

Розрахункова робота
«Диференціальне числення функцій кількох змінних»,
«Кратні та криволінійні інтеграли», «Теорія рядів»

Варіант 1

Частина 1.

1. Знайдіть і зобразіть область визначення функції $z = \sqrt{\sin \pi(x^2 + y^2)}$.
2. Знайдіть повний диференціал функції $z = \sqrt{\frac{y}{x} + 2y + x^4}$.
3. Обчисліть наближено $\arctg \frac{(1,04)^2}{0,98}$.
4. Дослідіть на екстремум функцію $z = x^2 + y^2 - xy + x + y$.
5. Знайдіть кут між градієнтами функції $u = \ln(x^2 y + 2y - z)$ у точках: A(1;0;1) і B(0;1;1).

Частина 2.

6. Обчисліть подвійний інтеграл $\iint_D xy^2 dx dy$ по області $D: y = x^2, y = 2x$.
7. Обчисліть інтеграл, переходячи від прямокутних декартових координат до полярних:
$$\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2}} dy.$$
8. Обчисліть об'єм тіла, обмеженого заданими поверхнями
 $x + 5y + 4z - 20 = 0, x = 0, y = 0, z = 0$.
9. Обчисліть криволінійний інтеграл першого роду $\int_L (x^2 + y^2) dl$, де L - коло $x^2 + y^2 = 4$.

Частина 3.

10. Дослідіть на збіжність ряди з додатніми членами:
а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3 + 2}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln^n(n+1)}$; г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n+2) \cdot \ln(3n+2)}$.
11. Дослідіть на абсолютну та умовну збіжність знакопозитивний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{(n+1) \cdot 2^n}$.
12. Знайдіть область збіжності степеневого ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{5^n} x^n$.
13. Розкладіть функцію $f(x) = \ln(5x+3)$ в ряд Тейлора в околі вказаної точки $x_0 = 1$. Знайдіть область збіжності отриманого ряду цієї функції.
14. Обчислити наближено з заданою точністю ε :
а) $\sqrt[5]{250}, \varepsilon = 0,01$; б) $\int_0^1 \frac{\sin x}{\sqrt[3]{x}} dx, \varepsilon = 0,0001$.

Варіант 2

Частина 1

1. Знайдіть і зобразіть область визначення функції $z = \ln x - \ln \sin y$.
2. Доведіть, що $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 = 1$, де $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.
3. Обчисліть наближено $\sqrt{(3,03)^4 + 1,98^3 + 11}$.
4. Дослідіть на екстремум функцію $z = x^2 + 2xy - y^2 + 4x$.
5. Для функції $z = \arcsin \frac{x}{x+y}$ знайдіть кут між її градієнтами у точках $(1;1;0)$ і $(3;4;0)$.

Частина 2

6. Обчисліть подвійний інтеграл $\iint_D xy^3 dx dy$ по області $D: y = x^3, y \geq 0, y = 4x$.
7. Обчисліть інтеграл, переходячи від прямокутних декартових координат до полярних:
$$\int_{-2}^2 dx \int_{-\sqrt{4-x}}^{\sqrt{4-x^2}} \sin \sqrt{x^2 + y^2} dy.$$
8. Обчисліть об'єм тіла, обмеженого заданими поверхнями
 $2x + 9y + 2z - 18 = 0, x = 0, y = 0, z = 0$.
9. Обчисліть криволінійний інтеграл першого роду $\int_L \frac{dl}{\sqrt{8-x^2-y^2}}$, де L - відрізок прямої, що з'єднує точки $O(0;0)$ і $B(2;2)$.

Частина 3

10. Дослідіть на збіжність ряди з додатніми членами:
а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^5}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{(n+1)5^{n+1}}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^n}$; г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 \cdot \ln(1/n)}$.
11. Дослідіть на абсолютну та умовну збіжність знакопозитивний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(3n-2)!}$.
12. Знайдіть область збіжності степеневого ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{(3n-1)^2 \cdot 3^n}$.
13. Розкладіть функцію $f(x) = \frac{10}{3-x-2x^2}$ в ряд Тейлора в околі вказаної точки $x_0 = 0$. Знайдіть область збіжності отриманого ряду цієї функції.
14. Обчисліть наближено з заданою точністю ε :
а) $\sin 1, \varepsilon = 0,00001$; б) $\int_0^{0,25} \ln(1 + \sqrt{x}) dx, \varepsilon = 0,0001$.

Варіант 3

Частина 1

1. Знайдіть і зобразіть область визначення функції $z = \frac{\ln(1-x^2-y^2)}{\sqrt{x^2-y^2}}$.
2. Доведіть, що $x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$, якщо $z = e^{xy}$.
3. Обчисліть наближено $\sqrt{2,98^2 - 1,03}$.
4. Дослідіть на екстремум функцію $z = x^2 - xy + y^2 + 3x - 2y + 1$.
5. Знайдіть градієнт функції $z = \arctg \frac{y}{x}$ та його значення у точці $(\sqrt{3}; 1; 0)$.

Частина 2

6. Обчисліть подвійний інтеграл $\iint_D (x+y) dx dy$ по області $D: y^2 = x, y = x$.
7. Обчисліть інтеграл, переходячи від прямокутних декартових координат до полярних:
$$\int_{-\sqrt{3}}^0 dx \int_0^{\sqrt{3-x^2}} \frac{dy}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$$
8. Обчисліть об'єм тіла, обмеженого заданими поверхнями
 $4x + 6y + 3z - 12 = 0, x = 0, y = 0, z = 0$.
9. Обчисліть криволінійний інтеграл першого роду $\int_L (4\sqrt[3]{x} - 3\sqrt{y}) dl$, де L - відрізок прямої, що з'єднує точки $A(0;4)$ і $B(4;0)$.

Частина 3

10. Дослідіть на збіжність ряди з додатніми членами:
а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5n+2}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^n}{3n!}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5n-1}{5n}\right)^{n^2}$; г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1) \cdot \ln^3(2n+1)}$.
11. Дослідіть на абсолютну та умовну збіжність знакопозитивний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{3^n}{(5n+2)^n}$.
12. Знайдіть область збіжності степеневого ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^2}{2^n} x^n$.
13. Розкладіть функцію $f(x) = \sqrt[3]{8-3x}$ в ряд Тейлора в околі вказаної точки $x_0 = 0$. Знайдіть область збіжності отриманого ряду цієї функції.
14. Обчисліть наближено з заданою точністю ε :

а) $\sqrt{1,3}$, $\varepsilon = 0,001$; б) $\int_0^{1/2} x \cdot \cos \sqrt{2x} dx$, $\varepsilon = 0,0001$.

Варіант 4

Частина 1

1. Знайдіть і зобразіть область визначення функції $z = \frac{1}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$.

2. Доведіть, що функція $z = \arctg \frac{u}{v}$, де $u = x + y$, $v = x - y$, задовольняє рівність

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x-y}{x^2+y^2}.$$

3. Обчисліть наближено $(2\sqrt{0,97})^{3,02}$.

4. Дослідіть на екстремум функцію $z = (x-1)^2 + 2y^2$.

5. Знайдіть точки, в яких модуль градієнта функції $z = (x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}$ дорівнює 2.

Частина 2

6. Обчисліть подвійний інтеграл $\iint_D (x^3 - 2y) dx dy$ по області $D: y = x^2 - 1, y = 0$.

7. Обчисліть інтеграл, переходячи від прямокутних декартових координат до полярних:

$$\int_0^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{\operatorname{tg} \sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} dy.$$

8. Обчисліть об'єм тіла, обмеженого заданими поверхнями

$$8x + y + 2z - 8 = 0, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0.$$

9. Обчисліть криволінійний інтеграл першого роду $\int_L y dl$, де L - дуга астроїди $x = \cos^3 t$,

$y = \sin^3 t$ обмежена між точками $A(1;0)$ і $B(0;1)$.

Частина 3

10. Дослідіть на збіжність ряди з додатніми членами:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3+3n}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6^n}{5^n(2n+1)}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \arctg^n \frac{1}{2n+1}$; г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+3) \cdot \ln^5(2n+3)}$.

11. Дослідіть на абсолютну та умовну збіжність знакопозитивний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+1}}$.

12. Знайдіть область збіжності степеневого ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^{n^2} \cdot (x+1)^n$.

13. Розкладіть функцію $f(x) = \ln(5x - 2x^2 + 2)$ в ряд Тейлора в околі вказаної точки $x_0 = 1$.

Знайдіть область збіжності отриманого ряду цієї функції.

14. Обчисліть наближено з заданою точністю ε :

$$\text{а) } \arctg \frac{\pi}{10}, \quad \varepsilon = 0,001; \quad \text{б) } \int_0^1 \arctg\left(\frac{x^2}{2}\right) dx, \quad \varepsilon = 0,0001.$$

Варіант 5

Частина 1

1. Знайдіть і зобразіть область визначення функції $z = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 - 9}}$.
2. Задана функція $z = \ln(x^2 + y^2 + 2y + 1)$. Покажіть, що $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$.
3. Обчисліть наближено $\arctg\left(\frac{1,97}{1,02} - 1\right)$.
4. Дослідіть на екстремум функцію $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 1$.
5. Знайдіть $\text{grad } z$ і похідну функції $z = \ln(3x^2 + 2xy^2)$ у точці $A(1;2;0)$ за напрямком вектора $\vec{\lambda} = 3\vec{i} - 4\vec{j}$.

Частина 2

6. Обчисліть подвійний інтеграл $\iint_D (1+y) dx dy$ по області $D: y^2 = x, 5y = x$.
7. Обчисліть інтеграл, переходячи від прямокутних декартових координат до полярних:
$$\int_0^2 dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \cos(x^2 + y^2) dy.$$
8. Обчисліть об'єм тіла, обмеженого заданими поверхнями
 $x + 2y + 4z - 8 = 0, x = 0, y = 0, z = 0$.
9. Обчисліть криволінійний інтеграл першого роду $\int_L \sqrt{2y} dl$, де L - перша арка циклоїди
 $x = 2(t - \sin t), y = 2(1 - \cos t)$.

Частина 3

10. Дослідіть на збіжність ряди з додатніми членами:
а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2 + n}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n (n+2)!}{n^5}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} 3^n \left(\frac{2n}{9n+1}\right)^n$; г) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln n \cdot \ln(\ln n)}$.
11. Дослідіть на абсолютну та умовну збіжність знакопозитивний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+5}{3^n}$.
12. Знайдіть область збіжності степеневого ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n}{\sqrt{n}} x^n$.
13. Розкладіть функцію $f(x) = \frac{8}{15 + 2x - x^2}$ в ряд Тейлора в околі вказаної точки $x_0 = -1$. Знайдіть область збіжності отриманого ряду цієї функції.
14. Обчисліть наближено з заданою точністю ε :
а) $\arctg(0,1), \varepsilon = 0,001$; б) $\int_{0,3}^{0,5} \frac{1 + \cos x}{x^2} dx, \varepsilon = 0,0001$.

Варіант 6

Частина 1

1. Знайдіть і зобразіть область визначення функції $z = \arcsin \frac{y-1}{x}$.
2. Покажіть, що $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, якщо $u = e^x(x \cos y - y \sin y)$.
3. Обчисліть наближено $\frac{2,03}{2^4 + (2,97)^2}$.
4. Дослідіть на екстремум функцію $z = -x^2 - xy - y^2 + x + y$.
5. Знайдіть градієнт і похідну функції $z = \arctg x^2 y$ в точці $A(2;3;0)$ за напрямком $\vec{\lambda} = 4\vec{i} + 3\vec{j}$.

Частина 2

6. Обчисліть подвійний інтеграл $\iint_D (x+y) dx dy$ по області $D: y = x^2 - 1, y = -x^2 + 1$.
7. Обчисліть інтеграл, переходячи від прямокутних декартових координат до полярних:
$$\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \frac{dy}{1+\sqrt{x^2+y^2}}$$
8. Обчисліть об'єм тіла, обмеженого заданими поверхнями
 $3x + 6y + 2z - 12 = 0, x = 0, y = 0, z = 0$.
9. Обчисліть криволінійний інтеграл першого роду $\int_L \frac{(y^2 - x^2)xy dl}{(x^2 + y^2)^2}$, де L - дуга кривої
 $r = 9 \sin 2\varphi, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$.

Частина 3

10. Дослідіть на збіжність ряди з додатніми членами:
а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[5]{n^3 + n}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n (n+2)!}{n^5}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\arcsin \frac{1}{2^n}\right)^{3n}$; г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(10n+5) \cdot \ln(10n+5)}$.
11. Дослідіть на абсолютну та умовну збіжність знакопозитивний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{1}{2n+7}\right)^n$.
12. Знайдіть область збіжності степеневого ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^3 + 1} (x+3)^n$.
13. Розкладіть функцію $f(x) = \frac{x-1}{\sqrt[3]{31-4x}}$ в ряд Тейлора в околі вказаної точки $x_0 = 1$. Знайдіть область збіжності отриманого ряду цієї функції.
14. Обчисліть наближено з заданою точністю ε :
а) $ch 2, \varepsilon = 0,0001$; б) $\int_0^{0,2} \sqrt{x} \cdot e^{-x} dx, \varepsilon = 0,0001$.

Варіант 7

Частина 1

1. Знайдіть і зобразіть область визначення функції $z = \frac{1}{\sqrt{x+y}} + \frac{1}{\sqrt{x-y}}$.
2. Покажіть, що для функції $z = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}$ має місце рівність $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$.
3. Обчисліть наближено $(2,01)^{0,97}$.
4. Дослідіть на екстремум функцію $z = -x^2 - y^2 + 4x + 2y - 2$.
5. Знайдіть точку, в якій градієнт функції $z = \ln\left(x + \frac{1}{y}\right)$ дорівнює вектору $\vec{i} - \frac{16}{9}\vec{j}$.

Частина 2

6. Обчисліть подвійний інтеграл $\iint_D x(y-1) dx dy$ по області $D: y = 5x, y = x, x = 3$.

7. Обчисліть інтеграл, переходячи від прямокутних декартових координат до полярних:

$$\int_{-1}^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1+x^2+y^2} dy.$$

8. Обчисліть об'єм тіла, обмеженого заданими поверхнями

$$2x + 5y + z - 10 = 0, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0.$$

9. Обчисліть криволінійний інтеграл першого роду $\int_L \operatorname{arctg} \frac{y}{x} dl$, де L - дуга кардіоїди

$$r = 2(1 + \cos \varphi), \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}.$$

Частина 3

10. Дослідіть на збіжність ряди з додатніми членами:

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n+1}}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{7n}{5^n (n+1)!}; \quad \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2 + 3n + 4}{2n^2 - 3} \right)^n; \quad \text{г) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(9n-4) \cdot \ln^2(9n-4)}.$$

11. Дослідіть на абсолютну та умовну збіжність знакопозитивний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{3^n + 2}$.

12. Знайдіть область збіжності степеневого ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n!}$.

13. Розкладіть функцію $f(x) = \ln(1+x-20x^2)$ в ряд Тейлора в околі вказаної точки $x_0 = 1$. Знайдіть область збіжності отриманого ряду цієї функції.

14. Обчисліть наближено з заданою точністю ε :

$$\text{а) } e^2, \quad \varepsilon = 0,01; \quad \text{б) } \int_0^{0,5} \frac{\operatorname{arctg} x^2}{x^2} dx, \quad \varepsilon = 0,0001.$$

Варіант 8

Частина 1

1. Знайдіть і зобразіть область визначення функції $z = \sqrt{x+y} - \sqrt{x-y}$.
2. Покажіть, що $x \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) = y \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, де $u = x e^{-\frac{y}{x}}$.
3. Обчисліть наближено $\ln 2,73 - 1,03^{2,73}$.
4. Дослідіть на екстремум функцію $z = x^3 + y^3 - 9xy + 27$.
5. Знайдіть похідну функції $u = xyz$, у точці $A(5;1;2)$ за напрямком, який іде від цієї точки до точки $B(9;4;14)$.

Частина 2

6. Обчисліть подвійний інтеграл $\iint_D (x-2) dx dy$ по області D : $y = x$, $y = \frac{1}{2}x$, $x = 2$.
7. Обчисліть інтеграл, переходячи від прямокутних декартових координат до полярних:

$$\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \int_{-\sqrt{2-x^2}}^{\sqrt{2-x^2}} e^{-(x^2+y^2)} dy.$$

8. Обчисліть об'єм тіла, обмеженого заданими поверхнями

$$x + 5y + 3z - 15 = 0, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0.$$

9. Обчисліть криволінійний інтеграл першого роду $\int_L (x+y) dl$, де L - контур трикутника з

вершинами $A(1;0)$, $B(0;1)$, $O(0;0)$, $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$.

Частина 3

10. Дослідіть на збіжність ряди з додатніми членами:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n-1}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+2}{(n+1)!}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\arctg \frac{1}{5^n} \right)^n$; г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(5n+8) \cdot \ln^3(5n+8)}$.

11. Дослідіть на абсолютну та умовну збіжність знакопозитивний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+5}{3^n}$.

12. Знайдіть область збіжності степеневого ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{(2n+1) \cdot 4^n}$.

13. Розкладіть функцію $f(x) = \frac{\arctg 2x}{x}$ в ряд Тейлора в околі вказаної точки $x_0 = 0$. Знайдіть область збіжності отриманого ряду цієї функції.

14. Обчисліть наближено з заданою точністю ε :

а) $\cos 2^\circ$, $\varepsilon = 0,001$; б) $\int_0^{0,2} \sqrt{x} \cdot \cos x dx$, $\varepsilon = 0,0001$.

Варіант 9

Частина 1

1. Знайдіть і зобразіть область визначення функції $z = \arcsin \frac{y}{x}$.
2. Задано $z = e^{-x-3y} \sin(3y+x)$, де $x = t \cos^3 2t$, $y = tg^3 \frac{t}{2}$. Знайдіть $\frac{dz}{dt}$.
3. Обчисліть наближено $\sin 29^\circ \cdot tg 46^\circ$.
4. Дослідіть на екстремум функцію $z = x^2 + 3y^2 - 6x - 6y + 2$.
5. Знайдіть кут між градієнтами функції $u = yx^3 + xy^2 - \frac{yx}{z^2}$ у точках A(1;0;0) і B(0;1;0).

Частина 2

6. Обчисліть подвійний інтеграл $\iint_D xy \, dx dy$ по області $D: y = x^3, y = 0, x = 2$.
7. Обчисліть інтеграл, переходячи від прямокутних декартових координат до полярних:

$$\int_0^2 dx \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \cos \sqrt{x^2 + y^2} dy.$$

8. Обчисліть об'єм тіла, обмеженого заданими поверхнями

$$5x + 3y + 15z - 15 = 0, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0.$$

9. Обчисліть криволінійний інтеграл першого роду $\int_L (x+y) dl$, де L - дуга лемніскати Бернуллі

$$r^2 = \cos 2\varphi, \quad -\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}.$$

Частина 3

10. Дослідіть на збіжність ряди з додатніми членами:

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} tg \frac{\pi}{3^n}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{6^n \cdot n^5}; \quad \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(n+1)^{n^2}}; \quad \text{г) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(10n+3) \cdot \ln^2(10n+3)}.$$

11. Дослідіть на абсолютну та умовну збіжність знакопозитивний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n-1}{n^2+1}$.

12. Знайдіть область збіжності степеневого ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n} \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n^2} \cdot x^n$.

13. Розкладіть функцію $f(x) = \frac{1}{\sqrt{4+x}}$ в ряд Тейлора в околі вказаної точки $x_0 = -3$. Знайдіть

область збіжності отриманого ряду цієї функції.

14. Обчисліть наближено з заданою точністю ε :

$$\text{а) } \sqrt[3]{80}, \quad \varepsilon = 0,001; \quad \text{б) } \int_0^1 \sin(x^2) dx, \quad \varepsilon = 0,0001.$$

Варіант 10

Частина 1

1. Знайдіть і зобразіть область визначення функції $z = \ln(x^2 + y^2 - 1)$.
2. Задана функція $z = \ln(\sqrt{x}y + 1)$, де $y = \sqrt[3]{x^2 - 1}$. Знайдіть $\frac{\partial z}{\partial x}$ та $\frac{dz}{dx}$.
3. Обчисліть наближено $1,002^2 + 2,003^3$.
4. Дослідіть на екстремум функцію $z = 2x^3 - xy^2 + 5y^2 + y$.
5. Знайдіть кут між градієнтами функції $u = \frac{x}{x^2 + y^2 + z^2}$ у точках А(1;2;3) і В(-3;1;0).

Частина 2

6. Обчисліть подвійний інтеграл $\iint_D (x + y) dx dy$ по області $D: y = x^3, y = 8, y = 0, x = 3$.

7. Обчисліть інтеграл, переходячи від прямокутних декартових координат до полярних:

$$\int_{-1}^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1+x^2+y^2} dy.$$

8. Обчисліть об'єм тіла, обмеженого заданими поверхнями

$$3x + 4y + z - 12 = 0, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0.$$

9. Обчисліть криволінійний інтеграл першого роду $\int_L y dl$, де L - дуга параболи $y^2 = 2x$, відсічена параболою $x^2 = 2y$.

Частина 3

10. Дослідіть на збіжність ряди з додатніми членами:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3 + n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{(n+1)!}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln^n(n+2)}$; г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+3) \cdot \ln(n+3) \cdot \ln(\ln(n+3))}$.

11. Дослідіть на абсолютну та умовну збіжність знакочередний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{3^n}{(2n+1)^n}$.

12. Знайдіть область збіжності степеневого ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^{n+3}}{n^2 + 3}$.

13. Розкладіть функцію $f(x) = \ln \frac{1}{x^2 - 2x + 2}$ в ряд Тейлора в околі вказаної точки $x_0 = 1$.

Знайдіть область збіжності отриманого ряду цієї функції.

14. Обчисліть наближено з заданою точністю ε :

а) $\ln(1,05)$, $\varepsilon = 0,001$; б) $\int_0^{0,5} \ln(1+x^3) dx$, $\varepsilon = 0,0001$.

Варіант 11

Частина 1

1. Знайдіть і зобразіть область визначення функції $z = \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$.
2. Знайдіть повний диференціал функції $u = xyz$.
3. Обчисліть наближено $\sqrt{4,05^2 + 2,93^2}$.
4. Дослідіть на екстремум функцію $z = x^2 + 3y^2 + x - y$.
5. Знайдіть кут між градієнтами функції $z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$ у точках $A(-1;1;0)$ і $B(2;3;0)$.

Частина 2

6. Обчисліть подвійний інтеграл $\iint_D xy^2 dx dy$ по області $D: y = x, y = 0, x = 1$.
7. Обчисліть інтеграл, переходячи від прямокутних декартових координат до полярних:

$$\int_{-3}^3 dx \int_{-\sqrt{9-x^2}}^0 \frac{xy}{x^2 + y^2} dy.$$

8. Обчисліть об'єм тіла, обмеженого заданими поверхнями

$$5x + 15y + z - 15 = 0, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0.$$

9. Обчисліть криволінійний інтеграл першого роду $\int_L \frac{dl}{x-y}$, де L - відрізок прямої $y = \frac{1}{2}x - 2$, обмежений точками $A(0; -2)$, $B(4; 0)$.

Частина 3

10. Дослідіть на збіжність ряди з додатніми членами:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n-1}{n^2+1}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6^{n-1}}{(n+2)!}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\operatorname{tg} \frac{\pi}{5^n}\right)^{3n}$; г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)\sqrt{\ln(n+2)}}$.

11. Дослідіть на абсолютну та умовну збіжність знакопозитивний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^3}{8^n}$.

12. Знайдіть область збіжності степеневого ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{3^n(n+1)}$.

13. Розкладіть функцію $f(x) = \sin \frac{\pi x}{4}$ в ряд Тейлора в околі вказаної точки $x_0 = 2$. Знайдіть область збіжності отриманого ряду цієї функції.

14. Обчисліть наближено з заданою точністю ε :

а) $\operatorname{arctg} \frac{1}{2}$, $\varepsilon = 0,0001$; б) $\int_0^{0,5} \frac{\sin x^2}{x^2} dx$, $\varepsilon = 0,0001$.

Варіант 12

Частина 1

1. Знайдіть і зобразіть область визначення функції $z = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$.
2. Покажіть, що $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{2}{x - y}$, де $z = \frac{xy}{x - y}$.
3. Обчисліть наближено $\ln \sqrt{1,02^2 + 0,03^2}$.
4. Дослідіть на екстремум функцію $z = 4(x - y) - x^2 - y^2$.
5. Знайдіть похідну функції $u = xy - z^2$ в точці $M(1, 1, 1)$ у напрямі бісектриси кута xOy .

Частина 2

6. Обчисліть подвійний інтеграл $\iint_D e^y dx dy$ по області $D: y = \ln x, y = 0, x = 2$.
7. Обчисліть інтеграл, переходячи від прямокутних декартових координат до полярних:
$$\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} dx \int_0^{\sqrt{3-x^2}} \sqrt{1+x^2+y^2} dy.$$
8. Обчисліть об'єм тіла, обмеженого заданими поверхнями
 $6x + 3y + z - 18 = 0, x = 0, y = 0, z = 0$.
9. Обчисліть криволінійний інтеграл першого роду $\int_L x^2 y dl$, де L - частина кола $x^2 + y^2 = 9$, що лежить в першому квадранті.

Частина 3

10. Дослідіть на збіжність ряди з додатніми членами:
а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{n^3 - n}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdots (n+3)}{5 \cdot 7 \cdot 9 \cdots (2n+3)}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n^2 + 4n + 5}{6n^2 - 3n - 1} \right)^n$; г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctg n}{1 + n^2}$.
11. Дослідіть на абсолютну та умовну збіжність знакопозитивний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+5}}$.
12. Знайдіть область збіжності степеневого ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{\sqrt{2n-1}} x^n$.
13. Розкладіть функцію $f(x) = \cos 2x - \frac{\sin 2x}{x}$ в ряд Тейлора в околі вказаної точки $x_0 = 0$.
Знайдіть область збіжності отриманого ряду цієї функції.
14. Обчисліть наближено з заданою точністю ε :

а) $\sqrt[6]{738}, \quad \varepsilon = 0,001;$ б) $\int_0^1 x^2 \cdot \sin x dx, \quad \varepsilon = 0,0001.$

Варіант 13

Частина 1

1. Знайдіть і зобразіть область визначення функції $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$.
2. Знайдіть повний диференціал функції $u = \ln(x^3 + y^2 - 2z^3)$.
3. Обчисліть наближено $\sqrt[3]{3,01^2 - 0,98}$.
4. Дослідіть на екстремум функцію $z = x^3 + y^2 - 6xy - 39x + 18y + 20$.
5. Знайдіть найбільшу швидкість зростання функції $u = x^2y + y^2z + zx$ у точці $M(2;1;2)$.

Частина 2

6. Обчисліть подвійний інтеграл $\iint_D y(1+x^2) dx dy$ по області $D: y = x^3, y = 3x$.
7. Обчисліть інтеграл, переходячи від прямокутних декартових координат до полярних:

$$\int_0^3 dx \int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} \cos(x^2 + y^2) dy.$$

8. Обчисліть об'єм тіла, обмеженого заданими поверхнями

$$4x + y + 2z - 8 = 0, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0.$$

9. Обчисліть криволінійний інтеграл першого роду $\int_L \frac{dl}{x+y}$, де L - відрізок прямої $y = x + 2$, що з'єднує точки $A(2;4)$ та $B(1;3)$.

Частина 3

10. Дослідіть на збіжність ряди з додатніми членами:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{3n^2+5}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+3)!}{10^n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n-1}{2n}\right)^{n^2}$; г) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln^3 n}$.

11. Дослідіть на абсолютну та умовну збіжність знакопозитивний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{5^n}$.

12. Знайдіть область збіжності степеневого ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n(n+1)} x^n$.

13. Розкладіть функцію $f(x) = \frac{2}{1-3x^2}$ в ряд Тейлора в околі вказаної точки $x_0 = 0$. Знайдіть область збіжності отриманого ряду цієї функції.

14. Обчисліть наближено з заданою точністю ε :

а) $\sqrt[3]{e}$, $\varepsilon = 0,0001$; б) $\int_0^1 \cos \sqrt[3]{x} dx$, $\varepsilon = 0,0001$.

Варіант 14

Частина 1

1. Знайдіть і зобразіть область визначення функції $z = \sqrt{x^2 + y^2 - R^2}$.
2. Знайдіть повний диференціал функції $z = \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy}$.
3. Обчисліть наближено $\sqrt{4,02^2 + 3,01^2}$.
4. Дослідіть на екстремум функцію $z = 4 - 2x^2 - y^2$.
5. Знайдіть напрям найбільшої зміни функції $u = x \sin z - y \cos z$ в початку координат.

Частина 2

6. Обчисліть подвійний інтеграл $\iint_D xy \, dx dy$ по області $D: y = \sqrt{x}, y = 0, x + y = 2$.

7. Обчисліть інтеграл, переходячи від прямокутних декартових координат до полярних:

$$\int_0^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \sin(x^2 + y^2) dy.$$

8. Обчисліть об'єм тіла, обмеженого заданими поверхнями

$$5x + y + 10z - 10 = 0, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0.$$

9. Обчисліть криволінійний інтеграл першого роду $\int_L \frac{dl}{\sqrt{5}(x-y)}$, де L - відрізок прямої, що з'єднує точки $A(0;4)$ та $B(4;0)$.

Частина 3

10. Дослідіть на збіжність ряди з додатніми членами:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n^2 - n + 1}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 7 \cdot 13 \cdots (6n-5)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots (n+1)}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n+1}{3n}\right)^{n^2}$; г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{e^{n^2}}$.

11. Дослідіть на абсолютну та умовну збіжність знакопозитивний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{3^n}{(2n+1)^n}$.

12. Знайдіть область збіжності степеневого ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^2}{2^n} x^n$.

13. Розкладіть функцію $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$ в ряд Тейлора в околі вказаної точки $x_0 = 2$. Знайдіть

область збіжності отриманого ряду цієї функції.

14. Обчисліть наближено з заданою точністю ε :

а) $\sin(10^\circ)$, $\varepsilon = 0,0001$; б) $\int_0^1 e^{-\frac{x^2}{2}} dx$, $\varepsilon = 0,0001$.

Варіант 15

Частина 1

1. Знайдіть і зобразіть область визначення функції $z = \arcsin \frac{x}{2} + \sqrt{xy}$.
2. Знайдіть повний диференціал функції $z = e^{y^2 - xy}$.
3. Обчисліть наближено $\sqrt{4,03^2 + 2,97^2}$.
4. Дослідіть на екстремум функцію $z = x^2 + xy + y^2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$.
5. Знайдіть похідну функції $u = \frac{xy}{2}$ за напрямом \vec{MA} у точці М, якщо М(1;2;1), А(0;3;4).

Частина 2

6. Обчисліть подвійний інтеграл $\iint_D (x^3 + 3y) dx dy$ по області $D: x + y = 1, y = x^2 - 1, x \geq 0$.
7. Обчисліть інтеграл, переходячи від прямокутних декартових координат до полярних:
$$\int_0^2 dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \frac{tg \sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}} dy.$$
8. Обчисліть об'єм тіла, обмеженого заданими поверхнями
 $2x + 4y + z - 8 = 0, x = 0, y = 0, z = 0$.
9. Обчисліть криволінійний інтеграл першого роду $\int_L xy dl$, де L - дуга кола $x = 6 \cos t, y = 6 \sin t$,
 $0 \leq t \leq \frac{3\pi}{2}$.

Частина 3

10. Дослідіть на збіжність ряди з додатніми членами:
а) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi}{2^{n-1}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{(n+4)!}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n} \left(\frac{n}{n+1} \right)^{-n^2}$; г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1) \cdot \ln^2(n+1)}$.
11. Дослідіть на абсолютну та умовну збіжність знакопозитивний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.
12. Знайдіть область збіжності степеневого ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n}{\sqrt{n}} x^n$.
13. Розкладіть функцію $f(x) = \frac{1}{x^2 - 4x + 3}$ в ряд Тейлора в околі вказаної точки $x_0 = -2$. Знайдіть область збіжності отриманого ряду цієї функції.
14. Обчисліть наближено з заданою точністю ε :

а) $\sqrt[3]{8,36}, \quad \varepsilon = 0,001;$ б) $\int_0^1 \cos \frac{x^2}{4} dx, \quad \varepsilon = 0,0001.$

Варіант 16

Частина 1

1. Знайдіть і зобразити область визначення функції $z = \sqrt{1+x-y^2} + \sqrt{1-x-y^2}$.
2. Покажіть, що $a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, якщо $z = \sin^2(y-ax)$.
3. Обчисліть наближено $\sin 44^\circ \cdot \operatorname{tg} 59^\circ$.
4. Дослідіть на екстремум функцію $z = x^2 + 3y^2 + 2x - 12y - 6$.
5. Знайдіть градієнт і похідну функції $z = \frac{x}{y^2}$ в точці $A(3;4;0)$ за напрямом $\vec{\lambda} = -3\vec{i} - 4\vec{j}$.

Частина 2

6. Обчисліть подвійний інтеграл $\iint_D xy^2 dx dy$ по області $D: y = x^2, y = 2x$.
7. Обчисліть інтеграл, переходячи від прямокутних декартових координат до полярних:

$$\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}} dy.$$

8. Обчисліть об'єм тіла, обмеженого заданими поверхнями
 $x + 5y + 4z - 20 = 0, x = 0, y = 0, z = 0$.
9. Обчисліть криволінійний інтеграл першого роду $\int_L (x^2 + y^2) dl$, де L - коло $x^2 + y^2 = 4$.

Частина 3

10. Дослідіть на збіжність ряди з додатніми членами:
а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^3 + 4}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \sin \frac{\pi n}{3^n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} 4^n \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$; г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 \cdot \sin^2(\frac{1}{n})}$.
11. Дослідіть на абсолютну та умовну збіжність знакопозитивний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+1}{5n(n+1)}$.
12. Знайдіть область збіжності степеневого ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{4^n(n+1)} (x+2)^n$.
13. Розкладіть функцію $f(x) = \ln(x^2 + 2x + 2)$ в ряд Тейлора в околі вказаної точки $x_0 = -1$. Знайдіть область збіжності отриманого ряду цієї функції.
14. Обчисліть наближено з заданою точністю ε :

а) $\sqrt[6]{1,2}, \quad \varepsilon = 0,0001;$ б) $\int_0^{0,5} \sqrt{1+x^2} dx, \quad \varepsilon = 0,0001.$

Варіант 17

Частина 1

1. Знайти і зобразити область визначення функції $z = \sqrt{y \sin x}$.
2. Показати, що $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y \frac{\partial z}{\partial x} + x \frac{\partial z}{\partial y} + xyz = 0$, якщо $z = x \cdot e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$.
3. Обчислити наближено $(4,03)^{0,98}$.
4. Дослідити на екстремум функцію $z = 2x^2 + 6xy + 5y^2 - x + 4y - 5$.
5. Знайти похідну функції $z = x^2 + xy + y^2$ у точці $A(1;1;0)$ за напрямом вектора $\vec{v} = 2\vec{i} - \vec{j}$.

Частина 2

6. Обчисліть подвійний інтеграл $\iint_D xy^3 dx dy$ по області $D: y = x^3, y \geq 0, y = 4x$.
7. Обчисліть інтеграл, переходячи від прямокутних декартових координат до полярних:

$$\int_{-2}^2 dx \int_{-\sqrt{4-x}}^{\sqrt{4-x^2}} \sin \sqrt{x^2 + y^2} dy.$$

8. Обчисліть об'єм тіла, обмеженого заданими поверхнями

$$2x + 9y + 2z - 18 = 0, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0.$$

9. Обчисліть криволінійний інтеграл першого роду $\int_L \frac{dl}{\sqrt{8-x^2-y^2}}$, де L - відрізок прямої, що

з'єднує точки $O(0;0)$ і $B(2;2)$.

Частина 3

10. Дослідіть на збіжність ряди з додатніми членами:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{2\pi}{3^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+2)!}{n^2}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n-1}{3n}\right)^{n^2}$; г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 \cdot \cos^2(\frac{1}{n})}$.

11. Дослідіть на абсолютну та умовну збіжність знакопозередний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n-1)!}$.

12. Знайдіть область збіжності степеневого ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{4^n(n+1)}(x+2)^n$.

13. Розкладіть функцію $f(x) = \frac{1}{(2-x)^2}$ в ряд Тейлора в околі вказаної точки $x_0 = -2$. Знайдіть

область збіжності отриманого ряду цієї функції.

14. Обчисліть наближено з заданою точністю ε :

а) $\arcsin \frac{1}{3}$, $\varepsilon = 0,001$; б) $\int_0^{\pi/4} \frac{\sin x}{x} dx$, $\varepsilon = 0,0001$.

Варіант 18

Частина 1

1. Знайдіть і зобразіть область визначення функції $z = \sqrt{36 - 4x^2 - 9y^2}$.
2. Знайдіть $\frac{\partial z}{\partial t}$, якщо $z = \arcsin(x - y)$, $x = t^3 - 1$, $y = t^2$.
3. Обчисліть наближено $(2 - \sqrt{0,98})^{4,02}$.
4. Дослідіть на екстремум функцію $z = x^2 + y^2 - xy + x + y$.
5. Знайдіть похідну функції $z = \ln(e^x + e^y)$ за напрямом, паралельним бісектрисі координатного кута.

Частина 2

6. Обчисліть подвійний інтеграл $\iint_D (x + y) dx dy$ по області $D: y^2 = x, y = x$.
7. Обчисліть інтеграл, переходячи від прямокутних декартових координат до полярних:
$$\int_{-\sqrt{3}}^0 dx \int_0^{\sqrt{3-x^2}} \frac{dy}{\sqrt{1+x^2+y^2}}.$$
8. Обчисліть об'єм тіла, обмеженого заданими поверхнями
 $4x + 6y + 3z - 12 = 0, x = 0, y = 0, z = 0.$
9. Обчисліть криволінійний інтеграл першого роду $\int_L (4\sqrt[3]{x} - 3\sqrt{y}) dl$, де L - відрізок прямої, що з'єднує точки $A(0;4)$ і $B(4;0)$.

Частина 3

10. Дослідіть на збіжність ряди з додатніми членами:
а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 3n + 7}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{5^n (n+3)!}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+5}\right)^{n^2}$; г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctg(n+2)}{(n+2)^2 + 1}$.
11. Дослідіть на абсолютну та умовну збіжність знакочередний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n \cdot 5^n}$.
12. Знайдіть область збіжності степеневого ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n+1)}{2^n} (x-2)^n$.
13. Розкладіть функцію $f(x) = (x+2) \cdot \sqrt[4]{26-5x}$ в ряд Тейлора в околі вказаної точки $x_0 = -2$. Знайдіть область збіжності отриманого ряду цієї функції.
14. Обчисліть наближено з заданою точністю ε :
а) $e^{-0,5}$, $\varepsilon = 0,0001$; б) $\int_0^{0,5} \frac{dx}{1+x^5}$, $\varepsilon = 0,0001$.

Варіант 19

Частина 1

1. Знайдіть і зобразіть область визначення функції $z = \sqrt{\sin(x^2 + y^2)}$.
2. Покажіть, що $x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(y^2 \frac{\partial z}{\partial y} \right)$, якщо $z = \sqrt{\frac{x}{y}}$.
3. Обчисліть наближено $\ln(\sqrt{4,02} - \sqrt[3]{0,97})$.
4. Дослідіть на екстремум функцію $z = x^2 + 2xy - y^2 + 4x$.
5. Знайдіть похідну функції $u_1 = x^3 + 2xy + 3yz^2$ у точці (3;3;1) за напрямом градієнта функції $u_2 = x^2 + y^2 + z^2$.

Частина 2

6. Обчисліть подвійний інтеграл $\iint_D (x^3 - 2y) dx dy$ по області $D: y = x^2 - 1, y = 0$.

7. Обчисліть інтеграл, переходячи від прямокутних декартових координат до полярних:

$$\int_0^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{\operatorname{tg} \sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}} dy.$$

8. Обчисліть об'єм тіла, обмеженого заданими поверхнями

$$8x + y + 2z - 8 = 0, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0.$$

9. Обчисліть криволінійний інтеграл першого роду $\int_L y dl$, де L - дуга астроїди $x = \cos^3 t$, $y = \sin^3 t$ обмежена між точками $A(1;0)$ і $B(0;1)$.

Частина 3

10. Дослідіть на збіжність ряди з додатніми членами:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^{2n}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n-1}{9^n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin^n \frac{\pi}{2n}$; г) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln 2n \cdot \ln(\ln 2n)}$.

11. Дослідіть на абсолютну та умовну збіжність знакопозитивний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{n}{2n+1} \right)^n$.

12. Знайдіть область збіжності степеневого ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{5^n(n+1)} x^n$.

13. Розкладіть функцію $f(x) = \frac{\operatorname{ch} 2x - 1}{2x^2}$ в ряд Тейлора в околі вказаної точки $x_0 = 0$. Знайдіть

область збіжності отриманого ряду цієї функції.

14. Обчисліть наближено з заданою точністю ε :

а) \sqrt{e} , $\varepsilon = 0,0001$; б) $\int_0^{0,5} \frac{\sin x^2}{x} dx$, $\varepsilon = 0,0001$.

Варіант 20

Частина 1

1. Знайдіть і зобразіть область визначення функції $z = \sqrt{\cos(x^2 + y^2)}$.
2. Покажіть, що $\frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, якщо $z = \ln(x + e^{-y})$.
3. Обчисліть наближено $\sqrt{3,98} (1,03)^{3,98}$.
4. Дослідіть на екстремум функцію $z = x^2 + xy + y^2 + x - y + 1$.
5. Знайдіть проекцію градієнта функції $u = x^2 + y^2 - z^2$ у точці A(1;0;0) на напрям градієнта цієї ж функції у точці B(0;1;0).

Частина 2

6. Обчисліть подвійний інтеграл $\iint_D (1+y) dx dy$ по області $D: y^2 = x, 5y = x$.
7. Обчисліть інтеграл, переходячи від прямокутних декартових координат до полярних:
$$\int_0^2 dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \cos(x^2 + y^2) dy.$$
8. Обчисліть об'єм тіла, обмеженого заданими поверхнями
 $x + 2y + 4z - 8 = 0, x = 0, y = 0, z = 0$.
9. Обчисліть криволінійний інтеграл першого роду $\int_L \sqrt{2y} dl$, де L - перша арка циклоїди
 $x = 2(t - \sin t), y = 2(1 - \cos t)$.

Частина 3

10. Дослідіть на збіжність ряди з додатніми членами:
а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 6 \cdot 11 \cdots (5n-4)}{3 \cdot 7 \cdot 11 \cdots (4n-1)}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\arcsin \frac{1}{3^n} \right)^n$; г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2) \cdot \ln(n+2)}$.
11. Дослідіть на абсолютну та умовну збіжність знакопозитивний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1) \cdot 3^n}$.
12. Знайдіть область збіжності степеневого ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{2^n \cdot (n+3)}$.
13. Розкладіть функцію $f(x) = \frac{5}{3+x-2x^2}$ в ряд Тейлора в околі вказаної точки $x_0 = 1$. Знайдіть область збіжності отриманого ряду цієї функції.
14. Обчисліть наближено з заданою точністю ε :

а) $\cos 10^\circ, \quad \varepsilon = 0,0001;$ б) $\int_0^{0,5} \sqrt{1+x^3} dx, \quad \varepsilon = 0,0001.$

Варіант 21

Частина 1

1. Знайдіть і зобразіть область визначення функції $z = \frac{1}{R^2 - x^2 - y^2}$.
2. Знайдіть $\frac{\partial z}{\partial u}$ і $\frac{\partial z}{\partial v}$, якщо $z = x^3 \ln y$, $x = \frac{u}{v}$, $y = u^2 v$.
3. Обчисліть наближено $\sqrt{2,03^2 + 5e^{0,02}}$.
4. Дослідіть на екстремум функцію $z = x^3 + y^3 - 3xy$.
5. Знайдіть кут між градієнтами функції $z = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}$ у точках А(2;3;0) і В(-1;1;0).

Частина 2

6. Обчисліть подвійний інтеграл $\iint_D (x+y) dx dy$ по області $D: y = x^2 - 1, y = -x^2 + 1$.

7. Обчисліть інтеграл, переходячи від прямокутних декартових координат до полярних:

$$\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \frac{dy}{1 + \sqrt{x^2 + y^2}}.$$

8. Обчисліть об'єм тіла, обмеженого заданими поверхнями

$$3x + 6y + 2z - 12 = 0, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0.$$

9. Обчисліть криволінійний інтеграл першого роду $\int_L \frac{(y^2 - x^2)xy dl}{(x^2 + y^2)^2}$, де L - дуга кривої

$$r = 9 \sin 2\varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}.$$

Частина 3

10. Дослідіть на збіжність ряди з додатніми членами:

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \sqrt[3]{n}}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^2 \cdot 2^n}; \quad \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n-2}{3n} \right)^{n^2}; \quad \text{г) } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln^7 n}.$$

11. Дослідіть на абсолютну та умовну збіжність знакочередний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n^2 + 1}$.

12. Знайдіть область збіжності степеневого ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(3n+1) \cdot 2^n}$.

13. Розкладіть функцію $f(x) = \cos^3 x$ в ряд Тейлора в околі вказаної точки $x_0 = 0$. Знайдіть область збіжності отриманого ряду цієї функції.

14. Обчисліть наближено з заданою точністю ε :

$$\text{а) } \frac{1}{\sqrt[3]{30}}, \quad \varepsilon = 0,001; \quad \text{б) } \int_0^{0,1} \frac{e^x - 1}{x} dx, \quad \varepsilon = 0,0001.$$

Варіант 22

Частина 1

1. Знайдіть і зобразіть область визначення функції $z = \frac{\ln(4 - x^2 - y^2)}{\sqrt{y - x^2}}$.
2. Знайдіть $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$, де $z = \sin^2(4u - 5v)$; $u = x - 3y^2$; $v = e^{-xy}$.
3. Обчисліть наближено $\ln(0,01^3 + 0,99^3)$.
4. Дослідіть на екстремум функцію $z = 2xy - 3x^2 - 2y^2 + 10$.
5. Знайдіть похідну функції $z = \ln(e^x + e^{-y})$ в точці $A(1;0)$ за напрямом бісектриси першого координатного кута.

Частина 2

6. Обчисліть подвійний інтеграл $\iint_D x(y-1) dx dy$ по області $D: y = 5x, y = x, x = 3$.
7. Обчисліть інтеграл, переходячи від прямокутних декартових координат до полярних:

$$\int_{-1}^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1+x^2+y^2} dy.$$

8. Обчисліть об'єм тіла, обмеженого заданими поверхнями

$$2x + 5y + z - 10 = 0, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0.$$

9. Обчисліть криволінійний інтеграл першого роду $\int_L \arctg \frac{y}{x} dl$, де L - дуга кардіоїди

$$r = 2(1 + \cos \varphi), \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}.$$

Частина 3

10. Дослідіть на збіжність ряди з додатніми членами:

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi}{2n-1}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg} \frac{2\pi}{5^n}; \quad \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n^2 - n - 1}{7n^2 + 3n + 4} \right)^n; \quad \text{г) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{1 + e^{2n}}.$$

11. Дослідіть на абсолютну та умовну збіжність знакопозитивний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln^n(n+1)}$.

12. Знайдіть область збіжності степеневого ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{(2n-1) \cdot 2^n}$.

13. Розкладіть функцію $f(x) = \ln(3x-4)$ в ряд Тейлора в околі вказаної точки $x_0 = 2$. Знайдіть область збіжності отриманого ряду цієї функції.

14. Обчисліть наближено з заданою точністю ε :

$$\text{а) } \sqrt[10]{1080}, \quad \varepsilon = 0,001; \quad \text{б) } \int_0^{0,5} x^2 \cos 3x dx, \quad \varepsilon = 0,0001.$$

Варіант 23

Частина 1

1. Знайдіть і зобразіть область визначення функції $z = \ln xy$.
2. Покажіть, що $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$, де $z = x^3 + x^2 y - 3xy^2 + y^4$.
3. Обчисліть наближено $\sqrt{8,04^3 + 6,03^2}$.
4. Дослідіть на екстремум функцію $z = x^2 y(4 - x - y)$ ($x > 0$; $y > 0$).
5. Визначте, в яких точках градієнт функції $z = x^2 + y^2 + z^2 - 2xyz$ перпендикулярний до осі Ox .

Частина 2

6. Обчисліть подвійний інтеграл $\iint_D (x-2) dx dy$ по області D : $y = x$, $y = \frac{1}{2}x$, $x = 2$.
7. Обчисліть інтеграл, переходячи від прямокутних декартових координат до полярних:
$$\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \int_{-\sqrt{2-x^2}}^{\sqrt{2-x^2}} e^{-(x^2+y^2)} dy.$$
8. Обчисліть об'єм тіла, обмеженого заданими поверхнями
 $x + 5y + 3z - 15 = 0$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.
9. Обчисліть криволінійний інтеграл першого роду $\int_L dl$, де L - дуга кривої $y = chx + 1$, $0 \leq x \leq 2$.

Частина 3

10. Дослідіть на збіжність ряди з додатніми членами:
а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3 + 2}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n^2 + 3)}{(n+1)!}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\arcsin \frac{1}{3^n} \right)^{2n}$; г) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot (\ln^2 n + 9)}$.
11. Дослідіть на абсолютну та умовну збіжність знакопозадований ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+5}{3^n}$.
12. Знайдіть область збіжності степеневого ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{6^n \cdot \sqrt{n}} x^n$.
13. Розкладіть функцію $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ в ряд Тейлора в околі вказаної точки $x_0 = 2$. Знайдіть область збіжності отриманого ряду цієї функції.
14. Обчисліть наближено з заданою точністю ε :
а) $\frac{1}{e}$, $\varepsilon = 0,0001$; б) $\int_0^{0,5} \ln(1+x^2) dx$, $\varepsilon = 0,0001$.

Варіант 24

Частина 1

1. Знайдіть і зобразіть область визначення функції $z = \frac{1}{\sqrt{y - \sqrt{x}}}$.
2. Знайдіть повний диференціал другого порядку d^2u функції $u = \arctg(x + y - z)$.
3. Обчисліть наближено $(1,02)^{4,05}$.
4. Дослідіть на екстремум функцію $z = x^2 + xy + y^2 + 9x - 6y + 20$.
5. Знайдіть градієнт і похідну функції $z = \ln(2x + 3y)$ в точці $A(2;2;0)$ за напрямом вектора $\vec{\lambda} = 3\vec{i} + 3\vec{j}$.

Частина 2

6. Обчисліть подвійний інтеграл $\iint_D xy \, dx \, dy$ по області $D: y = x^3, y = \frac{1}{2}x, x = 2$.
7. Обчисліть інтеграл, переходячи від прямокутних декартових координат до полярних:
$$\int_0^2 dx \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \cos \sqrt{x^2 + y^2} \, dy.$$
8. Обчисліть об'єм тіла, обмеженого заданими поверхнями
 $5x + 3y + 15z - 15 = 0, x = 0, y = 0, z = 0$.
9. Обчисліть криволінійний інтеграл першого роду $\int_L (x + y) \, dl$, де L - лемніската Бернуллі

$$r^2 = \cos 2\varphi, -\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}.$$

Частина 3

10. Дослідіть на збіжність ряди з додатніми членами:
а) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi}{4n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(2n+3)!}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg}^n \frac{\pi}{2n+1}$; г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2) \cdot \sqrt[3]{\ln(n+2)}}$.
11. Дослідіть на абсолютну та умовну збіжність знакопозитивний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)!}$.
12. Знайдіть область збіжності степеневого ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n}{(n+1)^2 \cdot 2^{n+1}} (x-3)^n$.
13. Розкладіть функцію $f(x) = x^2 - 2x^2 \cdot \sin^2 \frac{x}{4}$ в ряд Тейлора в околі вказаної точки $x_0 = 0$.
Знайдіть область збіжності отриманого ряду цієї функції.
14. Обчисліть наближено з заданою точністю ε :

$$\text{а) } \sin \frac{\pi}{100}, \quad \varepsilon = 0,0001; \quad \text{б) } \int_0^{0,4} \sqrt{x} \cdot e^{-x/4} \, dx, \quad \varepsilon = 0,0001.$$

Варіант 25

Частина 1

1. Знайдіть і зобразіть область визначення функції $z = \sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-y^2}$.
2. Знайдіть похідну $\frac{du}{dt}$, якщо $u = tg(4x + 5y)$, коли $x = \sin 3t$, $y = \cos 4t$.
3. Обчисліть наближено $\sqrt{(6,02)^2 + (7,97)^2}$.
4. Дослідіть на екстремум функцію $z = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$.
5. Знайдіть похідну функції $u = xz^2 + 2yz$ у напрямку від точки А(1;0;2) до точки В(3;1;1).

Частина 2

6. Обчисліть подвійний інтеграл $\iint_D (x+y) dx dy$ по області $D: y = x^3, y = 8, y = 0, x = 3$.

7. Обчисліть інтеграл, переходячи від прямокутних декартових координат до полярних:

$$\int_{-1}^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1+x^2+y^2} dy.$$

8. Обчисліть об'єм тіла, обмеженого заданими поверхнями

$$3x + 4y + z - 12 = 0, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0.$$

9. Обчисліть криволінійний інтеграл першого роду $\int_L dl$, де L - дуга кривої $x = e^t \sin t, y = e^t \cos t$,

$$0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}.$$

Частина 3

10. Дослідіть на збіжність ряди з додатніми членами:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{n+1}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} (3n-1) \cdot \sin \frac{\pi}{4^n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-2}{n}\right)^{n^2}$; г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^{n^2}}$.

11. Дослідіть на абсолютну та умовну збіжність знакочередний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot n^4}{2^n}$.

12. Знайдіть область збіжності степеневого ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{20^n}{\sqrt{n}} x^n$.

13. Розкладіть функцію $f(x) = (x+2) \cdot e^{4x-x^2}$ в ряд Тейлора в околі вказаної точки $x_0 = 2$. Знайдіть область збіжності отриманого ряду цієї функції.

14. Обчисліть наближено з заданою точністю ε :

а) $\sqrt[4]{90}$, $\varepsilon = 0,001$; б) $\int_0^{0,5} \frac{\text{arctg } x^2}{x^2} dx$, $\varepsilon = 0,0001$.

Варіант 26

Частина 1

1. Знайдіть і зобразіть область визначення функції $z = \sqrt{x^2 - 4} + \sqrt{4 - y^2}$.
2. Знайдіть похідну $\frac{du}{dt}$, коли $u = x^2 + y^2 + z^2$, якщо $x = \sqrt{t}$, $y = e^{2t}$, $z = t^2$.
3. Обчисліть наближено $(1,02)^{2,04} - \ln 1,02$.
4. Дослідіть на екстремум функцію $z = xy^2(1 - x - y)$; ($x > 0$; $y > 0$).
5. Знайдіть похідну функції $z = \ln(x + y)$ у точці $M(1;2)$, що належить параболі $y^2 = 4x$ за напрямом цієї параболі.

Частина 2

6. Обчисліть подвійний інтеграл $\iint_D xy^2 dx dy$ по області $D: y = x, y = 0, x = 1$.
7. Обчисліть інтеграл, переходячи від прямокутних декартових координат до полярних:

$$\int_{-3}^3 dx \int_{-\sqrt{9-x^2}}^0 \frac{xy}{x^2 + y^2} dy.$$

8. Обчисліть об'єм тіла, обмеженого заданими поверхнями

$$5x + 15y + z - 15 = 0, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0.$$

9. Обчисліть криволінійний інтеграл першого роду $\int_L dl$, де L - дуга кривої $y = 1 - \ln(x^2 - 1)$,
 $3 \leq x \leq 4$.

Частина 3

10. Дослідіть на збіжність ряди з додатніми членами:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^2 + 5}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+8}{(3n-1)!}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sin \frac{\pi}{5n+1} \right)^n$; г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$.

11. Дослідіть на абсолютну та умовну збіжність знакопозитивний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \cdot 2^n}$.

12. Знайдіть область збіжності степеневого ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)^n}{2^{n-1} n^n} (x+1)^n$.

13. Розкладіть функцію $f(x) = \ln \frac{1}{x^2 + 4x + 6}$ в ряд Тейлора в околі вказаної точки $x_0 = -2$.

Знайдіть область збіжності отриманого ряду цієї функції.

14. Обчисліть наближено з заданою точністю ε :

а) $\frac{1}{\sqrt[7]{136}}$, $\varepsilon = 0,001$; б) $\int_0^{0,8} \frac{1 - \cos x}{x} dx$, $\varepsilon = 0,0001$.

Варіант 27

Частина 1

1. Знайдіть і зобразіть область визначення функції $z = \sqrt{y \cos x}$.
2. Знайдіть $\frac{du}{dx}$, якщо $u = x^2 \ln y$, коли $y = \cos 3x$.
3. Обчисліть наближено $\ln(\sqrt[3]{0.98} + \sqrt{1.03} - 1)$.
4. Дослідіть на екстремум функцію $z = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$.
5. Знайдіть похідну функції $u = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$ у точці $(a; b; c)$ в напрямі радіус-вектора цієї точки $\vec{r} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$.

Частина 2

6. Обчисліть подвійний інтеграл $\iint_D e^y dx dy$ по області $D: y = \ln x, y = 0, x = 2$.
7. Обчисліть інтеграл, переходячи від прямокутних декартових координат до полярних:
$$\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} dx \int_0^{\sqrt{3-x^2}} \sqrt{1+x^2+y^2} dy.$$
8. Обчисліть об'єм тіла, обмеженого заданими поверхнями
 $6x + 3y + z - 18 = 0, x = 0, y = 0, z = 0.$
9. Обчисліть криволінійний інтеграл першого роду $\int_L x^2 y dl$, де L - частина кола $x^2 + y^2 = 9$, що лежить в першому квадранті.

Частина 3

10. Дослідіть на збіжність ряди з додатніми членами:
а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 4}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+3)!}{5^n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\arcsin \frac{n+5}{3n+2} \right)^n$; г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+3) \cdot \ln^5(2n+3)}$.
11. Дослідіть на абсолютну та умовну збіжність знакопозитивний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3^n}{2n+2}$.
12. Знайдіть область збіжності степеневого ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n \cdot 5^n}$.
13. Розкладіть функцію $f(x) = \frac{x}{x+3}$ в ряд Тейлора в околі вказаної точки $x_0 = 0$. Знайдіть область збіжності отриманого ряду цієї функції.
14. Обчисліть наближено з заданою точністю ε :

а) $\sqrt[3]{8,32}, \varepsilon = 0,0001;$ б) $\int_{0,3}^{0,5} \frac{1 - \cos x}{x^2} dx, \varepsilon = 0,0001.$

Варіант 28

Частина 1

1. Знайдіть і зобразіть область визначення функції $z = \ln(x^2 + y^2 - 9)$.
2. Знайдіть $\frac{du}{dx}$ для $u = \frac{x}{y^2}$, де $y = e^{4x}$.
3. Обчисліть наближено $(2 - \sqrt{1,03})^{2,98}$.
4. Дослідіть на екстремум функцію $z = x^2 + 2y^2 - 4x + 12y + 4$.
5. Задана функція $z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$, знайти градієнт та його модуль цієї функції в точці $A(\sqrt{3}; 1; 0)$.

Частина 2

6. Обчисліть подвійний інтеграл $\iint_D y(1+x^2) dx dy$ по області $D: y = x^3, y = 3x$.
7. Обчисліть інтеграл, переходячи від прямокутних декартових координат до полярних:

$$\int_0^3 dx \int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} \cos(x^2 + y^2) dy.$$

8. Обчисліть об'єм тіла, обмеженого заданими поверхнями

$$4x + y + 2z - 8 = 0, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0.$$

9. Обчисліть криволінійний інтеграл першого роду $\int_L \frac{dl}{x+y}$, де L - відрізок прямої $y = x - 2$, що

з'єднує точки $A(1; -1), B(4; 2)$.

Частина 3

10. Дослідіть на збіжність ряди з додатніми членами:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^3+2}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{(2n)!}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\operatorname{arctg} \frac{1}{2n-1} \right)^{2n}$; г) $\sum_{n=1}^{\infty} 4n \cdot e^{-n^2}$.

11. Дослідіть на абсолютну та умовну збіжність знакопозитивний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(5n+1)^n}$.

12. Знайдіть область збіжності степеневому ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi}{2^n} (2-x)^n$.

13. Розкладіть функцію $f(x) = \ln(12 - 17x - 6x^2)$ в ряд Тейлора в околі вказаної точки $x_0 = 1$.

Знайдіть область збіжності отриманого ряду цієї функції.

14. Обчисліть наближено з заданою точністю ε :

а) $\sin 95^\circ$, $\varepsilon = 0,00001$; б) $\int_0^{0,1} \frac{\ln(1+x)}{x} dx$, $\varepsilon = 0,0001$.

Варіант 29

Частина 1

1. Знайдіть і зобразіть область визначення функції $z = \sqrt{36 - 9x^2 - 4y^2}$.
2. Знайдіть $\frac{du}{dx}$ для $u = x \arcsin y$, де $y = 2^x$.
3. Обчисліть наближено $(1,04)^{2,02}$.
4. Дослідіть на екстремум функцію $z = 1 + 6x - x^2 - xy - y^2$.
5. Знайдіть похідну функції $u = xyz$ в точці $A(5;1;2)$ за напрямком вектора \overrightarrow{AB} , якщо $B(9;4;14)$.

Частина 2

6. Обчисліть подвійний інтеграл $\iint_D xy \, dx dy$ по області $D: y = \sqrt{x}, y = 0, x + y = 2$.
7. Обчисліть інтеграл, переходячи від прямокутних декартових координат до полярних:

$$\int_0^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \sin(x^2 + y^2) dy.$$

8. Обчисліть об'єм тіла, обмеженого заданими поверхнями

$$5x + y + 10z - 10 = 0, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0.$$

9. Обчисліть криволінійний інтеграл першого роду $\int_L \frac{dl}{\sqrt{5}(x-y)}$, де L - відрізок прямої, що з'єднує точки $A(0;4)$ та $B(4;0)$.

Частина 3

10. Дослідіть на збіжність ряди з додатніми членами:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5n^2 + 3}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{5^n(2n-1)}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^n}$; г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2(\sqrt{n})}{\sqrt{n}}$.

11. Дослідіть на абсолютну та умовну збіжність знакопосередний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \sin^n \frac{\pi}{6n}$.

12. Знайдіть область збіжності степеневого ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{2^n \cdot \ln(n+1)}$.

13. Розкладіть функцію $f(x) = \frac{\operatorname{sh} 3x}{x} - 3$ в ряд Тейлора в околі вказаної точки $x_0 = 1$. Знайдіть область збіжності отриманого ряду цієї функції.

14. Обчисліть наближено з заданою точністю ε :

а) $\frac{1}{\sqrt[3]{e}}$, $\varepsilon = 0,001$; б) $\int_0^1 \cos \sqrt[3]{x} \, dx$, $\varepsilon = 0,0001$.

Варіант 30

Частина 1

1. Знайдіть і зобразіть область визначення функції $z = y^2 - 4x + 8$.
2. Знайдіть $\frac{\partial z}{\partial u}$ і $\frac{\partial z}{\partial v}$, коли $z = \sin(3x + 4y)$, де $x = uv$, $y = utgv$.
3. Обчисліть наближено $\arctg \frac{0,98}{1,02}$.
4. Дослідіть на екстремум функцію $z = (x^2 + y^2) \cdot e^{-(x^2 + y^2)}$.
5. Знайдіть градієнт функції $z = 2x^2 + xy$ в точці $A(-1;2;0)$ та похідну функції z в точці A за напрямом вектора $\vec{\lambda} = 3\vec{i} - 4\vec{j}$.

Частина 2

6. Обчисліть подвійний інтеграл $\iint_D (x^3 + 3y) dx dy$ по області $D: x + y = 1, y = x^2 - 1, x \geq 0$.
7. Обчисліть інтеграл, переходячи від прямокутних декартових координат до полярних:
$$\int_0^2 dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \frac{tg \sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}} dy.$$
8. Обчисліть об'єм тіла, обмеженого заданими поверхнями
 $2x + 4y + z - 8 = 0, x = 0, y = 0, z = 0$.
9. Обчисліть криволінійний інтеграл першого роду $\int_L xy dl$, де L - дуга кола $x = 4 \cos t, y = 4 \sin t$,
 $0 \leq t \leq \pi$.

Частина 3

10. Дослідіть на збіжність ряди з додатніми членами:
а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2n+3}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 7 \cdot 12 \cdots (5n-3)}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$; г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctg n}{1+n^2}$.
11. Дослідіть на абсолютну та умовну збіжність знакопозитивний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{12^n}$.
12. Знайдіть область збіжності степеневого ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n!} x^n$.
13. Розкладіть функцію $f(x) = \arctg \frac{x+1}{x-1}$ в ряд Тейлора в околі вказаної точки $x_0 = 0$. Знайдіть область збіжності отриманого ряду цієї функції.
14. Обчисліть наближено з заданою точністю ε :

а) $\cos^2 \frac{\pi}{9}, \varepsilon = 0,001$; б) $\int_0^1 \sqrt{x} \cdot \sin x dx, \varepsilon = 0,0001$.