3x \cdot \frac{-1}{1+\left(5x\right)^2}\left(5x\right)' =$$

$$= 2\,\mathrm{tg}\, 3x \frac{3}{\cos^2 3x} \mathrm{arcctg}\, 5x - \mathrm{tg}^2 3x \frac{5}{1+25x^2} =$$

$$= \frac{6\,\mathrm{tg}\, 3x\, \mathrm{arcctg}\, 5x}{\cos^2 3x} - \frac{5\,\mathrm{tg}^2 3x}{1+25x^2}.$$

Відповідь: $\frac{6\,\mathrm{tg}\, 3x\, \mathrm{arcctg}\, 5x}{\cos^2 3x} - \frac{5\,\mathrm{tg}^2 3x}{1+25x^2}$.

Зауваження. В геометрії, фізиці, механіці можна зустріти параметричний спосіб задання рівняння, що описує криву на площині або в просторі. Саму ж лінію розглядають як геометричне місце точок (x, y), де координати x та y є функціями допоміжної змінної t, яку називають параметром. Параметр може являти собою час, швидкість, відстань тощо. При цьому для знаходження похідної від параметрично заданої функції не обов'язково переходити до явної залежності.

Задача 28. Знайти похідну функції, що задана параметрично:

$$\begin{cases} x = 3t - 1; \\ y = 6t + 7. \end{cases}$$

Розв'язання. Якщо функція $y(x)$ задана параметрично рівняннями

$$\begin{cases} x = x(t); \\ y = y(t). \end{cases}$$

і функції $x(t)$, $y(t)$ мають похідні в деякій області зміни параметра t, причому $x'(t) \neq 0$ а $x = x(t)$ має обернену функцію, яка диференційована на відповідному проміжку, то має місце формула:

$$y'_x = \frac{y'(t)}{x'(t)}.$$

Оскільки $x'(t) = (3t-1)' = 3, \quad y'(t) = (6t+7)' = 6,$ то

$$y'_x = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{6}{3} = 2.$$

Відповідь: 2.

Задача 29. Знайти похідну функції, заданої параметрично: $\begin{cases} x = 4 - t^3; \\ y = 5 - t^6 \end{cases}$ при $t = 4$.

Розв'язання. Застосуємо формулу для знаходження похідної параметрично заданої функції, отримаємо $y'_x = \frac{y'(t)}{x(t)'} = \frac{\left(5-t^6\right)'}{\left(4-t^3\right)'} = \frac{-6t^5}{-3t^2} = 2t^3.$

За умовою задачі $t = 4$, тому маємо $y'_x = 2\cdot 4^3 = 2\cdot 64 = 128.$

Відповідь: 128.

Задача 30. Знайти похідну функції, заданої параметрично:

$$\begin{cases} x = \sin 5\varphi; \\ y = \cos 5\varphi. \end{cases}$$

Розв'язання. Зазначимо, що параметром заданої функції є допоміжна змінна φ, тому для знаходження похідної використовується формула, записана в наступному вигляді:

$$y'_x = \frac{y'(\varphi)}{x'(\varphi)}$$

Оскільки $x'(\varphi) = (\sin 5\varphi)' = 5\cos 5\varphi, \quad y'(\varphi) = (\cos 5\varphi)' = -5\sin 5\varphi$,

то $y'_x = \frac{y'(\varphi)}{x'(\varphi)} = \frac{-5\sin 5\varphi}{5\cos 5\varphi} = -\frac{\sin 5\varphi}{\cos 5\varphi} = -\mathrm{tg}5\varphi.$

Відповідь: $-\mathrm{tg}5\varphi$.

Задача 31. Знайти похідну параметрично заданої функції $\begin{cases} x = \sin 5\varphi; \\ y = \cos 5\varphi. \end{cases}$ при $\varphi = \frac{\pi}{20}$.

Розв'язання. Застосуємо формулу для знаходження похідної параметрично заданої функції, отримаємо

$$y'_x = \frac{y'(\varphi)}{x'(\varphi)} = \frac{-5\sin 5\varphi}{5\cos 5\varphi} = -\frac{\sin 5\varphi}{\cos 5\varphi} = -\mathrm{tg}5\varphi.$$

За умовою задачі $\varphi = \dfrac{\pi}{20}$, тому маємо

$$y'_x\left(\frac{\pi}{20}\right) = -\operatorname{tg} 5 \cdot \frac{\pi}{20} = -\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = -1$$

Відповідь: -1.

Задача 32. Знайти диференціал функції $y = 4x^3$.

Розв'язання. Відомо, що диференціал dy диференційованої у точці x функції $y = f(x)$ знаходиться за формулою $dy = y'dx,$ або $dy = f'(x)dx.$ Знайдемо похідну функції $y = 4x^3$ у довільній точці $x,$ отримаємо $y' = 12x^2$. Отже, $dy = 12x^2dx.$

Відповідь: $12x^2dx.$

Наведемо таблицю диференціалів функцій ($dy = f'(x)dx$) для зручності розв'язування задач.

1. $dc = 0 \cdot dx,\ c \in R;$	8. $d\cos x = -\sin x\,dx;$
2. $dx^n = n \cdot x^{n-1}dx,\ \ n \in R,\ \ n \neq -1;$	9. $d\operatorname{tg} x = \dfrac{dx}{\cos^2 x};$
3. $d\ln x = \dfrac{dx}{x}, \quad x > 0;$	10. $d\operatorname{ctg} x = -\dfrac{dx}{\sin^2 x};$
4. $d\log_a x = \dfrac{dx}{x\ln a}, \quad a > 0, \quad a \neq 1;$	11. $d\arcsin x = \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}},\ \lvert x\rvert < 1;$
5. $da^x = a^x \ln a\,dx,\ a > 0, \quad a \neq 1;$	12. $d\arccos x = -\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}},\ \lvert x\rvert < 1;$
6. $de^x = e^x dx;$	13. $d\operatorname{arctg} x = \dfrac{dx}{1+x^2};$
7. $d\sin x = \cos x dx;$	14. $d\operatorname{arcctg} x = -\dfrac{dx}{1+x^2}.$

Задача 33. Знайти диференціал функції $y=\sin\left(4x^3-5\right)$.

Розв'язання. Знайдемо похідну функції $y=\sin\left(4x^3-5\right)$ у довільній точці x, одержимо

$$y'=\left(\sin\left(4x^3-5\right)\right)'=\cos\left(4x^3-5\right)\left(4x^3-5\right)'=\cos\left(4x^3-5\right)\cdot 12x^2.$$

Диференціал dy диференційованої у точці x функції y знайдемо за формулою $dy=y'dx$.

Отже, $dy=12x^2\cos\left(4x^3-5\right)dx.$

Відповідь: $12x^2\cos\left(4x^3-5\right)dx$.

Задача 34. Знайти диференціал функції $y=x^2\cos 5x$.

Розв'язання. Знайдемо похідну функції $y=x^2\cos 5x$ у довільній точці x, одержимо

$$y'=(x^2\cos 5x)'=\left(x^2\right)'\cos 5x+x^2\left(\cos 5x\right)'=2x\cos 5x-5x^2\sin 5x.$$

Диференціал dy диференційованої у точці x функції y знайдемо за формулою $dy=y'dx$.

Отже, $dy=(2x\cos 5x-5x^2\sin 5x)dx.$

Відповідь: $(2x\cos 5x-5x^2\sin 5x)dx.$

Задача 35. Знайти y'', якщо $y=x^3-15$.

Розв'язання. Якщо задана диференційована в точці x функція $y=f(x)$, тоді її похідна $y'=f'(x)$, яку називають першою похідною або похідною першого порядку, також є функцією змінної x. Якщо існує похідна від першої похідної заданої функції, то вона називається другою похідною або похідною другого порядку і позначається y'':

$$y'' = \left(y'\right)'.$$

Оскільки $\left(x^3 - 15\right)' = 3x^2,$ то отримаємо $y'' = \left(y'\right)' = (3x^2)' = 6x.$

Відповідь: $6x$.

Задача 36. Знайти y'', якщо $y = x^3 - e^x$.

Розв'язання. Друга похідна функції y знаходиться за формулою:

$$y'' = \left(y'\right)'.$$

Оскільки $\left(x^3 - e^x\right)' = \left(x^3\right)' - \left(e^x\right)' = 3x^2 - e^x,$ то

$$y'' = \left(y'\right)' = \left(3x^2 - e^x\right)' = 6x - e^x.$$

Відповідь: $6x - e^x$.

Задача 37. Знайти d^2y , якщо $y = x^3 - 25$.

Розв'язання. Якщо задана диференційована в точці x функція $y = f(x)$ тоді $dy = y'dx$ називається першим диференціалом або диференціалом першого порядку заданої функції. Другим диференціалом або диференціалом другого порядку називається диференціал від першого диференціала функції $y = f(x)$ в точці x, якщо він існує:

$$d^2y = d(dy).$$

Оскільки $\left(x^3 - 25\right)' = 3x^2$, то $d\left(x^3 - 25\right) = \left(x^3 - 25\right)' dx = 3x^2dx.$

Звідси маємо $d^2y = d\left(dy\right) = d\left(3x^2dx\right) = \left(3x^2\right)' dx^2 = 6xdx^2.$

Відповідь: $6xdx^2$.

Задача 38. Знайти інтервали монотонності функції $f\left(x\right) = x^2 + 3.$

Розв'язання. Застосуємо метод інтервалів. Відомо, що функції, які зростають або спадають на інтервалі називаються монотонними на цьому інтервалі. Згідно правила дослідження функцій на монотонність, спочатку знаходять точки з області визначення, у яких похідна функції дорівнює нулю або не існує (критичні точки). Критичні точки розбивають область визначення $D(f)$ функції $f(x)$ на інтервали, на кожному з яких $f'(x)$ зберігає знак. Потім досліджують знак $f'(x)$ на кожному з цих інтервалів. Якщо $f'(x)>0$ $\left(f'(x)<0\right)$, то на цьому інтервалі функція зростає (спадає).

Знаходимо критичні точки заданої функції $f(x)=x^2+3$, яка визначена $\forall x\in R$. Похідна $f'(x)=(x^2+3)'=2x$ існує в області визначення $D(f)=R$, причому $f'(x)=2x=0$ тоді і тільки тоді, коли $x=0$. Таким чином, $x=0$ – критична точка, яка розбиває числову вісь на два інтервали: $(-\infty,0)$ і $(0,+\infty)$.

Розглянемо будь-яку точку, наприклад $x=-1$, з першого інтервалу і знайдемо значення $f'(-1)$ похідної у цій точці, одержимо $f'(-1)=-2<0$.

Отже, на інтервалі $(-\infty,0)$ задана функція спадає.

Розглянемо будь-яку точку, наприклад $x=1$, з інтервалу $(0,+\infty)$ і знайдемо значення $f'(1)$ похідної в цій точці, одержимо $f'(1)=2>0$.

Отже, на інтервалі $(0,+\infty)$ задана функція зростає.

Відповідь: функція $f(x)=x^2+3$ спадає на інтервалі $(-\infty,0)$ і зростає на інтервалі $(0,+\infty)$.

Задача 39. Дослідити на екстремум функцію $f(x)=x^2-5$.

Розв'язання. Згідно з правилом дослідження функції на екстремум, спочатку знаходять критичні точки – точки з області визначення $D(f)$ функції $f(x)$, у яких $f'(x)$ дорівнює нулю або не існує. Потім досліджують знак $f'(x)$ у деякому околі кожної критичної точки. Якщо знак змінюється під час переходу через критичну точку, то $f(x)$ у цій точці має екстремум.

Знаходимо критичні точки функції $f(x)=x^2-5$ для якої очевидно $D(f)=R$. Похідна $f'(x)=(x^2-5)'=2x$ існує $\forall x\in D(f)$, причому $f'(x)=0$ тоді і тільки тоді, коли $x=0$. Таким чином, $x=0$ – критична точка.

Розглянемо знак $f'(x)$ у точці $x=-1$, яка лежить ліворуч від критичної точки, а потім у точці $x=1$, яка лежить праворуч.

$$f'(-1)=-2<0, \qquad f(1)=2>0.$$

Отже, під час переходу через критичну точку знак похідної функції змінився, і сама функція $f(x)$ має екстремум у точці $x=0$. При цьому $x=0$ – точка мінімуму, бо знак похідної змінюється з мінуса на плюс.

Відповідь: у точці $x=0$ задана функція має мінімум.

Задача 40. Знайти найбільше і найменше значення функції $f(x)=x^3-3x+3$ на відрізку $[-1{,}1, 3]$.

Розв'язання. Відомо, що неперервна на відрізку $[a,b]$ функція приймає найбільше (найменше) значення, яке дорівнює або одному із значень функції у якійсь критичній точці інтервалу (a,b), або одному із значень функції в кінцях відрізка $[a,b]$.

Знаходимо критичні точки заданої функції. Похідна $f'(x)=3x^2-3$ існує для будь-якого дійсного числа.

$$3x^2-3=0 \Rightarrow \quad 3x^2=3 \Rightarrow \quad x^2=1 \Rightarrow \quad x_1=-1,\ x_2=1.$$

Обидві критичні точки потрапили до заданого відрізка.

Знаходимо значення функції $f(x)=x^3-3x+3$ у точках $x_1=-1$, $x_2=1$, $a=-1{,}1$, $b=3$, одержимо

$f(-1)=-1-(-3)+3=5$, $f(1)=1-3+3=1$,

$f(-1{,}1)=-1{,}331-(-3{,}3)+3=4{,}969$, $f(3)=27-9+3=21$.

Порівняємо знайдені значення. Очевидно, що найменше значення заданої функції $m=1$ досягається у точці $x_2=1$ (у точці мінімуму), а найбільше $M=21$ – у точці $b=3$ (на правому кінці відрізка).

Відповідь: найменше значення заданої функції $m=1$ досягається у точці $x=1$, найбільше $M=21$ – у точці $x=3$.

ЛІТЕРАТУРА

1. Дзядик В. К. Математичний аналіз: підручник для матем. спец. ун-тів : у 2 т. / В.К.Дзядик. – Київ: Вища школа, 1995. – Т. 1. – 495 с.

2. Дороговцев А. Я. Математичний аналіз: підруч. для вузів: у 2 ч. / А.Я. Дороговцев. – Київ: Либідь, 1993. – Ч. 1. – 320 с.

3. Корольський В. В. Математичний аналіз. Вступний курс (на підтримку самостійної роботи студентів): навч. посібник / В.В. Корольський. – Кривий Ріг: друкарня СПД Щербенюк С. Г., 2012. – 248 с.

4. Корольський В. В. Математичний аналіз. Диференціальне та інтегральне числення функції однієї змінної: навч. Посібник / В.В. Корольський. – Кривий Ріг: КПІ ДВНЗ «КНУ», 2013. – 398 с.

5. Ляшко И. И. Математичний аналіз у прикладах і задачах: в 2 ч. /Ляшко И. И., Боярчук А. К., Головач Г. П. – Київ : Вища школа, 1974.– Ч. 1.– 680с.

6. Олексенко В.М. Вища математика в задачах: навч. посібник / В.М. Олексенко. – Х.: ХНАУ, 2013. – 76с.

7. Олексенко В.М. Лінійна алгебра та аналітична геометрія: підруч. / В.М. Олексенко. - Харків: НТУ "ХПІ", 2006. - 372 с.

8. Збірник розрахунково-графічних завдань з вищої математики у 2-х частинах / За ред. Чікіної Н.О. – Ч.1. – Х.: Підручник НТУ «ХПІ», 2012. – 224с. http://repository.kpi.kharkov.ua/bitstream/KhPIPress/17443/1/Chikina_Zbirnyk_rozrakhunkovo_Ch_1_2012.pdf)

9. Шкіль М.І. Вища математика, 2 ч. / Шкіль М.І., Колеснік Т.В. – Київ: Вища школа, 1984.

10. Шкіль М. І. Математичний аналіз: підручник: у 2 ч. / М.І. Шкіль. – Вид. 3-тє, переробл. і допов. – Київ: Вища школа, 2005. – Ч. 1. – 447 с.

Навчальне видання

«Методичні вказівки для самостійної роботи над розділом «Диференціальне числення функції однієї змінної» з курсу вищої математики для студентів спеціальності 101 – «Технології захисту довкілля»

Укладачі:
ОЛЕКСЕНКО В'ячеслав Михайлович
КАТОЛИК Ірина Мирославівна

Відповідальний за випуск проф. Першина Ю.І.

Роботу до видання рекомендував проф. Чікіна Н.О.

В авторській редакції

План 2024 р., поз. 65

Підп. до друку 2024 р. Гарнітура Times New Roman.

Видавничий центр НТУ «ХПІ»,
вул. Кирпичова, 2, м. Харків, 61002
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 5478 від 21.08.2017 р.

Електронна версія