МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ та МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА

ЛЕКЦІЇ і ПРАКТИКУМ

Навчальний посібник

Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
як навчальний посібник для здобувачів ступеня бакалавра
за освітньою програмою «Атомні електричні станції»
спеціальності 143 «Атомна енергетика»

Укладачі: І. В. Веригіна, О. В. Островська, О. В. Сугакова

Електронне мережне навчальне видання

Київ
КПІ ім. Ігоря Сікорського
2022

Рецензент *Калюжний О. О.,* доктор фіз.-мат. наук,
старший науковий співробітник (Інститут математики НАН України)

Відповідальний
редактор *Дудкін М. Є.,* доктор фіз.-мат. наук, професор

Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
(протокол № 3 від 01.12.2022 р.)
за поданням Вченої ради фізико-математичного факультету
(протокол № 2 від 12.10.2022 р.)

У навчальному посібнику матеріал викладено у формі лекцій і відповідних практичних занять, які містять основні теоретичні положення і твердження теорії ймовірностей та математичної статистики. Теоретичний матеріал супроводжується великою кількістю прикладів і розібраних типових задач. Наприкінці кожної лекції наведено перелік основних запитань для самоконтролю знань і достатню кількість завдань для самостійного виконання, що можна використовувати при проведенні практичних занять та для самостійної роботи студентів.

Навчальний посібник призначений для здобувачів ступеня бакалавр за спеціальністю 143 «Атомна енергетика», також буде корисним для студентів та викладачів інженерних спеціальностей вищих навчальних закладів освіти.

Реєстр. № НП XX/XX-XXX. Обсяг 15,9 авт. арк.

Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»
проспект Перемоги, 37, м. Київ, 03056
https://kpi.ua
Свідоцтво про внесення до Державного реєстру видавців, виготовлювачів
і розповсюджувачів видавничої продукції ДК № 5354 від 25.05.2017 р.

ЗМІСТ

Лекція №9. ЧИСЛОВІ ХАРАКТЕРИСТИКИ СТАНДАРТНИХ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН

Лекція №10. ДВОМІРНІ ВИПАДКОВІ ВЕЛИЧИНИ

Лекція №11. ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ КОРЕЛЯЦІЇ. НЕЗАЛЕЖНІСТЬ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН

Передмова

Методи теорії ймовірностей та математичної статистики широко використовуються в різноманітних галузях сучасної науки і техніки, народного господарства. Тому цей предмет як навчальна дисципліна посідає чільне місце в підготовці технічних спеціалістів з фізики, економіки, радіотехніки, біології, медицини, фізіології, кібернетики, соціології, психології, філології, лінгвістики та ін.

У природі немає жодного процесу, в якому б не був присутній елемент випадковості. Але інколи випадковості ведуть себе закономірно. Закон природи, що є базовим для теорії ймовірностей, звучить так: *частота здійснення якогось результату у послідовності повторюваних в однакових умовах експериментах наближається до деякого числа* $p \in [0,1]$*, коли число експериментів зростає.*

Курс «Теорія ймовірностей та математична статистика» під час початкового ознайомлення, можливо, виглядає дещо незвичним для студентів, і тому може викликати деякі складнощі. Мета даного посібника – допомогти студенту в опануванні даного курсу, ознайомити його з основними поняттями, фактами, методами теорії ймовірностей і математичної статистики, допомогти виробити в собі ймовірнісну інтуїцію, оволодіти навичками розв’язку різноманітних, в тому числі прикладних задач.

Матеріал посібника подано у вигляді вісімнадцяти лекцій та вісімнадцяти відповідних практичних занять, у яких викладено теоретичні положення з доведенням основних теорем та формул теорії ймовірностей та математичної статистики, наведено багато прикладів, представлено велику кількість розібраних задач, і також містяться задачі для самостійного виконання.

Посібник є результатом узагальнення багаторічного досвіду авторів при викладанні даної дисципліни у вищих начальних закладах – Національному технічному університеті України «КПІ ім. Ігоря Сікорського», Київському національному університеті імені Тараса Шевченка, Національному університеті харчових технологій тощо. Тематика запропонованого матеріалу відповідає навчальній програмі курсу “Теорія ймовірностей та математична статистика” для студентів тепло-енергетичного факультету КПІ ім. Ігоря Сікорського, спеціальність 143 “Атомна енергетика”, але також містить додаткові розділи, які можна винести на самостійне опрацювання. Посібник рекомендовано для студентів та викладачів інженерних спеціальностей вищих навчальних закладів.

Ми виражаємо глибоку вдячність доц. Мільошиній Риммі Іллінічні, розроблений нею курс лекцій, які вона читала на тепло-енергетичному факультеті КПІ, був базою для створення тієї частини посібника, що стосується основ теорії ймовірностей.

ЛЕКЦІЯ №1

ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ

Теорія ймовірностей – порівняно молода область математики. Зазвичай вважають, що вона зародилась у переписці вчених Блеза Паскаля і П’єра Ферма (XVII ст.). Перші роботи були намаганням створити теорію азартних ігор (наприклад, книга Галілео Галілея «Про вихід очок при грі в кості»).

Можна сказати, що теорія ймовірностей сформувалась як окрема математична дисципліна в перші десятиріччя XX сторіччя. Бурхливий розвиток теоретичної і експериментальної фізики, теорії масового обслуговування, страхової справи, контролю якості продукції, теорії похибок спостережень висунули на початку XX ст. ряд ймовірнісних задач нового типу. А.Ейнштейн, вивчаючи броунівський рух, стояв у витоків побудови теорії випадкових процесів. А на первинний розвиток теорії масового обслуговування особливий вплив здійснили роботи датського вченого А. Ерланга, який працював на телефонній станції і стикався з випадковими потоками дзвінків-запитів на розмову, обслуговування яких йому треба було оптимізувати.

У зв’язку з переходом промисловості на масове виробництво виникає питання перевірки якості виробів, які входять в дану партію продукції. Таким чином з’явилася теорія статистичних методів контролю продукції, що базується на теорії ймовірностей. Особливо інтенсивний розвиток цієї науки припав на роки Другої світової війни, оскільки було необхідно приймати великі партії однорідної продукції, а перевіряти її цілком не було ніякої можливості (наприклад, якщо це були снаряди – перевірка продукції пов’язана з її руйнуванням).

На теорії ймовірностей базується теорія похибок спостережень. Ще в 1795 році К.-Ф.Гаус вперше застосував метод найменших квадратів при дослідженні магнітного поля Землі. Надалі строге обґрунтування цього методу дав А.Марков на початку XX ст.

Також теорія ймовірностей – це основа для математичної статистики, а її застосовують скрізь. Жодна експериментальна стаття не виходить в світ без статистичної обробки даних. Математичну статистику застосовують в соціології, демографії, медицині, психології, юриспруденції, не кажучи вже про фізику, економіку, біологію, хімію, астрономію.

1.1. Основні поняття теорії ймовірностей. Експеримент, випадкові події

Теорія ймовірностей вивчає закономірності масових випадкових явищ, подій, величин, процесів. Масові явища та процеси характеризуються багатократним повторенням деяких операцій, дій, дослідів, тощо. Абстрагуючись від специфічних властивостей цих операцій, у теорії ймовірностей вводять поняття *експерименту* ***(E)*** (або *випробування, спостереження*).

Під ***експериментом (E)*** будемо розуміти якесь випробування, дію, результат якої неможливо передбачити заздалегідь, але яку можна повторити багато разів (хоча б тільки теоретично) при тих самих умовах та спостерігати результат.

Спостерігати результат означає, що ми фіксуємо деякий факт, наслідок, результат експерименту, який ми називаємо ***випадковою подією*** (або просто ***подією***). У результаті експерименту подія може відбутися, а може і не відбутися.

Розглянемо приклади.

Приклад 1.1. ***E*** – підкидання монети. У результаті цього експерименту можемо очікувати появу таких подій:
A=”випав “герб”” або
B=”випала “цифра””.
Звертаємо увагу, що події позначаємо великими латинськими літерами, а їх “зміст” пояснюємо у лапках.

Приклад 1.2. ***E*** – підкидання грального кубика. Приклади подій:
A=”випала парна кількість очок”,
B=”випала кількість очок, що більша або рівна 3”,
C=”випали “1” або “5” очок”, тощо.
Зрозуміло, що в результаті цього експерименту кількість подій, які ми можемо очікувати, значно більша, ніж у попередньому прикладі.

Приклад 1.3. ***E*** – гральний кубик підкидається двічі. Приклади подій:
A=”випало дві однакові цифри”,
B=”сума очок, що випали, кратна 6”,
C=”випало тільки “1” або “5” ”, тощо.

Приклад 1.4. ***E*** – складання іспиту студентом. Події:
A=”іспит складено”,
B=”іспит не складено”,
C=”іспит складено на оцінку “A” ”, тощо.

Як бачимо, події можуть бути простими і більш складними. Всі події поділяють на елементарні та складні.

1.2. Елементарні події. Простір елементарних подій

Серед усіх можливих подій, які можуть відбутися в результаті експерименту, виділимо *елементарні події*. *Елементарною* назвемо подію, яку не можна представити як сукупність інших подій, а всі інші події можна подати через ці елементарні події. Елементарні події виключають одна одну. Результатом експерименту є одна і тільки одна з таких елементарних подій. Множина всіх елементарних результатів експерименту утворює *простір елементарних подій*. Простір елементарних подій позначається **Ω**, а елементарні події символами ω. Будь-яка випадкова подія подається через елементарні події, а отже є підмножиною простору елементарних подій.

Для прикладів експериментів, наведених у попередньому пункті, опишемо відповідні простори елементарних подій.

Приклад 1.5. ***E*** – підкидання монети. Простір елементарних подій $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$, де ω_1 = ”випав “герб””, ω_2 = ”випала “цифра””.

Приклад 1.6. ***E*** – підкидання грального кубика. Простір елементарних подій $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$, де елементарні події ω_i = ”на верхній грані кубика випало *i* очок” , $i = \overline{1,6}$.

Тоді подія *A*= ”випала парна кількість очок” $= \{\omega_2, \omega_4, \omega_6\}$,

подія *B*= ”випала кількість очок, що більша або рівна 3”= $\{\omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$,

подія *C*=”випало “1” або “5” очок” = $\{\omega_1, \omega_5\}$.

Події *A*, *B*, *C* є підмножинами Ω.

Приклад 1.7. ***E*** – гральний кубик підкидається двічі.

$\Omega = \{\omega_{ij}, i, j = \overline{1,6}\}$, де елементарні події ω_{ij} =”при першому підкиданні випало *i* очок, при другому підкиданні - *j* очок”, тоді

A= ”випало дві однакові цифри” $= \{\omega_{11}, \omega_{22}, \omega_{33}, \omega_{44}, \omega_{55}, \omega_{66}\}$,

B= ”сума очок, що випали, кратна 6” $= \{\omega_{15}, \omega_{24}, \omega_{33}, \omega_{42}, \omega_{51}, \omega_{66}\}$,

C= ”випали тільки “1” або “5” ” $= \{\omega_{11}, \omega_{15}, \omega_{51}, \omega_{55}\}$,

D=”сума очок більша 13” = $\varnothing$ (порожня множина, неможлива подія).

Приклад 1.8. ***E*** – складання іспиту студентом. Елементарні події:

ω_1 =”іспит складено на оцінку “A” ”,

ω_2 =”іспит складено на оцінку “B” ”,

ω_3 =”іспит складено на оцінку “C” ”,

ω_4 =”іспит складено на оцінку “D” ”,

ω_5 =”іспит складено на оцінку “E” ”,

ω_6 =”оцінка за іспит “Fx” ”,

ω_7 =”студент не допущений до складання іспиту, “F” ”.

ω_8 =”студент усунений з іспиту”.

Подія *A*=”іспит складено”=$\{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5\}$,

подія *B*=”іспит не складено”=$\{\omega_6, \omega_7, \omega_8\}$,

подія *C*=”іспит складено на оцінку “A” ”=$\{\omega_1\}$.

Отже, наголосимо ще раз, що у розглянутих прикладах (а спільним в них є те, що простір елементарних подій є скінченою множиною) *випадкова подія є підмножиною простору елементарних подій,* $A \subset \Omega$, зокрема, подія *A* може збігатися з $\varnothing$ або Ω. У загальному випадку простори елементарних подій можуть бути також нескінченними (зліченними або незліченними).

1.3. Класифікація подій

Подія, яка в результаті експерименту не може відбутися, називається *неможливою.* Позначається $\varnothing$.

Подія, яка обов'язково відбудеться при виконанні експерименту, називається *достовірною.* Позначається Ω.

Дві події A і B називаються *сумісними*, якщо в результаті експерименту вони можуть відбуватися одночасно. І відповідно, події A і B *несумісні*, якщо в одному випробуванні вони не можуть відбуватися одночасно.

Дивлячись на події як на підмножини Ω, маємо:

A і B – *сумісні* $\Leftrightarrow$ $A \bigcap B \neq \varnothing$;

A і B – *несумісні* $\Leftrightarrow$ $A \bigcap B = \varnothing$.

Застосуємо схематичне зображення подій за допомогою кругів Ейлера, прямокутником зображено простір елементарних подій **Ω**:

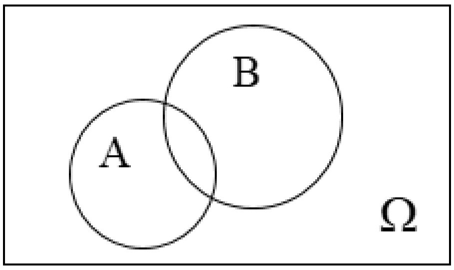


Рис.1.1. A і B – *сумісні*

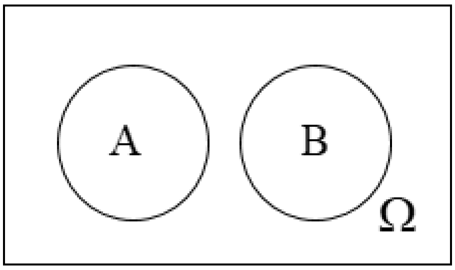


Рис.1.2. A і B – не*сумісні*

Подія $\overline{A}$ називається *протилежною* до події A, якщо подія $\overline{A}$ відбувається кожного разу, коли не відбувається подія A. Події $\overline{A}$ та A не можуть відбуватися одночасно.

$\overline{A}$ та A – *протилежні* $\Leftrightarrow$ $A \bigcap \overline{A} = \varnothing$ та $A \bigcup \overline{A} = \Omega$.

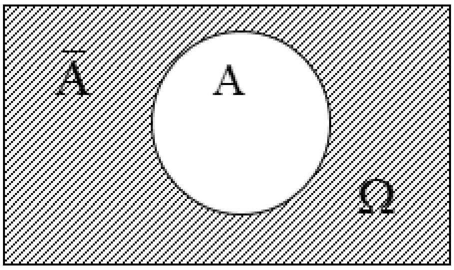


Рис 1.3. A і $\overline{A}$ – протилежні події.

Подія A *спричиняє (тягне за собою)* подію B (або з події A *випливає подія* B, або подія B *є наслідком* події A) означає: якщо відбулася подія A, то обов'язково відбулася і подія B. Дивлячись на події як на підмножини простору елементарних подій, маємо, що подія A є підмножиною події B.

Подія A *спричиняє* подію B $\Leftrightarrow$ $A \subset B$.

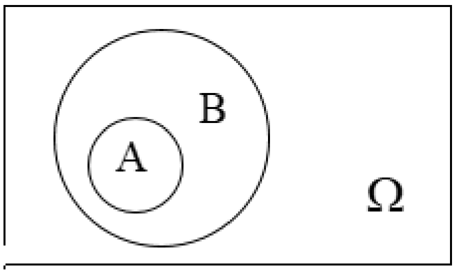


Рис. 1.4. $A \subset B$. Подія B – наслідок події A.

Якщо $A \subset B$ та одночасно $B \subset A$, то події A, B є *еквівалентними (рівними)*, $A = B$.

1.4. Операції над подіями

Розглянемо такі операції (дії) над подіями: сума, добуток, різниця подій.

1.4.1. Сума подій

Сумою (об'єднанням) двох подій *A* і *B* називають таку подію *C*, яка відбувається тоді, коли відбувається хоча б одна з подій *A* або *B*, або обидві одночасно. Позначається: $A + B = C$ ($A \bigcup B = C$).

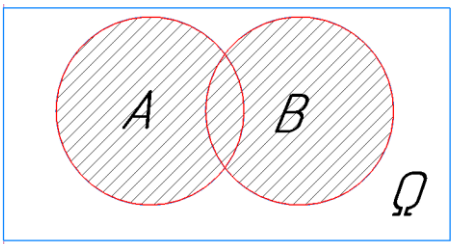


Рис.1.5. Сума двох подій *A* і *B* (заштрихована область).

1.4.2. Добуток подій

Добутком (перетином) двох подій *A* і *B* називають таку подію *C*, яка відбувається тоді, коли події *A* та *B* відбуваються одночасно.

Позначається: $A \cdot B = AB = C$ ($A \bigcap B = C$).

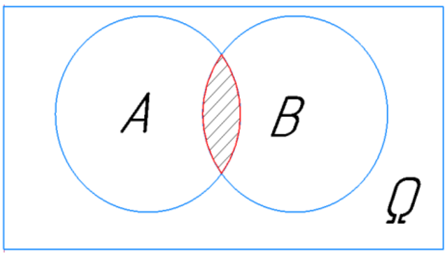


Рис.1.6. Добуток двох подій A і B (заштрихована область)

1.4.3. Різниця подій

Різницею двох подій *A* і *B* називають таку подію *C*, яка відбувається тоді, коли відбувається подія *A* та не відбувається подія *B*.

Позначається: $A \setminus B = C$ ($A \setminus B = A\overline{B} = C$).

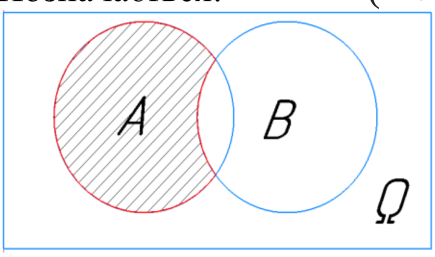


Рис. 1.7. Різниця подій *A* і *B* (заштрихована область).

Приклад 1.9. ***E*** – підкидання грального кубика. $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4,\omega_5,\omega_6\}$, де ω_i = ”випало *і* очок”. Подія *A*= ”випала парна кількість очок” $=\{\omega_2,\omega_4,\omega_6\}$, подія *B*=”випала кількість очок, що кратна 3”= $\{\omega_3,\omega_6\}$.

Сумою подій *A* і *B* є подія *C*=*A*+*B*=”кількість очок кратна або 2, або 3”= $\{\omega_2,\omega_3,\omega_4,\omega_6\}$.

Добутком подій *A* і *B* є подія *C*=*AB*=”кількість очок кратна 2 та 3 одночасно (тобто, кратна 6)” $=\{\omega_6\}$.

Різницею подій *A* і *B* є подія С=$A\setminus B$ =”кількість очок кратна 2, але не кратна 3”=$\{\omega_2,\omega_4\}$. Різницею подій В і А є подія С=$B\setminus A$ =”кількість очок кратна 3, але не кратна 2”=$\{\omega_3\}$.

1.4.4. Властивості операцій над подіями

Теорія ймовірностей базується на теоретико-множинній основі, операції над подіями повністю аналогічні операціям над множинами. Дії додавання та множення подій задовольняють наступним законам:

- Комутативний: $A+B=B+A$ $\qquad A\cdot B=B\cdot A$
- Асоціативний: $(A+B)+C=A+(B+C)$ $\qquad (A\cdot B)\cdot C=A\cdot(B\cdot C)$
- Дистрибутивний (І): $(A+B)\cdot C=A\cdot C+B\cdot C$
- Дистрибутивний (ІІ): $(A\cdot B)+C=(A+C)\cdot(B+C)$

Також неважко помітити (та довести) такі правила:

$A+A=A \qquad A+\varnothing=A \qquad A+\bar{A}=\Omega \qquad A+\Omega=\Omega$

$A\cdot A=A \qquad A\cdot\varnothing=\varnothing \qquad A\cdot\bar{A}=\varnothing \qquad A\cdot\Omega=A$

$\bar{\bar{A}}=A \qquad \bar{\varnothing}=\Omega \qquad \bar{\Omega}=\varnothing$

$A\setminus B=A\setminus(A\cdot B)=A\cdot\bar{B}$

$\overline{A+B}=\bar{A}\cdot\bar{B}$; $\overline{A\cdot B}=\bar{A}+\bar{B}$ (закони двоїстості або закони де Моргана)

Якщо $A\subset B$, тоді $A+B=B$ та $AB=A$.

1.5. Алгебра та σ - алгебра подій

Нехай множина Ω – простір елементарних подій, що відповідає даному експерименту, є скінченою множиною, $N(\Omega)=n$ – кількість елементарних подій, що складають Ω. Число підмножин множини Ω (включаючи $\varnothing$ та саму множину Ω) , дорівнює 2^n. Отже, число всіх можливих випадкових подій, що відповідають даному експерименту, дорівнює 2^n.

Множина всіх подій, що складається з підмножин простору елементарних подій Ω, називається *алгеброю* подій, позначається $\Re$, якщо справджується:

1) $\Omega\in\Re$;
2) Якщо $A\in\Re$, то $\bar{A}=\Omega\setminus A\in\Re$.
3) Якщо $A,B\in\Re$, то $A+B\in\Re$.

У загальному випадку множина Ω може бути нескінченною (як зліченною, так і незліченною). Множина всіх подій $\Re$, побудована у нескінченому просторі елементарних подій, називається σ - *алгеброю* подій, якщо вона є алгеброю, тобто виконуються умови 1), 2), 3) та також справджується:

4) Якщо $A_i \in \Re, i \in N$, тоді $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \Re$.

Запитання для самоконтролю

1. Що вивчає теорія ймовірностей?

2. Що називають експериментом? Подією?

3. Що таке простір елементарних подій?

4. Яка подія називається достовірною, неможливою?

5. Які події називають сумісними, несумісними, протилежними?

6. Які події називають еквівалентними?

7. Що називають сумою подій?

8. Що називають добутком подій?

9. Що називають різницею подій?

10. Назвіть властивості операцій над подіями.

Практичне заняття №1
ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ

Приклади розв'язування задач

Задача 1.1. Технічний контроль перевіряє якість трьох приладів. Описати:

а) простір елементарних подій,

б) подію A= ”всі прилади якісні”,

в) подію B= ”хоча б один з приладів є неякісним”,

г) подію C= ”серед перевірених приладів рівно один неякісний”.

Що означають події: д) $A+B$; є) AB; ж) $B+C$; з) BC ?

Розв'язання. Експеримент $\boldsymbol{E}$ – перевірка 3-х приладів. Позначимо “Я” – прилад якісний, “Н” – прилад неякісний. Результати перевірки 3-х приладів можна записати так:

а) Простір елементарних подій:

$$\Omega=\{"ЯЯЯ","ЯЯН","ЯНЯ","ЯНН","НЯЯ","НЯН","ННЯ","ННН"\}.$$

б) Подія A=”всі прилади якісні”$=\{"ЯЯЯ"\}$.

в) Подія B=”хоча б один з приладів є неякісним”=
$\{"ЯЯН","ЯНЯ","ЯНН","НЯЯ","НЯН","ННЯ","ННН"\}$.

г) Подія C=”серед приладів рівно 1 неякісний” $=\{"ЯЯН","ЯНЯ","НЯЯ"\}$.

Оскільки події A і B є протилежними, то:

д) $A+B=\Omega$ - достовірна подія;

є) $AB=\varnothing$ - неможлива подія.

Зауважимо, що з події C випливає подія B, $C\subset B$,. отже:

ж) $B+C=B=$ ”хоча б один з приладів є неякісним” ;

з) $BC=C=$ ”серед приладів рівно 1 неякісний”.

Задача 1.2. Спростити вираз: $(A+B)(\overline{A}+B)(A+\overline{B})$.

Розв'язання. Скористаємося законами і правилами для додавання і множення подій, що наведені у пункті 1.4.4. Розкриємо дужки та врахуємо, що $A\overline{A}=B\overline{B}=\varnothing$. Отримаємо:

$$(A+B)(\overline{A}+B)(A+\overline{B})=(A+B)(\overline{A}A+\overline{A}\overline{B}+BA+B\overline{B})=(A+B)(\overline{A}\overline{B}+BA)=$$
$$=A\overline{A}\overline{B}+ABA+B\overline{A}\overline{B}+BBA=\varnothing\overline{B}+AB+\varnothing\overline{A}+BA=AB+BA=AB.$$

Відповідь: $(A+B)(\overline{A}+B)(A+\overline{B})=AB$.

Задача 1.3. Довести: $(A+B)(A+\overline{B})+(\overline{A}+B)(\overline{A}+\overline{B})=\Omega$.

Розв'язання. Скористаємося законами і правилами для додавання і множення подій (п. 1.4.4). Розкриємо дужки, врахуємо, що $A\overline{A}=B\overline{B}=\varnothing$ та $A+\overline{A}=\Omega$:

$$(A+B)(A+\overline{B})+(\overline{A}+B)(\overline{A}+\overline{B})=AA+A\overline{B}+BA+B\overline{B}+\overline{A}\overline{A}+\overline{A}\overline{B}+B\overline{A}+B\overline{B}=$$
$$=A+A\overline{B}+BA+\overline{A}+\overline{A}\overline{B}+B\overline{A}=\Omega+A\overline{B}+BA+\overline{A}\overline{B}+B\overline{A}=\Omega.$$

Що і треба було довести.

Задача 1.4. Коли можлива рівність : $A+B=AB$?

Розв'язання. Спосіб І. Подія $A \subset A+B$ та $AB \subset A$ для довільних подій A, B. Оскільки $A+B=AB$, то $A=A+B=AB$. Аналогічно, $B=A+B=AB$. Отже, $A=B$.

Спосіб ІІ. Домножимо обидві частини рівності на В, отримаємо:

$(A+B)B=(AB)B$, звідки $AB+BB=ABB \Rightarrow AB+B=AB$. Оскільки $AB \subset B$, то $AB+B=B$, отже, $B=AB$. Аналогічно, $A=AB$. Звідки, $B=A$.

Відповідь: така рівність можлива, якщо $A=B$.

Задача 1.5. Чи сумісні події A та $\overline{A+B}$?

Розв'язання. Спосіб І. Нехай елементарна подія $\omega \in \overline{A+B}$, тоді за законом де Моргана $\omega \in \overline{A}\overline{B}$, звідки $\omega \in \overline{A}$, а отже, $\omega \notin A$. Події A та $\overline{A+B}$ несумісні.

Спосіб ІІ. Розглянемо $A \cdot \overline{A+B} = A \cdot (\overline{A} \cdot \overline{B}) = (A \cdot \overline{A}) \cdot \overline{B} = \varnothing \cdot \overline{B} = \varnothing$.

Відповідь: Ні, несумісні.

Завдання для самостійного виконання

1. Технічний контроль перевіряє чотири вироби. Описати:
а) простір елементарних подій,
б) подію А=”хоча б один з приладів є бракованим”,
в) подію В=”серед перевірених приладів бракованих не менше 2-х”.
Що означають події г) $\overline{A}$; д) $\overline{B}$; є) $\overline{A}+\overline{B}$; ж) $\overline{A}\overline{B}$?

2. Спростити вираз:
а) $A(A+B)$; **б)** $A(A+\Omega)(B+\varnothing)$; **в)** $(A+B)(B+\Omega)(A+\varnothing)$;
г) $(A+B)(A+\overline{B})$.

3. Довести:
а) $(A+B)(C+B)=B+AC$; **б)** $A(A+C)(C+B)=AB+AC$;
в) $(A+B)(\overline{A}+B)(A+\overline{B})(\overline{A}+\overline{B})=\varnothing$.

4. Коли можлива рівність : **а)** $A+B=\overline{A}$; **б)** $AB=\overline{A}$;?

5. Чи сумісні події **а)** A та $\overline{\overline{A}+B}$? **б)** B та $\overline{\overline{A}+B}$?

6. У мішень стріляють чотири рази. Розглядаються події: A_i =”влучення при i-му пострілі”, i=1,2,3,4 . Описати подію В=” в мішень влучили рівно один раз”.

7. Технічний контроль перевіряє три вироби. Нехай A_i , i =1,2,3 – подія, що означає наявність дефекту в i-му виробі. Записати подію: В=“хоча б один виріб виявився з дефектом”.

8. Нехай *A,B,C,D* – чотири довільні події. Знайти подію, що полягає в тому, що жодна з подій *A,B,C,D* не відбулася.

9. Маємо такі події: *A*=“навмання взята деталь І-го сорту”; *B*=” навмання взята деталь ІІ-го сорту”; *C*=“навмання взята деталь ІІІ-го сорту”. Що означає подія $\overline{B+C}$?

10. Електронна схема містить два транзистори, два конденсатори і три резистори. Схема працездатна, якщо справними є хоча б один транзистор, обидва конденсатори і два резистори. Описати подію *D*=”схема працездатна” через події A_i =”i -ий транзистор справний”, i-1,2; B_j =”j-й конденсатор справний”, j=1,2; C_k =”k-й резистор справний”, k=1,2,3.

ЛЕКЦІЯ №2

ЙМОВІРНОСТІ ВИПАДКОВИХ ПОДІЙ

2.1. Аксіоматичне означення ймовірності

Розглянемо простір Ω та будь-яку систему його підмножин $\Re$, що утворює σ -алгебру подій. Нехай на множині $\Re$ задано числову функцію, тобто, *для кожної події* $A \in \Re$ *поставлено у відповідність число* $P(A)$, яке задовольняє наступним аксіомам:

А1: $P(A) \geq 0$ (*аксіома невід'ємності*);

А2: $P(\Omega) = 1$ (*аксіома нормування*);

А3: Якщо $A_n \in \Re,\ \ n = 1, 2, \ldots$ та $A_i A_j = \varnothing,\ \ i \neq j$ (A_i, A_j - попарно несумісні), то $P(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} P(A_n)$ або $P(\sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} P(A_n)$ (*аксіома зліченної адитивності*).

Наслідок.

Якщо $A, B \in \Re$ та $AB = \varnothing$ (A, B - несумісні), то $P(A+B) = P(A) + P(B)$ (*теорема додавання для несумісних подій*).

Зауваження. Зрозуміло, що аксіома зліченої адитивності **А3** є більш сильною умовою, і з неї зразу випливає теорема додавання для несумісних подій. Але на практиці ми частіше будемо використовувати цей наслідок, тому і виділяємо його окремо. Також для трьох попарно несумісних подій A, B, C справджується: $P(A+B+C) = P(A) + P(B) + P(C)$. Аналогічна рівність виконується для довільної скінченної кількості несумісних подій.

Число $P(A)$ називається ***ймовірністю події*** A.

Ймовірність випадкової події – це деяка чисельна міра об'єктивної можливості появи випадкової події.

Простір Ω із σ -алгеброю подій $\Re$ та заданою мірою P позначається $(\Omega, \Re, P)$ та носить назву ***ймовірнісний простір***.

2.2. Властивості ймовірності

В1: $P(\varnothing) = 0$ (*ймовірність неможливої події*).

Доведення. $\Omega = \Omega + \varnothing \ \Rightarrow\ P(\Omega) = P(\Omega + \varnothing)$. Оскільки $\Omega, \varnothing$ - несумісні, то за аксіомою **А3** $\Rightarrow$ $P(\ \Omega)$ ₽ $(\ \Omega) P\cdot$. Тоді за аксіомою **А2** $\Rightarrow\ 1 = 1 + P(\varnothing) \ \Rightarrow\ P(\varnothing) = 0$.

В2: $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ (*ймовірність протилежної події*).

Доведення. $\bar{A} + A = \Omega \ \Rightarrow\ P(\bar{A} + A) = P(\Omega)$. Оскільки $\bar{A}, A$ - несумісні, то за аксіомою **А3** $\Rightarrow\ P(\bar{A}) + P(A) = P(\Omega) = 1$. Отже, дійсно, $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

В3: Якщо $A \subset B$, то $P(A) \le P(B)$ (*ймовірність події, що є наслідком*).

Доведення. Оскільки $A \subset B$, то $A + \overline{A}B = B \Rightarrow P(A + \overline{A}B) = P(B)$. Оскільки $A, \overline{A}B$ – несумісні, то за аксіомою **А3** $\Rightarrow P(A) + P(\overline{A}B) = P(B)$. За аксіомою **А1** $P(\overline{A}B) \ge 0$. Тому $P(A) \le P(B)$.

В4: $P(A) \le 1$.

Доведення. Оскільки $A \subset \Omega$, то за властивістю **В3** $P(A) \le P(\Omega) = 1$.

Отже, наголосимо ще раз*: ймовірність події - невід'ємне число, що не перевищує 1:*

$$0 \le P(A) \le 1.$$

Властивості ймовірностей сум подій

В5: $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$, для довільних подій *A* та *B*.

Пропонуємо довести самостійно.

В6: $P(A + B) \le P(A) + P(B)$, для довільних подій *A* та *B* (випливає з **В5**).

В7: $P(A + B + C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC)$ для довільних *A*, *B*, *C*.

2.3. Класичне означення ймовірності

Нехай у результаті експерименту ***E*** можна отримати n рівноможливих елементарних подій. Подія A відбувається, якщо відбувається m з цих елементарних подій (або говорять, m – кількість елементарних подій, що сприяють події A, $m \le n$). Тоді ймовірність події A:

$$P(A) = \frac{m}{n}. \qquad (2.1)$$

Формула (2.1) називається *формулою класичної ймовірності*.

Приклад 2.1. Із урни, що містить 10 куль, серед яких 7 білих, навмання дістанемо одну кулю. Знайти ймовірність того, що вийнята біла куля.

Розв`язання: Ймовірність події $P(A) = \frac{7}{10}$.

Покажемо, що класична схема може бути записана через **аксіоматичне означення ймовірності.**

Простір елементарних подій має вигляд $\Omega = \{\omega_1, ..., \omega_n\}$. Всі події рівноможливі, тому $P(\omega_1) = P(\omega_2) = ... = P(\omega_n) = \frac{1}{n}$. Подія $A \subset \Omega$ складається з m елементів, $A = \{\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, ..., \omega_{i_m}\} = \bigcup_{k=1}^{m} \omega_{i_k}$ - є об'єднанням m *попарно несумісних подій.* Тоді

$$P(A) = P(\omega_{i_1}) + P(\omega_{i_2}) + ... + P(\omega_{i_m}) = m \cdot \frac{1}{n} = \frac{m}{n}.$$

При цьому виконуються аксіоми **А1-А3**:

1) $P(A)=\dfrac{m}{n}\geq 0$; 2) $P(\Omega)=\dfrac{n}{n}=1$; 3) якщо $A=\{\omega_{i_1},\omega_{i_2},...,\omega_{i_m}\}$ (складається з m елементарних подій), $B=\{\omega_{j_1},\omega_{j_2},...,\omega_{j_s}\}$ (складається з s елементарних подій) та $AB=\varnothing$, тоді $P(A+B)=\dfrac{m+s}{n}=\dfrac{m}{n}+\dfrac{s}{n}=P(A)+P(B)$.

2.4. Статистична ймовірність

Нехай експеримент ***E*** проведено n разів, а подія A в результаті цієї серії експериментів з`явилась m разів. Відносна частота події A (або статистична ймовірність) дорівнює відношенню числа випробувань, у яких подія A відбулась, до числа фактично виконаних випробувань. Позначають:

відносна частота події $W(A)=\dfrac{m}{n}$

або статистична ймовірність $P^*(A)=\dfrac{m}{n}$.

Якщо ще раз провести експеримент навіть ту саму кількість *n разів*, m може змінитись, тобто $P^*(A)=W(A)$ не є повністю об`єктивною мірою.

Ймовірністю події A називається число, біля якого стабілізується відносна частота події $W(A)$ за необмежено великої кількості випробувань: $P(A)=\lim\limits_{n\to\infty}W(A)=\lim\limits_{n\to\infty}P^*(A)$.

Ймовірності подій за статистичним визначенням обчислюються тільки після проведення серії випробувань, які можна відтворювати необмежену кількість разів при одному й тому самому комплексі умов або ж на основі колишніх даних. Для подій має бути характерною статистична стійкість.

Відомі такі експерименти в історії статистики. ***E*** – підкидання монети, подія A =”випав герб (“Г”)”. Результати подамо у вигляді таблиці:

Виконавець експерименту	n- число підкидань	m-число появи“Г”	Статистична ймовірність P*(A) = $\frac{m}{n}$
Бюффон	4040	2048	0,508
Пірсон	12000	6019	0,5016
Пірсон	24000	12012	0,5005

Як бачимо, статистична ймовірність *P*(A)* має тенденцію бути стійкою величиною, при збільшенні *n*: *P*(A)* → 0,5.

2.5. Геометричне означення ймовірності

Нехай всі можливі результати експерименту ***E*** зображуються точками, які неперервно заповнюють деяку область Ω евклідового простору (одно-, дво- або тривимірного). Розглянемо подію, яка зображується деякою частиною Ω, $A\subset\Omega$.

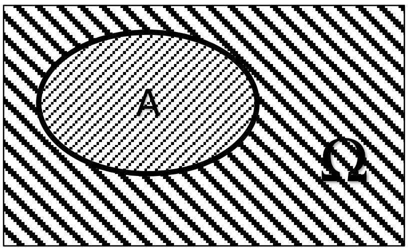


Рис. 2.1.

Ймовірність події A визначається рівністю:

$$P(A)=\frac{mes(A)}{mes(\Omega)}\ , \qquad (2.2)$$

де *“mes”*- міра областей (довжина, площа або об`єм).
Ймовірність, яка задається формулою (2.2), називається *геометричною ймовірністю.* Для геометричної ймовірності виконуються аксіоми **А1-А3**, якщо певним чином задати сігма-алгебру підмножин з **Ω**. Обгрунтуємо це частково.

1) $P(A)\geq 0$; 2) $P(\Omega)=\frac{mes(\Omega)}{mes(\Omega)}=1$; 3) Якщо $A\bigcap B=\varnothing$, то

$$P(A+B)=\frac{mes(A\bigcup B)}{mes(\Omega)}=\frac{mes(A)+mes(B)}{mes(\Omega)}=\frac{mes(A)}{mes(\Omega)}+\frac{mes(B)}{mes(\Omega)}=P(A)+P(B)\,.$$

Приклад 2.2. На відрізку $\Omega=[0;1]$ випадковим чином з’являється точка. Яка ймовірність того, що вона попаде в інтервал $\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$?

Розв`язання. $P(A)=\frac{l(A)}{l(\Omega)}$, $l(A)$ - довжина інтервалу $A=\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$, $l(A)=\frac{2}{3}-\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$, а $l(\Omega)$ - довжина відрізка Ω , $l(\Omega)=1$. Отже, $P(A)=\frac{1}{3}$.

Приклад 2.3. На площині проведено ряд паралельних прямих, відстань між якими дорівнює *2a*. На площину кинуто монету радіуса *r (r<a)*. Знайти ймовірність того, що монета не перетинає жодну з прямих.

Розв`язання. Схематично покажемо різні випадки розташування монети на площині. Зрозуміло, що положення монети повністю визначається положенням її центра.

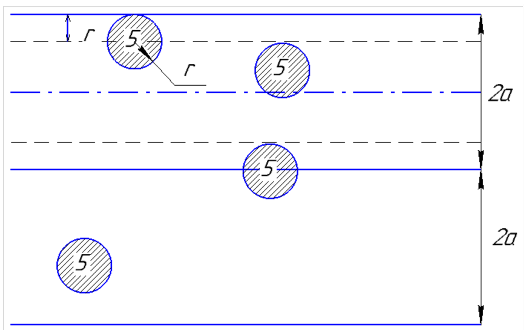


Рис. 2.2.

Монета не перетинає жодну з прямих, якщо її центр попадає в полосу, що розташувалася посередині між паралельними прямими на відстані *r* від прямих. Тоді ймовірність події $P(A)=\dfrac{l(A)}{l(\Omega)}=\dfrac{2(a-r)}{2a}=\dfrac{a-r}{a}$.

Приклад 2.4. ***Задача про зустріч.*** Двоє друзів домовилися зустрітися між 9-ою і 10-ою годинами у певному місці. Домовились, що чекатимуть один одного не більше 15 хв. Знайти ймовірність того, що вони зустрінуться.

Розв`язання. Нехай *x* (хв) – час приходу після 9 години першого з друзів, а *y* (хв) – час приходу другого.

Множина всіх можливих значень часу приходу кожного з друзів – $\Omega=\{(x,y)\mid \; 0\le x\le 60, 0\le y\le 60\}$.

Подія А=”зустріч відбулася” – означає, що різниця між часом приходу друзів не перевищує 15 хвилин.

$A=\{|x-y|\le 15\}=\{-15\le x-y\le 15\}=\{y\le x+15, y\ge x-15\}$.

Зобразимо множини A,Ω на координатній площині.

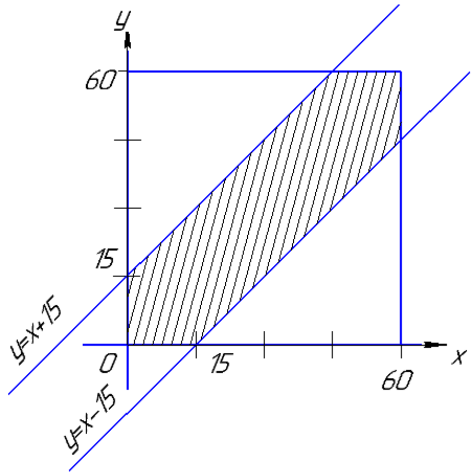


Рис. 2.3.

Знайдемо ймовірність події А (за означенням геометричної ймовірності): $P(A)=\dfrac{S(A)}{S(\Omega)}$, де $S(A)$ – площа області, що відповідає події А, $S(\Omega)$ – площа області, що відповідає простору елементарних подій Ω.

$S(\Omega)=60\cdot 60=3600,\;\; S(A)=3600-2025=1575.$ Остаточно, $P(A)=\dfrac{1575}{3600}\approx 0,44.$

Приклад 2.5. ***Задача Бюффона про голку*** (задачу було сформульовано французьким натуралістом та математиком Ж.Л. Бюффоном у 1733 р., її розв’язання надруковано у 1777 р.).

На поверхні стола проведено ряд паралельних прямих, відстань між якими дорівнює *2a.* На стіл кидають голку, довжина якої *2l (2l<2a).* Яка ймовірність того, що голка перетне одну з прямих?

Розв`язання. Нехай ***y*** - відстань від центру голки до найближчої прямої, **φ** – кут між голкою і прямою. Множина всіх можливих значень *(φ,y)* - простір елементарних подій $\Omega=\{(\varphi,y)\mid 0\le\varphi\le\pi, 0\le y\le a\}$.

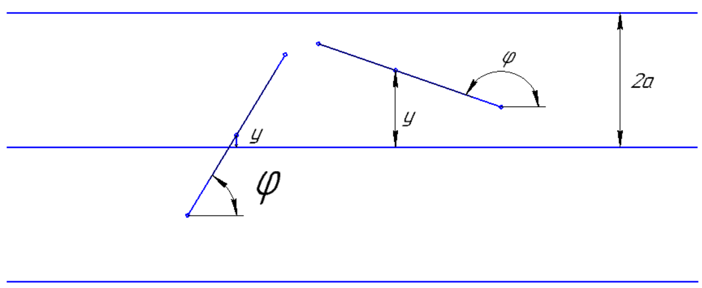


Рис. 2.4.

Подія A ="голка перетинає пряму"= $\{(\varphi, y): y \le l\sin\varphi\}$.

Зобразимо на координатній площині множини Ω і A:

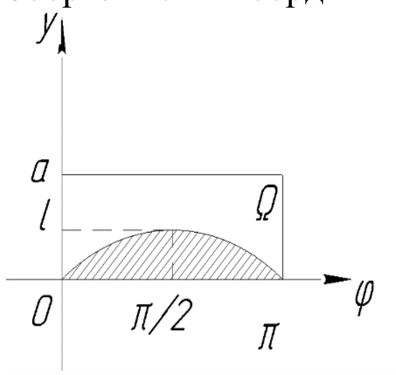


Рис. 2.5.

За геометричною ймовірністю $P(A)=\dfrac{S(A)}{S(\Omega)}$, $S(\Omega)=a\pi$,

$S(A)=\int\limits_0^{\pi} l\sin\varphi d\varphi = l\cdot(-\cos\varphi)\,|_0^{\pi} = l(1+1)=2l$. Таким чином, $P(A)=\dfrac{2l}{a\pi}$.

Задача Бюффона використовується для статистичного знаходження числа π. Це один із перших прикладів застосування метода Монте-Карло (чисельний метод розв'язування математичних задач за допомогою моделювання випадкових величин). З останньої рівності виразимо π : $\pi=\dfrac{2l}{aP(A)}$. Якщо експеримент по киданню голки виконати досить велику кількість разів та знайти частоту того, що голка перетинає прямі, тобто знайти статистичну ймовірність (див. п. 2.4.) $P^*(A)\approx P(A)$, то $\pi \approx \dfrac{2l}{aP^*(A)}$.

Відомо про реалізацію цього експерименту в 1849 р. Вольфом, який підкидав 5000 разів голку довжиною 36 мм при відстані між прямими 45мм та отримав, що у 2532 випадках голка перетнула прямі, отже значення константи

$$\pi \approx \frac{36}{22{,}5\cdot\dfrac{2532}{5000}} = \frac{36}{11{,}394} \approx 3{,}159.$$

Також у 1864 р. капітан Фокс 500 разів підкидав голку довжиною 3см при відстані між прямими 4см та отримав, що у 236 випадках голка перетнула прямі, отже отримав $\pi \approx 3{,}1780$

Для знаходження числа π цим оригінальним способом формулу Бюффона можна спростити, якщо відстань між паралельними прямими взяти у 2 рази більше довжини голки: $a=2l$, тоді

$$\pi \approx \frac{1}{P^*(A)}. \qquad \text{Або} \qquad \pi \approx \frac{n}{m},$$

де n – загальне число підкидань, а m – число випадків, коли голка перетнула паралельні лінії.

Запитання для самоконтролю

1. Сформулюйте аксіоми теорії ймовірностей.

2. Назвіть властивості ймовірності та наведіть приклади.

3. Сформулюйте класичне означення ймовірності. Наведіть приклади.

4. Сформулюйте статистичне означення ймовірності.

5. Сформулюйте геометричне означення ймовірності. Наведіть приклад.

Практичне заняття №2
ОБЧИСЛЕННЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ ПОДІЙ

2.6. Елементи комбінаторики

При обчисленні ймовірностей часто потрібно підраховувати кількість елементарних подій (сприятливих для появи даної події та всіх можливих). Комбінаторика – це розділ математики, в якому вивчають розташування та вибір об'єктів за певними правилами і методи обчислення всіх можливих способів, якими це можна здійснити.

Основний принцип комбінаторики. *Правило добутку.* Якщо об'єкт A можна вибрати k способами і після цього об'єкт B у свою чергу можна вибрати m способами, то вибір A і B разом можна здійснити $k \times m$ способами.

Факторіалом натурального числа n називається добуток всіх послідовних натуральних чисел від 1 до n включно

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n; \; 0! = 1 \tag{2.1}$$

Упорядкованою називається множина, якщо про кожні два її елементи можна говорити, що один з них передує іншому (інакше кажучи, якщо на множині задане відношення порядку).

Розміщення *з n елементів по k* – це впорядковані підмножини, що містять k різних елементів із заданої множини n елементів.

Кількість розміщень із n по k позначають A_n^k і обчислюють за формулою:

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} \tag{2.2}$$

Властивість 1. Якщо n, $k \in N$ і $k < n$, то $A_n^{k+1} = A_n^k \cdot (n-k)$, $A_n^0 = A_0^0 = 1$.

Розміщеннями з повтореннями з n елементів по k називаються такі розміщення, які можуть містити також однакові елементи.

Кількість розміщень з повтореннями з n по k позначають $\overline{A}_n^k$ і знаходять за формулою:

$$\overline{A}_n^k = n^k \; . \tag{2.3}$$

Перестановки з n елементів – це розміщення, які містять по n елементів (інакше: перестановки це впорядковані множини, що містять n елементів із заданої множини n елементів).

Кількість перестановок із n елементів позначають P_n і знаходять за формулою:

$$P_n = n! = A_n^n \; . \tag{2.4}$$

Комбінації (сполучення) *з n елементів по k* – це всі невпорядковані підмножини, що містять k різних елементів із заданої n-елементної множини.

Кількість комбінацій з n по k позначають C_n^k і обчислюють за формулою:

$$C_n^k = \frac{n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!} = \frac{A_n^k}{P_k} \qquad (2.5)$$

Властивість 2. Якщо $n,\ k \in N$ і $k < n$, то

$$C_n^k = C_n^{n-k},\ C_{n+1}^{k+1} = C_n^{k+1} + C_n^k,\ k < n, C_n^0 = C_n^n = 1,$$

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n = \sum_{k=0}^{n} 2^k = 2^n$$

Приклади розв'язування задач

Задача 2.1. Скільки тризначних чисел можна скласти із 10 карток, на яких написані цифри від 0 до 9?

Розв'язання. Відзначимо, що цифри в представленні чисел повторюватись не можуть (є лише 10 карток із різними цифрами), крім того, перша цифра не може бути 0. Таким чином, усі тризначні числа є упорядкованими підмножинами, що складаються з трьох елементів множини цифр {0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9}, тобто розміщеннями із 10 по 3, з яких вилучено всі ті, які починаються нулем.

Кількість усіх розміщень із 10 по 3 знайдемо, користуючись (2.2)

$$A_{10}^3 = \frac{10!}{7!} = 10\cdot 9\cdot 8 = 720.$$

Кількість розміщень із 10 по 3, у яких на першому місці стоїть 0, рівна кількості розміщень із 9 (без цифри 0) по 2.

$$A_9^2 = \frac{9!}{(9-2)!} = \frac{9!}{7!} = 8\cdot 9 = 72$$

Отже, шукана кількість тризначних чисел $A_{10}^3 - A_9^2 = 720 - 72 = 648.$

Інший метод розв'язання.

Ми вибираємо з десяти карток по черзі три цифри, що утворюють тризначне число. Першу цифру можемо обрати дев'ятьма різними способами, бо нам не підходить 0. Для вибору другої цифри є теж 9 варіантів, бо нуль додається, а вилучається одна цифра, що вже стоїть на першому місці. Для вибору третьої цифри у нас 8 варіантів, бо ще одна цифра вилучається – вона стоїть на другому місці. За правилом добутку (основним принципом комбінаторики) тризначне число ми можемо обрати $9\cdot 9\cdot 8 = 648$ способами.

Відповідь: 648.

Задача 2.2. Студенти одного з курсів вивчають 8 навчальних дисциплін. Скількома способами можна скласти розклад занять на понеділок, якщо в цей день слід запланувати три лекції з різних предметів?

Розв'язання. Кількість таких способів дорівнює числу розміщень з 8 предметів по 3: $A_8^3 = 8\times 7\times 6 = 336$.

Відповідь: 336.

Задача 2.3. Команда з “Клубу знавців” у складі 6 осіб займає місця, що пронумеровані від 1 до 6, за круглим столом. Скільки існує можливих варіантів розміщення гравців? Скільки таких варіантів у випадку, коли два відібрані гравці команди повинні сісти поруч?

Розв’язання. У першому випадку кількість варіантів розміщення гравців дорівнює числу перестановок з 6 елементів, тобто $P_6 = 6! = 720$. У другому випадку для двох виділених осіб є 6 різних сусідніх пар місць, на кожному з яких ці дві особи можуть сісти двома способами. Отже, посадити їх поруч можна 12 способами. На місця, що залишились, решту можна розсадити $P_4 = 4!$ способами. За правилом добутку дістаємо кількість усіх варіантів розміщень: $12 \times 4! = 288$.

Відповідь: 720, 288.

Задача 2.4. Скільки потрібно купити карток лотереї “Спортлото 5 із 36 ”, щоб напевне вгадати усі 5 номерів майбутнього тиражу? Скільки грошей на це треба витратити, якщо одна картка коштує 2 грн.?

Розв’язання. Варіанти заповнень карток лотереї є неупорядкованими (порядок слідування вгаданих номерів ролі не грає) підмножинами по 5 елементів із множини 36 елементів, тобто є комбінаціями із 36 по 5. Щоб напевне вгадати усі 5 номерів лотереї, потрібно перебрати усі можливі комбінації із 36 по 5 і заповнити відповідні картки. Таких комбінацій, а отже, і карток, буде

$$C_{36}^{5} = \frac{36!}{(36-5)!5!} = \frac{36!}{31!5!} = \frac{32 \cdot 33 \cdot 34 \cdot 35 \cdot 36}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 376992$$

Для придбання такої кількості карток потрібно $376992 \times 2 = 753984$ грн.

Відповідь: 376992 картки , 753984 грн.

Задача 2.5. Розв’язати рівняння $A_7^x = x \cdot A_7^{x-1}$

Розв’язання. Оскільки $A_7^x = \dfrac{7!}{(7-x)!}$; $A_7^{x-1} = \dfrac{7!}{(7-(x-1))!} = \dfrac{7!}{(8-x)!}$,

то рівняння запишеться у вигляді

$\dfrac{7!}{(7-x)!} = \dfrac{x \cdot 7!}{(8-x)!}$, або $7!(8-x)! = x \cdot 7!(7-x)!$;

$(8-x)! = x(7-x)!$; $\quad 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (7-x) \cdot (8-x) = x \cdot 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (7-x)$;

$8 - x = x$; $\quad 2x = 8$; $x = 4$.

Відповідь: x=4.

2.7. Визначення ймовірності події. Формула класичної ймовірності. Геометрична ймовірність

Приклади розв’язування задач

Задача 2.6. Учасники жеребкування беруть із ящика навмання жетони з номерами від 1 до 100. Знайти ймовірність того, що номер першого навмання взятого жетону не містить цифри 5.

Розв'язання. Серед жетонів, що містять цифру 5 наступні номери 5, 15, 25, 35, 45, 50, 51,…, 59, 65, 75, 85, 95. Їх всього 19. А тих жетонів, що не містять цифри 5 – 81. Отже, за класичним означенням $P\left(A\right)=\frac{81}{100}=0{,}81$.

Відповідь: $P\left(A\right)=0{,}81$.

Задача 2.7. Серед 17 студентів групи, серед яких 8 дівчат, розігрується 7 білетів. Яка ймовірність того, що серед власників білетів виявиться четверо дівчат?

Розв'язання. Кількість всіх можливих варіантів розподілити 7 білетів між 17 студентами дорівнює числу комбінацій із 17 елементів по 7, тобто C_{17}^{7}. Відібрати чотирьох дівчат із восьми можна C_8^4 способами. Кожна четвірка дівчат може попадати з кожною трійкою хлопців із 9, а число таких трійок дорівнює C_9^3. Отже, число наслідків такого розподілу, за правилом добутку дорівнює $C_8^4\times C_9^3$, а ймовірність шуканої події: $P(A)=\frac{C_8^4\times C_9^3}{C_{17}^{7}}=\frac{735}{2431}\approx 0{,}302$.

Відповідь: $P\left(A\right)=0{,}302$.

Задача 2.8. В ящику 32 деталі, з яких 22 стандартні. Знайти ймовірність того, що серед 5 навмання відібраних деталей виявиться хоча б одна нестандартна.

Розв'язання. Введемо позначення подій:

A="серед 5 відібраних деталей виявиться хоча б одна нестандартна", протилежна подія $\bar{A}$="всі відібрані деталі є стандартними". Отже,

$$P(A)=1-P(\bar{A})=1-\frac{C_{22}^{5}}{C_{32}^{5}}\approx 0{,}87.$$

Відповідь: P(A)=0,87.

Задача 2.9. При перевірці готової продукції було виявлено 14 бракованих деталей із 140 перевірених. Знайдіть відносну частоту кількості бракованих (та якісних) деталей.

Розв'язання. Скористаємося означенням відносної частоти: $w_1=\frac{14}{140}=0{,}1$ – бракованих та $w_2=\frac{126}{140}=0{,}9$ – якісних деталей.

Відповідь: $w_1=0{,}1,\quad w_2=0{,}9$.

Задача 2.10. На причалі очікується прибуття двох теплоходів з 10-ї до 11-ї години. Визначити ймовірність того, що одному з теплоходів доведеться чекати іншого, якщо час стоянки першого теплохода – 15 хвилин, а другого – 25 хв.

Розв'язання. Позначимо x та y – час прибуття (у хвилинах) першого та другого теплоходів до причалу відповідно: $0\le x\le 60$; $0\le y\le 60$ (так як вони прибувають протягом години). Отже, простір елементарних подій G – точки квадрата $OABC$, рис.2.6. Нехай подія A – один з катерів буде чекати іншого. Оскільки простір G є неперервним, то ймовірність $P(A)$ можна обчислити за геометричним означенням, тобто $P(A)=\dfrac{\operatorname{mes} A}{\operatorname{mes} G}$

Визначимо відповідну для події A множину точок площини G. В залежності від порядку прибуття теплоходів може бути два випадки. Перший теплохід чекатиме другого, якщо він підійде до причалу протягом 25 хвилин після прибуття другого, тобто $x-y\le 25$. Аналогічно для другого випадку $y-x\le 15$. Отже, множина точок площини, що задовольняє систему нерівностей

$$\begin{cases} x-y\le 25\\ y-x\le 15\\ 0\le x\le 60\\ 0\le y\le 60 \end{cases}$$

визначає шестикутник $OMNBPQ$, який зображено на рисунку:

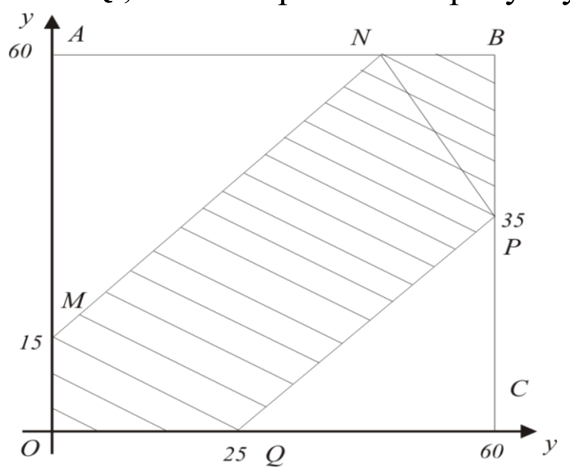


Рис. 2.6.

$$S_{OABC}=60^2,\quad S_1=S_{OMNBPQ}=S-(S_{MAN}+S_{PCQ})\,;$$

$$S_{MAN}=\frac{1}{2}AM^{\,2}=\frac{1}{2}\cdot 45^2=1012,5,$$

$$S_{PCQ}=\frac{1}{2}CQ^2=\frac{1}{2}\cdot 35^2=612,5,$$

$$P(A)=\frac{3600-(1012,5+612,5)}{3600}=\frac{1975}{3600}\approx 0,55.$$

Отже, ймовірність того, що одному з теплоходів доведеться очікувати іншого, дорівнює 0,55.

Відповідь: $P(A)=0,55$.

Завдання для самостійного виконання

11. Наталочці було потрібно з Борщагівки дістатися на Теремки, заїхавши по дорозі до подруги, яка живе на Подолі. Проаналізувавши карту-схему Києва, Наталочка виявила, що з Борщагівки на Поділ є чотири автобусні маршрути, а з Подолу на Теремки – два. Скільки існує різних варіантів автобусної подорожі Наталочки з Борщагівки на Теремки через Поділ?

12. Учасники шахового турніру зіграли один з одним дві партії. Усього на цьому турнірі було зіграно 110 партій. Скільки шахістів брало участь у цьому турнірі?

13. Команди вищої ліги з футболу провели за сезон у двох колах розіграшу 240 матчів. Скільки команд у вищій лізі ?

14. У студентській групі з 23 осіб усі студенти вивчають або англійську мову, або іспанську мову, або обидві мови одразу. Відомо, що англійську мову вивчають 18 студентів цієї групи, а іспанську мову – 12 студентів. Скільки студентів цієї групи вивчають обидві мови?

15. Розв'язати рівняння:

А) $(n+4)! = 30(n-k)!\,A_{n+2}^{k+2}$ Б) $A_n^5 = 20A_{n-1}^4$

16. Підкидається гральний кубик. Подія A_i полягає в тому, що випадає число i, де $i=\overline{1,6}.$ Позначимо події: B=“випадає парне число”; C=“випадає непарне число”; E=“випадає число не менше 2”; F=“випадає число більше 5”. Знайти ймовірність події (за класичним означенням)

а) A_2; б) A_4; в) B;

г) C; д) E; е) F.

17. При стрільбі із гвинтівки відносна частота влучення в мішень дорівнює 0,85. Скільки приблизно буде влучень, якщо проведено 120 пострілів?

18. В аудиторії сидять m дівчат та n хлопців. Одна з дівчат виходить з аудиторії. Після того викладач навмання викликає студента до дошки. Яка ймовірність, що до дошки вийде хлопець?

19. Учитель попросив учня на відрізку $[-2;3]$ навмання позначити точку. Яка ймовірність того, що відстань від точки до початку координат більше 1?

20. У крузі радіуса 5 навмання вибрано точку. Знайти ймовірність того, що вона виявиться всередині вписаного в цей круг квадрата.

ЛЕКЦІЯ №3

ФОРМУЛИ ДОДАВАННЯ ТА МНОЖЕННЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ. УМОВНІ ЙМОВІРНОСТІ. НЕЗАЛЕЖНІ ПОДІЇ

3.1. Формули додавання ймовірностей

У попередній лекції ми розглянули аксіоматичне означення ймовірності випадкової події і, як наслідки з аксіом, отримали формули для знаходження ймовірності суми *скінченної* кількості подій. Сформулюємо ще раз основні правила для знаходження ймовірності суми двох, трьох або скінченної кількості подій, як несумісних, так і сумісних.

3.1.1. Формули додавання ймовірностей для *несумісних* подій

а) *Якщо події A, B – несумісні* ($AB=\varnothing$), то *ймовірність суми цих подій дорівнює сумі їх ймовірностей* (наслідок аксіоми **А3**):

$$P(A+B)=P(A)+P(B) \tag{3.1}$$

б) Як наслідок тієї ж аксіоми, якщо події *A, B, C* попарно несумісні, тоді також *ймовірність суми подій дорівнює сумі їх ймовірностей:*

$$P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C) \tag{3.2}$$

в) Ця рівність справджується і тоді, коли маємо суму скінченної кількості попарно несумісних подій:

$$P(A_1+A_2+\ldots+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_n)$$

або

$$P\left(\sum_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i) \tag{3.3}$$

3.1.2. Формули додавання ймовірностей для *сумісних* подій

а) *Ймовірність суми двох сумісних подій* ($AB\neq\varnothing$) *дорівнює сумі ймовірностей цих подій без ймовірністі їх добутку*:

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB) \tag{3.4}$$

б) Для трьох подій:

$$P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC) \tag{3.5}$$

Приклад 3.1. У колоді 52 карти. Оголошено козир. Яка ймовірність того, що витягнута навмання карта є козирем або тузом?

Розв'язання. Подія *A*=”витягнута карта є козирем”, подія *B*=”витягнута карта є тузом”. Події *A* та *B* можуть відбуватися одночасно, отже, є сумісними, $AB\neq\varnothing$. Добуток подій *AB*=”витягнута карта – козирний туз”.

$$P(A)=\frac{13}{52},\quad P(B)=\frac{4}{52},\quad P(AB)=\frac{1}{52}\ .$$

Подія *A*+*B*=”витягнута карта є козирем або тузом”.

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)=\frac{13}{52}+\frac{4}{52}-\frac{1}{52}=\frac{16}{52}\approx 0,308.$$

Відповідь: $P(A+B)=0,308.$

3.2. Умовні ймовірності

Нехай *A* і *B* – випадкові події, які мають ненульові ймовірності.

$$A,\ B \subset \Omega\ ;\ P(A)\neq 0;\ P(B)\neq 0.$$

Нехай подія *B* відбулася. Поставимо питання:

Як це впливає на подію A? Чи змінилась ймовірність події A?

Позначимо $P\left(A/B\right)$ – умовна ймовірність або ймовірність події А, за умови, що подія *B* відбулася. Умовна ймовірність обчислюється за формулою:

$$P\left(A/B\right) = \frac{P(AB)}{P(B)} \qquad (3.6)$$

Аналогічно:

$$P\left(B/A\right) = \frac{P(AB)}{P(A)}\ . \qquad (3.7)$$

Звідки отримаємо:

$$P(AB) = P(B)\cdot P\left(A/B\right) \qquad (3.8)$$

$$P(AB) = P(A)\cdot P\left(B/A\right) \qquad (3.9)$$

Ймовірність добутку двох подій дорівнює добутку ймовірності однієї з них на умовну ймовірність другої, обчислену з урахуванням того, що перша подія відбулась.

Для трьох подій *A, B, C*:

$$P(ABC) = P(A)\cdot P\left(B/A\right)\cdot P\left(C/AB\right) \qquad (3.10)$$

У випадку *n* подій:

$$P(A_1\cdot A_2\cdot\ldots\cdot A_n) = P(A_1)\cdot P(A_2/A_1)\cdot P(A_3/A_1A_2)\ldots P(A_n/A_1A_2\ldots A_{n-1}). \qquad (3.11)$$

Ймовірність добутку декількох подій дорівнює добутку ймовірності однієї з цих подій на умовні ймовірності інших; при цьому умовні ймовірності кожної наступної події обчислюються з урахуванням того, що всі попередні події відбулись.

Формули (3.8) – (3.11) – ***формули множення ймовірностей.***

Приклад 3.2. В урні 10 куль, з яких 7 білих. По черзі дістаємо 2 кулі. Знайти ймовірність того, що обидві витягнуті кулі є білими.

Розв`язання. Нехай подія *A*=”перша куля біла” ; *P(A)* = $\frac{7}{10}$.

Подія *B*=”друга куля біла”, подія B/A=”друга куля біла, за умови, що перша куля була білою”. Умовна ймовірність $P\left(B/A\right) = \frac{6}{9}$.

Подія *AB*=”обидві кулі білі”. $P(AB) = P(A)\cdot P\left(B/A\right) = \frac{7}{10}\cdot\frac{6}{9} = \frac{42}{90}$.

Відповідь: $P(AB) = \frac{42}{90}$.

3.3. Незалежність подій

Подія *A не залежить від події B*, якщо умовна ймовірність події *A* дорівнює її безумовній ймовірності, тобто: $P\left(A/B\right)=P(A)$.

Іншими словами, виконання події *B* не впливає на ймовірність події *A*.

Подія *B не залежить від події A*, якщо $P\left(B/A\right)=P(B)$.

Нехай подія *A* не залежить від події *B*, тоді формула множення ймовірностей (3.8) перепишеться так:

$$P(AB)=P(B)P\left(A/B\right)=P(B)P(A) \quad . \qquad (3.12)$$

А з формули (3.9) отримаємо:

$$P(AB)=P(A)P\left(B/A\right) \quad . \qquad (3.13)$$

Порівняємо (3.12) та (3.13): $P(B)P(A)=P(A)P\left(B/A\right)$, $(P(A)\neq 0)$. Звідки $P(B)=P\left(A/B\right)$. Тобто, подія *B* не залежить від події *A*.

Таким чином, події *A* і *B* – ***взаємно незалежні***.

Також, якщо події *A* і *B* – незалежні, то має місце наступне правило.

Ймовірність добутку двох незалежних подій A та B дорівнює добутку їх ймовірностей:

$$P(AB)=P(A)P(B). \qquad (3.14)$$

Аналогічне твердження сформулюємо для скінченної кількості подій.

Випадкові події $A_1, A_2, \dots, A_n$ називаються *попарно незалежними*, якщо для довільних i, j виконується:

$$P(A_i \cdot A_j)=P(A_i)\cdot P(A_j),\ i, j=1,\dots,n.$$

Випадкові події $A_1, A_2, \dots, A_n$ називаються *незалежними в сукупності (незалежними)*, якщо для довільних $i_1, i_2, \dots, i_k$ і довільного k виконується:

$$P(A_{i_1}\cdot A_{i_2}\cdot\ldots\cdot A_{i_k})=P(A_{i_1})\cdot P(A_{i_2})\cdot\ldots\cdot P(A_{i_k}). \qquad (3.15)$$

Формули (3.14), (3.15) – це ***формули множення ймовірностей для незалежних подій***.

Можна довести, що якщо *A*, *B* – незалежні, то:

1) $\bar{A}$, *B* – незалежні;

2) A, $\bar{B}$ – незалежні;

3) $\bar{A}$, $\bar{B}$ – незалежні.

Ймовірність появи ***хоча б однієї*** *з подій $A_1, A_2, \dots, A_n$, незалежних в сукупності, дорівнює*

$$P(A_1+A_2+\ldots+A_n)=1-P(\bar{A}_1)\cdot P(\bar{A}_2)\cdot\ldots\cdot P(\bar{A}_n) \ , \qquad (3.16)$$

де $P(\bar{A}_1), P(\bar{A}_2), \dots, P(\bar{A}_n)$ – ймовірності появи протилежних подій.

Якщо всі n подій незалежні в сукупності і мають однакову ймовірність p, то останню формулу можна переписати у вигляді :

$$P(A_1+A_2+\ldots+A_n)=1-(1-p)^n=1-q^n. \qquad (3.17)$$

Зауваження. Поняття “залежності/незалежності” та “сумісності/несумісності” є різними, хоча певний зв’язок між ними можна встановити.

Несумісні події незалежними бути не можуть, тому що множини їх елементарних наслідків не перетинаються і ймовірність добутку цих подій дорівнює нулю, тоді як ймовірності кожної окремо взятої з цих подій не дорівнюють нулю.

Незалежні події обов’язково є сумісними. Наприклад, якщо в цеху є два верстати, які ніяк не пов’язані між собою за умовами виробництва, то простоювання кожного верстата – події сумісні і незалежні. Якщо ж верстати пов’язані єдиним технологічним циклом, то простоювання одного з них залежить від технічного стану іншого (залежні). При цьому вони можуть бути сумісними (в послідовному циклі) або несумісними (в паралельному циклі).

Разом з тим, якщо множини елементарних наслідків перетинаються (події сумісні), то події можуть бути як залежними так і незалежними.

Приклад 3.3. Опишемо події: А = “навмання вилучено з колоди карт карту пікової масті”, В = “навмання вилучено з колоди карт туз”. Ці події сумісні, тому що серед карт пікової масті є туз, а серед тузів – карта пікової масті. Крім того ці події незалежні: $P(B)=\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$ (оскільки в колоді 4 тузи). $P(B/A)=\frac{1}{9}$ (оскільки в колоді 1 туз із 9 карт пікової масті).

$P(\text{A})=\frac{9}{36}=\frac{1}{4}$, $P(A/B)=\frac{1}{4}$.

Приклад 3.4. Маємо набір 20 деталей, серед них 4 браковані і 16 якісних. Нехай подія А=”першого разу навмання витягли якісну деталь “, подія В = “другого разу навмання витягли якісну деталь”. Події А та В, сумісні, тому що може трапитись, що за першим та за другим разом буде вийнято якісні деталі. Події А та В залежні.

Зрозуміло, що *n* подій, які є незалежними у сукупності, є також попарно незалежними. Але, попарна незалежність декількох подій ще не означає, що вони незалежні в сукупності.

Приклад 3.5. Припустимо, що грані правильного тетраедра зафарбовано: першу – в червоний колір (подія А), другу –в зелений (подія В), третю – в синій (подія С), четверту – в усі три кольори (подія А В С). Якщо тетраедр підкинути, то, ймовірність того, що тетраедр впаде на грань, що містить фарбу певного кольору, дорівнює - 0,5.

Отже, $P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{2}$.

Розглянемо умовні ймовірності:

$$P\left(A/B\right)=P\left(A/C\right)=P\left(B/A\right)=P\left(B/C\right)=P\left(C/A\right)=P\left(C/B\right)=\frac{1}{2}.$$

Це означає, що події *А, В, С* попарно незалежні. Якщо ж відбудеться одночасно дві події, наприклад, *А* та *В,* тобто *АВ*, то подія С обов’язково відбудеться $P\left(C/AB\right)=P\left(B/AC\right)=P\left(A/BC\right)=1$. Отже, ймовірності кожної з подій *А, В, С* змінились, тобто події *А, В* та *С* в сукупності залежні.

Ще простіше перевірити, що ці події є в сукупності залежними, застосувавши формулу (3.15). $P(ABC)=\frac{1}{4}$, а $P(A)\cdot P(B)\cdot P(C)=\frac{1}{8}$, отже $P(ABC)\neq P(A)\cdot P(B)\cdot P(C)$, що означає, що події не є незалежними в сукупності.

3.4. Розрахунок надійності системи

Надійністю системи (елементу, приладу) називається ймовірність того, що система (елемент, прилад) будуть працювати безвідмовно, без збоїв, впродовж деякого фіксованого часу Т.

Спочатку розглянемо двоелементні системи. Два елементи можуть бути об'єднані в систему двома способами: через послідовне або паралельне підключення.

Рис.3.1. Схема А (послідовне підключення)   Схема В (паралельне підключення)

Розглянемо події A_1=”елемент 1 працює без збоїв час Т”; A_2=”елемент 2 працює без збоїв час Т”. Нехай надійності елементів 1, 2: $P(A_1) = p_1$; $P(A_2) = p_2$.

Подія A=”Схема А працює без збоїв час Т”.

Подія B=”Схема В працює без збоїв час Т”.

Опишемо події A і B через події A_1, A_2: $A = A_1 \cdot A_2$; $B = A_1 + A_2$

$$P(A) = P(A_1 \cdot A_2) = \left| \begin{array}{l} \textit{Події незалежні, тому} \\ \textit{за формулою} \\ \textit{множення ймовірностей} \end{array} \right| = P(A_1) \cdot P(A_2) = p_1 \cdot p_2;$$

$$P(B) = P(A_1 + A_2) = \left| \begin{array}{l} \textit{Події сумісні, тому} \\ \textit{за формулою додавання} \\ \textit{ймовірностей для сумісних} \\ \textit{подій} \end{array} \right| = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cdot A_2) = p_1 + p_2 - p_1 \cdot p_2 .$$

Наприклад, при $p_1 = p_2 = 0{,}8$ $P(A) = 0{,}64$; $P(B) = 0{,}96$, тобто при паралельному підключенні елементів надійність схеми підвищується.

Ймовірність події B можна знайти іншим способом, через ймовірність протилежної події. Протилежна подія $\bar{B}$ = “схема не працює”. При паралельному підключенні це означає, що не працюють всі елементи схеми. $P(\bar{B}) = P(\bar{A}_1 \bar{A}_2) = (1 - p_1)(1 - p_2)$.

Звідки

$P(B) = 1 - P(\bar{B}) = 1 - (1 - p_1)(1 - p_2)$.

Приклад 3.5. Розрахувати надійність схеми, якщо надійності елементів $p_1 = p_2 = p_3 = 0{,}8$.

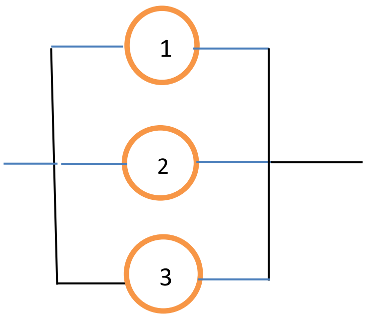


Рис. 3.2.

Розв'язання. Нехай події A_i ="елемент *i* працює без збоїв час Т"; *i*=1,2,3. Подія *A*="Схема працює" може бути подана через події A_i : $A = A_1 + A_2 + A_3$. Протилежна подія $\overline{A} = \overline{A}_1 \cdot \overline{A}_2 \cdot \overline{A}_3$. Тоді $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - P\left(\overline{A}_1 \cdot \overline{A}_2 \cdot \overline{A}_3\right) =$

$$= \left| \begin{array}{l} \textit{Події } \overline{A}_1, \overline{A}_2, \overline{A}_3 - \\ \textit{незалежні} \end{array} \right| = 1 - P(\overline{A}_1) \cdot P(\overline{A}_2) \cdot P(\overline{A}_3) = 1 - (0,2)^3 = 0,992.$$

Відповідь: 0 ,992.

Можна узагальнити отримані результати. Якщо потрібно оцінити надійність роботи системи, *n* елементів якої з'єднані послідовно, і відомі ймовірності безвідмовної роботи кожного елемента p_i $(i = 1, 2, 3, ..., n)$, то, позначивши надійність системи R, маємо $R = \prod_{i=1}^{n} p_i$.

У випадку паралельного з'єднання елементів $R = 1 - \prod_{i=1}^{n} q_i,$ *де* $q_i = 1 - p_i$.

Запитання для самоконтролю

1.Запишіть формулу додавання ймовірностей для несумісних, сумісних подій. Наведіть приклади.

2. Дайте означення умовної ймовірності події. Наведіть приклади її обчислення.

3. Запишіть формулу множення ймовірностей для залежних подій (у випадку двох, трьох, n подій).

4. Які події називають незалежними?

5. Запишіть формулу множення ймовірностей для незалежних подій. Наведіть приклади.

6. Що розуміють під ймовірністю появи хоча б однієї з подій?

7. Які події є незалежними в сукупності?

8. Що таке надійність системи?

9. Чому дорівнює надійність схеми при послідовному та паралельному включенні 2 елементів?

Практичне заняття №3
ФОРМУЛИ ДОДАВАННЯ ТА МНОЖЕННЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ

Приклади розв'язування задач

Задача 3.1. В лотереї випущено 10000 білетів, серед яких 100 білетів з виграшем по 5 тис. грн., 200 – по 1 тис. грн., 500 – по 500грн., та 1000 – 200 грн., а решта без виграшу. Знайти ймовірність виграшу не менше 500 грн., якщо придбали один білет.

Розв'язання. Введемо позначення подій: A="виграш не менше 500 грн.", A_1 = "виграш становить 5 тис. грн.", A_2 ="виграш становить 1 тис. грн.", A_3 ="виграш становить 500 грн.". Оскільки куплено тільки один білет, то ці події несумісні. За формулою додавання ймовірностей (3.1):

$$P(A) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) = \frac{100}{10000} + \frac{200}{10000} + \frac{500}{10000} = 0,08 .$$

Відповідь: P(A)=0,08.

Задача 3.2. Підкидають два гральних кубики. Обчислити ймовірність того, що хоча б на одному кубику випаде три очки.

Розв'язання. Введемо позначення подій: A ="хоча б на одному кубику випаде три очки", A_1 ="випало три очки на першому кубику", A_2 ="випало три очки на другому кубику".

За умовою $P(A_1) = P(A_2) = \dfrac{1}{6}$. Ці події сумісні і незалежні. Використаємо теорему додавання ймовірностей для сумісних подій:

$$P(A) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cdot A_2) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = 0,306$$

Відповідь: P(A)=0,306.

Задача 3.3. Рада директорів складається з трьох бухгалтерів, трьох менеджерів та двох інженерів. Планується створити підкомітет із його членів. Яка ймовірність того, що всі троє в цьому підкомітеті будуть бухгалтерами?

Розв'язання. Введемо позначення подій:

A="перший вибраний член підкомітету – бухгалтер",

B="другий вибраний член підкомітету – бухгалтер",

C="третій вибраний член підкомітету – бухгалтер".

Ці події залежні. За теоремою множення ймовірностей залежних подій (формула (3.5)), маємо:

$$P(A \cdot B \cdot C) = P(A)P(B/A)P\ (C/AB) = \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{56} \approx 0,018.$$

Відповідь: P(ABC)=0,018.

Задача 3.4. В цеху два ткацькі верстати працюють незалежно один від одного. Ймовірність того, що протягом години перший верстат не потребуватиме наладки оператора дорівнює 0,7, для другого верстата ця ймовірність дорівнює 0,8. Знайти ймовірність того, що протягом години жоден з верстатів не потребуватиме наладки оператора.

Розв'язання. Введемо позначення подій: A ="перший верстат не потребуватиме наладки оператора", B ="другий верстат не потребуватиме наладки оператора". Ці події незалежні. За теоремою множення ймовірностей незалежних подій маємо:

$$P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B)=0,7\cdot 0,8=0,56.$$

Відповідь: P(AB)=0,56.

Задача 3.5. Ймовірність хоча б одного влучання стрільцем у мішень при чотирьох пострілах дорівнює 0,9984. Знайти ймовірність влучання в мішень при одному пострілі.

Розв'язання. Введемо позначення подій: A="влучити в мішень хоча б при одному з чотирьох пострілів". Отже, $P(A)=1-q^4$, де q - ймовірність промаху. За умовою $P(A)=0,9984$, $q^4=1-0,9984=0,0016$. Отже $q=\sqrt[4]{0,0016}=0,2$. $p=1-q=1-0,2=0,8$.

Відповідь: q=0,8.

Задача 3.6. Розрахувати надійність схеми, якщо надійності елементів $p_1=p_2=p_3=0,8$.

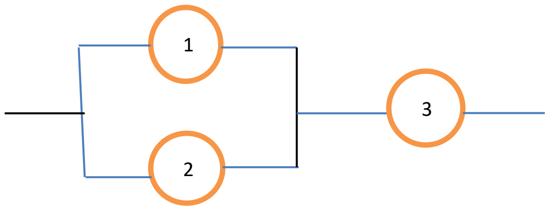


Рис. 3.3.

Розв'язання. Нехай події A_i ="елемент *i* працює без збоїв час Т"; *i*=1,2,3.

Подія A="Схема працює" може бути подана через події A_i : $A=\left(A_1+A_2\right)\cdot A_3$. Обчислимо ймовірність події A:

$$P(A)=P\left((A_1+A_2)\cdot A_3\right)=\left|\begin{matrix}\textit{Події } (A_1+A_2)\, \textit{та } A_3 - \\ \textit{незалежні}\end{matrix}\right|=P(A_1+A_2)\cdot P(A_3)=$$

$$=\left|\begin{matrix}\textit{Події } A_1\, \textit{та } A_2 - \\ \textit{сумісні}\end{matrix}\right|=\left(P(A_1)+P(A_2)-P(A_1A_2)\right)\cdot P(A_3)=$$

$$=\left|\begin{matrix}\textit{Події } A_1\, \textit{та } A_2 - \\ \textit{незалежні}\end{matrix}\right|=\left(P(A_1)+P(A_2)-P(A_1)\cdot P(A_2)\right)\cdot P(A_3)=$$

$$=(0,8+0,8-0,64)\cdot 0,8=0,768.$$

Відповідь: P(A)=0,768.

Завдання для самостійного виконання

21. Підкидають три гральних кубики. Знайти ймовірності таких подій: а) на кожному кубику випало п’ять очок; б) на всіх кубиках випала однакова кількість очок.

22. Нехай ймовірність того, що потрібний покупцю розмір тениски знаходиться в першій, другій, третій, четвертій коробці відповідно дорівнюють 0,6; 0,7; 0,8; 0,9. Знайти ймовірність того, що потрібний розмір тениски знаходиться: а) менше ніж в трьох коробках; б) більше ніж в двох коробках.

23. В цеху робітник обслуговує чотири верстати. Ймовірність того, що протягом години перший верстат не потребуватиме наладки, дорівнює 0,65, для другого верстата ця ймовірність дорівнює 0,8, для третього – 0,7, а для четвертого – 0,75. Знайти ймовірність того, що протягом години принаймні один верстат потребуватиме наладки.

24. Швачка обслуговує на фабриці три швейних автомати, які працюють незалежно один від одного. Ймовірність того, що протягом години не вийде з ладу перший автомат, дорівнює 0,7, для другого автомата така ймовірність дорівнює 0,8, а для третього – 0,9. Знайти ймовірність того, що протягом години не вийде з ладу жоден швейний автомат.

25. Для оповіщення про аварію встановлені два незалежно працюючі сигналізатори. Ймовірність того, що перший сигналізатор спрацює, дорівнює 0,95, для другого сигналізатора така ймовірність дорівнює 0,9. Знайти ймовірність того, що при аварії спрацює а)тільки один сигналізатор; б)хоча б один сигналізатор; в)не спрацює жоден сигналізатор.

26. Ймовірність влучення в ціль при одному залпі з двох гармат дорівнює 0,38. Знайти ймовірність враження цілі при одному пострілі першою гарматою, якщо відомо, що для другої гармати ця ймовірність дорівнює 0,8.

27. Відділ технічного контролю перевіряє деталі на стандартність. В результаті перевірки виявлено, що в кожному ящику є 90% стандартних деталей. Знайти ймовірність того, що з двох навмання відібраних деталей тільки одна є стандартною.

28. Під час сесії студент здає два заліки та чотири іспити. До кожного з заліків студент вивчив 70% питань, а до кожного з іспитів - 80% запропонованих питань. Знайти ймовірність того, що студент складе сесію.

29. Серед 12 телевізорів, які надійшли у ремонт, у п’яти з них треба замінити електронні компоненти, а у інших замінити деталі корпусу. Яка ймовірність того, що серед чотирьох телевізорів, взятих навмання майстром для ремонту, хоча б двом треба замінити електронні компоненти.

30. Розрахувати надійність схеми, якщо надійності елементів $p_1 = p_2 = 0{,}7;\quad p_3 = p_4 = 0{,}8$.

а) б)

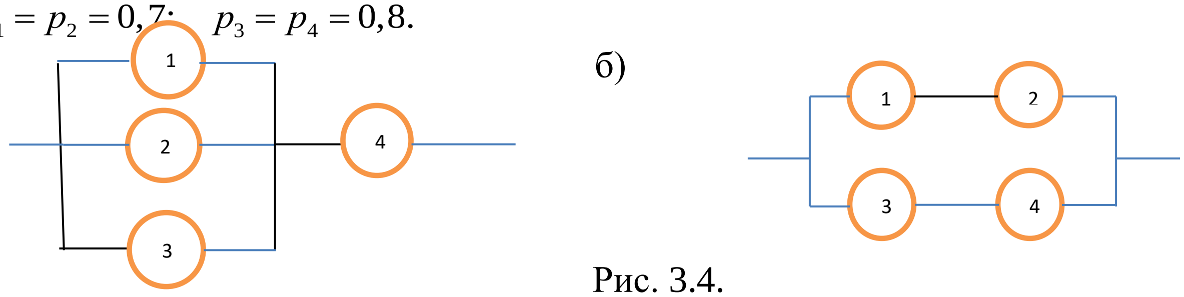


Рис. 3.4.

ЛЕКЦІЯ №4

ФОРМУЛА ПОВНОЇ ЙМОВІРНОСТІ. ФОРМУЛИ БАЙЄСА

4.1. Формула повної ймовірності

Нехай $H_1, H_2, \ldots, H_n$ – попарно несумісні події, а разом $H_1 + H_2 + \ldots + H_n = \Omega$. Таку сукупність подій будемо називати *повною групою подій.* Сума ймовірностей цих подій дорівнює 1:

$$P(H_1) + P(H_2) + \ldots + P(H_n) = 1.$$

Події $H_1, H_2, \ldots, H_n$ називають *гіпотезами*.

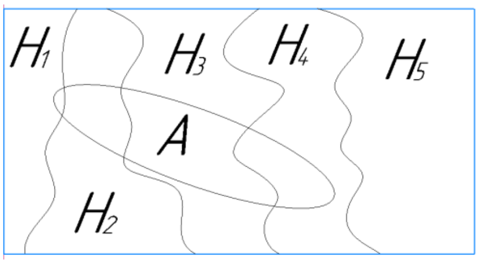


Рис. 4.1.

Нехай A – деяка випадкова подія, $A \subset \Omega$. Подію A можна подати як суму подій: $A = AH_1 + AH_2 + \ldots + AH_n$.

$$P(A) = P(AH_1 + AH_2 + \ldots + AH_n) = \left| \begin{matrix} AH_1, AH_2, \ldots, AH_n - \\ \textit{несумісні} \end{matrix} \right| =$$

$$= P(AH_1) + P(AH_2) + \ldots + P(AH_n) =$$

$$= P(H_1) \cdot P\left(A/_{H_1} \right) + P(H_2) \cdot P\left(A/_{H_2} \right) + \ldots + P(H_n) \cdot P\left(A/_{H_n} \right).$$

Ймовірність події A, яка може настати лише за умови появи однієї з несумісних подій (гіпотез) $H_1, H_2, \ldots, H_n$, що утворюють повну групу подій, дорівнює сумі добутків ймовірностей кожної з гіпотез на відповідну умовну ймовірність події A:

$$P(A) = P(H_1) \cdot P\left(A/_{H_1} \right) + \ldots + P(H_n) \cdot P\left(A/_{H_n} \right)$$

або

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P\left(A/_{H_i} \right). \qquad (4.1)$$

Рівність (4.1) називається ***формулою повної ймовірності.***

Розглянемо приклади застосування формули повної ймовірності.

Приклад 4.1. В ящику міститься 12 деталей, що виготовлені на заводі №1, 20 деталей, що виготовлені на заводі №2, і 18 деталей, що виготовлені на заводі №3. Ймовірність того, що деталь, яка виготовлена на заводі №1, є якісною, дорівнює 0.9, для деталей, які виготовлені на заводах №2 і №3, ці ймовірності дорівнюють 0.6 і 0.9 відповідно. Знайти ймовірність того, що вибрана навмання деталь виявиться якісною.

Розв'язання. Розглянемо події:

H_1="деталь виготовлена заводом №1", H_2="деталь виготовлена заводом №2", H_3="деталь виготовлена заводом №3".

Імовірності цих подій: $P(H_1)=\frac{12}{50}$, $P(H_2)=\frac{20}{50}$, $P(H_3)=\frac{18}{50}$.

$$\sum_{i=1}^{3} P(H_i)=\frac{12}{50}+\frac{20}{50}+\frac{18}{50}=1.$$

H_1, H_2, H_3 – несумісні. H_1, H_2, H_3 - утворюють повну групу подій

Подія $A=$ "деталь виявилась якісною".

$P\left(A/H_1\right)=|$ імовірність того, що деталь є якісною, за умови, що вона виготовлена заводом №1 | = 0.9;

$P\left(A/H_2\right)=|$ імовірність того, що деталь є якісною, за умови, що вона виготовлена заводом №2 | = 0.6;

$P\left(A/H_3\right)=|$ імовірність того, що деталь є якісною, за умови, що вона виготовлена заводом №3 | = 0.9 .

За формулою повної ймовірності (4.1):

$$P(A)=P(H_1)\cdot P\left(A/H_1\right)+P(H_2)\cdot P\left(A/H_2\right)+P(H_3)\cdot P\left(A/H_3\right)=$$

$$=\frac{12}{50}\cdot 0,9+\frac{20}{50}\cdot 0,6+\frac{18}{50}\cdot 0,9=0,78.$$

Відповідь: $P(A)=0,78.$

Приклад 4.2. Є дві урни, у першій урні міститься 3 білих і 7 чорних куль, у другій урні - 6 білих і 4 чорних. З першої урни навмання вийняли одну кулю і переклали у другу урну, після того з другої урни дістали одну кулю. Знайти ймовірність того, що вийнята куля біла.

Розв'язання. Розглянемо події: H_1="з першої урни до другої переклали білу кулю", H_2="з першої урни до другої переклали чорну кулю".

$$P(H_1)=\frac{3}{10}, \quad P(H_2)=\frac{7}{10}. \quad P(H_1)+P(H_2)=1.$$

H_1, H_2 - утворюють повну групу подій.

Подія A="з другої урни витягли білу кулю".

$$P\left(A/H_1\right)=\frac{7}{11}, \qquad P\left(A/H_2\right)=\frac{6}{11}.$$

За формулою повної ймовірності (4.1):

$$P(A)=P(H_1)\cdot P\left(A/H_1\right)+P(H_2)\cdot P\left(A/H_2\right)=\frac{3}{10}\cdot\frac{7}{11}+\frac{7}{10}\cdot\frac{6}{11}=\frac{21+42}{110}=\frac{63}{110}.$$

Відповідь: $P(A)=\frac{63}{110}\approx 0{,}57$.

4.2. Формули Байєса

В умовах попередньої задачі поставимо питання: нехай відомо, що куля, яку дістали з другої урни виявилася білою (подія А відбулася). Потрібно знайти ймовірність того, що з першої урни до другої було перекладено білу кулю (або чорну кулю).

$P\left(H_1/A\right)-$ймовірність того, що з I-ї урни до II-ї переклали білу кулю, якщо відомо, що потім із II-ї урни дістали білу кулю.

$$P\left(H_1/A\right)=\frac{P(AH_1)}{P(A)}=\frac{P(H_1)\cdot P\left(A/H_1\right)}{P(H_1)\cdot P\left(A/H_1\right)+P(H_2)\cdot P\left(A/H_2\right)}=\frac{\frac{3}{10}\cdot\frac{7}{11}}{\frac{3}{10}\cdot\frac{7}{11}+\frac{7}{10}\cdot\frac{6}{11}}=\frac{21}{63}=\frac{1}{3}.$$

Аналогічно,

$$P\left(H_2/A\right)=\frac{P(H_2)\cdot P\left(A/H_2\right)}{P(H_1)\cdot P\left(A/H_1\right)+P(H_2)\cdot P\left(A/H_2\right)}=\frac{\frac{7}{10}\cdot\frac{6}{11}}{\frac{3}{10}\cdot\frac{7}{11}+\frac{7}{10}\cdot\frac{6}{11}}=\frac{42}{63}=\frac{2}{3}.$$

$P(H_1)=\frac{3}{10}=0.3$	$P\left(H_1/A\right)\approx 0.33$
$P(H_2)=\frac{7}{10}=0.7$	$P\left(H_2/A\right)\approx 0.67$
апріорні ймовірності	*апостеріорні ймовірності*

У загальному випадку маємо:

Нехай $H_1, H_2, \dots, H_n$ *- події, що утворюють повну групу. Тоді для будь-якої події* A, *що може настати лише за умови появи однієї з несумісних подій (гіпотез)* $H_1, H_2, \dots, H_n$, *і такої, що* $P(A)\neq 0$, *виконуються рівності:*

$$P\left(H_i/A\right)=\frac{P(H_i)\cdot P\left(A/H_i\right)}{P(A)},\qquad i=1,\dots,n,$$

або

$$P\left(H_i/A\right)=\frac{P(H_i)\cdot P\left(A/H_i\right)}{P(H_1)\cdot P\left(A/H_1\right)+\dots+P(H_n)\cdot P\left(A/H_n\right)}\qquad(4.2)$$

Формули (4.2) називають ***формулами Байєса.***

Запитання для самоконтролю

1. Який вигляд має формула повної ймовірності?

2. Як називають події $H_i, i = 1, 2, ..., n$ *у формулі повної ймовірності?*

3. Чому дорівнює сума ймовірностей гіпотез?

4. В якому випадку доцільно використовувати формули Байєса?

5. Запишіть формулу Байєса.

6. Як зміниться ступінь довіри до вибраних гіпотез після випробування?

Практичне заняття №4

ФОРМУЛА ПОВНОЇ ЙМОВІРНОСТІ. ФОРМУЛИ БАЙЄСА

Приклади розв'язування задач

Задача 4.1. У команді 5 стрільців: 3 чоловіків та 2 жінки. Ймовірність влучення у ціль у чоловіків – 0,95, у жінок – 0,9. Для пострілу в мішень навмання обрано одного стрільця. Яка ймовірність того, що в мішень буде влучено?

Розв'язання. Розглянемо такі гіпотези:

H_1="для пострілу було обрано стрільця-чоловіка",

H_2="для пострілу було обрано стрільця-жінку".

За класичним означенням ймовірності маємо: $P(H_1)=\frac{3}{5}$, $P(H_2)=\frac{2}{5}$.

Події H_1, H_2 - несумісні, утворюють повну групу подій.

Подія A="у мішень влучено".

$$P\left(A/H_1\right)=0,95\ , \qquad P\left(A/H_2\right)=0,9.$$

За формулою повної ймовірності (4.1):

$$P(A)=P(H_1)\cdot P\left(A/H_1\right)+P(H_2)\cdot P\left(A/H_2\right)=\frac{3}{5}\cdot 0,95+\frac{2}{5}\cdot 0,9=0,93.$$

Відповідь: $P(A)=0,93$.

Задача 4.2. На одній позиції імпульсного коду з однаковою ймовірністю може з'явитися 0 або 1. При передачі сигналу це значення може помилково змінитися. Ймовірність перетворення "0" в "1" дорівнює 0,01, ймовірність перетворення "1" в "0" дорівнює 0,004. Знайти ймовірність того, що сигнал буде передано правильно.

Розв'язання. Розглянемо такі гіпотези:

H_1="на позиції імпульсного коду з'явився "0"",

H_2=" на позиції імпульсного коду з'явилася "1"".

$$P(H_1)=P(H_2)=\frac{1}{2}\ .$$

Події H_1, H_2- несумісні, утворюють повну групу подій.

Подія A="сигнал передано правильно".

$$P\left(A/H_1\right)=1-0,01=0,99\ , \qquad P\left(A/H_2\right)=1-0,004=0,996.$$

За формулою повної ймовірності:

$$P(A)=P(H_1)\cdot P\left(A/H_1\right)+P(H_2)\cdot P\left(A/H_2\right)=\frac{1}{2}\cdot 0,99+\frac{1}{2}\cdot 0,996=0,993.$$

Відповідь: $P(A)=0,993$.

Задача 4.3. На трьох фабриках виробляється відповідно 5000, 8000, 2000 електроламп. Відомо, що на першій фабриці питома вага браку у виготовленій продукції становить 0,3%, на другій – 0,2%, на третій – 0,5%. Куплена лампа виявилась бракованою. Визначити, на якій із фабрик найімовірніше була виготовлена бракована лампа.

Розв'язання. Введемо позначення подій: $A=$"куплена лампа бракована". H_1, H_2, H_3 - гіпотези, які полягають у тому, що куплена лампа виготовлена на першій, другій, третій фабриках відповідно, утворюють повну групу подій. За класичним означенням ймовірності маємо:

$$P(H_1)=\frac{5000}{5000+8000+2000}=\frac{5}{15},$$

$$P(H_2)=\frac{8000}{5000+8000+2000}=\frac{8}{15},$$

$$P(H_3)=\frac{2000}{5000+8000+2000}=\frac{2}{15},$$

$$P\left(A/H_1\right)=0{,}003,\ P\left(A/H_2\right)=0{,}002,\ P\left(A/H_3\right)=0{,}005.$$

За формулами Байєса:

$$P\left(\mathrm{H}_i/A\right)=\frac{P(H_i)\cdot P\left(A/H_i\right)}{\sum_{j=1}^{3}P(H_j)\cdot P\left(A/H_j\right)},\quad i=1,2,3$$

$$P\left(H_1/A\right)\approx 0{,}37,\quad P\left(H_2/A\right)\approx 0{,}39,\quad P\left(H_3/A\right)\approx 0{,}24.$$

Отже, найімовірніше, що бракована лампа була виготовлена на другій фабриці.

Задача 4.4. В спортивному залі у сітці лежать 20 футбольних м'ячів, з них 12 нових, а 8 вже використовувались у грі. Тренер навмання бере із сітки 2 м'ячі для гри, а після гри повертає їх у сітку. Після цього із сітки знову виймає два м'ячі для наступної гри. Знайти ймовірність того, що вийняті другого разу м'ячі виявляться новими.

Розв'язання. Введемо позначення подій: $A=$"обидва м'ячі при другому вилученні виявились новими". Розглянемо такі гіпотези про вміст сітки перед другим вилученням м'ячів: $H_1=$"12 нових і 8, які були у грі",
$H_2=$"11 нових і 9,які були у грі", $H_3=$"10 нових і 10, які були у грі".

Знайдемо ймовірності цих гіпотез. Якщо обидва м'ячі вже були у грі, то використовуючи класичне означення ймовірності:

$$P(H_1)=\frac{C_8^2}{C_{20}^2}=\frac{14}{95}.$$

Для того, щоб мала місце гіпотеза H_2 - першого разу потрібно було вилучити 1 новий м'яч і 1 м'яч, який вже використовувався:

$$P(H_2)=\frac{C_{12}^1C_8^1}{C_{20}^2}=\frac{48}{95}.$$

Для того, щоб мала місце гіпотеза H_3 - першого разу потрібно було вилучити 2 нових м'ячі:

$$P(H_3)=\frac{C_{12}^2}{C_{20}^2}=\frac{33}{95}.$$

Знайдемо умовні ймовірності події A:

$$P\left(A/_{H_1}\right)=\frac{C_{12}^2}{C_{20}^2}=\frac{66}{190},\qquad P\left(A/_{H_2}\right)=\frac{C_{11}^2}{C_{20}^2}=\frac{55}{190},\qquad P\left(A/_{H_3}\right)=\frac{C_{10}^2}{C_{20}^2}=\frac{45}{190}.$$

За формулою повної ймовірності:

$$P(A)=P(\mathrm{H}_1)P\left(A/_{H_1}\right)+\mathrm{P}(\mathrm{H}_2)P\left(A/_{H_2}\right)+P(H_3)P\left(A/_{H_3}\right)=$$

$$=\frac{14}{95}\cdot\frac{66}{190}+\frac{48}{95}\cdot\frac{55}{190}+\frac{33}{95}\cdot\frac{45}{190}=0,279.$$

Відповідь: $P(A)\approx 0,279$.

Задача 4.5. Три стрільці незалежно один від одного зробили по одному пострілу, причому двоє з них влучили в мішень. Ймовірності влучення в мішень для першого, другого та третього стрільців відповідно дорівнюють 0,4, 0,3 і 0,5. Знайти ймовірність того, що влучив перший стрілець.

Розв'язання. Введемо позначення подій: A ="два стрільці влучили в мішень". Гіпотеза H_1 ="влучив перший стрілець", H_2 ="перший стрілець промахнувся". Отже за умовою $P(\mathrm{H}_1)=0,4$, $P(\mathrm{H}_2)=1-0,4=0,6$ (події H_1 і H_2 протилежні).

Знайдемо умовну ймовірність $P\left(A/_{H_1}\right)$ того, що в мішені два влучення, причому влучив перший і другий стрільці або перший і третій стрільці.

$$P\left(A/_{H_1}\right)=0,3\cdot 0,5+0,5\cdot 0,7=0,5.$$

Знайдемо умовну ймовірність $P\left(A/_{H_2}\right)$ того, що в мішені два влучення, причому перший стрілець промахнувся, а влучили другий і третій.

$$P\left(A/_{H_2}\right)=0,3\cdot 0,5=0,15.$$

Ймовірність того, що влучив перший стрілець, знайдемо за формулою Байєса:

$$P\left(H_1/_{A}\right)=\frac{P(H_1)P\left(A/_{H_1}\right)}{P(H_1)P\left(A/_{H_1}\right)+P(H_2)P\left(A/_{H_2}\right)}=\frac{20}{29}.$$

Відповідь: $P\left(H_1/_{A}\right)=\frac{20}{29}$.

Завдання для самостійного виконання

31. Два з трьох незалежно працюючих елементів деякого приладу відмовили. Знайти ймовірність того, що відмовили перший і другий елементи, якщо ймовірність відмови першого, другого і третього елементів відповідно дорівнюють 0,2, 0,4 та 0,3.

32. Продукція перевіряється на стандартність одним з двох контролерів, продуктивність праці яких 0,6 та 0,4 відповідно. Ймовірність того, що перевірена продукція була визнана стандартною першим контролером, дорівнює 0,95, а другим – 0,9. Перевірена продукція була визнана стандартною. Знайти ймовірність того, що продукцію перевірив другий контролер.

33. В групі 20 студентів, серед них: 4 – відмінники, 8 – хорошистів, 6 – трієчників та 2 двієчники. До іспиту запропоновано вивчити 25 питань. Студент-відмінник вивчив всі питання, хорошист – 20 питань, трієчник – 15, а двієчник – 5 питань. Викликаний навмання студент відповів на три поставлені питання. Знайти ймовірність того, що це: а) хорошист; б) трієчник.

34. Курс долара підвищується протягом місяця з ймовірністю 0,8 і падає з ймовірністю 0,2. При підвищенні курсу долара компанія розраховує отримати прибуток з ймовірністю 0,75, а при пониженні – з ймовірністю 0,45. Знайти ймовірність того, що компанія отримає прибуток.

35. Три стрільці незалежно один від одного зробили по одному пострілу, причому двоє з них влучили в мішень. Ймовірності влучення в мішень для першого, другого та третього стрільців відповідно дорівнюють 0,2, 0,4 і 0,3. Знайти ймовірність того, що влучив перший стрілець.

36. В міську лікарню на протязі місяця потрапляє в середньому 50% хворих на грип, 40% хворих на ангіну та 10% хворих на запалення легень. Ймовірність одужати при захворюванні на грип 0,9, при ангіні – 0,8, при запаленні легень – 0,7. Хворий, який потрапив до лікарні, одужав. Знайти ймовірність того, що він був хворий на ангіну.

37. В селищі Іванівка працюють дві будівельні компанії А та В, які пропонують свої послуги. Ймовірність укладання клієнтом договору з компанією А становить 0,4, а з компанією В – 0,6. Ймовірність якісного виконання робіт компанією А – 0,7, а компанії В – 0,5. При укладанні договору з однією з компаній клієнт не отримав якісного виконання запланованих ним робіт. Знайти ймовірність того, що договір був укладений з компанією А.

38. В першій урні 2 білі і 4 чорні кулі, а в другій урні 3 білі і 1 чорна куля. З першої урни переклали в другу 2 кулі. Знайти ймовірність того, що куля вийнята із другої урни після перекладання буде білою.

39. В урну, що містить 2 кулі, поклали білу кулю, після цього з неї навмання вилучили 1 кулю. Знайти ймовірність того, що вийнята куля виявиться білою.

40. На складі є 20 нових та 10 старих інструментів. Першій зміні робітників навмання видали 2 інструменти, які після використання були повернуті на склад. Друга зміна отримала 2 інструменти. Знайти ймовірність того, що друга зміна отримала 2 нових інструменти.

ЛЕКЦІЯ №5

СЕРІЇ НЕЗАЛЕЖНИХ ВИПРОБУВАНЬ. СХЕМА БЕРНУЛЛІ

5.1. Схема і формула Бернуллі

Нехай експеримент $\boldsymbol{E}$ незалежно повторюється n разів – відбувається серія n незалежних випробувань, при цьому в кожному окремому випробуванні подія A може відбутися з ймовірністю p і не відбутися з ймовірністю q, $q=1-p$. Така серія випробувань називається ***схемою Бернуллі.***

Числа $n,\ p$ називають параметрами схеми Бернуллі.

У схемі Бернуллі появу події A прийнято називати *"успіхом"*. Поставимо задачу: знайти ймовірність того, що у серії n незалежних випробувань подія A відбудеться рівно m разів, або, іншими словами, що серед n випробувань буде рівно m "успіхів".

Ймовірність того, що в n незалежних випробуваннях подія A відбудеться рівно m разів і не відбудеться $(n-m)$ разів (в будь-якій послідовності) обчислюється за ***формулою Бернуллі***:

$$P_n(m)=C_n^m p^m q^{n-m}. \qquad (5.1)$$

Ймовірності $P_n(m)$ називаються *біноміальними*. Сума біноміальних ймовірностей:

$$P_n(0)+P_n(1)+...+P_n(n)=C_n^0 p^n q^0 + C_n^1 p^{n-1} q^1 + ... + C_n^n p^0 q^n = (p+q)^n = 1.$$

Нехай $P_n(m_1 \le m \le m_2)$ означає ймовірність того, що в n випробуваннях схеми Бернуллі подія A з'явиться не менше, ніж m_1 раз і не більше, ніж m_2 рази $(0 \le m_1 \le m_2 \le n)$. Тоді

$$P_n(m_1 \le m \le m_2)=\sum_{m=m_1}^{m_2} P_n(m). \qquad (5.2)$$

Ймовірність того, що в результаті n випробувань подія A з'явиться хоча б один раз, можна розглядати через ймовірність протилежної події, тобто такої, що подія A не з'явиться у жодному з випробувань, отже, така ймовірність визначається за формулою:

$$P_n(1 \le m \le n)=1-P_n(0)=1-q^n. \qquad (5.3)$$

Приклад 5.1. Стрілець стріляє по мішені 4 рази, ймовірність влучення при кожному пострілі 0,8. Знайти ймовірність того, що було рівно m влучень, m=0,1,2,3,4.

Розв'язання. Задача відповідає схемі Бернуллі. Відбувається n=4 незалежних випробуванн (постріли по мішені), в кожному з яких подія A="влучення у мішень" відбувається з ймовірністю $p=0,8$ та не відбувається з ймовірністю $q=0,2$. За формулою Бернуллі для $m=0,1,2,3,4$ знайдемо:

$$P_4(0)=C_4^0\cdot 0{,}8^0\cdot 0{,}2^4=1\cdot 0{,}2^4=0{,}0016$$
$$P_4(1)=C_4^1\cdot 0{,}8^1\cdot 0{,}2^3=4\cdot 0{,}8\cdot 0{,}008=0{,}0256$$
$$P_4(2)=C_4^2\cdot 0{,}8^2\cdot 0{,}2^2=6\cdot 0{,}64\cdot 0{,}24=0{,}0153$$
$$P_4(3)=C_4^3\cdot 0{,}8^3\cdot 0{,}2^1=4\cdot 0{,}8\cdot 0{,}64\cdot 0{,}2=0{,}4096$$
$$P_4(4)=C_4^4\cdot 0{,}8^4\cdot 0{,}2^0=1\cdot 0{,}8^4=0{,}4096.$$

Перевіримо, що сума біноміальних ймовірностей дорівнює 1. Дійсно,

$$P_4(0)+P_4(1)+P_4(2)+P_4(3)+P_4(4)=1.$$

Помітимо, що ймовірності $P_n(m)$ при збільшенні m спочатку зростають, потім спадають. Існує таке $m=m^*$, при якому $P_n(m^*)$ має найбільше значення.

5.2. Найімовірніше число "*успіхів*" у схемі Бернуллі

Позначимо m^* – таке значення, при якому біноміальна ймовірність $P_n(m^*)$ найбільша. Значення m^* називають *найімовірнішим числом "успіхів"* (появи події А). Число m^* – ціле, що знаходиться в межах:

$$np-q\le m^*\le np+p. \qquad (5.4)$$

Наприклад, якщо $n=4,\ p=0.8,\ q=0.2$, то $3.2-0.2\le m^*\le 3.2+0.8$, отже $m^*=3$ *або* $m^*=4.$

Зауважимо:

1. Якщо $np+p$ - не є цілим, тоді m^* - приймає одне значення.
2. Якщо $np+p$ є Z ціле число, то існує два значення $m^*=np+p$ або $m^*=np-q$.
3. Якщо np - ціле, тоді $m^*=np$.

5.3. Наближені формули обчислення біноміальних ймовірностей

При великих значеннях n формула Бернуллі стає незручною для обчислень, тому застосовуються наближені формули.

5.3.1. Формула Пуассона

Якщо n – велике число, p – мале $(p<0.1)$, $np<10$,

$$P_n(m)\approx\frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda},\ \text{ де } \lambda=np. \qquad (5.5)$$

Формулу Пуассона називають "формулою нечастих подій".

Зауваження. Якщо p близьке до 1, а q, відповідно, мале ($q<0,1$), тоді можна використовувати формулу Пуассона для обчислення ймовірностей числа "невдач", тобто числа випробувань, у яких подія А не з'явилася.

5.3.2. Локальна теорема Муавра-Лапласа

Якщо n – велике число ($n>100$), p, q –близькі до 0,5, то біноміальну ймовірність можна наближено знайти за формулою:

$$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x) \quad , \tag{5.6}$$

де функція $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ - функція Гауса , $x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}$.

Для функції $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ складено таблиці (додаток 1) .

Властивості $\varphi(x)$:

1. $\varphi(-x) = \varphi(x)$, функція парна;
2. $\varphi(x)$ - спадає при $x > 0$,
3. При збільшенні x до $+\infty$, $\varphi(x)$ зменшується до 0;

Для $x > 4$ приймаємо $\varphi(x) = 0$.

5.3.3. Інтегральна теорема Муавра-Лапласа

Позначимо $P_n(m_1, m_2) = P_n(m_1 \le m \le m_2)$ - ймовірність того, що m - кількість появи події А (число “успіхів”) в серії n незалежних випробувань, знаходиться в межах від m_1 *до* m_2 .

Наближене значення цієї ймовірності можна знайти за формулою:

$$P_n(m_1, m_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1), \tag{5.7}$$

де Φ(x) – функція Лапласа, $\Phi(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$, $x_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}$, $x_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}$.

Властивості Φ(x):

1. $\Phi(x)$ - непарна, $\Phi(-x) = -\Phi(x)$.
2. $\Phi(x)$ - зростає для $x \in (-\infty, +\infty)$
3. $\Phi(0) = 0$
4. $\lim\limits_{x \to +\infty} \Phi(x) = 0{,}5$.

Якщо $x > 5$, то $\Phi(x) = 0{,}5$.

Для функції Φ(x) складено таблиці (додаток 2).

Наслідок. Нехай у n випробуваннях за схемою Бернуллі подія A з’явилась m разів, тоді при досить великих n ймовірність того, що частота $\frac{m}{n}$ події A відрізняється від її ймовірності p на величину ε (за абсолютною величиною), обчислюється за формулою:

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right) = 2\Phi\left(\sqrt{\frac{n}{pq}} \cdot \varepsilon\right). \tag{5.8}$$

Запитання для самоконтролю

1. Які випробування називають схемою Бернуллі?

2. Ймовірності яких подій називаються біноміальними? Чому дорівнює сума біноміальних ймовірностей?

3. Запишіть формулу Бернуллі.

4. Що таке найімовірніше число «успіхів» у схемі Бернуллі? Як це число визначають?

5. В яких випадках потрібно використати формулу Пуассона? Запишіть формулу Пуассона.

6. Сформулюйте локальну теорему Муавра- Лапласа.

7. Яка функція називається функцією Гауса? Назвіть її основні властивості.

8. Сформулюйте інтегральну теорему Муавра- Лапласа.

9. Яка функція називається функцією Лапласа? Назвіть її основні властивості.

10. Сформулюйте наслідок про ймовірність відхилення відносної частоти від сталої ймовірності.

Практичне заняття №5
СХЕМА БЕРНУЛЛІ

Приклади розв'язування задач

Задача 5.1. Гральний кубик підкидають 6 разів. Знайти ймовірність того, що "5" очок випаде а) рівно 2 рази; б) менше 3 разів; в) хоча б один раз.

Розв'язання. Задача відповідає схемі Бернуллі. Відбувається n=6 незалежних випробувань (підкидання грального кубика), в кожному з яких подія A="випало "5" очок" відбувається з імовірністю p і не відбувається з імовірністю q:

$$p=\frac{1}{6}, \quad q=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6} \ .$$

а) За формулою Бернуллі (5.1) для $m=2$ знайдемо:

$$P_6(2)=C_6^2\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^2\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^4=15\cdot\frac{1}{36}\cdot\frac{625}{1296}=\frac{9375}{46656}\approx 0,201.$$

б) Подія B="5 очок випало менше трьох разів" є сумою подій: "5" очок випало 0, 1 або 2 рази. Тоді ймовірність події B:

$$P(B)=P_6(0)+P_6(1)+P_6(2).$$

За формулою Бернуллі (5.1) для $m=0,1,2$ знайдемо:

$$P_6(0)=C_6^0\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^0\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^6=\frac{15625}{46656}\approx 0,335;$$

$$P_6(1)=C_6^1\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^1\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^5=\frac{18750}{46656}\approx 0,402;$$

З пп. а) $P_6(2)\approx 0,201.$

Отже, $P(B)\approx 0,335+0,402+0,201=0,938.$

в) Подія С=""5" очок випало хоча б один раз". Розглянемо протилежну подію $\bar{C}$ =""5" очок не випало жодного разу". З пп.б) : $P(\bar{C})=P_6(0)\approx 0,335.$

Отже, $P(C)=1-P(\bar{C})\approx 0,665.$

Відповідь: а) 0,201; б) 0.94; в) 0,665.

Задача 5.2. Ймовірність того, що пасажир запізниться на потяг дорівнює 0,02. Знайти найімовірніше число пасажирів, які запізнилися на потяг із 855 пасажирів.

Розв'язання. За умовою $n=855$, $p=0,02$, $q=0,98$. Знайдемо найімовірніше число m^* з нерівності (5.4).

$np-q\le m^*\le np+p$. Отримаємо:

$855\cdot 0,02-0,98\le m^*\le 855\cdot 0,02+0,02$ або $16,12\le m^*\le 17,12$.

Ціле число, що лежить в цих межах, $m^*=17$.

Відповідь: $m^*=17$.

Задача 5.3. Два рівносильних супротивники грають у шахи. Що ймовірніше виграти:

а) одну партію з двох чи дві з чотирьох?

б) не менше двох партій з чотирьох чи не менше трьох з п’яти?

Нічийний результат партії не враховуються.

Розв’язання. Оскільки грають рівносильні супротивники, то ймовірність виграшу $p=\frac{1}{2}$ та ймовірність поразки $q=1-p=\frac{1}{2}$. Оскільки в усіх партіях ймовірність виграшу однакова, то можна застосувати формулу Бернуллі (5.1).

а) Знайдемо ймовірність того, що виграно одну партію з двох:

$$P_2(1)=C_2^1p^1q^1=\frac{2!}{1!\cdot 1!}\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^1=\frac{1}{2}.$$

Ймовірність виграти дві партії з чотирьох:

$$P_4(2)=C_4^2p^2q^2=\frac{4!}{2!\cdot 2!}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{6}{16}=\frac{3}{8}.$$

Оскільки $P_2(1)>P_4(2)$, то ймовірніше виграти одну партію з двох.

б) Обчислимо ймовірність виграти не менше двох партій з чотирьох:

$$P_4(2)+P_4(3)+P_4(4)=1-(P_4(0)+P_4(1))=\frac{11}{16}.$$

Обчислимо ймовірність виграти не менше трьох партій з п’яти:

$$P_5(3)+\mathrm{P}_5(4)+\mathrm{P}_5(5)=\frac{8}{16}.$$

Отже, ймовірніше виграти не менше двох партій з чотирьох.

Задача 5.4. Ймовірність народження хлопчика дорівнює 0,515. Знайти ймовірність того, що з 200 новонароджених дітей хлопчиків і дівчаток буде порівну.

Розв’язання. У даному випадку $n=200$, $m=100$, $p=0{,}515$, $q=1-p=0{,}485$.

Оскільки n і k достатньо великі, то застосовуємо локальну теорему Лапласа. Знайдемо $x=\frac{m-np}{\sqrt{npq}}=\frac{100-200\cdot 0{,}515}{\sqrt{200\cdot 0{,}515\cdot 0{,}485}}\approx -0{,}424$.

За таблицею (див. дод. 1) знайдемо значення функції Гауса: $\varphi(-0{,}424)=\varphi(0{,}424)=0{,}3647$.

Тоді за формулою (5.6):

$$P_{200}(100)=\frac{\varphi(-0{,}424)}{\sqrt{200\cdot 0{,}515\cdot 0{,}485}}=\frac{0{,}3647}{7{,}068}\approx 0{,}052.$$

Відповідь: 0,052.

Задача 5.5. За результатами перевірок фіскальними органами виявлено, що в середньому кожне друге мале підприємство регіону допускає порушення фінансової дисципліни. Знайти ймовірність того, що з 1000 зареєстрованих у регіоні малих підприємств допускають порушення фінансової дисципліни від 480 до 520 малих підприємств.

Розв'язання. За умовою $p=0,5$, $q=0,5$, $n=1000$, $m_1=480$, $m_2=520$. Застосуємо інтегральну теорему Муавра – Лапласа, за формулою (5.7):

$P_n(m_1,m_2)\approx\Phi(x_2)-\Phi(x_1)$, де

$$x_1=\frac{m_1-np}{\sqrt{npq}}=\frac{480-1000\cdot 0,5}{\sqrt{1000\cdot 0,5\cdot 0,5}}=-1,265,$$

$$x_2=\frac{m_2-np}{\sqrt{npq}}=\frac{520-1000\cdot 0,5}{\sqrt{1000\cdot 0,5\cdot 0,5}}=1,265.$$

Значення функції Лапласа $\Phi(x)$ знайдемо з таблиці (див. дод. 2):

$P_{1000}(480,520)=2\Phi(1,265)=0,7924$.

Відповідь: 0,7924.

Задача 5.6. Магазин отримав партію скляних пляшок молока. Ймовірність того, що при транспортуванні пляшка розіб'ється дорівнює $p=0,06$. Скільки слід перевірити пляшок, щоб з ймовірністю 0,9973 можна було стверджувати, що відносна частота появи розбитих пляшок відхиляється від ймовірності за абсолютною величиною не більше ніж на 0,01?

Розв'язання. Оскільки, $p=0,06$, $q=1-p=0,94$, $\varepsilon=0,01$, то. $\mathrm{P}\left(\left|\frac{m}{n}-0,06\right|<0,01\right)=0,9973$. За формулою запишемо:

$$2\Phi\left(0,01\cdot\sqrt{\frac{n}{0,06\cdot 0,94}}\right)=0,9973.$$

За таблицею (дод. 2) $\Phi(3)=0,4986$, отже $0,01\cdot\sqrt{\frac{n}{0,06\cdot 0,94}}=3$, $n=5076$.

Відповідь: n=5076.

Задача 5.7. Підручник видано тиражем 10000 примірників. Ймовірність виготовлення бракованого примірника підручника дорівнює 0,0001. Знайти ймовірність того, що тираж має рівно 5 бракованих книг.

Розв'язання. За умовою $n=10000$, $p=0,0001$, $m=5$. Оскільки n велике, а ймовірність p мала, і $\lambda=np=1$, то за формулою Пуассона (5.5):

$$P_n(m)\approx\frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda}=\frac{1e^{-1}}{5!}=\frac{0,369}{120}\approx 0,004.$$

Відповідь: 0,004.

Завдання для самостійного виконання

41. У сім'ї п'ятеро дітей. Знайти ймовірність того, що серед цих дітей: а) двоє дівчат; б) не більше двох дівчат. Вважати ймовірність народження дівчинки рівною 0,49.

42. Ймовірність банкрутства однієї з шести компаній на кінець року дорівнює 0,3. Яка ймовірність того, що на кінець року збанкротують не більше двох компаній.

43. Кожне з семи підприємств харчової промисловості виконує місячний план з ймовірністю 0,8. Знайти ймовірність того, що в кінці місяця план виконають принаймні п'ять підприємств.

44. Товарознавець оглядає 24 зразки товару. Ймовірність того, що кожен із зразків буде придатний до продажу, дорівнює 0,6. Знайти найімовірніше число зразків, які товарознавець визначить придатними до продажу.

45. Батарея провела 6 пострілів по воєнному об'єкту. Ймовірність влучення в ціль при одному пострілі дорівнює 0,6. Знайти: а) найімовірніше число влучень; б) ймовірність найімовірнішого числа влучень; в) ймовірність того, що об'єкт буде зруйнований, якщо для цього достатньо принаймні два влучення.

46. Ймовірність появи події у кожному із 100 незалежних випробувань однакова і дорівнює 0,8. Знайти ймовірність того, що подія відбудеться: а) не менше 75 разів і не більше 80; б) не менше 75 разів; в) не більше 74 разів.

47. Застосовуючи а) формулу Бернуллі; б) локальну теорему Лапласа і в) формулу Пуассона знайти ймовірність того, що серед 200 осіб виявиться четверо шульгів, якщо у середньому шульги становлять 1%.

48. Скільки треба посіяти зерен, проростання яких складає 70%, щоб найімовірніше число зерен, які не зійшли, дорівнювало 60?

49. Нехай ймовірність того, що покупцю необхідно купити взуття 41-го розміру, дорівнює 0,2. Знайти ймовірність того, що із 750 покупців не більше ніж 120 потрібне взуття 41-го розміру.

50. При наборі довільного слова з тексту наборщик робить помилку з ймовірністю 0,001. Яка ймовірність того, що в набраній статті, яка має 3000 слів, буде не більше чотирьох помилок?

ЛЕКЦІЯ №6

ВИПАДКОВІ ВЕЛИЧИНИ. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ

6.1. Поняття випадкової величини (ВВ). Дискретні та неперервні випадкові величини

Розглянемо випробування, результатом якого може бути вимірювання деякої величини, отже, у результаті випробування ця величина набуває числового значення. Це значення наперед невідоме, залежить від причин, які не можна передбачити заздалегідь, тобто є випадковим. Такі величини ми називаємо *випадковими величинами.*

Наведемо приклади.

Приклад 6.1. Експеримент E – три рази стріляють по мішені. Розглянемо випадкову величину ξ – кількість влучень при трьох пострілах. У результаті експерименту випадкова величина ξ може набути одного із значень: 0, 1, 2, 3.

Приклад 6.2. Експеримент E – перевірка 100 приладів, випадкова величина ξ – кількість працюючих приладів. Можливі значення ξ: 0, 1, ..., 100.

Приклад 6.3. Експеримент E – стріляють по мішені до першого влучення, випадкова величина ξ – кількість пострілів. Множина значень випадкової величини ξ: 1, 2, 3, … .

Випадкова величина (ВВ) – це величина, яка в результаті експерименту набуває деякого числового значення.

Наведемо більш точне математичне означення.

Нехай $(\Omega, \Re, P)$ – ймовірнісний простір (див. Лекцію№2).

Випадковою величиною (ВВ) ξ , заданою на цьому просторі, називається функція $\xi = \xi(\omega) : \Omega \to R$, вимірна відносно сігма-алгебри $\Re$, тобто така, що для $\forall x \in R : \{\omega : \xi(\omega) < x\} \in \Re$.

Дискретною випадковою величиною (ДВВ) називається випадкова величина, яка набуває скінченної або зліченної кількості ізольованих числових значень з певними ймовірностями.

Якщо кількість таких значень є скінченною – дискретна випадкова величина називається ***скінченною.***

Якщо кількість таких значень є нескінченною, але зліченною – дискретна випадкова величина є ***нескінченною.***

У прикладах 6.1, 6.2 наведено приклади скінченних дискретних випадкових величин. У прикдаді 6.3 розглянуто нескінченну дискретну випадкову величину.

Розглянемо ще декілька прикладів випадкових величин.

Приклад 6.4. Експеримент E – постріл у кругову мішень радіуса R. Нехай ξ – відстань від центра мішені до точки влучення, значення $\xi \in [0; R]$.

Приклад 6.5. Експеримент E – при селекційному відборі досліджують вагу зерен пшениці. Нехай ξ – вага кожної зернини, $\xi \in [0; m]$ (де m – максимальне значення ваги зернини пшениці).

Приклад 6.6. Експеримент ***E*** – досліджують тривалість часу роботи приладу. Нехай ξ – час безвідмовної роботи приладу, $\xi \in [0;+\infty)$.

Наведені у прикладах 6.4 – 6.6 випадкові величини набувають значень, які щільно заповнюють деякий проміжок числової прямої. Такі випадкові величини є *неперервними.* Неперервна випадкова величина (НВВ) може набувати будь-якого значення з деякого скінченного або нескінченного проміжку або декількох проміжків. Множина значень неперервної випадкової величини є незліченною.

Зауваження. Випадкові величини та випадкові події тісно між собою пов'язані. Випадкова величина – інший спосіб вивчення випадкових подій. Наведемо приклади.

1) Розглянемо експеримент ***E*** – виконано 3 постріли по мішені.

Порівняємо:

Мовою випадкових подій
Події:
A_0 – "не було жодного влучення";
A_1 – "було 1 влучення";
A_2 – "було 2 влучення";
A_3 – "було 3 влучення".
Вивчаємо ймовірності $P(A_i)$.

Мовою випадкових величин
Випадкова величина ξ – кількість влучень.
Множина значень ξ: 0,1,2,3.

Розглядаємо ймовірності $P\{\xi = i\} = p_i$, $i = 0,1,2,3.$

При цьому $P\{\xi = i\} = P(A_i),\ i = 0,1,2,3$.

2) Нехай подія $A \subset \mathbf{\Omega}$, $P(A)$ – ймовірність події *A*.

Розглянемо випадкову величину χ_A, що набуває значень: $\chi_A = 1$, якщо подія *A* відбудеться, та $\chi_A = 0$, якщо подія *A* не відбудеться. Тоді $P\{\chi_A = 1\} = P(A)$; $P\{\chi_A = 0\} = P(\overline{A}) = 1 - P(A)$. Така випадкова величина називається *індикатором події A.* Отже, можна вивчати випадкову подію *A* за допомогою випадкової величини χ_A.

6.2. Дискретні випадкові величини (ДВВ). Закон розподілу ДВВ

Нехай ξ – дискретна випадкова величина (ДВВ), що набуває окремих значень $x_1, x_2, ..., x_n$. Якщо ймовірності $P\{\xi = x_1\} = p_1$, $P\{\xi = x_2\} = p_2$, $P\{\xi = x_n\} = p_n$ відомі, то вважаємо, що ДВВ є заданою. Набір значень $x_1, x_2, ..., x_n$ та ймовірностей $p_1, p_2, ..., p_n$ (де $\sum_{k=1}^{n} p_k = 1$ – *умова нормування*) називають ***законом розподілу*** ДВВ ξ.

Цей закон розподілу може бути поданий у вигляді таблиці, яку називаємо ***рядом розподілу:***

x_k	x_1	x_2	$\dots$	x_n
p_k	p_1	p_2	$\dots$	p_n

Зауваження. Якщо множина можливих числових значень ξ є нескінченною (але зліченною), то сума ряду $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ дорівнює одиниці (*умова нормування*).

Закон розподілу, поданий у графічному вигляді, називається *многокутником розподілу*:

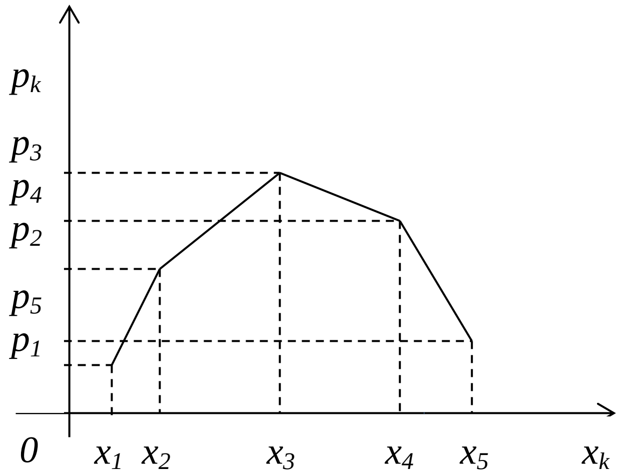


Рис. 6.1.

Тобто, *многокутник розподілу* це є ламана лінія, яка з'єднує точки з координатами (x_k, p_k), $k = 1, 2, \ldots$.

6.3. Функція розподілу випадкової величини

Одним із важливих понять, що дозволяє описати поведінку випадкової величини, є функція розподілу випадкової величини .

Функцією розподілу випадкової величини ξ називається ймовірність того, що випадкова величина ξ потрапляє в інтервал $(-\infty; x)$:

$$F_\xi(x) = P\{\xi < x\} . \qquad (6.1)$$

Задати функцію розподілу означає задати випадкову величину. Такий спосіб задання застосовується як для дискретної, так і для неперервної випадкової величини.

Неперервною випадковою величиною (НВВ) ξ називається випадкова величина, функція розподілу $F_\xi(x)$ якої є неперервною.

6.3.1. Властивості функції розподілу

1^0 ***Функція розподілу*** $F_\xi(x)$ ***набуває значень від 0 до 1.***

Дійсно, оскільки ймовірність $P\{\xi < x\} \in [0,1]$, то для всіх $x \in R$ значення функції розподілу $0 \le F_\xi(x) \le 1$.

2^0 ***Функція розподілу*** $F_\xi(x)$ ***є неспадною на R.***

Доведення: Нехай $x_1 < x_2$, розглянемо події $A = \{\xi < x_1\}$, $B = \{\xi < x_2\}$.

$A \subset B$ (з події *A* випливає подія *B*), тоді за властивістю ймовірності $P(A) \le P(B)$. Отже, $P\{\xi < x_1\} \le P\{\xi < x_2\}$, звідки $F_\xi(x_1) \le F_\xi(x_2)$.

3^0 *Якщо $x \to +\infty$, то значення функції розподілу $F_\xi(x)$ прямують до 1.*

Дійсно, нехай $x \to +\infty$, тоді

$F_\xi(+\infty) = P\{\xi < +\infty\} = |\text{достовірна подія}| = 1$

4^0 *Якщо $x \to -\infty$, то значення функції розподілу $F_\xi(x)$ прямують до 0.*

Дійсно, нехай $x \to -\infty$, тоді

$F_\xi(-\infty) = P\{\xi < -\infty\} = |\text{неможлива подія}| = 0$.

5^0 *Для ДВВ $F_\xi(x)$ – неперервна зліва, для НВВ $F_\xi(x)$ – є неперервною на $(-\infty;+\infty)$.*

6.3.2. Ймовірність потрапляння ВВ у півінтервал

Розглянемо наступні події:

$A = \{\alpha \le \xi < \beta\}$, $B = \{\xi < \alpha\}$, $C = \{\xi < \beta\}$, де $\alpha, \beta = const \in R$.

Події *A, B* – несумісні , подія *C* є сумою подій *A* і *B*. Тоді $P(C) = P(A) + P(B)$.

Звідки $P(A) = P(C) - P(B) = P\{\xi < \beta\} - P\{\xi < \alpha\} = F_\xi(\beta) - F_\xi(\alpha).$

Тоді,

$$P\{\alpha \le \xi < \beta\} = F_\xi(\beta) - F_\xi(\alpha) \quad . \qquad (6.2)$$

Отже, ймовірність потрапляння випадкової величини у деякий півінтервал може бути подано через функцію розподілу. Тому, якщо задано функцію розподілу ВВ, то ВВ вважається заданою.

6.3.3. Побудова функції розподілу для ДВВ

Приклад 6.7. Нехай задано ДВВ з таким рядом розподілу:

x_k	0	1	3
p_k	0,2	0,5	0,3

Побудувати функцію розподілу.

Розв'язання.

1) Нехай $x \le 0$.

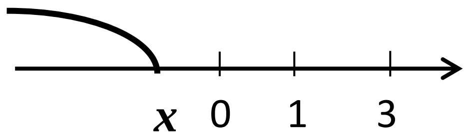


Рис. 6.2.

Оскільки випадкова величина не набуває від’ємних значень, потрапляння її в інтервал $(-\infty; x)$ є неможливою подією:

$F_\xi(x) = P\{\xi < x\} = 0.$

Для $x = 0$ розглянемо окремо: подія $\{\xi < 0\}$ є неможливою, отже, також при $x = 0$, $F_\xi(0) = P(\xi < 0) = 0$. Остаточно, якщо $x \in (-\infty; 0] \Rightarrow F_\xi(x) = 0.$

2) Нехай $x \in (0;1]$. При такому значенні x подія $\{\xi \in (-\infty; x)\}$ рівносильна події $\{\xi = 0\}$.

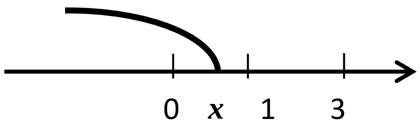
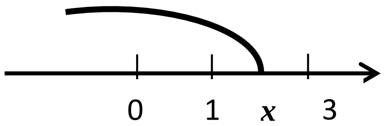


Рис. 6.3.

$P\{\xi < x\} = P\{\xi = 0\} = 0,2$.

3) Нехай $x \in (1;3]$.



$$F_\xi(x) = P\{\xi < x\} = P\{\xi = 0 \text{ або } \xi = 1\} = \left| \begin{matrix} \textit{Події} \\ \textit{несумісні} \end{matrix} \right| = P\{\xi = 0\} + P\{\xi = 1\} =$$

$$= 0,2 + 0,5 = 0,7$$

4) Нехай $x \in (3; +\infty)$.

Всі можливі значення випадкової величини потрапляють у цей проміжок.

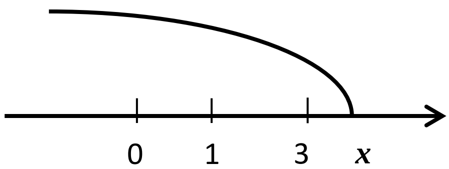


Рис. 6.5.

Отже, $P\{\xi < x\} = 1.$ Остаточно, функція розподілу заданої дискретної ВВ має вигляд:

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0; & \textit{якщо} \quad x \le 0 \\ 0,2; & \textit{якщо}\ 0 < x \le 1 \\ 0,7; & \textit{якщо}\ 1 < x \le 3 \\ 1; & \textit{якщо} \quad x > 3 \end{cases}$$

Графік функції розподілу має вигляд:

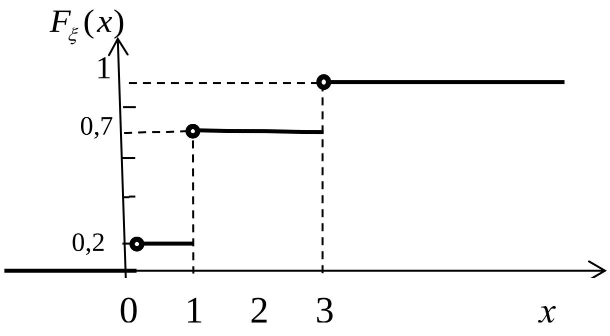


Рис. 6.6

Перевіримо виконання властивостей функції розподілу. Дійсно,

1) $0 \le F_\xi(x) \le 1$

2) $F_\xi(x)$ - неспадна (зростає стрибками на величину p_i)

3) $F_\xi(+\infty) = 1$

4) $F_\xi(-\infty) = 0$

5) $F_\xi(x)$ - неперервна зліва.

Зауваження. Для ДВВ функція розподілу $F_\xi(x)$ є розривно-східчастою функцією, що має розриви I-го роду у точках $x = x_k$, з величиною стрибка, що дорівнює p_k. Отже, якщо задано функцію розподілу вказаного типу, то за нею можна відновити ряд розподілу дискретної віпадкової величини.

6.4. Приклади стандартних розподілів дискретних випадкових величин

6.4.1. Рівномірний розподіл ДВВ

Дискретна випадкова величина має *рівномірний розподіл*, якщо вона набуває n різних значень з однаковими ймовірностями. Множина значень ξ: $x_1, x_2, ..., x_n$, відповідні ймовірності: $P\{\xi = x_1\} = P\{\xi = x_2\} = ... = P\{\xi = x_n\} = \frac{1}{n}$.

Ряд розподілу:

x_k	x_1	x_2	...	x_n
p_k	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$	...	$\frac{1}{n}$

6.4.2. Біноміальний закон розподілу

Дискретна випадкова величина, що має *біноміальний розподіл*, пов'язана зі схемою Бернуллі (див. Лекція №5). Нехай відбувається серія n незалежних випробувань, в кожному з яких деяка подія A («успіх») відбувається з імовірністю p та не відбувається з імовірністю $q = 1 - p$. Розглянемо випадкову величину ξ – кількість «успіхів» у схемі Бернуллі. Величина ξ має ***біноміальний розподіл (біноміально розподілена).*** Іншими словами, це величина, яка набуває значень з множини $\{0,1,...,n\}$ з імовірностями:

$$P\{\xi = k\} = C_n^k p^k q^{n-k},\ k = 0,1,...,n \qquad (6.3)$$

Приклад 6.8. Стрілець виконує три постріли по мішені, ймовірність влучення при кожному пострілі p = 0,4. Випадкова величина ξ – кількість влучень. Побудувати ряд розподілу та многокутник розподілу випадкової величини ξ.

Розв'язання. Випадкова величина ξ може набувати значень: 0, 1, 2, 3. Позначимо $q = 1 - p = 0,6$ та за допомогою формули Бернуллі, знайдемо ймовірності, з якими випадкова величина набуває відповідних значень.

$P\{\xi = 0\} = q^3 = 0,6^3 = 0,216$;

$P\{\xi = 1\} = C_3^1 \cdot p^1 \cdot q^2 = 3 \cdot 0,4 \cdot 0,6^2 = 0,432$;

$P\{\xi = 2\} = C_3^2 \cdot p^2 \cdot q^1 = 3 \cdot 0,4^2 \cdot 0,6 = 0,288$;

$P\{\xi = 3\} = C_3^3 \cdot p^3 \cdot q^0 = 0,064$.

Випадкова величина ξ має біноміальний розподіл. Подамо закон розподілу ДВВ у вигляді ряду розподілу:

x_k	0	1	2	3
p_k	0,216	0,432	0,288	0,064

$\sum_{k=0}^{3} p_k = 0,216 + 0,432 + 0,288 + 0,064 = 1$ – умова нормування виконується.

Побудуємо многокутник розподілу:

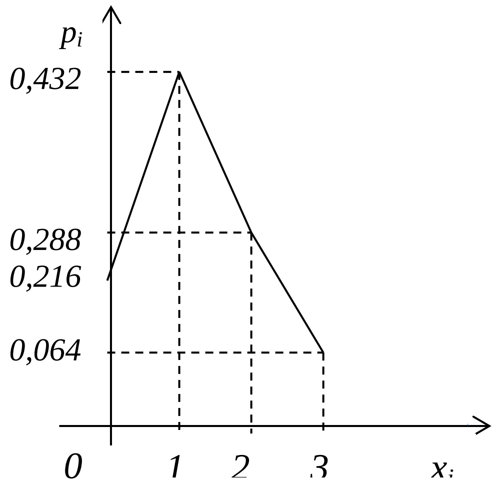


Рис. 6.7.

6.4.3. Розподіл Пуассона

Випадкова величина ξ розподілена за ***законом Пуассона***, якщо вона набуває цілих значень $\xi \in \overline{0,\infty}$ з імовірностями

$$P\{\xi = k\} = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda} \qquad , \qquad (6.4)$$

де λ – параметр розподілу.

Перевіримо умову нормування:

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = 1.$$

Розподіл Пуассона часто використовують як апроксимацію біноміального розподілу при великих n. Якщо у схемі Бернуллі кількість випробувань n велика (n>30), а ймовірність появи події p у кожному випробуванні дуже мала (p<0,1), і при цьому значення $\lambda = np$ залишається невеликим ($\lambda < 10$), то замість формули Бернуллі використовують асимптотичну формулу Пуассона:

$$P\{\xi = k\} = C_n^k p^k q^{n-k} \approx \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}.$$

Зміст параметра $\lambda = np$ – це середня кількість появи події в n випробуваннях.

Приклад 6.9. Магазин отримав 5000 пляшок мінеральної води.

Ймовірність того, що під час перевезення пляшка виявиться розбитою, дорівнює 0,0002. Знайти ряд розподілу випадкової величини ξ, що визначає кількість розбитих пляшок та ймовірність того, що при транспортуванні виявиться три розбитих пляшки.

Розв'язання. Дискретна випадкова величина ξ кількість розбитих пляшок має розподіл Пуассона, оскільки $n = 5000$ (достатньо велике), а $p = 0,0002$ (достатньо мале). Тоді $\lambda = np = 5000 \cdot 0,0002 = 1$, і закон розподілу кількості розбитих пляшок при транспортуванні має вигляд $P\{\xi = k\} = \frac{1}{k!} \cdot e^{-1}$, $k = 0,1,2,3,...$, або

x_k	0	1	2	3	4	…	k	…
p_k	$\frac{1}{e}$	$\frac{1}{e}$	$\frac{1}{2!e}$	$\frac{1}{3!e}$	$\frac{1}{4!e}$	…	$P\{\xi = k\} = \frac{e^{-1}}{k!} \cdot$	…

Ймовірність того, що розбитих пляшок виявиться рівно три $P\{\xi = 3\} = \frac{1}{6e} \approx 0,06.$

6.4.4. Геометричний закон розподілу

Розглянемо незалежні випробування Бернуллі, у кожному з яких подія A («успіх») може відбутися з імовірністю p $(0 < p < 1)$, і не відбутися з імовірністю $q = 1 - p$. Нехай випробування відбуваються до першої появи події A, тобто, це означає: якщо подія A з'явиться у k-му випробуванні, то у попередніх $(k-1)$ випробуваннях її не було. Випадкова величина ξ – це кількість випробувань, які треба провести до першої появи події A, отже, ξ: 1,2,3,...,k,… Імовірність можна знайти за формулою множення для незалежних подій:

$$P(\xi = k) = q^{k-1} \cdot p \quad . \qquad (6.5)$$

Такий закон розподілу ДВВ ξ називають ***геометричним.***

Перевіримо умову нормування: $\sum_{k=1}^{\infty} q^{k-1} p = p \sum_{k=1}^{\infty} q^{k-1} = p \frac{1}{1-q} = \frac{p}{p} = 1.$

Приклад 6.10. Стрілець виконує постріли по мішені до першого влучення, ймовірність влучення при одному пострілі *p*. Випадкова величина ξ – кількість пострілів. Побудувати ряд розподілу випадкової величини ξ.

Розв'язання. Випадкова величина ξ має геометричний закон розподілу, та набуває значень : 1, 2, 3 …, *n*, … .

Відповідні ймовірності: $P\{\xi = 1\} = p$; $P\{\xi = 2\} = p \cdot q$;

$P\{\xi = 3\} = p \cdot q^2$; $P\{\xi = 4\} = p \cdot q^3$; …… $P\{\xi = n\} = p \cdot q^{n-1}$…

Ряд розподілу:

x_k	1	2	3	4	…	N	…
p_k	P	$p \cdot q$	$p \cdot q^2$	$p \cdot q^3$	…	$p \cdot q^{n-1}$	…

Запитання для самоконтролю

1. Що називається випадковою величиною? Наведіть приклади дискретних та неперервних випадкових величин.

2. Що називають законом розподілу дискретної випадкової величини? Що таке ряд розподілу ДВВ?

3. Дайте означення функції розподілу випадкової величини.

4. Вкажіть властивості функції розподілу.

5. Як за допомогою функції розподілу задати ймовірність потрапляння випадкової величини у півінтервал?

6. Що таке рівномірний розподіл ДВВ?

7. Яка випадкова величина має біноміальний розподіл?

8. Яка випадкова величина розподілена за законом Пуассона?

9. Наведіть приклад ДВВ, яка має геометричний розподіл.

Практичне заняття №6

ДИСКРЕТНІ ВИПАДКОВІ ВЕЛИЧИНИ. СПОСОБИ ЇХ ЗАДАННЯ

Приклади розв'язування задач

Задача 6.1. Знайти закон розподілу дискретної випадкової величини ξ – числа появ герба при двох підкиданнях монети, побудувати многокутник розподілу.

Розв'язання. Випадкова величина ξ має біноміальний розподіл. При двох підкиданнях монети герб може з'явитись 0, 1 або 2 рази. Це будуть значення випадкової величини. Знайдемо ймовірності появи герба, користуючись формулою Бернуллі:

$$P_2(0) = C_2^0 \left(\frac{1}{2}\right)^0 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{2!}{0! \cdot 2!} \cdot 1 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4},$$

$$P_2(1) = C_2^1 \left(\frac{1}{2}\right)^1 \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{2!}{1! \cdot 1!} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2},$$

$$P_2(2) = C_2^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{2!}{0! \cdot 2!} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4}.$$

Отже, закон розподілу має вигляд:

x_k	0	1	2
p_k	0,25	0,5	0,25

Побудуємо многокутник розподілу:

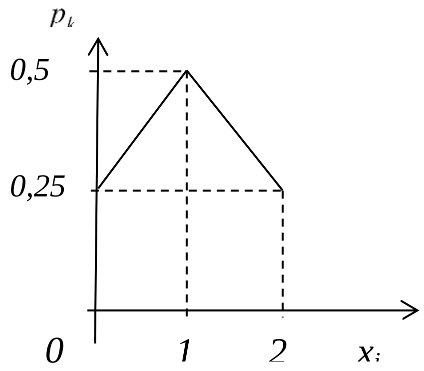


Рис. 6.8.

Задача 6.2. Дано закон розподілу випадкової величини ξ:

x_k	0	1	2	3
p_k	0,1	0,2	0,3	0,4

Записати функцію розподілу $F_\xi(x)$ та побудувати її графік.

Розв'язання. Функція розподілу випадкової величини ξ має вигляд

$$F_{\xi}(x)=\begin{cases}0\ , & x\le 0;\\ 0{,}1, & 0<x\le 1;\\ 0{,}3, & 1<x\le 2;\\ 0{,}6, & 2<x\le 3;\\ 1, & x>3.\end{cases}$$

Побудуємо графік функції розподілу:

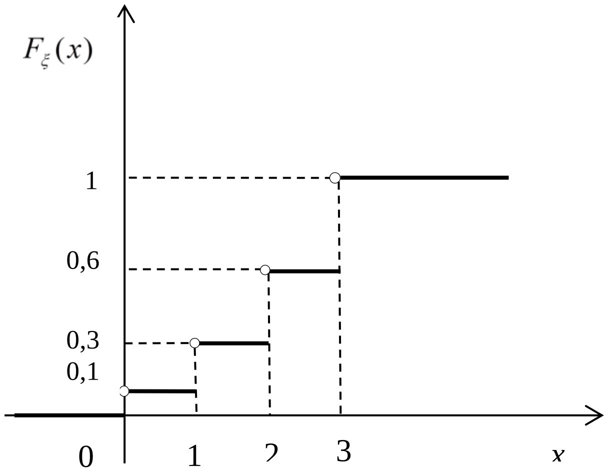


Рис. 6.9.

Задача 6.3. Екзаменатор задає студенту додаткове запитання. Ймовірність того, що студент відповість на будь-яке запитання – 0,9. Викладач припиняє екзамен, якщо студент не знає відповіді на поставлене запитання. Скласти закон розподілу дискретної випадкової величини ξ – кількості додаткових запитань, які задаватиме викладач студенту та найімовірніше число поставлених додаткових запитань.

Розв'язання. Дискретна випадкова величина ξ – число заданих додаткових запитань приймає такі значення: $x_1=1,\ x_2=2,\ x_3=3,\ ...,\ x_k=k,\ ...$ Знайдемо відповідні ймовірності.

Величина ξ набуде значення $x_1=1$ (викладач задасть тільки одне запитання), якщо студент не відповість на перше запитання. Ймовірність цієї події дорівнює $P\{\xi=1\}=0{,}1.$

Величина ξ набуде можливого значення $x_2=2$ (екзаменатор поставить тільки два запитання), якщо студент відповість на перше запитання і не відповість на друге, то $P\{\xi=2\}=0{,}9\times 0{,}1=0{,}09.$

Аналогічно знайдемо:

$$P\{\xi=3\}=0{,}9^2\cdot 0{,}1=0{,}081,\ ...,\ P\{\xi=k\}=0{,}9^{k-1}\cdot 0{,}1,\ ...$$

Отже, шуканий геометричний закон розподілу має вигляд:

x_k	1	2	3	…	k	…
p_k	0,1	0,09	0,081	…	$0,9^{k-1}\cdot 0,1$	…

Найімовірніше число заданих запитань (найімовірніше можливе значення ξ), тобто число поставлених викладачем запитань, яке має найбільшу ймовірність, як бачимо із закону розподілу, дорівнює одиниці.

Задача 6.4. Друкарка набирає сторінку тексту із 3000 символів. При наборі тексту вона робить помилку з ймовірністю 0,002. Побудувати ряд розподілу випадкової величини ξ, кількості помилок на сторінці тексту, та знайти ймовірність того, що їх буде більше чотирьох.

Розв'язання. Дискретна випадкова величина ξ, кількість помилок на сторінці набраного тексту, має розподіл Пуассона, оскільки $n = 3000$ (достатньо велике), а $p = 0,002$ (достатньо мале). Тоді $\lambda = np = 3000\cdot 0,002 = 6$ і закон розподілу кількості помилок на набраній сторінці тексту має вигляд $P\{\xi = k\} = \frac{6^k}{k!}\cdot e^{-6},\ k = 0,1,2,3,\ldots,$ або

x_k	0	1	2	3	4	…	k	…
p_k	0,0025	0,015	0,045	0,089	0,134	…	$P\{\xi = k\} = \frac{6^k}{k!}\cdot e^{-6}$	…

Ймовірність того, що помилок буде більше чотирьох $P\{\xi > 4\} = 1 - P\{\xi \le 4\} = 1 - (0,0025 + 0,015 + 0,045 + 0,089 + 0,134) \approx 0,715.$

Завдання для самостійного виконання

51. Рівень тиску води у водопровідній мережі контролюється трьома датчиками, що працюють незалежно. Ймовірність відмови кожного з них дорівнює 0,1. Скласти закон розподілу кількості відмов датчиків. Знати ймовірність того, що працюватимуть всі датчики.

52. Акції підприємства планують придбати чотири інвестори. Ймовірність відмови від покупки акцій кожного з інвесторів дорівнює 0,08. Скласти закон розподілу кількості інвесторів, які можуть відмовитися від купівлі акцій. Знайти ймовірність, що від покупки акцій відмовиться принаймні один інвестор.

53. Відділ технічного контролю заводу перевіряє продукцію на стандартність до першого виявлення браку. Ймовірність появи браку дорівнює 0,25. Скласти закон розподілу дискретної випадкової величини ξ – кількості перевірених одиниць продукції до першої появи браку.

54. Гральний кубик підкидається до першої появи цифри два. Знайти розподіл випадкової величини ξ – кількість підкидань кубика до появи цифри два.

55. Студент вивчив 10 білетів з 30 та намагається скласти іспит. Випадкова величина ξ – кількість спроб для успішного складання. Побудувати ряд розподілу випадкової величини ξ та знайти ймовірність того, що студента відрахують за академзаборгованість (іспит дозволяється перескладати тричі).

56. Підручник видано накладом 5000 примірників. Ймовірність того, що зброшурований підручник виявиться неякісним, дорівнює 0,002. Знайти ряд розподілу випадкової величини ξ, що характеризує кількість неякісно зброшурованих екземплярів та ймовірність того, що бракованих примірників буде більше п’яти.

57. Автоматична телефонна станція обслуговує 10000 телефонних номерів. Протягом однієї хвилини на АТС приходить в середньому виклик від чотирьох абонетів. Знайти ряд розподілу випадкової величини ξ, яка дорівнює кількості викликів, які надійшли на АТС протягом 1 хв, та ймовірність того, що за цей час надійде хоча б один виклик.

58. Менеджер подає заявку на продукцію чотири рази. Можливий результат «успіх» або «невдача» з однаковими ймовірностями. Скласти закон розподілу кількості «невдач».

59. Задано закон розподілу дискретної випадкової величини ξ.

x_k	-4	-3	-2	0	1
p_k	a	a	$5a$	a	a

Знайти a, записати функцію розподілу $F_\xi(x)$ і побудувати її графік.

60. Задано закон розподілу дискретної випадкової величини ξ.

x_k	1	2	3	4
p_k	0,4	0,3	0,2	0,1

Записати функцію розподілу $F_\xi(x)$ і побудувати її графік.

ЛЕКЦІЯ №7

НЕПЕРЕРВНІ ВИПАДКОВІ ВЕЛИЧИНИ (НВВ). СПОСОБИ ЗАДАННЯ. ЩІЛЬНІСТЬ РОЗПОДІЛУ

В багатьох прикладних задачах виникає потреба розглядати ВВ, значення яких неперервно заповнюють деякий проміжок, або декілька проміжків. Для дослідження таких ВВ використовують поняття неперервної випадкової величини.

7.1. Способи задання НВВ. Щільність розподілу

Поведінку випадкової величини, у тому числі і неперервної, можна описати за допомогою функції розподілу $F_\xi(x)$ (див. Лекція №6, пп.6.3). Нагадаємо, що функція розподілу неперервної випадкової величини $F_\xi(x)$ є неперервною. Іноколи неперервну випадкову величину крім функції розподілу можна задати також її іншою характеристикою, яка має назву щільність розподілу.

Випадкова величина ξ називається ***абсолютно неперервною***, якщо існує неперервна або кусково-неперервна (яка на будь-якому скінченому проміжку має тільки скінчену кількість розривів I роду) функція $f_\xi(x)$, така, що функція розподілу має вигляд:

$$F_\xi(x) = \int_{-\infty}^{x} f_\xi(t)\,dt \quad . \tag{7.1}$$

Функція $f_\xi(x)$ має назву ***щільність розподілу*** (або ***диференціальна функція розподілу***). А функцію розподілу $F_\xi(x)$ називають ще ***інтегральною функцією розподілу.***

У точках неперервності функції $f_\xi(x)$ за теоремою Барроу отримаємо:

$$f_\xi(x) = F'_\xi(x) \quad . \tag{7.2}$$

Знаючи щільність розподілу $f_\xi(x)$, інтегруванням можна знайти функцію розподілу ВВ $F_\xi(x)$.

Нехай функція розподілу $F_\xi(x) = P\{\xi < x\}$ є неперервною і диференційовною. Розглянемо її похідну.

$$f_\xi(x) = F'_\xi(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta F_\xi}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F_\xi(x+\Delta x) - F_\xi(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{P\{x \le \xi < x+\Delta x\}}{\Delta x}.$$

Як бачимо, $f_\xi(x)$ є границею відношення ймовірності потрапляння ВВ у проміжок $[x, x+\Delta x)$ до довжини цього проміжку, коли $\Delta x \to 0$.

У подальшому ми будемо мати справу тільки з абсолютно неперервними випадковими величинами, тобто такими, для яких існує функція щільності. Для спрощення будемо називати їх ***неперервними.***

Формули (7.1) та (7.2), що пов'язують функцію розподілу та функцію щільності неперервної величини, дозволяють, знаючи одну з них, відновити другу. Отже, неперервну випадкову величину можна задати за допомогою функції розподілу $F_\xi(x)$ або за допомогою функції щільності $f_\xi(x)$.

7.2. Властивості щільності розподілу

1^o ***Функція щільності набуває тільки невід'ємних значень:***

$$f_\xi\left(x\right) \ge 0, \forall x \in R.$$

Доведення: $f_\xi(x) = F'_\xi(x)$, а $F_\xi\ (x)$ – неспадна (за властивістю 2^0 функції розподілу (див. пп. 6.3)), звідси $F'_\xi(x) \ge 0$.

2^o Виконується ***умова нормування*** :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_\xi(t)\,dt = 1 \quad . \tag{7.3}$$

Доведення. Оскільки, за формулою (7.2) $F_\xi(x) = \int_{-\infty}^{x} f_\xi(t)\,dt$, а за властивістю 3^0 функції розподілу (див. пп. 6.3) $F_\xi(+\infty) = 1$, то $F_\xi(+\infty) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_\xi(t)\,dt = 1.$

3^o ***Ймовірність потрапляння випадкової величини у півінтервал*** $[\alpha;\beta)$ знаходять за формулою:

$$P\left\{\alpha \le \xi < \beta\right\} = \int_{\alpha}^{\beta} f_\xi(x)\,dx \quad . \tag{7.4}$$

Доведення.

$$P\left\{\alpha \le \xi < \beta\right\} = \left|\begin{matrix}\text{за формулою}\\ (6.2)\end{matrix}\right| = F_\xi\left(\beta\right) - F_\xi\left(\alpha\right) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\beta} f_\xi(x)\,dx - \int_{-\infty}^{\alpha} f_\xi(x)\,dx = \int_{\alpha}^{\beta} f_\xi(x)\,dx.$$

4^0 Імовірність настання події $\left\{\xi = a\right\}, a \in R$***, якщо*** ξ ***є неперервною ВВ, дорівнює нулю.***

Доведення. Подія $\left\{\xi = a\right\}$ є підмножиною події $\left\{\xi \in [a; a+\varepsilon)\right\}, \varepsilon > 0$. Тоді $0 \le P\left\{\xi = a\right\} \le P\left\{\xi \in [a;a+\varepsilon)\right\} = F_\xi(a+\varepsilon) - F_\xi(a)$.

Перейдемо до границі, коли $\varepsilon \to 0$. Оскільки функція розподілу є неперервною, то $\lim\limits_{\varepsilon\to\infty}(F_\xi(a+\varepsilon) - F_\xi(a)) = 0$. Отже,

$$P\left\{\xi = \alpha\right\} = 0.$$

Наслідок. Імовірність потрапляння неперервної випадкової величини у проміжок з кінцями α та β , незалежно від того чи є цей проміжок замкненим відрізком, інтервалом або півінтервалом, дорівнює інтегралу від функції щільності в межах від α до β :

$$P(\alpha \le \xi < \beta) = P(\alpha < \xi < \beta) = P(\alpha < \xi \le \beta) = P(\alpha \le \xi \le \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f_{\xi}(x)\,dx. \qquad (7.5)$$

Геометричний зміст рівностей (7.4), (7.5) полягає в тому, що ймовірність потрапляння випадкової величини у проміжок з кінцями α та β чисельно дорівнює площі криволінійної трапеції, що обмежена функцією щільності $f_{\xi}(x)$, віссю *Ox* та прямими $x = \alpha, \quad x = \beta$.

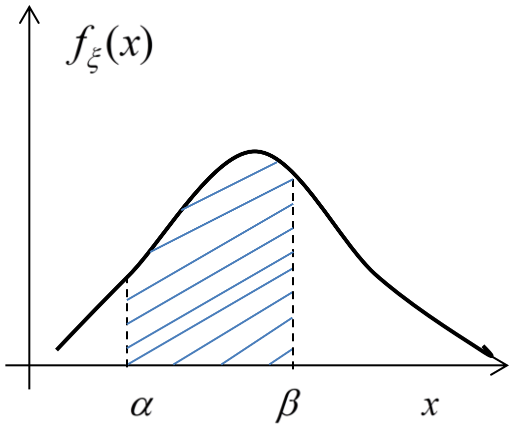


Рис. 7.1.

Графік функції $y = f_{\xi}(x)$ називається ***кривою розподілу ймовірностей*** або кривою розподілу. Якщо значення НВВ $\xi \in [\alpha;\beta]$, то $f_{\xi}(x) = 0$ для $x < \alpha$, а також для $x > \beta$.

7.3. Приклади деяких стандартних розподілів НВВ

7.3.1. Рівномірний розподіл НВВ

Неперервна випадкова величина називається ***рівномірно розподіленою***, якщо її функція щільності:

$$f_{\xi}(x) = \begin{cases} 0, x \notin [a;b] \\ c, x \in [a;b] \end{cases}, \quad \text{де } c = const .$$

Для знаходження константи ***c*** використаємо умову нормування:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi}(x)\,dx = 1 \qquad \Rightarrow \qquad \int_{-\infty}^{a} f_{\xi}(x)\,dx + \int_{a}^{b} f_{\xi}(x)\,dx + \int_{b}^{\infty} f_{\xi}(x)\,dx = 1$$

$$\int_{a}^{b} c\,dx = 1 \quad \Rightarrow \quad cx\Big|_{a}^{b} = 1 \quad \Rightarrow \quad c(b-a) = 1 \quad \Rightarrow \quad c = \frac{1}{b-a}.$$

Отже, функція щільності рівномірно розподіленої випадкової величини має

вигляд: $f_{\xi}(x) = \begin{cases} 0, \ x \notin [a;b] \\ \dfrac{1}{b-a}, \ x \in [a;b] \end{cases}$.

Графік функції щільності:

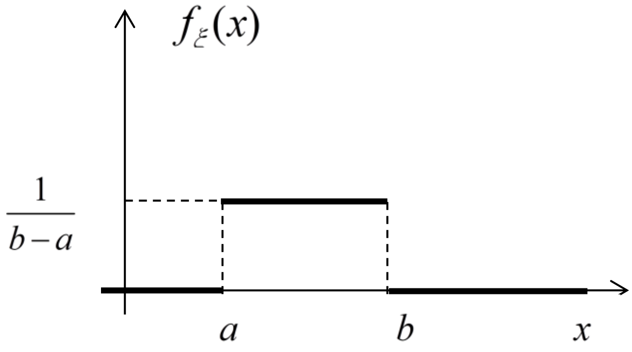


Рис. 7.2.

Знайдемо функцію розподілу. Якщо $x \le a$, то $F_\xi(x) = 0$. Якщо $x > b$, то $F_\xi(x) = 1$. Якщо $a < x \le b$, то:

$$F_\xi(x) = \int_{-\infty}^{x} f_\xi(t)\,dt = \int_{a}^{x} f_\xi(t)\,dt = \int_{a}^{x} \frac{1}{b-a}\,dt = \frac{x-a}{b-a}.$$

Отже, функція рівномірного розподілу має вигляд:

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, x \le a \\ \dfrac{x-a}{b-a}, x \in (a;b] \\ 1, x > b \end{cases}.$$

Графік функції розподілу:

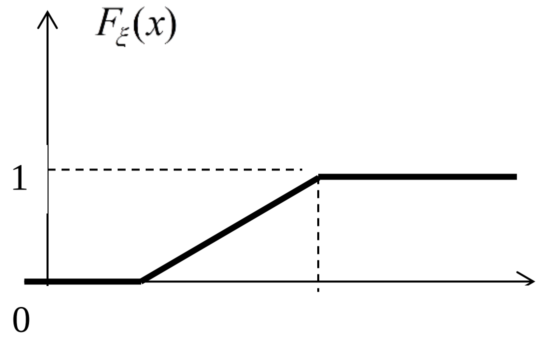


Рис. 7.3.

Приклад 7.1. На відрізку $[a,b]$ з‘являється точка, всі положення якої рівноможливі. Випадкова величина ξ – абсциса точки, є рівномірно розподіленою неперервною випадковою величиною. Неважко побачити, що ймовірність потрапляння точки у будь-які два відрізки однакової довжини, що належать $[a,b]$, є однаковою, ця ймовірність пропорційна довжині відрізків. Імовірність того, що на відрізку $[a,b]$ з'явиться точка з точною координатою $x_0 \in [a,b]$, є нульовою. З практичної точки зору така ситуація може здатися парадоксальною. Подія, що полягає в тому, що точка потрапить точно в положення x_0 є цілком можливою, але ймовірність цієї події дорівнює 0.

Для неперервних величин така властивість є характерною. Ймовірність того, що неперервна величина ξ набуває певного значення x_0, є нульовою (див.4^0, пп.7.2).

7.3.2. Показниковий розподіл

Неперервна випадкова величина ξ є ***показниково розподіленою***, якщо її щільність розподілу задана у вигляді:

$f_\xi(x) = \begin{cases} 0, x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x}, x \ge 0 \end{cases}$, де $\lambda > 0$ – параметр розподілу.

Перевіримо, що виконується умова нормування:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_\xi(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} f_\xi(x)\,dx + \int_{0}^{\infty} f_\xi(x)\,dx = 0 + \int_{0}^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x}dx = -e^{-\lambda x}\Big|_0^{+\infty} = e^0 \equiv 1.$$

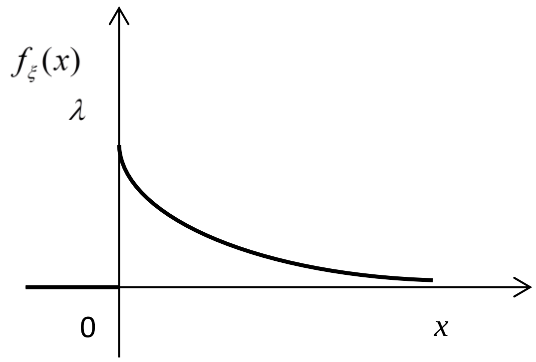
Знайдемо функцію розподілу НВВ. Якщо $x \le 0$, то $F_\xi(x) = 0$. Якщо $x > 0$, тоді

$$F_\xi(x) = \int_{-\infty}^{x} f_\xi(t)\,dt = \int_{-\infty}^{0} f_\xi(t)\,dt + \int_{0}^{x} f_\xi(t)\,dt = 0 + \int_{0}^{x} \lambda e^{-\lambda t}dt = -e^{-\lambda t}\Big|_0^{x} = 1 - e^{-\lambda x}.$$

Отже, функція розподілу:

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, x \le 0 \\ 1 - e^{-\lambda x}, x > 0 \end{cases}$$

Графіки функції щільності $f_\xi(x)$ та функції розподілу $F_\xi(x)$ мають вигляд:



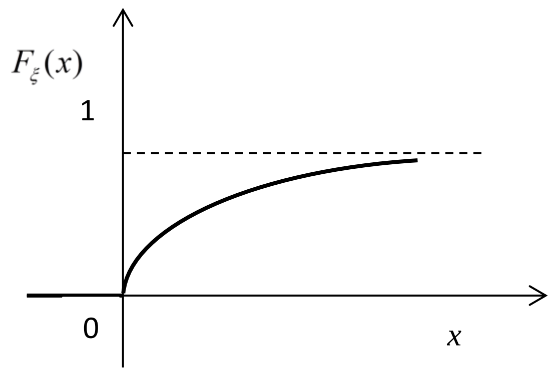


Рис. 7.4.

Ймовірність того, що випадкова величина ξ , яка розподілена за показниковим законом, набуде значень з інтервалу (α, β), $\alpha, \beta > 0$, дорівнює:

$$P\left(\alpha \le \xi < \beta\right) = \int_{\alpha}^{\beta} f_{\xi}(x)\,dx = \lambda \int_{\alpha}^{\beta} e^{-\lambda x}\,dx = e^{-\lambda\alpha} - e^{-\lambda\beta}.$$

Приклад 7.2. Неперервна ВВ ξ – час безвідмовної роботи приладу є прикладом показниково розподіленої випадкової величини. Функція надійності $R(t) = e^{-\lambda t}$, визначає ймовірність безвідмовної роботи приладу час t, параметр λ – інтенсивність відмов.

7.3.3. Нормальний розподіл

Випадкова величина ξ називається ***нормально розподіленою*** з параметрами a, σ $(\sigma > 0)$, якщо її щільність розподілу задається формулою:

$$f_{\xi}\left(x\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot e^{\frac{-\left(x-a\right)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in R.$$

Для нормально розподіленої випадкової величини ξ з параметрами a, σ використовують позначення $\xi \sim N\left(a;\sigma\right)$. Зокрема, якщо $a = 0, \sigma = 1$, то $\xi^0 \sim N\left(0;1\right)$, такий розподіл називають стандартним. Щільність розподілу стандартної нормально розподіленої ВВ $f_{\xi^0}\left(x\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{\frac{-x^2}{2}} = \varphi\left(x\right)$ є функцією Гауса. Для функції Гауса складено таблиці (див. Додаток 1).

Розглянемо загальний випадок, нехай $\xi \sim N\left(a;\sigma\right)$. Тоді нормована випадкова величина $\xi^0 = \frac{\xi - a}{\sigma} \sim N(0,1)$ має стандартний нормальний розподіл. Функцію щільності $\xi \sim N\left(a;\sigma\right)$ можна подати через функцію Гауса:

$$f_{\xi}\left(x\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot e^{\frac{-\left(x-a\right)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{\frac{-\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)^2}{2}} = \frac{1}{\sigma} \cdot \varphi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right).$$

Також функція розподілу:

$$F_{\xi}(x) = \int_{-\infty}^{x} f_{\xi}(t)\,dt = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot e^{\frac{-\left(t-a\right)^2}{2\sigma^2}} dt = \frac{1 \cdot \sigma}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{x} e^{\frac{-\left(\frac{t-a}{\sigma}\right)^2}{2}} d\left(\frac{t-a}{\sigma}\right) =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \dfrac{t-a}{\sigma} = z \\ t \to -\infty \Rightarrow z \to -\infty \\ t \to x \Rightarrow z \to \dfrac{x-a}{\sigma} \end{array} \right| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x-a}{\sigma}} e^{\frac{-z^2}{2}} dz = \int_{-\infty}^{\frac{x-a}{\sigma}} \varphi(t)\,dt = F_{\xi}\left(\frac{x-a}{\sigma}\right) =$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{0}e^{\frac{-z^2}{2}}dz+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\frac{x-a}{\sigma}}e^{\frac{-z^2}{2}}dz=\frac{1}{2}+\Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right),$$ де $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt$ – функція Лапласа, значення якої можна знайти з відповідної таблиці (див. Додаток 2).

Знайдемо ймовірність того, що ВВ $\xi \sim N(a;\sigma)$ потрапляє в інтервал $[\alpha;\beta)$.

$$P(\alpha\le\xi<\beta)=F_\xi(\beta)-F_\xi(\alpha)=\frac{1}{2}+\Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right)-\frac{1}{2}-\Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right)=$$

$$=\Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right).$$

Отже,

$$P(\alpha\le\xi<\beta)=\Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right) \qquad (7.6)$$

Знайдемо ймовірність того, що випадкова величина відхиляється від положення a не більше, ніж на ε.

$$P(|\xi-a|<\varepsilon)=P(a-\varepsilon<\xi<a+\varepsilon)=\Phi\left(\frac{a+\varepsilon-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{a-\varepsilon-a}{\sigma}\right)=$$

$$=\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{-\varepsilon}{\sigma}\right)=2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right)$$

Маємо,

$$P(|\xi-a|<\varepsilon)=2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right) \qquad (7.7)$$

Інтеграл Пуассона *(для самостійного опрацювання)*

Довести, що $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}$.

Доведення. Розглянемо подвійний інтеграл:

$\iint_D e^{-(x^2+y^2)}dxdy=\int_{-a}^{a}dx\int_{-a}^{a}e^{-(x^2+y^2)}dy=\int_{-a}^{a}e^{-x^2}dx\int_{-a}^{a}e^{-y^2}dy=\left(\int_{-a}^{a}e^{-x^2}dx\right)^2$, де $D:\begin{cases}-a\le x\le a\\-a\le y\le a\end{cases}$ - квадрат,

$D_1: x^2+y^2\le a^2$ - вписане в квадрат коло, $D_2: x^2+y^2\le 2a^2$ - описане коло, $D_1\subset D\subset D_2$.

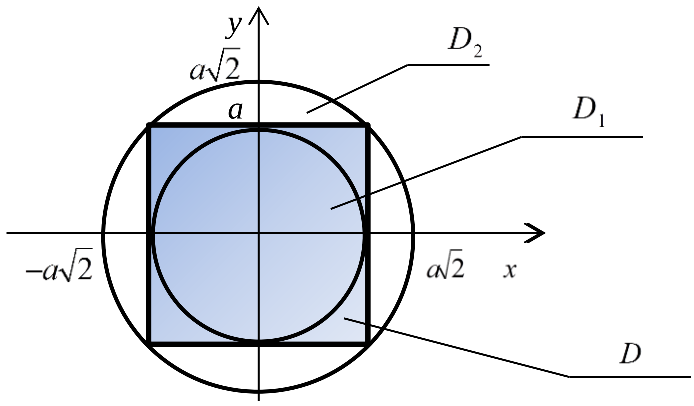


Рис. 7.5.

$$\iint\limits_{D_1} e^{-(x^2+y^2)}dxdy \le \left(\int\limits_{-a}^{a} e^{-x^2}dx\right)^2 \le \iint\limits_{D_2} e^{-(x^2+y^2)}dxdy \;.$$

Обчислимо один з інтегралів:

$$\iint\limits_{D_1} e^{-(x^2+y^2)}dxdy = \begin{vmatrix} ПСК: x=\rho\cos\varphi \\ y=\rho\sin\varphi \\ dxdy=\rho d\rho d\varphi \end{vmatrix} = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{a} e^{-\rho^2}\rho d\rho = 2\pi\int\limits_0^{a}\left(-\frac{1}{2}e^{-\rho^2}\right)d\left(-\rho^2\right) =$$

$$= 2\pi\left(-\frac{1}{2}\left(e^{-a^2}-1\right)\right) = \pi\left(1-e^{-a^2}\right)$$

Аналогічно: $\iint\limits_{D_2} e^{-(x^2+y^2)}dxdy = \pi\left(1-e^{-2a^2}\right)$.

Отже, $\pi\left(1-e^{-a^2}\right) \le \left(\int\limits_{-a}^{a} e^{-x^2}dx\right)^2 \le \pi\left(1-e^{-2a^2}\right)$. Перейдемо до границі, коли $a\to\infty$. Тоді за теоремою про проміжну функцію отримаємо: $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$.

Наслідки.

1. $\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$
2. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}dx = \sqrt{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2} d\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2\pi}$
3. $\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{2}$

Перевірте виконання умови нормування для $\xi \sim N(a;\sigma)$ самостійно.

Нехай $\xi \sim N(a,\sigma)$, тобто $f_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma}\cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$. Графік функції щільності нормального розподілу має вигляд (на рис. показано два графіка для різних $\sigma_2 < \sigma_1$):

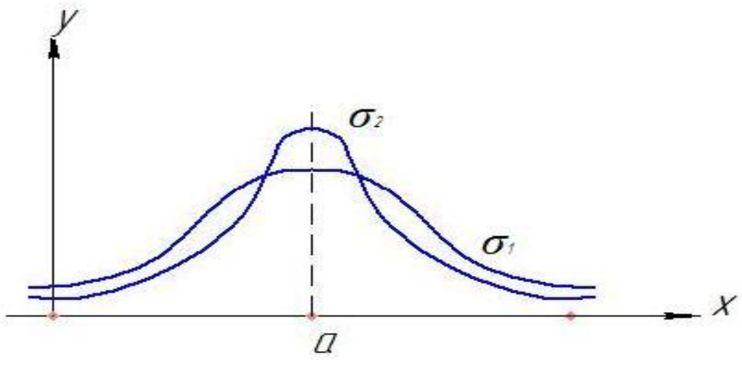


Рис. 7.6.

Точка $x=a$ є точкою максимуму функції $f_\xi(x)$, графік якої є симетричним відносно цієї точки. Точками перегину цього графіка є точки $x=a-\sigma$ та $x=a+\sigma$. При зменшенні σ графік стає більш "гостровершинним". Площа під кривою графіка щільності (згідно з умовою нормування) дорівнює 1.

Правило «трьох сигм»

У формулі (7.7) надамо величині ε різних значень.
Нехай $\varepsilon = \sigma$, тоді $P(|\xi - a| < \sigma) = 2\Phi(1) = 2 \cdot 0,3413 = 0,6826$;
якщо $\varepsilon = 2\sigma$, $P(|\xi - a| < 2\sigma) = 2\Phi(2) = 2 \cdot 0,47722 = 0,9544$;
якщо $\varepsilon = 3\sigma$, $P(|\xi - a| < 3\sigma) = 2\Phi(3) = 2 \cdot 0,49865 = 0,9973$.

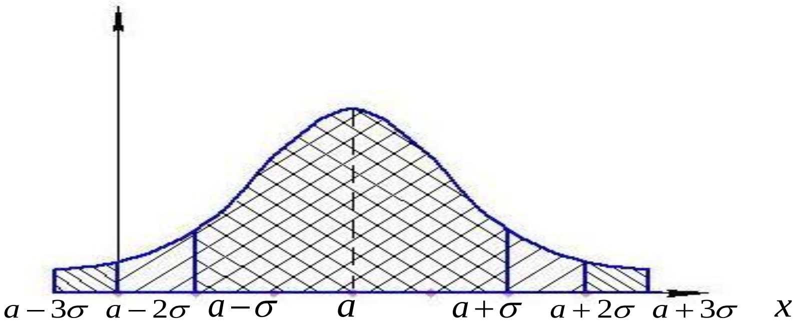


Рис. 7.7.

«Правило трьох сигм» полягає в тому, що ймовірність того, що нормально розподілена випадкова величина віддалена від центрального положення a менше, ніж на 3σ, практично дорівнює 1.

Запитання для самоконтролю

1. *Які випадкові величини ми називаємо неперервними?*
2. *Наведіть два основні способи задання неперервної випадкової величини.*
3. *Назвіть властивості функції щільності.*
4. *Подайте ймовірність потрапляння випадкової величини в інтервал через функцію щільності.*
5. *Як, знаючи функцію розподілу, визначити функцію щільності?*
6. *Як подати функцію розподілу НВВ через функцію щільності?*
7. *Наведіть приклади стандартних неперервних розподілів та задайте їх за допомогою функції щільності.*

Практичне заняття №7
НЕПЕРЕРВНІ ВИПАДКОВІ ВЕЛИЧИНИ. СПОСОБИ ЇХ ЗАДАННЯ

Приклади розв'язування задач

Задача 7.1. Неперервна випадкова величина ξ задана функцією щільності

$$f_\xi(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x+2}}{a}, x\in(-2;7],\\ 0, \qquad x\notin(-2;7].\end{cases}$$

Необхідно:

1) знайти a;
2) побудувати графік щільності $y=f_\xi(x)$;
3) знайти функцію розподілу $F_\xi(x)$;
4) знайти ймовірність попадання випадкової величини ξ у заданий проміжок $(\alpha;\beta)$, $P(\alpha<\xi<\beta)-?$, $\alpha=5,\ \beta=6{,}5.$

Розв'язання. 1) Скористаємося умовою нормування функції щільності (7.3), отримаємо $\int\limits_{-2}^{7}\frac{\sqrt{x+2}}{a}dx=1.$ Звідси $a=18$. Отже функція щільності має вигляд:

$$f_\xi(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x+2}}{18}, \quad x\in(-2;7],\\ 0, \qquad\quad x\notin(-2;7].\end{cases}$$

2) Графік функції щільності

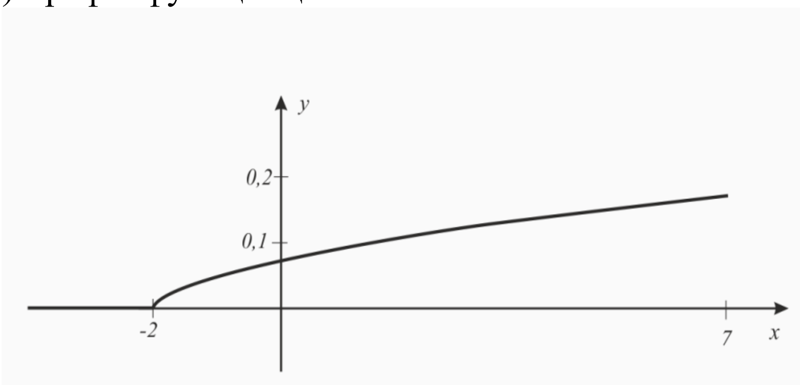


Рис. 7.8.

3) Для знаходження функції розподілу скористаємося (7.2).

Нехай $x\le-2$,тоді $F_\xi(x)=\int\limits_{-\infty}^{x}f(t)dt=\int\limits_{-\infty}^{x}0dt=0$;

якщо $-2<x\le7,$ *то* $F_\xi(x)=\int\limits_{-\infty}^{-2}0dt+\int\limits_{-2}^{x}\frac{\sqrt{t+2}}{18}dt=\frac{1}{27}(t+2)^{\frac{3}{2}}\Big|_{-2}^{x}=\frac{1}{27}\sqrt{(x+2)^3}$;

якщо $x>7$ то $F_\xi(x)=\int\limits_{-\infty}^{-2}0dt+\int\limits_{-2}^{7}\frac{\sqrt{t+2}}{18}dt+\int\limits_{7}^{x}0dt=1.$

Отже функція розподілу має вигляд $F_\xi(x)=\begin{cases}0, & x\le -2,\\ \frac{1}{27}\sqrt{(x+2)^3}, & -2<x\le 7,\\ 1, & x>7.\end{cases}$

4) Ймовірність попадання в інтервал (5; 6,5) знайдемо користуючись формулою (6.2).

$$P(5\le\xi\le 6,5)=F_\xi(6,5)-F_\xi(5)=\frac{1}{27}\left(\sqrt{8,5^3}-\sqrt{7^3}\right)\approx 0,23.$$

Задача 7.2. Неперервна випадкова величина ξ задана функцією розподілу

$F_\xi(x)=\begin{cases}0, & x\le 1,\\ a(x^2-x), & 1<x\le 2,\\ 1, & x>2.\end{cases}$ необхідно:

1) знайти a;
2) побудувати графік функції розподілу $y=F_\xi(x)$;
3) знайти функцію щільності $f_\xi(x)$;
4) знайти ймовірність попадання випадкової величини ξ у заданий проміжок $(\alpha;\beta)$, $P(\alpha<\xi<\beta)$, якщо $\alpha=0,5,\ \beta=1,5$.

Розв'язання. 1) Скористаємося властивістю неперервності функції розподілу $F_\xi(b)=1$, тобто $F_\xi(2)=1$. Отримаємо $a=\frac{1}{2}$, і функція розподілу матиме вигляд:

$$F_\xi(x)=\begin{cases}0, & x\le 1,\\ \frac{1}{2}(x^2-x), & 1<x\le 2,\\ 1, & x>2.\end{cases}$$

2) Графік функції розподілу

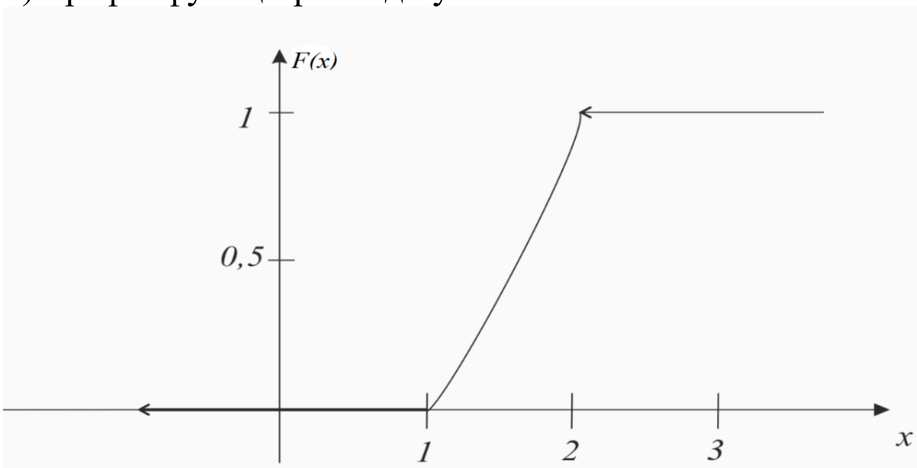


Рис. 7.9.

3) Функція щільності – похідна від функції розподілу. Тому

$$f_\xi(x) = F_\xi'(x) = \begin{cases} 0, & x \le 1, \\ \dfrac{1}{2}(2x-1), & 1 < x \le 2, \\ 0, & x > 2. \end{cases}$$

4) Ймовірність потрапляння в інтервал (0,5; 1,5) знайдемо користуючись функцією розподілу та формулою (6.2):

$$P(0{,}5 \le x \le 1{,}5) = F(1{,}5) - F(0{,}5) = \frac{1}{2}\left(2{,}25 - 1{,}5\right) = 0{,}375.$$

Завдання для самостійного виконання

61-64. Випадкова величина ξ задана функцією розподілу $F_\xi(x)$. Необхідно:

1) знайти c;

2) побудувати графік функції розподілу $y = F_\xi(x)$;

3) знайти функцію щільності $f_\xi(x)$;

4) знайти ймовірність потрапляння випадкової величини ξ у заданий проміжок $(\alpha;\beta)$, $P(\alpha < \xi < \beta)$.

61. $F_\xi\left(x\right) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ c \cdot \sqrt{x}, & 0 < x \le 9, \\ 1, & x > 9, \end{cases}$ $\quad \alpha = 1, \beta = 10.$

62. $F_\xi\left(x\right) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ c \cdot x^2, & 0 < x \le 1, \\ 1, & x > 1, \end{cases}$ $\quad \alpha = -2, \beta = 2.$

63. $F_\xi\left(x\right) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ c \cdot \sin 2x, & 0 < x \le \dfrac{\pi}{4}, \\ 1, & x > \dfrac{\pi}{4}, \end{cases}$ $\quad \alpha = 0, \beta = \dfrac{\pi}{6}.$

64. $F_\xi\left(x\right) = \begin{cases} 0, & x \le -2, \\ c \cdot \left(\dfrac{x}{2} + 1\right), & -2 < x \le 2, \\ 1, & x > 2, \end{cases}$ $\quad \alpha = -2, \beta = 1.$

65-68. Випадкова величина ξ задана функцією щільності $f_\xi(x)$. Необхідно:

1) знайти c;

2) побудувати графік щільності $y = f_\xi(x)$;

3) знайти функцію розподілу $F_\xi(x)$;

4) знайти ймовірність потрапляння випадкової величини ξ у заданий проміжок $(\alpha;\beta)$, $P(\alpha < \xi < \beta)$.

65. $f_\xi(x) = \begin{cases} \dfrac{c}{\sqrt{x+3}}, x \in (-3;1], \\ 0, \quad x \notin (-3;1], \end{cases}$ $\alpha = -4,\ \beta = 1.$

66. $f_\xi(x) = \begin{cases} c \cdot \cos 2x, x \in \left(0; \dfrac{\pi}{4}\right], \\ 0, \quad x \notin \left(0; \dfrac{\pi}{4}\right], \end{cases}$ $\alpha = \dfrac{\pi}{6},\ \beta = \dfrac{\pi}{4}.$

67. $f_\xi(x) = \begin{cases} cx^2 + 6x - \dfrac{45}{4}, x \in (3;5], \\ 0, \quad x \notin (3;5], \end{cases}$ $\alpha = 3,\ \beta = 4{,}5.$

68. $f_\xi(x) = \begin{cases} c \cdot (x-5)(x+1), x \in (-1;5], \\ 0, \quad x \notin (-1;5], \end{cases}$ $\alpha = -1,\ \beta = 2.$

69. Випадкова величина ξ має показниковий розподіл з параметром $\lambda = 2$. Знайти ймовірність того, що випадкова величина потрапить у проміжок $(a;b)$, якщо:

а) $a = -2, b = -1$; б) $a = 2, b = 3$; в) $a = -2, b = 2$.

70. Продукція макаронної фабрики пакується в мішки. Вага одного мішка – випадкова величина, що має нормальний розподіл з параметрами $a = 12$ кг і $\sigma = 0{,}14$ кг. Визначити ймовірність того, що вага чергового мішка:

а) перебуватиме в межах від 11,96 до 12,06 кг; б) не перевищуватиме 12,06 кг.

ЛЕКЦІЯ № 8

ЧИСЛОВІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН

Досі ми розглядали характеристики випадкових величин, які є функціональними: це функція розподілу, щільність розподілу, закон розподілу. Ці характеристики містять всю інформацію про випадкову величину, визначають розподіл однозначно. За відомим розподілом можна знайти числові характеристики, які, взагалі, не визначають розподіл однозначно, але дають певне уявлення про даний розподіл. Такими числовими характеристиками є: математичне сподівання, дисперсія та середнє квадратичне відхилення.

8.1. Математичне сподівання випадкової величини

8.1.1. Математичне сподівання дискретної випадкової величини

Нехай задано дискретну випадкову величину (ДВВ) ξ , що набуває значень $x_1, x_2,..., x_n,...$ з ймовірностями $P\{\xi = x_k\} = p_k,\ k = 1,...,n,...$.

Математичним сподіванням (або ***середнім***) ДВВ ξ називається число, яке дорівнює сумі добутків всіх її можливих значень на відповідні ймовірності. Позначається одним із символів: $M(\xi), M_\xi,\ m_\xi$.

Якщо множина значень ДВВ є зліченною, то математичне сподівання:

$$M(\xi) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k \qquad (8.1)$$

за умови, що такий ряд є абсолютно збіжним.

Якщо множина можливих значень ДВВ є скінченною, то математичне сподівання можна знайти за формулою:

$$M(\xi) = \sum_{k=1}^{n} x_k p_k\ . \qquad (8.2)$$

Приклад 8.1. Нехай ДВВ ξ задана рядом розподілу:

x_k	1	2	5
p_k	0,3	0,4	0,3

Знайдемо математичне сподівання ДВВ за формулою (8.2):

$M(\xi)=1\cdot 0,3+2\cdot 0,4+5\cdot 0,3=0,3+0,8+1,5=2,6$. Отримане значення є середнім значенням випадкової величини ξ .

8.1.2. Математичне сподівання неперервної випадкової величини

Математичне сподівання неперервної випадкової величини (НВВ) ξ, яка задана функцією щільності $f_\xi(x)$, знаходять за формулою:

$$M(\xi)=\int_{-\infty}^{+\infty} x\cdot f_\xi(x)\,dx \tag{8.3}$$

за умови абсолютної збіжності невласного інтеграла.

Зокрема, якщо ξ набуває можливих значень тільки з відрізку $[a,b]$, то

$$M(\xi)=\int_{a}^{b} x\cdot f_\xi(x)\,dx \tag{8.4}$$

Зміст математичного сподівання полягає в тому, що математичне сподівання є середнім значенням випадкової величини.

8.1.3. Властивості математичного сподівання

Розглянемо властивості математичних сподівань дискретних ВВ.

1^0 ***Математичне сподівання сталої величини дорівнює цій сталій:***

$$M(c)=c.$$

Доведення. Сталу c можна розглядати як випадкову величину, що набуває значення c з ймовірністю 1. Тоді, для ДВВ:

$$M(c)=\sum_k x_k p_k = c\cdot 1=c.$$

2^0 ***Сталий множник можна винести за знак математичного сподівання:***

$$M(c\xi)=cM_\xi.$$

Доведення: $M(c\cdot\xi)=\sum_k (c\cdot x_k)\cdot p_k = c\sum_k x_k\cdot p_k = c\cdot M_\xi$.

3^0 *Математичне сподівання суми двох випадкових величин дорівнює сумі математичних сподівань доданків:*

$$M(\xi+\eta)=M_{\xi}+M_{\eta}.$$

Наслідки.

1. Математичне сподівання суми сталої величини c і ДВВ ξ дорівнює сумі математичного сподівання ДВВ ξ і сталої c. Тобто,

$$M(\xi+c)=M_{\xi}+c.$$

2. Математичне сподівання має властивість лінійності:

$$M(c_1\cdot\xi+c_2)=c_1\cdot M_{\xi}+c_2,\quad c_1,c_2=const\ .$$

3. Математичне сподівання суми скінченого числа випадкових величин дорівнює сумі їх математичних сподівань:

$$M(\xi_1+\xi_2+...+\xi_n)=M_{\xi_1}+M_{\xi_2}+...+M_{\xi_n}\ .$$

4^0 *Математичне сподівання добутку незалежних випадкових величин*

Дискретні випадкові величини ξ,η називаються ***незалежними***, якщо незалежними є події $\{\xi=x_k\}$ та $\{\eta=y_i\}$ для всіх (x_k,y_i). Тоді $p_{ki}=P\{\xi=x_k,\eta=y_i\}=P\{\xi=x_k\}\cdot P\{\eta=y_i\}=p_k\cdot q_i$, $k,i=1,...,n,...$.

Нехай дискретні випадкові величини ξ,η є *незалежними* зі скінченими математичними сподіваннями M_{ξ},M_{η}. Математичне сподівання випадкової величини $\xi\cdot\eta$, що є добутком даних величин та набуває значень $x_k y_i$ з ймовірностями $p_{ki}=p_k q_i$, дорівнює:

$$M(\xi\cdot\eta)=\sum_{k,i=1}^{\infty}x_k y_i\cdot p_{ki}=\sum_{k,i=1}^{\infty}x_k y_i\cdot p_k q_i=\sum_{k=1}^{\infty}x_k p_k\cdot\sum_{i=1}^{\infty}y_i q_i=M_{\xi}\cdot M_{\eta}.$$

Математичне сподівання добутку двох незалежних випадкових величин дорівнює добутку їх математичних сподівань:

$$M(\xi\cdot\eta)=M_{\xi}\cdot M_{\eta}.$$

Наслідок. Математичне сподівання добутку скінченого числа незалежних випадкових величин дорівнює добутку їх математичних сподівань:

$$M(\xi_1 \cdot \xi_2 \cdot \ldots \cdot \xi_n) = M_{\xi_1} \cdot M_{\xi_2} \cdot \ldots \cdot M_{\xi_n},$$

за умови, що математичні сподівання у правій частині існують та є скінченними.

Поки ми розглянули означення незалежності лише для дискретних випадкових величин, пізніше розглянемо більш універсальне означення, що справджується для будь-яких ВВ.

Зауваження. Всі розглянуті нами властивості математичних сподівань виконуються як для дискретних, так і для неперервних випадкових величин.

8.2. Дисперсія випадкової величини

8.2.1. Означення дисперсії випадкової величини

Дисперсією дискретної випадкової величини ξ називається число, яке дорівнює математичному сподіванню квадрата відхилення випадкової величини від її математичного сподівання і позначається $D(\xi)$ або D_ξ:

$$D(\xi) = D_\xi = M\left\{(\xi - M_\xi)^2\right\} \tag{8.5}$$

Дисперсія характеризує "розсіювання" випадкової величини відносно її математичного сподівання. Чим менше дисперсія, тим тісніше значення випадкової величини групуються відносно її середнього значення, вираженого математичним сподіванням.

Наведемо ще одну формулу для обчислення $D(\xi)$.

Твердження. Дисперсія ВВ $D(\xi)$ дорівнює різниці між математичним сподіванням квадрата випадкової величини ξ та квадратом її математичного сподівання:

$$D(\xi) = D_\xi = M(\xi^2) - (M_\xi)^2. \tag{8.6}$$

Дійсно,

$$D_\xi = M\left\{(\xi - M_\xi)^2\right\} = M\left\{\xi^2 - 2\xi M_\xi + {M_\xi}^2\right\} = M(\xi^2) - M(2 \cdot \xi \cdot M_\xi) + M(M_\xi^2) =$$

$$= M(\xi^2) - 2 \cdot M(\xi) \cdot M(\xi) + {M_\xi}^2 = M(\xi^2) - {M_\xi}^2.$$

Формула (8.6) на практиці є зручнішою для обчислень у порівнянні з формулою (8.5).

8.2.2. Знаходження дисперсії дискретної випадкової величини

Якщо множина значень ДВВ є зліченною, то дисперсію можна знайти за формулами:

$$D(\xi) = \sum_{k=1}^{\infty} (x_k - M_\xi)^2 p_k \tag{8.7}$$

Або

$$D(\xi) = \sum_{k=1}^{\infty} (x_k{}^2 p_k) - (M_\xi)^2 \text{ (за умови збіжності рядів).} \tag{8.8}$$

У випадку скінченної дискретної випадкової величини її дисперсію можна знайти за однією із формул:

$$D(\xi) = \sum_{k=1}^{n} (x_k - M_\xi)^2 p_k \ . \tag{8.9}$$

Або

$$D(\xi) = \sum_{k=1}^{n} x_k{}^2 p_k - M_\xi{}^2 \ . \tag{8.10}$$

Приклад 8.2. Обчислити дисперсію ДВВ, заданої рядом розподілу:

x_k	1	2	5
p_k	0,3	0,4	0,3

Розв'язання. Спочатку знайдемо математичне сподівання ДВВ за формулою (8.1):

$M(\xi) = 1 \cdot 0,3 + 2 \cdot 0,4 + 5 \cdot 0,3 = 0,3 + 0,8 + 1,5 = 2,6$.

Тепер обчислимо дисперсію.

I спосіб. За формулою (8.9):

$D(\xi) = D_\xi = M\left\{(\xi - 2,6)^2\right\} = (1-2,6)^2 \cdot 0,3 + (2-2,6)^2 \cdot 0,4 + (5-2,6)^2 \cdot 0,3 = 2,64$.

II спосіб. За формулою (8.10):

$D(\xi) = D_\xi = M\left\{\xi^2\right\} - M_\xi{}^2 = 1^2 \cdot 0,3 + 2^2 \cdot 0,4 + 5^2 \cdot 0,3 - 2,6^2 = 2,64$.

Отже, за формулами (8.9) та (8.10) отримали одне й те саме значення $D_\xi = 2,64$.

8.2.3. Знаходження дисперсії неперервної випадкової величини

Дисперсія неперервної випадкової величини визначається так само, як і у випадку дискретної випадкової величини, за формулою (8.5).

Якщо НВВ ξ задана функцією щільності $f_{\xi}(x)$, то

$$D(\xi) = D_{\xi} = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M_{\xi})^2 \cdot f_{\xi}(x)dx \qquad (8.11)$$

(за умови абсолютної збіжності інтеграла).

Якщо НВВ ξ, яка задана функцією щільності $f_{\xi}(x)$, набуває можливих значень з відрізку $[a,b]$, то $D(\xi)$ знаходять за формулою

$$D(\xi) = D_{\xi} = \int_{a}^{b} (x - M_{\xi})^2 \cdot f_{\xi}(x)dx \quad . \qquad (8.12)$$

Дисперсію неперервної випадкової величини також можна знаходити за формулою

$$D(\xi) = D_{\xi} = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f_{\xi}(x)dx - (M_{\xi})^2 \qquad (8.13)$$

Приклад 8.3. Знайти значення *A* та обчислити математичне сподівання та дисперсію НВВ, заданої функцією щільності:

$$f_{\xi}(x) = \begin{cases} Ax, \; x \in [0;1] \\ A, \; x \in (1;3] \\ 0, \; x \notin [0;3] \end{cases} .$$

Розв'язання. Застосуємо умову нормування

$$\int_0^3 f_{\xi}(x)\, dx = \int_0^1 Ax\, dx + \int_1^3 A\, dx = \frac{A}{2} + 2A = \frac{5}{2}A = 1 .$$

Звідки $A = \frac{2}{5}$. Отже, $f_{\xi}(x) = \begin{cases} \frac{2}{5}x, \; x \in [0;1] \\ \frac{2}{5}, \; x \in (1;3] \\ 0, \; x \notin [0;3] \end{cases}$.

Математичне сподівання знайдемо за формулою (8.4):

$$M_{\xi} = \int_0^3 x\, f_{\xi}(x)dx = \int_0^1 x \cdot \frac{2}{5}x\,dx + \int_1^3 x \cdot \frac{2}{5}dx = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{5} \cdot (\frac{9}{2} - \frac{1}{2}) = \frac{26}{15} .$$

Дисперсію знайдемо за формулою (8.12):

$$D_\xi = \int_0^1 \left(x - \frac{26}{15} \right)^2 \cdot \frac{2}{5} x\, dx + \int_1^3 \left(x - \frac{26}{15} \right)^2 \cdot \frac{2}{5} dx =$$

$$= \frac{2}{5} \left(\int_0^1 \left(x^3 - \frac{26}{15} x^2 + \frac{676}{225} x \right)^2 dx + \int_1^3 \left(x^2 - \frac{26}{15} x + \frac{676}{225} \right)^2 dx \right) = \frac{253}{450}.$$

За формулою (8.13):

$$D_\xi = \int_0^3 x^2 \ f_\xi(x)\, dx - M_\xi{}^2 = \int_0^1 x^2 \cdot \frac{2}{5} x\, dx + \int_1^3 x^2 \cdot \frac{2}{5} dx - \left(\frac{26}{15} \right)^2 =$$

$$= \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} + \frac{2}{5} \cdot \left(9 - \frac{1}{3} \right) - \left(\frac{26}{15} \right)^2 = \frac{1}{10} + \frac{52}{15} - \frac{676}{225} = \frac{45 + 1560 - 1352}{450} = \frac{253}{450}.$$

8.2.4. Властивості дисперсії

1^0 *Дисперсія сталої величини c дорівнює нулю,* тобто $D(c) = 0$**.** Дійсно, оскільки $M(c) = c$, тому $c - M(c) = 0$, отже, $D(c) = M(0) = 0.$

2^0 *Дисперсія ДВВ ξ є невід'ємною величиною,* тобто $D(\xi) \geq 0$**.**

Дійсно, оскільки величина $(\xi - M(\xi))^2$ набуває невід'ємних значень, тому математичне сподівання цієї величини також є невід'ємним, отже, $D(\xi) \geq 0.$

3^0 *Сталий множник можна винести за знак дисперсії, підносячи його до квадрату,* тобто $D(c \cdot \xi) = c^2 \cdot D_\xi$.

Доведення.

$$D(c \cdot \xi) = M\left\{ (c \cdot \xi - c \cdot M_\xi)^2 \right\} = M\left\{ c^2 \cdot (\xi - M_\xi)^2 \right\} = c^2 \cdot M\left\{ (\xi - M_\xi)^2 \right\} = c^2 D_\xi .$$

4^0 *Дисперсія суми двох незалежних ВВ ξ та η дорівнює сумі їх дисперсій,* тобто $D(\xi + \eta) = D(\xi) + D(\eta)$**.**

Наслідок 1. Дисперсія суми скінченної кількості незалежних ВВ $\xi_1, ..., \xi_n$ дорівнює сумі їх дисперсій, тобто $D(\xi_1 + ... + \xi_n) = D(\xi_1) + ... + D(\xi_n)$.

***Наслідок** 2.* Дисперсія суми сталої величини c і випадкової величини ξ дорівнює дисперсії випадкової величини ξ: $D(\xi + c) = D(\xi)$. Отже, зміщення випадкової величини не змінює її дисперсії.

Зауваження. Всі розглянуті нами властивості дисперсії виконуються як для дискретних, так і для неперервних випадкових величин.

8.3. Середнє квадратичне відхилення

Середнім квадратичним відхиленням випадкової величини називається число σ_ξ, що визначається рівністю:

$$\sigma_\xi = \sigma(\xi) = \sqrt{D_\xi}\ . \qquad (8.14)$$

Середнє квадратичне відхилення суми скінченого числа взаємно незалежних випадкових величин дорівнює:

$$\sigma(\xi_1 + \xi_2 + ... + \xi_n) = \sqrt{\sigma^2(\xi_1) + \sigma^2(\xi_2) + ... + \sigma^2(\xi_n)}\ .$$

Приклад 8.4. За умовою приклада 8.2 знайти середнє квадратичне відхилення ДВВ ξ .

Розв'язання. Оскільки ми знайшли, що $D(\xi) = 2,64$, то $\sigma_\xi = \sqrt{D_\xi} = \sqrt{2,64} \approx 1,62$.

Приклад 8.5. За умовою приклада 8.3 знайти середнє квадратичне відхилення НВВ ξ.

Розв'язання. $\sigma_\xi = \sqrt{D_\xi} = \sqrt{\dfrac{253}{450}} \approx 0,75$.

Середнє квадратичне відхилення σ_ξ характеризує розсіювання випадкової величини ξ відносно математичного сподівання. Крім того, на відміну від дисперсії, воно вимірюється в тих самих одиницях, в яких вимірюється ξ.

Запитання для самоконтролю

1. Назвіть основні числові характеристики випадкових величин.

2. Як знайти математичне сподівання дискретної випадкової величини?

3. Як знайти математичне сподівання неперервної випадкової величини?

4. Які властивості має математичне сподівання випадкової величини?

5. Дайте означення дисперсії випадкової величини.

6. Наведіть формули для обчислення дисперсії дискретної випадкової величини.

7. Наведіть формули для обчислення дисперсії неперервної випадкової величини.

8. Які властивості має дисперсія випадкової величини?

9. Що називається середнім квадратичним відхиленням випадкової величини?

Практичне заняття №8
ЧИСЛОВІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН

Приклади розв'язування задач

Задача 8.1. Дано закон розподілу дискретної випадкової величини ξ, можливі значення якої та відповідні їм ймовірності записано в таблиці:

ξ	0	1	2	3
p_k	0,1	0,2	0,3	0,4

Обчислити числові характеристики $M(\xi)$, $D(\xi)$, $\sigma(\xi)$.

Розв'язання. Знайдемо числові характеристики випадкової величини, користуючись формулами (8.2), (8.9) або (8.10), (8.14), отримаємо $M(\xi)=2$, $D(\xi)=1$, $\sigma(\xi)=1$

Задача 8.2. Дано перелік можливих значень дискретної випадкової величини ξ : $x_1= -1$, $x_2=0$, $x_3=1$, а також $M(\xi)=0{,}1, M(\xi^2)=0{,}9$. Знайти ймовірності p_1, p_2, p_3, які відповідають можливим значенням x_1, x_2, x_3.

Розв'язання. Користуючись тим, що сума ймовірностей усіх можливих значень ξ дорівнює одиниці, а також враховуючи, що $M(\xi)=0{,}1$, $M(\xi^2)=0{,}9$, отримаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} p_1+p_2+p_3=1 \\ -p_1+p_3=0{,}1 \\ 1^2 p_1+(-1)^2 p_3=0{,}9 \end{cases}$$

Розв'язуючи цю систему методом Гауса, Крамера або матричним, отримаємо: $p_1=0{,}4$, $p_2=0{,}1$, $p_3=0{,}5$.

Задача 8.3. Дано закони розподілу незалежних випадкових величин ξ,η.

ξ	-1	0	1
p_i	0,2	0,3	0,5

η	0	1	2	3
q_j	0,1	0,2	0,3	0,4

а) Скласти закони розподілу для $(\xi+\eta)$, $(\xi\cdot\eta)$, $(\xi-\eta)$ та обчислити $M(\xi)$ $M(\eta)$, $D(\xi)$, $D(\eta)$, $\sigma(\xi)$, $\sigma(\eta)$;

б) перевірити виконання рівностей:

$M(\xi+\eta)=M(\xi)+M(\eta)$, $M(\xi-\eta)=M(\xi)-M(\eta)$,

$M(\xi\cdot\eta)=M(\xi)\cdot M(\eta)$, $D(\xi+\eta)=D(\xi)+D(\eta)=D(\xi-\eta)$.

Розв'язання. а) Складемо допоміжну таблицю.

№ з/п	ξ	η	$\xi+\eta$	$\xi\cdot\eta$	$\xi-\eta$	Ймовірність відповідного результату
1	-1	0	-1	0	-1	$0,2\cdot 0,1=0,02$
2	-1	1	0	-1	-2	$0,2\cdot 0,2=0,04$
3	-1	2	1	-2	-3	$0,2\cdot 0,3=0,06$
4	-1	3	2	-3	-4	$0,2\cdot 0,4=0,08$
5	0	0	0	0	0	$0,3\cdot 0,1=0,03$
6	0	1	1	0	-1	$0,3\cdot 0,2=0,06$
7	0	2	2	0	-2	$0,3\cdot 0,3=0,09$
8	0	3	3	0	-3	$0,3\cdot 0,4=0,12$
9	1	0	1	0	1	$0,5\cdot 0,1=0,05$
10	1	1	2	1	0	$0,5\cdot 0,2=0,1$
11	1	2	3	2	-1	$0,5\cdot 0,3=0,15$
12	1	3	4	3	-2	$0,5\cdot 0,4=0,2$

Запишемо тепер розподіли $(\xi+\eta)$, $(\xi\cdot\eta)$ та $(\xi-\eta)$

$\xi+\eta$	-1	0	1	2	3	4
p	0,02	0,07	0,17	0,27	0,27	0,2

$\xi\cdot\eta$	-3	-2	-1	0	1	2	3
p	0,08	0,06	0,04	0,37	0,1	0,15	0,20

$\xi-\eta$	-4	-3	-2	-1	0	1
p	0,08	0,18	0,33	0,23	0,13	0,05

Знайдемо числові характеристики випадкових величин, користуючись формулами (8.2), (8.9), (8.14), отримаємо $M(\xi)=0,3$, $M(\eta)=2$, $D(\xi)=0,61$, $\sigma(\xi)\approx 0,78$, $D(\eta)=1$, $\sigma(\eta)=1$, $M(\xi+\eta)=2,3$, $M(\xi-\eta)=-1,7$, $M(\xi\eta)=0,6$, $D(\xi+\eta)=1,61$, $D(\xi-\eta)=1,61$.

Отримані результати свідчать про правильність вказаних в умові рівностей.

Задача 8.4. Неперервна випадкова величина ξ задана функцією щільності

$$f_\xi(x)=\begin{cases} c\cdot x(2-x), x\in(0;2], \\ 0, \qquad x\notin(0;2]. \end{cases}$$

Необхідно: 1) знайти значення *c*;

2) знайти функцію розподілу $F_\xi(x)$;

3) обчислити числові характеристики випадкової величини ξ $\left(M_\xi, D_\xi, \sigma_\xi\right)$

4) знайти ймовірність потрапляння випадкової величини ξ у заданий інтервал $(\alpha;\beta)$, $P(\alpha<\xi<\beta)$, якщо $\alpha=0{,}5,\ \beta=4.$

Розв'язання.

1) Скористаємося умовою нормування функції щільності, отримаємо: $\int_0^2 cx(2-x)dx=1.$ Звідки $c=3/4$. Отже, функція щільності має вигляд:

$$f_\xi(x)=\begin{cases}\dfrac{3x(2-x)}{4}, x\in(0;2],\\ 0, \quad x\notin(0;2].\end{cases}$$

2) Знайдемо функцію розподілу.

Нехай $x\le 0$,тоді $F_\xi(x)=\int_{-\infty}^{x} f_\xi(t)dt=\int_{-\infty}^{x} 0dt=0$;

якщо $0<x\le 2,$ то $F_\xi(x)=\int_{-\infty}^{0} 0dt+\int_0^x \dfrac{3t(2-t)}{4}dt=\dfrac{3}{4}\left(t^2-t^3/3\right)\Big|_0^x=\dfrac{3x^2-x^3}{4}$;

якщо $x>2$ то $F_\xi(x)=\int_{-\infty}^{0} 0dt+\int_0^2 \dfrac{3t(2-t)}{4}dt+\int_2^x 0dt=1.$

Отже, функція розподілу має вигляд $F_\xi(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ \dfrac{3x^2-x^3}{4}, & 0<x\le 2,\\ 1, & x>2.\end{cases}$

3) Математичне сподівання $M_\xi=\int_a^b x\cdot f_\xi(x)dx=\int_0^2 x\cdot\dfrac{3(2x-x^2)}{4}dx=1$.

Дисперсію обчислимо за формулою

$$D_\xi=\int_a^b x^2 f_\xi(x)dx-M_\xi{}^2=\int_0^2 x^2\cdot\frac{3(2x-x^2)}{4}dx-1^2=\frac{6}{5}-1=\frac{1}{5}.$$

Середнє квадратичне відхилення $\sigma_\xi=\sqrt{D_\xi}=\sqrt{\dfrac{1}{5}}\approx 0{,}448$.

4) Імовірність потрапляння в інтервал (0,5; 4):

$$P(0{,}5<x<4)=\int_\alpha^\beta f_\xi(x)dx=\int_{0{,}5}^{2}\frac{3x(2-x)}{4}dx+\int_2^4 0\cdot dx=\left(\frac{3x^2}{4}-\frac{x^3}{4}\right)\Bigg|_{0{,}5}^{2}=$$

$$=3-2-\frac{3}{16}+\frac{1}{32}\approx 0{,}844.$$

Або $P(0{,}5<x<4)=F(\beta)-F(\alpha)=F(4)-F(0{,}5)=1-0{,}156\approx 0{,}844.$

Завдання для самостійного виконання

71. Дискретна випадкова величина ξ набуває трьох можливих значень $x_1 = 1,\ x_2$ та x_3, при цьому $x_1 < x_2 < x_3$. Ймовірності того, що ξ набуде значень x_1 та x_2 дорівнює 0,3 і 0,2 відповідно. Знайти закон розподілу величини ξ, якщо математичне сподівання $M(\xi) = 2,2,$ а дисперсія $D(\xi) = 0,76$.

72. Дискретна випадкова величина має два можливих значення x_1 та x_2: $x_1 < x_2$. Знайти закон розподілу випадкової величини ξ, якщо p_1 =0,4, $M(\xi)$= 4,6, $D(\xi)$= 0,64.

73-76. Дано закони розподілу незалежних дискретних випадкових незалежних величин ξ та η.

ξ	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
p_i	a	a	$5a$	a	$2a$

η	y_1	y_2	y_3	y_4
q_j	0,4	0,3	0,1	0,2

Потрібно:

а) записати закони розподілу $2\xi,\ \xi+\eta,\ \xi\eta,\ \xi-\eta$;

б) знайти числові характеристики випадкових величин: $M(\xi),\ D(\xi),$ $\sigma(\xi),\ M(\eta),\ D(\eta), \sigma(\eta)$.

№ завдання	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	y_1	y_2	y_3	y_4
73	0	1	2	3	4	-8	-7	-6	-5
74	1	2	3	4	5	-7	-6	-5	-4
75	2	3	4	5	6	-6	-5	-4	-3
76	-10	-9	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2

У завданнях **77-80** випадкову величину ξ задано функцією щільності $f_\xi(x)$. Знайти c та обчислити числові характеристики випадкової величини ξ: $M(\xi), D(\xi), \sigma(\xi)$:

77. $f_\xi(x) = \begin{cases} \dfrac{c}{\sqrt{x+3}}, x \in (-3;1], \\ 0, \qquad x \notin (-3;1], \end{cases}$ **78.** $f_\xi(x) = \begin{cases} x-c, x \in (1;2], \\ 0, \qquad x \notin (1;2], \end{cases}$.

79. $f_\xi(x) = \begin{cases} c \cdot \cos 2x, x \in \left(0; \dfrac{\pi}{4}\right], \\ 0, \qquad x \notin \left(0; \dfrac{\pi}{4}\right], \end{cases}$ **80.** $f_\xi(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{c}, x \in (0;2], \\ 0, \quad x \notin (0;2] \end{cases}$.

ЛЕКЦІЯ №9

ЧИСЛОВІ ХАРАКТЕРИСТИКИ СТАНДАРТНИХ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН

На прикладах стандартних випадкових величин покажемо, як можна знайти математичне сподівання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення.

9.1. Знаходження числових характеристик стандартних дискретних розподілів

9.1.1. Рівномірний розподіл ДВВ

Рівномірно розподілена ДВВ ξ задається рядом розподілу:

ξ	x_1	x_2	...	x_n
p_k	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$	...	$\frac{1}{n}$

Отже, $M_{\xi} = x_1 \cdot \frac{1}{n} + x_2 \cdot \frac{1}{n} + x_3 \cdot \frac{1}{n} + \ldots + x_n \cdot \frac{1}{n} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n}{n}$ – середнє арифметичне значення чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

9.1.2. Біноміальний розподіл

Біноміально розподілена ДВВ ξ набуває значень $0, 1, \ldots, n$ з імовірністями $p_k = P(\xi = k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}$. Математичне сподівання ξ :

$$M(\xi) = \sum_{k=0}^{n} x_k \cdot p_k = \sum_{k=0}^{n} k \cdot C_n^k \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} .$$

Безпосереднє обчислення такої суми має певні труднощі, тому запропонуємо наступний спосіб розв'язання.

Розглянемо ВВ $\xi_k, k = 1, \ldots, n$, які набувають значення 1, якщо подія A відбулась при k-тому випробуванні, 0 – якщо подія A не відбулась. Тобто ξ_k є індикаторами події A при k-тому випробуванні:

$$\xi_k = \begin{cases} 1, & \text{якщо } A \\ 0, & \text{якщо } \bar{A} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} P(\xi_k = 1) = p \\ P(\xi_k = 0) = q = 1 - p \end{array}$$

Тоді $\xi = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n$.

Знайдемо математичне сподівання та дисперсію величин $\xi_k, k=1,...,n$:

$M(\xi_k)=1\cdot p+0\cdot q=p$;

$D(\xi_k)=M(\xi_k{}^2)-M^2_{\xi_k}=1^2\cdot p+0^2\cdot q-p^2=p-p^2=p(1-p)=pq$;

Тоді

$$M(\xi)=M(\xi_1+\xi_2+...+\xi_n)=\sum_{k=1}^{n}M(\xi_k)=\sum_{k=1}^{n}p=n\cdot p.$$

$$D(\xi)=D(\xi_1+\xi_2+..+\xi_n)=D(\xi_1)+D(\xi_2)+..+D(\xi_n)=npq.$$

Отже, для біноміально розподіленої випадкової величини $M_\xi=np,\ D_\xi=npq$.

9.1.3. Розподіл Пуассона

Випадкова величина ξ, що розподілена за законом Пуассона, набуває значень $0,1,2,...,n,...$, з ймовірностями $P(\xi=k)=\frac{\lambda^k}{k!}\cdot e^{-\lambda}$, де λ -параметр розподілу, $\lambda>0$. Знайдемо математичне сподівання такої випадкової величини.

$$M_\xi=\sum_{k=0}^{\infty}k\cdot\frac{\lambda^k}{k!}\cdot e^{-\lambda}=e^{-\lambda}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}k\cdot\frac{\lambda^k}{k!}=e^{-\lambda}\cdot\lambda\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}=$$

$$=e^{-\lambda}\cdot\lambda\cdot(1+\frac{\lambda}{1!}+\frac{\lambda^2}{2!}+...+\frac{\lambda^n}{n!}+...)=e^{-\lambda}\cdot\lambda\cdot e^{\lambda}=\lambda.$$

Знайдемо дисперсію.

$$D_\xi=M(\xi^2)-M_\xi{}^2=\sum_{m=0}^{\infty}m^2\cdot\frac{\lambda^m}{m!}\cdot e^{-\lambda}-\lambda^2=e^{-\lambda}\lambda\cdot\sum_{m=1}^{\infty}m\cdot\frac{\lambda^{m-1}}{(m-1)!}-\lambda^2=$$

$$=e^{-\lambda}\lambda\cdot\sum_{m=1}^{\infty}(m-1+1)\cdot\frac{\lambda^{m-1}}{(m-1)!}-\lambda^2=$$

$$=e^{-\lambda}\lambda\cdot\sum_{m=1}^{\infty}(m-1)\cdot\frac{\lambda^{m-1}}{(m-1)!}+e^{-\lambda}\lambda\cdot\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\lambda^{m-1}}{(m-1)!}-\lambda^2=$$

$$=e^{-\lambda}\lambda^2\cdot\sum_{m=2}^{\infty}\frac{\lambda^{m-2}}{(m-2)!}+e^{-\lambda}\lambda\cdot e^{\lambda}-\lambda^2=e^{-\lambda}\lambda^2\cdot e^{\lambda}+\lambda-\lambda^2=\lambda$$

Тобто, $M_\xi=\lambda,\ D_\xi=\lambda$ – для величини, розподіленої за законом Пуассона.

9.1.4. Геометричний розподіл

Якщо ДВВ ξ має геометричний розподіл, то вона набуває значень 1,2,3,… з імовірностями $p_k = P(\xi = k) = q^{k-1} \cdot p,$ $(k = 1, 2, 3, ...)$ (див.6.4.4).

Математичне сподівання:

$$M(\xi) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \cdot p_k = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot p \cdot (1-p)^{k-1} = p(1 + 2q + 3q^2 + ... + kq^{k-1} + ...).$$

Для знаходження суми цього ряду почленно продиференцюємо по q ряд: $S(q) = 1 + q + q^2 + ... + q^n + ... = \dfrac{1}{1-q}$ (при $0 < q < 1$),

отримаємо

$$S'(q) = 1 + 2q + ... + nq^{n-1} + ... = \frac{1}{(1-q)^2}.$$

Тоді $M(\xi) = p \cdot \dfrac{1}{(1-q)^2} = \dfrac{1}{p}.$

Аналогічні міркування, разом з почленним диференціюванням ряду ще раз, показують, що:

$$M(\xi^2) = 1^2 \cdot p + 2^2 \cdot q \cdot p + ... + n^2 \cdot q^{n-1} \cdot p + ... = p\frac{(1+q)}{(1-q)^3} = \frac{1+q}{p^2}.$$

Дисперсія: $D(\xi) = M(\xi^2) - M^2(\xi) = \dfrac{1+q}{p^2} - \dfrac{1}{p^2} = \dfrac{q}{p^2}.$

Отже, для геометрично розподіленої випадкової величини $M_\xi = \dfrac{1}{p},\ D_\xi = \dfrac{q}{p^2}.$

9.2. Знаходження числових характеристик стандартних неперервних розподілів

9.2.1. Неперервний рівномірний розподіл

Нехай ξ – рівномірно розподілена на відрізку $[a;b]$ неперервна випадкова величина, функція щільності якої:

$$f_\xi(x)=\begin{cases} 0, & x\notin[a;b] \\ \dfrac{1}{b-a}, & x\in[a;b]\end{cases}$$

Знайдемо математичне сподівання:

$$M(\xi)=\int_{-\infty}^{+\infty} x\cdot f_\xi(x)dx=\int_{-\infty}^{a} x\cdot f_\xi(x)dx+\int_{a}^{b} x\cdot f_\xi(x)dx+\int_{b}^{+\infty} x\cdot f_\xi(x)dx=\int_{a}^{b} x\cdot f_\xi(x)dx=$$

$$=\int_a^b x\cdot\frac{1}{b-a}dx=\frac{1}{b-a}\cdot\left(\frac{b^2}{2}-\frac{a^2}{2}\right)=\frac{b+a}{2}$$

Отже, $M(\xi)$ – середнє арифметичне кінців відрізка $[a;b]$.

Знайдемо дисперсію:

$$D_\xi=M(\xi^2)-(M(\xi))^2=\int_{-\infty}^{\infty} x^2\cdot f_\xi(x)dx-\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=$$

$$=\int_a^b x^2\cdot\frac{1}{b-a}dx-\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=\frac{1}{b-a}\cdot\frac{b^3-a^3}{3}-\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=\frac{(b-a)^2}{12}.$$

Отже, дисперсія $D_\xi=\dfrac{(b-a)^2}{12}$, а середнє квадратичне відхилення $\sigma_\xi=\dfrac{b-a}{2\sqrt{3}}$.

9.2.2. Показниковий розподіл

Нехай ξ – показниково розподілена випадкова величина із щільністю

$f_\xi(x)=\begin{cases} 0, & x<0 \\ \lambda\cdot e^{-\lambda x}, & x\ge 0\end{cases}$, де параметр $\lambda>0$.

Знайдемо математичне сподівання:

$$M(\xi)=\int_{-\infty}^{+\infty} x\cdot f_\xi(x)dx=\int_{-\infty}^{0} x\cdot f_\xi(x)dx+\int_{0}^{+\infty} x\cdot f_\xi(x)dx=\int_{0}^{+\infty} x\cdot\lambda\cdot e^{-\lambda x}dx=$$

$$=\lambda\cdot\int_0^{+\infty} x\cdot e^{-\lambda x}dx=\lambda\cdot\lim_{b\to+\infty}\cdot\int_0^b x\cdot e^{-\lambda x}dx=\left|\begin{matrix} u=x & dv=e^{-\lambda x}dx \\ du=dx & v=-\dfrac{1}{\lambda}e^{-\lambda x} \\ \int udv=uv-\int vdu & \end{matrix}\right|=$$

$$=\lambda \lim_{b\to+\infty}(-x\cdot\frac{1}{\lambda}\cdot e^{-\lambda x}\Big|_0^b+\frac{1}{\lambda}\int_0^b e^{-\lambda x}dx)=\lambda\cdot\lim_{b\to+\infty}(-b\cdot\frac{1}{\lambda}\cdot e^{-\lambda b}+\frac{1}{\lambda}\cdot(-\frac{1}{\lambda})\cdot e^{-\lambda x}\Big|_0^b)=$$

$$=\lambda \lim_{b\to+\infty}(-e^{-\lambda b}\cdot\frac{b}{\lambda}-\frac{1}{\lambda^2}\cdot e^{-\lambda b}+\frac{1}{\lambda^2})=\left|\lim_{b\to+\infty}(-e^{-\lambda b}\cdot\frac{b}{\lambda})=\lim_{b\to+\infty}\frac{b}{\lambda\cdot e^{\lambda b}}=0\right|=\lambda\cdot\frac{1}{\lambda^2}=\frac{1}{\lambda}.$$

Знайдемо дисперсію:

$$D_\xi=M(\xi^2)-M_\xi^{\ 2}=\int_{-\infty}^{\infty}x^2\cdot f_\xi(x)dx-\left(\frac{1}{\lambda}\right)^2=\int_0^{\infty}x^2\cdot e^{-\lambda x}dx-\left(\frac{1}{\lambda}\right)^2=$$

$$=\begin{vmatrix} u=x^2 & dv=e^{-\lambda x}dx \\ du=2xdx & v=\dfrac{e^{-\lambda x}}{-\lambda}\end{vmatrix}=\lambda\cdot\left(\frac{2}{\lambda}\cdot\frac{1}{\lambda^2}\right)-\frac{1}{\lambda^2}=\frac{2}{\lambda^2}-\frac{1}{\lambda^2}=\frac{1}{\lambda^2}.$$

Маємо $M(\xi)=\dfrac{1}{\lambda}$, $D_\xi=\dfrac{1}{\lambda^2}$, $\sigma_\xi=\dfrac{1}{\lambda}$, де λ – параметр розподілу.

Приклад 9.1. Спостереження за часом безвідмовної роботи приладу показали, що його середнє значення дорівнює 5 год. Вказати функцію щільності випадкової величини ξ – час безвідмовної роботи приладу.

Розв'язання. Випадкова величина ξ – час безвідмовної роботи приладу має показниковий розподіл (див. пп. 7.2.2). Оскільки $t_{сер}=5\,год.\Rightarrow\lambda=\dfrac{1}{5}$, тоді функція щільності

$$f_\xi(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \dfrac{1}{5}\cdot e^{-\frac{x}{5}}, & x\ge 0\end{cases}.$$

9.2.3. Нормальний розподіл

Нехай $\xi\sim N(a,\sigma)$ – нормально розподілена ВВ, щільність якої

$$f_\xi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma}e^{\frac{-(x-a)^2}{2\sigma^2}},\ x\in R.$$

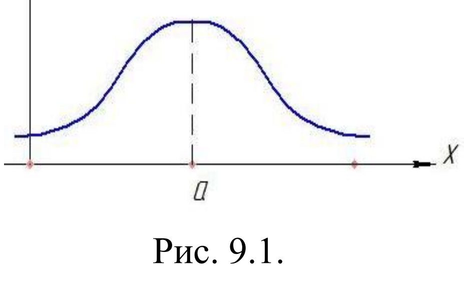


Рис. 9.1.

Знайдемо математичне сподівання:

$$M_{\xi}=\int_{-\infty}^{+\infty}x\cdot f_{\xi}(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}x\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma}\cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx=$$

$$=\left|\begin{array}{ll} \text{заміна}\,\dfrac{x-a}{\sigma}=z & \Rightarrow x=\sigma z+a \quad dx=\sigma dz \\ x\Rightarrow+\infty & x\Rightarrow-\infty \\ z\Rightarrow+\infty & z\Rightarrow-\infty \end{array}\right|=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\sigma z+a\right)\cdot e^{-\frac{z^2}{2}}\cdot\sigma dz=$$

$$=\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}z\cdot e^{-\frac{z^2}{2}}dz+\frac{a}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{z^2}{2}}dz=0+\frac{a}{\sqrt{2\pi}}\cdot\sqrt{2\pi}=a\,.$$

(Перший інтеграл тут дорівнює нулю як збіжний інтеграл від непарної функції по симетричному проміжку. Другий – інтеграл Ейлера-Пуассона, який ми розглядали раніше).

Знайдемо дисперсію:

$$D_{\xi}=M((\xi-M_{\xi})^2)=\int_{-\infty}^{\infty}\left(x-M_{\xi}\right)^2\cdot f_{\xi}(x)\,dx=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}(x-a)^2\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma}\cdot e^{\frac{-(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx=\left|\begin{array}{l} \text{Заміна}\quad \dfrac{x-a}{\sqrt{2}\cdot\sigma}=z \\ dx=\sqrt{2}\sigma dz \\ x\to\infty \quad\Rightarrow\quad z\to\infty \end{array}\right|=$$

$$=\frac{2\sigma^2}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty}z^2e^{-z^2}\sqrt{2}\sigma\,dz=\frac{2\sigma^2}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}z^2e^{-z^2}dz=\frac{-\sigma^2}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}z\;e^{-z^2}d(-z^2)=$$

$$\left|\begin{array}{ll} u=z & dv=e^{-z^2}d(-z^2) \\ du=dz & v=e^{-z^2} \end{array}\right|=\frac{-\sigma^2}{\sqrt{\pi}}\cdot(-\sqrt{\pi})=\sigma^2$$

$$D_{\xi}=\sigma^2 \quad\Rightarrow\quad \sigma_{\xi}=\sigma\,.$$

Отже, для нормально розподіленої ВВ $\xi\sim N(a,\sigma)$ параметри a,σ є, відповідно, її середнім значенням $M(\xi)=a$ та середнім квадратичним відхиленням $\sigma_{\xi}=\sigma$.

9.3. Інші числові характеристики випадкових величин

Модою Mo випадкової величини ξ називають її найбільш ймовірне значення (для якого ймовірність p_i або щільність ймовірності $f_{\xi}(x)$ досягає максимуму), тобто

$$Mo = x_0 \to \begin{cases} f_\xi(x_0) = \max f_\xi(x) - \quad \textit{для НВВ} \\ P\{\xi = x_0\} = \max - \quad \textit{для ДВВ} \end{cases}$$

Для нормального розподілу $N(a,\sigma)$ мода $Mo = a$.

Медіана неперервного розподілу Me – це таке значення аргументу x^*, що ймовірність того, що величина ξ менша за x^* дорівнює $\frac{1}{2}$, також, ймовірність того, що величина ξ більша за x^* дорівнює $\frac{1}{2}$.

$$Me = x^*, \text{ якщо } P(\xi < x^*) = P(\xi > x^*) = \frac{1}{2}.$$

Початковим моментом порядку k ВВ ξ називається величина

$$\alpha_k = M\left(\xi^k\right), \ (k = 1,2,...n).$$

Зокрема,

$k = 1; \alpha_1 = M(\xi) -$ *математичне сподівання* ξ;

$k = 2; \alpha_2 = M(\xi^2)$

$k = 3; \alpha_3 = M(\xi^3)$.

Центральним моментом порядку k ВВ ξ називається величина

$$\beta_k = M\left((\xi - M_\xi)^k\right), \ (k = 1,2,....,n).$$

Зокрема,

$k = 1;\ \beta_1 = M(\xi - M_\xi) = M(\xi) - M(M_\xi) = M(\xi) - M(\xi) = 0$;

$k = 2;\ \beta_2 = M(\xi - M_\xi)^2 = D_\xi$ *(дисперсія* ξ*);*

$k = 3;\ \beta_3 = M(\xi - M_\xi)^3$.

Центральні моменти виражаються через початкові моменти: $\beta_2 = \alpha_2 - \alpha_1^2$; $\beta_3 = \alpha_3 - 3\alpha_1\alpha_2 + 2\alpha_1^2$, тощо.

Асиметрія. Третій центральний момент характеризує симетрію закону розподілу випадкової величини. Якщо випадкова величина симетрично розподілена відносно свого середнього значення, то $\beta_3 = 0$.

Оскільки β_3 має розмірність випадкової величини в кубі, то вводять безрозмірну величину – ***коефіцієнт асиметрії***:

$$As = \frac{\beta_3}{\sigma^3}.$$

Для нормального розподілу коефіцієнт асиметрії дорівнює 0, оскільки розподіл є симетричним відносно середнього значення $a = M_\xi$. Для одномодальних розподілів коефіцієнт асиметрії $As > 0$, якщо мода розподілу менше математичного сподівання, і навпаки, коефіцієнт асиметрії $As < 0$, якщо мода розподілу більше математичного сподівання.

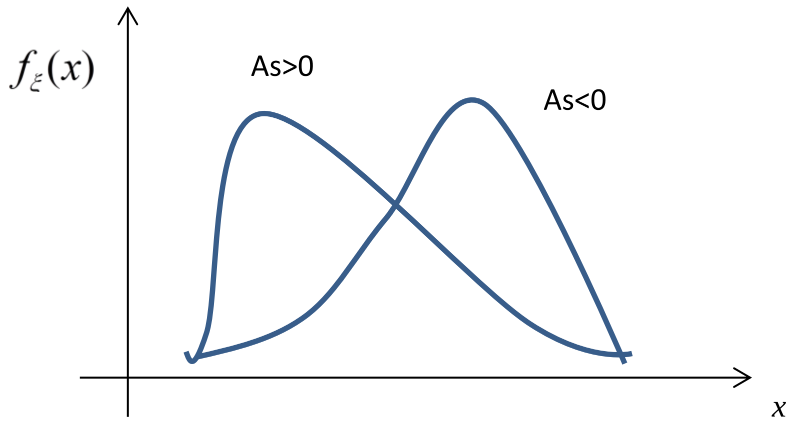


Рис. 9.2.

Ексцес. Центральний момент четвертого порядку використовують для визначення *ексцесу*. ***Ексцес*** обчислюється за формулою:

$$Ex = \frac{\beta_4}{\sigma^4} - 3.$$

Для нормального розподілу ексцес дорівнює 0. Ексцес характеризує "плосковершинність" або "гостровершинність" кривої щільності розподілу ймовірностей $f_\xi(x)$ у порівнянні з кривою нормального розподілу. При симетричному одномодальному розподілі ексцес $Ex>0$, якщо крива розподілу є "гостровершинною", і навпаки, $Ex<0$, якщо крива розподілу є "плосковершинною". При цьому вважається, що данний розподіл та нормальний розподіл мають однакові математичні сподівання та дисперсії.

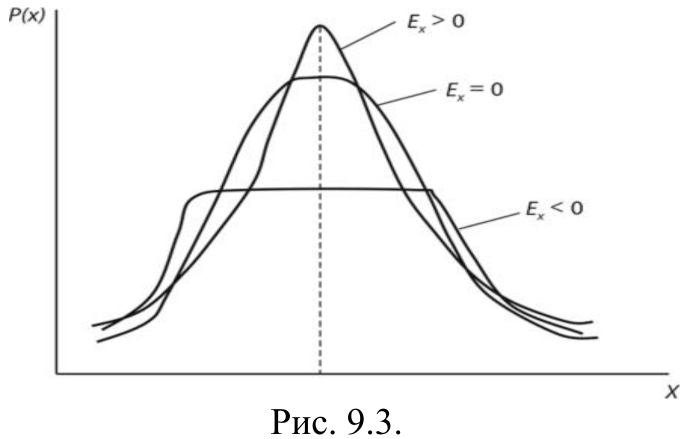


Рис. 9.3.

Коефіцієнт асиметрії та ексцес використовуються в статистиці, за ними можна зрозуміти, наскільки розподіл є близьким до нормального.

Абсолютні моменти. $\overline{\alpha_k} = M|\xi|^k$ - абсолютний початковий момент; $\overline{\beta_k} = M|\xi - M_\xi|^k$ - абсолютний центральний момент. Значення k може бути і дробовим числом.

Запитання для самоконтролю

1. Вкажіть числові характеристики рівномірного розподілу ДВВ.

2. Як знайти математичне сподівання та дисперсію випадкової величини, що має біноміальний розподіл?

3. Які числові характеристики випадкової величини, що розподілена за законом Пуассона?

4. Знайдіть математичне сподівання та дисперсію неперервної випадкової величини, що має рівномірний розподіл.

5. Назвіть значення математичного сподівання та дисперсії випадкової величини, що має показниковий розподіл.

6. Назвіть значення математичного сподівання та дисперсії випадкової величини, що має нормальний розподіл.

7. Які властивості розподілу можна описати, застосовуючи моменти третього та четвертого порядків?

8. Що називається модою та медіаною розподілу?

Практичне заняття №9
ЧИСЛОВІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН

Приклади розв'язування задач

Задача 9.1. Автобуси деякого маршруту курсують регулярно з інтервалом 10 хвилин. Пасажир підходить до зупинки у будь-який момент часу. Яка ймовірність того, що чекати пасажиру доведеться не більше чотирьох хвилин. Знайти математичне сподівання та середнє квадратичне відхилення випадкової величини ξ – часу очікування автобуса.

Розв'язання. Випадкова величина ξ – час очікування автобуса на часовому проміжку [0;10] (у хвилинах) має рівномірний розподіл

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{10}, & x\in(0;10],\\ 0, & x\notin(0;10].\end{cases}$$

Тому ймовірність того, що пасажиру доведеться чекати не більше чотирьох хвилин, рівна $P(\xi\le 4)=\int_0^4 \frac{1}{10}dx=0,4;$ числові характеристики

$$M(\xi)=\frac{0+10}{2}=5(\textit{хвилин}),\ \ D(\xi)=\frac{(10-0)^2}{12}\approx 8,33,$$

$$\sigma(\xi)=\frac{10-0}{2\sqrt{3}}\approx 2,87(\textit{хвилини}).$$

Задача 9.2. На ринок надійшла велика партія свинини. Припускається, що вага туші – випадкова величина, яка підпорядковується нормальному закону розподілу з математичним сподіванням $a=250$ кг та середнім квадратичним відхиленням $\sigma=100$ кг.

1) Знайти ймовірність того, що вага випадково відібраної туші:

а) виявиться більшою 300 кг;

б) виявиться меншою 200 кг;

в) буде знаходитись між 150 та 350 кг;

г) відхилятиметься від математичного сподівання менше ніж на 50 кг;

д) відхилятиметься від математичного сподівання більше ніж на 50 кг;

2) Знайти межі, в яких відхилення ваги випадково відібраної туші від свого математичного сподівання не перевищить потроєного середньоквадратичного відхилення.

3) З ймовірністю 0,899 визначити межі, в яких буде знаходитися вага випадково відібраної туші. Яка за цієї умови максимальна величина відхилення ваги випадково відібраної туші від свого математичного сподівання?

Розв'язання. а) Ймовірність того, що вага випадково відібраної туші виявиться більшою 300 кг, можна розуміти як ймовірність того, що вага випадково відібраної туші виявиться в інтервалі від 300 кг до + ∞.

Отримаємо:

$$P(300 \le \xi < +\infty) = \Phi(+\infty) - \Phi\left(\frac{300-250}{100}\right) =$$
$$= \Phi(+\infty) - \Phi(0,5) = 0,5 - 0,1915 = 0,3085.$$

б) Вага туші менша 200 кг, тобто в інтервалі (0;200) дорівнює:

$$P(0 < \xi < 200) = \Phi\left(\frac{200-250}{100}\right) - \Phi\left(\frac{0-250}{100}\right) =$$
$$= \Phi(-0,5) - \Phi(-2,5) = -0,1415 + 0,4938 = 0,3023.$$

в) Знайдемо ймовірність того, що вага випадково відібраної туші знаходиться в інтервалі (150;350).

$$P(150 < \xi < 350) = \Phi\left(\frac{350-250}{100}\right) - \Phi\left(\frac{150-250}{100}\right) = \Phi(1) + \Phi(1) = 2\Phi(1) \approx 0,6827.$$

г) Скористаємось формулою

$$P\left(\left|\xi - a\right| < \delta\right) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right) \Rightarrow P\left(\left|\xi - 250\right| < 50\right) = 2\Phi\left(\frac{50}{100}\right) = 2\Phi(0,5) = 0,3829.$$

д) Скористаємося тим, що потрібно знайти ймовірність протилежної події, тобто:

$$P\left(\left|\xi - a\right| \ge \delta\right) = 1 - P\left(\left|\xi - a\right| < \delta\right) = P\left(\left|\xi - 250\right| \ge 50\right) =$$
$$= 1 - P\left(\left|\xi - 250\right| < 50\right) = 1 - 0,3829 = 0,6171$$

2) Знайдемо межі, в яких відхилення ваги від свого математичного сподівання не перевищить потроєного середньоквадратичного відхилення, тобто

$$a - 3\sigma < \xi < a + 3\sigma, \quad 250 - 3\cdot 100 < \xi < 250 + 3\cdot 100, \ -50 < \xi < 550.$$

Враховуючи, що вага відібраної туші – нормально розподілена випадкова величина, можна бути впевненому в тому, що вага випадково відібраної туші не вийде за межі -50 до 550 кг.

3) Знайдемо межі, в яких із ймовірністю 0,899 буде знаходитися вага випадково відібраної туші. Для цього формулу перепишемо так:

$$P\left(\left|\xi - a\right| < \delta\right) = P\left(a - \delta < \xi < a + \delta\right) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right) = 0,899.$$

Звідки $P\left(250 - \delta < \xi < 250 + \delta\right) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{100}\right) = 0,899$, $\Phi\left(\frac{\delta}{100}\right) = \frac{0,89}{2} = 0,4495$.

За таблицею функції Лапласа знайдемо аргумент $\frac{\delta}{100} = 1,64 \Rightarrow \delta = 164$.

Тоді межі інтервалу, який нас цікавить (250-164;250+164) або (86;414). З ймовірністю 0,899 можна стверджувати, що відхилення ваги випадково відібраної туші від свого математичного сподівання не перевищить 164 кг.

Задача 9.3. Час безвідмовної роботи має показниковий розподіл $F_{\xi}(t)=1-e^{-0,04t}, (t>0)$. Знайти ймовірність того, що за час $t=60$ год.

а) система відмовить; б) система не відмовить.

Розв'язання. а) Оскільки функція розподілу $F_{\xi}(x)$ визначає ймовірність відмови системи за час t, то підставимо $t=60$ у функцію розподілу, та отримаємо ймовірність відмови системи:

$$F(60)=1-e^{-0,04\cdot 60}=1-e^{-2,4}\approx 0,91$$

б) Події «система відмовить» та «система не відмовить» є протилежними, тому ймовірність того що система не відмовить $p=1-0,91=0,09$.

Завдання для самостійного виконання

81. Випадкова величина ξ рівномірно розподілена на інтервалі $(1;9)$. Знайти числові характеристики випадкової величини ξ, функцію розподілу та ймовірність потрапляння в інтервал $(0;5)$.

82. Випадкова величина ξ рівномірно розподілена на інтервалі $(4;b)$, причому щільність на цьому проміжку дорівнює $\frac{1}{10}$. Знайти значення b та числові характеристики випадкової величини ξ.

83. Зерносховище отримує зерно партіями по десять машин, чотири з яких – із гречкою. Навмання відібрано три машини. Записати закон розподілу кількості машин із гречкою та знайти числові характеристики.

84. Дискретна випадкова величина ξ приймає два можливих значення x_1, x_2, при цьому $x_1<x_2$. Ймовірності того, що ξ набуде значення x_1 дорівнює 0,2. Знайти закон розподілу величини ξ, якщо математичне сподівання $M(\xi)=2,6$, а квадратичне відхилення $\sigma(\xi)=0,8$.

85. Автомат виготовляє деталі, довжини яких є випадковою величиною ξ, що має нормальний розподіл із середнім 50мм. Проектна довжина деталей має бути в межах (30;70) мм. Знайти ймовірність того, що довжина навмання взятої деталі буде: а) більша 56 мм; б) менша 42 мм.

86. Щоденний прибуток фірми від реалізації продукції підпорядкований нормальному закону з математичним сподіванням $a=20$ (тис. гр. од.) і середнім квадратичним відхиленням $\sigma=100$ (гр. од.).

В яких межах слід очікувати щоденний прибуток, щоб ймовірність не вийти за ці межі дорівнювала 0,8333 ?

87. Встановлено, що час ремонту телевізора є випадковою величиною ξ, розподіленою за показниковим законом. Знайти ймовірність того, що ремонт телевізора триватиме не менше 20 днів, якщо середній час ремонту телевізора становить 15 днів. Знайти щільність ймовірності, функцію розподілу та середнє квадратичне відхилення випадкової величини ξ.

88. На ринок надійшла велика партія свинини. Припускається, що вага туші – випадкова величина, яка підпорядкована нормальному закону розподілу з невідомим математичним сподіванням та середнім квадратичним відхиленням $\sigma = 100$ кг. Відомо, що 37,07% туш мають вагу більшу ніж 350 кг. Знайти очікувану вагу випадково відібраної туші.

89. Випадкова величина ξ має нормальний розподіл з параметрами $a = 8$ та $\sigma = 2$. Порівняти ймовірності попадання випадкової величини в інтервали (3;8) і (-90;1).

90. Випадкова величина ξ має нормальний розподіл з параметрами $a = 0, \sigma = 1$. Знайти інтервал, у який потрапляє випадкова величина ξ з практичною достовірністю (з ймовірністю 0,9973).

ЛЕКЦІЯ №10

ДВОВИМІРНІ ВИПАДКОВІ ВЕЛИЧИНИ

Якщо досліджуваний процес характеризується кількома випадковими параметрами, то є потреба визначити не одну, а декілька випадкових величин. Крім одновимірних випадкових величин вивчають величини, можливі значення яких визначаються двома, трьома, ..., n параметрами. Такі величини називають відповідно двовимірними, тривимірними, ..., n-вимірними. Наприклад: стан погоди в певній місцевості у фіксований час доби характеризується системою випадкових величин: ξ_1 – температура повітря, ξ_2 – швидкість вітру, ξ_3 – атмосферний тиск, ξ_4 – вологість повітря. В цьому випадку розглядаємо випадковий вектор $\vec{\xi} = (\xi_1; \xi_2; \xi_3; \xi_4)$, який описує стан погоди.

На багатовимірні випадкові величини поширюються майже всі означення, які ми давали для одновимірних випадкових величин. Але при вивченні системи випадкових величин, взагалі кажучи, недостатньо знати інформацію про кожну випадкову складову. Необхідно враховувати ще й залежність між ними.

10.1. Поняття про двовимірні випадкові величини. Приклади

Двовимірною випадковою величиною називається впорядкована пара (ξ, η), де ξ та η – одновимірні випадкові величини. Двовимірна випадкова величина набуває значень (x, y), які можуть бути зображені точками на координатній площині Oxy. Значення неперервної двовимірної випадкової величини заповнюють деяку область на площині. Значення дискретної випадкової величини утворюють дискретний набір точок на площині.

Наведемо приклади:

1) На координатній площині у крузі з центром (0,0), радіуса R з'являється точка, координати якої (x, y). Розглянемо двовимірну випадкову величину (ξ, η), де ξ – x, абсциса точки, η – y, ордината точки.

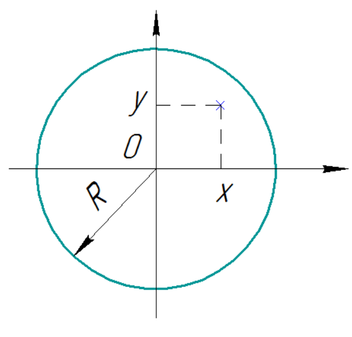


Рис. 10.1

Множина значень випадкової величини (ξ,η) зображається кругом радіуса R: $\left\{(x,y): x^2+y^2 \le R^2\right\}$. Ця величина є двовимірною неперервною випадковою величиною.

2) На екрані монітора з'являється точка. Розглянемо двовимірну випадкову величину (ξ,η), де ξ – номер пікселя по горизонталі, η – номер пікселя по вертикалі. Це приклад дискретної двовимірної випадкової величини, оскільки ξ та η (номери пікселів) набувають тільки цілих значень.

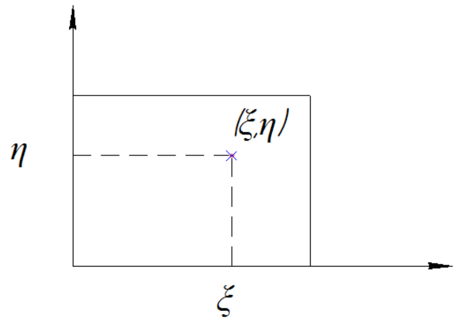


Рис. 10.2

3) Вимірюємо зріст і вагу студентів. Розглянемо випадкову величину (ξ,η), де ξ – зріст студента (у см), η – вага студента (у кг). Якщо, наприклад, зріст та вага вказується у цілих числах, то можна вважати цю двовимірну випадкову величину дискретною.

Будемо казати, що двовимірна випадкова величина (ξ,η) є неперервною (ДНВВ), якщо одновимірні випадкові величини ξ та η є неперервними. Якщо одновимірні випадкові величини ξ та η є дискретними, то така випадкова величина є двовимірною дискретною випадковою величиною (ДДВВ).

10.2. Двовимірні дискретні випадкові величини (ДДВВ)

Двовимірні дискретні випадкові величини (ДДВВ) – це випадкові величини (ξ,η), множиною значень яких є скінченна (або зліченна) множина впорядкованих пар чисел:

$$(x_k, y_i), \quad k=\overline{1,n}; \quad i=\overline{1,m}; \quad (k=\overline{1,\infty}; i=\overline{1,\infty}).$$

Значення такої ВВ можна зобразити точками на координатній площині. Щоб задати ДДВВ достатньо вказати множину значень цієї величини та ймовірності, з якими ця ДДВВ набуває відповідних значень:

$$P\{\xi = x_k, \eta = y_i\} = p_{ki}, \ k=\overline{1,n}; \ i=\overline{1,m} \ (k=\overline{1,\infty}; i=\overline{1,\infty}).$$

Якщо задано множину значень $\left(x_k, y_i\right)$ та відповідні ймовірності p_{ki}, $k=\overline{1,n};\quad i=\overline{1,m};\quad (k=\overline{1,\infty}; i=\overline{1,\infty})$, то говорять, що задано *закон розподілу* дискретної двовимірної випадкової величини.

Найчастіше закон розподілу задають таблицею:

$\xi \setminus \eta$	y_1	y_2	. . .	y_i	. . .	y_m
x_1	p_{11}	p_{12}	. . .	p_{1i}	. . .	p_{1m}
. . .	…		. . .		. . .	…
x_k	p_{k1}	p_{k2}	. . .	p_{ki}	. . .	p_{km}
. . .	…		. . .		. . .	…
x_n	p_{n1}	p_{n2}	. . .	p_{ni}	. . .	p_{nm}

Перший рядок таблиці містить всі можливі значення складової η, а перший стовпець – усі можливі значення ξ. На перетині рядка x_k та стовпця y_i вказано ймовірність $p_{ki}=P\left\{\xi=x_k, \eta=y_i\right\}$ того, що двовимірна випадкова величина набуде значення (x_k, y_i) (кома всередині ймовірності означає перетин подій $\xi=x_k$ та $\eta=y_i$), де $k=\overline{1,n};\ i=\overline{1,m}$. Очевидно, при цьому $\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} p_{ki}=1,$ оскільки такі події утворюють повну групу.

Властивості ДДВВ

1. ***Виконується умова нормування:***

$$\sum_k \sum_i p_{ki} = 1 \qquad . \tag{10.1}$$

2. ***Справджуються умови узгодженості:***

$$\sum_{i=1}^{m} p_{ki} = p_{k1} + p_{k2} + ... + p_{km} = P\left\{x = x_k, \eta = y_1\right\} + P\left\{x = x_k, \eta = y_2\right\} + ... +$$

$$+P\left\{x = x_k, \eta = y_m\right\} = P\left\{x = x_k, \left(\eta = y_1 \text{ або } \eta = y_2 ... \text{або } \eta = y_m\right)\right\} = P\left\{x = x_k\right\} = p_k .$$

Отже,
$$\sum_{i=1}^{m} p_{ki} = p_k \tag{10.2}$$

Аналогічно,
$$\sum_{k=1}^{n} p_{ki} = q_i = P\left\{\eta = y_i\right\} \tag{10.3}$$

Отже, згідно з формулами (10.2), (10.3), знаючи розподіл двовимірної ВВ, ми можемо отримати розподіл її компонент. У загальному випадку не можна розв'язати обернену задачу, тобто, за відомими розподілами компонент ξ та η не можна відновити закон розподілу ДДВВ (ξ,η).

10.3. Функція розподілу двовимірної ВВ

Для задання двовимірної випадкової величини можна застосувати функцію розподілу. Розглянемо двовимірну випадкову величину (ξ,η). Нехай (x, y) – пара дійсних чисел. Ймовірність події, яка полягає в тому, що ξ набуває значення меншого за x, і при цьому η набуває значення меншого за y, позначимо через $F_{\xi,\eta}(x,y)$. Якщо x та y будуть змінюватись, то буде змінюватись і $F_{\xi,\eta}(x,y)$, тобто $F_{\xi,\eta}(x,y)$ є функцією від x та y.

Функцією розподілу двовимірної випадкової величини (ξ,η) називається функція двох змінних (x,y), що дорівнює ймовірності одночасного виконання нерівностей $\xi < x,\ \eta < y$, тобто

$$F_{\xi,\eta}(x,y) = P\{\xi < x, \eta < y\}. \qquad (10.4)$$

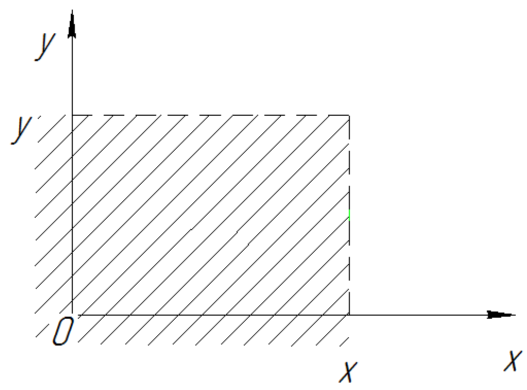


Рис. 10.3

Геометрично, значення функції розподілу у точці (x,y) дорівнює ймовірності того, що ВВ (ξ,η) потрапляє у «південно-західний» кут з вершиною в т. (x,y) (нижче та лівіше точки (x,y), на рис. заштрихована область).

Властивості функції розподілу

1. Значення функції розподілу лежать у межах між 0 та 1:

$$0 \le F_{\xi,\eta}(x,y) \le 1 \quad \text{для всіх } (x,y).$$

2. Функція розподілу $F_{\xi,\eta}(x,y)$ є неспадною по кожному з аргументів.

3. Границя функції розподілу на нескінченості дорівнює 1:

$$\lim_{\substack{x\to+\infty \\ y\to+\infty}} F_{\xi,\eta}(x,y) = P\{\xi < +\infty, \eta < +\infty\} = 1.$$

Або у символічному записі

$$F_{\xi,\eta}(+\infty,+\infty) = 1.$$

4. Границя функції розподілу на мінус нескінченості дорівнює 0:

$$\lim_{x\to-\infty} F_{\xi,\eta}(x,y) = P\{\xi < -\infty\} = 0, \quad \lim_{y\to-\infty} F_{\xi,\eta}(x,y) = P\{\eta < -\infty\} = 0.$$

Або у символічному записі $F_{\xi,\eta}(-\infty,y) = 0$, $F_{\xi,\eta}(x,-\infty) = 0$.

Також $F_{\xi,\eta}(-\infty,-\infty) = 0$.

5. Справджуються умови узгодженості:

Спрямуємо до ∞ тільки одну змінну:

$$\lim_{x\to+\infty} F_{\xi,\eta}(x,y) = P\{\xi < +\infty, \eta < y\} = P\{\eta < y\} = F_{\eta}(y).$$

Коротко запишемо:

$$F_{\xi,\eta}(+\infty,y) = F_{\eta}(y). \tag{10.5}$$

6. $\lim_{y\to+\infty} F_{\xi,\eta}(x,y) = P\{\xi < x, \eta < +\infty\} = P\{\xi < x\} = F_{\xi}(x)$.

Коротко запишемо:

$$F_{\xi,\eta}(x,+\infty) = F_{\xi}(x). \tag{10.6}$$

Властивості 5 і 6 демонструють, що якщо є відомою функція розподілу двовимірної ВВ, то можна отримати функції розподілу її компонент ξ і η.

Обернену задачу, а саме: по відомим функціям розподілу компонент отримати функцію розподілу двовимірної ВВ, у загальному випадку розв’язати неможливо.

7. Ймовірність потрапляння випадкової точки у прямокутник $P\{x_1 \le \xi < x_2, y_1 \le \eta < y_2\}$ знаходять за формулою

$$P\{x_1 \le \xi < x_2, y_1 \le \eta < y_2\} = (F(x_2,y_2) - F(x_1,y_2)) - (F(x_2,y_1) - F(x_1,y_1)) \tag{10.7}$$

10.4. Двовимірні неперервні випадкові величини (ДНВВ). Щільність розподілу

Двовимірна ВВ називається неперервною, якщо її функція розподілу $F_{\xi,\eta}(x,y)$ є неперервною для всіх $(x,y)\in R^2$. У цьому випадку функції розподілу окремих компонент теж є неперервними. Значеннями ДНВВ (ξ,η) є впорядковані пари чисел (x,y). Точки з координатами (x,y) неперервно, щільно заповнюють деяку область площини Oxy. Для характеристики ДНВВ використовують функцію щільності розподілу.

Якщо існує функція $f_{\xi,\eta}(x,y)$ (неперервна або кусково-неперервна на R^2) така, що функцію розподілу ДНВВ (ξ,η) можна подати у вигляді

$$F_{\xi,\eta}(x,y)=P\{\xi<x,\eta<y\}=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f_{\xi,\eta}(u,v)\,dudv, \qquad (10.8)$$

то говорять, що (ξ,η) має абсолютно неперервний розподіл, а функцію $f_{\xi,\eta}(x,y)$ називають ***щільністю розподілу.***

Аналогічно одновимірному випадку, ймовірність того, що двовимірна неперервна ВВ дорівнює парі окремо взятих значень, дорівнює нулю, тобто

$$P\{\xi=x_1,\eta=\mathrm{y}_1\}=0.$$

У подальшому ми будемо розглядати тільки такі двовимірні ВВ, які мають щільність, тобто є абсолютно неперервними. Для спрощення називатимемо їх просто неперервними, ДНВВ.

Властивості щільності розподілу

1. Функція щільності набуває тільки невід'ємних значень:

$$f_{\xi,\eta}(x,y)\ge 0.$$

2. Виконується умова нормування:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi,\eta}(x,y)\,dxdy=1.$$

3. Функція щільності може бути одержана з функції розподілу подвійним диференціюванням:

$$\frac{\partial^2}{\partial y\partial x}F_{\xi,\eta}(x,y)=f_{\xi,\eta}(x,y). \qquad (10.9)$$

4. Ймовірність потрапляння випадкової величини в область $D\subset Oxy$ дорівнює подвійному інтегралу від функції щільності $f_{\xi,\eta}(x,y)$ по області D:

$$P\{(\xi,\eta)\in D\}=\iint_D f_{\xi,\eta}(x,y)\,dxdy \qquad (10.10)$$

5. *Умови узгодженості*

Зауважимо, що для функції розподілу $F_\xi(x) = F_{\xi,\eta}(x,+\infty)$. Тоді

$$f_\xi(x) = \left(F_\xi(x)\right)' = \left(\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi,\eta}(u,v)\,du\,dv\right)' = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi,\eta}(x,v)\,dv \ . \qquad (10.11)$$

Аналогічно: $$f_\eta(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi,\eta}(u,y)\,du \ . \qquad (10.12)$$

Тобто, знаючи функцію щільності двовимірної ВВ, можна знайти функції щільності її компонент.

Розглянемо приклади ДНВВ.

Приклад 10.1. Рівномірно розподілена ДНВВ

ДНВВ (ξ,η) є рівномірно розподіленою в області $D \subset Oxy$, якщо щільність розподілу цієї випадкової величини є сталою, відмінною від 0, для точок області *D*, і дорівнює 0 у точках поза областю *D*:

$$f_{\xi,\eta}(x,y) = \begin{cases} 0, (x,y) \notin D; \\ k, (x,y) \in D, \end{cases} \qquad \text{де } k = const \ .$$

За умовою нормування: $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi,\eta}(x,y)\,dxdy = 1$.

Тоді $\iint_D f_{\xi,\eta}(x,y)\,dxdy = \iint_D k\,dxdy = k\,S_D = 1$. Звідки $k = \dfrac{1}{S_D}$. Тоді

$$f_{\xi,\eta}(x,y) = \begin{cases} 0, & (x,y) \notin D; \\ \dfrac{1}{S_D}, & (x,y) \in D. \end{cases}$$

Розглянемо частинний випадок, коли область *D* є прямокутником:

$$D : \begin{cases} a \le x \le b \\ c \le y \le d \end{cases}.$$

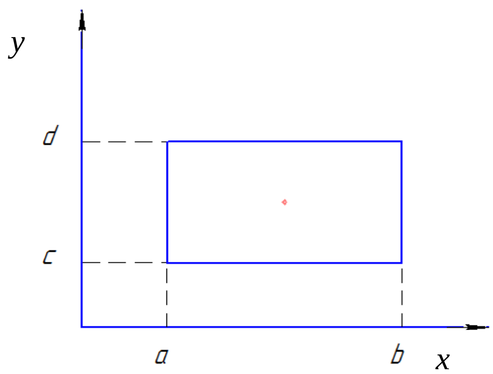


Рис. 10.4

Тоді $S_D = (b-a)\cdot(d-c)$

Функція щільності:

$$f_{\xi,\eta}(x,y) = \begin{cases} 0, \ (x,y) \notin D; \\ \dfrac{1}{(b-a)\cdot(d-c)}, \ (x,y) \in D. \end{cases}$$

Функція розподілу:

$$F_{\xi,\eta}(x,y) = \begin{cases} 0, \ \ x \le a \ \ \text{або} \ \ y \le c; \\ \dfrac{(x-a)(y-c)}{(b-a)(d-c)}, a < x \le b, c < y \le d; \\ \dfrac{y-c}{d-c}, x > b, c < y \le d; \\ \dfrac{x-a}{b-a}, a < x \le b, y > d; \\ 1, \ x > b, y > d. \end{cases}$$

Приклад 10.2. Двовимірна нормально розподілена випадкова величина

Двовимірна випадкова величина (ξ,η) є нормально розподіленою ДНВВ, якщо її функція щільності має вигляд:

$$f_{\xi,\eta}(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}} \cdot e^{-\frac{1}{2(1-r^2)}\left(\frac{(x-a)^2}{\sigma_1^2} - 2r\frac{(x-a)(y-b)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-b)^2}{\sigma_2^2}\right)}$$

Числа $a, b, \sigma_1, \sigma_2, r = const$ – параметри цієї двомірної випадкової величини.

За формулами (10.11), (10.12) можна знайти функції щільності компонент:

$$f_\xi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi,\eta}(x,y)dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} \cdot e^{\frac{-(x-a)^2}{2\sigma_1^2}}$$

$$f_\eta(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi,\eta}(x,y)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} \cdot e^{\frac{-(y-b)^2}{2\sigma_2^2}}$$

Тобто, компоненти нормально розподіленої ДНВВ (ξ, η) в свою чергу є одновимірними нормально розподіленими величинами з параметрами (a, σ_1), (b, σ_2) відповідно.

Зауваження. Параметр r носить назву коефіцієнт кореляції величин ξ, η (див. Лекцію №11). Якщо $r = 0$, то функція щільності двовимірної нормально розподіленої випадкової величини є добутком функцій щільності її компонент,

$f_{\xi,\eta}(x,y)=f_\xi(x)\cdot f_\eta(y)$, тобто, компоненти будуть незалежними. Детальніше незалежність ВВ буде розглянута в п.11.4.2.

10.5. Числові характеристики двовимірних ВВ

10.5.1. Математичне сподівання двовимірної ВВ

Математичним сподіванням двовимірної випадкової величини є пара чисел $M_{\xi,\eta}=(M_\xi, M_\eta)$, де M_ξ, M_η – математичні сподівання величин $\xi,\ \eta$.

Для ДДВВ (ξ,η) математичні сподівання компонент можна знайти за відомими формулами:

$$M_\xi=\sum_{k=1}^{\infty}x_k\cdot p_k=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}x_k\cdot p_{ki};$$

$$M_\eta=\sum_{i=1}^{\infty}y_i\cdot q_i=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}y_i\cdot p_{ki}$$ (за умови збіжності відповідних рядів). (10.13)

Розглянемо ДНВВ (ξ,η) та виразимо математичні сподівання її компонент через функцію щільності ДНВВ.

$$M_\xi=\int_{-\infty}^{\infty}x\cdot f_\xi(x)dx=\int_{-\infty}^{\infty}x\cdot\left(\int_{-\infty}^{\infty}f_{\xi,\eta}(x,y)dy\right)dx=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}x\cdot f_{\xi,\eta}(x,y)dxdy.$$

Аналогічно,

$$M_\eta=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}y\cdot f_{\xi,\eta}(x,y)dxdy$$ (за умови збіжності невласних інтегралів). (10.14)

10.5.2. Дисперсія двовимірної ВВ

Дисперсії компонент ДДВВ (ξ,η) можна знайти за відомими формулами:

$$D_\xi=M\{(\xi-M_\xi)^2\}=\sum_{k=1}^{\infty}(x_k-M_\xi)^2\cdot p_k;$$

$$D_\eta=M\{(\eta-M_\eta)^2\}=\sum_{i=1}^{\infty}(y_i-M_\eta)^2\cdot q_i$$ (за умови збіжності відповідних рядів).

Дисперсії компонент ДНВВ можна виразити через функцію щільності :

$$D_\xi=M\left\{\left(\xi-M_\xi\right)^2\right\}=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left(x-M_\xi\right)^2\cdot f_{\xi,\eta}(x,y)dxdy;$$

$$D_\eta=M\left\{\left(\eta-M_\eta\right)^2\right\}=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left(y-M_\eta\right)^2\cdot f_{\xi,\eta}(x,y)dxdy.$$

Середні квадратичні відхилення компонент: $\sigma_\xi = \sqrt{D_\xi}; \sigma_\eta = \sqrt{D_\eta}$.

На площині *Oxy* зобразимо еліпс з центром (M_ξ, M_η), півосями σ_ξ, σ_η.

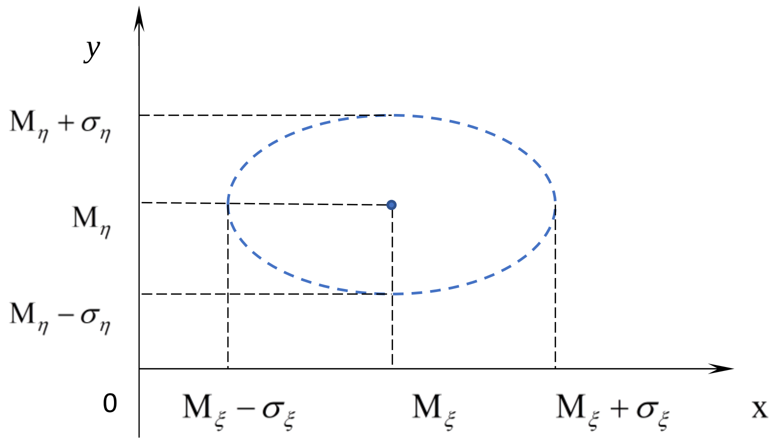


Рис. 10.5.

Це – *еліпс розсіювання* двовимірної випадкової величини.

10.5.3. Мішані моменти

Мішаним моментом порядку (k, s) називається математичне сподівання наступної величини: $\beta_{k,s} = M\left\{\left(\xi - M_\xi\right)^k \cdot \left(\eta - M_\eta\right)^s\right\}$.

Якщо $k = 2, s = 0$, то $\beta_{2,0} = M\left\{\left(\xi - M_\xi\right)^2\right\} = D_\xi$;

якщо $k = 0, s = 2$, то $\beta_{0,2} = M\left\{\left(\eta - M_\eta\right)^2\right\} = D_\eta$;

якщо $k = 1, s = 1$, то $\beta_{1,1} = M\left\{\left(\xi - M_\xi\right)\left(\eta - M_\eta\right)\right\} = k_{\xi\eta}$. Число $k_{\xi\eta}$ носить назву ***кореляційний момент*** (див. Лекцію №11).

Також для характеристики двовимірної випадкової величини застосовують так звану ***кореляційну матрицю:***

$$\begin{pmatrix} \beta_{2,0} & \beta_{1,1} \\ \beta_{1,1} & \beta_{0,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_\xi & k_{\xi\eta} \\ k_{\xi\eta} & D_\eta \end{pmatrix}.$$

Запитання для самоконтролю.

1. Що таке система двох випадкових величин?

2. Яка двовимірна випадкова величина називається дискретною?

3. Що таке закон розподілу двовимірної дискретної випадкової величини?

4. Як маючи закон розподілу двовимірної дискретної випадкової величини знайти закон розподілу кожної з компонент?

5. Яка двовимірна випадкова величина називається неперервною?

6. Що називається функцією розподілу двовимірної випадкової величини?

7. Які властивості має функція розподілу двовимірної випадкової величини?

8. Що таке щільність розподілу неперервної двовимірної випадкової величини?

9. Які властивості має щільність розподілу двовимірної неперервної випадкової величини?

10. Які числові характеристики має двовимірна випадкова величина?

Практичне заняття №10
ДИСКРЕТНІ ТА НЕПЕРЕРВНІ ДВОВИМІРНІ ВИПАДКОВІ ВЕЛИЧИНИ

Приклади розв'язування задач

Задача 10.1. Ряд розподілу величини ДДВВ (ξ,η) має вигляд:

$\xi \setminus \eta$	*0*	*1*	*4*
1	*0,1*	*0,2*	*0,08*
2	*0,12*	*0,3*	*0,2*

1) Побудувати ряди розподілу компонент ξ та η.

2) Побудувати функцію розподілу ДДВВ.

Розв'язання.

1) Доповнимо ряд розподілу величини ДДВВ (ξ,η) додатковими рядком, в якому вкажемо $q_i = p_{1i} + p_{2i}$ $, i = 1,2,3$ (згідно формули (10.3)) та стовпчиком для $p_k = p_{k1} + p_{k2} + p_{k3}$, $k = 1,2$ (згідно формули (10.2)), тоді ряд розподілу буде мати вигляд:

$\xi \setminus \eta$	*0*	*1*	*4*	p_k
1	*0,1*	*0,2*	*0,08*	*0,38*
2	*0,12*	*0,3*	*0,2*	*0,62*
q_i	*0,22*	*0,5*	*0,28*	*1*

Випишемо окремо ряди розподілу компонент ξ та η:

ξ	*1*	*2*
p_k	*0,38*	*0,62*

η	*0*	*1*	*4*
q_i	*0,22*	*0,5*	*0,28*

2) Значення функції розподілу можна знайти за формулою $F_{\xi,\eta}(x,y) = P\{\xi < x, \eta < y\} = \sum\limits_{k:x_k<x} \sum\limits_{i:y_i<y} p_{ki}$. Нагадаємо, що значення функції розподілу у точці *(x,y)* – це ймовірність того, що двомірна випадкова величина потрапляє у «південно-західний кут» з вершиною у точці з координатами *(x,y)*. Отже,

$$F_{\xi\eta}(x,y)=\begin{cases}0, & x\le 1\ \text{або}\ y\le 0;\\ 0.1, & 1<x\le 2,\ 0<y\le 1;\\ 0.22, & x\ge 2,\ 0<y\le 1;\\ 0.3, & 1<x\le 2, 1<y\le 4;\\ 0.72, & x\ge 2, 1<y\le 4;\\ 0.38, & 1<x\le 2,\ y>4;\\ 1, & x>2,\ y>4.\end{cases}$$

По кожній компоненті функція розподілу є неспадною. У випадку ДДВВ функція розподілу є східчастою функцією, «сходинки» якої є прямокутниками $\{(x,y):\ x_k<x\le x_{k+1};\ y_i<y\le y_{i+1}\}$, на яких функція має стале значення.

Висновок. ДДВВ можна задати або за допомогою функції розподілу, або вказавши множину значень (x_k, y_i) та відповідні ймовірності $\{p_{ki}\}$, $k=\overline{1,n}$, $i=\overline{1,m}$ $(k=\overline{1,\infty};\ i=\overline{1,\infty})$, тобто законом розподілу.

Задача 10.2. Дискретна двовимірна випадкова величина задана законом розподілу.

ξ \ η	1	3	4	8
3	*0,15*	*0,06*	*0,25*	*0,04*
6	*0,30*	*0,1*	*0,03*	*0,07*

1) Побудувати ряди розподілу компонент ξ та η.

2) Обчислити M_ξ, D_ξ σ_ξ, M_η, D_η, σ_η.

Розв'язання.

1) Доповнимо ряд розподілу величини ДДВВ (ξ,η) додатковими рядком, в якому вкажемо $q_i = p_{1i} + p_{2i}$,$i=1,2,3,4$ (згідно формули (10.3)) та стовпчиком для $p_k = p_{k1} + p_{k2} + p_{k3} + p_{k4}, k=1,2$ (згідно формули (10.2)), тоді матриця розподілу буде мати вигляд:

$\xi \setminus \eta$	*1*	*3*	*4*	*8*	p_k
3	*0,15*	*0,06*	*0,25*	*0,04*	*0,5*
6	*0,30*	*0,1*	*0,03*	*0,07*	*0,5*
q_i	*0,45*	*0,16*	*0,28*	*0,11*	*1*

Отже, ряди розподілу компонент ξ та η мають вигляд:

η	*1*	*3*	*4*	*8*
q_i	*0,45*	*0,16*	*0,28*	*0,11*

ξ	*3*	*6*
p_k	*0,5*	*0,5*

2) Знайдемо числові характеристики компонент: $M_\xi = 4{,}5$; $D_\xi = 2{,}25$; $\sigma_\xi = \sqrt{2{,}25} = 1{,}5$; $M_\eta = 2{,}93$; $D_\eta = 4{,}815$; $\sigma_\eta = 2{,}194$.

Задача 10.3. Задано функцію розподілу двовимірної неперервної випадкової величини (ξ, η):

$$F_{\xi,\eta}(x,y) = \begin{cases} \sin x \cdot \sin y, \ (x,y) \in D, \\ 0, \qquad (x,y) \notin D, \end{cases} \qquad \text{де } D = \left\{ (x,y) : x, y \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \right\}$$

Знайти: а) ймовірність потрапляння випадкової величини (ξ, η) в прямокутник, обмежений прямими $x = 0,\ x = \frac{\pi}{4},\ y = \frac{\pi}{6},\ y = \frac{\pi}{3}$;

б) щільність сумісного розподілу.

Розв'язання.

а) За формулою (10.7) знайдемо;

$$\mathrm{P}\left\{0 \le \xi < \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6} \le \eta < \frac{\pi}{3}\right\} = (\sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{3} - \sin 0 \sin\frac{\pi}{3}) - (\sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6} - \sin 0 \sin\frac{\pi}{6}) =$$
$$\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{2} \approx 0{,}259$$

б) Згідно з формулою (10.9) знайдемо спершу частинну похідну по x від функції розподілу:

$$\frac{\partial F_{\xi,\eta}(\mathrm{x},\mathrm{y})}{\partial x} = \cos x \cdot \sin y.$$

Від отриманого результату знайдемо частинну похідну по змінній y:

$$\frac{\partial^2 F_{\xi,\eta}(x,\mathrm{y})}{\partial x \partial y} = \cos x \cdot \cos y.$$

Отже, щільність розподілу

$$f_{\xi,\eta}(x,y) = \begin{cases} \cos x \cdot \cos y, \ (x,\ y) \in D, \\ 0 \qquad , (x,\ y) \notin D, \end{cases} \qquad \text{де } D = \left\{ (x,y) : x, y \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \right\}$$

Задача 10.4. Задано функцію щільності розподілу системи випадкових величини (ξ,η):

$$f_{\xi,\eta}(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi^2(1+x^2)(4+y^2)}, & x,\ y\in D,\\ 0 & ,\ x,\ y\notin D,\end{cases} \qquad \text{де } D=\{(x,y): x\ge 0, y\ge 0\}.$$

Знайти функцію розподілу системи та функції розподілу її компонент.

Розв'язання. За формулою (10.8) запишемо

$$F_{\xi,\eta}(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f_{\xi,\eta}(u,v)dudv=\frac{2}{\pi^2}\int_{-\infty}^{x}\frac{du}{1+u^2}\int_{-\infty}^{y}\frac{1}{4+v^2}dv=$$

$$=\frac{2}{\pi^2}\lim_{a\to-\infty}\int_a^x\frac{du}{1+u^2}\lim_{b\to-\infty}\int_b^y\frac{1}{4+v^2}dv=$$

$$=\frac{2}{\pi^2}\frac{1}{2}\lim_{a\to-\infty}arctgu\Big|_a^x\lim_{b\to-\infty}arctg\frac{v}{2}\Big|_b^y=\frac{1}{\pi^2}\left(arctgx+\frac{\pi}{2}\right)\left(arctg\frac{y}{2}+\frac{\pi}{2}\right)=$$

$$=\left(\frac{1}{\pi}arctgx+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{\pi}arctg\frac{y}{2}+\frac{1}{2}\right).$$

Отже, $F_{\xi,\eta}(x,y)=\begin{cases}\left(\dfrac{1}{\pi}arctgx+\dfrac{1}{2}\right)\left(\dfrac{1}{\pi}arctg\dfrac{y}{2}+\dfrac{1}{2}\right), & x,\ y\in D,\\ 0, & (x,y)\notin D.\end{cases}$

де $D=\{(x,y): x\ge 0, y\ge 0\}$.

Для знаходження функцій розподілу компонент використаємо формули (10.5) та (10.6).

$$F_\xi(x)=\lim_{y\to+\infty}\left(\frac{1}{\pi}arctgx+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{\pi}arctg\frac{y}{2}+\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{\pi}arctgx+\frac{1}{2}\right),$$

$$F_\eta(y)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{\pi}arctgx+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{\pi}arctg\frac{y}{2}+\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{\pi}arctg\frac{y}{2}+\frac{1}{2}\right),$$

оскільки $\lim\limits_{y\to+\infty}\left(\dfrac{1}{\pi}arctg\dfrac{y}{2}+\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{\pi}\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{1}{2}=1$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{\pi}arctgx+\dfrac{1}{2}\right)=\left(\dfrac{1}{\pi}\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{1}{2}\right)=1.$

Завдання для самостійного виконання

91-94. Задано закон розподілу двовимірної дискретної випадкової величини:

ξ	η			
	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	*0,05*	*0,05*	*0,05*	*0,05*
x_2	*0,05*	*0,05*	*0,05*	*0,15*
x_3	*0,10*	*0,05*	*0,05*	*0,05*
x_4	*0,10*	*0,05*	*0,05*	*0,05*

1). Записати закони розподілу складових двовимірної випадкової величини

$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4$ *та* $y_1,\ y_2,\ y_3,\ y_4$ – задані в таблиці,

2) Обчислити $M_\xi,\ D_\xi\ \ \sigma_\xi,\ M_\eta,\ D_\eta,\ \sigma_\eta$.

Таблиця значень:

№ завд.	Значення випадкових величин							
	x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	y_3	y_4
91	*1*	*2*	*3*	*4*	*-10*	*-9*	*-8*	*-7*
92	*5*	*6*	*7*	*8*	*-6*	*-5*	*-4*	*-3*
93	*9*	*10*	*11*	*12*	*-2*	*-1*	*0*	*1*
94	*5*	*10*	*15*	*20*	*-1*	*0*	*1*	*2*

95. Задано щільність розподілу двомірної неперервної випадкової величини (ξ,η):

$$f_{\xi,\eta}(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\sin(x+y),\ (x\ ,y)\in D,\\ 0, \qquad\qquad (x,y)\notin D,\end{cases}$$

де $D=\left\{(x,y):x,y\in\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]\right\}$.

Знайти функцію розподілу системи (ξ,η), математичне сподівання та дисперсію складових.

96. Знайти ймовірність потрапляння випадкової точки (ξ,η) в прямокутник, обмежений прямими $x=1,\ x=2,\ y=3,\ y=5,$ якщо задана функція розподілу

$$F_{\xi,\eta}(x,y)=\begin{cases}1-2^{-x}-2^{-y}+2^{-x-y}, & (x,y)\in D,\\ 0, & (x,y)\notin D,\end{cases}$$

де $D=\{(x,y): x\ge 0, y\ge 0\}.$

97. Задано функцію розподілу двовимірної неперервної випадкової величини:

$$F_{\xi,\eta}(x,y)=\begin{cases}1-3^{-x}-3^{-y}+3^{-x-y}, & (x,y)\in D,\\ 0, & (x,y)\notin D,\end{cases} \quad \text{де } D=\{(x,y): x\ge 0, y\ge 0\}.$$

Знайти щільність розподілу ймовірності. Результат перевірити за умовою нормування функції щільності.

98. Задано функцію розподілу двовимірної неперервної випадкової величини

$$F_{\xi,\eta}(x,y)=\begin{cases}\left(1-e^{-4x}\right)\cdot\left(1-e^{-2y}\right), & (x,y)\in D,\\ 0, & (x,y)\notin D,\end{cases} \quad \text{де } D=\{(x,y): x\ge 0, y\ge 0\}.$$

Знайти щільність розподілу ймовірності.

99. Всередині квадрата $D=\left\{(x,y)\in R^2, 0\le x\le \dfrac{\pi}{4}, 0\le x\le \dfrac{\pi}{4}\right\}$ двовимірна щільність розподілу задана формулою $f_{\xi,\eta}(x,y)=2\cos x\cdot\cos y$, а зовні квадрата $f_{\xi,\eta}(x,y)=0.$ Знайти математичні сподівання компонент.

100. Задана щільність сумісного розподілу двовимірної випадкової величини

$$f_{\xi,\eta}(x,y)=\begin{cases}36xye^{-(x^2+y^2)}, & (x,y)\in D,\\ 0, & (x,y)\notin D,\end{cases} \quad \text{де } D=\{(x,y): x\ge 0, y\ge 0\}.$$

Знайти математичне сподівання та дисперсію компонент.

ЛЕКЦІЯ № 11

ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ КОРЕЛЯЦІЇ. НЕЗАЛЕЖНІСТЬ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН

11.1. Кореляція двох випадкових величин

Окрім вже відомих числових характеристик $M_\xi, D_\xi,\ \sigma_\xi,\ \ M_\eta, D_\eta, \sigma_\eta,$ які характеризують кожну компоненту окремо, для двовимірної випадкової величини вводять кореляційний момент та коефіцієнт кореляції, які визначають ступінь лінійного зв'язку між компонентами.

11.1.1. Кореляційний момент (коваріація)

Кореляційним моментом $k_{\xi\eta}$ (або ***коваріацією*** $Cov(\xi,\eta)$) двох випадкових величин ξ та η називається математичне сподівання добутку $(\xi - M_\xi)(\eta - M_\eta)$:

$$k_{\xi\eta} = Cov(\xi,\eta) = M\left\{(\xi - M_\xi)(\eta - M_\eta)\right\}. \qquad (11.1.)$$

Отримаємо іншу формулу для кореляційного моменту:

$$k_{\xi\eta} = M\left\{(\xi - M_\xi)(\eta - M_\eta)\right\} = M\left\{\xi\cdot\eta - \xi\cdot M_\eta - M_\xi\cdot\eta + M_\xi\cdot M_\eta\right\} =$$
$$= M\left\{\xi\cdot\eta\right\} - M\left\{\xi\cdot M_\eta\right\} - M\left\{M_\xi\cdot\eta\right\} + M\left\{M_\xi\cdot M_\eta\right\} =$$
$$= M\left\{\xi\cdot\eta\right\} - M_\xi\cdot M_\eta - M_\xi\cdot M_\eta + M_\xi\cdot M_\eta = M\left\{\xi\cdot\eta\right\} - M_\xi\cdot M_\eta$$

Отже,

$$k_{\xi\eta} = Cov(\xi,\eta) = M\left\{\xi\cdot\eta\right\} - M_\xi\cdot M_\eta, \qquad (11.2)$$

11.1.2. Коефіцієнт кореляції. Некорельовані випадкові величини

Коефіцієнтом кореляції називають безрозмірну величину:

$$r_{\xi\eta} = \frac{k_{\xi\eta}}{\sigma_\xi\sigma_\eta}. \qquad (11.3)$$

Покажемо, що ***коефіцієнт кореляції за абсолютною величиною не перевищує одиниці***:

$$-1 \le r_{\xi\eta} \le 1. \qquad (11.4)$$

Для цього спершу доведемо нерівність Коші-Буняковського для математичних сподівань. Розглянемо квадрат випадкової величини $(\lambda\xi + \eta)$, де ξ та η –

одновимірні випадкові величини, а λ – числовий коефіцієнт. Очевидно, що $M\left\{\left(\lambda\xi+\eta\right)^2\right\}\geq 0, \quad \forall\lambda\in R$. Виконаємо перетворення:

$$M\left\{\left(\lambda\xi+\eta\right)^2\right\}=M\left\{\lambda^2\xi^2+2\lambda\xi\eta+\eta^2\right\}=M\left\{\lambda^2\xi^2\right\}+M\left\{2\lambda\xi\eta\right\}+$$

$$+M\left\{\eta^2\right\}=\lambda^2 M\left\{\xi^2\right\}+2\lambda M\left\{\xi\eta\right\}+M\left\{\eta^2\right\}\geq 0,\forall\lambda\in R$$

Ми отримали вираз, який є квадратичною функцією від λ. Оскільки при всіх значеннях змінної λ цей вираз є невід'ємним, то дискримінант цієї квадратичної функції $\mathrm{D}\leq 0$. Отже,

$$D=b^2-4ac=4M^2\left\{\xi\eta\right\}-4M\left\{\xi^2\right\}\cdot M\left\{\eta^2\right\}\leq 0.$$

Звідки отримаємо нерівність Коші-Буняковського для математичних сподівань:

$$M^2\left\{\xi\eta\right\}\leq M\left\{\xi^2\right\}\cdot M\left\{\eta^2\right\}$$

$$\left|M\left\{\xi\eta\right\}\right|\leq\sqrt{M\left\{\xi^2\right\}\cdot M\left\{\eta^2\right\}}$$

Замінимо в цій нерівності $\xi\to\xi-M_\xi, \quad \eta\to\eta-M_\eta$. Тоді

$$\left|M\left\{\left(\xi-M_\xi\right)\left(\eta-M_\eta\right)\right\}\right|\leq\sqrt{M\left\{\left(\xi-M_\xi\right)^2\right\}\cdot M\left\{\left(\eta-M_\eta\right)^2\right\}}=\sqrt{D_\xi\cdot D_\eta}=\sigma_\xi\cdot\sigma_\eta.$$

Отже, $\left|k_{\xi\eta}\right|\leq\sigma_\xi\cdot\sigma_\eta$.

А тоді $\left|r_{\xi\eta}\right|=\dfrac{\left|k_{\xi\eta}\right|}{\sigma_\xi\cdot\sigma_\eta}\leq\dfrac{\sigma_\xi\cdot\sigma_\eta}{\sigma_\xi\cdot\sigma_\eta}=1.$

Отже, для коефіцієнта кореляції справджується: $\left|r_{\xi\eta}\right|\leq 1$.

Якщо $r_{\xi\eta}=0$, а тоді і кореляційний момент $k_{\xi\eta}=0$, то величини ξ,η називаються ***некорельованими.***

11.2. Математичне сподівання добутку двох випадкових величин

З формули (11.2) виразимо математичне сподівання добутку двох випадкових величин:

$$M\left\{\xi\cdot\eta\right\}=k_{\xi\eta}+M_\xi\cdot M_\eta. \tag{11.5}$$

Для некорельованих ξ,η, тобто коли $k_{\xi\eta}=0$, з формули (11.5) випливає, що:

$$M\left\{\xi\cdot\eta\right\}=M_\xi\cdot M_\eta. \tag{11.6}$$

Математичне сподівання добутку двох некорельованих випадкових величин дорівнює добутку їх математичних сподівань.

11.3. Дисперсія суми та різниці двох випадкових величин

Знайдемо дисперсію суми двох випадкових величин:

$$D(\xi+\eta)=M\{((\xi+\eta)-(M_\xi+M_\eta))^2\}=M\{((\xi-M_\xi)+(\eta-M_\eta))^2\}=$$
$$=M\{(\xi-M_\xi)^2+2(\xi-M_\xi)(\eta-M_\eta)+(\eta-M_\eta)^2\}=$$
$$=M\{(\xi-M_\xi)^2\}+2M\{(\xi-M_\xi)(\eta-M_\eta)\}+M\{(\eta-M_\eta)^2\}=$$
$$=D_\xi+D_\eta+2k_{\xi\eta}$$

Як бачимо:

$$D(\xi+\eta)=D_\xi+D_\eta+2k_{\xi\eta}\,. \tag{11.7}$$

Дисперсію різниці можна знайти аналогічно:

$$D(\xi-\eta)=D_\xi+D_\eta-2k_{\xi\eta}\,. \tag{11.8}$$

Якщо величини ξ та η є некорельовані, тобто $k_{\xi\eta}=0$, тоді

$$D(\xi+\eta)=D_\xi+D_\eta \tag{11.9}$$

$$D(\xi-\eta)=D_\xi+D_\eta\,. \tag{11.10}$$

Дисперсія суми або різниці двох некорельованих випадкових величин дорівнює сумі їх дисперсій

Приклад 11.1.

Нехай задано випадкову величину ξ, яка має скінченні математичне сподівання та дисперсію. Випадкова величина $\eta=a\xi+b\quad(a\neq 0, a,b=const\in R)$ є лінійно залежною від ξ.

Знайти коефіцієнт кореляції величин ξ та η.

Розв'язання. Спершу знайдемо математичне сподівання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення η.

Математичне сподівання:

$$M_\eta=M(a\xi+b)=aM_\xi+b\,.$$

Дисперсія:

$$D_\eta=M\{(\eta-M_\eta)^2\}=M\{(a\xi+b)-(aM_\xi+b))^2\}=$$
$$=M\{(a(\xi-M_\xi))^2\}=a^2M\{(\xi-M_\xi)^2\}=a^2D_\xi\,.$$

Середнє квадратичне відхилення:

$$\sigma_\eta=\sqrt{D_\eta}=\sqrt{a^2D_\xi}=|a|\sigma_\xi\,.$$

Знайдемо кореляційний момент випадкових величин ξ та η:

$$k_{\xi\eta}=M\{(\xi-M_{\xi})(\eta-M_{\eta})\}=M\{(\xi-M_{\xi})(a\xi+b-aM_{\xi}-b)\}=$$
$$=M\{a(\xi-M_{\xi})(\xi-M_{\xi})\}=aD_{\xi}=a\sigma_{\xi}^{2}$$

За формулою $r_{\xi\eta}=\dfrac{k_{\xi\eta}}{\sigma_{\xi}\cdot\sigma_{\eta}}$ знайдемо коефіцієнт кореляції:

$$r_{\xi\eta}=\frac{a\sigma_{\xi}^{2}}{\sigma_{\xi}\cdot|a|\sigma_{\xi}}=\frac{a}{|a|}=\begin{cases}1, & a>0\\ -1, & a<0\end{cases}.$$

Зробимо висновки.

Якщо дві випадкові величини пов'язані між собою лінійною залежністю $\eta=a\xi+b$, то їх коефіцієнт кореляції $r_{\xi\eta}=1$ або $r_{\xi\eta}=-1$, зокрема, при $a>0$ $r_{\xi\eta}=1$, при $a<0$ $r_{\xi\eta}=-1$.

Чим ближче до 1 абсолютна величина коефіцієнта кореляції, то тим тісніший лінійний зв'язок між величинами.

Чи може це означати, якщо дві величини пов'язані між собою функціональною залежністю, то коефіцієнт кореляції набуває крайніх значень ±1, тобто вони є корельованими ? Покажемо, що це не завжди так.

Приклад 11.2.

Нехай випадкова величина є нормально розподіленою $\xi\sim N(0,1)$, тобто, щільність її розподілу $f_{\xi}(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$, $x\in R$. Нехай випадкова величина η є квадратом ξ: $\eta=\xi^2$. Знайти коефіцієнт кореляції ξ та η.

Розв'язання. Знайдемо кореляційний момент:

$$k_{\xi\eta}=M\{\eta\cdot\xi\}-M_{\xi}\cdot M_{\eta}=M\{\xi^2\cdot\xi\}-0\cdot M_{\eta}=$$
$$=M\{\xi^3\}=\int_{-\infty}^{+\infty}x^3\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}dx=\int_{-\infty}^{0}x^3\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}dx+\int_{0}^{+\infty}x^3\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}dx=I_1+I_2$$

$$I_1=\int_{-\infty}^{0}x^3\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\lim_{b\to-\infty}\int_{b}^{0}x^3\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}dx=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\lim_{b\to-\infty}\int_{b}^{0}(-\frac{x^2}{2})\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}d(-\frac{x^2}{2})=$$

$$=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\lim_{b\to-\infty}\left((-\frac{x^2}{2}-1)\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}\right)\Bigg|_{b}^{0}=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\lim_{b\to+\infty}\left(-1+\frac{\frac{b^2}{2}+1}{e^{\frac{b^2}{2}}}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}$$

$$I_2=\int_0^{+\infty} x^3\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\lim_{b\to+\infty}\int_0^b x^3\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}dx=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\lim_{b\to+\infty}\int_0^b(-\frac{x^2}{2})\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}d(-\frac{x^2}{2})=$$

$$=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\lim_{b\to+\infty}\left.\left((-\frac{x^2}{2}-1)\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}\right)\right|_0^b=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\lim_{b\to+\infty}\left(1-\frac{\frac{b^2}{2}+1}{e^{\frac{b^2}{2}}}\right)=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}$$

$$k_{\xi\eta}=-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}=0.$$

Отже, кореляційний момент дорівнює нулю, також і коефіцієнт кореляції $r_{\xi\eta}=0$, тобто величини ξ та $\eta=\xi^2$ є некорельованими. У розглянутому прикладі величини ξ та η є залежними, але не є корельованими.

11.4. Незалежні випадкові величини

Випадкові величини ξ та η називаються ***незалежними***, якщо є незалежними події $(\xi<x)$ та $(\eta<y)$ для всіх $x,y\in R$.

11.4.1. Функція розподілу системи двох незалежних випадкових величин

$$F_{\xi,\eta}(x,y)=P\{\xi<x,\eta<y\}=\left|\begin{matrix}\text{події }(\xi<x)\text{ та }(\eta<y)\\ \text{незалежні}\end{matrix}\right|=$$

$$=P\{\xi<x\}\cdot P\{\eta<y\}=F_\xi(x)\cdot F_\eta(y)$$

Якщо ξ та η є незалежними, то функція розподілу двовимірної випадкової величини (ξ,η) є добутком функцій розподілу її одновимірних компонент :

$$F_{\xi,\eta}(x,y)=F_\xi(x)\cdot F_\eta(y) \qquad (11.11)$$

Ця властивість має назву *характеристична властивість функцій розподілу.*

11.4.2. Функція щільності системи двох незалежних неперервних випадкових величин

Нехай неперервні ВВ ξ та η є незалежними.

$$f_{\xi,\eta}(x,y)=\frac{\partial^2F_{\xi,\eta}(x,y)}{\partial x\partial y}=(F_\xi(x)\cdot F_\eta(y))''_{xy}=(F_\xi'(x)\cdot F_\eta(y))'_y=$$

$$=F_\xi'(x)\cdot F_\eta'(y)=f_\xi(x)\cdot f_\eta(y)$$

Якщо неперервні ВВ ξ та η є незалежними, то функція щільності двовимірної випадкової величини (ξ,η) є добутком функцій щільності її одновимірних компонент :

$$f_{\xi,\eta}(x,y) = f_{\xi}(x)\cdot f_{\eta}(y) \qquad (11.12)$$

Ця властивість називається *характеристична властивість функції щільності.*

Вказані у формулах (11.11), (11.12) умови ***є необхідними і достатніми умовами того, що величини*** ξ ***та*** η ***є незалежними.***

11.4.3. Математичне сподівання добутку двох незалежних величин

На прикладі неперервних ξ та η знайдемо математичне сподівання їх добутку:

$$M\{\xi\cdot\eta\} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x\cdot y\cdot f_{\xi,\eta}(x,y)dxdy = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x\cdot y\cdot f_{\xi}(x)\cdot f_{\eta}(y)dxdy =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x\cdot f_{\xi}(x)dx \int_{-\infty}^{+\infty} y\cdot f_{\eta}(y)dy = M_{\xi}\cdot M_{\eta}$$

Якщо ξ ***та*** η ***є незалежними, то*** **математичне сподівання їх добутку** ***є добутком математичних сподівань*** ξ ***та*** η ***:***

$$M\{\xi\cdot\eta\} = M_{\eta}\cdot M_{\xi} \qquad (11.13)$$

11.4.4. Кореляційний момент (коваріація) незалежних величин

Застосовуючи формулу (11.2) та враховуючи (11.13) знайдемо кореляційний момент двох незалежних ξ та η***:***

$$k_{\xi\eta} = M\{\xi\cdot\eta\} - M_{\xi}\cdot M_{\eta} = M_{\xi}\cdot M_{\eta} - M_{\xi}\cdot M_{\eta} = 0.$$

Кореляційний момент (коваріація) незалежних величин дорівнює 0.

Отже, ***якщо величини є незалежними, то вони також є некорельованими.*** Але обернене твердження не завжди є вірним. Якщо величини некорельовані, то це не означає їх незалежність, наприклад, див. Приклад 11.2.

$$\xi,\eta - незалежні \Rightarrow \xi,\eta - некорельовані$$

$$\xi,\eta - незалежні \neq \xi,\eta - некорельовані$$

11.4.5. Дисперсія суми та різниці двох незалежних величин

Оскільки для некорельованих величин виконується формули (11.9), (11.10), то і ***для незалежних*** ξ ***та*** η ***дисперсія суми та різниці цих двох величин дорівнює сумі їх дисперсій:***

$$D\{\xi+\eta\} = D_{\xi} + D_{\eta}$$

(11.14)

$$D(\xi-\eta) = D_{\xi} + D_{\eta}. \qquad (11.15)$$

Зауваження. Властивість дисперсії суми незалежних величин, яка задана формулою (11.14), ми вже розглядали у Лекції №8 та застосовували її для дискретних незалежних величин, зараз ми обгрунтували цю властивість і для неперервних незалежних випадкових величин.

Приклад 11.3. Нехай двовимірна випадкова величина (ξ,η) є нормально розподіленою, тобто її щільність розподілу

$$f_{\xi,\eta}(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}}\cdot e^{-\frac{1}{2(1-r^2)}\left(\frac{(x-a)^2}{\sigma_1^2}-2r\frac{(x-a)(y-b)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-b)^2}{\sigma_2^2}\right)},$$ де r – коефіцієнт кореляції.

Якщо $r=0$, тобто величини ξ та η є некорельованими, тоді

$$f_{\xi,\eta}(x,y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}\cdot e^{-\frac{(x-a_1)^3}{2\sigma_1^2}}\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}\cdot e^{-\frac{(x-a_2)^3}{2\sigma_2^2}}=f_\xi(x)\cdot f_\eta(x).$$

Це означає, що $\xi\sim N(a_1,\sigma_1)$ та $\eta\sim N(a_2,\sigma_2)$ є незалежними. Для нормально розподілених величин некорельованість еквівалентна їх незалежності.

11.5. Поняття про n-вимірні випадкові величини

Систему n випадкових одновимірних величин ξ_k, $k=1,...,n$, називають n-вимірною ВВ або *випадковим вектором:* $\bar{\xi}=(\xi_1,\xi_2,...\xi_n)$.

Функція розподілу визначається як $F_{\xi_1,...,\xi_n}(x_1,x_2,...,x_n)=P\{\xi_1<x_1,...,\xi_n<x_n\}$ (кома всередині ймовірності означає перетин подій $\xi_i<x_i$, де $i=\overline{1,n}$).

Властивості такої функції розподілу аналогічні властивостям функції розподілу ймовірностей двовимірної ВВ.

Щільність розподілу неперервної n-вимірної ВВ можна знайти за формулою :

$$f_{\xi_1,...,\xi_n}(x_1,...,x_n)=\frac{\partial^n F_{\xi_1,...,\xi_n}(x_1,x_2,...,x_n)}{\partial x_1...\partial x_n}$$ в точках, де щільність неперервна.

Умова нормування для системи n неперервних випадкових величин

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}...\int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi_1,...,\xi_n}(x_1,...,x_n)dx_1dx_2...dx_n=1 .$$

Кореляційний момент компонент ξ_i,ξ_j: $k_{\xi_i\xi_j}=M\{(\xi_i-M_i)(\xi_j-M_j)\}$.

Кореляційна матриця системи n випадкових величин має вигляд:

$$\begin{pmatrix} k_{11} & ...... & k_{1n} \\ k_{21} & ...... & k_{2n} \\ k_{n1} & ...... & k_{nn} \end{pmatrix}.$$

На головній діагоналі кореляційної матриці стоять дисперсії компонент $k_{ii}=\sigma_i^2$, решта елементів – кореляційні моменти (коваріації). Оскільки $k_{ij}=k_{ji}$, то матриця є симетричною.

Запитання для самоконтролю.

1. Що називають кореляційним моментом двох випадкових величин?

2. Що називають коефіцієнтом кореляції двох випадкових величин? Яке максимальне значення він може набути?

3*. Які випадкові величини називаються некорельованими?*

4. Які випадкові величини називаються незалежними?

5. Якщо дві випадкові величини є незалежними, чи можна стверджувати, що вони є некорельованими? А навпаки?

6*. У якому випадку функція щільності двовимірної випадкової величини* (ξ,η) *є добутком функцій щільності її одновимірних компонент?*

7. Що можна стверджувати, якщо функція розподілу двовимірної випадкової величини (ξ,η) *є добутком функцій розподілу її одновимірних компонент, то ці компоненти є незалежними?*

*8. Які числові характеристики двовимірної випадкові величини ви знаєте***?**

9. Чому дорівнює дисперсія суми та різниці двох незалежних випадкових величин?

10. Як знайти математичне сподівання добутку незалежних випадкових величин?

Практичне заняття №11
КОРЕЛЬОВАНІСТЬ та НЕЗАЛЕЖНІСТЬ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН

Приклади розв'язування задач

Задача 11.1. Розглянемо семестрові оцінки з математики (випадкова величина ξ) та з фізики (випадкова величина η) групи студентів. При цьому оцінкам A, B, C, D, E поставимо у відповідність числа A-4, B-3, C-2, D-1, E-0. Таким чином, (ξ,η) – двовимірна випадкова величина. У нашому розпорядженні є інформація про оцінки 10 студентів у вигляді пар відповідних чисел:

Студент 1	(4,3)
Студент 2	(2,1)
Студент 3	(1,1)
Студент 4	(2,2)
Студент 5	(4,4)
Студент 6	(3,2)
Студент 7	(0,0)
Студент 8	(1,0)
Студент 9	(0,0)
Студент 10	(2,0)

Приймаючи відносну частоту пари за її ймовірність, скласти закон розподілу ξ,η. Знайти коефіцієнт кореляції величин ξ,η і відкоментувати його значення.

Розв'язання. Перепишемо дані у вигляді таблиці:

$\xi \setminus \eta$	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	p_k
0	*0,2*	_	_	_	_	*0,2*
1	*0,1*	*0,1*	_	_	_	*0,2*
2	*0,1*	*0,1*	*0,1*	_	_	*0,3*
3	_	_	*0,1*	_	_	*0,1*
4	_	_	_	*0,1*	*0,1*	*0,2*
q_i	*0,4*	*0,2*	*0,2*	*0,1*	*0,1*	*1*

Випишемо ряди розподілу для кожної випадкової величини ξ та η окремо.

Ряд розподілу ξ:

x_k	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*
p_k	*0,2*	*0,2*	*0,3*	*0,1*	*0,2*

Ряд розподілу η:

y_i	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*
q_i	*0,4*	*0,2*	*0,2*	*0,1*	*0,1*

Знайдемо математичне сподівання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення випадкової величини ξ.

$$M_{\xi}=\sum_{k=0}^{4}x_k\cdot p_k=0\cdot 0,2+1\cdot 0,2+2\cdot 0,3+3\cdot 0,1+4\cdot 0,2=1,9;$$

$$D_{\xi}=M\{(\xi-M_{\xi})^2\}=\sum_{k=0}^{4}(x_k-M_{\xi})^2 p_k=(0-1,9)^2\cdot 0,2+$$

$$+(1-1,9)^2\cdot 0,2+(2-1,9)^2\cdot 0,3+(3-1,9)^2\cdot 0,1+(4-1,9)^2\cdot 0,2=1,89;$$

$$\sigma_{\xi}=\sqrt{D_{\xi}}=1,37.$$

Знайдемо математичне сподівання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення випадкової величини η.

$$M_{\eta}=\sum_{i=0}^{4}y_i\cdot q_i=0\cdot 0,4+1\cdot 0,2+2\cdot 0,2+3\cdot 0,1+4\cdot 0,1=1,3;$$

$$D_{\eta}=M\{(\eta-M_{\eta})^2\}=\sum_{i=0}^{4}(y_i-M_{\eta})^2 q_i=(0-1,9)^2\cdot 0,4+$$

$$+(1-1,9)^2\cdot 0,2+(2-1,9)^2\cdot 0,2+(3-1,9)^2\cdot 0,1+(4-1,9)^2\cdot 0,1=1,81;$$

$$\sigma_{\eta}=\sqrt{D_{\eta}}=1,35.$$

Знайдемо кореляційний момент величин ξ та η.

$$k_{\xi\eta}=M\{\xi\cdot\eta\}-M_{\xi}\cdot M_{\eta}=\sum_{i,k=0}^{4}x_k y_i p_{ki}-M_{\xi}\cdot M_{\eta}=$$

$$=0\cdot 0,2+0\cdot 0,1+1\cdot 0,1+0\cdot 0,1+2\cdot 0,1+4\cdot 0,1+6\cdot 0,1+$$

$$+12\cdot 0,1+16\cdot 0,1-1,9\cdot 1,3=4,1-1,9\cdot 1,3=1,63$$

Коефіцієнт кореляції:

$$r_{\xi\eta}=\frac{k_{\xi\eta}}{\sigma_{\xi}\cdot\sigma_{\eta}}=\frac{1,63}{1,37\cdot 1,35}=0,88.$$

Оскільки коефіцієнт кореляції є близький до 1, можна вважати , що величини ξ та η достатньо тісно пов'язані між собою лінійною залежністю.

Задача 11.2. Система неперервних випадкових величин (ξ,η) має щільність розподілу ймовірностей

$$f_{\xi,\eta}(x,y)=\begin{cases}a(xy+y^2),\ (\mathrm{x},\mathrm{y})\in \mathrm{D},\\ 0, \qquad (x,y)\notin D,\end{cases} \qquad D=\{(x;y):0\le x\le 1;0,5x\le y\le x\}.$$

Знайти значення сталої a, математичні сподівання $M(\xi)$ та $M(\eta)$, середні квадратичні відхилення $\sigma(\xi)$ і $\sigma(\eta)$, кореляційний момент $k_{\xi\eta}$ і коефіцієнт кореляції $r_{\xi\eta}$.

Розв'язання. Для обчислення константи a скористаємось умовою нормування функції щільності, а саме: $\iint\limits_D f_{\xi,\eta}(x;y)dxdy = 1$. Тоді

$$\iint\limits_D a(xy+y^2)dxdy = a\cdot\int\limits_0^1\int\limits_{0,5x}^x (xy+y^2)dxdy =$$

$$a\cdot\int\limits_0^1\left(x(\frac{x^2}{2}-\frac{0,25x^2}{2})+(\frac{x^3}{3}-\frac{0,125x^3}{3})\right)dx = a\cdot\int\limits_0^1\frac{4x^3}{6}=\frac{a}{6}.$$

Звідки $\frac{a}{6}=1$ тому $a=6$.

Математичне сподівання знайдемо за формулою $M(\xi)=\iint\limits_D x\, f_{\xi,\eta}(x;y)dxdy.$ Отримуємо

$$M(\xi)=6\iint\limits_D x(xy+y^2)\,dxdy = 6\int\limits_0^1 x\left(\int\limits_{0,5x}^x (xy+y^2)dy\right)dx = 6\int\limits_0^1\frac{2}{3}x^4\,dx=\frac{4}{5}=0,8.$$

Аналогічно, за формулою $M(\eta)=\iint\limits_D y\, f_{\xi,\eta}(x;y)dxdy$ обчислюємо математичне сподівання

$$M(\eta)=\iint\limits_D y(xy+y^2)dxdy = 6\int\limits_0^1\left(\int\limits_{0,5x}^x (xy^2+y^3)dy\right)dx = 6\int\limits_0^1\left(\frac{6,3125x^4}{12}\right)dx =$$

$$=0,6325\approx 0,63.$$

Користуючись формулою $D(\xi)=M(\xi^2)-M^2(\xi)$ обчислимо дисперсію ξ:

$$D(\xi)=6\iint\limits_D x^2(xy+y^2)dxdy-(0,8)^2\approx 0,0267,$$

середнє квадратичне відхилення $\sigma(\xi)=\sqrt{D(\xi)}=\sqrt{0,0267}\approx 0,163.$

Аналогічно, для величини η: обчислюємо дисперсію:

$$D(\eta)=M(\eta^2)-M^2(\eta)=6\iint\limits_D y^2(xy+y^2)dxdy-(0,63)^2\approx 0,428;$$

середнє квадратичне відхилення $\sigma(\eta)=\sqrt{D(\eta)}=\sqrt{0,428}\approx 0,654$.

Кореляційний момент обчислимо за формулою (11.2): $k_{xy}=\iint\limits_D xy\, f(x;y)\,dxdy - M(\xi)M(\eta) = 6\iint\limits_D xy(xy+y^2)\,dxdy - 0{,}8\cdot 0{,}63 \approx 0{,}021.$

Коефіцієнт кореляції обчислимо, користуючись (11.3):

$$r_{xy}=\frac{0{,}021}{0{,}163\cdot 0{,}654}\approx 0{,}2\,.$$

Тобто величини ξ та η слабо корельовані.

Задача 11.3. Нехай з круга $\left\{(x,y): x^2+y^2\le 1\right\}$ навмання обирається випадкова точка (всі положення точки у крузі є рівноможливими, маємо рівномірний розподіл). Знайти сумісний розподіл полярних координат ρ та φ цієї точки. Чи будуть вони незалежними?

Розв'язання. Нехай точка має випадкові декартові координати (ξ,η).

Знайдемо сумісну функцію розподілу полярних координат ρ та φ цієї точки

$$F_{\rho,\varphi}(x,y)=P\{\rho<x,\varphi<y\}.$$

Очевидно, що $0\le\rho\le 1$; $0\le\varphi\le 2\pi$. Тому логічно розглянути окремі області, що породжує таке розбиття.

1) $x\le 0$ або $y\le 0$ $\Rightarrow F_{\xi,\eta}(x,y)=0$;

2) $x>1$ і $y>2\pi$ $\Rightarrow F_{\xi,\eta}(x,y)=1$;

3) $0<x\le 1$; $0<y\le 2\pi$

Тоді маємо такий рисунок

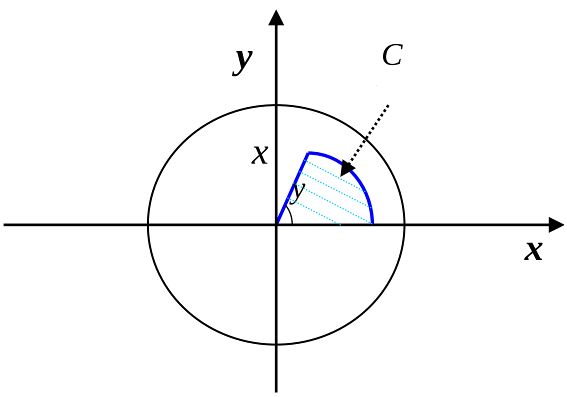


Рис. 11.1.

Тут C – сектор круга радіуса x з кутом y. Тоді (за геометричними ймовірностями) треба знайти ймовірність, що кинута навмання в одиничний круг точка попаде і в заштрихований сектор.

$$F_{\rho,\varphi}(x,y) = \frac{\frac{x^2 y}{2}}{\pi 1^2} = \frac{x^2 y}{2\pi}$$

4) $0 < x \leq 1$; $y > 2\pi$

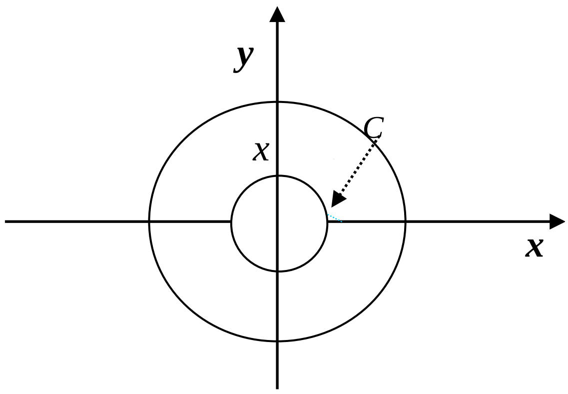


Рис. 11.2.

У даному випадку C – маленький круг радіуса *x*. Так само, за геометричними ймовірностями маємо

$$F_{\rho,\varphi}(x,y) = \frac{x^2\pi}{\pi} = x^2$$

5) $x > 1$; $0 < y \leq 2\pi$. Рисунок матиме вже інший вигляд, областю C буде сектор радіуса 1.

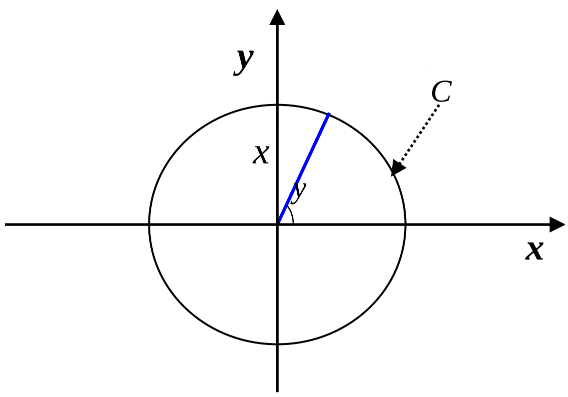


Рис.11.3.

У цьому випадку $F_{\rho,\varphi}(x,y) = \frac{y}{2\pi}$.

Запишемо знайдену функцію розподілу.

$$F_{\rho,\varphi}(x,y)=\begin{cases}0, & \text{якщо} \quad x\le 0 \ \text{або} \ y\le 0;\\ \dfrac{x^2y}{2\pi}, & \text{якщо} \quad 0<x\le 1\,; \quad 0<y\le 2\pi;\\ x^2, & \text{якщо} \quad 0<x\le 1\,; \quad y>2\pi;\\ \dfrac{y}{2\pi}, & \text{якщо} \quad x>1\,; \quad 0<y\le 2\pi;\\ 1, & \text{якщо} \quad x>1 \ i \ \ y>2\pi.\end{cases}$$

Для знаходження функцій розподілу окремо ρ і φ шукаємо границі

$$F_{\rho}(x)=\lim_{y\to\infty}F_{\rho,\varphi}(x,y)=\begin{cases}0, & \text{якщо} \quad x\le 0\,;\\ x^2, & \text{якщо} \quad 0<x\le 1\,;\\ 1, & \text{якщо} \quad x>1.\end{cases}$$

$$F_{\varphi}(y)=\lim_{x\to\infty}F_{\rho,\varphi}(x,y)=\begin{cases}0, & \text{якщо} \quad y\le 0;\\ \dfrac{y}{2\pi}, & \text{якщо} \quad 0<y\le 2\pi;\\ 1, & \text{якщо} \quad y>2\pi.\end{cases}$$

Як ми бачимо, умова незалежності виконується

$F_{\rho,\varphi}(x,y)=F_{\rho}(x)\cdot F_{\varphi}(y)$.

Випадкові величини є незалежними.

Завдання для самостійного виконання

101. Двовимірна дискретна випадкова величина (ξ,η) задана законом розподілу

$\xi \setminus \eta$	*1*	*2*	*3*	*4*
2	*0,05*	*0,10*	*0,04*	*0,01*
5	*0,02*	*0,08*	*0,07*	*0,03*
8	*0,13*	*0,22*	*0,19*	*0,06*

Знайти закони розподілу кожної компоненти, їх математичні сподівання та коефіцієнт кореляції.

102. Двовимірна дискретна випадкова величина (ξ,η) задана законом розподілу

$\xi \setminus \eta$	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*
1,5	*0,02*	*0,07*	*0,13*	*0,28*	*0,10*
2,5	*0,11*	*0,08*	*0,05*	*0,12*	*0,04*

Знайти закони розподілу кожної компоненти, їх математичні сподівання та коефіцієнт кореляції.

103. Двовимірна дискретна випадкова величина (ξ,η) задана законом розподілу

$\xi \setminus \eta$	*1*	*2*	*3*	*4*
3	*0,02*	*0,10*	*0,07*	*0,01*
6	*0,05*	*0,08*	*0,04*	*0,03*
9	*0,10*	*0,10*	*0,09*	*0,03*
12	*0,03*	*0,12*	*0,10*	*0,03*

Знайти закони розподілу кожної компоненти, їх математичні сподівання та коефіцієнт кореляції.

104. Двовимірна ВВ (ξ,η) рівномірно розподілена всередині трикутника з вершинами (0,0); (0,1); (1,0). Знайти $k_{\xi\eta}$ та математичні сподівання компонент.

105. Щільність нормального розподілу ймовірностей системи випадкових величин (ξ,η) має вигляд

$$f_{\xi,\eta}(x,y) = ae^{-4x^2-6xy-10y^2}, \quad x \in R, \ \ y \in R.$$

Знайти значення сталої a, математичні сподівання $M(\xi)$, $M(\eta)$, середні квадратичні відхилення $\sigma(\xi)$, $\sigma(\eta)$, кореляційний момент $k_{\xi\eta}$ і коефіцієнт кореляції $r_{\xi\eta}$.

106. Всередині квадрата $D=\left\{(x,y)\in R^2, 0\le x\le\frac{\pi}{2}, 0\le y\le\frac{\pi}{2}\right\}$ двовимірна щільність розподілу задана формулою $f_{\xi,\eta}(x,y)=\cos x\cdot\cos y$, а зовні квадрата $f_{\xi,\eta}(x,y)=0.$ Довести, що компоненти ξ та η незалежні.

107. Всередині квадрата $D=\left\{(x,y)\in R^2, 0\le x\le\pi, 0\le y\le\pi\right\}$ щільність розподілу двовимірної випадкової величини (ξ,η) задана формулою $f_{\xi,\eta}(x,y)=\frac{1}{4}\sin x\cdot\sin y$, а в інших точках простору R^2 $f_{\xi,\eta}(x,y)=0.$

Знайти: математичні сподівання та дисперсії компонент, кореляційний момент ξ та η.

108. Задано функцію щільності розподілу ймовірностей двовимірної неперервної випадкової величини (ξ,η):

$$f_{\xi,\eta}(x,y)=\begin{cases}\left(4xye^{-y^2-x^2}\right), & (x,y)\in D,\\ 0, & (x,y)\notin D,\end{cases} \quad \text{де} \quad D=\left\{(x,y): x\ge 0,\ y\ge 0\right\}.$$

Знайти математичні сподівання та дисперсії компонент ξ та η. Обчислити кореляційний момент ξ та η.

109. Задано функцію щільності розподілу системи випадкових величини (ξ,η):

$$f_{\xi,\eta}(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi^2(1+x^2)(4+y^2)}, & (x,y)\in D,\\ 0, & (x,y)\notin D,\end{cases} \quad \text{де } D=\left\{(x,y): x\ge 0, y\ge 0\right\}.$$

Визначити, чи є компоненти ξ,η незалежними.

110. Задано функцію щільності розподілу ймовірностей двовимірної неперервної випадкової величини (ξ,η):

$$f_{\xi,\eta}(x,y)=\begin{cases}a, & (x,\ y)\in \mathrm{D},\\ 0, & (x,\ y)\notin \mathrm{D},\end{cases} \qquad D=\left\{(x,y): -2\le x\le 4, -3\le y\le 5\right\}.$$

Знайти: сталу *a*. Кореляційний момент $k_{\xi\eta}$ та коефіцієнт кореляції $r_{\xi\eta}$. Визначити, чи є компоненти ξ,η незалежними.

ЛЕКЦІЯ №12

ГРАНИЧНІ ТЕОРЕМИ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ. ЗАКОН ВЕЛИКИХ ЧИСЕЛ. ТЕОРЕМА ЧЕБИШОВА ТА ЇЇ НАСЛІДКИ

Граничні теореми теорії ймовірностей встановлюють закономірності, які виникають у результаті дії великої кількості різних випадкових факторів, коли число випробувань є нескінченно великим. Результат кожного окремого випробування можна передбачити лише з певною долею ймовірності, але узагальнений результат великої кількості випробувань стає достовірною подією, перестає бути випадковим, виявляє статистичну стабільність.

12.1. Нерівність Чебишова

Лема. Нехай ξ є неперервною випадковою величиною. Розглянемо математичне сподівання квадрата цієї величини.

$$M\left\{\xi^2\right\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_\xi(x)dx = \int_{|x|\le\varepsilon} x^2 f_\xi(x)dx + \int_{|x|\ge\varepsilon} x^2 f_\xi(x)dx \ge$$

$$\ge \int_{|x|\ge\varepsilon} x^2 f_\xi(x)dx \ge \int_{|x|\ge\varepsilon} \varepsilon^2 f_\xi(x)dx = \varepsilon^2 \int_{|x|\ge\varepsilon} f_\xi(x)dx = \varepsilon^2 P(|\xi|\ge\varepsilon).$$

Отже, $M\left\{\xi^2\right\} \ge \varepsilon^2 P(|\xi|\ge\varepsilon)$.

Звідки отримаємо нерівність:

$$P(|\xi|\ge\varepsilon) \le \frac{M\left\{\xi^2\right\}}{\varepsilon^2} \qquad (12.1)$$

Доведення проведено для неперервної випадкової величини, але нерівність (12.1) справджується також і для дискретної випадкової величини.

Нерівність Чебишова. Якщо випадкова величина ξ має скінченне математичне сподівання M_ξ і скінченну дисперсію D_ξ, то ймовірність того, що значення ξ відхиляються від M_ξ більше ніж на ε, не перевищує $\frac{D_\xi}{\varepsilon^2}$:

$$P(\left|\xi - M_\xi\right| \ge \varepsilon) \le \frac{D_\xi}{\varepsilon^2} \qquad (12.2)$$

Доведення. Застосуємо лему для випадкової величини $\xi - M_\xi$. Підставимо у нерівність (10.1) замість ξ величину $(\xi - M_\xi)$:

$$P(\left|\xi - M_\xi\right| \ge \varepsilon) \le \frac{M\{(\xi - M_\xi)^2\}}{\varepsilon^2} \quad .$$

Враховуючи, що $M\left\{(\xi - M_\xi)^2\right\} = D_\xi$, отримаємо нерівність (12.2), яка і носить назву нерівність Чебишова.

Якщо розглянемо подію, протилежну до події $(\left|\xi - M_\xi\right| \ge \varepsilon)$, то нерівність (12.2) можна переписати у наступній формі:

$$P(\left|\xi - M_\xi\right| < \varepsilon) \ge 1 - \frac{D_\xi}{\varepsilon^2} \qquad (12.3)$$

Приклад 12.1. Нехай задано випадкову величину ξ, математичне сподівання та дисперсія якої дорівнюють M_ξ, D_ξ відповідно, середнє квадратичне відхилення $\sigma_\xi = \sqrt{D_\xi}$. Оцінити ймовірність того, що випадкова величина відхиляється від свого середнього значення менше, ніж на $3\sigma_\xi$.

Розв'язання. У нерівності (12.3) покладемо $\varepsilon = 3\sigma_\xi$, тоді:

$$P(\left|\xi - M_\xi\right| < 3\sigma_\xi) \ge 1 - \frac{\sigma^2{}_\xi}{9\sigma_\xi{}^2} = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9} \approx 0{,}889.$$

Отримана оцінка є достатньо грубою. Наприклад, для нормально розподіленої випадкової $\xi \sim N(a;\sigma)$ ця оцінка складає за відомим правилом “3σ”: $P(\left|\xi - M_\xi\right| < 3\sigma) \approx 0{,}997$.

Нерівність Чебишова має переважно теоретичне значення та застосовується при доведенні законів великих чисел, наприклад, при доведенні теореми Чебишова.

12.2. Теорема Чебишова

Теорема. Нехай $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ – незалежні випадкові величини, які мають скінченні математичні сподівання $m_1, m_2, \ldots, m_n$ та дисперсії $D_1, D_2, \ldots, D_n$, що обмежені у сукупності, тобто $D_i \le B, \quad i = \overline{1,n}$, $B = const,$ тоді

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_n}{n}-\frac{m_1+m_2+\ldots+m_n}{n}\right|\ge\varepsilon\right\}=0; \qquad (12.4)$$

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_n}{n}-\frac{m_1+m_2+\ldots+m_n}{n}\right|<\varepsilon\right\}=1. \qquad (12.5)$$

Доведення. Розглянемо випадкову величину $\xi=\dfrac{\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_n}{n}$. Її математичне сподівання:

$$M_\xi=M\left\{\frac{\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_n}{n}\right\}=\frac{1}{n}M\left\{\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_n\right\}=\frac{m_1+m_2+\ldots+m_n}{n}.$$

Дисперсію можна оцінити так:

$$D_\xi=D\left\{\frac{\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_n}{n}\right\}=\frac{1}{n^2}D\left\{\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_n\right\}=\left|\begin{array}{c}\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n -\\ \textit{незалежні}\end{array}\right|=$$

$$=\frac{D_1+D_2+\ldots+D_n}{n^2}\le\frac{B+B+\ldots+B}{n^2}=\frac{Bn}{n^2}=\frac{B}{n}.$$

Застосуємо нерівності (12.4) та (12.5) для випадкової величини $\xi=\dfrac{\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_n}{n}$.

З нерівності (12.4) випливає

$$P\left\{\left|\frac{\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_n}{n}-\frac{m_1+m_2+\ldots+m_n}{n}\right|\ge\varepsilon\right\}\le\frac{D_\xi}{\varepsilon^2}\le\frac{B}{n\varepsilon^2} \qquad (12.6)$$

А з нерівності (12.5) :

$$P\left\{\left|\frac{\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_n}{n}-\frac{m_1+m_2+\ldots+m_n}{n}\right|<\varepsilon\right\}\ge1-\frac{D_\xi}{\varepsilon^2}\ge1-\frac{B}{n\varepsilon^2} \qquad (12.7)$$

У нерівностях (12.6), (12.7) перейдемо до границі при $n\to\infty$. Отримаємо:

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_n}{n}-\frac{m_1+m_2+\ldots+m_n}{n}\right|\ge\varepsilon\right\}=0\ ;$$

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_n}{n}-\frac{m_1+m_2+\ldots+m_n}{n}\right|<\varepsilon\right\}=1.$$ Теорему доведено.

Наслідок. (Частинний випадок теореми Чебишова)

Нехай $\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n$ – незалежні, однаково розподілені випадкові величини, $M\left\{\xi_i\right\}=a,\ D\left\{\xi_i\right\}=D,\ i=\overline{1,n}$. Тоді:

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_n}{n}-a\right|\ge\varepsilon\right\}=0, \tag{12.8}$$

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_n}{n}-a\right|<\varepsilon\right\}=1. \tag{12.9}$$

Тобто, при великих n випадкова величина, що є середнім арифметичним випадкових величин, майже не відрізняється від a : $\frac{\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_n}{n}\approx a$. Її дисперсія стає практично нульовою: $D_\xi \le \frac{B}{n}\approx 0$.

Теореми Чебишова та інші граничні теореми, що описують закономірності поведінки середнього значення випадкових величин при великих n, називають ***законами великих чисел***.

Закони великих чисел стверджують, що при великих n середнє арифметичне випадкових величин поводить себе як невипадкова величина, набуває властивості статистичної стійкості. У практичному застосуванні середній результат достатньо великої кількості вимірювань будь-якої величини буде скільки завгодно близьким до величини, що вимірюється.

12.3. Збіжність за ймовірністю

Говорять, що послідовність ξ_n збігається до числа a за ймовірністю, позначається: $\xi_n \xrightarrow{P} a,\ n\to\infty$, якщо для довільного $\forall\varepsilon>0$ $\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\xi_n-a\right|<\varepsilon\right\}=1.$

Таким чином, у теоремі Чебишова

$$\frac{\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_n}{n}-\frac{m_1+m_2+\ldots+m_n}{n}\xrightarrow{P}0,\ n\to\infty.$$

12.4. Наслідки. Теореми Бернуллі та Пуассона

12.4.1.Теорема Бернуллі

Теорема. Якщо m – кількість появ події А у n незалежних випробуваннях, p – ймовірність появи події А у кожному з випробувань, то для довільного $\varepsilon>0$

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\left|\frac{m}{n}-p\right|<\varepsilon\right\}=1.$$

Доведення. Нехай відбувається серія *n* незалежних випробувань, в кожному з яких подія А може відбутися з ймовірністю *p* і не відбутися з ймовірністю *q=1–p*.

Нехай *m* кількість появ події А: $0 \le m \le n$. Випадкову величину *m* можна подати як суму $m = \xi_1 + \xi_2 + ... + \xi_n$, де ξ_i - індикатор події А в *i*-тому випробуванні: $M(\xi_i) = 1 \cdot p + 0 \cdot q = p$, $D(\xi_i) = qp$.

Величина $\frac{m}{n} = \frac{\xi_1 + \xi_2 + ... + \xi_n}{n}$ є частотою появи події А.

За формулою (12.9) (частинний випадок теореми Чебишова):

$\lim\limits_{n\to\infty}\left\{\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right\} = 1$. Теорему доведено.

Теорема Бернуллі стверджує, що при великих *n:* $\frac{m}{n} \approx p$. Отже, при великих *n* частота події А стає невипадковою величиною. Теорема Бернуллі дає теоретичне обгрунтування заміни невідомої ймовірності події її частотою, або статистичною ймовірністю, отриманою в *n* повторних незалежних випробуваннях, що проводяться в однакових умовах.

Зауваження. В умовах теореми Бернуллі нерівність Чебишова набуває вигляду: $P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \le \varepsilon\right) > 1 - \frac{pq}{n\varepsilon^2}$.

Безпосереднім узагальненням теореми Бернуллі є теорема Пуассона, коли ймовірності події у кожному випробування різні.

12.4.2. Теорема Пуассона

Теорема. Якщо *m* – число появ події А у серії *n* незалежних випробувань, у яких подія А може відбутися з ймовірностями $p_1, p_2, ... p_n$, тоді різниця випадкових величин $\frac{m}{n}$ (частота появи події А), та середнього арифметичного ймовірностей $p_1, p_2, ... p_n$, є збіжною за ймовірністю до нуля:

$$\frac{m}{n} - \frac{p_1 + p_2 + ... + p_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{P} 0.$$

12.5. Центральна гранична теорема

Теорема. Нехай $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ – незалежні випадкові величини, що мають математичні сподівання $m_1, m_2, ..., m_n$, та дисперсії $D_1, D_2, ..., D_n$.

Нехай існують центральні абсолютні моменти третього порядку, а саме: $\beta_i = M\left\{| \xi_i - m_i |^3\right\}$ такі, що при $n \to \infty$ $\dfrac{\sum_{i=1}^{n}\beta_i}{(\sum_{i=1}^{n} D_i)^{\frac{3}{2}}} \to 0$.

Розглянемо величину $\eta^{(n)} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n}\xi_i - \sum_{i=1}^{n} m_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} D_i}}$.

Помітимо, що ця величина є центрованою та нормованою: $M\left\{\eta^{(n)}\right\} = 0; \quad D\left\{\eta^{(n)}\right\} = 1.$

Функція розподілу цієї випадкової величини : $F_{\eta^{(n)}}(x) = P\left\{\eta^{(n)} < x\right\}$.

Тоді при $n \to \infty$

$$F_{\eta^{(n)}}(x) \to F_{\xi^0}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{1}{2} + \Phi(x).$$

Тобто, при великих *n* випадкова величина $\eta^{(n)}$ поводить себе як нормально розподілена: $\eta^{(n)} \approx N(0;1)$.

З центральної граничної теореми як наслідок можна отримати локальну та інтегральну теореми Муавра-Лапласа.

12.6. Локальна теорема Муавра-Лапласа

Теорема. Якщо у кожному з *n* незалежних випробувань подія А може відбутися з ймовірністю *p* і не відбутися з ймовірністю *q, q=1-p,* то ймовірність $P_n(m)$ того, що подія А відбудеться рівно *m* разів, наближено можна обчислити за формулою:

$$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{npq}} e^{-\frac{(m-np)^2}{2npq}} = \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi\left(\frac{m-np}{\sqrt{npq}}\right), \qquad \text{де} \qquad \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} -$$

табульована функція Гауса, щільність стандартного нормального розподілу.

12.7. Інтегральна теорема Муавра-Лапласа

Теорема. Якщо здійснюється n незалежних випробувань, у кожному з яких ймовірність появи випадкової події A є величиною сталою і дорівнює p, то ймовірність $P_n(m_1 \le m < m_2)$ того, що m - кількість появи події А належить інтервалу $\left[m_1, m_2\right)$, наближено дорівнює:

$$P(m_1 \le m < m_2) \approx \varPhi\left(\frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \varPhi\left(\frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}\right),$$

$\varPhi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ – табульована функція Лапласа. Її значення знаходяться в Додатку 2.

Приклад 12.2. Завод виготовляє 80% виробів першого сорту. Навмання відібрано 800 виробів. Яка ймовірність того, що число виробів першого сорту виявиться в межах від 600 до 680 штук?

Розв'язання. За умовою

$p = 0{,}8,\ q = 0{,}2,\ n = 800,\ m_1 = 600,\ m_2 = 680.$

$n \cdot p = 800 \cdot 0{,}8 = 640,\ \sqrt{npq} = \sqrt{800 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2} \approx 11{,}3.$

$$P(600 \le m < 680) \approx \Phi\left(\frac{680 - 640}{11{,}3}\right) - \Phi\left(\frac{600 - 640}{11{,}3}\right) = 2\Phi\left(\frac{40}{11{,}3}\right) =$$

$$= 2\Phi(3{,}5) = 2 \cdot 0{,}49977 = 0{,}99954.$$

Запитання для самоконтролю

1. Запишіть нерівність Чебишова. В яких формах ця нерівність використовується на практиці?

2. Сформулюйте теорему Чебишова.

3. Сформулюйте наслідки з теореми Чебишова.

4. Сформулюйте центральну граничну теорему.

5. Сформулюйте локальну та інтегральну теореми Муавра – Лапласа.

Практичне заняття №12

ТЕОРЕМА ЧЕБИШОВА ТА ЇЇ НАСЛІДКИ

Приклади розв'язування задач

Задача 12.1. Ймовірність появи події у кожному випробуванні однакова і дорівнює 0,3. Застосовуючи нерівність Чебишова, знайти найменше число випробувань, необхідних для того, щоб ймовірність відхилення частоти події від її ймовірності була за абсолютною величиною не більше 0,01, більше 0,99.

Розв'язання. Згідно з нерівністю $P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|\le\varepsilon\right)>1-\frac{pq}{n\varepsilon^2}$, яка є наслідком нерівності Чебишова для біноміального розподілу, якщо при відомих значеннях p, q *і* ε, n буде випробувано таким, що різниця $1-\frac{pq}{n\varepsilon^2}$ виявиться не менше даної в умові ймовірності P, то отримаємо нерівність $1-\frac{pq}{n\varepsilon^2}\ge P$, яка і визначить шукане найменше число випробувань n.

Ця нерівність при $p=0,3,\ q=0,7,\ \varepsilon=0,01$ *і* $P=0,99$ дає

$$1-\frac{0,3\times 0,7}{n\times 0,01^2}\ge 0,99 \text{ або } 0,01\ge\frac{0,21}{n\times 0,01^2}\Rightarrow n\ge 210000.$$

Найменше число випробувань дорівнює 210 000.

Задача 12.2. Математичне сподівання швидкості вітру на даній висоті дорівнює 25 км/г, а середнє квадратичне відхилення дорівнює 4,5 км/г. Які швидкості вітру можна очікувати з ймовірністю, не меншою 0,9?

Розв'язання. Із нерівності Чебишова випливає, що якщо при даній дисперсії D_ξ ε буде вибрано так, що $1-\frac{D_\xi}{\varepsilon^2}=0,9$, то умова задачі виконуватиметься. Отримаємо рівність, з якої знайдемо ε:

$$1-\frac{4,5^2}{\varepsilon^2}=0,9\Rightarrow\varepsilon=14,2.$$

Тоді $|\xi-25|\le 14,2$, тобто $10,8\le\xi\le 39,2$.

Задача 12.3. Дисперсія кожної із 3000 незалежних випадкових величин не перевищує 6. Оцінити ймовірність того, що відхилення середнього арифметичного цих випадкових величини від середнього арифметичного їх математичних сподівань не перевищить 0,3.

Розв'язання. Нерівність Чебишова для n незалежних випробувань має вигляд

$$P\left(\left|\frac{\xi_1+\xi_2+...+\xi_n}{n}-\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n}\right|\le\varepsilon\right)>1-\frac{B}{n\varepsilon^2}\ ,$$

де B – число, яким обмежена дисперсія.

Застосуємо цю нерівність при $\varepsilon=0,3$, $B=6$, $n=3000$, отримаємо:

$$P\left(\left|\frac{\xi_1+\xi_2+...+\xi_n}{n}-\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n}\right|\le 0,3\right)>1-\frac{6}{3\times 0,3^2}\ \approx 0,978\cdot$$

Отже, ймовірність шуканої події більша 0,978.

Задача 12.4. Чи можна застосувати до послідовності випадкових величин ξ_1, ξ_2, ..., ξ_n, теорему Чебишова, якщо ці випадкові величини мають розподіл:

x_k	$-100n$	0	$100n$
p_k	$\frac{1}{2n^2}$	$1-\frac{1}{n^2}$	$\frac{1}{2n^2}$

Розв'язання. Перевіримо виконання умови теореми Чебишова про обмеженість дисперсій даних випадкових величин. Оскільки

$$M(\xi_n)=-100n\cdot\frac{1}{2n^2}+0\cdot\left(1-\frac{1}{n^2}\right)+100n\cdot\frac{1}{2n^2}=0,$$ то дисперсія

$$D(\xi_n)=M\left(\xi_n^2\right)=\frac{10000n^2}{2n^2}+0^2\cdot\left(1-\frac{1}{n^2}\right)+\frac{10000n^2}{2n^2}=10000\cdot$$

Отже, $M(\xi_n)=0$ і дисперсії $D(\xi_n)=10000$, то до цієї послідовності можна застосувати теорему Чебишова.

Завдання для самостійного виконання

111. Із 1000 виробів навмання відібрано 200. Після перевірки серед них виявилось 15 бракованих. Оцінити ймовірність того, що в цій партії бракованих виробів буде не більше 10% і не менше 5%.

112. Скільки виробів потрібно взяти для перевірки якості продукції, щоб з ймовірністю 0,95 можна було стверджувати, що частка браку відрізнятиметься від ймовірності $p = 0{,}1$ випуску бракованої деталі не більше ніж на 0,02?

113. Добова потреба електроенергії в даному населеному пункті є випадковою величиною, математичне сподівання якої дорівнює 2000 квт./год., а дисперсія становить 20000. Оцінити ймовірність того, що в найближчий день витрати електроенергії у цьому населеному пункті будуть від 1500 до 2500 квт/год.

114. Нехай ймовірність того, що відремонтований годинник має хід у межах стандарту, дорівнює 0,97. Оцінити ймовірність того, що серед 1000 годинників частина тих, які мають хід у межах норми відхилятиметься (по абсолютній величині) від ймовірності 0,97 не більше як на 0,02.

115. При анонімному тестуванні виявилося, що 10% працівників підприємства зовсім не вживають спиртного. Випадкова величина ξ – кількість, людей, які зовсім не вживають спиртного у випадковій вибірці з 900 робітників. Вказати межі в які попадає випадкова величина ξ з ймовірністю 0,9.

116. При виробництві дискет брак становить 1%. Скільки дискет потрібно відібрати для перевірки, що з імовірністю 0,95 можна було б стверджувати, що у вибірці дискет відсоток бракованих відрізнятиметься від 1% не більше ніж на 0,5%?

117. При виробництві поліетиленових пакетів брак становить 5%. Скільки виробів потрібно відібрати для перевірки якості продукції, щоб з ймовірністю 0,9 можна було стверджувати, що частка бракованих пакетів становить від 4 до 6%?

118. В електричну мережу паралельно включено 20 лампочок. Ймовірність того, що за час T лампа буде включена дорівнює 0,8. Користуючись нерівністю Чебишова, оцінити ймовірність відхилення між кількістю включених ламп та їх середнім числом (математичним сподіванням) за час T буде: а) менше трьох; б) не менше трьох.

119. Дискретна випадкова величина задана законом розподілу

x_k	*0,1*	*0,4*	*0,6*
p_k	*0,2*	*0,3*	*0,5*

Оцінити ймовірність того, що $\left|\xi - M(\xi)\right| < \sqrt{0{,}4}$.

120. Послідовність незалежних випадкових величин $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$, задано законом розподілу

x_k	a	$-a$
p_k	$\frac{n}{2n+1}$	$\frac{n+1}{2n+1}$

Чи можна застосувати до заданої послідовності теорему Чебишова?

ЛЕКЦІЯ №13

ФУНКЦІЇ ВІД ВИПАДКОВОЇ ВЕЛИЧИНИ

13.1. Поняття про функції від випадкової величини

Якщо ξ – випадкова величина, а $y=\varphi(x)$ – деяка функція (фіксована, невипадкова), то $\eta=\varphi(\xi)$ є функцію від випадкової величини ξ.

Іншими словами: якщо кожному можливому значенню величини ξ поставлено у відповідність за деяким правилом значення величини η, то говорять, що задано функцію $\eta=\varphi(\xi)$. Наведемо приклади.

Приклад 13.1. Нехай ξ – дискретна ВВ, що задана рядом розподілу:

ξ	-3	-2	0	2
p_i	0,2	0,3	0,4	0,1

Розглянемо такі функції від цієї випадкової величини:

а) Нехай $\eta=\xi^3$. Якщо $\xi=x_i \Rightarrow \eta=y_i=x_i^3$, тоді $q_k=P\{\eta=y_k\}=\sum\limits_{i:\,x_i^3=y_k} p_i$.

Ряд розподілу величини η:

y_k	-27	-8	0	8
q_k	0,2	0,3	0,4	0,1

Як ми бачимо, функція φ в цьому випадку є взаємо однозначною: одному значенню η відповідає одне значення ξ, і навпаки. Тоді ймовірності в ряді розподілу η просто беруться без змін з розподілу ξ.

б) Нехай $\eta=\xi^2$. Якщо $\xi=x_i \Rightarrow \eta=y_i=x_i^2$, тоді $q_k=P\{\eta=y_k\}=\sum\limits_{i:\,x_i^2=y_k} p_i$.Ряд розподілу величини η:

y_k	0	4	9
q_k	0,4	0,4	0,2

Тут функція φ є такою, що двом різним значенням ξ може відповідати одне і те саме значення η. Тоді відповідні ймовірності додаються. Наприклад, для значення $\eta=4$: $P\{\eta=4\}=P\{\xi^2=4\}=P\{\xi=2\}+P\{\xi=-2\}=0,3+0,1=0,4$.

13.2. Знаходження щільності розподілу функції від випадкової величини

Нехай ξ – неперервна випадкова величина, що задана функцією розподілу $F_\xi(x)$ або щільністю розподілу $f_\xi(x)$. Та нехай функція $y=\varphi(x)$ є неперервною. Розглянемо функцію від випадкової величини $\eta=\varphi(\xi)$.

З'ясуємо, як можна за заданою величиною ξ знайти функцію розподілу або щільність розподілу функції $\eta=\varphi(\xi)$, тобто $F_\eta(x)$, $f_\eta(x)$.

Розглянемо I випадок: нехай $y=\varphi(x)$ – монотонно зростає на $[a;b]$.

Якщо ξ набуває значень $x\in[a;b]$, то $\eta=\varphi(\xi)$ набуває значень $y\in[A;B]$, де $A=\varphi(a),\quad B=\varphi(b)$.

Якщо функція $y=\varphi(x)$ монотонно зростаюча, то існує обернена функція $x=\psi(y)$, також зростаюча.

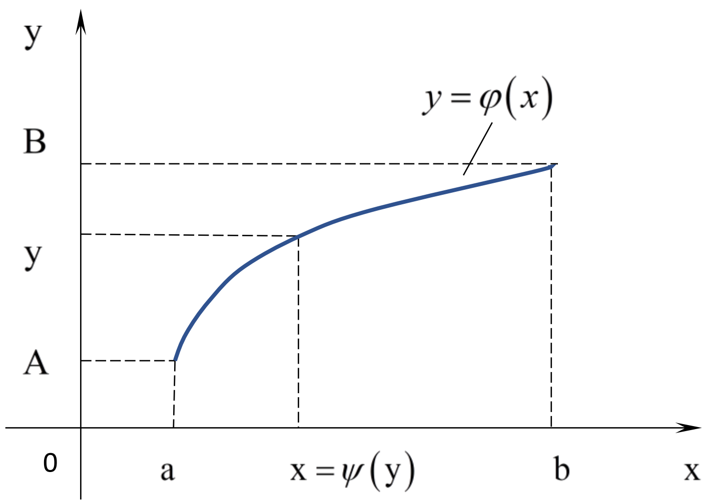


Рис. 13.1.

1) Нехай $y\le A$, тоді

$$F_\eta(y)=P(\eta<y)=0.$$

2) Нехай $A<y\le B$, тоді

$$F_\eta(y)=P(\eta<y)=P(\xi<\psi(y))=F_\xi(\psi(y)).$$

3) Нехай $y>B$, тоді

$F_\eta(y) = P(\eta < y) = 1$.

Остаточно:

$$F_\eta(y) = \begin{cases} 0, \ y \le A \\ F_\xi(\psi(y)), \ \ A < y \le B \\ 1, \ y > B \end{cases} \qquad (13.1)$$

Продиференціюємо цю функцію, знайдемо щільність розподілу. Для $A < y \le B$:

$$f_\eta(y) = F_\eta'(y) = \left[F_\xi(\psi(y))\right]_y' = F_\xi'(\psi(y)) \cdot \psi'(y) = f_\xi(\psi(y)) \cdot \psi'(y).$$

Остаточно:

$$f_\eta(y) = \begin{cases} 0, y \notin (A, B] \\ f_\xi(\psi(y)) \cdot \psi'(y), y \in (A, B] \end{cases}.$$

II випадок:

Нехай $y = \varphi(x)$ – монотонно спадає. Якщо ξ набуває значень $x \in [a;b]$, то $\eta = \varphi(\xi)$ набуває значень $y \in [A;B]$, де $B = \varphi(a), \quad A = \varphi(b)$.

Якщо функція $y = \varphi(x)$ монотонно спадна, то існує обернена функція $x = \psi(y)$, також спадна.

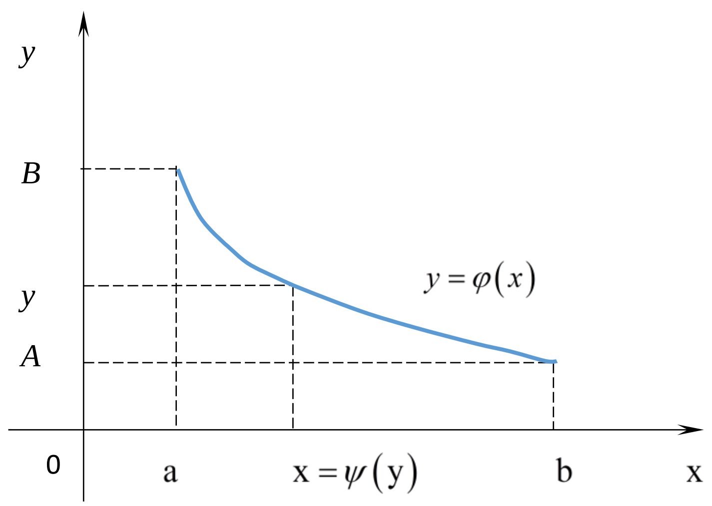


Рис. 13.2.

1) Нехай $y \le A$, тоді

$F_\eta(y) = P(\eta < y) = 0$.

2) Нехай $A < y \le B$, тоді

$$F_\eta(y) = P(\eta < y) = P(\xi > \psi(y)) = 1 - P(\xi \le \psi(y)) = 1 - P(\xi < \psi(y)) =$$
$$= 1 - F_\xi(\psi(y)).$$

3) Нехай $y > B$, тоді

$$F_\eta(y) = P(\eta < y) = 1.$$

Отже, функція розподілу має вигляд:

$$F_\eta(y) = \begin{cases} 0, y \le A \\ 1 - F_\xi(\psi(y)), A < y \le B \\ 1, y > B \end{cases}$$

Продиференціюємо цю функцію, знайдемо щільність розподілу:

$$f_\eta(y) = \begin{cases} 0, y \notin (A, B] \\ -f_\xi(\psi(y)) \cdot \psi'(y), y \in (A, B] \end{cases} \tag{13.2}$$

Формули (13.1) і (13.2) можна об'єднати в одну формулу:

$$f_\eta(y) = \begin{cases} 0, y \notin (A, B] \\ f_\xi(\psi(y)) \cdot |\psi'(y)|, y \in (A, B] \end{cases} \tag{13.3}$$

ІІІ випадок:

Нехай $y = \varphi(x)$ – кусково-монотонна, тобто відрізок $[a;b]$ можна розбити на проміжки, на кожному з яких функція монотонна. Нехай на кожному з цих проміжків для функції $y = \varphi(x)$ існує відповідна обернена, і нехай для $y \in [c;d]$ всього існують k обернених функцій $\psi_1(y), \psi_2(y), ..., \psi_k(y)$.

Тоді можна довести, що для $y \in [c;d]$ щільність η задається формулою

$$f_\eta(y) = \sum_{i=1}^{k} f_\xi(\psi_i(y)) \cdot |\psi_i'(y)| \tag{13.4}$$

Приклад 13.2.

Нехай ξ є нормально розподіленою випадковою величиною, $\xi \sim N(a;\sigma) \Leftrightarrow f_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$, $x \in (-\infty; +\infty)$. Розглянемо випадкову величину $\eta = k\xi + b$, де $k, b = const, k \ne 0$. З'ясуємо, який розподіл має випадкова величина η.

Величини ξ та η пов'язані лінійною залежністю $y=\varphi(x)=kx+b$. Оскільки $\xi\in(-\infty;+\infty)$, то $\eta\in(-\infty;+\infty)$. Знайдемо обернену до $\varphi(x)$ функцію.

$$\varphi(x)=kx+b\Rightarrow x=\frac{y-b}{k}=\psi(y),k\neq 0.$$

За формулою (13.3): $f_\eta(y)=f_\xi(\psi(y))\cdot|\psi'(y)|,\ y\in(-\infty;+\infty)$.

Оскільки $\psi'(y)=\dfrac{1}{k}$, то

$$f_\eta(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\cdot e^{-\frac{\left(\frac{y-b}{k}-a\right)^2}{2\sigma^2}}\cdot\left|\frac{1}{k}\right|=\frac{1}{\sqrt{2\pi}|k|\sigma}\cdot e^{-\frac{(y-(ka+b))^2}{2(k\sigma)^2}},\quad y\in R.$$

А це означає, що випадкова величина η також є нормально розподіленою, $\eta\sim N(ka+b;|k|\sigma)$.

Приклад 13.3.

Дано: $\xi\sim N(0;1)\Leftrightarrow f_\xi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$. Випадкова величина η є функцією від випадкової величини ξ: $\eta=\sqrt{\xi}$. Знайти розподіл η.

Розв'язання. $y=\varphi(x)=\sqrt{x}$.

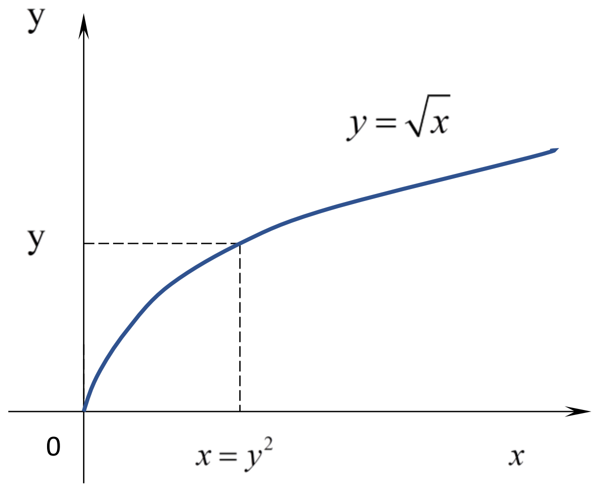


Рис. 13.3.

$x\in[0;+\infty]\Rightarrow y\in[0;+\infty]$

$y=\sqrt{x}$ – монотонно зростаюча на $[0;+\infty]$, знайдемо обернену:

$x = y^2 = \psi(y)$. Отже, $\psi'(y) = 2y$.

За формулою (13.3):

$$f_\eta(y) = \begin{cases} 0,\ y < 0 \\ \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{\left(y^2\right)^2}{2}} \cdot |2y|,\ y \ge 0 \end{cases} = \begin{cases} 0,\ y < 0 \\ \dfrac{2y}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{y^4}{2}},\ y \ge 0 \end{cases}.$$

Приклад 13.4.

Дано: $\xi \sim N(0;1)$ – нормально розподілена, $f_\xi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$, $x \in R$.

$\eta = \xi^2$. Знайти щільність розподілу η.

Розв'язання. $y = \varphi(x) = x^2$, $x \in (-\infty;+\infty) \Rightarrow y \in [0;+\infty)$

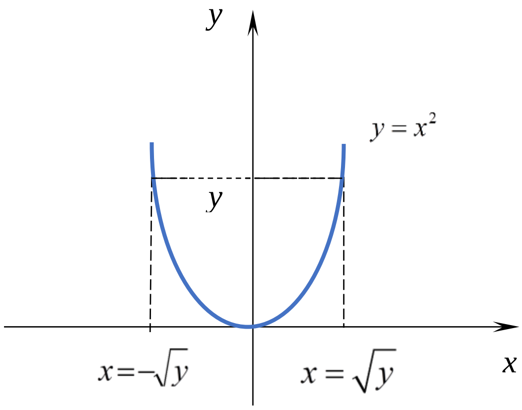


Рис. 13.4.

Знайдемо обернену функцію: $y = x^2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{y}$. Отже, для $y \ge 0$ існує дві обернені функції $\psi_1(y) = -\sqrt{y}$ та $\psi_2(y) = \sqrt{y}$. Знайдемо похідні:

$$\psi_1'(y) = \left(-\sqrt{y}\right)' = -\frac{1}{2\sqrt{y}}\ ; \qquad \psi_2'(y) = \left(\sqrt{y}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{y}}\ ,\ y > 0\ .$$

За формулою (13.4):

$$f_\eta(y) = \begin{cases} 0,\ y < 0 \\ f_\xi(\psi_1(y)) \cdot \left|\psi_1'(y)\right| + f_\xi(\psi_2(y)) \cdot \left|\psi_2'(y)\right|,\ y \ge 0 \end{cases}.$$

Отримаємо:

$$f_\eta(y)=\begin{cases}0,\ y<0\\ \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{\left(-\sqrt{y}\right)^2}{2}}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{y}}+\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{\left(\sqrt{y}\right)^2}{2}}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{y}},y>0\end{cases}=\begin{cases}0,\ y<0\\ \dfrac{1}{\sqrt{2\pi y}}\cdot e^{-\frac{y}{2}},\ y>0\end{cases}.$$

Приклад 13.5.

Дано: $\xi\sim N(a;\sigma)\Leftrightarrow f_\xi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$, $x\in R$. Випадкова величина η є функцією $\eta=e^\xi$. Знайти щільність розподілу η.

Розв'язання. $y=\varphi(x)=e^x$

$x\in(-\infty;+\infty)\Rightarrow y\in(0;+\infty)$

e^x – монотонно зростає$\Rightarrow$існує обернена функція:

$y=e^x\Rightarrow x=\ln y,\ y>0$

$\psi(y)=\ln y$, тоді $\psi'(y)=\dfrac{1}{y}$, $\left|\psi'(y)\right|=\dfrac{1}{|y|}=\dfrac{1}{y}$.

За формулою (13.3):

$$f_\eta(y)=\begin{cases}0,y<0\\ \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\cdot e^{-\frac{(\ln y-a)^2}{2\sigma^2}}\cdot\dfrac{1}{y},y>0\end{cases}=\begin{cases}0,y<0\\ \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma y}\cdot e^{-\frac{(\ln y-a)^2}{2\sigma^2}},y>0\end{cases}.$$

13.3. Логнормальний розподіл

Випадкова величина ξ називається такою, що має ***логнормальний розподіл***, якщо величина $\ln\xi$ має нормальний розподіл. Позначається: $\xi\sim L\mathrm{n}N(a;\sigma)$ або $\xi\sim L\mathrm{og}N(a;\sigma)$. У Прикладі 13.5 було розглянуто саме таку величину. Отже, функція щільності логнормального розподілу має вигляд :

$$f_\xi(x)=\begin{cases}0,x<0\\ \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x}\cdot e^{-\frac{(\ln x-a)^2}{2\sigma^2}},x>0\end{cases}.$$

Математичне сподівання такої величини $M(\xi)=e^{a+\frac{\sigma^2}{2}}$, дисперсія $D_\xi=\left(e^{\sigma^2}-1\right)\cdot e^{2a+\sigma^2}$. Медіана розподілу $M_e=e^a$, мода $M_0=e^{a-\sigma^2}$.

Застосування логнормального розподілу. Логнормальний розподіл мають випадкові величини:

- ξ – час безвідмовної роботи об'єктів, у яких відмова виникає внаслідок "втоми";
- розподіл розмірів частинок при дробленні;
- величина інтервалів часу між послідовними подіями.

Якщо величини $\xi_1,\xi_2,...,\xi_n$ - логнормально розподілені, $\xi_i\sim L\,\mathrm{n}\,N(a_i;\sigma_i)$, то величина, що є добутком цих величин $\eta\sim\xi_1\cdot\xi_2\cdot...\cdot\xi_n=L\,\mathrm{n}\,N\left(na;\sqrt{\sum\sigma_i^2}\right)$ є також логнормально розподіленою.

13.4. Математичне сподівання функції від випадкової величини

Нехай ξ – неперервна випадкова величина, $\eta=\varphi(\xi)$ – функція від випадкової величини, де функція $y=\varphi(x)$ монотонно зростаюча і неперервна. Знайдемо математичне сподівання η.

$$M_\eta=\int_{-\infty}^{+\infty}y\cdot f_\eta(y)dy=\int_{-\infty}^{+\infty}y\cdot f_\xi(\psi(y))\cdot\psi'(y)\cdot dy=$$

$$=\begin{vmatrix}\psi'(y)\cdot dy=d(\psi(y))=dx\\ y=\varphi(x);\ f_\xi(\psi(y))=f_\xi(x)\end{vmatrix}=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)\cdot f_\xi(x)dx$$

Отже, остаточно маємо

$$M_\eta=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)\cdot f_\xi(x)dx, \tag{13.5}$$

за умови збіжності невласного інтеграла.

Зауваження. Хоча ми вивели формулу (13.5) лише для частинного випадку, коли $y=\varphi(x)$ монотонно зростаюча і неперервна, вона справджується для будь-якої дійснозначної функції $\varphi(x)$, необхідно лише, щоб інтеграл був збіжним. Математичне сподівання функції випадкової величини $\eta=\varphi(\xi)$ можна визначати за формулою (13.5), знаючи f_ξ, без знаходження f_η.

Якщо ξ – дискретна випадкова величина, $\eta = \varphi(\xi)$ – функція від випадкової величини ξ, то математичне сподівання η:

$$M_{\eta} = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi(x_i) \cdot p_i, \tag{13.6}$$

за умови збіжності ряду.

Запитання для самоконтролю

1. *Що таке функція від випадкової величини?*
2. *Нехай ξ – випадкова величина, $y = \varphi(x)$ – невипадкова функція, що є неперервною. Що можна сказати про випадкову величину $\eta = \varphi(\xi)$, яка є функцією від ξ, якщо ξ є дискретною ВВ? неперервною ВВ?*
3. *Чи можна за відомою функцією розподілу випадкової величини ξ, визначити функцію розподілу ВВ η, що є функцією від ξ: $\eta = \varphi(\xi)$?*
4. *Як за відомим розподілом випадкової величини ξ, визначити щільність ВВ η, що є функцією від ξ: $\eta = \varphi(\xi)$?*
5. *Відомо, що ξ є нормально розподіленою випадковою величиною, $\xi \sim N(a, \sigma)$. Що можна сказати про випадкову величину $\eta = k\xi + b,\ k, b = const$?*
6. *Як знайти математичне сподівання функції випадкової величини?*

Практичне заняття №13

ФУНКЦІЇ ВІД ВИПАДКОВОЇ ВНЛИЧИНИ

Приклади розв'язування задач

Задача 13.1. Випадкова величина ξ є рівномірно розподіленою на $[1;3]$. Випадкова величина η є функцією від величини ξ: $\eta = \dfrac{1}{\xi}$. Знайти щільність розподілу η.

Розв'язання. За умовою ξ – рівномірно розподілена величина на $[1;3]$, тоді функція щільності $f_\xi(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}, & x \in [1;3] \\ 0, & x \notin [1;3] \end{cases}$.

Функція, якою задається залежність η від ξ : $y = \varphi(x) = \dfrac{1}{x}$, $x \in [1;3]$. Обернена функція $\psi(y) = \dfrac{1}{y}$, $y \in [\dfrac{1}{3};1]$. Її похідна $\psi'(y) = -\dfrac{1}{y^2}$, $|\psi'(y)| = \dfrac{1}{y^2}$.

Функцію щільності η знайдемо за формулою (13.3), а саме:

$$f_\eta(y) = \begin{cases} 0, y \notin (A,B] \\ f_\xi(\psi(y)) \cdot |\psi'(y)|, y \in (A,B] \end{cases}. \text{ Отже, } \quad f_\eta(y) = \begin{cases} 0, y \notin [\dfrac{1}{3};1] \\ \dfrac{1}{2y^2}, y \in [\dfrac{1}{3};1] \end{cases}.$$

Задача 13.2. Нехай ξ – рівномірно розподілена величина на $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$. Випадкова величина $\eta = \cos\xi$. Знайти щільність розподілу η.

Розв'язання. $y = \varphi(x) = \cos x,\ x \in (0;\dfrac{\pi}{2})$.

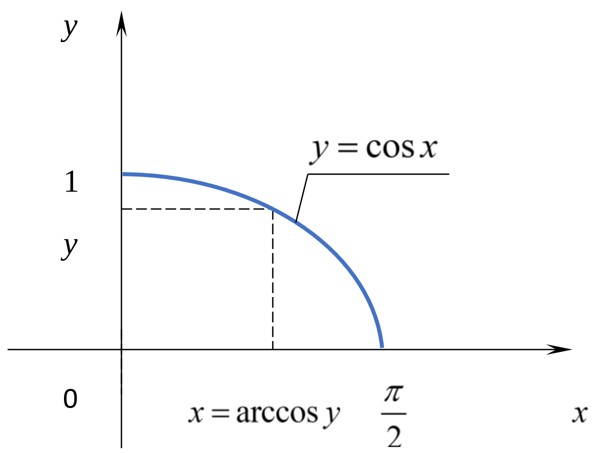


Рис. 13.5.

Обернена функція $\psi(y)=\arccos y$, $y\in(0;1)$.

$$\psi'(y)=-\frac{1}{\sqrt{1-y^2}},\ \left|\psi'(y)\right|=\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.$$

ξ – рівномірно розподілена величина на $(a;b)=(0;\frac{\pi}{2})$, тоді

$$f_\xi(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}=\dfrac{2}{\pi}, & x\in(0;\dfrac{\pi}{2})\\ 0, & x\notin(0;\dfrac{\pi}{2})\end{cases}.$$

Значення $\eta\in(0;1)$.

Функцію щільності η знайдемо за формулою (13.3):

$$f_\eta(y)=\begin{cases}0, y\notin(0;1)\\ \dfrac{2}{\pi}\dfrac{1}{\sqrt{1-y^2}}, y\in(0;1)\end{cases}.$$

Задача 13.3. Нехай випадкова величина ξ має показниковий розподіл з параметром $\lambda>0$. Випадкова величина $\eta=k\xi+b,\ k>0, b=const$. Знайти щільність розподілу η.

Розв'язання. ВВ ξ має показниковий розподіл, отже:

$$f_\xi(x)=\begin{cases}0, & x\in(-\infty;0]\\ \lambda e^{-\lambda x}, & x(0;+\infty)\end{cases}.$$

$$y=\varphi(x)=kx+b\Rightarrow x=\psi(y)=\frac{y-b}{k}.$$

$$\psi'(y)=\frac{1}{k},\ \left|\psi'(y)\right|=\frac{1}{|k|}=\frac{1}{k}.$$

Зауважимо, що оскільки $k>0$, то $x\in(-\infty;0]\Rightarrow y\in[-\infty;b]$. $x\in(0;+\infty)\Rightarrow y\in[b;+\infty)$.

Функцію щільності η знайдемо за формулою (13.3):

$$f_\eta(y)=\begin{cases}0, y\in(-\infty;b]\\ \dfrac{\lambda}{k}e^{-\lambda\frac{y-b}{k}}, y\in(b;+\infty)\end{cases}=\begin{cases}0, y\in(-\infty;b]\\ e^{\frac{\lambda b}{k}}\cdot\dfrac{\lambda}{k}e^{-\frac{\lambda}{k}y}, y\in(b;+\infty)\end{cases}$$. Можна стверджувати, що при

$b = 0$ випадкова величина $\eta = k\xi$ також є показниково розподіленою з параметром $\lambda_1 = \frac{\lambda}{k}$.

Задача 13.4. Випадкова величина ξ має стандартний нормальний розподіл $N(0,1)$. Знайти щільність розподілу випадкових величин а) $\eta = |\xi|$; б) $\eta = \frac{1}{\xi^2}$.

Розв'язання. а) *І спосіб.* Функція розподілу стандартної нормально розподіленої величини ξ має вигляд $F_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$. Знайдемо функцію розподілу випадкової величини η: $F_\eta(y) = P\{\eta < y\} = P\{|\xi| < y\}$.

Очевидно, що $F_\eta(y) = 0$, якщо $y < 0$.

Нехай $y \ge 0$. Тоді

$$F_\eta(y) = P\{|\xi| < y\} = P\{-y < \xi < y\} = F_\xi(y) - F_\xi(-y) =$$
$$= \left| \begin{array}{l} \textit{за властивістю функції розподілу} \\ \textit{стандартного нормального розподілу} \\ F_\xi(-y) = 1 - F_\xi(y) \end{array} \right| = F_\xi(y) - (1 - F_\xi(y)) = 2F_\xi(y) - 1.$$

Отже,

$$F_\eta(y) = \begin{cases} 0, \quad y < 0 \\ \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y} e^{-\frac{(-t)^2}{2}} dt - 1, \quad y \ge 0 \end{cases}.$$

Диференціюючи знайдену функцію розподілу, визначаємо щільність:

$$f_\eta(y) = \begin{cases} 0, \; y < 0 \\ \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot e^{-\frac{y^2}{2}}, \; y \ge 0 \end{cases}.$$

ІІ спосіб

Знайдемо обернену функцію: $y = |x| \Rightarrow x = \pm y$. Отже, для $y \ge 0$ існує дві обернені функції $\psi_1(y) = -y$ та $\psi_2(y) = y$. Знайдемо похідні:

$\psi_1'(y) = (-y)' = -1$; $\qquad \psi_2'(y) = (y)' = 1$, $y \ge 0$.

За формулою (13.4), а саме:

$$f_\eta(y) = \begin{cases} 0, \; y < 0 \\ f_\xi(\psi_1(y)) \cdot |\psi_1'(y)| + f_\xi(\psi_2(y)) \cdot |\psi_2'(y)|, \; y \ge 0 \end{cases}.$$

Отримаємо:

$$f_\eta(y)=\begin{cases}0,\, y<0\\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{(-y)^2}{2}}\cdot 1+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{(y)^2}{2}}\cdot 1,\, y\ge 0\end{cases}=\begin{cases}0,\, y<0\\ \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot e^{-\frac{y^2}{2}},\, y\ge 0\end{cases}.$$

б) *I спосіб.* Функція розподілу стандартної нормально розподіленої величини ξ має вигляд $F_\xi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$. Знайдемо функцію розподілу випадкової величини η: $F_\eta(y)=P\{\eta<y\}=P\left\{\frac{1}{\xi^2}<y\right\}$.

Очевидно, що $F_\eta(y)=0$, якщо $y\le 0$.

Нехай $y>0$. Тоді

$$F_\eta(y)=P\left\{\frac{1}{\xi^2}<y\right\}=P\left\{\xi<-\frac{1}{\sqrt{y}}\right\}+P\left\{\xi>\frac{1}{\sqrt{y}}\right\}=F_\xi(-\frac{1}{\sqrt{y}})+1-F_\xi(\frac{1}{\sqrt{y}})=2-2F_\xi(\frac{1}{\sqrt{y}}).$$

Отже,

$$F_\eta(y)=\begin{cases}0, \quad y\le 0\\ 2-\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\frac{1}{\sqrt{y}}}e^{-\frac{(-t)^2}{2}}dt, \quad y>0\end{cases}.$$

Диференціюючи знайдену функцію розподілу, визначаємо щільність.

$$f_\eta(y)=\begin{cases}0,\, y\le 0\\ -2\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{(\frac{1}{\sqrt{y}})^2}{2}}\cdot(-\frac{1}{2}y^{-\frac{3}{2}}),\, y>0\end{cases}.$$

Остаточно, $f_\eta(y)=\begin{cases}0,\, y\le 0\\ \frac{1}{\sqrt{2\pi y^3}}\cdot e^{-\frac{1}{2y}},\, y>0\end{cases}.$

II спосіб

Знайдемо обернену функцію: $y=\frac{1}{x^2}\quad\Rightarrow\quad x=\pm\frac{1}{\sqrt{y}}$. Отже, для $y>0$ існує дві обернені функції $\psi_1(y)=-\frac{1}{\sqrt{y}}$ та $\psi_2(y)=\frac{1}{\sqrt{y}}$. Знайдемо похідні:

$$\psi_1'(y)=\left(-\frac{1}{\sqrt{y}}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{y^3}}\,; \qquad \psi_2'(y)=\left(\frac{1}{\sqrt{y}}\right)'=-\frac{1}{2\sqrt{y^3}}\,,\ y>0\,.$$

За формулою (13.4), а саме:

$$f_\eta(y)=\begin{cases}0, \ y<0\\ f_\xi(\psi_1(y))\cdot|\psi_1'(y)|+f_\xi(\psi_2(y))\cdot|\psi_2'(y)|, \ y\ge 0\end{cases},$$

отримаємо:

$$f_\eta(y)=\begin{cases}0, y\le 0\\ \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{\left(-\frac{1}{\sqrt{y}}\right)^2}{2}}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{y^3}}+\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{\left(\frac{1}{\sqrt{y}}\right)^2}{2}}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{y^3}}, \ y>0\end{cases}.$$

Остаточно,

$$f_\eta(y)=\begin{cases}0, \ y\le 0\\ \dfrac{1}{\sqrt{2\pi y^3}}\cdot e^{-\frac{1}{2y}}, \ y>0\end{cases}.$$

Задача 13.5. Випадкова величина ξ має щільність розподілу Коші $f_\xi(x)=\dfrac{1}{\pi(1+x^2)}$. Знайти математичне сподівання випадкової величини $\eta=(arctg\xi)^2$.

Розв'язання. Для знаходження математичного сподівання функції від випадкової величини скористаємося формулою (13.5), а саме:

$$M_\eta=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)\cdot f_\xi(x)dx.$$

Тоді

$$M_\eta=\int_{-\infty}^{+\infty}(arctgx)^2\cdot\frac{1}{\pi(1+x^2)}dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}(arctgx)^2\cdot d(arctgx)=\left.\frac{(arctgx)^3}{3\pi}\right|_{-\infty}^{+\infty}=\frac{\pi^2}{12}.$$

Завдання для самостійного розв’язання

121. Випадкова величина ξ є рівномірно розподіленою на $[1;3]$. Випадкова величина η є функцією від величини ξ: $\eta=\xi^2$. Знайти щільність розподілу η.

122. Випадкова величина ξ є рівномірно розподіленою на $[-1;1]$. Випадкова величина η є функцією від величини ξ: $\eta=\sqrt[3]{\xi}$. Знайти щільність розподілу η.

123. Випадкова величина ξ є рівномірно розподіленою на $[-1;1]$. Випадкова величина η є функцією від величини ξ: $\eta=\sqrt{|\xi|}$. Знайти щільність розподілу η.

124. Випадкова величина ξ є рівномірно розподіленою на $[\alpha;\beta]$. Випадкова величина $\eta=k\xi+b,\ k\neq 0, b=const$. Перевірити, чи є випадкова величина η також рівномірно розподіленою. Знайти щільність розподілу η.

125. Випадкова величина ξ задана функцією щільності $f_\xi(x)=\begin{cases}0, x\notin[\frac{1}{3};1]\\ \frac{1}{2x^2}, x\in[\frac{1}{3};1]\end{cases}$. Випадкова величина $\eta=\xi^3$. Знайти щільність розподілу випадкової величини η.

126. Випадкова величина ξ задана функцією щільності $f_\xi(x)=\begin{cases}0, & |x|<1\\ \frac{3}{2x^4}, & |x|\geq 1\end{cases}$. Випадкова величина $\eta=|\xi|$. Знайти щільність розподілу випадкової величини η.

127. Випадкова величина ξ задана функцією розподілу $F_\xi(x)=\begin{cases}0, & x\leq\frac{1}{4}\\ 2\sqrt{x}-1, & \frac{1}{4}<x\leq 1.\\ 1, & x>1\end{cases}$ Випадкова величина $\eta=\sqrt{\xi}$. Знайти функцію розподілу та щільність розподілу випадкової величини η.

128. Випадкова величина ξ має показниковий розподіл з параметром $\lambda=1$. Випадкова величина $\eta=3\xi+5$. Знайти математичне сподівання η.

129. Нехай випадкова величина ξ має показниковий розподіл з параметром $\lambda > 0$. Випадкова величина $\eta = e^{\xi}$. Знайти щільність розподілу випадкової величини η та її математичне сподівання.

130. Випадкова величина ξ задана функцією розподілу $F_{\xi}(x) = \begin{cases} 0, & x \le 1 \\ \dfrac{x^2 - x}{2}, & 1 < x \le 2 \\ 1, & x > 2 \end{cases}$. Випадкова величина $\eta = \xi^2$. Знайти щільність розподілу випадкової величини η та її математичне сподівання.

ЛЕКЦІЯ №14

ФУНКЦІЇ ВІД ДВОХ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН

14.1. Функції від двох випадкових величин. Знаходження функції розподілу

Нехай ξ,η – одновимірні випадкові величини. Задамо $z=\varphi(x,y)$ – невипадкову функцію двох змінних, що набуває дійсних значень. Випадкова величина $\zeta=\varphi(\xi,\eta)$ називається функцією від двох випадкових величин ξ та η або функцією від двовимірної ВВ (ξ,η).

Нехай відомий закон розподілу двовимірної ВВ (ξ,η).

Якщо (ξ,η) – ДДВВ, то вважаємо, що задані (x_k, y_i) - можливі значення, що приймає (ξ,η), а також відповідні ймовірності $p_{ki} = P\{\xi = x_k, \eta = y_i\}$.

Якщо (ξ,η) – ДНВВ, то вважаємо, що задана функція щільності $f_{\xi,\eta}(x,y)$.

Знайдемо функцію розподілу ζ у випадку ДНВВ.

$F_\zeta(z) = P\{\zeta < z\} = P\{\varphi(\xi,\eta) < z\} = P\{(\xi,\eta) \in D\}$, де $D = \{(x,y) : \varphi(x,y) < z\}$.

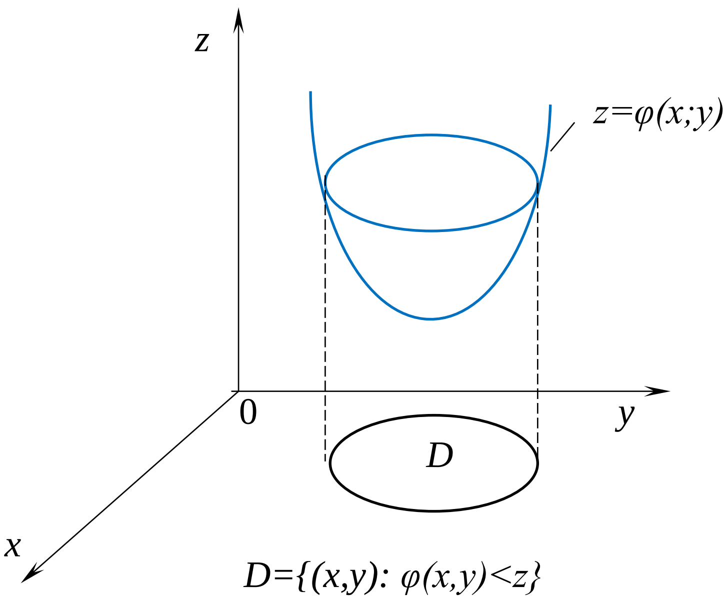


Рис. 14.1.

Отже, коли (ξ,η) є ДНВВ, $F_{\zeta}(z)=\iint\limits_{D:\{\varphi(x,y)<z\}} f_{\xi,\eta}(x,y)dxdy$. (14.1)

Аналогічно, коли (ξ,η) є ДДВВ, то $F_{\zeta}(z)=\sum\limits_{\substack{k,i:\\ \varphi(x_k,y_i)<z}} p_{ki}$. (14.2)

Приклад 14.1. Нехай $\xi \sim N(0;\sigma)$, $\eta \sim N(0,\sigma)$ – незалежні нормально розподілені випадкові величини. Тоді функція щільності двовимірної випадкової величини (ξ,η) буде $f_{\xi,\eta}(x,y)=f_{\xi}(x)\cdot f_{\eta}(y)=\dfrac{1}{2\pi\sigma^2}\cdot e^{\frac{-(x^2+y^2)}{2\sigma^2}}$. Розглянемо випадкову величину $\zeta=\xi^2+\eta^2$. Знайти функцію щільності ζ.

Розв'язання. $\varphi(x,y)=x^2+y^2$. За формулою (14.1)

$$F_{\zeta}(z)=\iint\limits_{D:\{\varphi(x,y)<z\}} f_{\xi,\eta}(x,y)dxdy=$$

$$\iint\limits_{D:\{x^2+y^2<z\}} \frac{1}{2\pi\sigma^2}e^{\frac{-x^2-y^2}{2\sigma^2}}dxdy=\begin{vmatrix} \text{Перейдемо} \\ \text{до} \quad \text{ПСК} \end{vmatrix}=\frac{1}{2\pi\sigma^2}\iint\limits_{D} e^{\frac{-\rho^2}{2\sigma^2}}\rho d\rho d\varphi=$$

$$=\frac{1}{2\pi\sigma^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{z}} e^{\frac{-\rho^2}{2\sigma^2}}\rho d\rho d\varphi=\frac{-\sigma^2}{2\pi\sigma^2}\cdot 2\pi\cdot\int_0^{\sqrt{z}} e^{\frac{-\rho^2}{2\sigma^2}}d\left(-\frac{\rho^2}{2\sigma^2}\right)=$$

$$=-e^{\frac{-\rho^2}{2\sigma^2}}\Bigg|_0^{\sqrt{z}}=1-e^{\frac{-z}{2\sigma^2}}.$$

Отже, функція розподілу ζ: $F_{\zeta}(z)=\begin{cases}0, z\le 0\\ 1-e^{\frac{-z}{2\sigma^2}}, z>0\end{cases}$.

Функція щільності: $f_{\zeta}(z)=\dfrac{\partial}{\partial z}F_{\zeta}(z)=\begin{cases}0,\ z\le 0\\ \dfrac{1}{2\sigma^2}e^{\frac{-z}{2\sigma^2}},\ z>0\end{cases}$.

Зокрема, якщо $\sigma=1$, то $f_{\zeta}(z)=\begin{cases}0,\ z\le 0\\ \dfrac{1}{2}e^{\frac{-z}{2}},\ z>0\end{cases}$

14.2. Розподіл χ^2. Розподіл Релея

Розглянемо випадкову величину, що є сумою квадратів нормально розподілених величин: $\xi=\xi_1^2+\xi_2^2+...+\xi_n^2=\chi^2$ – ("хі"-квадрат), де $\xi_i \sim N(0;1), i=\overline{1,n}$. Функція щільності цього розподілу:

$$f_{\chi^2}(x)=\begin{cases}0, x\le 0\\ \dfrac{n!}{2^{\frac{n}{2}}\cdot\Gamma(\frac{n}{2})}e^{\frac{-x}{2}}\cdot x^{\frac{n}{2}-1}, x>0,\end{cases}$$

де $\Gamma(x)$ – гамма-функція, а саме $\Gamma(x)=\int\limits_0^{+\infty} t^{x-1}\cdot e^{-t}dt$.

Властивості гамма-функції $\Gamma(x)$:

1. $\Gamma(1)=1$,
2. $\Gamma(0,5)=\sqrt{\pi}$
3. $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$,

Зокрема, при $x=n:\Gamma(n+1)=n!$.

Розглянемо частинні випадки розподілу χ^2 при $n=1$, $n=2$.

Якщо $n=1$, $f_{\xi^2}(x)=\begin{cases}0, x\le 0\\ \dfrac{1}{\sqrt{2\pi x}}e^{\frac{-x}{2}}, x>0\end{cases}$ (порівняйте з результатом Приклада 13.4).

Якщо $n=2$, $f_{\xi^2+\eta^2}(x)=\begin{cases}0, x\le 0\\ \dfrac{1}{2}e^{\frac{-x}{2}}, x>0\end{cases}$ (порівняйте з результатом Приклада 14.1).

Розподіл χ^2 є відомим та вивченим. Ми будемо використовувати цей розподіл (критерій χ^2) у наступних лекціях з математичної статистики, коли перевірятимемо достовірність статистичних гіпотез.

Приклад 14.2. Нехай $\xi\sim N(0;\sigma)$, $\eta\sim N(0,\sigma)$ – незалежні нормально розподілені випадкові величини. Тобто функція щільності двовимірної випадкової величини (ξ,η): $f_{\xi,\eta}(x,y)=f_\xi(x)\cdot f_\eta(y)=\dfrac{1}{2\pi\sigma^2}\cdot e^{\frac{-(x^2+y^2)}{2\sigma^2}}$. Розглянемо випадкову величину $\zeta=\sqrt{\xi^2+\eta^2}$. Знайти функцію щільності ζ.

Розв'язання. За формулою (14.1):

$$F_\zeta(z)=\iint\limits_{D:\{\varphi(x,y)<z\}} f_{\xi,\eta}(x,y)dxdy=\int\limits_{D:\,x^2+y^2<z^2}\frac{1}{2\pi\sigma^2}e^{\frac{-x^2-y^2}{2\pi\sigma^2}}dxdy=|ПСК|=$$

$$=\frac{1}{2\pi\sigma^2}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^z e^{\frac{-\rho^2}{2\sigma^2}}\rho d\rho=\frac{1}{2\pi\sigma^2}(\frac{1}{2}(-2\sigma^2))\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^z e^{\frac{-\rho^2}{2\sigma^2}}d(-\frac{\rho^2}{2\sigma^2})=$$

$$=-\frac{1}{2\pi}2\pi e^{\frac{-\rho^2}{2\sigma^2}}\Bigg|_0^z=-e^{\frac{-z^2}{2\sigma^2}}+1=1-e^{\frac{-z^2}{2\sigma^2}}$$

Отже, функція розподілу: $F_\zeta(z)=\begin{cases}0, z\le 0\\ 1-e^{\frac{-z^2}{2\sigma^2}}, z>0\end{cases}$.

Функція щільності $f_\zeta(z)=\begin{cases}0, z\le 0\\ \dfrac{z}{\sigma^2}e^{\frac{-z^2}{2\sigma^2}}, z>0\end{cases}$.

Такий розподіл називається розподілом Релея (розподіл Рейлі). Розподіл Релея природно виникає, коли у двох напрямах аналізується, наприклад, швидкість вітру. Припускаючи, що проекції швидкості у кожному з напрямків є незалежними нормально розподіленими величинами з рівними дисперсіями і нульовими середніми, тоді загальна швидкість вітру (модуль вектора) характеризується розподілом Релея. Інший приклад такого ж розподілу виникає при розгляді випадкових комплексних величин, дійсні та уявні компоненти яких є незалежними нормально розподіленими, з однаковою дисперсією та нульовим середнім значенням. У цьому випадку абсолютне значення комплексного числа є розподіленим за Релеєм. Узагальненням такого розподілу є величина $\xi=\sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2}$, де $\xi_i\sim N(0,\sigma), i=1,2,3$.

14.3. Математичне сподівання функції від двох випадкових величин

Розглянемо функцію від двох випадкових величин $\zeta=\varphi(\xi,\eta)$, де розподіл двовимірної неперервної випадкової величини (ξ,η) задано функцією щільності $f_{\xi,\eta}(x,y)$. Тоді математичне сподівання

$$M_\zeta=\iint\limits_{R^2}\varphi(x,y)\cdot f_{\xi,\eta}(x,y)\,dxdy, \tag{14.3}$$

за умови збіжності інтеграла.

Для двовимірної дискретної ВВ (ξ,η):

$$M_\zeta=\sum_{k,i=1}^{\infty}\varphi(x_k,y_i)\cdot p_{ki}, \tag{14.4}$$

за умови збіжності ряду.

Приклад 14.3. У крузі радіуса R випадковим чином з’являється точка. Розглянемо випадкову величину – відстань точки від центра круга. Знайти її математичне сподівання.

Розв’язання. Нехай ξ – абсциса точки, η – ордината точки. (ξ,η) – двовимірна ВВ, рівномірно розподілена в області $D=\{(x,y): x^2+y^2\le R^2\}$:

$$f_{\xi,\eta}(x,y)=\begin{cases}0,(x,y)\notin D\\ \dfrac{1}{\pi R^2},(x,y)\in D\end{cases}.$$

Відстань від центра кола $\zeta=\sqrt{\xi^2+\eta^2}$, $\zeta\in[0;R]$. Знайдемо за формулою (14.3) математичне сподівання M_ζ.

$$M_\zeta=\iint\limits_D\sqrt{x^2+y^2}\cdot\frac{1}{\pi R^2}dxdy=\frac{1}{\pi R^2}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^R\rho^2d\rho=\frac{2}{3}R. \qquad (14.5)$$

14.4. Розподіл суми двох ВВ. Композиція розподілів

Розглянемо випадкову величину, що є сумою двох випадкових величин $\zeta=\xi+\eta$, тобто $\varphi(x,y)=x+y$. За формулою (14.1) функція розподілу:

$$F_\zeta(z)=P\{\zeta<z\}=P\{\xi+\eta<z\}=\iint\limits_{D:\{(x+y)<z\}}f_{\xi,\eta}(x,y)dxdy=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}dx\int\limits_{-\infty}^{z-x}f_{\xi,\eta}(x,y)dy$$

або

$$F_\zeta(z)=P\{\zeta<z\}=P\{\xi+\eta<z\}=\iint\limits_{D:\{(x+y)<z\}}f_{\xi,\eta}(x,y)dxdy=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}dy\int\limits_{-\infty}^{z-y}f_{\xi,\eta}(x,y)dx.$$

Нехай ξ,η – незалежні , тоді; $f_{\xi\eta}(x,y)=f_\xi(x)\cdot f_\eta(y)$. Отже,

$$F_\zeta(z)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f_\xi(x)dx\int\limits_{-\infty}^{z-x}f_\eta(y)dy \qquad (14.6)$$

або $$F_\zeta(z)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f_\eta(y)dy\int\limits_{-\infty}^{z-y}f_\xi(x)dx. \qquad (14.7)$$

Функція щільності отримаємо диференціюванням функції розподілу. З (14.6) випливає:

$$f_\zeta(z)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f_\eta(z-x)f_\xi(x)dx=f_\eta(y)*f_\xi(x). \qquad (14.8)$$

З (14.7) :

$$f_\zeta(z)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f_\xi(z-x)f_\eta(x)dx=f_\xi(x)*f_\eta(y). \qquad (14.9)$$

Така операція називається ***згорткою*** двох функцій. Згортка функцій є комутативною операцією: $f_\zeta(z)=f_\xi(x)*f_\eta(y)=f_\eta(y)*f_\xi(x)$.

Розподіл суми двох незалежних випадкових величин називається їх ***композицією***. Якщо незалежні ВВ ξ, η належать одному і тому самому розподілу, і їх сума $\xi + \eta$ теж належить тому ж розподілу, то цей тип розподілу називається ***стійким***.

Приклад 14.5. Нехай $\xi \sim N(0;1), \eta \sim N(0,1)$, $f_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}}$, $f_\eta(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-y^2}{2}}$. Знайти функцію щільності $f_\zeta(z)$ суми $\zeta = \xi + \eta$.

Розв'язання.

$$f_\zeta(z) = f_\eta(y) * f_\xi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2+z^2-2zx+x^2}{2}} dx = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{z^2}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2+zx} dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{z^2}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-\frac{z}{2})^2+\frac{z^2}{4}} dx = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{z^2}{2}} e^{\frac{z^2}{4}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-\frac{z}{2})^2} d(x-\frac{z}{2}) = \left| t = x - \frac{z}{2} \right| =$$

$$= \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{z^2}{4}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \left| \text{інтеграл Пуассона} \right| = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{z^2}{4}} \cdot \sqrt{\pi} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2}} e^{-\frac{z^2}{2(\sqrt{2})^2}}$$

Тобто, $\zeta \sim N(0;\sqrt{2})$ є нормально розподіленою ВВ.

Сума двох нормально розподілених величин є нормально розподіленою ВВ. *Нормальний закон розподілу є стійким.*

Зауваження. Закон Пуассона теж є стійким, тобто сума двох незалежних Пуассонівських ВВ теж є Пуассонівською величиною.

Запитання для самоконтролю

1. *Що називається функцією від двох випадкових величин?*
2. *Як визначити функцію розподілу випадкової величини, що є функцією від двох випадкових величин?*
3. *Який розподіл називається розподілом* χ^2 *?*
4. *Який розподіл називається розподілом Релея?*
5. *Як знайти математичне сподівання функції від двох випадкових величин?*
6. *Що називається композицією двох розподілів?*
7. *Які розподіли називаються стійкими? Наведіть приклади стандартних розподілів, які є стійкими.*

Практичне заняття №14

ФУНКЦІЇ ВІД ДВОХ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН

Приклади розв'язування задач

Задача 14.1. Нехай ξ,η незалежні випадкові величини, розподілені експоненціально. Їх щільності мають вигляд:

$$f_\xi(x)=\begin{cases}0, x<0\\ \dfrac{1}{3}e^{-\frac{x}{3}}, x\ge 0\end{cases};\quad f_\eta(y)=\begin{cases}0, y<0\\ \dfrac{1}{4}e^{-\frac{y}{4}}, y\ge 0\end{cases}.$$

Знайти щільність розподілу суми $s=\xi+\eta$.

Розв'язання. Використаємо формулу (14.8) для щільності суми двох незалежних випадкових величин, щільність суми двох незалежних величин є згорткою їх щільностей: $f_s(z)=f_\eta(x)*f_\xi(y)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_\eta(z-u)f_\xi(u)du$.

З підінтегральних функцій видно, що межі слід взяти від 0 до *z*, оскільки щільності перетворються в 0, коли аргумент стає від'ємним або більшим за *x*.

$$f_s(z)=\int\limits_0^z \frac{1}{3}e^{-\frac{u}{3}}\cdot\frac{1}{4}e^{-\frac{z-u}{4}}du=\frac{1}{12}e^{-\frac{z}{4}}\int\limits_0^z e^{-\frac{u}{12}}du=e^{-\frac{z}{4}}(-e^{-\frac{u}{12}})\Big|_0^z=e^{-\frac{z}{4}}-e^{-\frac{z}{3}}.$$

Отже, щільність суми $f_s(z)=\begin{cases}0, z<0\\ e^{-\frac{z}{3}}-e^{-\frac{z}{3}}, z\ge 0\end{cases}$

Задача 14.2. Нехай ξ,η незалежні і рівномірно розподілені: ξ на [-1,0], а η на [0,1]. Знайти щільність розподілу суми $s=\xi+\eta$.

Розв'язання. За умовою, $f_\xi(x)=\begin{cases}1, x\in[-1;0]\\ 0, x\notin[-1;0]\end{cases}$; $f_\eta(y)=\begin{cases}1, y\in[0;1]\\ 0, y\notin[0;1]\end{cases}$

Використаємо формулу для щільності суми двох незалежних випадкових величин: $f_s(z)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_\xi(z-u)f_\eta(u)du$.

$$f_s(z)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_\xi(z-u)f_\eta(u)du=\int\limits_0^1 f_\xi(z-u)du=\begin{cases}0,\quad z\in(-\infty;-1)\\ \int_{-1}^{z}du,\quad z\in[-1;0]\\ \int_{z-1}^{0}du,\quad z\in(0;1]\\ 0,\quad z\in(1;+\infty]\end{cases}=\begin{cases}z+1,\quad z\in[-1;0]\\ -z+1,\quad z\in[0;1]\\ 0,\quad z\notin[-1;1]\end{cases}.$$

Одержаний розподіл носить назву «трикутний», що цілком зрозуміло, якщо подивитись на графік його щільності:

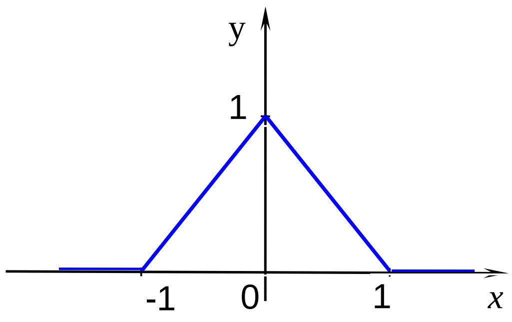


Рис. 14.2.

На цьому прикладі зрозуміло, що рівномірний розподіл не є стійким, бо композиція двох рівномірних розподілів є «трикутним», а не рівномірним розподілом.

Наведемо інший спосіб. Спочатку знайдемо функцію розподілу $s=\xi+\eta$. За формулою (14.6):

$$F_s(z)=P\{\xi+\eta<z\}=\iint\limits_{D:\{(x+y)<z\}} f_{\xi,\eta}(x,y)dxdy=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} dx\int\limits_{-\infty}^{z-x} f_{\xi,\eta}(x,y)dy.$$

Оскільки ξ,η незалежні, перемножуючи щільності окремих компонент, знаходимо сумісну щільність (ξ,η):

$$f_{\xi,\eta}(x,y)=\begin{cases}1,\ x\in[-1;0],\ y\in[0;1]\\ 0,\ \textit{якщо інакше}\end{cases}.$$

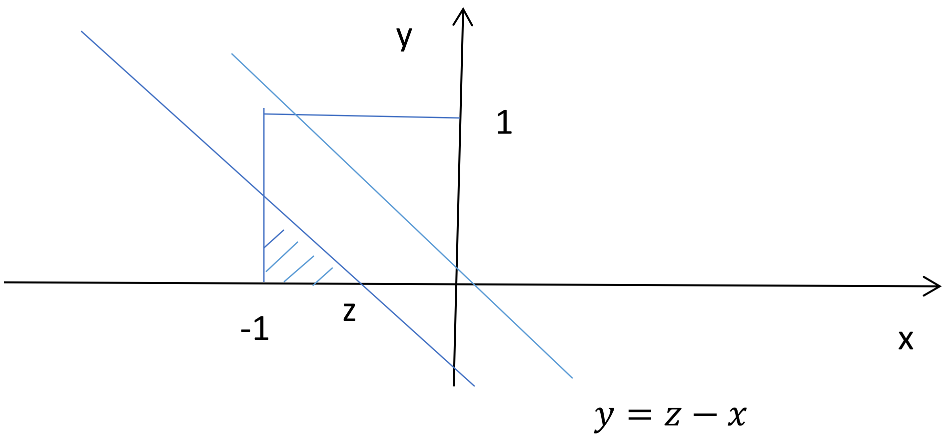


Рис. 14.3.

Щільність є ненульовою тільки всередині квадрата $[-1;0]\times[0;1]$. З рисунка видно, що область інтегрування буде різною у випадках: а) $z\le -1$; б) $-1<z\le 0$; в) $0<z\le 1$; г) $z>1$.

а) $z\le -1 \;\Rightarrow\; F_s(z)=0$;

б) $-1<z\le 0 \;\Rightarrow\; F_s(z)=\int\limits_{-1}^{z}dx\int\limits_{0}^{z-x}dy=\frac{z^2}{2}+z-\frac{1}{2}$;

в) $0<z\le 1 \;\Rightarrow\; F_s(z)=\int\limits_{-1}^{z-1}dx\int\limits_{0}^{1}dy+\int\limits_{z-1}^{0}dx\int\limits_{0}^{z-x}dy=-\frac{z^2}{2}+z+\frac{1}{2}$;

г) $z>1 \;\Rightarrow\; F_s(z)=1$.

Отже, можна записати

$$F_s(z)=\begin{cases}0, & z\le -1\\ \frac{z^2}{2}+z-\frac{1}{2}, & -1<z\le 0\\ -\frac{z^2}{2}+z+\frac{1}{2}, & 0<z\le 1\\ 1, & z>1\end{cases}.$$

Взявши похідну від функції розподілу, отримуємо ту саму щільність, що була знайдена першим способом за допомогою згортки.

Задача 14.3. Нехай ξ, η незалежні і рівномірно розподілені на відрізку $[0,1]$ Знайти розподіл випадкової величини $\zeta=\xi\cdot\eta$.

Розв'язання. Розглянемо функцію розподілу шуканої величини. За означенням

$$F_\zeta(z)=P\{\zeta<z\}=P\{\xi\eta<z\}.$$

Оскільки $0\le\xi\le 1$ та $0\le\eta\le 1$, то

$$P\{\xi\eta<z\}=\begin{cases}0, \; z\le 0,\\ 1, \; z>1.\end{cases}$$

Нехай $0<z\le 1$, скористаємось формулою (14.1):

$$F_\zeta(z)=\iint\limits_{D:\{xy<z,0<x<1,0<y<1\}} f_{\xi,\eta}(x,y)dxdy.$$

Запишемо щільності випадкових величин.

$$f_\xi(x)=\begin{cases}0, \; x\notin[0,1],\\ 1, \; x\in[0,1],\end{cases}\qquad f_\eta(y)=\begin{cases}0, \; y\notin[0,1],\\ 1, \; y\in[0,1],\end{cases}$$

Через незалежність ξ, η сумісна щільність буде дорівнювати

$$f_{\xi,\eta}(x.y)=\begin{cases}0,\ x,y\notin D,\\ 1,\ x,y\in D,\end{cases}\ \text{де}\ D=\{(x,y):x\in[0,1],\ y\in[0,1]\}$$

Намалюємо область, по якій відбувається інтегрування.

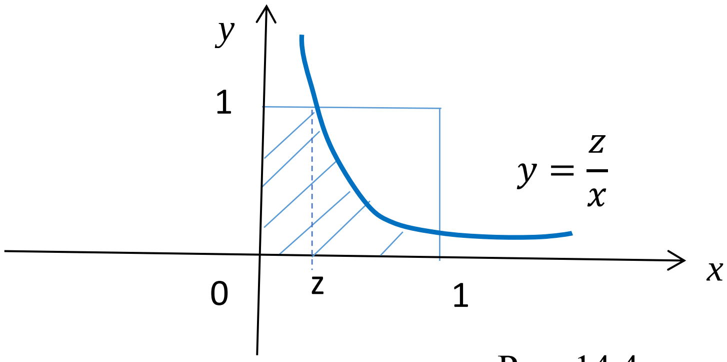


Рис. 14.4.

$$F_\zeta(z)=\int_0^z dx\int_0^1 dy+\int_z^1 dx\int_0^{\frac{z}{x}} dy = z - z\ln z\,.$$

Отже, $F_\zeta(z)=\begin{cases}0, & z\le 0,\\ z(1-\ln z), & 0<z\le 1\\ 1, & z>1.\end{cases}$

Задача 14.4. Переходячи до узагальнених полярних координат, знайти $M\left\{\sqrt{9-\frac{\xi^2}{4}-\frac{\eta^2}{9}}\right\}$, де (ξ,η) – випадковий вектор, розподілений рівномірно в області, обмеженій еліпсами $\frac{\xi^2}{4}+\frac{\eta^2}{9}=1,\quad \frac{\xi^2}{16}+\frac{\eta^2}{36}=1$

*Розв'язання***.** Спершу намалюємо область. Двовимірна випадкова величина розподілена рівномірно в кільці між двома еліпсами (пофарбовано в синій).

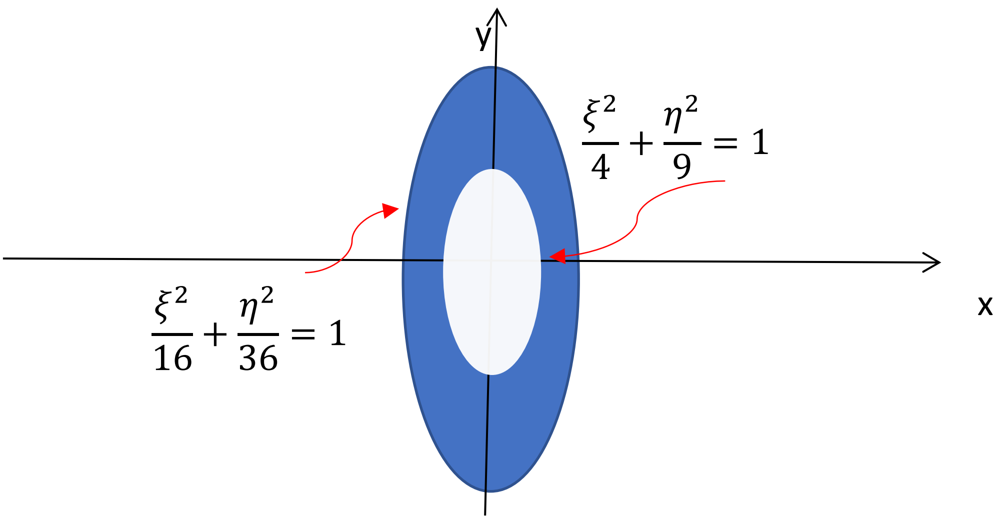


Рис. 14.5.

Як ми знаємо, площа еліпса дорівнює $S=\pi ab$, де *a, b* – півосі еліпса.
Отже, площа синьої фігури, *D:*

$$S=\pi\cdot 4\cdot 6-\pi\cdot 2\cdot 3=18\pi .$$

Запишемо щільність (ξ,η)

$$f_{\xi,\eta}(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{18\pi}, & (x,y)\in D,\\ 0, & (x,y)\notin D.\end{cases}$$

За формулою (14.3)

$$M_{\zeta}=\iint\limits_{R^2}\varphi(x,y)\cdot f_{\xi,\eta}(x,y)\,dxdy,$$

маємо

$$M\left\{\sqrt{9-\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}}\right\}=\frac{1}{18\pi}\iint\limits_{D}\sqrt{9-\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}}dxdy\,.$$

Тут зручно перейти до узагальнених полярних координат. Нагадаємо заміну:

$$\begin{cases}x=2\rho\cos\varphi,\\ y=3\rho\sin\varphi,\end{cases}\text{ модуль Якобіана } |J|=3\cdot 2\rho,\ D=\{(\rho,\varphi):1\le\rho\le 2,\,0\le\varphi\le 2\pi\}.$$

$$M\left\{\sqrt{9-\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}}\right\}=\frac{1}{18\pi}\int_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_1^2 6\rho\sqrt{9-\rho^2}d\rho=-\frac{6\pi}{18\pi}\int\limits_1^2\sqrt{9-\rho^2}d(9-\rho^2)=$$

$$-\frac{2}{9}\left(9-\rho^2\right)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_1^2=\frac{2}{9}\left(8^{\frac{3}{2}}-5^{\frac{3}{2}}\right).$$

ЛЕКЦІЯ №15

ПЕРВИННА ОБРОБКА ДАНИХ. ГРАФІЧНИЙ АНАЛІЗ. СТАТИСТИЧНІ ОЦІНКИ ПАРАМЕТРІВ РОЗПОДІЛУ

15.1. Що таке статистика?

Вивчаючи теорію ймовірностей ми, як правило, розглядаємо задачі такого типу: знаючи деякі характеристики випадкового об'єкту, треба знайти ймовірність того, що відбудеться деяка подія, пов'язана з цим об'єктом.

Приклад 15.1. В партії з N приладів M є несправними. Навмання вибирають 10 приладів з партії. Нехай ξ - випадкова величина (ВВ) - визначає кількість бракованих приладів серед цих десяти. Скласти закон розподілу ξ.

Зрозуміло, що за класичним означенням

$$P\{\xi = k\} = \frac{C_M^k C_{N-M}^{10-k}}{C_N^{10}}; \quad k = 0,1,\dots,10.$$

Це гіпергеометричний розподіл.

Насправді, коли на практиці застосовують вибірковий контроль, то кількість несправних приладів в партії M невідома. Саме для її оцінки використовується процедура вибіркового контролю. Відомими є: невипадкова величина N – об'єм партії, і саме значення ВВ ξ. Отже, наша задача полягає в тому, щоб за спостереженнями за ВВ ξ оцінити M - кількість несправних приладів в партії.

Це одна з типових задач математичної статистики – *задача оцінки невідомого параметру ймовірнісного розподілу* за спостереженнями ξ.

Взагалі можна сказати, що ***математична статистика - це наука про те, як робити висновки, виходячи з випадкових даних***. Такими висновками можуть бути не тільки оцінки невідомих параметрів.

На основі статистичних даних можна також перевіряти деякі гіпотези. Наприклад, маємо два прилади для вимірювання міцності металу. Необхідно визначити: чи є еквівалентними результати вимірювань на обох приладах.

Прикладом широкого класу статистичних задач є *задачі прогнозування*, коли на основі спостережень минулого треба передбачити якісь майбутні події. Наприклад, відомо, якими були ціни на золото на Лондонській біржі на протязі останніх 10 років. Якими будуть ці ціни завтра, через тиждень, через рік? Ще на початку XX сторіччя було встановлено, що для прогнозів такого типу можна застосовувати статистичні методи *регресійного та авторегресійного аналізу*. Цими методами прогнозують не тільки курси валют, а й кількість плям на Сонці, висоту розливів річок, реакцію організму хворого на лікувальні процедури і т.д.

Ще одна група задач, з якою працює математична статистика – це *задачі класифікації*. Прикладом може служити робота банкіра. До нього звертаються клієнти з проханням надати їм кредит. Йому треба виявити – надійний цей клієнт чи ні. Це робиться на підставі інформації про фінансовий стан справ клієнта та про його кредитну історію. Як правило, інформація порівнюється зі статистичними даними інших клієнтів, які раніше брали кредит і повертали його (або не повертали) в цьому банку. Методи математичної статистики дозволяють враховувати таку інформацію і побудувати оптимальне правило класифікації клієнтів.

Статистика - це збір, аналіз та інтерпретація(пояснення) даних.

Основні задачі математичної статистики:
1) Оцінка параметрів
2) Перевірка гіпотез
3) Прогнозування
4) Класифікація.

15.2. Генеральна та вибіркова сукупності

З розглянутих прикладів ми бачимо, що статистик має справу з деякою сукупністю більш-менш однорідних об'єктів, статистичні властивості яких його цікавлять.

15.2.1. Основні поняття

Сукупність всіх об'єктів, які складають предмет даного статистичного дослідження, називають ***генеральною сукупністю***.

Реально статистична проблема виникає тоді, коли дослідник не має можливості дослідити всі об'єкти генеральної сукупності або внаслідок надто високої ціни такого дослідження (наприклад, якщо контроль якості продукції пов'язаний з її руйнуванням), або через те, що генеральна сукупність взагалі необмежена (як необмежена кількість потенційних клієнтів банка в майбутньому в прикладі про банкіра).

Вибіркою називають сукупність об'єктів, про яку статистик має інформацію. ***Об'єм (обсяг)*** сукупності – це число об'єктів цієї сукупності.

Існує багато різних методів відбору до вибірки: простий вибірковий відбір, стратифікований відбір (коли генеральну сукупність розбивають на підсукупності - страти, а потім з кожної страти вибирають певну кількість об'єктів), багатоступеневий стратифікований відбір, складніші гібридні відбори тощо. Більш докладно методи відбору та їх наслідки вивчає так звана *теорія вибіркових обстежень.*

Можна сформулювати таку вимогу до вибірки: вона повинна бути *репрезентативною*, тобто повинна правильно відображати пропорції генеральної сукупності. Наприклад, якщо генеральна сукупність розділена на страти, і у вас є підстави вважати, що вони є досить відмінними одна від одної, треба брати з кожної страти кількості об'єктів, пропорційні об'ємам страт.

Математичне означення вибірки виглядає по-іншому.

15.2.2. Математичне означення вибірки

Статистичним простором називають трійку $(\Omega, \mathcal{F}, (P_\theta, \theta \in \Theta))$, де Ω - простір елементарних подій деякого стохастичного експерименту, $\mathcal{F}$ - сігма-алгебра випадкових подій - підмножин з Ω, $(P_\theta, \theta \in \Theta)$ - деяка параметрична сім'я ймовірнісних розподілів на $\mathcal{F}$; Θ – параметрична множина довільної природи.

Зазвичай вважатимемо, що Θ є d - вимірною, але інколи може бути і нескінченно вимірною, наприклад, простором усіх неперервних функцій розподілу.

Розглянемо випадковий елемент ζ.

$$\zeta: \quad (\Omega, \mathcal{F}, (P_\theta, \theta \in \Theta)) \longrightarrow R^d \times R^n$$

(Тобто ζ- це випадкова матриця або вектор).

Множину значень цього елементу називають ***вибірковим простором***, ζ називають ***вибіркою***.

Вибірка має вигляд

$(x_{11}, x_{12}, x_{13}, \ldots, x_{1d})$ - характеристики 1-го об'єкту;

$(x_{21}, x_{22}, x_{23}, \ldots, x_{2d})$ - характеристики 2-го об'єкту;

....

$(x_{n1}, x_{n2}, x_{n3}, \ldots, x_{nd})$ - характеристики n-го об'єкту.

Тут n - обсяг вибірки, d - кількість характеристик об'єкту, які ми вимірюємо, $d < n$. Вважаємо, що елементи вибірки є незалежними однаково розподіленими векторами.

У простішому, одновимірному випадку ($d = 1$) вибірка ζ є випадковим вектором $\zeta = (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$, де $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ - незалежні однаково розподілені випадкові величини. Незалежними ми їх вважаємо тому, що це результати вимірювань в n незалежних одне від одного експериментах, а однаково розподіленими тому, що ми вивчаємо одну і ту саму величину, одну і ту саму характеристику. В цьому випадку кажуть, що $(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ є вибірка обсягу n з генеральної сукупності з розподілом P_θ.

Отже, ми маємо подвійну природу вибірки. На теоретичному рівні ми розглядаємо елементи вибірки як випадкові величини. Спираючись на апарат теорії ймовірностей, спеціалісти в області математичної статистики виводять необхідні формули і правила для оцінок параметрів розподілів, прогнозування, класифікації і т.д. В прикладному аспекті елементи вибірки - це просто числа, результати вимірювань чи спостережень. Підставляючи ці числа у відповідні формули, отримуємо необхідні числові оцінки чи висновки.

15.3. Статистичний розподіл вибірки

Нехай ми маємо вибірку з генеральної сукупності обсягу n, причому в цій вибірці:

x_1 спостерігалося n_1 разів;

x_2 спостерігалося n_2 разів;

....

x_k спостерігалося n_k разів. (Тут $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$).

Значення x_i, які ми спостерігаємо, називаються ***варіантами***. Числа n_i називають *частотами*, а $w_i = \frac{n_i}{n}$ - ***відносними частотами*** відповідних варіант.

Статистичним розподілом вибірки (емпіричним розподілом) називають перелік варіант і відповідних їм частот або відносних частот.

x_i	x_1	x_2	…	x_k
n_i	n_1	n_2	…	n_k
w_i	w_1	w_2	…	w_k

Якщо x_i – спостереження за дискретною величиною ξ, то статистичний розподіл вибірки можна вважати оцінкою закону розподілу ξ. Це випливає зі статистичного означення ймовірності: при $n \longrightarrow \infty$ відносні частоти w_i прямують до ймовірностей $p_i = P\{\xi = x_i\}$.

Послідовність елементів вибірки, записану в зростаючому порядку, називають ***варіаційним рядом***. Його можна представити у вигляді

$$x_{[1]} \leq x_{[2]} \leq x_{[3]} \leq \ldots \leq x_{[n]}.$$

$x_{[i]}$- і-й елемент у списку впорядкованих за зростанням елементів вибірки, він називається ***порядковою статистикою***.

Приклад 15.2. Маємо вибірку, що складається з чисел: -11, 5, -100, 5, 5, 2, 1, 5. Варіаційний ряд вибірки має вигляд: -100, -11, 1, 2, 5, 5, 5.

Розглянуте означення статистичного розподілу вибірки краще підходить для вивчення дискретних розподілів, ніж для неперервних. Частіше користуються іншим означенням. Нехай всі значення вибірки потрапляють в інтервал $[a, b]$.

Якщо ξ абсолютно неперервна випадкова величина, то ***статистичний розподіл вибірки задається у вигляді послідовності інтервалів та відповідних їм емпіричних частот***. (Підраховують, скільки значень з вибірки потрапило в даний інтервал і записують відповідну частоту).

Інтервал	$[a, x_1]$	$(x_1, x_2]$	$(x_2, x_3]$	…	$(x_{k-1}, b]$
n_i	n_1	n_2	n_3	…	n_k

При цьому $[x_{i-1}, x_i]$ називають ***частковими інтервалами***. Частіше за все вони однакової довжини, але не завжди.

15.4. Графічний аналіз даних

З найбільш поширених засобів, призначених для візуального аналізу вибірки, є гістограми, P-P і Q-Q діаграми, ящики з вусами. В сучасних статистичних пакетах передбачена побудова таких графіків.

15.4.1. Гістограма

Гістограмою частот називають східчасту фігуру, складену з прямокутників, основами яких є частинні інтервали довжиною h, а висоти дорівнюють частотам цих інтервалів n_i.

Гістограмою відносних частот називають східчасту фігуру, складену з прямокутників, основами яких є частинні інтервали довжиною h, а висоти дорівнюють $\frac{w_i}{h}$.

Приклад 15.3. Наводимо величини e, знайдені Р. Міллікеном при визначенні заряду електрона, який дорівнює $e \cdot 10^{-10}$ од. СГСЕ. Обсяг вибірки – 58 значень.

4,7	4,74	4,747	4,749	4,758	4,761	4,764	4,764	4,764	4,765
4,767	4,768	4,769	4,769	4,771	4,771	4,772	4,772	4,772	4,774
4,775	4,775	4,776	4,777	4,777	4,778	4,779	4,779	4,779	4,781
4,781	4,782	4,783	4,783	4,785	4,785	4,785	4,788	4,788	4,789
4,789	4,79	4,79	4,791	4,791	4,791	4,792	4,792	4,795	4,797
4,799	4,799	4,801	4,805	4,806	4,808	4,809	4,81		

Гістограма частот для e побудована нижче за допомогою пакету R (R - одна з найбільш поширених мов програмування, призначена спеціально для розв'язку статистичних задач). Всього взято 6 часткових інтервалів, кожний довжиною $h = 0{,}02$. Висоти прямокутників відображають частоти інтервалів.

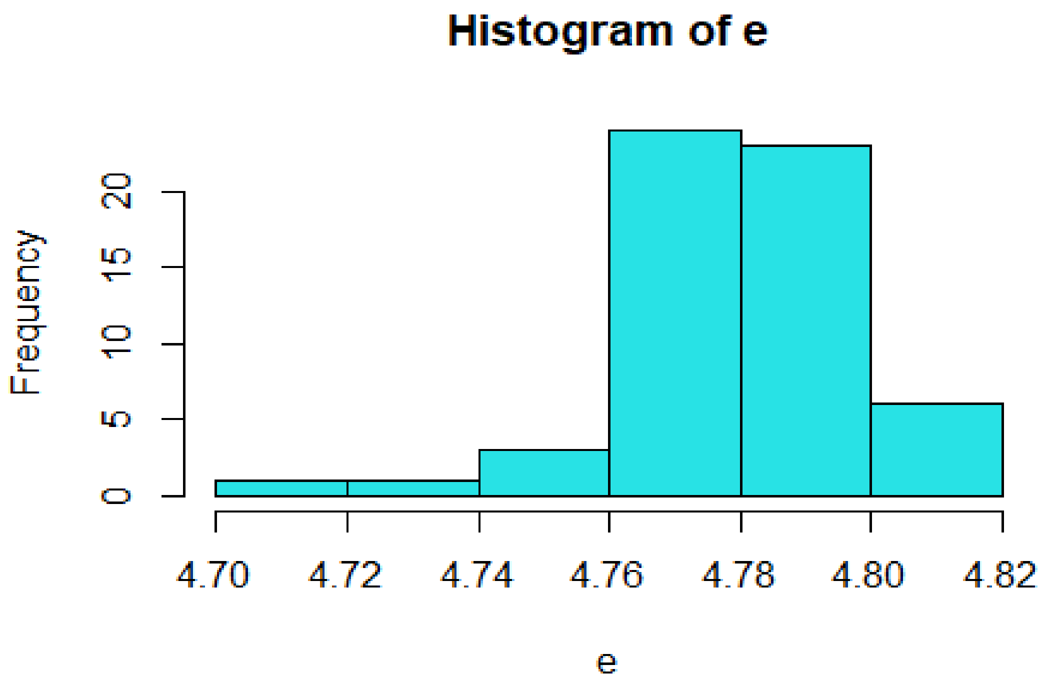


Рис. 15.1

Гістограма відносних частот може слугувати оцінкою щільності розподілу неперервної випадкової величини ξ, яку ми вимірюємо.

Справді, позначимо $f(x)$ – щільність розподілу ξ, $F(x)$ – функція розподілу ξ. Тоді

$$f(x_i) = F'(x_i) = \lim_{h\to 0} \frac{P\{\xi < x_i + h\} - P\{\xi < x_i\}}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{P\{\xi \in [x_i, x_i + h)\}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{P\{\xi \in [x_i, x_{i+1})\}}{h} \approx \frac{w_i}{h}.$$

Отже, $f(x_i) \approx \frac{w_i}{h}$, а це є висоти прямокутників в гістограмі відносних частот.

Може здатися, що така оцінка тим точніша, чим менший інтервал h, але це не так. Якщо зробити "дрібненьке" розбиття, то на кожний інтервал припаде 0-2 значення, і гістограма стане неінформативною. Рекомендується брати $k > n/10$, де k - кількість інтервалів, n - обсяг вибірки. Іншу характеристику – ***полігон частот*** - можна отримати з гістограми, з'єднавши середні точки верхніх основ прямокутників. Для порівняння розподілу вибірки і теоретичного розподілу можна побудувати на одному рисунку гістограму відносних частот і щільність теоретичного розподілу і порівняти їх, але гістограма сильно залежить від інтервалів групування, і тому є неоднозначною. Отже, наряду з гістограмою використовують і інші графічні засоби статистичного аналізу.

15.4.2. P-P і Q-Q-діаграми

P-P - діаграма (Probability-Probability plot). У нас є вибірка $\zeta = (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ - результати вимірювань випадкової величини ξ. Ми порівнюємо статистичний розподіл вибірки з фіксованим теоретичним розподілом $F(x) = P\{\xi < x\}$. Тобто у нас є припущення, що ξ розподілена за таким законом і ми хочемо перевірити наше припущення. На P-P-діаграмі для кожної варіанти x_i відкладаємо точку з абсцисою $P\{\xi < x_i\}$ і ординатою $\frac{\text{кількість варіант в вибірці,що}<x_i}{n}$. Якщо наше припущення про розподіл ξ вірне, то $\frac{\text{кількість варіант в вибірці,що}<x_i}{n} \approx P\{\xi < x_i\}$ при великих n (Оскільки відносна частота події наближено дорівнює ймовірності події). Отже, якщо теоретичний розподіл вибрано правильно, точки на P-P-діаграмі повинні розташуватись вздовж бісектриси першого координатного кута. Якщо теоретичний розподіл має невідомі параметри, то вони оцінюються за вибіркою.

Наступна P-P-діаграма порівнює нашу вибірку e – заряду електрона – з нормальним розподілом. Як ми бачимо, певна схожість присутня, хоча і не дуже сильна.

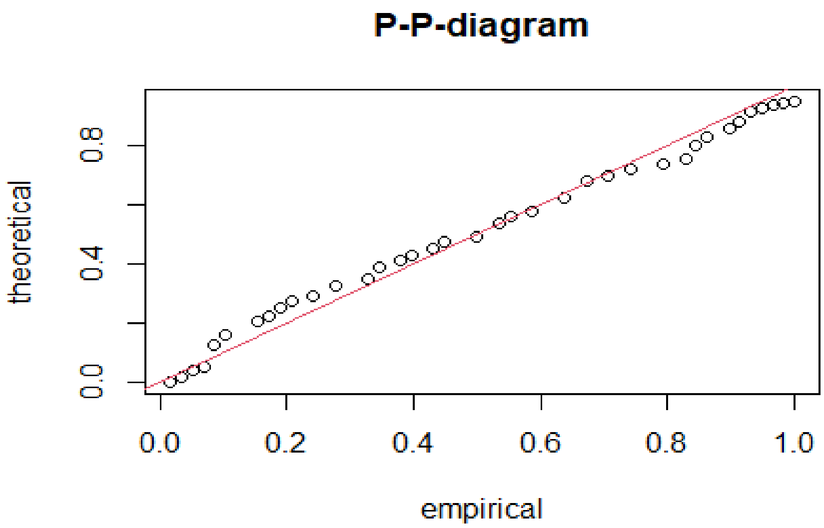


Рис. 15.2

Нехай $\alpha \in (0,1)$; $F(x)$ - деяка функція розподілу.

Розвязок рівняння $F(x) = \alpha$ називається ***квантилем рівня*** $\boldsymbol{\alpha}$.

Позначатимемо його $Q(\alpha)$ або x_α: $P\{\xi < Q(\alpha)\} = \alpha$. Якщо $F(x)$ строго монотонна і неперервна, то $Q(\alpha)$ визначена однозначно:

$$Q(\alpha) = F^{-1}(\alpha) \ .$$

ξ - деяка випадкова величина. Нехай Me таке число, що $P\{\xi \geq Me\} = \frac{1}{2}$ та $P\{\xi \leq Me\} = \frac{1}{2}$. Тоді Me називається ***медіаною розподілу*** ξ.

Медіана є квантилем рівня 0,5. Буває і так, коли в розподілі не одна медіана, а декілька. ***Квартилями*** називаються квантилі рівня 1/4 і 3/4 (*відповідно нижній та верхній квартилі*).

Нижній квартиль $x_{1/4}$: $P\left\{\xi \leq x_{1/4}\right\} = \frac{1}{4}$; $P\left\{\xi \geq x_{1/4}\right\} = \frac{3}{4}$.

Верхній квартиль $x_{3/4}$: $P\left\{\xi \leq x_{3/4}\right\} = \frac{3}{4}$; $P\left\{\xi \geq x_{3/4}\right\} = \frac{1}{4}$.

Приклад 15.4. Знайти медіану і нижній квартиль експоненціального розподілу з параметром λ.

Функція розподілу експоненціального розподілу має вигляд:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0. \end{cases}$$

Отже, $F(x_\alpha) = \alpha$; $1 - e^{-\lambda x_\alpha} = \alpha$; $x_\alpha = Q(\alpha) = \frac{1}{\lambda}\ln\frac{1}{1-\alpha}$.

Тоді $Me = \frac{1}{\lambda}\ln\frac{1}{1-0.5} = \frac{1}{\lambda}\ln 2$; $x_{1/4} = Q\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{\lambda}\ln\frac{1}{1-0.25} = \frac{1}{\lambda}\ln\frac{4}{3}$.

Трохи забігаючи наперед, сформулюємо наступне твердження.

Твердження. Нехай ми маємо вибірку, варіаційний ряд

$$x_{[1]} \leq x_{[2]} \leq x_{[3]} \leq \ldots \leq x_{[n]},$$

результат вимірювань ξ з функцією розподілу $F(x)$. Якщо $F(x)$ неперервна, строго зростаюча, то оцінкою для квантиля $Q\left(\frac{i-0,5}{n}\right)$ є порядкова статистика $x_{[i]}$.

Q-Q -діаграма (Quantile-Quantile plot). На Q-Q-діаграмі по осі абсцис відкладають квантилі рівня $\frac{i-0,5}{n}$, а по осі ординат порядкові статистики $x_{[i]}$. Можна сказати, що емпіричні квантилі порівнюються з теоретичними відповідного рівня.

Якщо теоретичний розподіл обрано правильно, точки на Q-Q-діаграмі також розміщуються вздовж бісектриси першого-третього координатного кутів.

На першій Q-Q-діаграмі ми порівнюємо нашу вибірку e (результат вимірювання заряду електрона) з нормальним розподілом. На другій Q-Q-діаграмі – з експоненціальним розподілом. Схоже, що гіпотеза про нормальний розподіл більш вірогідна, ніж про експоненціальний.

Q-Q-діаграми мають одну перевагу над P-P-діаграмами. Якщо ми обрали теоретичний розподіл ξ, а при цьому справжній розподіл величини, яку ми виміряли, є $a\xi + b$, де a, b – невипадкові числа, то при великих n

$$Q^{a\xi+b}\left(\frac{i-0,5}{n}\right) \approx aQ^{\xi}\left(\frac{i-0,5}{n}\right) + b,$$

тобто, точки на Q-Q-діаграмі будуть розміщуватись вздовж прямої $y = ax + b$. Наприклад, ми хочемо перевірити, чи співпадає розподіл вибірки з нормальним

$N(a, \sigma^2)$, при цьому ані a, ані σ не знаємо. На роль ξ обираємо $N(0,1)$. Тоді, якщо розподіл даних нормальний, точки на Q-Q-діаграмі притягуються до прямої $y = \sigma x + a$.

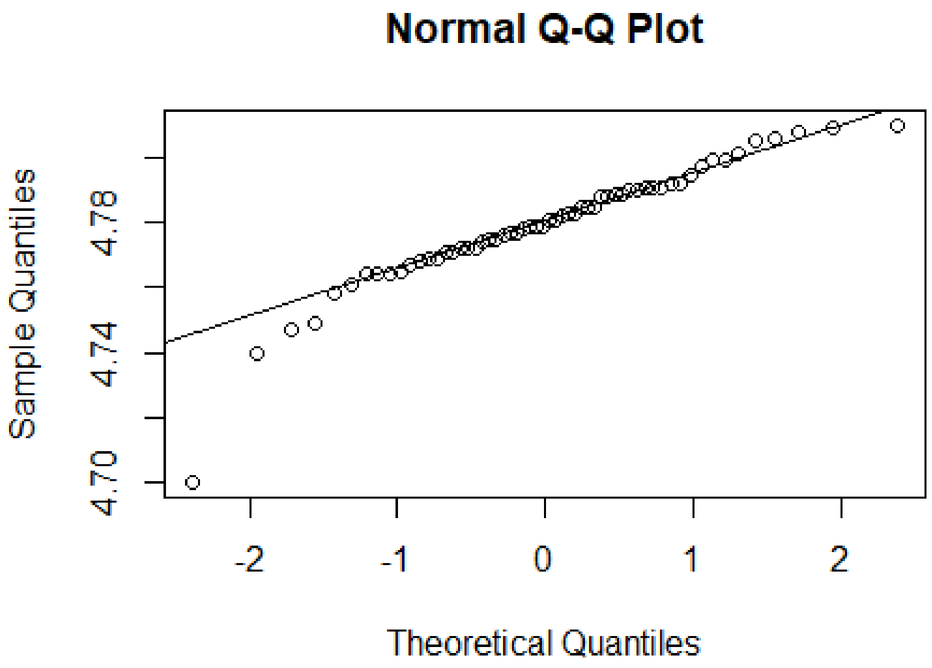


Рис. 15.3

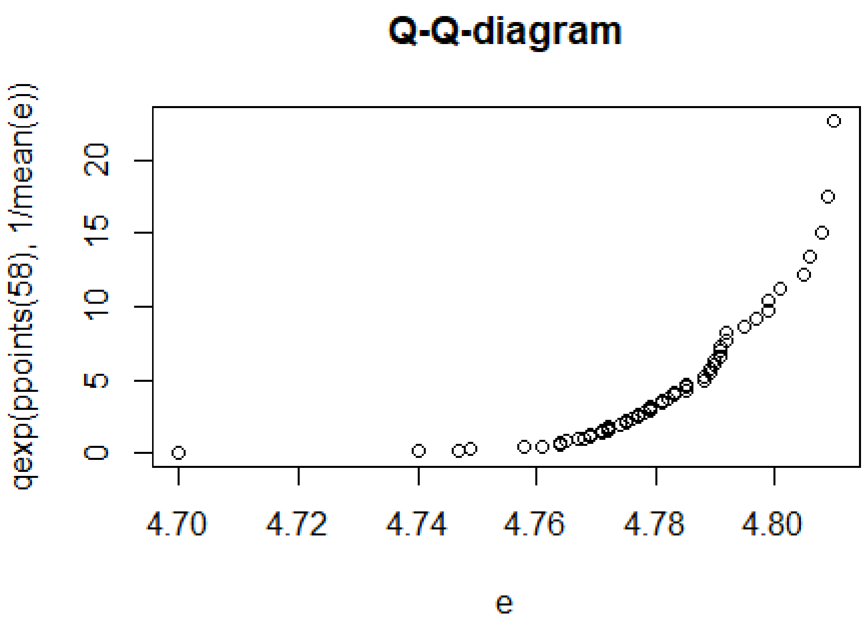


Рис. 15.4

15.4.3. Вибіркова медіана та ящик з вусами

Розглянемо решту графічних характеристик вибірки. Вибірковим аналогом медіани слугує вибіркова медіана.

Вибірковою медіаною $\widehat{Me}$ називають середнє значення у варіаційному ряді:

$$\widehat{Me} = \begin{cases} x_{\left[\frac{n+1}{2}\right]}, & \text{якщо } n \text{ непарне;} \\ \dfrac{x_{\left[\frac{n}{2}\right]} + x_{\left[\frac{n}{2}+1\right]}}{2}, & \text{якщо } n \text{ парне.} \end{cases}$$

При $n \to \infty$ $\widehat{Me} \to Me$ за ймовірністю, тобто вибіркова медіана є оцінкою справжньої медіани. Аналогічно при $n \to \infty$ $x_{\left[\frac{n}{4}\right]} \to x_{1/4}$; $x_{\left[\frac{3n}{4}\right]} \to x_{3/4}$. Тому $x_{\left[\frac{n}{4}\right]}$, $x_{\left[\frac{3n}{4}\right]}$ називають ***емпіричними верхнім і нижнім квартилями.***

Різницю між найбільшим і найменшим значеннями варіаційного ряду називають ***розмахом вибірки***: $x_{[n]} - x_{[1]}$.

Ящик з вусами (boxplot) використовується для зображення вибірки «в цілому».

Риска в центрі - вибіркова медіана, прямокутник відмічає верхній і нижній квартилі, а вуса відмічають розмах вибірки (виключаючи викиди). Нижче побудований за допомогою пакету R ящик з вусами для вибірки змінної e. Два значення пакет ідентифікує як викиди.

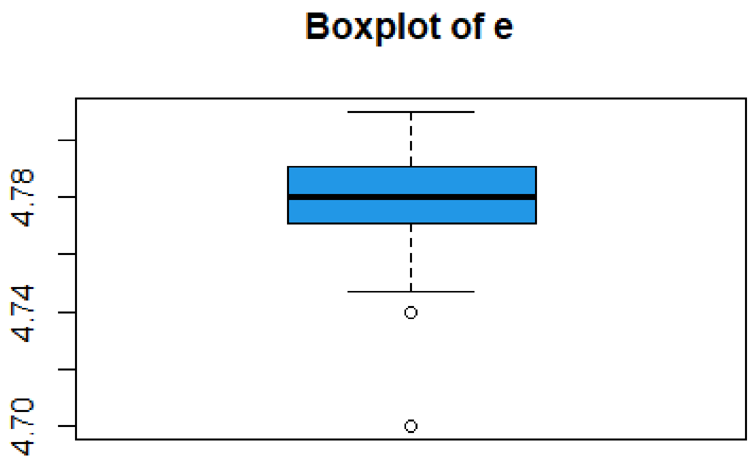


Рис. 15.5

15.5. Статистичні оцінки параметрів розподілу. Характеристики якості оцінок

Нехай треба знайти розподіл деякої одновимірної випадкової величини. Наприклад, маємо деяку кількість яблук, важимо кожне окремо; ξ - вага яблука, випадкова величина. Припустимо, що з якихось теоретичних міркувань нам вдалось встановити - який саме розподіл має ознака (скажімо, нормальний або показниковий). Одразу виникає питання щодо оцінки параметрів розподілу. Як оцінити параметр θ? В розпорядженні статистика є тільки вибірка

$$\zeta: (\Omega, \mathcal{F}, P_\theta) \to R, \quad \zeta = (x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Тут $x_1, x_2, \dots, x_n$ – незалежні однаково розподілені випадкові величини, розподілені так само, як і ξ.

Статистичною оцінкою невідомого параметру θ теоретичного розподілу називають функцію від вибірки

$$\theta \approx \hat{\theta} = \hat{\theta}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

Функцію $\hat{\theta}$ називають ще *статистикою*. Одразу виникає питання: які оцінки $\hat{\theta}$ є хорошими, як взагалі можна оцінити їх якість?

До оцінки $\hat{\theta}$ висувають таку вимогу – умову відсутності систематичної похибки, тобто вимогу $M(\hat{\theta}) = \theta$. В зв'язку з цим маємо таке означення.

Незміщеною називають таку оцінку $\hat{\theta}$, що

$$M(\hat{\theta}) = \theta.$$

Нехай $\hat{\theta}$ - якась незміщена оцінка.

Ефективною називають таку оцінку θ^*, яка є незміщеною і

$$D\theta^* = inf_{\hat{\theta}\in\Phi} D\hat{\theta},$$

де Φ - клас усіх незміщених оцінок параметру θ.

Тобто, ефективна оцінка – це така, що незміщена і має мінімальну дисперсію з усіх можливих.

Найважливішою характеристикою оцінки є її *консистентність*. Зрозуміло, що зі зростанням обсягу вибірки n $\hat{\theta}_n$ повинна прямувати до θ, бо інакше це не є оцінкою.

Консистентною (слушною, спроможною) називають таку статистичну оцінку $\hat{\theta}_n$, яка прямує за ймовірністю до параметру θ, який ми оцінюємо: $\widehat{\theta_n} \xrightarrow{p} \theta$; $n \longrightarrow \infty$ (збіжність за ймовірністю означає, що $\forall \varepsilon > 0$: $P\{|\widehat{\theta_n} - \theta| > \varepsilon\} \longrightarrow 0, n \longrightarrow \infty$). Існує аналогічне означення щодо консистентності в середньоквадратичному.

Приклад 15.5. Оцінювання ймовірності в схемі Бернуллі. Відбувається n незалежних випробувань, ймовірність успіху в кожному випробуванні стала і дорівнює p, відповідно ймовірність невдачі дорівнює $q = 1 - p$. Параметр p нам невідомий, наша мета – його оцінити.

Позначимо ν_n – кількість успіхів в n випробуваннях; $I_i\{\text{У}\}$ - індикатор того, що в і-му випробуванні був успіх. Розглядаємо таку оцінку для p :

$$\hat{p} = \frac{\nu_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} I_i\{\text{У}\} = w_n. \qquad (15.1)$$

Це відносна частота події "Успіх". Чи буде хорошою ця оцінка?

1)Незміщеність.

$$M(\hat{p}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M(I_i\{\text{У}\}) = \frac{np}{n} = p.$$

Оцінка (15.1) є незміщеною.

2) Консистентність. $I_i\{\text{У}\}, i = 1, \ldots, n$ – незалежні однаково розподілені випадкові величини, $M(I_i\{\text{У}\}) = p$; $D(I_i\{\text{У}\}) = MI_i^2\{\text{У}\} - (MI_i\{\text{У}\})^2 = p - p^2 = pq$ – обмежена. За законом великих чисел, за теоремою Чебишова:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} I_i\{\text{У}\} \longrightarrow M(I_1\{\text{У}\}) = p \text{ за ймовірністю, } n \to \infty.$$

Отже, оцінка (15.1) консистентна.

3) Ефективність. Як ми бачимо,
$M(\hat{p}-p)^2 = D(\hat{p}) = D\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} I_i\{У\}\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} D(I_i\{У\}) = \frac{npq}{n^2} = \frac{pq}{n} \longrightarrow 0, n \longrightarrow \infty$

Якщо $D(\theta^*) \longrightarrow inf_{\hat{\theta}\in\Phi} D\hat{\theta}$, $n \longrightarrow \infty$, то оцінку θ^* називають асимптотично ефективною.

Отже, оцінка $\hat{p}$ є асимптотчно ефективною. Існує аналогічне означення щодо асимптотичної зміщеності.

Якщо $M(\theta^*) \longrightarrow \theta$, $n \longrightarrow \infty$, то оцінку θ^* називають асимптотично незміщеною.

15.6. Емпірична функція розподілу

Нехай у нас, як завжди, є вибірка обсягу n - результат вимірювань деякої випадкової величини ξ: $\zeta = (x_1, x_2, \dots, x_n)$

Емпіричною функцією розподілу називається функція

$$F^*(x) = \frac{\text{кількість } x_i \text{ ,які менші за } x}{n} = \frac{\nu(-\infty, x)}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} I\{x_i < x\}\,. \qquad (15.2)$$

На відміну від емпіричної функції розподілу справжню функцію розподілу випадкової величини називають *теоретичною*. Різниця між емпіричною і теоретичною функціями розподілу полягає в тому, що $F(x)$ визначає ймовірність події $\{\xi < x\}$, а емпірична функція розподілу $F^*(x)$ - відносну частоту цієї ж події. Емпірична функція розподілу є оцінкою теоретичної функції розподілу. Приймемо без доведення наступні твердження (частково ми довели їх вище, розглядаючи приклад зі схеми Бернуллі).

Твердження. $F^*(x)$ – незміщена, консистентна і асимптотично ефективна оцінка функції розподілу $F(x)$.

Теорема Гливенко. $\sup_x |F^*(x) - F(x)| \longrightarrow 0$, $n \longrightarrow \infty$ з ймовірністю 1.

Крім того, з означення випливає, що $F^*(x)$ неспадна і $0 \le F^*(x) \le 1$.

Приклад 15.6 Побудувати емпіричну функцію розподілу за даним статистичним розподілом вибірки:

X	2	5	9
n_i	12	18	30

Розв'язання. Визначаємо обсяг вибірки: n = 12 + 18 + 30 = 60.

1. Оскільки $x_1 = 2$ – найменша з варіант, то при $x \le 2$ маємо $\nu(-\infty, x) = 0$; $F^*(x) = 0$.

2. Нехай $2 < x \le 5$. Значення випадкової величини $X < 5$, тобто $x_1 = 2$ спостерігалось 12 разів, тому $\nu(-\infty, x) = 12$ і $F^*(x) = \frac{12}{60} = 0{,}2$ при $2 < x \le 5$.

3. Якщо x набуває значення в інтервалі $5 < x \le 9$, то нерівність $X < x$ виконується для варіант $X = 2$, $X = 5$ і $\nu(-\infty, x) = 12 + 18 = 30$, звідки $F^*(x) = \frac{30}{60} = 0{,}5$

4. Оскільки $X = 9$ – найбільша варіанта, то $F^*(x) = 1$ при $x > 9$.

Отже, маємо емпіричну функцію $F^*(x) = \begin{cases} 0 \quad \text{при} \quad x \le 2; \\ 0{,}2 \quad \text{при} \quad 2 < x \le 5; \\ 0{,}5 \quad \text{при} \quad 5 < x \le 9; \\ 1 \quad \text{при} \quad x > 9. \end{cases}$ її графік:

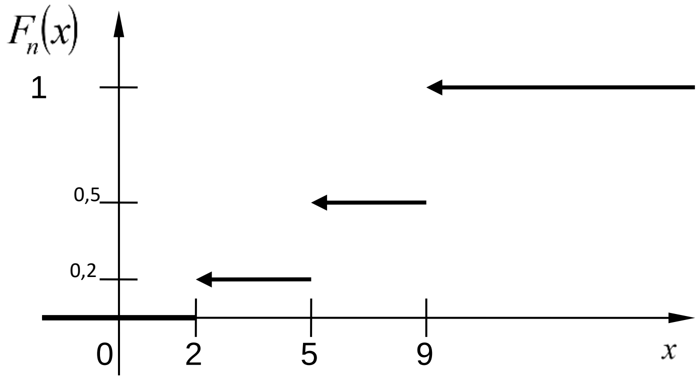


Рис. 15.6.

Якщо всі x_i різні, то стрибок дорівнює $1/n$ на кожній сходинці.

Запитання для самоконтролю

1. *Які задачі розв'язує математична статистика?*
2. *Чим відрізняються генеральна і вибіркова сукупності?*
3. *Що означають слова «вибірка має подвійну природу»?*
4. *Оцінкою якої характеристики ВВ слугує гістограма відносних частот?*
5. *Чим відрізняються і як пов'язані медіана розподілу ВВ і вибіркова медіана розподілу ВВ?*
6. *Як будується ящик з вусами?*

Практичне заняття № 15

ПЕРВИННА ОБРОБКА ДАНИХ.
СТАТИСТИЧНІ ОЦІНКИ ПАРАМЕТРІВ РОЗПОДІЛУ

Приклади розв'язування задач

Задача 15.1. Задані результати обстеження заробітної плати 30 працівників малого підприємства (у.о.):

324, 320, 320, 340, 320, 340, 320, 312, 312, 320, 320, 340, 340, 330, 320, 325, 325, 324, 340, 325.,320, 330, 320, 324, 324, 312, 340, 330, 340, 312.

Потрібно:

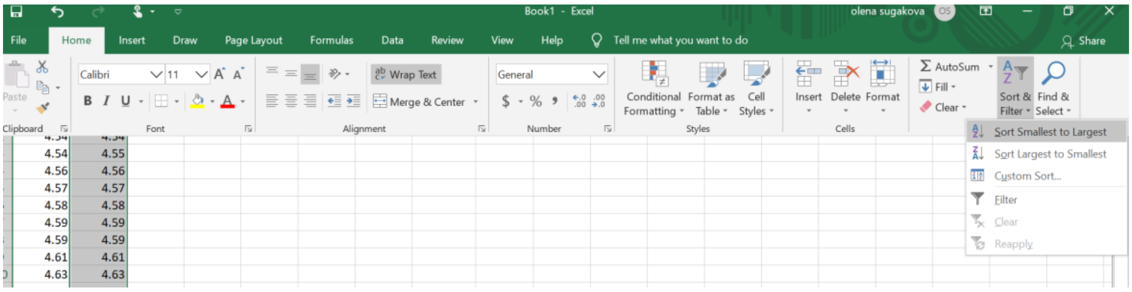
1) побудувати статистичний розподіл частот та відносних частот;

2) полігон відносних частот;

3) емпіричну функцію розподілу.

Розв'язання. 1) Оскільки значення в вибірці повторюються, схоже, що випадкова величина, яка описує зарплатню – дискретна. Отже, статистичний розподіл вибірки буде містити варіанти і відповідні частоти. Впорядковуємо вибірку по зростанню.

Для цього в Excel треба відмітити масив, що сортується, і зайти в меню таким чином:



312, 312, 312, 312, 320, 320, 320, 320, 320, 320, 320, 320, 320, 324, 324, 324, 324, 325, 325, 325, 330, 330, 330, 340, 340, 340, 340, 340, 340, 340. Знаходимо частоти n_i і обчислюємо емпіричні частоти за формулою $W_i = \frac{n_i}{n} = \frac{n_i}{30}$

x_i	312	320	324	325	330	340
n_i	4	9	4	3	3	7
w_i	2/15	3/10	2/15	1/10	1/10	7/30

2) *Полігон відносних частот* являє собою ламану, що з'єднує точки (x_i, w_i). Полігон відносних частот є оцінкою полігону розподілу ВВ, яку ми вимірювали, отримавши вибірку. Даний полігон відносних частот був побудований за допомогою Excel (Для цього треба спочатку записати в таблиці Excel статистичний розподіл відносних частот, відмітити його мишею, перейти в меню за ланцюжком Insert->Charts->Bubble, і полігон готовий).

312	0.133333
320	0.3
324	0.133333
325	0.1
330	0.1
340	0.233333

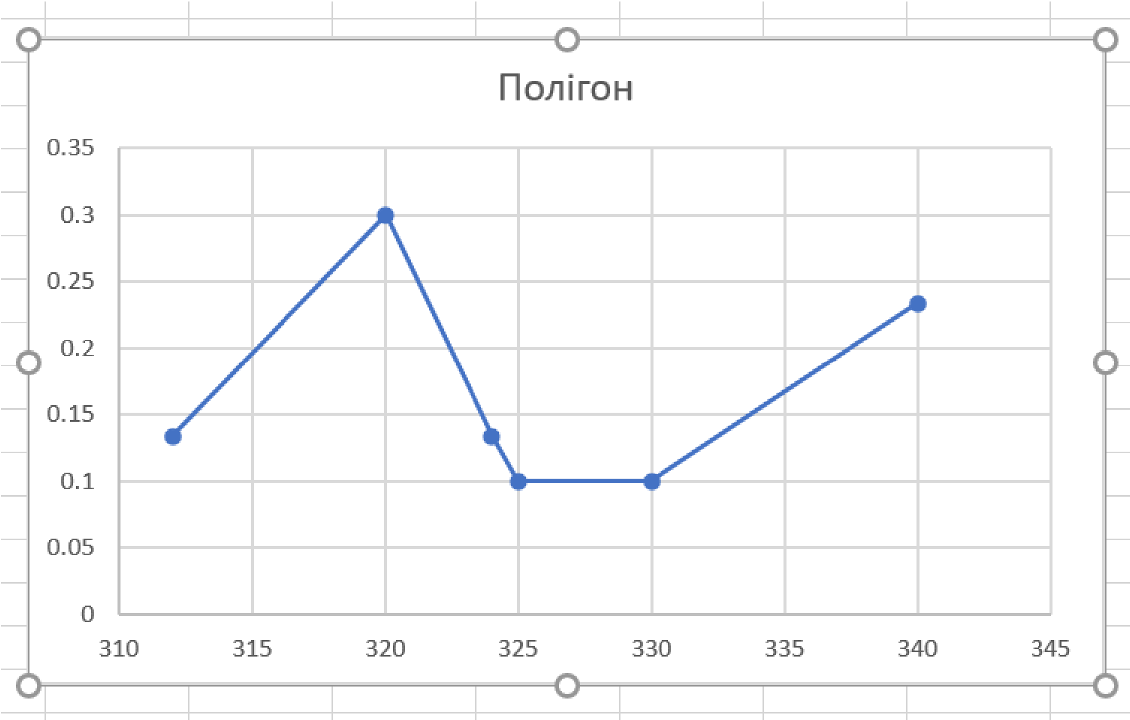


Рис. 15.7

Емпірична функція розподілу знаходиться за формулою (15.2):

$$F^*(x) = \frac{\text{кількість } x_i \text{, які менші за } x}{n}$$

x_i приймають значення лише 312, 320, 324, 325, 330, 340.

Очевидно, що коли $x \leq 312$, таких x_i, що менші за x, не існує. Тому їх кількість дорівнює нулю і $F^*(x) = 0$.

Далі, нехай $312 < x \leq 320$. Тоді кількість x_i, що менші за x, дорівнює кількості повторень значення 312 в вибірці, тобто 4 і $F^*(x) = \frac{4}{30} = \frac{2}{15}$.

Тепер нехай $320 < x \leq 324$. В цьому випадку кількість x_i, що менші за x, дорівнює кількості повторень значення 312 і 320 в вибірці, тобто 4+9=13 і $F^*(x) = \frac{13}{30}$. Аналогічно для $324 < x \leq 325$ маємо $F^*(x) = \frac{4+9+4}{30} = \frac{17}{30}$. І т.д.

Врешті-решт маємо таку емпіричну функцію розподілу

$$F^*(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \le 312, \\ \frac{2}{15}, & \text{якщо } 312 < x \le 320, \\ \frac{13}{30}, & \text{якщо } 320 < x \le 324, \\ \frac{17}{30}, & \text{якщо } 324 < x \le 325, \\ \frac{2}{3}, & \text{якщо } 325 < x \le 330, \\ \frac{23}{30}, & \text{якщо } 330 < x \le 340, \\ 1, & \text{якщо } x > 340 \end{cases}$$

Задача 15.2. Проведено вимірювання жирності молока у 30 корів. Результати вимірювання жирності молока у відсотках:

4.55, 4.68, 4.54, 4.58, 4.56, 4.65, 4.69, 4.57, 4.64, 4.59,
4.67, 4.71, 4.63, 4.79, 4.61, 4.78, 4.82, 4.74, 4.88, 4.89,
4.68, 4.65, 4.54, 4.79, 4.59, 4.71, 4.74, 4.72, 4.78, 4.81.

Потрібно побудувати:

1) інтервальний розподіл частот і відносних частот з кроком $h = 0{,}1\%$;

2) гістограму відносних частот.

Розв'язання. 1) Сортуємо масив за зростанням: 4.54, 4.54, 4.55, 4.56, 4.57, 4.58, 4.59, 4.59, 4.61, 4.63, 4.64, 4.65, 4.65, 4.67, 4.68, 4.68, 4.69, 4.71, 4.71, 4.72, 4.74, 4.74, 4.78, 4.78, 4.79, 4.79, 4.81, 4.82, 4.88, 4.89.

Найменше значення в вибірці – 4.54, найбільше – 4.89. Округлюючи до десятих, помічаємо, що вся вибірка вкладається у відрізок від 4.5 до 4.9. Довжина часткового відрізка за умовою дорівнює 0.1. Це, очевидно, дає нам 4 часткових інтервали. Знаходячи скільки значень попало в кожний інтервал, маємо такий статистичний розподіл вибірки інтервального типу.

Інтервал	[4.5;4.6)	[4.6;4.7)	[4.7;4.8)	[4.8;4.9)
n_i	8	9	9	4

2) Для побудови гістограми відносних частот рахуємо відносні частоти часткових інтервалів за формулою $w_i = \frac{n_i}{n} = \frac{n_i}{30}$.

Інтервал	[4.5;4.6)	[4.6;4.7)	[4.7;4.8)	[4.8;4.9)
n_i	4/15	3/10	3/10	2/15

Будуємо гістограму відносних частот. Гістограма відносних частот складається з прямокутників, основи яких – часткові інтервали, висоти дорівнюють відносним частотам.

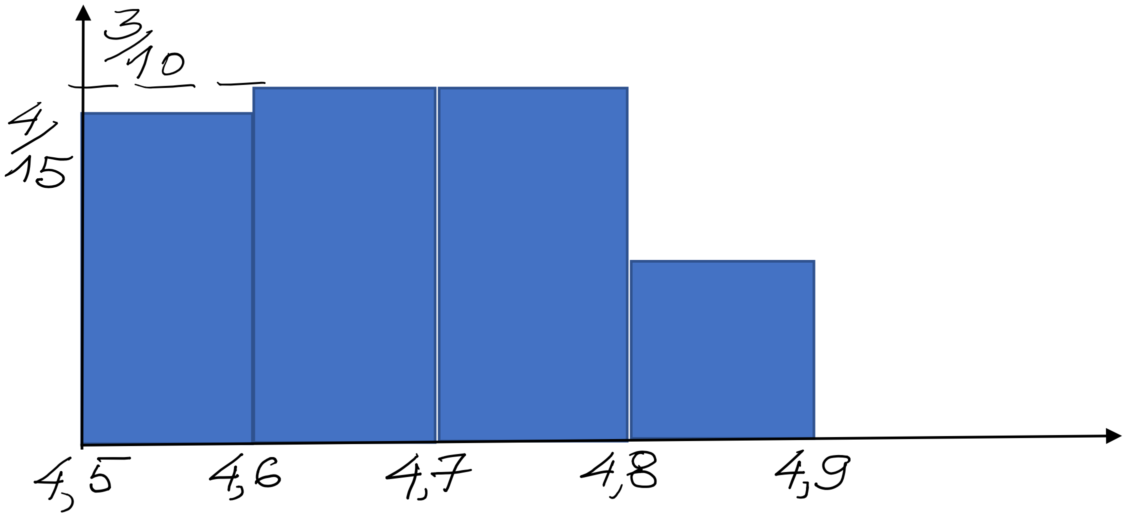


Рис. 15.8

Якщо ви хочете побудувати гістограму в Excel, то розбиття на інтервали буде стандартним, за замовчуванням. Тоді вам треба відмітити масив з вибіркою і перейти в меню за ланцюжком Insert->Insert Statistic Chart->Histogram.

Буде такий результат, з іншим групуванням

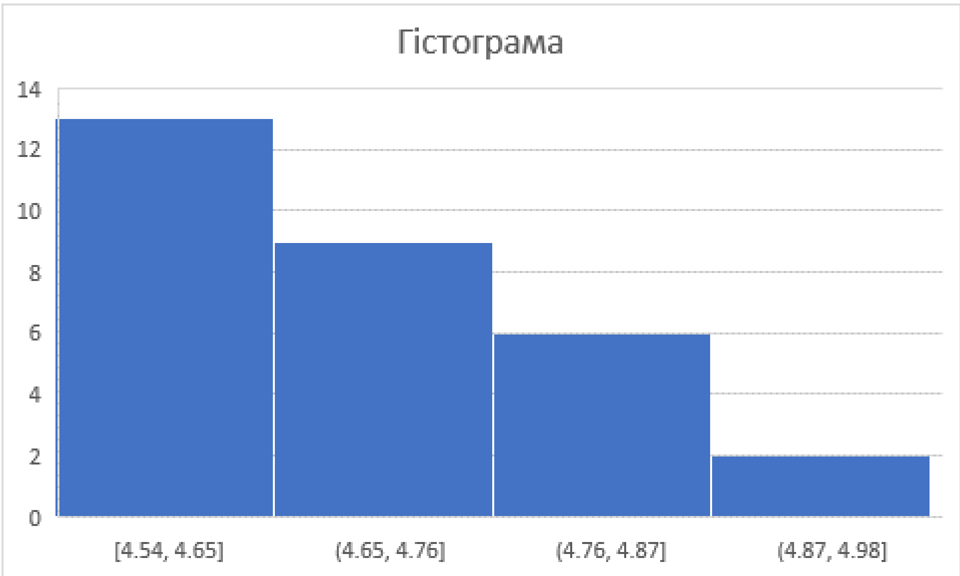


Рис. 15.9

Якщо ж там же в меню обрати Box and Whisker, то буде побудований ящик з вусами нашої вибірки

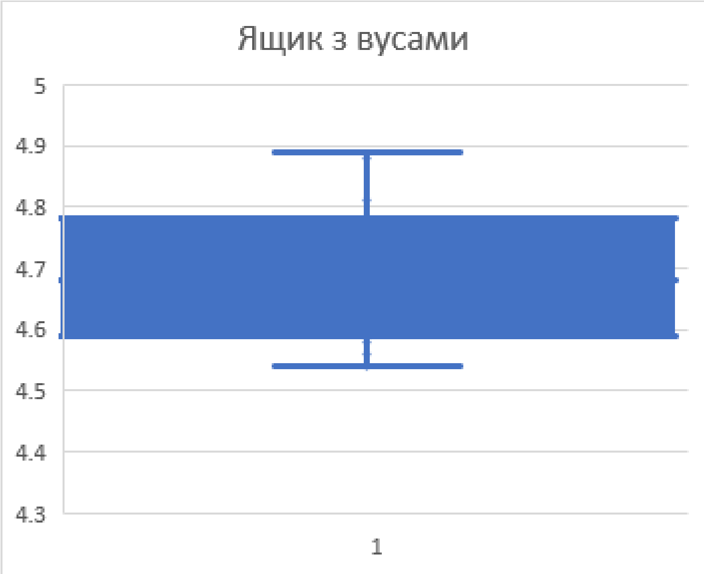


Рис. 15.10

Завдання для самостійного виконання

131. Наведена інформація про розмір премій (в у.о.) 40 найкращих працівників підприємства.

210, 230, 220, 240, 230, 241, 220, 230, 241, 224, 224, 241, 225, 240, 201, 230, 210, 201, 241, 210, 210, 220, 201, 220, 241, 241, 240, 230, 225, 224, 241, 201, 220, 224, 225, 220, 230, 210, 225, 240.

Побудувати:

1) статистичний розподіл частот та відносних частот;

2) полігон відносних частот;

3) емпіричну функцію розподілу.

132. Проведено вимірювання діаметрів 50 втулок. Результати вимірювання (мм):

3,27; 3,18; 3,42; 3,71; 3,92; 3,61; 3,12; 3,63; 3,22; 3,53; 3,84; 3,11; 3,27; 3,59; 3,43; 3,29; 3,82; 3,99; 3,13; 3,33; 3,49; 3,52; 3,61; 3,74; 3,14; 3,28; 3,36; 3,44; 3,22; 3,47; 3,52; 3,63; 3,13; 3,26; 3,52; 3,39; 3,48; 3,81; 3,75; 3,51; 3,81; 3,33; 3,54; 3,42; 3,93; 3,85; 3,82; 3,65; 3,68; 3,85.

Побудувати:

1) інтервальний розподіл частот і відносних частот з кроком $h = 0{,}1$;

2) гістограму відносних частот.

133. Обстежені головні фонди 50 підприємств, (тис. у. о.):

1,8; 4,3; 9,2; 1,2; 2,3; 3,6; 5,2; 4,1; 6,3; 9,1; 8,2; 6,5; 4,6; 5,9; 1,1; 2,3; 3,9; 2,7; 9,5; 8,1; 9,6; 7,3; 6,5; 1,7; 2,4; 4,7; 5,6; 5,8; 1,3; 2,8; 1,7; 3,3; 4,8; 5,5; 9,3; 3,5; 4,7; 5,9; 6,8; 7,3; 8,9; 9,6; 3,7; 2,2; 3,7; 8,9; 7,5; 6,6; 7,1; 4,9.

Побудувати:
1) інтервальний розподіл частот і відносних частот з кроком $h = 1$;
2) гістограму частот;
3) ящик з вусами.

134. Через кожну годину вимірювали напругу в електричній мережі. Результати вимірювання напруги (у В):
227, 223, 227, 229, 228, 226, 223, 227, 223, 224, 226, 221, 222, 227, 224, 223, 221, 230, 225, 224, 224, 227, 230, 226, 230, 223, 224, 226, 222, 223, 220, 226.
Побудувати:
1) статистичний розподіл частот та відносних частот;
2) полігон відносних частот;
3) емпіричну функцію розподілу.

135. Нижче наведена кількість балів, набрана кожним з 50 абітурієнтів на вступних іспитах:
21, 19, 18, 17, 21, 18, 18, 23, 22, 23, 17, 24, 21, 18, 22, 17, 18, 21, 19, 17, 19, 21, 20, 22, 22, 24, 20, 25, 21, 20, 19, 20, 25, 21, 19, 18, 23, 24, 19, 21, 24, 25, 21, 20, 25, 20, 17, 18, 18, 23.
Побудувати:
1) статистичний розподіл частот та відносних частот;
2) полігон відносних частот;
3) емпіричну функцію розподілу.

136. Задано вибірку: 3, -2, -4,-3, -5, -4, 2, 1, 5, -1, 6, -4, 1, 5, 2, 3, 5, 2, -4, 5, -3, -4, 1, 2, 3.
Побудувати:
1) статистичний розподіл частот та відносних частот;
2) полігон відносних частот;
3) емпіричну функцію розподілу.

137. Нижче наведені результати зважування 40 однотипних підшипників (у мг):
5,64, 6,23, 4,54, 8, 63, 5,23, 7,91, 6,44, 5,23, 6,55, 7,41, 5,25, 4,72, 8,13, 9,56, 7,38, 6,81, 9,95, 4,19, 5,49, 7,83, 8,72, 6,51,5,32, 4,95, 5,39, 4,11, 8,95, 5,41, 6,39, 7,73, 8,71, 9,71, 5,68, 6,77, 4,73, 5,88,9,11, 8,22, 5,99, 7,12.
Побудувати:
1) інтервальний розподіл частот і відносних частот з кроком $h = 1$;
2) гістограму частот.

138. Задана вибірка у вигляді статистичного розподілу частот

x_i	3	5	7	9	11
n_i	10	15	25	30	20

Побудувати:

1) статистичний розподіл відносних частот;
2) полігон відносних частот;
3) емпіричну функцію розподілу.

139. Для контролю роботи наповнювального апарату навмання відібрано 25 пляшок з мінеральною водою. Результати перевірки вмісту наведені в таблиці.

x_i	247	249	251	253	255
n_i	3	6	8	3	5

Побудувати:
1) статистичний розподіл відносних частот;
2) полігон відносних частот;
3) емпіричну функцію розподілу.

140. Підприємство випускає харчові добавки та фасує їх у пластикові коробки. Для контролю відібрали 50 коробок. Результати зважування їх вмісту наведені в таблиці.

інтервали	46-48	48-50	50-52	52-54	54-56
n_i	4	12	18	4	2

Побудувати:
1) статистичний розподіл відносних частот;
2) гістограму частот.

Приймаючи за варіанти розподілу середини інтервалів, отримуємо такий «згладжений» розподіл нашої вибірки

x_i	47	49	51	53	55
n_i	4	12	18	4	2

Побудувати для цієї вибірки емпіричну функцію розподілу.

ЛЕКЦІЯ №16

МЕТОД МОМЕНТІВ. МЕТОД МАКСИМАЛЬНОЇ ВІРОГІДНОСТІ. ДОВІРЧІ ІНТЕРВАЛИ ДЛЯ ПАРАМЕТРІВ НОРМАЛЬНОГО РОЗПОДІЛУ

16.1. Метод моментів

Метод моментів був запропонований К.Пірсоном в 1894 році. Нехай $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ – вибірка, результат спостережень за випадковою величиною ξ, яка має функцію розподілу $F_\theta(x)$. Функція розподілу залежить від невідомого параметру θ. Нам треба оцінити цей параметр за вибіркою.

Підхід методу моментів полягає в наступному. Ми обираємо функцію $g(x)$, вона називається *пробною*. Обираємо її так, щоб дане математичне сподівання, воно ще називається ***теоретичним моментом***, було скінченним:

$$m(\theta) = M\big(g(\xi)\big) = \begin{cases} \sum_{m=1}^{k} g(X_m) {p_m}^{\theta} \\ \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_\theta(x) dx \end{cases} < \infty$$

і бажано, щоб $m(\theta)$ була монотонною і неперервною.

Емпіричним моментом, на відміну від теоретичного, називається середнє вигляду:

$$\bar{g} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g(x_i)$$

Потім ми прирівнюємо відповідні теоретичні і емпіричні моменти. Згідно закону великих чисел вони повинні бути приблизно однаковими при великих обсягах вибірки. Справді, за ЗВЧ

$$\bar{g} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g(x_i) \longrightarrow M\big(g(\xi)\big), \qquad n \longrightarrow \infty$$

Оцінкою методу моментів (ОММ) $\hat{\theta}$ називається корінь рівняння

$$m(\theta) = M\big(g(\xi)\big) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g(x_i)$$

Якщо $m(\theta)$ монотонна і неперервна, то такий корінь є єдиним.

Теорема. Нехай m є неперервною і монотонною функцією. Якщо $M(g(\xi)) < \infty$, то оцінка методу моментів є консистентною.

Подивимось, які оцінки дає метод моментів для таких параметрів розподілу, як математичне сподівання і дисперсія.

1) Оцінка математичного сподівання (Вибіркове середнє).

$$M(\xi) \approx \overline{x_B} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i. \qquad (16.1)$$

Відмітимо, що у випадку вибірки, де варіанти можуть повторюватись, і таким чином, кожній варіанті x_i відповідає частота $n_i, i = 1, \dots, k$, формула (16.1) набуває вигляду

$$M(\xi) \approx \overline{x_B} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i n_i. \qquad (16.2)$$

2) Оцінка дисперсії (Вибіркова дисперсія).

Оскільки $D(\xi) = M(\xi^2) - \big(M(\xi)\big)^2$, то оцінка має вигляд

$$D(\xi) \approx D_B = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x_B})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 - (\overline{x_B})^2 \qquad (16.3)$$

Так само, у випадку вибірки з повторенням варіант маємо схожу формулу:

$$D(\xi) \approx D_B = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}(x_i - \overline{x_B})^2 n_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} {x_i}^2 n_i - (\overline{x_B})^2 \qquad (16.4)$$

Ці оцінки є консистентними, бо оцінки методу моментів консистентні. Перевіримо їх на незміщеність (Нагадуємо, що елементи вибірки є незалежні однаково розподілені ВВ, розподілені так само, як ξ).

$$1) M(\overline{x_B}) = M\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M(x_i) = M(\xi).$$

Отже, оцінка математичного сподівання $\overline{x_B}$ є незміщеною.

$$2) M(D_B) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M{x_i}^2 - M\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{n} nM(\xi^2) - \frac{1}{n^2}\left(M\left(\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2\right) + 2M\left(\sum_{i,j=1; i\neq j}^{n} x_i\, x_j\right)\right) =$$

$$= M(\xi^2) - \frac{1}{n^2}\Big(nM(\xi^2) + 2C_n^2\big(M(\xi)\big)^2\Big) = \frac{n-1}{n} D(\xi) \neq D(\xi).$$

Отже, оцінка дисперсії D_B є зміщеною, але асимптотично незміщеною, бо $M(D_B) \longrightarrow D(\xi)$ при $n \longrightarrow \infty$.

Іноді користуються так званою"виправленою дисперсією"

3) Ще одна оцінка дисперсії. (Виправлена дисперсія).

$$D(\xi) \approx s^2 = \frac{n}{n-1} D_B = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x_B})^2$$

Очевидно, це незміщена оцінка дисперсії. З наведених оцінок дисперсії природньо випливають такі оцінки середньоквадратичного відхилення ВВ ξ.

4) Оцінки середньоквадратичного відхилення

$$\widehat{\sigma_B} = \sqrt{D_B}.$$

$$\hat{s} = \sqrt{\frac{n}{n-1} D_B}. \tag{16.5}$$

Зауваження. Досі ми розглядали параметр θ як одновимірний. Якщо ж є декілька невідомих параметрів $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_d$, то обирають декілька пробних функцій $g_1, g_2, \dots, g_d$ і оцінюють одночасно параметри оцінками, які є розв'язками системи:

$$\begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} g_1(x) dF_{\theta_1,\dots,\theta_d}(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g_1(x_i) \\ \dots \\ \int_{-\infty}^{\infty} g_d(x) dF_{\theta_1,\dots,\theta_d}(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g_d(x_i) \end{cases}$$

Зазначимо, що частіше за все обирають $g_k(x) = x^k$.

Приклад 16.1. Нехай $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ - вибірка з нормального розподілу, розподілена за законом $N(a, \sigma^2)$. Оцінити a та σ^2 методом моментів.

Розв'язання. Прирівняємо математичне сподівання до вибіркового середнього, а також запишемо таку ж рівність для дисперсії. Як ми пам'ятаємо, математичне сподівання нормального розподілу дорівнює a, а дисперсія - σ^2

$$M(\xi) = a = \overline{x_B}$$

$$D(\xi) = \sigma^2 = D_B.$$

Отже, маємо таку ОММ:

$$\hat{a} = \overline{x_B}$$

$$\widehat{\sigma^2} = D_B.$$

Приклад 16.2. Нехай $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ – вибірка з біноміального розподілу $P\{\xi = k\} = C_m^k p^k (1-p)^{m-k};\ k = 0,1,\dots,m$. Оцінити параметри m та p методом моментів.

Розв'язання. Невідомих параметрів два. Тому нам треба 2 рівняння, прирівняємо емпіричні і теоретичні математичне сподівання і дисперсію. Як відомо, для біноміального розподілу $M(\xi) = mp;\ D(\xi) = mp(1-p)$. Отже,

$$\begin{cases} mp = \overline{x_B} \\ mp(1-p) = D_B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \hat{p} = \dfrac{\overline{x_B} - D_B}{\overline{x_B}} \\ \widehat{m} = \dfrac{(\overline{x_B})^2}{\overline{x_B} - D_B} \end{cases}$$

Оцінки методу моментів знайдено.

16.2. Робастні оцінки

Треба зауважити, що існує ще одна характеристика оцінки - *робастність*.

Робастною називають оцінку, яка є стійкою по відношенню до забруднення вибірки.

Приклад 16.3. Зрозуміло, наприклад, що $\overline{x_B}$ є неробастною оцінкою $M(\xi)$. Змінюючи лише одне значення x_j в вибірці, ми можемо отримати будь-яке значення, навіть дуже велике.

$$\overline{x_B} = \frac{1}{n}\sum_{i=1;i\neq j}^{n} x_i + \frac{x_j}{n}.$$

Для характеризації рівня робастності оцінки користуються поняттям *точки руйнування оцінки (breakdown point).*

Точкою руйнування оцінки S називається найменша відносна частина спостережень, яку треба змінити, щоб оцінка $S \to \infty$.

Оскільки для вибіркового середнього достатньо змінити одне якесь значення x_j в вибірці, щоб $\overline{x_B} = \infty$, і відносна частина таких змінених спостережень $\frac{1}{n} \longrightarrow 0,\ n \longrightarrow \infty$, то точка руйнування для вибіркового середнього дорівнює нулю.

Приклад 16.4. А от вибіркова медіана

$$\widehat{med} = \begin{cases} x_{\left[\frac{n+1}{2}\right]}, & \text{якщо } n \text{ непарне;} \\ \dfrac{x_{\left[\frac{n}{2}\right]} + x_{\left[\frac{n}{2}+1\right]}}{2}, & \text{якщо } n \text{ парне.} \end{cases}$$

є робастною оцінкою справжньої медіани розподілу. Забруднюємо вибірку одним викидом - значення медіани пересувається не більше, ніж на одну порядкову статистику. Вибіркова медіана має точку руйнування = 0,5. Справді - треба спрямувати до нескінченності половину елементів вибірки, щоб вибіркова медіана $\widehat{med} \longrightarrow \infty$.

Можна навести приклади оцінок з іншими величинами точок руйнування. Оцінка *інтерквартильного розмаху* (це різниця між квантилями рівня $1/4$ і $3/4$), запропонована у вигляді $IQR = 0{,}74|x_{[0{,}75n]} - x_{[0{,}25n]}|$, має точку руйнування$= 0{,}25$.

16.3. Метод максимальної вірогідності (правдоподібності)

Це метод оцінки невідомого параметра розподілу. Взагалі цей метод має більш широку сферу застосування, але ми розглядатимемо його саме в такій якості. Спершу розглянемо цей метод на прикладі про оцінку ймовірності в схемі Бернуллі, постановка задачі така сама, як в прикладі з п.18.4.

Приклад 16.5. Оцінка ймовірності в схемі Бернуллі. Нехай проводиться n незалежних випробувань, в результаті кожного відбувається "успіх"(ми його фіксуватимемо як "1") з ймовірністю p або "невдача"("0") з ймовірністю $q = 1 - p$. Параметр p невідомий, наша мета - його оцінити. Результат випробувань матиме вигляд:

$$X_1, X_2, \dots, X_n, \qquad \text{де} \qquad X_i = \begin{cases} 1 & \text{з ймовірністю} \quad p \\ 0 & \text{з йморірністю } q = 1 - p. \end{cases}$$

Припустимо, що ми вже провели ці n незалежних експериментів, зафіксували якусь вибірку $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, яка насправді являє собою послідовність з нулів і одиниць $(1,0,\dots 1)$: Розглянемо ймовірність тієї події, що відбулася, позначивши її $L(x_1, x_2, \dots, x_n, p)$.

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n, p) = P\{X_1 = x_1; X_2 = x_2; \dots; X_n = x_n\} =$$

$$= P\{X_1 = x_1\}P\{X_2 = x_2\} \dots P\{X_n = x_n\} = p^{\sum_{i=1}^{n} x_i}(1-p)^{n-\sum_{i=1}^{n} x_i}.$$

Зробимо таке природнє припущення: *якщо подія відбулася, то ймовірність її максимальна*. Найчастіше ми спостерігаємо те значення вектора $X_1, X_2, \dots, X_n$, при якому значення $L(x_1, x_2, \dots, x_n, p)$ близьке до максимального. Отже, розглядаємо таку оцінку

$$\hat{p} = argmax_p \ lnL(x_1, x_2, \dots, x_n, p) = argmax_p \ L(x_1, x_2, \dots, x_n, p).$$

Максимум функцій $lnL(x_1, x_2, \dots, x_n, p)$ і $L(x_1, x_2, \dots, x_n, p)$ досягається в одній і тій самій точці, але lnL легше аналізувати. Отже,

$$lnL(x_1, x_2, \dots, x_n, p) = ln\left(p^{\sum_{i=1}^{n} x_i}(1-p)^{n-\sum_{i=1}^{n} x_i}\right) =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} x_i \, lnp + \left(n - \sum_{i=1}^{n} x_i\right) ln(1-p).$$

За необхідною умовою екстремуму

$$\frac{\partial \, lnL}{\partial p} = 0 \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \ \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{n} x_i - \frac{n - \sum_{i=1}^{n} x_i}{1-p} = 0.$$

Звідси маємо таку оцінку:

$$\hat{p} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \overline{x_B}.$$

Узагальнимо цей підхід. Нехай $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ – вибірка, результат спостережень за випадковою величиною ξ, розподіл якої залежить від параметру θ. Нам треба оцінити цей параметр за вибіркою.

16.3.1. Оцінка методу максимальної вірогідності у випадку дискретної випадкової величини

Нехай ξ – дискретна випадкова величина з законом розподілу $p(m,\theta) = P\{\xi = m\}$, який залежить від невідомого параметра θ.

Функція

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n, \theta) = p(x_1,\theta)p(x_2,\theta) \times \dots \times p(x_n,\theta) \qquad (16.6)$$

називається ***функцією вірогідності (правдоподібності).***

Оцінка методу максимальної вірогідності (ОММВ):

$$\hat{\theta} = arg\max_{\theta} L(x_1, x_2, \dots, x_n, \theta), \qquad (16.7)$$

тобто, те значення θ, при якому функція L набуває максимального значення.

16.3.2. Оцінка методу максимальної вірогідності у випадку неперервної випадкової величини

Нехай ξ – абсолютно неперервна випадкова величина зі щільністю $f(x,\theta)$, що залежить від невідомого параметра θ.

Функція

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n, \theta) = f(x_1,\theta)f(x_2,\theta) \times \dots \times f(x_n,\theta) \qquad (16.8)$$

називається ***функцією вірогідності (правдоподібності).***

Оцінка методу максимальної вірогідності (ОММВ):

$$\hat{\theta} = arg\max_{\theta} L(x_1, x_2, \dots, x_n, \theta).$$

Доведено, що при виконанні деяких умов регулярності, ОММВ є консистентною і асимптотично найбільш ефективною.

Зауваження. Оскільки максимум функцій L та $\ln L$ досягається в одній і тій самій точці, а аналізувати $\ln L$ легше, то дуже часто ОММВ шукають у вигляді $\hat{\theta} = arg\max_{\theta} \ln L(x_1, x_2, \dots, x_n, \theta)$.

Зауваження. Якщо розподіл містить декілька невідомих параметрів $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_d$, то ОММВ будується аналогічно. В цьому випадку вирішують задачу пошуку максимуму функції багатьох змінних.

Приклад 16.6. Нехай $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ – вибірка з розподілу

$$p(k,\theta) = P\{X_1 = k\} = C_{r-1+k}^{r-1}\left(\frac{1}{\theta}\right)^r\left(1-\frac{1}{\theta}\right)^k, k = 0,1, \dots,$$

r – відомий параметр. Знайти О.М.М.В. параметра θ.

Розв'язання. Наш розподіл дискретний, тому функція правдоподібності має вигляд

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n, \theta) = p(x_1, \theta)p(x_2, \theta) \dots p(x_n, \theta) =$$

$$= C_{r-1+x_1}^{r-1} \left(\frac{1}{\theta}\right)^r \left(1 - \frac{1}{\theta}\right)^{x_1} C_{r-1+x_2}^{r-1} \left(\frac{1}{\theta}\right)^r \left(1 - \frac{1}{\theta}\right)^{x_2} \dots C_{r-1+x_n}^{r-1} \left(\frac{1}{\theta}\right)^r \left(1 - \frac{1}{\theta}\right)^{x_n} =$$

$$= C_{r-1+x_1}^{r-1} C_{r-1+x_2}^{r-1} \dots C_{r-1+x_n}^{r-1} \left(\frac{1}{\theta}\right)^{nr} \left(1 - \frac{1}{\theta}\right)^{\sum_{i=1}^{n} x_i};$$

$$\ln L = \ln\left(C_{r-1+x_1}^{r-1} C_{r-1+x_2}^{r-1} \dots C_{r-1+x_n}^{r-1}\right) - nr \ln\theta + \sum_{i=1}^{n} x_i \,(\ln(\theta - 1) - \ln\theta).$$

Повинна виконуватись необхідна умова екстремуму:

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \theta} = -\frac{nr}{\theta} + \sum_{i=1}^{n} x_i \left(\frac{1}{\theta - 1} - \frac{1}{\theta}\right) = 0.$$

Розв'язуючи, маємо таку оцінку:

$$\hat{\theta} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{nr} + 1 = \frac{\overline{x_B}}{r} + 1.$$

Приклад 16.7. Нехай $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ – вибірка з показникового розподілу.

$$f(x, \lambda) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0. \end{cases}$$

Оцінити параметр λ методом максимальної вірогідності.

Розв'язання. Ми маємо справу з абсолютно неперервним розподілом, отже,

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n, \theta) = f(x_1, \theta) f(x_2, \theta) \dots f(x_n, \theta) = \lambda e^{-\lambda x_1} \lambda e^{-\lambda x_2} \dots \lambda e^{-\lambda x_n} = \lambda^n e^{-\lambda \sum_{i=1}^{n} x_i};$$

$$\ln L = n \ln \lambda - \lambda \sum_{i=1}^{n} x_i.$$

Необхідна умова екстремуму:

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \theta} = \frac{n}{\lambda} - \sum_{i=1}^{n} x_i = 0.$$

$$\hat{\lambda} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} x_i} = \frac{1}{\overline{x_B}}.$$ Це і є ОММВ.

16.4. Інтервальні оцінки. Довірчі інтервали для параметрів нормального розподілу

Досі ми розглядали тільки точкові оцінки. Наочне представлення про точність оцінок дають довірчі інтервали (інтервали надійності)

Довірчим інтервалом називають випадковий інтервал, всередині якого з ймовірністю γ, близькою до 1, міститься справжнє значення параметра, який ми оцінюємо. Величина γ називається ***надійністю***.

$P\{\theta \in (\alpha,\beta)\} = \gamma$ — (α,β) точний інтервал;

$P\{\theta \in (\alpha,\beta)\} \geq \gamma$ — (α,β) нестрогий інтервал;

$lim_{\{n\to\infty\}} P\{\theta \in (\alpha,\beta)\} = \gamma -$ (α,β) асимптотичний інтервал.

$1-\gamma$ називається ***рівнем значущості*** довірчого інтервалу. Значення γ обирається дослідником виходячи з готовності миритися з можливістю помилки. Частіше за все беруть $\gamma = 0{,}95$ або $\gamma = 0{,}99$.

16.4.1. Довірчі інтервали для невідомого середнього у випадку відомої дисперсії

Нехай ξ розподілена за законом $N(a,\sigma^2)$, причому a невідоме, а σ відоме. Треба за результатами спостережень за нею $x_1, x_2, \ldots, x_n$ оцінити a і побудувати довірчий інтервал з надійністю γ для цієї оцінки. За оцінку a беремо вибіркове середнє $\overline{x_B}$.

Твердження. Якщо $x_1, x_2, \ldots, x_n$ незалежні в.в, розподілені за законом $N(a,\sigma^2)$, то $\overline{x_B}$ теж нормальна, розподілена за законом $N\left(a,\frac{\sigma^2}{n}\right)$.

Доведення. Запишемо характеристичну функцію для $\overline{x_B}$.

$$\varphi_{\overline{x_B}}(z) = Me^{iz\,\overline{x_B}} =$$
$$= Me^{\frac{iz}{n}\sum_{\{j=1\}}^{n} x_j} = \prod_{j=1}^{n} Me^{\frac{iz}{n}x_j} = \left(\varphi_{x_1}\left(\frac{z}{n}\right)\right)^n .$$

Оскільки для нормальної ВВ $\varphi_{x_1}(z) = e^{iza-\frac{\sigma^2 z^2}{2}}$, то

$$\varphi_{\overline{x_B}}(z) = \left(e^{\frac{iza}{n}-\frac{\sigma^2 z^2}{2n^2}}\right)^n = e^{iza-\frac{\sigma^2 z^2}{2n}}.$$

А це є характеристичною функцією ВВ з розподілом $N\left(a,\frac{\sigma^2}{n}\right)$. Твердження доведено.

Тепер побудуємо довірчий інтервал. Будемо вимагати, щоб

$$P\{|\,\overline{x_B} - a| < \delta\} = \gamma,$$

де γ задане. Користуючись твердженням, можемо записати

$$P\{|\,\overline{x_B} - a| < \delta\} = P\{a-\delta < \overline{x_B} < a+\delta\} =$$

$$= \Phi\left(\frac{a+\delta-a}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right) - \Phi\left(\frac{a-\delta-a}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right) = \Phi\left(\frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}\right) - \Phi\left(-\frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}\right).$$

(Тут ми використали формулу ймовірності попадання в інтервал нормальної випадкової величини $\xi \sim N(a,\sigma^2) \Rightarrow P\{\alpha < \xi < \beta\} = \Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right)$, $\Phi(x)$ −функція Лапласа). Оскільки $\Phi(-x) = -\Phi(x)$, то

$$P\{a-\delta < \overline{x_B} < a+\delta\} = 2\Phi\left(\frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}\right) = \gamma \quad \text{або}$$

$$\Phi\left(\frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}\right) = \frac{\gamma}{2}\ .$$

Розв'язуємо цю рівність за допомогою таблиць. Шукаємо таке значення аргументу, функція Лапласа якого дорівнює $\frac{\gamma}{2}$:

$$t_{\gamma/2} = \Phi^{-1}\left(\frac{\gamma}{2}\right)\ ;$$

$$\delta = \frac{\sigma\, t_{\gamma/2}}{\sqrt{n}}.$$

Отже, можемо стверджувати:

$$P\left\{\overline{x_B} - \frac{\sigma t_{\gamma/2}}{\sqrt{n}} < a < \overline{x_B} + \frac{\sigma t_{\gamma/2}}{\sqrt{n}}\right\} = \gamma. \qquad (16.9)$$

Приклад 16.8. Виробник тросів хоче замовити металевий дріт, який повинний витримувати вагу до 10 кг (тобто, не розриватись при вазі до 10 кг.). Він бере зразки в постачальника і проводить 20 випробувань випадково відібраних зразків. Отже, потенційний замовник отримує такі дані про максимальне навантаження до розриву:

10,1	10,2	10,3	9,9	11,1
9,8	10,5	10	11,5	10,3
10,9	11,6	10,7	10,1	10,5
10,3	11,9	10,4	10,1	10,6.

Виробник дроту стверджує, що стандартне відхилення $\sigma = 0{,}5$ кг. Який буде довірчий інтервал $\gamma = 0{,}99$ для середньої ваги a, яку витримує дріт до розриву? Припускаємо, що ВВ ξ - максимальне навантаження до розриву - розподілена за законом $N(a,\sigma^2)$, де $\sigma = 0{,}5$.

Розв'язання.

1)Обчислюємо $\overline{x_B} = \frac{1}{20}\sum_{i=1}^{20} x_i = 10{,}54.$

2)Знаходимо за таблицями (Додаток 2)

$$t_{\gamma/2} = \Phi^{-1}\left(\frac{0{,}99}{2}\right) = \Phi^{-1}(0{,}495) = 2{,}57.$$

Тут ми використали таблицю в зворотній бік: знайшли таке значення аргументу, щоб функція дорівнювала $0{,}495$. Далі,

$$\delta = \frac{\sigma t_{\gamma/2}}{\sqrt{n}} = \frac{2{,}57 \cdot 0{,}5}{\sqrt{20}} = 0{,}29.$$

3)За формулою (16.9) можна стверджувати

$$P\{\overline{x_B} - \delta < a < \overline{x_B} + \delta\} = P\{10{,}25 < a < 10{,}83\} = 0{,}99.$$

Дріт можна замовляти.

16.4.2. Довірчі інтервали для невідомого середнього у випадку невідомої дисперсії

Задача ставиться так само, як і в попередньому випадку, але дисперсія ВВ невідома. Нехай $\xi \sim N(a, \sigma^2)$, причому a невідоме і σ теж. Треба за результатами спостережень $x_1, x_2, \dots, x_n$ оцінити a і побудувати довірчий інтервал з надійністю γ для цієї оцінки. За оцінку a беремо так само вибіркове середнє $\overline{x_B}$. Будемо спиратись на наступне твердження, яке приймаємо без доведення.

Твердження. Якщо $x_1, x_2, \dots, x_n$ - незалежні в.в, розподілені за законом $N(a,\ \sigma^2)$, то ВВ

$$T = \frac{\overline{x_B} - a}{\frac{s}{\sqrt{n}}},$$

де $s = \sqrt{\frac{n}{n-1} D_B}$ - "виправлене" середнє квадратичне відхилення, має розподіл Стьюдента з $k = n - 1$ степенями свободи.

Розподіл Стьюдента має таку хорошу властивість, що він не залежить ані від a, ані від σ. Виходячи з твердження, знаходимо довірчий інтервал для a з надійністю γ : $P\{|T| < t_\gamma\} = \gamma$.

$$P\{|T| < t_\gamma\} = P\{-t_\gamma < T < t_\gamma\} = F_T(t_\gamma) - F_T(-t_\gamma). \qquad (16.10)$$

Тут $F_T(x)$ - функція розподілу Стьюдента з $n-1$ степенями свободи. Оскільки розподіл Стьюдента задовольняє тотожність

$$F_T(-x) = 1 - F_T(x), \quad \text{то}$$

$$P\{|T| < t_\gamma\} = F_T(t_\gamma) - 1 + F_T(t_\gamma) = 2F_T(t_\gamma) - 1 = \gamma.$$

Отже,

$$F_T(t_\gamma) = \frac{\gamma + 1}{2} \;\Rightarrow$$

$$t_\gamma = Q^{T(n-1)}\left(\frac{\gamma + 1}{2}\right).$$

Тут Q позначена квантильна функція розподілу Стьюдента. Для знаходження t_γ можна скористатись таблицями Додатка 3. Знаючи обсяг вибірки і γ, з таблиці одразу знаходимо t_γ.

Підставляючи значення t_γ в формулу (18.12), отримуємо довірчий інтервал у вигляді

$$P\{|T| < t_\gamma\} = P\left\{\left|\frac{\sqrt{n}(\overline{x_B} - a)}{s}\right| < t_\gamma\right\} =$$

$$= P\left\{\overline{x_B} - \frac{t_\gamma s}{\sqrt{n}} < a < \overline{x_B} + \frac{t_\gamma s}{\sqrt{n}}\right\} = \gamma. \qquad (16.11)$$

Приклад 16.9.

На сталеливарному заводі з метою контролю вмісту марганцю в сталі зробили 10 відливків, в яких виміряли вміст марганцю(у відсотках). Отримали таку вибірку

1,39; 1,29; 1,28; 1,34; 1,32; 1,30; 1,28; 1,35; 1,35; 1,30.

Знайти довірчий інтервал для вмісту марганцю з надійністю $\gamma = 0{,}9$, вважаючи розподіл вибірки нормальним.

Розв'язання. 1) Обчислюємо середнє і виправлене середньє квадратичне відхилення

$$\overline{x_B} = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} x_i = 1{,}32; \quad s = \sqrt{\frac{1}{9}\sum_{i=1}^{10}(x_i - 4{,}7793)^2} = 0{,}0365.$$

2) За таблицями (Додаток 3) з $k = 9$ степенями свободи і $\gamma = 0{,}9$ знаходимо відповідний квантиль:

$$t_\gamma = t(9, \gamma = 0{,}9) = t(9; 0{,}95) = 1{,}833.$$

(Тут ми зробили перерахунок: $(\gamma + 1)/2 = 0{,}95$).

3)Згідно (16.11) стверджуємо:

$$P\{1{,}2988 < a < 1{,}3412\} = 0{,}9.$$

16.4.3. Довірчі інтервали для дисперсії при невідомому середньому

Нехай, як завжди, маємо вибірку зі спостережень за нормальною ВВ ξ, розподіленою за законом $N(a, \sigma^2)$. Параметри розподілу нам невідомі. Нам треба знайти інтервальну оцінку для σ^2. Застосуємо наступне твердження, яке приймаємо без доведення.

Твердження. Нехай $x_1, x_2, \dots, x_n$ - незалежні в.в, розподілені за законом $N(a, \sigma^2)$. Тоді

$$\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x_B})^2$$

має розподіл χ^2 з $n - 1$ степенями свободи.

Побудуємо довірчий інтервал для χ^2.

$$\gamma = P\{h' < \chi^2 < h''\} = P\{\chi^2 < h''\} - P\{\chi^2 < h'\} =$$
$$= 1 - P\{\chi^2 \geq h''\} - P\{\chi^2 < h'\}.$$

Отже, $$P\{\chi^2 \geq h''\} + P\{\chi^2 < h'\} = 1 - \gamma.$$

Покладемо ймовірності з лівої частини рівними між собою:

$$P\{\chi^2 \geq h''\} = P\{\chi^2 < h'\} = \frac{1-\gamma}{2}; \ \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad P\{\chi^2 < h''\} = \frac{1+\gamma}{2}; \ \ P\{\chi^2 < h'\} = \frac{1-\gamma}{2}.$$
Звідси ми можемо знайти h' і h''.
$$h' = Q^{\chi^2}\left(\frac{1-\gamma}{2}\right); \quad h'' = Q^{\chi^2}\left(\frac{1+\gamma}{2}\right).$$
Отже, маємо такий довірчий інтервал:
$$P\left\{h' < \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} < h''\right\} =$$
$$P\left\{\frac{(n-1)s^2}{h''} < \sigma^2 < \frac{(n-1)s^2}{h'}\right\} = \gamma. \tag{16.12}$$

Зауваження. Таблиця в Додатку 4 складена для значень χ^2, для яких $P\{\chi^2 \geq h\} = \alpha$. Тому для знаходження h' з таблиці значення α беремо рівним $\frac{\gamma+1}{2}$, для знаходження h'' беремо α рівним $\frac{1-\gamma}{2}$.

Приклад 16.10. Досліджується нержавіюча сталь, яка містить приблизно 18% хрому, 10% нікелю і 2% молібдену. Було досліджено 12 зразків; вміст хрому у відсотках від маси становив:

17,4 17,9 18,1 17,6 18,9 16,9 17,5 17,8 17,4 24,6 21 17,6

Вважаємо, що вміст хрому – ВВ, що розподілена за законом $N(a, \sigma^2)$. Знайти довірчий інтервал дисперсії σ^2 вмісту хрома з надійністю 0,95.

Розв'язання.

1) Обчислюємо
$$\overline{x_B} = \frac{1}{12}\sum_{i=1}^{12} x_i = 18{,}5583; \quad s^2 = \frac{1}{11}\sum_{i=1}^{12}(x_i - 18{,}5583)^2 = 4{,}7445.$$

2) За таблицями розподілу хі-квадрат з $k = 12 - 1 = 11$ степенями свободи знаходимо відповідні квантилі (Додаток 4):
$$h' = \left| \begin{matrix} \alpha = \dfrac{1+\gamma}{2} = 0{,}975, \\ 11 \text{ ст. своб.} \end{matrix} \right| = 3{,}82;$$
$$h'' = \left| \begin{matrix} \alpha = \dfrac{1-\gamma}{2} = 0{,}025, \\ 11 \text{ ст. своб.} \end{matrix} \right| = 21{,}92.$$

3) Згідно (16.12) стверджуємо:
$$P\left\{\frac{11 \cdot 4{,}7445}{21{,}92} < \sigma^2 < \frac{11 \cdot 4{,}7445}{3{,}82}\right\} = 0{,}95.$$
$$P\{2{,}3809 < \sigma^2 < 13{,}6622\} = 0{,}95.$$

Запитання для самоконтролю

1. *В чому полягає основний підхід методу моментів в задачі оцінки невідомого параметра розподілу?*
2. *За якими формулами оцінюють математичне сподівання і дисперсію ВВ згідно методу моментів?*
3. *В чому полягає основний підхід методу максимальної правдоподібності в задачі оцінки невідомого параметра розподілу?*
4. *Що таке довірчий інтервал?*

Практичне заняття № 16

МЕТОД МОМЕНТІВ. МЕТОД МАКСИМАЛЬНОЇ ВІРОГІДНОСТІ. ДОВІРЧІ ІНТЕРВАЛИ ДЛЯ ПАРАМЕТРІВ НОРМАЛЬНОГО РОЗПОДІЛУ

Приклади розв'язування задач

Задача 16.1. Протягом n=50 днів на підприємстві вивчалося добове споживання електроенергії (тис. кВт). Результати наведено у таблиці:

ξ	0,8	0,96	1,12	1,28	1,44
n_i	4	12	16	13	5

Вважаючи, що випадкова величина ξ – добове споживання електроенергії, розподілена за нормальним законом ($\xi \sim N(a,\sigma)$), потрібно:

1) обчислити незміщені статистичні оцінки для середнього значення добового споживання електроенергії $a = M(\xi)$ та середнього квадратичного відхилення $\sigma = \sigma(\xi)$;

2) з надійністю γ=0,95 побудувати довірчі інтервали для a та σ.

Розв'язання. 1) Як ми знаємо, оцінкою математичного сподівання ВВ слугує вибіркове середнє. Бачимо, що у вибірці значення у нас повторюються, мають певні частоти. Тому обчислюємо вибіркове середнє вибірки за формулою (16.2):

$\hat{a} = \overline{x_B} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i n_i = \frac{1}{50}(0.8 \cdot 4 + 0.96 \cdot 12 + 1.12 \cdot 16 + 1.28 \cdot 13 + 1.44 \cdot 5) = 1{,}1296.$

Для оцінки середнього квадратичного відхилення залучаємо оцінки (16.4) і (16.5).

$D_B = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} {x_i}^2 n_i - (\overline{x_B})^2 = \frac{1}{50}(0.8^2 \cdot 4 + 0.96^2 \cdot 12 + 1.12^2 \cdot 16 + 1.28^2 \cdot 13 + 1.44^2 \cdot 5) - (1{,}1296)^2 = \frac{65{,}3568}{50} - (1{,}1296)^2 \approx 0{,}0311.$

$$\hat{\sigma} = \hat{s} = \sqrt{\frac{n}{n-1} D_B} = \sqrt{\frac{50 \times 0{,}0311}{49}} \approx 0{,}1783.$$

Незміщені оцінки параметрів нормального розподілу знайдені.

2.1) Побудуємо довірчий інтервал з надійністю γ=0,95 для a. Оскільки σ нам не відоме, для цього скористаємось формулою (16.11):

$$P\left\{\overline{x_B} - \frac{t_\gamma s}{\sqrt{n}} < a < \overline{x_B} + \frac{t_\gamma s}{\sqrt{n}}\right\} = \gamma$$

Тут t_γ знаходяться з таблиць Додатку 3: $t_\gamma = t(49, 0.95) = 2.0196$. Отже,

$$P\left\{1{,}1296-\frac{2.0196\cdot 0{,}1783}{\sqrt{50}}<a<1{,}1296+\frac{2.0196\cdot 0{,}1783}{\sqrt{50}}\right\}=0.95$$

$$P\{1{,}0787<a<1{,}1805\}=0.95$$

Довірчий інтервал для a надійності 0.95 є $(1{,}0787; 1{,}1805)$.

2.2) Тепер побудуємо довірчий інтервал з надійністю γ=0,95 для σ. Скористаємось формулою (16.12):

$$P\left\{\frac{(n-1)s^2}{h''}<\sigma^2<\frac{(n-1)s^2}{h'}\right\}=\gamma. \tag{16.12}$$

$$P\left\{\sqrt{\frac{(n-1)}{h''}}\hat{s}<\sigma<\sqrt{\frac{(n-1)}{h'}}\hat{s}\right\}=\gamma.$$

Тут h', h'' знаходять з таблиць Додатку 4.

$$h'=\left|\begin{matrix}\alpha=\dfrac{1+\gamma}{2}=\dfrac{1+0.95}{2}=0{,}975,\\ 50-1=49\text{ ст. своб.}\end{matrix}\right|=31{,}5549;$$

$$h''=\left|\begin{matrix}\alpha=\dfrac{1-\gamma}{2}=\dfrac{1-0.95}{2}=0{,}025,\\ 49\text{ ст. своб.}\end{matrix}\right|=70{,}2224.$$

3)Згідно (16.12) стверджуємо:

$$P\left\{\sqrt{\frac{49}{70{,}2224}}0{,}1783<\sigma<\sqrt{\frac{49}{31{,}5549}}0{,}1783\right\}=0{,}95.$$

$$P\{0{,}1489<\sigma<0{,}2222\}=0{,}95.$$

Отже, $(0{,}1489;\ 0{,}2222)$ - довірчий інтервал для σ надійності 0,95.

Задача 16.2. Дискретна випадкова величина ξ розподілена наступним чином:

ξ	1	2
p_i	θ	$1-\theta$

Її розподіл залежить від невідомого параметру θ. В результаті вимірювання ξ отримана вибірка $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$. За допомогою методу моментів знайти оцінку параметру θ.

*Розв'язання**.*** Прирівняємо математичне сподівання до вибіркового середнього.

$$M(\xi)=\overline{x_B}$$

Знайдемо $M(\xi)=\sum_i x_i p_i = 1\cdot\theta+2(1-\theta)=2-\theta$.

Отже,

$$2-\theta=\overline{x_B}\quad\Rightarrow\quad\hat{\theta}=2-\overline{x_B}$$

Задача 16.3. За допомогою методу моментів побудувати оцінку параметра $\theta > 0$, якщо розподіл вибірки $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ має щільність

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x}{\theta^2}, & x \in [0, \theta]; \\ 0, & x \notin [0, \theta]. \end{cases}$$

Розв'язання. Невідомий параметр лише один, отже, як в попередньому випадку скористаємось рівністю

$$M(\xi) = \overline{x_B}$$

Знайдемо $M(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_0^\theta x\frac{2x}{\theta^2}dx = \frac{2}{\theta^2}\int_0^\theta x^2dx = \frac{2}{\theta^2}\frac{x^3}{3}|_0^\theta = \frac{2\theta}{3}$.

Отже,

$$\frac{2\theta}{3} = \overline{x_B} \quad \Rightarrow \quad \hat{\theta} = \frac{3\overline{x_B}}{2}$$

Задача 16.4. Нехай $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ - вибірка з трьохточкового розподілу, який залежить від параметра $\theta \in (0, 1/3)$:

$$P\{X_1 = 1\} = \theta; \; P\{X_1 = 2\} = 2\theta; \; P\{X_1 = 3\} = 1 - 3\theta.$$

Знайти оцінку методу максимальної вірогідності параметра θ.

Розв'язання. Тут ми маємо справу з дискретною ВВ. Для пошуку оцінки скористаємось формулами (16.6), (16.7). Будуємо функцію вірогідності:

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n, \theta) = p(x_1, \theta)p(x_2, \theta) \times \dots \times p(x_n, \theta).$$

Вибірка $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ у нас містить лише значення 1 або 2 або 3. Якщо $X_i = 1$, то у добуток ставимо множник θ, якщо $X_i = 2$, то ставимо множник 2θ, якщо $X_i = 3$, то у добуток ставимо множник $1 - 3\theta$. Позначимо

$$n_1 - \text{кількість "1" у вибірці}; \;\; n_2 - \text{кількість "2" у вибірці}.$$

Тоді кількість "3" у вибірці буде $n - n_1 - n_2$.

Отже, маємо функцію вірогідності:

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n, \theta) = \theta^{n_1}(2\theta)^{n_2}(1 - 3\theta)^{n - n_1 - n_2} = \theta^{n_1 + n_2}2^{n_2}(1 - 3\theta)^{n - n_1 - n_2}$$

Логарифмуємо її.

$$lnL = ln2^{n_2} + (n_1 + n_2)ln\theta + (n - n_1 - n_2)ln(1 - 3\theta)$$

Нам треба знайти $\hat{\theta} = arg\max_\theta L(x_1, x_2, \dots, x_n, \theta)$, тобто те значення θ, при якому функція L набуває максимального значення. Тому беремо похідну від lnL по θ і прирівнюємо її до нуля.

$$\frac{\partial lnL}{\partial \theta} = \frac{n_1 + n_2}{\theta} + \frac{n - n_1 - n_2}{1 - 3\theta}(-3) = 0;$$

$$(n_1 + n_2)(1 - 3\theta) - 3\theta(n - n_1 - n_2) = 0 \quad \Rightarrow \quad \hat{\theta} = \frac{n_1 + n_2}{3n}$$

В цій точці функція lnL набуває свого максимуму, отже, це і є ОММВ для θ.

Задача 16.5. Знайти оцінку методу максимальної вірогідності параметра $\theta > 0$, якщо розподіл вибірки $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ має щільність

$$f(x,\theta) = \begin{cases} \dfrac{\theta e^{-\frac{\theta^2}{2x}}}{\sqrt{2\pi x^3}} \text{ при } x \geq 0; \\ 0 \text{ при } x < 0. \end{cases}$$

Розв'язання. Складемо функцію вірогідності. Оскільки ВВ, що розглядається, задана щільністю, функцію вірогідності складаємо за формулою (16.8).

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n, \theta) = f(x_1,\theta) f(x_2,\theta) \times \dots \times f(x_n,\theta) =$$
$$= \frac{\theta e^{-\frac{\theta^2}{2x_1}}}{\sqrt{2\pi x_1{}^3}} \frac{\theta e^{-\frac{\theta^2}{2x_2}}}{\sqrt{2\pi x_2{}^3}} \times \dots \times \frac{\theta e^{-\frac{\theta^2}{2x_n}}}{\sqrt{2\pi x_n{}^3}} = \theta^n e^{-\frac{\theta^2}{2}\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n \prod_{i=1}^n x_i{}^{-\frac{3}{2}}$$

Логарифмуємо.

$$lnL = nln\theta - \frac{\theta^2}{2}\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} + ln\left(\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n \prod_{i=1}^n x_i{}^{-\frac{3}{2}}\right)$$

Беремо похідну від lnL по θ і прирівнюємо її до нуля.

$$\frac{\partial lnL}{\partial \theta} = \frac{n}{\theta} - \theta \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} = 0;$$

$$\theta^2 = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}} \quad \Rightarrow \quad \hat{\theta} = \sqrt{\frac{n}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}}}$$

Отже, ми знайшли $\hat{\theta} = arg\max_{\theta} L(x_1, x_2, \dots, x_n, \theta) = \sqrt{\frac{n}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}}}$

Задача 16.6. Нехай $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ - вибірка з показникового розподілу зі щільністю

$$f(x,\beta) = \begin{cases} e^{\beta - x} \text{ при } x \geq \beta; \\ 0 \text{ при } x < \beta. \end{cases}$$

Знайти оцінку методу максимальної вірогідності параметра зсуву $\beta \in R$.

Розв'язання. Складемо функцію вірогідності. Оскільки ВВ, що розглядається, задана щільністю, функцію вірогідності складаємо за формулою (16.8).

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n, \theta) = f(x_1,\theta) f(x_2,\theta) \times \dots \times f(x_n,\theta) == e^{\beta - x_1} e^{\beta - x_2} \times \dots \times e^{\beta - x_n}$$
$$= e^{n\beta} e^{-\sum_{i=1}^n x_i}$$

Як ми бачимо, дана функція зростає по β, чи це означає, що її максимум буде на нескінченності? Але насправді при побудові L ми не врахували одну умову в щільності: що вона дорівнює 0 при $x < \beta$. Отже, якщо виписати все акуратно, то щільність така:

$$f(x,\beta) = e^{\beta - x} \cdot I\{ x \geq \beta\},$$

де $I\{$ A$\}$ – індикатор події A. Тоді функція вірогідності матиме вигляд

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n, \theta) = e^{\beta - x_1} I\{ x_1 \geq \beta\} e^{\beta - x_2} I\{ x_2 \geq \beta\} \times \dots \times e^{\beta - x_n} I\{ x_n \geq \beta\}$$
$$= e^{n\beta} e^{-\sum_{i=1}^{n} x_i} I\{ min_{1 \leq i \leq n}(x_i) \geq \beta\}$$

Звідси бачимо, що β повинно бути максимальним з тих значень, для яких $\beta \leq min_{1 \leq i \leq n}(x_i)$. Отже, в даному випадку оцінка методу максимальної вірогідності:

$$\hat{\beta} = min_{1 \leq i \leq n}(x_i)$$

Завдання для самостійного виконання

141. За допомогою методу моментів побудувати оцінку параметра $\theta > 0$, якщо розподіл вибірки $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ має щільність

$$f(x) = \begin{cases} \theta x^{\theta - 1}, & x \in [0,1]; \\ 0, & x \notin [0,1]. \end{cases}$$

142. Нехай $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ - вибірка з розподілу зі щільністю

$$f(x, a, b) = \begin{cases} \dfrac{1}{b - a}, & x \in [a, b]; \\ 0, & x \notin [a, b]. \end{cases}$$

Знайти оцінки параметрів a і b за допомогою методу моментів.

143. Нехай $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ - вибірка незалежних випадкових величин, розподілених нормально $N(\theta, \theta^2)$; $\theta > 0$. Побудувати оцінку методу максимальної вірогідності параметру θ.

144. Нехай $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ - вибірка з розподілу зі щільністю

$$f(x, \theta) = \begin{cases} \dfrac{x}{\theta} \exp\left(-\dfrac{x^2}{2\theta} \right), & x > 0; \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

$(\theta > 0)$ – розподіл Релея. Знайти оцінку θ методом максимальної вірогідності.

145. Нехай $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ - вибірка з розподілу зі щільністю

$$f(x, \alpha, \nu) = \begin{cases} \dfrac{\alpha^{\upsilon}}{\Gamma(\nu)} x^{\nu - 1} \exp(-\alpha x), & x > 0; \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

$(\alpha > 0,\ \nu > 0)$ - гама-розподіл. Знайти оцінку методу максимальної вірогідності параметра α, вважаючи параметр ν відомим.

146. Нехай $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ - вибірка з геометричного розподілу з параметром p:

$$p(k,p) = P\{X_1 = k\} = p(1-p)^k; \quad k = 0,1,\dots$$

Знайти оцінку методу моментів параметра p.

147. Нехай $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ - вибірка з «подвійного» розподілу Пуассона, що задається ймовірностями

$$P_\theta\{X_i = k\} = \frac{1}{2}\left(e^{-\theta_1}\frac{\theta_1^k}{k!} + e^{-\theta_2}\frac{\theta_2^k}{k!}\right), \quad k = 0,1,2\dots; \quad \theta = (\theta_1, \theta_2), \quad 0 < \theta_1 < \theta_2, i = \overline{1,n}$$

Знайти оцінку методу моментів параметрів θ_1, θ_2.

148. Нехай $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ - вибірка. Знайти оцінку методу моментів параметру θ рівномірного розподілу на відрізку

а) $[-\theta, 0],\ \theta > 0$; б) $[\theta, \theta + 2],\ \theta \in R$; в)$[-\theta, \theta],\ \theta > 0$.

149. Нехай $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ - вибірка з розподілу Ерланга з параметрами m та λ. Оцінити ці параметри методом моментів. Щільність розподілу Ерланга має вигляд

$$f(x,\lambda,m) = \begin{cases} \dfrac{\lambda^m}{(m-1)!} x^{m-1} e^{-\lambda x}, \ x > 0; \\ 0,\ x < 0. \end{cases}$$

150. Нехай вибірка (5; 5.5; 8; -1), що складається з чотирьох елементів$(n = 4)$, розподілена нормально $N(a, \sigma^2)$.

а) Побудувати довірчий інтервал для значення a надійності 0,9, якщо значення параметру σ невідоме.

б) Побудувати довірчий інтервал для значення a надійності 0,9, якщо значення параметру $\sigma = 0{,}1$.

ЛЕКЦІЯ №17

ПЕРЕВІРКА СТАТИСТИЧНИХ ГІПОТЕЗ. КРИТЕРІЙ χ^2

17.1. Перевірка статистичних гіпотез. Статистичний критерій перевірки нульової гіпотези

Часто треба визначити закон розподілу ВВ ξ, яку ми спостерігаємо. Щоб його знайти, іноді роблять так: висувають гіпотезу про цей розподіл і шукають підстави для підтвердження або відхилення її.

17.1.1. Статистичні гіпотези. Помилки першого і другого роду

Під ***статистичною гіпотезою*** розуміють довільне припущення щодо вигляду невідомого розподілу спостережень або щодо параметрів відомих розподілів. Якщо гіпотеза пов'язана з якимось типом розподілу, наприклад, {Вибірка розподілена експоненціально}, то вона називається *непараметричною.* Якщо гіпотеза лише про параметри розподілу, то вона називається *параметричною.*

Статистична гіпотеза називається ***простою***, якщо вона однозначно визначає розподіл ВВ, в протилежному випадку вона називається ***складною.***

Приклад 17.1.

Гіпотеза { ВВ ξ розподілена за законом $N(0,1)$} - проста.

Гіпотеза{ ВВ ξ розподілена за законом $N(m,1)$; $12 \le m \le 14$} складна.

Гіпотезу, яку ми висуваємо, називають ***нульовою, основною***, позначаємо її H_0. ***Конкуруючою (альтернативною)*** називають гіпотезу H_1, яка суперечить нульовій.

Критерій перевірки гіпотези будується таким чином, що в усіх сумнівних випадках ми приймаємо гіпотезу H_0, відхиляємо ж H_0 і приймаємо H_1 тільки в тому випадку, коли дані суттєво суперечать гіпотезі H_0.

Приклад 17.2.

$H_0 = \{$ ВВ ξ розподілена нормально з $a = 10\}$

$H_1 = \{$ ВВ ξ розподілена нормально з $a \neq 10\}$

Висунута гіпотеза може бути вірною чи невірною, треба виробити критерій для її прийняття або неприйняття. Тільки в двох випадках може бути прийняте неправильне рішення.

Помилка першого роду виникає, коли ми відхиляємо H_0, якщо вона є правильною:

$$\alpha = P\{\text{ Відхиляємо } H_0\text{, приймаємо } H_1 \ / H_0 \text{ вірна }\}$$

Ймовірність помилки першого роду позначаємо α. Частіше за все беруть $\alpha = 0{,}05$ чи $\alpha = 0{,}01$. Ми цей рівень задаємо самі.

Помилка другого роду полягає в тому, що буде прийнята гіпотеза, якщо вона є неправильною:

$$\beta = P\{\text{ Приймаємо } H_0 \ / \ H_0 \text{ невірна }\}.$$

Підкреслимо, що наслідки помилок можуть бути різними. Наприклад, у нас є ліки від хвороби, якщо хворий вчасно їх не прийме – він помре; для здорової людини ці ліки практично нешкідливі. Помилка першого роду (пацієнт хворий, а ми діагностували що він здоровий) пов'язана зі смертю пацієнта; помилка другого роду не несе серйозних наслідків (пацієнт здоровий, а ми дали йому ліки, вирішили, що він хворіє).

17.1.2. Статистичний критерій перевірки нульової гіпотези

Для перевірки нульової гіпотези використовують спеціально підібрану випадкову величину, точний чи наближений розподіл якої відомий.

Статистичним критерієм називають ВВ $K(\zeta)$ – функцію від вибірки $\zeta = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, яка служить для перевірки нульової гіпотези.

При виконанні H_0 розподіл $K(\zeta)$ відомий або наближено відомий. Після вибору певного критерію множина його можливих значень розбивається на дві підмножини: одна містить значення критерію, при яких H_0 відхиляється, інша - при яких приймається.

Рис. 17.1

Принцип перевірки статистичних гіпотез

Якщо значення критерію, яке ми спостерігаємо, належить області допустимих значень, тобто області прийняття гіпотези - $\boldsymbol{H_0}$ приймаємо; критичній області - відхиляємо.

Потужністю критерію називають величину ймовірності

$$1 - \beta = P\{\text{ Відхиляємо } H_0 \ /\text{Справедливо } \ H_1 \} \ .$$

Очевидно, що чим потужність критерію більше (відповідно помилка другого роду менша), тим критерій краще. Оптимальним вважається той критерій, в якого помилка другого роду є мінімальною або прямує до мінімальної з усіх можливих при $n \to \infty$. Зауважимо, що помилку першого роду ми задаємо самі. Чим більше ми беремо значення α, тим більшою буде область прийняття гіпотези.

17.2. Критерій χ^2 (хі-квадрат). Загальні засади

Висуваючи гіпотезу H_0 щодо розподілу ВВ ξ, ми можемо обчислити теоретичні частоти для цього розподілу (тобто, які б були частоти потрапляння в інтервал випадкової величини, якщо б вона була розподілена відповідно гіпотезі H_0). Також у нас є емпіричні частоти для часткових інтервалів. Треба порівняти теоретичні і емпіричні частоти і зробити висновок: прийняти H_0 чи відхилити?

Спершу розглянемо як обчислюють теоретичні частоти. Розіб'ємо множину значень X випадкової величини ξ на скінчену кількість l множин $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_l$, які не перетинаються: $X = \bigcup_{k=1}^{l} \Delta_k$.

Якщо ξ неперервна ВВ, то це l інтервалів. Якщо ξ дискретна, то природньо за Δ_i взяти різні значення, які вона приймає:

ξ	Δ_1	Δ_2	..	Δ_l

Висуваємо гіпотезу:

$H_0 = \{$ ВВ ξ розподілена з функцією розподілу $F_{H_0}(x)\}$.

Тоді, в припущенні H_0, ми можемо порахувати ймовірності потрапляння в певні Δ_k : $p_k = P\{\xi \in \Delta_k\}$; $k = \overline{1, l}$.

Для дискретної ВВ можна покласти $p_k = P\{\xi = \Delta_k\}$, а для неперервної можна скористатись формулою

$$p_k = P\{\xi \in [a_k, a_{k+1})\} = F_{H_0}(a_{k+1}) - F_{H_0}(a_k).$$

Всі p_k повинні бути більше нуля, $\sum_{k=1}^{l} p_k = 1$. ***Теоретична частота*** множини Δ_k дорівнює $n' = np_k$.

Далі працюємо з вибіркою, групуємо її, виписуємо емпіричні частоти.

ξ	Δ_1	Δ_2	...	Δ_l
n_k	n_1	n_2	...	n_l
$n_k{}'$	np_1	np_2	...	np_l

Звичайно, емпіричні і теоретичні частоти відрізняються. Можливо, їх розбіжність випадкова, незначуща, і пояснюється або малим числом спостережень, або способом групування, або ще якимись причинами. А можливо, розбіжність частот невипадкова, значуща, і причина її в тому, що H_0 невірна.

Критерій χ^2 відповідає на поставлене питання. Правда, як будь-який критерій, він не доводить справедливість гіпотези, а лише встановлює на прийнятому рівні значущості її відповідність чи невідповідність даним. Сформулюємо без доведення теорему, на якій базується критерій.

Теорема Пірсона.

При $n \to \infty$ розподіл ВВ

$$\chi^2 = \sum_{k=1}^{l} \frac{(n_k - np_k)^2}{np_k}$$

збігається до розподілу χ^2 з m степенями свободи, де $m = l - 1 - r$; r – кількість параметрів розподілу, які ми оцінювали за даними вибірки. (Тобто, якщо H_0 проста, то $r = 0$).

Про ***розподіл хі-квадрат***: це абсолютно неперервний розподіл зі щільністю

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ \dfrac{1}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right) 2^{\frac{m}{2}}} x^{\frac{m}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}; & x \geq 0. \end{cases}$$

$$\Gamma\left(\frac{m}{2}\right) = \int_0^{\infty} x^{\frac{m}{2}-1} e^{-x} dx \ -\text{гама} - \text{функція}.$$

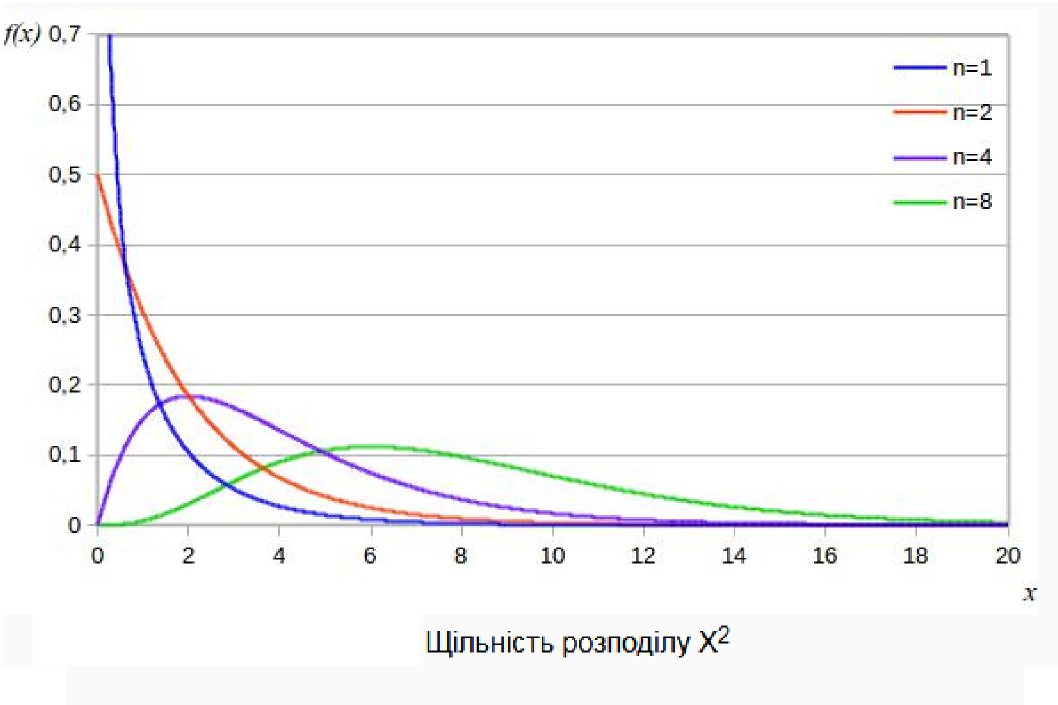


Рис. 17.2

Помилка першого роду:

$$\alpha = P\{\text{відхиляємо } H_0 / H_0 \text{ вірна}\} \approx P\{\chi^2 > \chi^2_{\text{крит}}\}.$$

Оскільки функція розподілу хі-квадрат відома, то з попередньої рівності можна знайти критичне значення $\chi^2_{\text{крит}}$. Таблиця критичних точок розподілу хі-квадрат знаходяться в Додатку 4.

Алгоритм

1) Розбиваємо множину значень ξ на множини $\Delta_1, \ldots, \Delta_l$. Знаходимо емпіричні частоти n_k .

2) Знаходимо p_k, виходячи з розподілу H_0.

3) Обчислюємо $\chi^2_{\text{спос}} = \sum_{k=1}^{l} \frac{(n_k - np_k)^2}{np_k}$.

4) За таблицею критичних точок розподілу χ^2 знаходимо $\chi^2_{\text{крит}}(\alpha, m)$.

5) Робимо висновок

Якщо $\chi^2_{\text{спос}} < \chi^2_{\text{крит}}(\alpha, m)$ ***- приймаємо*** H_0***;***

$\chi^2_{\text{спос}} > \chi^2_{\text{крит}}(\alpha, m)$ ***- відхиляємо*** H_0***.***

17.3. χ^2 як критерій згоди

Розглянемо детальніше приклади застосування критерію.

17.3.1.Випадок простої гіпотези H_0

Спершу розглянемо приклад, в якому висунута гіпотеза є простою, а випадкова величина ξ – дискретна.

Приклад 17.3. Магазин займається продажем смартфонів, зібраних на одному заводі. Серед проданих смартфонів кількість виготовлених в певні дні тижня приблизно однакова. Серед повернених протягом року для заміни по гарантії 20-ти смартфонів 7 виготовлені в понеділок, 1 - у вівторок, по 2 в середу і четвер, 8 – в п'ятницю.

Припускаємо, що смартфони, виготовлені в понеділок і п'ятницю, менш якісні і від їх придбання слід відмовитись. Треба перевірити обгрунтованість цього припущення зі стандартним рівнем значущості $\alpha = 0{,}05$.

Розв'язання. Оскільки реалізація пропозиції пов'язана з додатковими витратами, її можна прийняти тільки у випадку, коли вона буде добре підкріплена даними. Тому висуваємо гіпотезу

$$H_0 = \{\text{ Зв'язок між днем тижня і якістю смартфона відсутній }\}.$$

Якщо це так, то бракований смартфон може з однаковою ймовірністю попасти на будь-який день тижня. H_0, очевидно, проста гіпотеза. Нехай ξ -день тижня, на який припадає бракований смартфон.

ξ – день тижня, на який припадає бракований смартфон	Понеділок 1	Вівторок 2	Середа 3	Четвер 4	П'ятниця 5
p	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$

Тепер занотуємо вибірку ($n = 20$).

x_i	Понеділок 1	Вівторок 2	Середа 3	Четвер 4	П'ятниця 5
n_i	7	1	2	2	8

Обчислюємо

$$\chi^2_{\text{спос}} = \sum_{k=1}^{l} \frac{(n_k - np_k)^2}{np_k} = \frac{(7-4)^2}{4} + \frac{(1-4)^2}{4} + 2\frac{(2-4)^2}{4} + \frac{(8-4)^2}{4} = 10{,}5.$$

За таблицями критичних точок (Додаток 4) знаходимо

$$\chi^2_{\text{крит.}}(\alpha = 0{,}05; m = 5 - 1 - 0 = 4) = 9{,}5$$

$$\chi^2_{\text{спос}} = 10{,}5 > 9{,}5 = \chi^2_{\text{крит.}}$$

Отже, гіпотезу відхиляємо, зв’язок є.

17.3.2. Випадок складної гіпотези H_0

Приклад 17.4. Клінічною характеристикою серцевої функції слугує серцевий індекс ξ (л./хв м.^{2}), який визначається як продуктивність серця, поділена на площу поверхні тіла. Маємо $n = 112$ критично хворих пацієнтів. Дані знаходяться в таблиці.

Т

Інтервал	[0,1)	[1,2)	[2,3)	[3,4)	[4,5)	[5,6)	[6,7)	[7,8)
n_k	10	40	25	20	10	5	0	2
w_k	0,09	0,357	0,223	0,179	0,089	0,045	0	0,018

Тут ми вже маємо справу з неперервною випадковою величиною. Висуваємо гіпотезу:

$$H_0 = \{\text{ВВ } \xi - \text{серцевий індекс} - \text{розподілена нормально}\}.$$

Це складна гіпотеза. Перевіримо її за критерієм хі-квадрат.

Розв’язання. Параметри нормального розподілу оцінюємо за вибіркою. Оскільки вибірка задана в інтервальному вигляді, то для обчислення вибіркового середнього і дисперсії слід скористатися наступними формулами:

$$\overline{x_B} = \frac{1}{n}\sum_{i=2}^{l} \frac{x_{i-1} + x_i}{2} n_i; \quad D_B = \frac{1}{n}\sum_{i=2}^{l} \left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2} - \overline{x_B}\right)^2 n_i,$$

де x_{i-1}, x_i - межі і-го інтервалу; l - кількість інтервалів. Тобто ми всі частоти «приписуємо» до середин часткових інтервалів. Згідно методу моментів

$$\hat{a} = \overline{x_B} = 2{,}45; \quad \hat{\sigma} = \sigma_B = \sqrt{D_B} = 1{,}32.$$

Спершу знаходимо ймовірності потрапляння в інтервал для нормальної ВВ з такими параметрами $\hat{a}$ і $\hat{\sigma}$ за формулою

$$P\{x_{i-1} < \xi < x_i\} = \Phi\left(\frac{x_i - \overline{x_B}}{\sigma_B}\right) - \Phi\left(\frac{x_{i-1} - \overline{x_B}}{\sigma_B}\right) = \Phi(z_i) - \Phi(z_{i-1}),$$

для цього треба скористатись таблицями Додатку 2.

Інтервал	z_{i-1}	z_i	$\Phi(z_{i-1})$	$\Phi(z_i)$	n_k	p_k	$\frac{(n_k-np_k)^2}{np_k}$
$(-\infty,1)$	$-\infty$	$-1{,}098$	0	0,1379	10	0,1379	1,919
$[1,2)$	$-1{,}098$	$-0{,}341$	0,1379	0,3669	40	0,229	8,031
$[2,3)$	$-0{,}341$	0,417	0,3669	0,6628	25	0,2959	1,999
$[3,4)$	0,417	1,174	0,6628	0,879	20	0,2162	0,733
$[4,5)$	1,174	1,932	0,879	0,9732	10	0,0942	0,029
$[5,6)$	1,932	2,689	0,9732	0,9964	5	0,0232	2,22
$[6,\infty)$	2,689	∞	0,9964	1	2	0,0036	6,324

Потім рахуємо теоретичні частоти, і, нарешті, значення $\chi^2_{\text{спос}} = 21{,}25$ (це сума елементів останнього стовпчика таблиці). Знаходимо за таблицями Додатку 4: $\chi^2_{\text{крит}}(\alpha = 0{,}05; m = 7-2-1 = 4) = 9{,}4877$. Тут 7 - кількість інтервалів групування; 2 - бо саме 2 параметри ми оцінили за вибіркою (a і σ). Оскільки $\chi^2_{\text{спос}} > \chi^2_{\text{крит}}$, то відхиляємо H_0.

17.4. Критерій χ^2 для гіпотези про незалежність випадкових величин

Нехай в результаті експерименту спостерігаються дві дискретні випадкові величини X і Y з можливими значеннями $X: x_1, \dots, x_k$; $Y: y_1, \dots, y_m$. Виникає питання: чи залежні вони? Якщо б був відомий закон розподілу вектору (X, Y) $p_{ij} = P\{X = x_i; Y = y_j\}$, то це можна було б перевірити.

$Y \setminus X$	x_1	x_2	...	x_k
y_1	p_{11}	p_{21}	...	p_{k1}
y_2	p_{12}	p_{22}	...	p_{k2}
...	...	...	...	...
y_m	p_{1m}	p_{2m}	...	p_{km}

Підсумовуючи ймовірності по стовпчиках і по рядочках відповідно, знаходимо окремі закони розподілу X та Y.

X	x_1	x_2	...	x_k
p_i	p_1	p_2	...	p_k

Y	y_1	y_2	...	y_m
p_i	q_1	q_2	...	q_m

X та Y незалежні тоді і тільки тоді, коли $p_{ij} = p_i q_j$ для всіх $i = \overline{1,k}$; $j = \overline{1,m}$.

А нам невідомі ані p_{ij}, ані p_i, ані q_j. У нас є тільки вибірка. Ми спостерігаємо n пар (x_i, y_j), результати заносимо в таблицю: n_{ij} - частота появи пари (x_i, y_j). Очевидно, що $\sum_{i,j} n_{ij} = n$.

$Y \setminus X$	x_1	x_2	...	x_k
y_1	n_{11}	n_{21}	...	n_{k1}
y_2	n_{12}	n_{22}	...	n_{k2}
...	...	...	...	...
y_m	n_{1m}	n_{2m}	...	n_{km}

Ще можна знайти

$$n_i^X = \sum_{j=1}^{m} n_{ij} \quad ; \qquad n_j^Y = \sum_{i=1}^{k} n_{ij}$$

- емпіричні частоти подій $X = x_i$ та $Y = y_j$ відповідно.

Будуємо критерій χ^2 перевірки гіпотези

$H_0 = \{$ Вип. вел. X, Y незалежні $\} = \{p_{ij} = p_i q_j \quad i = \overline{1,k}; \quad j = \overline{1,m}\}$.

Множини розбиття $\Delta_{i,j} = (x_i, y_j)$. Таких множин буде $k\,m$. Оскільки гіпотетичний розподіл $p_i q_j$ містить невідомі параметри p_i, q_j, потрібно побудувати точкові оцінки для цих параметрів. Такими оцінками є відносні частоти

$$\widehat{p_i} = \frac{n_i^X}{n}; \qquad \widehat{q_j} = \frac{n_j^Y}{n}.$$

Оскільки $\sum_{i=1}^{k} p_i = 1$; $\sum_{j=1}^{m} q_j = 1$, то число параметрів, які оцінюються за даними вибірки, є $k + m - 2$. Обчислюємо значення

$$\chi^2_{\text{спос}} = \sum_{i} \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i} = \sum_{i,j} \frac{\left(n_{ij} - n\widehat{p_i}\widehat{q_j}\right)^2}{n\widehat{p_i}\widehat{q_j}} = \sum_{i,j} \frac{\left(n_{ij} - \frac{n_i^X n_j^Y}{n}\right)^2}{\frac{n_i^X n_j^Y}{n}}$$

За теоремою Пірсона розподіл $\chi^2_{\text{спос}}$ при $n \to \infty$ прямує до розподілу χ^2 з $mk - (k + m - 2) - 1 = (k-1)(m-1)$ степенями свободи. Отже, якщо $\chi^2_{\text{спос}} \le \chi^2_{\text{крит}}\big(\alpha, (k-1)(m-1)\big) \; - \; H_0$ приймаємо, інакше - відхиляємо.

Приклад 17.5. В таблиці наведено дані про $n = 1426$ ув'язнених, яких було класифіковано щодо алкогольної залежності і характеру злочинів, за які їх засудили (дані, цитовані Пірсоном). Рядки в таблиці впорядковано відповідно до "інтелектуальності" виду злочину, хоча цей зв'язок досить умовний.

Вид злочину	Алкоголіки	Неалкоголіки	Разом (n_j^Y)
1. Підпал	50	43	93
2. Згалтування	88	62	150
3. Насильницькі дії	155	110	265
4. Крадіжка	379	300	679
5. Підробка грошей	18	14	32
6. Шахрайство	63	144	207
Разом (n_i^X)	753	673	1426

Чи можна на підставі цих даних зробити висновок про існування зв'язку між алкоголізмом і характером злочину?

Розв'язання. Висуваємо гіпотезу

$H_0 = \{$ Зв'язку між алкоголізмом і характером злочину немає $\}$.

$$\chi^2_{\text{спос}} = \sum_{i=1,2;\, j=\overline{1,6}} \frac{\left(n_{\{ij\}} - \dfrac{n_i^X n_j^Y}{n}\right)^2}{\dfrac{n_i^X n_j^Y}{n}} =$$

$$= \frac{\left(50 - \dfrac{93 \cdot 753}{1426}\right)^2}{\dfrac{93 \cdot 753}{1426}} + \cdots + \frac{\left(144 - \dfrac{207 \cdot 673}{1426}\right)^2}{\dfrac{207 \cdot 673}{1426}} = 49{,}73.$$

Знаходимо по таблицях $\chi^2_{\text{крит}}$ при $\alpha = 0{,}05$ і кількості степенів свободи $(k-1)(m-1) = 5$ (Додаток 3). Оскільки

$$\chi^2_{\text{спос}} = 49{,}73 > \chi^2_{\text{крит}} = 11{,}07,$$

то H_0 відхиляємо, зв'язок між видом злочину і алкогольною залежністю присутній.

Зауваження. Якщо X, Y не є дискретними, то для застосування критерію χ^2 слід відповідним чином згрупувати вибірку, обравши за множини розбиття $\Delta_{ij} = \{(x,y): x \in [x_{i-1}, x_i];\ y \in [y_{j-1}, y_j]\}$.

17.5. Досягнутий рівень значущості

Англійською мовою досягнутий рівень значущості перекладається як attained significance або просто p-level. Ознайомимось ближче з цим поняттям.

Ми вже пересвідчилися, що часто статистичний критерій має вигляд

Якщо $S(\zeta) > C$ (або $\le C$) $-$ H_0 відхиляємо;
якщо $S(\zeta) \le C$ (або $> C$) $-$ H_0 приймаємо,

тут ζ - вибірка; $S(\zeta)$ – деякий статистичний критерій, що від неї залежить; C - фіксоване порогове значення (відповідний квантиль з таблиці розподілу $S_{\text{теор}}$).

Зрозуміло, що якщо g строго зростаюча неперервна функція, то

$$\{S(\zeta) > C\} = \{g(S(\zeta)) > g(C)\}.$$

Виходить, що можна так обрати g, щоб $g(C) = \alpha$, де α - рівень значущості (помилка першого роду) даного критерію.

Досягнутим рівнем значущості критерію називають таку статистику цього критерію $P(\zeta)$, при використанні якої критерій набуває вигляду:

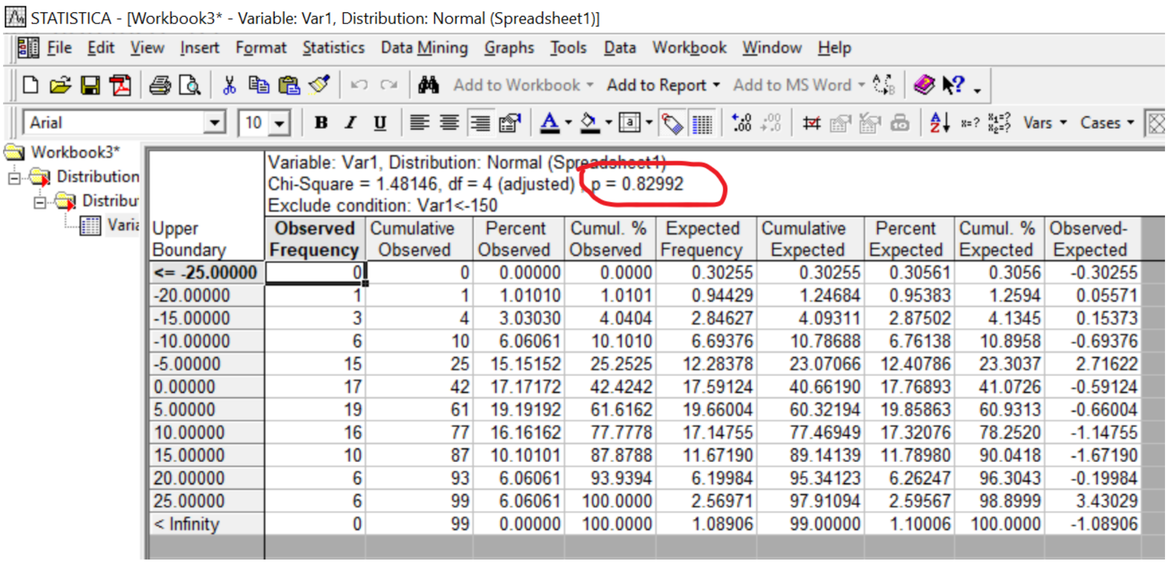
якщо $P(\zeta) < \alpha$ $-$ H_0 відхиляємо;
якщо $P(\zeta) \ge \alpha$ $-$ H_0 приймаємо.

Тут α - рівень значущості критерію. Таким чином, користувач сам може обрати потрібний рівень значущості і перевірити гіпотезу:

$$P < \alpha \ - \text{ відхилити } H_0$$
$$P \geq \alpha \ - \text{ прийняти } H_0.$$

p-level був введений порівняно недавно - років 30 назад цього поняття не існувало – і придумали його для уніфікації, для зручності в користуванні таблицями при комп'ютерній обробці даних. В кожному сучасному статистичному пакеті – такому, як SPSS, Statistica чи R - при застосуванні різноманітних критеріїв широко використовується ця величина.

Наприклад, в пакеті Statistica розв’язуємо задачу, подібну тій, яку ми розглядали вище – перевірити за допомогою критерію χ^2 чи є вибірка розподілена нормально (обсяг вибірки після вилучення викиду $n = 99$). Після того, як ми вказали пакету дані, метод і розподіл, який передбачений в нашій нульовій гіпотезі, він видає таку таблицю. Нас цікавить лише одне число – p-level. Оскільки $p - level = 0{,}82992 > 0{,}05$, гіпотезу про нормальну розподіленість вибірки приймаємо.



Variable: Var1, Distribution: Normal (Spreadsheet1)
Chi-Square = 1.48146, df = 4 (adjusted) p = 0.82992
Exclude condition: Var1<-150

Upper Boundary	Observed Frequency	Cumulative Observed	Percent Observed	Cumul. % Observed	Expected Frequency	Cumulative Expected	Percent Expected	Cumul. % Expected	Observed-Expected
<= -25.00000	0	0	0.00000	0.0000	0.30255	0.30255	0.30561	0.3056	-0.30255
-20.00000	1	1	1.01010	1.0101	0.94429	1.24684	0.95383	1.2594	0.05571
-15.00000	3	4	3.03030	4.0404	2.84627	4.09311	2.87502	4.1345	0.15373
-10.00000	6	10	6.06061	10.1010	6.69376	10.78688	6.76138	10.8958	-0.69376
-5.00000	15	25	15.15152	25.2525	12.28378	23.07066	12.40786	23.3037	2.71622
0.00000	17	42	17.17172	42.4242	17.59124	40.66190	17.76893	41.0726	-0.59124
5.00000	19	61	19.19192	61.6162	19.66004	60.32194	19.85863	60.9313	-0.66004
10.00000	16	77	16.16162	77.7778	17.14755	77.46949	17.32076	78.2520	-1.14755
15.00000	10	87	10.10101	87.8788	11.67190	89.14139	11.78980	90.0418	-1.67190
20.00000	6	93	6.06061	93.9394	6.19984	95.34123	6.26247	96.3043	-0.19984
25.00000	6	99	6.06061	100.0000	2.56971	97.91094	2.59567	98.8999	3.43029
< Infinity	0	99	0.00000	100.0000	1.08906	99.00000	1.10006	100.0000	-1.08906

Запитання для самоконтролю

1. Наведіть приклад нульової і альтернативної статистичної гіпотези.

2. Що таке помилка першого роду? Помилка другого роду? Потужність критерію?

3. Сформулюйте теорему Пірсона.

4. Яким чином перевіряється гіпотеза про узгодженість вибірки з певним розподілом за критерієм χ^2?

5. Яким чином перевіряється гіпотеза про незалежність двох випадкових величин за критерієм χ^2?

Практичне заняття №17

КРИТЕРІЙ χ^2

Приклади розв'язування задач

Задача 17.1. Для заданої вибірки обсягу $n = 100$

16.33375	20.57598	16.46703
16.70552	17.49004	15.44635
14.40348	14.17653	19.53983
16.9073	14.577	19.06284
15.48434	15.72674	15.60955
17.02262	14.14741	17.69645
15.4736	18.83624	16.9663
13.4961	14.44392	17.05513
16.1525	13.14466	16.19597
17.8248	17.11359	21.83202
15.58885	21.04152	15.39565
17.74936	15.91717	17.44184
18.32037	19.48758	15.64868
16.01635	13.97318	18.22956
16.74362	18.96911	15.44433
14.73759	18.2305	14.6354
16.36727	12.69364	17.78172
16.18805	16.24283	16.30124
12.12503	17.67581	18.7678
16.56356	18.25885	20.24175
14.75929	19.16643	14.59024
16.91844	19.07138	18.19474
800.178	17.57147	19.20931
19.14964	19.95407	12.18991
16.25256	16.18222	13.02201
18.26738	20.22086	16.75214
18.26183	14.06667	14.73877
15.16374	21.57987	15.20131
18.80146	15.24915	17.73091
16.57163	17.18435	16.90228
16.67362	16.35792	16.68132
15.21779	17.28458	19.61475
20.58561	14.15434	17.20534
		15.97872

1)побудувати інтервальний варіаційний ряд, вилучивши попередньо викид;

2)За допомогою критерію χ^2 з рівнем значущості $\alpha = 0{,}05$ перевірити гіпотезу $H_0 = \begin{Bmatrix} \text{Вибірка розподілена за} \\ \text{нормальним законом} \end{Bmatrix}$;

3) Побудувати ящик з вусами і гістограму вибірки.

Розв'язання. Для розв'язку задачі скористаємося системою Excel. 1)Відсортуємо масив, як ми це робили раніше.

12.12503
12.18991
12.69364
13.02201
13.14466
13.4961
13.97318
14.06667
14.14741
14.15434
14.17653
14.40348
14.44392
…………
19.61475
19.95407
20.12459
20.22086
20.24175
20.57598
20.58561
21.04152
21.57987
21.83202
800.178

Як ми бачимо, всі значення знаходяться на відрізку $[15,20]$, і лише останнє значення ненормально велике: 800.178. Це і є викид. Витираємо це значення і вважаємо, що вибірка містить 99 значень. Наш інтервал від 15 до 20 зручно розбити на частинні довжиною 1, виходить 5 часткових інтервалів. Підраховуємо вручну скільки значень попало в кожний частинний інтервал, і таким чином маємо інтервальний варіаційний ряд.

Інтервал	[12,14)	[14,16)	[16,18)	[18,20)	[20,22)
n_k	7	26	38	20	8

В сумі всі n_k дають нам значення 99 – обсяг вибірки.

2)Висуваємо гіпотезу $H_0 = \begin{Bmatrix} \text{Вибірка розподілена за} \\ \text{нормальним законом} \end{Bmatrix}$, хочемо перевірити її за критерієм χ^2 з рівнем значущості $\alpha = 0{,}05$. Для обчислення теоретичних частот нам треба знати чому дорівнюють параметри нормального розподілу: a, σ. Ми можемо оцінити їх за допомогою методу моментів:

$$\hat{a} = \overline{x_B};$$

$$\hat{\sigma} = \sqrt{D_B} \text{ або } \hat{\sigma} = \sqrt{s^2}.$$

Знайти ці значення в Excel ми можемо за допомогою функцій AVERAGE(x) - середнє, SQRT(x) – корінь і VAR.P(x), VAR.S(x) – вибіркова дисперсія. Отже, маємо $\hat{a}$ =16.82873; $\hat{\sigma}$ =2.094034. Тепер нам треба знайти теоретичні ймовірності попадання в інтервали

$$p_k = F_{N(a,\sigma)}(x_{k+1}) - F_{N(a,\sigma)}(x_k),$$

теоретичні частоти np_k і, нарешті, значення χ^2-спостереження за формулою

$$\chi^2_{\text{спос}} = \sum_{k=1}^{l} \frac{(n_k - np_k)^2}{np_k}.$$

Маємо таку табличку:

xi	xi+1	Ni	F(xi)	F(xi+1)	pi=F(xi+1)-F(xi)	npi	(ni-npi)^2)/npi
12	14	7	0	0.088371	0.088371425	.748771	0.349558
14	16	26	0.088371	0.346142	0.257770482	5.51928	0.009056
16	18	38	0.346142	0.712034	0.365892106	6.22332	0.087143
18	20	20	0.712034	0.935042	0.223007706	2.07776	0.195541
20	22	8	0.935042	1	0.064958281	6.43087	0.382867
		99			1	99	1.024164

В останньому рядку обчислюється сума елементів стовпчика. Бачимо, що сума всіх ймовірностей дорівнює одиниці, сума теоретичних частот=99 – так і повинно бути, а от в останньому стовпчику бачимо $\chi^2_{\text{спос}} = 1.024164$. Знаходимо за таблицями Додатку 4: $\chi^2_{\text{крит}}(\alpha = 0{,}05; m = l - r - 1 = 5 - 2 - 1 = 2) = 5{,}9914$.

Висновок: оскільки $\chi^2_{\text{спос}} < \chi^2_{\text{крит}}$, приймаємо гіпотезу про те, що вибірка розподілена нормально.

3) Треба побудувати ящик з вусами і гістограму вибірки.

Відмічаємо наш масив з даними, заходимо в меню Insert->Insert Statistic Chart->Box and Whisker.

Для побудови гістограми Insert->Insert Statistic Chart->Histogram

Рис. 17.3

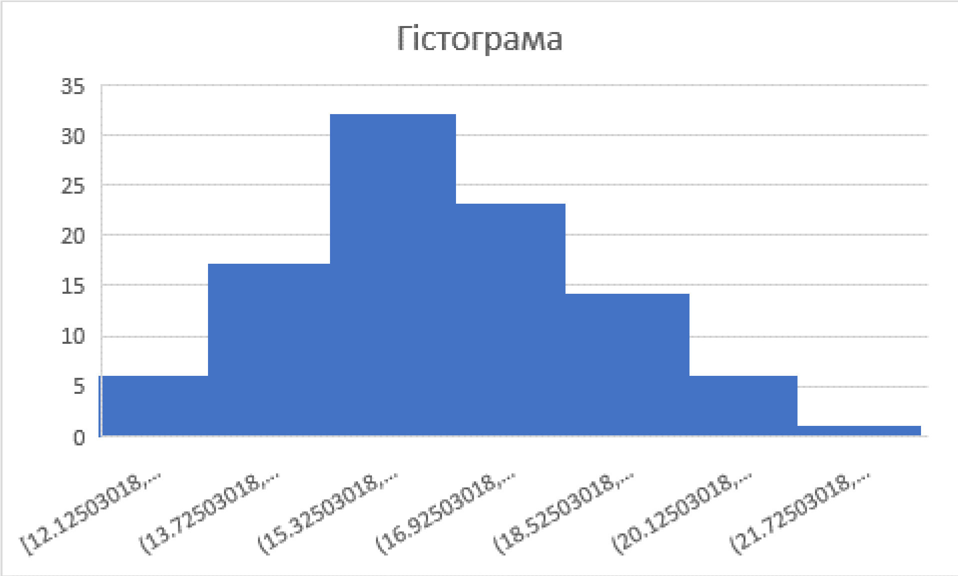


Рис. 17.4

Справді, схоже на нормальний розподіл.

Індивідуальна домашня робота

«Критерій χ^2»

1)Дані знаходяться в окремому Excel-файлі під номером варіанта за посиланням https://drive.google.com/drive/folders/1GC4gOswGFXdL2BXoF6wlnqksG_aozuNV?usp=sharing

Для заданої вибірки побудувати інтервальний варіаційний ряд, розбивши інтервал, в якому розташована вибірка, на 5-10 часткових і виписавши їх емпіричні частоти (треба, щоб кожна емпірична частота була не менше 5). Кожна вибірка містить 1 викид, його треба вилучити.

2) Перевірити гіпотезу: $H_0 = \begin{Bmatrix} \text{Вибірка розподілена за} \\ \text{нормальним законом} \end{Bmatrix}$ за допомогою критерію χ^2 з рівнем значущості $\alpha = 0{,}05$.

3) Побудувати ящик з вусами і гістограму вибірки.

ЛЕКЦІЯ №18

ПРОСТА ЛІНІЙНА РЕГРЕСІЯ

18.1. Постановка задачі в моделі простої лінійної регресії

Припустимо, що нам треба дослідити залежність однієї величини $Y \in R$ від іншої, $X \in R$. В нашому розпорядженні є тільки вибірка $\zeta = \{(X_i;\ Y_i);\ i = \overline{1, n}\}$.

Приклад 18.1. Цінова політика щодо каблучок з діамантами в Сінгапурі може слугувати цікавим прикладом зі статистичного моделювання. Ціна кільця складається з вартості золота, що входить в каблучку – виходячи з поточної ринкової ціни на золото, з вартості роботи ювеліра та ціни самого діаманта. Ціна ж діаманту залежить від чотирьох складових – кількості каратів; якості обробки діаманту; кольору та прозорості. Ювелір, налаштований на роботу на ринку ювелірних прикрас, природньо припускає, що головний фактор, який формує ціну жіночої каблучки – кількість каратів, тобто розмір діаманту.

Наведено дані по 48 каблучках різного дизайну, з діамантами, що важать від 0,12 до 0,35 каратів (1 карат=0,2 гр.) і оціненими від $223 до $1086. Джерело даних - газета «Singapore Straits Times» від 29 лютого 1992 року. Велике рекламне оголошення містило для кожної каблучки з діамантом: фотографію, відповідну ціну кільця, кількість каратів та пробу золота.

Carats	**Cost($)**	**Carats**	**Cost($)**
0.17	355	0.17	353
0.16	328	0.18	438
0.17	350	0.17	318
0.18	325	0.18	419
0.25	642	0.17	346
0.16	342	0.15	315
0.15	322	0.17	350
0.19	485	0.32	918
0.21	483	0.32	919
0.15	323	0.15	298
0.18	462	0.16	339
0.28	823	0.16	338

0.16	336	0.23	595
0.2	498	0.23	553
0.23	595	0.17	345
0.29	860	0.33	945
0.12	223	0.25	655
0.26	663	0.35	1086
0.25	750	0.18	443
0.27	720	0.25	678
0.18	468	0.25	675
0.16	345	0.15	287
0.17	352	0.26	693
0.16	332	0.15	316

Треба дослідити залежність ціни каблучки Cost від ваги діаманта Carats. Відкладаючи по осі OX значення Carats, а по осі OY - Cost, маємо таку ***діаграму розсіювання даних (scatterplot).*** Очевидно, зі зростанням однієї змінної зростає інша.

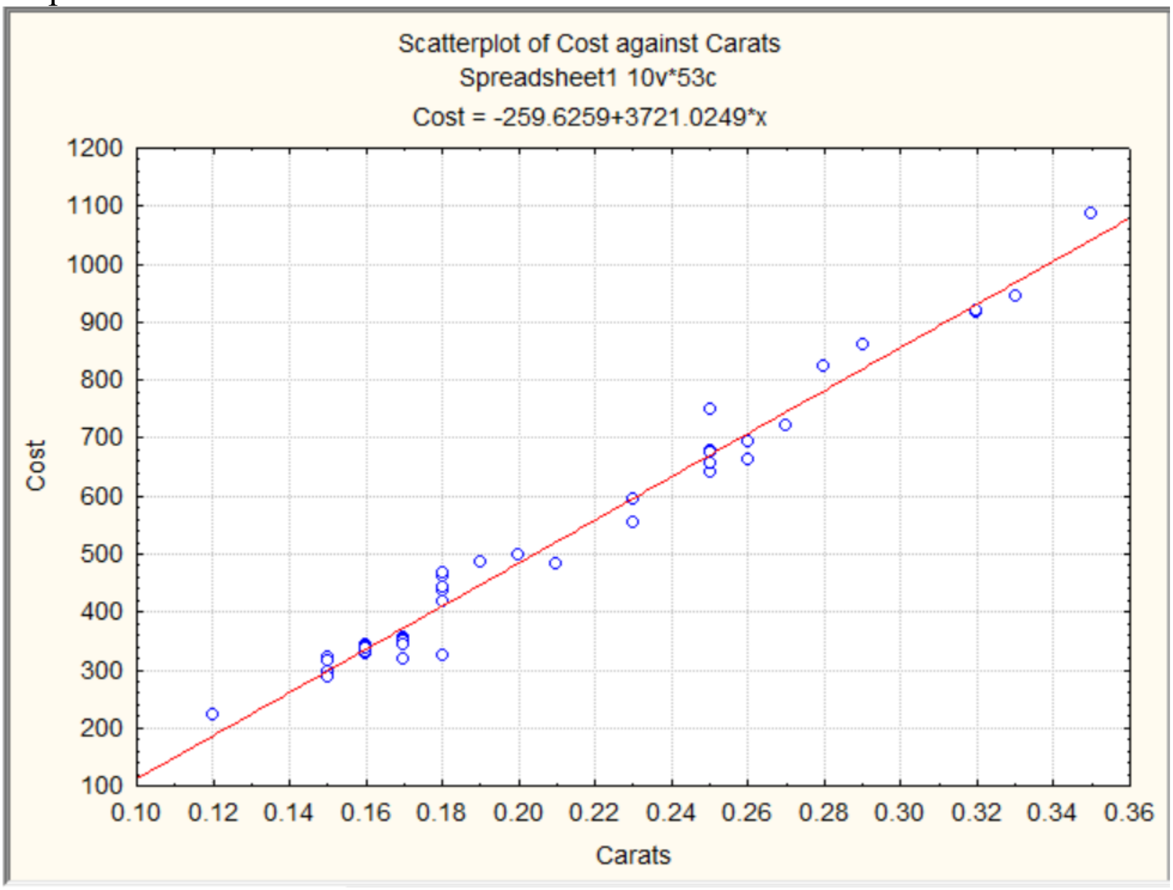


Рис. 28.1

Як ми бачимо на діаграмі розсіювання даних, побудованих за допомогою пакету Statistica, схоже, що залежність між нашими змінними лінійна. Простіше за все взяти модель залежності між ними вигляду

$$Cost_i = a + b \cdot Carats_i + \varepsilon_i\ ; \quad i = \overline{1,n}$$

де $Cost$ – ціна каблучки; залежна змінна;

$Carats$ - вага діаманта;

ε - похибка нашої моделі.

18.2. Основні гіпотези лінійної регресійної моделі. Оцінки параметрів

Поставимо задачу в більш загальній формі. У нас є вибірка, що складається з пар $\{(X_i;\ Y_i);\ i = \overline{1,n}\ \}$. Висуваємо наступні припущення, називаємо їх гіпотезами.

Гіпотези моделі простої лінійної регресії

1) $\boldsymbol{Y_i = a + bX_i + \varepsilon_i;\quad i = \overline{1,n}}$ (специфікація моделі).

Тут $\boldsymbol{a, b}$ ***- параметри, які нам невідомі, їх нам слід оцінити;*** $\boldsymbol{\varepsilon_i}$ ***– випадкова величина.***

2а) $\boldsymbol{M\varepsilon_i = 0;\quad M\varepsilon_i^2 = \sigma^2}$ (умова гомоскедастичності).

2б) $\boldsymbol{M\varepsilon_i\varepsilon_j = 0;\quad i \neq\ j}$ (некорельованість похибок).

2в) Похибка $\boldsymbol{\varepsilon_i}$ ***розподілена за законом*** $\boldsymbol{N(0,\sigma^2)}$***.***

Для оцінки параметрів моделі використаємо метод максимальної правдоподібності, вважаючи, що всі гіпотези виконуються. Згідно нашим припущенням,

$$\begin{gathered}\varepsilon_1 = Y_1 - a - bX_1;\\ \varepsilon_2 = Y_2 - a - bX_2;\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \varepsilon_n = Y_n - a - bX_n.\end{gathered} \tag{18.1}$$

ε_i – незалежні ВВ, розподілені нормально за законом $N(0,\sigma^2)$. Отже, вони мають щільність

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}.$$

Складаємо функцію правдоподібності, підставляючи замість елементів вибірки праві частини з (18.1). Таким чином, маємо функцію правдоподібності

$$L(b) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(Y_i - a - bX_i)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\sigma\right)^n} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(Y_i - a - bX_i)^2}.$$

Очевидно, що максимум по a, b функції L досягається на мінімумі функціонала

$$\Phi(a,b)=\sum_{\{i=1\}}^{n}(Y_i-a-bX_i)^2 \quad \to \quad min\,.$$

Даний функціонал носить назву ***функціонала методу найменших квадратів (МНК).***

Зауваження. Ми звели нашу задачу до пошуку мінімуму $\Phi(a,b)$, виходячи з методу максимальної вірогідності, але і з точки зору здорового глузду такий підхід теж виглядає доречним. Як ми бачимо з рисунка, $\Phi(a,b)$ дорівнює сумі квадратів відстаней по вертикалі від експериментальної точки до відповідної точки, що лежить на прямій $y=a+bx$. Чим менше значення $\Phi(a,b)$, тим краще пряма «підганяє» наші дані.

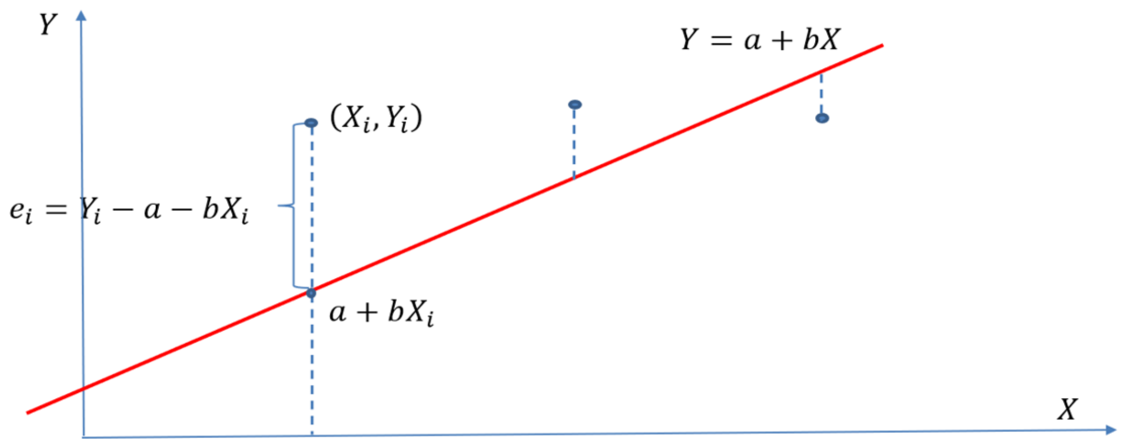


Рис. 18.2

Випишемо оцінки a та b для нашого випадку.

$$\Phi(a,b)=\sum_{i=1}^{n}(Y_i-a-bX_i)^2 \quad \to \quad min.$$

Згадаємо необхідну умову екстремума функції двох змінних.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\Phi}{\partial a}=-2\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(Y_i-a-bX_i)\;=0; \\ \dfrac{\partial\Phi}{\partial b}\;=-2\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(Y_i-a-bX_i)X_i=0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} an+b\sum_{i=1}^{n}X_i=\sum_{i=1}^{n}Y_i\,; \\ a\sum_{i=1}^{n}X_i+b\sum_{i=1}^{n}X_i^2=\sum_{i=1}^{n}Y_iX_i\,. \end{cases} \tag{18.2}$$

За формулами Крамера

$$\hat{b}=\frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_iY_i-\bar{X}\bar{Y}}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2-(\bar{X})^2}=\frac{Cov_B(X,Y)}{D_BX}; \qquad \hat{a}=\bar{Y}-\hat{b}\bar{X}. \tag{18.3}$$

(18.3) – це і є шукані оцінки. Відмітимо, що регресійна пряма завжди проходить через точку $(\bar{X},\bar{Y})$. Отже, ми частково довели наступну теорему.

Теорема. Нехай виконуються гіпотези 1)-2б). Тоді оцінки параметрів (18.3) є консистентними, ефективними і незміщеними.

18.3. Вибірковий коефіцієнт кореляції

Вибірковим коефіцієнтом кореляції називають

$$r_{XY}^B = \frac{Cov_B(X,Y)}{\sqrt{D_B X\, D_B Y}} = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i Y_i - \bar{X}\bar{Y}}{\sqrt{\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2 - (\bar{X})^2\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Y_i^2 - (\bar{Y})^2\right)}}.$$

Вибірковий коефіцієнт кореляції є консистентною оцінкою коефіцієнта кореляції між X і Y. Він має властивості, схожі на властивості коефіцієнта кореляції.

Властивості вибіркового коефіцієнта кореляції

1) $\boldsymbol{-1 \le r_{XY}^B \le 1}$.

2) Якщо $\boldsymbol{r_{XY}^B}$ ***близький до*** $\mathbf{1}$ ***або до*** $\mathbf{-1}$***, то це свідчить про наявність сильного лінійного зв'язку між X та Y; якщо близький до*** $\mathbf{0}$***, то зв'язок слабкий.***

3) Очевидно, що виконується тотожність $\boldsymbol{\hat{b} = r_{XY}^B \frac{\sigma_Y^B}{\sigma_X^B}}$.

18.4. Залишки регресії. Розклад дисперсії залежної змінної

Залишки регресії (Residuals) визначаються з рівності

$$e_i = Y_i - (\hat{a} + \hat{b}X_i).$$

Залишки моделі схожі на похибки моделі $\varepsilon_i = Y_i - (a + bX_i)$. Різниця полягає в тому, що залишки ми можемо порахувати, а похибки - ні. Очевидно, що чим менші залишки, тим модель краща. Систему (18.2) можна записати через залишки.

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n e_i = 0; \\ \sum_{i=1}^n e_i X_i = 0. \end{cases} \tag{18.4}$$

Тепер розглянемо розкид навкруги середнього значення пояснюваної змінної.

$$\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2 = nD_B^Y.$$

Розіб'ємо його на 2 частини: пояснену регресійним рівнянням і непояснену, тобто пов'язану з похибкою ε_i. Позначимо

$$\hat{Y}_i = \hat{a} + \hat{b}X_i; \qquad i = \overline{1,n}$$

передбачене значення Y_i, тоді:

$$\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\bar{Y})^2=\sum_{i=1}^{n}\left((Y_i-\hat{Y}_i)+(\hat{Y}_i-\bar{Y})\right)^2=\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i-\hat{Y}_i\right)^2+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\left(\hat{Y}_i-\bar{Y}\right)^2+2\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\hat{Y}_i)(\hat{Y}_i-\bar{Y}).$$

Розглянемо третій доданок в сумі. Оскільки $Y_i-\hat{Y}_i=e_i$, то через тотожності (18.4) заключаємо:

$$\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\hat{Y}_i)(\hat{Y}_i-\bar{Y})=\sum_{i=1}^{n}e_i(\hat{a}+\hat{b}X_i-\bar{Y})=\hat{a}\sum_{i=1}^{n}e_i+\hat{b}\sum_{i=1}^{n}e_iX_i-\bar{Y}\sum_{i=1}^{n}e_i=0.$$

Ми вивели рівність:

$$\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\bar{Y})^2=\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i-\hat{Y}_i\right)^2+\sum_{i=1}^{n}\left(\hat{Y}_i-\bar{Y}\right)^2.$$

або

$$TSS=RSS+ESS,\quad \text{де} \tag{18.5}$$

$TSS=\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\bar{Y})^2\ -\ total\ sum\ of\ squares$(загальна дисперсія);

$ESS=\sum_{i=1}^{n}\left(\hat{Y}_i-\bar{Y}\right)^2-\ explained\ sum\ of\ squares$

(дисперсія, пояснена регресією);

$RSS=\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i-\hat{Y}_i\right)^2-\ residuals\ sum\ of\ squares$ (дисперсія похибок).

Властивості коефіцієнта детермінації

1) $0\le\ R^2\le\ 1$ - це очевидно.

2)Якщо R^2 близький до 0, то це означає, що регресія нічого не дає - X не покращує якість передбачення Y у порівнянні з тривіальним $Y_i=\bar{Y}$. Відповідна діаграма розсіювання даних

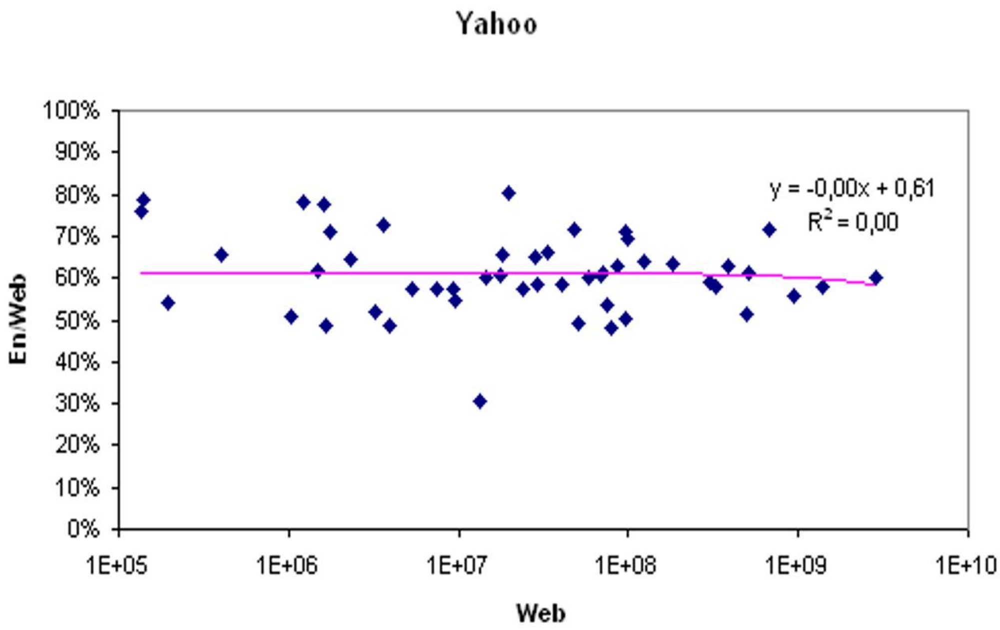


Рис. 18.3

3)Якщо $R^2 = 1$, то це ідеальна підгонка - всі точки спостережень лежать на регресійній прямій.

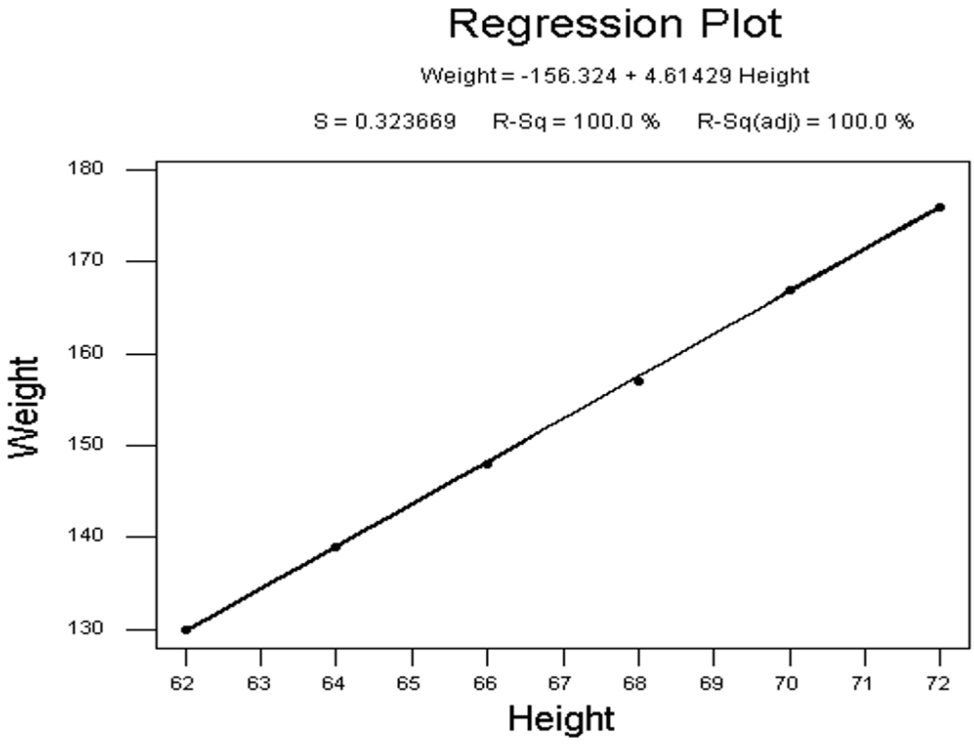


Рис. 18.4

Чим ближчий R^2 до 1, тим модель краща.

4)Зв'язок між коефіцієнтом детермінації і кореляції:

$$\left(r_{\{XY\}}^{B}\right)^2 = R^2 \ .$$

Отже, коефіцієнт детермінації є характеристикою якості підгонки даних за допомогою нашої моделі.

Запитання для самоконтролю

1. *Які основні гіпотези лінійної регресійної моделі? За якими формулами обчислюються оцінки параметрів моделі?*
2. *Що таке функціонал методу найменших квадратів?*
3. *Наведіть формулу, за якою обчислюється вибірковий коефіцієнт кореляції. Оцінкою якої характеристики він слугує?*
4. *Які властивості має вибірковий коефіцієнт кореляції?*
5. *Що таке коефіцієнт детермінації і на що він вказує?*
6. *Наведіть властивості коефіцієнта детермінації.*

Практичне заняття № 18

ПРОСТА ЛІНІЙНА РЕГРЕСІЯ

Приклади розв'язування задач

Задача 18.1. Менеджером компанії одержано залежність між часом ξ реалізації партії продукції (дні) і величиною партії η (тис.од.). Результати дослідження наведено в таблиці:

	5	7	9	2	4	7	9	2	5	6
	,7	,9	,6	,8	,2	,7	,9	,4	,9	,3

Потрібно:

1) встановити форму залежності між ξ та η;

2) знайти рівняння лінійної регресії η на ξ та ξ на η;

3) обчислити коефіцієнт кореляції вибірки r та оцінити силу лінійного зв'язку між ξ та η.

Розв'язання 1)Побудуємо діаграму розсіювання даних для нашої вибірки. Занесемо дані в табличку Excel в перші два стовпчики, відмітимо цей масив і перейдемо в меню за ланцюжком Insert Scatter(X,Y) or Bubble Chart->Scatter. Виходить такий графік, як побудований нижче. В меню (кнопка «+» справа від діаграми) треба розібратись як надписуються осі і сама діаграма.

Як ми бачимо з діаграми, цілком доречно припустити, що залежність лінійна: $\eta = a + b\xi$.

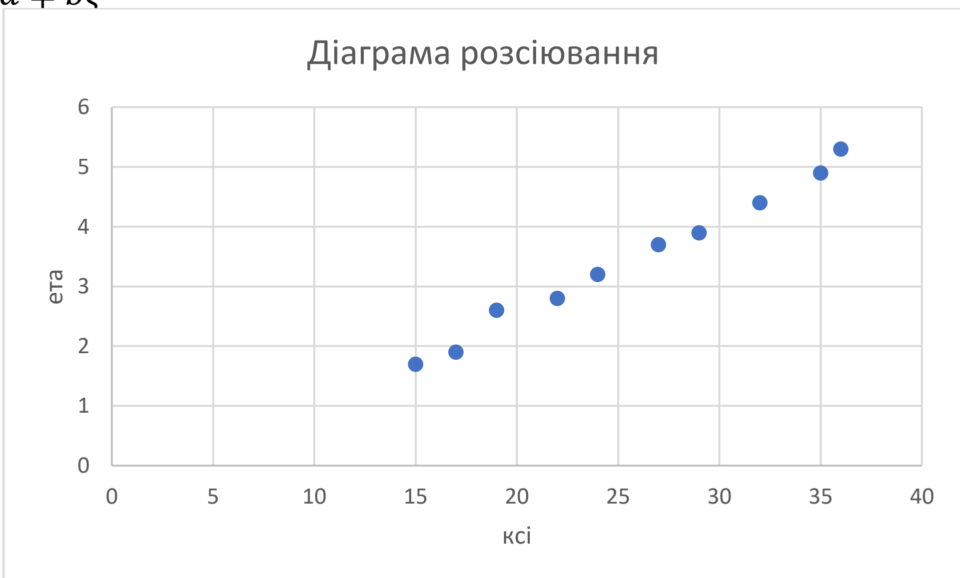
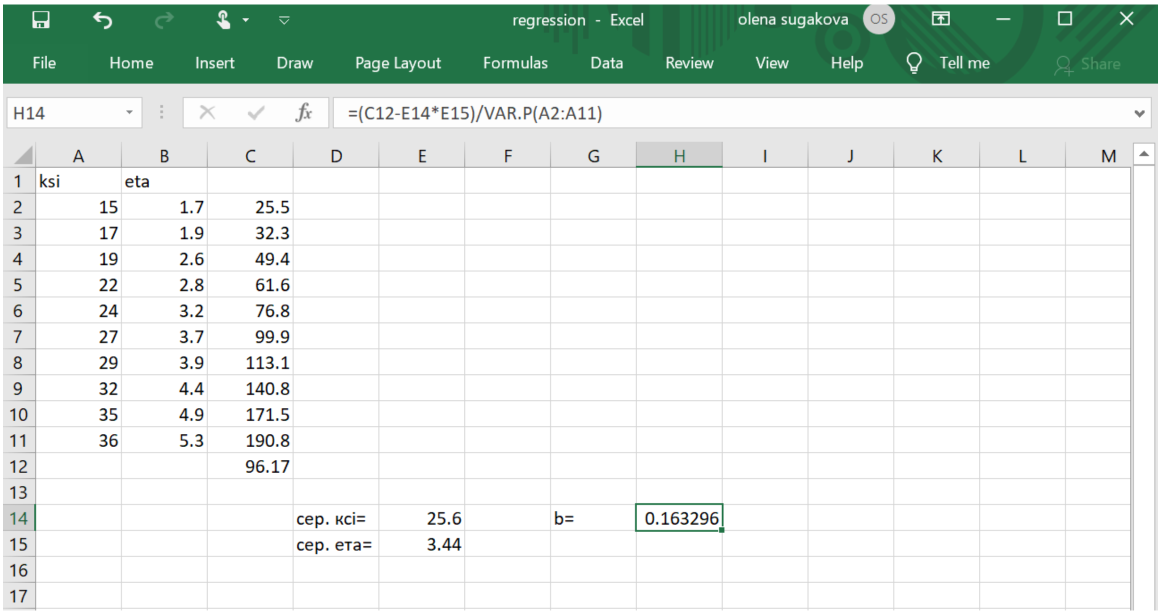


Рис. 18.5

2)Для знаходження оцінок коефіцієнтів в моделі лінійної регресії скористаємося формулами (19.3)

$$\hat{b} = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i Y_i - \bar{X}\bar{Y}}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - (\bar{X})^2} = \frac{Cov_B(X,Y)}{D_B X}; \qquad \hat{a} = \bar{Y} - \hat{b}\bar{X}.$$



H14 =(C12-E14*E15)/VAR.P(A2:A11)

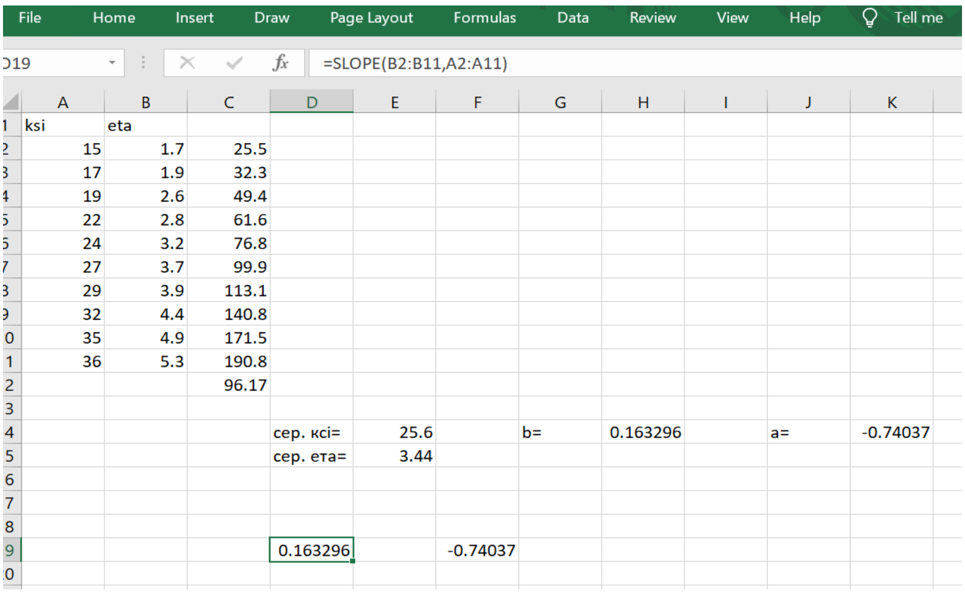
	A	B	C	D	E	F	G	H
1	ksi	eta						
2	15	1.7	25.5					
3	17	1.9	32.3					
4	19	2.6	49.4					
5	22	2.8	61.6					
6	24	3.2	76.8					
7	27	3.7	99.9					
8	29	3.9	113.1					
9	32	4.4	140.8					
10	35	4.9	171.5					
11	36	5.3	190.8					
12			96.17					
13								
14				сер. ксі=	25.6		b=	0.163296
15				сер. ета=	3.44			

Рис. 18.6.

Як видно з цього скріншоту, обчислення оцінок можна здійснити так: для знаходження вибіркових середніх для ξ і η скористатись функцією AVERAGE(), для обчислення вибіркової дисперсії VAR.P(), треба лише правильно відмічати масиви, для яких це обчислюється. А от для обчислення виразу $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i\eta_i$ заводимо ще один стовпчик, в якому поміщаємо добутки відповідних ξ_i, η_i, потім підсумовуємо елементи стовпчика і ділимо на 10, бо у нас такий обсяг вибірки. Отже, отримуємо такі оцінки:

$$\hat{a} = -0{,}74037; \quad \hat{b} = 0{,}163296$$

В електронних таблицях Excel є зручна можливість перевірити свої обчислення за допомогою таких функцій: SLOPE(,) обчислює $\hat{b}$, INTERCEPT(,) знаходить $\hat{a}$. Переконуємось, що іншим методом ми знаходимо ті самі значення.



D19 =SLOPE(B2:B11,A2:A11)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	ksi	eta									
2	15	1.7	25.5								
3	17	1.9	32.3								
4	19	2.6	49.4								
5	22	2.8	61.6								
6	24	3.2	76.8								
7	27	3.7	99.9								
8	29	3.9	113.1								
9	32	4.4	140.8								
10	35	4.9	171.5								
11	36	5.3	190.8								
12			96.17								
13											
14				сер. ксі=	25.6		b=	0.163296		a=	-0.74037
15				сер. ета=	3.44						
16											
17											
18											
19				0.163296		-0.74037					

Рис. 18.7.

Наша формула для регресії ξ на η: $\eta = -0{,}74037 + 0{,}163296\xi$.

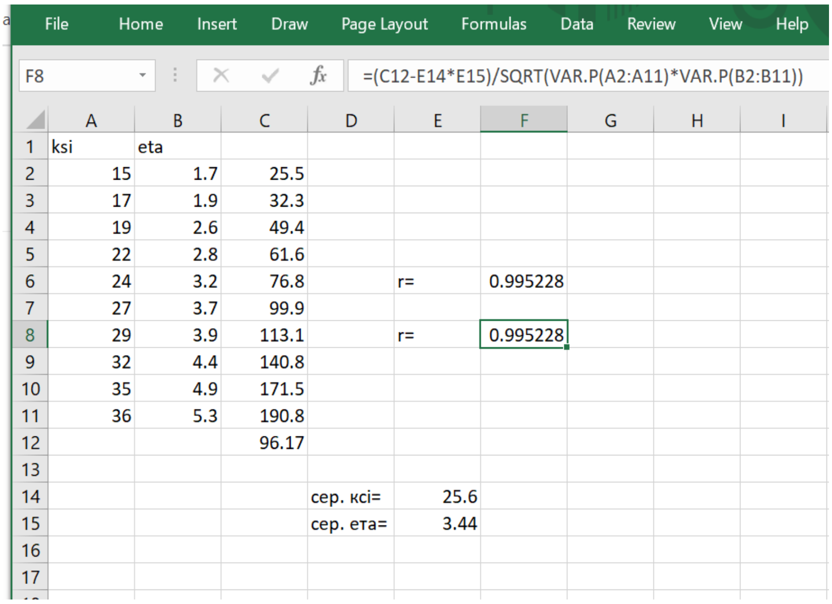
Для знаходження регресії η на ξ скористаємось тими ж формулами (19.3), помінявши місцями масиви X (ξ) на Y (η).

Коефіцієнти мають зовсім інший вигляд. Виходить така формула для прогнозу: $\xi = 4{,}734511 + 6{,}065549\eta$.

3) Знайдемо коефіцієнт кореляції вибірки r. Для цього скористаємось формулою

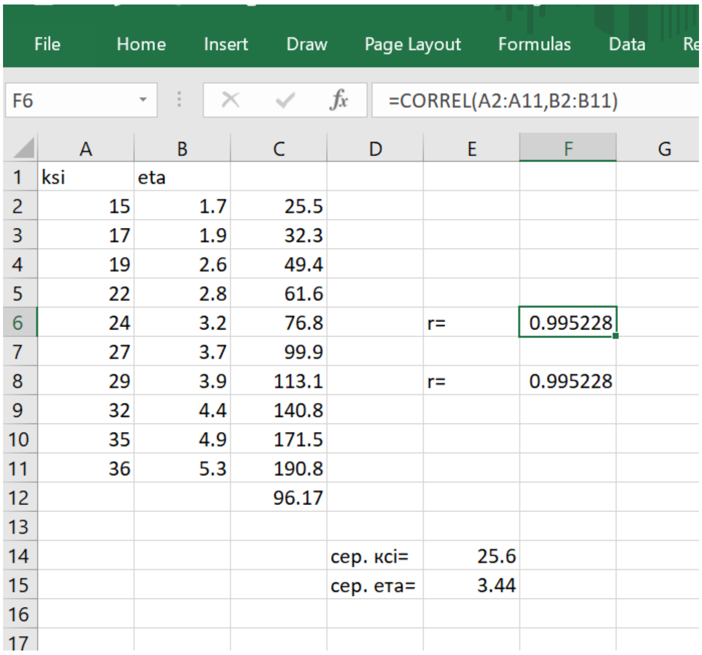
$$r_{XY}^{B} = \frac{Cov_B(X,Y)}{\sqrt{D_B X\, D_B Y}} = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i Y_i - \bar{X}\bar{Y}}{\sqrt{\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - (\bar{X})^2\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i^2 - (\bar{Y})^2\right)}}.$$

Схожу формулу ми вже програмували, тому просто наводимо скріншот обчислення. Для перевірки себе використаємо вбудовану функцію для обчислення коефіцієнта кореляції між двома масивами CORREL(,):



	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	ksi	eta							
2	15	1.7	25.5						
3	17	1.9	32.3						
4	19	2.6	49.4						
5	22	2.8	61.6						
6	24	3.2	76.8		r=	0.995228			
7	27	3.7	99.9						
8	29	3.9	113.1		r=	0.995228			
9	32	4.4	140.8						
10	35	4.9	171.5						
11	36	5.3	190.8						
12			96.17						
13									
14				сер. ксі=	25.6				
15				сер. ета=	3.44				
16									
17									

Рис. 18.8.


File Home Insert Draw Page Layout Formulas Data Re

F6 =CORREL(A2:A11,B2:B11)

	A	B	C	D	E	F	G
1	ksi	eta					
2	15	1.7	25.5				
3	17	1.9	32.3				
4	19	2.6	49.4				
5	22	2.8	61.6				
6	24	3.2	76.8		r=	0.995228	
7	27	3.7	99.9				
8	29	3.9	113.1		r=	0.995228	
9	32	4.4	140.8				
10	35	4.9	171.5				
11	36	5.3	190.8				
12			96.17				
13							
14				сер. ксі=	25.6		
15				сер. ета=	3.44		
16							
17							

Рис. 18.9

Як ми бачимо, коефіцієнт кореляції приймає значення 0,99523, дуже близьке до 1. Це свідчить про високий рівень лінійного зв'язку між ξ і η.

Завдання для самостійного виконання

Збірник задач І.В. Веригіна, О.В. Островська, Д.П. Проскурін «Теорія ймовірностей та математична статистика», 2019. Завдання №11 (варіанти 1-20) https://ela.kpi.ua/handle/123456789/27822

ДОДАТКИ

Додаток 1. Таблиця значень функції Гауса $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3652	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	0,2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0,0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

Додаток 2. Таблиця значень функції Лапласа $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,0000	0,52	0,1985	1,04	0,3508	1,56	0,4406	2,16	0,4846
0,01	0,0040	0,53	0,2019	1,05	0,3531	1,57	0,4418	2,18	0,4854
0,02	0,0080	0,54	0,2054	1,06	0,3554	1,58	0,4429	2,20	0,4861
0,03	0,0120	0,55	0,2088	1,07	0,3577	1,59	0,4441	2,22	0,4868
0,04	0,0160	0,56	0,2123	1,08	0,3599	1,60	0,4452	2,24	0,4875
0,05	0,0199	0,57	0,2157	1,09	0,3621	1,61	0,4463	2,26	0,4881
0,06	0,0239	0,58	0,2190	1,10	0,3643	1,62	0,4474	2,28	0,4887
0,07	0,0279	0,59	0,2224	1,11	0,3665	1,63	0,4484	2,30	0,4893
0,08	0,0319	0,60	0,2257	1,12	0,3686	1,64	0,4495	2,32	0,4898
0,09	0,0359	0,61	0,2291	1,13	0,3708	1,65	0,4505	2,34	0,4904
0,10	0,0398	0,62	0,2324	1,14	0,3729	1,66	0,4515	2,36	0,4909
0,11	0,0438	0,63	0,2357	1,15	0,3749	1,67	0,4525	2,38	0,4913
0,12	0,0478	0,64	0,2389	1,16	0,3770	1,68	0,4535	2,40	0,4918
0,13	0,0517	0,65	0,2422	1,17	0,3790	1,69	0,4545	2,42	0,4922
0,14	0,0557	0,66	0,2454	1,18	0,3810	1,70	0,4554	2,44	0,4927
0,15	0,0596	0,67	0,2486	1,19	0,3830	1,71	0,4564	2,46	0,4931
0,16	0,0636	0,68	0,2517	1,20	0,3849	1,72	0,4573	2,48	0,4934
0,17	0,0675	0,69	0,2549	1,21	0,3869	1,73	0,4582	2,50	0,4938
0,18	0,0714	0,70	0,2580	1,22	0,3863	1,74	0,4591	2,52	0,4941
0,19	0,0753	0,71	0,2611	1,23	0,3907	1,75	0,4599	2,54	0,4945
0,20	0,0793	0,72	0,2642	1,24	0,3925	1,76	0,4608	2,56	0,4948
0,21	0,0832	0,73	0,2673	1,25	0,3944	1,77	0,4616	2,58	0,4951
0,22	0,0871	0,74	0,2703	1,26	0,3962	1,78	0,4625	2,60	0,4953
0,23	0,0910	0,75	0,2734	1,27	0,3980	1,79	0,4633	2,62	0,4956
0,24	0,0948	0,76	0,2764	1,28	0,3997	1,80	0,4641	2,64	0,4959
0,25	0,0987	0,77	0,2794	1,29	0,4015	1,81	0,4649	2,66	0,4961
0,26	0,1026	0,78	0,2823	1,30	0,4032	1,82	0,4656	2,68	0,4963
0,27	0,1064	0,79	0,2852	1,31	0,4049	1,83	0,4664	2,70	0,4965
0,28	0,1103	0,80	0,2881	1,32	0,4066	1,84	0,4671	2,72	0,4967
0,29	0,1141	0,81	0,2910	1,33	0,4082	1,85	0,4678	2,74	0,4669
0,30	0,1179	0,82	0,2939	1,34	0,4099	1,86	0,4686	2,76	0,4971
0,31	0,1217	0,83	0,2967	1,35	0,4115	1,87	0,4693	2,78	0,4973
0,32	0,1255	0,84	0,2965	1,36	0,4131	1,88	0,4699	2,80	0,4974
0,33	0,1293	0,85	0,3023	1,37	0,4147	1,89	0,4706	2,82	0,4976
0,34	0,1331	0,86	0,3051	1,38	0,4162	1,90	0,4713	2,84	0,4977
0,35	0,1368	0,87	0,3078	1,39	0,4177	1,91	0,4719	2,86	0,4979
0,36	0,1406	0,88	0,3106	1,40	0,4192	1,92	0,4726	2,88	0,4980
0,37	0,1443	0,89	0,3133	1,41	0,4207	1,93	0,4732	2,90	0,4981
0,38	0,1480	0,90	0,3159	1,42	0,4222	1,94	0,4738	2,92	0,4982
0,39	0,1517	0,91	0,3186	1,43	0,4236	1,95	0,4744	2,94	0,4984
0,40	0,1554	0,92	0,3212	1,44	0,4251	1,96	0,4750	2,96	0,4985
0,41	0,1591	0,93	0,3238	1,45	0,4265	1,97	0,4756	2,98	0,4986
0,42	0,1628	0,94	0,3264	1,46	0,4279	1,98	0,4761	3,00	0,4986
0,43	0,1664	0,95	0,3289	1,47	0,4292	1,99	0,4767	3,20	0,4993
0,44	0,1700	0,96	0,3315	1,48	0,4306	2,00	0,4772	3,40	0,4996
0,45	0,1736	0,97	0,3340	1,49	0,4319	2,02	0,4783	3,60	0,4998
0,46	0,1772	0,98	0,3365	1,50	0,4332	2,04	0,4793	3,80	0,4999
0,47	0,1808	0,99	0,3389	1,51	0,4345	2,06	0,4803	4,00	0,4999
0,48	0,1844	1,00	0,3413	1,52	0,4357	2,08	0,4812	4,50	0,4999
0,49	0,1879	1,01	0,3438	1,53	0,4370	2,10	0,4821	5,00	0,4999
0,50	0,1915	1,02	0,3461	1,54	0,4382	2,12	0,4830		
0,51	0,1950	1,03	0,3185	1,55	0,4994	2,14	0,4838		

Додаток 3. Таблиця квантилів розподілу Стьюдента $t_\gamma = Q^{T(n-1)}\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)$

k=n-1	*0.8*	*0.9*	*0.95*	*0.98*	*0.99*	*0.999*
1	3,077684	6,313752	12,7062	31,82052	63,65674	636,6192
2	1,885618	2,919986	4,302653	6,964557	9,924843	31,59905
3	1,637744	2,353363	3,182446	4,540703	5,840909	12,92398
4	1,533206	2,131847	2,776445	8,610302	4,604095	8,610302
5	1,475884	2,015048	2,570582	3,36493	4,032143	6,868827
6	1,439756	1,94318	2,446912	3,142668	3,707428	5,958816
7	1,414924	1,894579	2,364624	2,997952	3,499483	5,407883
8	1,396815	1,859548	2,306004	2,896459	3,355387	5,041305
9	1,383029	1,833113	2,262157	2,821438	3,249836	4,780913
10	1,372184	1,812461	2,228139	2,763769	3,169273	4,586894
11	1,36343	1,795885	2,200985	2,718079	3,105807	4,436979
12	1,356217	1,782288	2,178813	2,680998	3,05454	4,317791
13	1,350171	1,770933	2,160369	2,650309	3,012276	4,220832
14	1,34503	1,76131	2,144787	2,624494	2,976843	4,140454
15	1,340606	1,75305	2,13145	2,60248	2,946713	4,072765
16	1,336757	1,745884	2,119905	2,583487	2,920782	4,014996
17	1,333379	1,739607	2,109816	2,566934	2,898231	3,965126
18	1,330391	1,734064	2,100922	2,55238	2,87844	3,921646
19	1,327728	1,729133	2,093024	2,539483	2,860935	3,883406
20	1,325341	1,724718	2,085963	2,527977	2,84534	3,849516
21	1,323188	1,720743	2,079614	2,517648	2,83136	3,819277
22	1,321237	1,717144	2,073873	2,508325	2,818756	3,792131
23	1,31946	1,713872	2,068658	2,499867	2,807336	3,767627
24	1,317836	1,710882	2,063899	2,492159	2,79694	3,745399
25	1,316345	1,708141	2,059539	2,485107	2,787436	3,725144
26	1,314972	1,705618	2,055529	2,47863	2,778715	3,706612
27	1,313703	1,703288	2,051831	2,47266	2,770683	3,689592
28	1,312527	1,701131	2,048407	2,46714	2,763262	3,673906
29	1,311434	1,699127	2,04523	2,462021	2,756386	3,659405
30	1,310415	1,697261	2,042272	2,457262	2,749996	3,645959
31	1,309464	1,695519	2,039513	2,452824	2,744042	3,633456
32	1,308573	1,693889	2,036933	2,448678	2,738481	3,621802
33	1,307737	1,69236	2,034515	2,444794	2,733277	3,610913
34	1,306952	1,690924	2,032245	2,44115	2,728394	3,600716
35	1,306212	1,689572	2,030108	2,437723	2,723806	3,591147
36	1,305514	1,688298	2,028094	2,434494	2,719485	3,58215
37	1,304854	1,687094	2,026192	2,431447	2,715409	3,573675
38	1,30423	1,685954	2,024394	2,428568	2,711558	3,565678
39	1,303639	1,684875	2,022691	2,425841	2,707913	3,55812
40	1,303077	1,683851	2,021075	2,423257	2,704459	3,550966
41	1,302543	1,682878	2,019541	2,420803	2,701181	3,544184
42	1,302035	1,681952	2,018082	2,41847	2,698066	3,537745
43	1,301552	1,681071	2,016692	2,41625	2,695102	3,531626
44	1,30109	1,68023	2,015368	2,414134	2,692278	3,525801
45	1,300649	1,679427	2,014103	2,412116	2,689585	3,520251
46	1,300228	1,67866	2,012896	2,410188	2,687013	3,514957
47	1,299825	1,677927	2,011741	2,408345	2,684556	3,509901
48	1,299439	1,677224	2,010635	2,406581	2,682204	3,505068
49	1,299069	1,676551	2,009575	2,404892	2,679952	3,500443
50	1,298714	1,675905	2,008559	2,403272	2,677793	3,496013

Додаток 4. Таблиця квантилів розподілу $\chi^2(1-\alpha, n)$.

	Значення α							
n	*0,99*	*0,975*	*0,95*	*0,9*	*0,1*	*0,05*	*0,025*	*0,01*
1	0,0002	0,0010	0,0039	0,0158	2,7055	3,8415	5,0239	6,6349
2	0,0201	0,0506	0,1026	0,2107	4,6052	5,9915	7,3778	9,2103
3	0,1148	0,2158	0,3518	0,5844	6,2514	7,8147	9,3484	11,3449
4	0,2971	0,4844	0,7107	1,0636	7,7794	9,4877	11,1433	13,2767
5	0,5543	0,8312	1,1455	1,6103	9,2364	11,0705	12,8325	15,0863
6	0,8721	1,2373	1,6354	2,2041	10,6446	12,5916	14,4494	16,8119
7	1,2390	1,6899	2,1673	2,8331	12,0170	14,0671	16,0128	18,4753
8	1,6465	2,1797	2,7326	3,4895	13,3616	15,5073	17,5345	20,0902
9	2,0879	2,7004	3,3251	4,1682	14,6837	16,9190	19,0228	21,6660
10	2,5582	3,2470	3,9403	4,8652	15,9872	18,3070	20,4832	23,2093
11	3,0535	3,8157	4,5748	5,5778	17,2750	19,6751	21,9200	24,7250
12	3,5706	4,4038	5,2260	6,3038	18,5493	21,0261	23,3367	26,2170
13	4,1069	5,0088	5,8919	7,0415	19,8119	22,3620	24,7356	27,6882
14	4,6604	5,6287	6,5706	7,7895	21,0641	23,6848	26,1189	29,1412
15	5,2293	6,2621	7,2609	8,5468	22,3071	24,9958	27,4884	30,5779
16	5,8122	6,9077	7,9616	9,3122	23,5418	26,2962	28,8454	31,9999
17	6,4078	7,5642	8,6718	10,0852	24,7690	27,5871	30,1910	33,4087
18	7,0149	8,2307	9,3905	10,8649	25,9894	28,8693	31,5264	34,8053
19	7,6327	8,9065	10,1170	11,6509	27,2036	30,1435	32,8523	36,1909
20	8,2604	9,5908	10,8508	12,4426	28,4120	31,4104	34,1696	37,5662
21	8,8972	10,2829	11,5913	13,2396	29,6151	32,6706	35,4789	38,9322
22	9,5425	10,9823	12,3380	14,0415	30,8133	33,9244	36,7807	40,2894
23	10,1957	11,6886	13,0905	14,8480	32,0069	35,1725	38,0756	41,6384
24	10,8564	12,4012	13,8484	15,6587	33,1962	36,4150	39,3641	42,9798
25	11,5240	13,1197	14,6114	16,4734	34,3816	37,6525	40,6465	44,3141
26	12,1981	13,8439	15,3792	17,2919	35,5632	38,8851	41,9232	45,6417
27	12,8785	14,5734	16,1514	18,1139	36,7412	40,1133	43,1945	46,9629
28	13,5647	15,3079	16,9279	18,9392	37,9159	41,3371	44,4608	48,2782
29	14,2565	16,0471	17,7084	19,7677	39,0875	42,5570	45,7223	49,5879
30	14,9535	16,7908	18,4927	20,5992	40,2560	43,7730	46,9792	50,8922
31	15,6555	17,5387	19,2806	21,4336	41,4217	44,9853	48,2319	52,1914
32	16,3622	18,2908	20,0719	22,2706	42,5847	46,1943	49,4804	53,4858
33	17,0735	19,0467	20,8665	23,1102	43,7452	47,3999	50,7251	54,7755
34	17,7891	19,8063	21,6643	23,9523	44,9032	48,6024	51,9660	56,0609
35	18,5089	20,5694	22,4650	24,7967	46,0588	49,8018	53,2033	57,3421
36	19,2327	21,3359	23,2686	25,6433	47,2122	50,9985	54,4373	58,6192
37	19,9602	22,1056	24,0749	26,4921	48,3634	52,1923	55,6680	59,8925
38	20,6914	22,8785	24,8839	27,3430	49,5126	53,3835	56,8955	61,1621
39	21,4262	23,6543	25,6954	28,1958	50,6598	54,5722	58,1201	62,4281
40	22,1643	24,4330	26,5093	29,0505	51,8051	55,7585	59,3417	63,6907
41	22,9056	25,2145	27,3256	29,9071	52,9485	56,9424	60,5606	64,9501
42	23,6501	25,9987	28,1440	30,7654	54,0902	58,1240	61,7768	66,2062
43	24,3976	26,7854	28,9647	31,6255	55,2302	59,3035	62,9904	67,4593
44	25,1480	27,5746	29,7875	32,4871	56,3685	60,4809	64,2015	68,7095
45	25,9013	28,3662	30,6123	33,3504	57,5053	61,6562	65,4102	69,9568
46	26,6572	29,1601	31,4390	34,2152	58,6405	62,8296	66,6165	71,2014
47	27,4158	29,9562	32,2676	35,0814	59,7743	64,0011	67,8206	72,4433
48	28,1770	30,7545	33,0981	35,9491	60,9066	65,1708	69,0226	73,6826
49	28,9406	31,5549	33,9303	36,8182	62,0375	66,3386	70,2224	74,9195
50	29,7067	32,3574	34,7643	37,6886	63,1671	67,5048	71,4202	76,1539

ВІДПОВІДІ

11. 8. **12.** 11. 1**3.** 16. **14.** 7. **15. а)** $n=2$. **б)** $n=20$. **16.** а) так; б) так; в) ні; г) так; д) так; е) так; є) ні; ж) ні. **17.** 102,140. **18.** $\dfrac{n}{n+m-1}$. **19.** 0,6. **20.** $\dfrac{2}{\pi}$ **21.** а) $\dfrac{1}{216}$; б) $\dfrac{1}{36}$. **22.** а)0,697 б) 0,957. **23.** 0,727. **24.** 0,504. **25.** 0,14. **26.** 0,7. **27.** 0,18. 2**8.** 0,201. **29.** 0,576. **30. А)** 0,786. **Б)** 0,816. **31.** $\dfrac{8}{81}$.

32. 0,387. **33.** 0,44; 0,25. **34.** 0,69. **35.** 0,92. **36.** 0,38. **37.** 0,29. **38.** $\dfrac{11}{18}$. **39.** $\dfrac{2}{3}$. **40.** 0,38. **41. а)** 0,318 **б)** 0,477. **42.** 0,837. **43.** 0,85. **44.** 14. **45.** а) 4; б) 0,31; в) 0,96.

46. $P_{100}(75 \le k \le 80) \approx 0{,}39; P_{100}(75 \le k \le 100) \approx 0{,}89;\ P_{100}(75 \le k \le 100) \approx 0{,}11.$

47. 0,9002; 0,1453; 0,9002 . **48.** 200. **49.** 0,0031. **50.** 0,63.

51.

x_i	0	1	2	3
P_i	0,729	0,243	0,027	0,001

P=0,729.

52.

x_i	0	1	2	3	4
P_i	0,716	0,249	0,033	0,002	0,00004

$P(\xi \ge 1) = 1 - P(\xi < 1) = 1 - 0{,}716 = 0{,}284.$

53. $P(\xi = k) = \dfrac{1}{4} \cdot \left(\dfrac{3}{4}\right)^{k-1}, k = 1,2,3,....$

54.

x_i	1	2	3	…	k	…
P_i	$\dfrac{1}{6}$	$\dfrac{1}{6}\cdot\dfrac{5}{6}$	$\dfrac{1}{6}\cdot\left(\dfrac{5}{6}\right)^2$	…	$\dfrac{1}{6}\cdot\left(\dfrac{5}{6}\right)^{k-1}$	…

$k_0 = 1.$

55. $P(\xi = k) = \dfrac{1}{3} \cdot \left(\dfrac{2}{3}\right)^{k-1}, k = 1,2,3,...., \ P(\xi > 4) = 0{,}012$

56. $P(\xi = k) = \dfrac{10^k}{k!} e^{-10}, k = 0,1,2,3,.... \quad P(\xi > 5) = 1 - P(\xi \le 5) = 0{,}93.$

57. $P(\xi = k) = \frac{4^k}{k!}e^{-4}, k = 0,1,2,3,....$ $P(\xi \ge 1) = 1 - P(\xi < 1) = 0{,}98.$

58.

x_i	0	1	2	3	4
P_i	0,063	0,250	0,375	0,250	0,063

61. $c = \frac{1}{3};$ $P(1 < \xi < 10) \approx 0{,}67.$ **62.** $c = 1;$ $P(-1 < \xi < 2) = 1.$

63. $c = 1;$ $P\left(0 < \xi < \frac{\pi}{6}\right) \approx 0{,}87.$ **64.** $c = \frac{1}{2};$ $P(-1 < \xi < 3) = 0{,}87.$

65. $c = \frac{1}{4};$ $P(-4 < \xi < 1) = 1.$ **66.** $c = 2;$ $P\left(\frac{\pi}{6} < \xi < \frac{\pi}{4}\right) \approx 0{,}13.$

67. $c = -\frac{3}{4} P(3 < \xi < 4{,}5) = 0{,}84.$ **68.** $c = -\frac{1}{40}; P(-1 < \xi < 2) = 0{,}55.$

69. а) 0; б) 0,0158; в) 0,9817.

70. $a)$ $P(11{,}96 < \xi < 12{,}06) \approx 0{,}28;$ б) $\mathrm{P}(0 < \xi < 12{,}06) \approx 0{,}67$.

71. $p_3 = 0{,}5; x_2 = 2; x_3 = 3.$

72.

x_i	3,625	5,25
p_i	0,4	0,6

73. $M(\xi) = 2{,}2; D(\xi) = 1{,}36;$ $\sigma(\xi) \approx 1{,}17;$ $M(\eta) = -6{,}9; D(\eta) = 1{,}29;$ $\sigma(\eta) \approx 1{,}14.$ **74.** $M(\xi) = 3{,}2; D(\xi) = 1{,}36;$ $\sigma(\xi) \approx 1{,}17;$ $M(\eta) = -5{,}9; D(\eta) = 1{,}29;$ $\sigma(\eta) \approx 1{,}14.$ **75.** $M(\xi) = 4{,}2;$ $D(\xi) = 1{,}36;$ $\sigma(\xi) \approx 1{,}17;$ $M(\eta) = -4{,}9; D(\eta) = 1{,}29;$ $\sigma(\eta) \approx 1{,}14.$

76. $M\xi = -7{,}8; D(\xi) = 1{,}36; \sigma(\xi) \approx 1{,}17;$ $M(\eta) = -3{,}9; D(\eta) = 1{,}29; \sigma(\eta) \approx 1{,}14.$

77. $c = \frac{1}{4}; M(\xi) = -\frac{5}{3},$ $D(\xi) \approx 1{,}42, \sigma(\xi) \approx 1{,}19.$

78. $c = \frac{1}{2}; M(\xi) \approx 1{,}58,$ $D(\xi) \approx 0{,}08, \sigma(\xi) \approx 0{,}29.$

79. $c = 2; M(\xi) \approx 0{,}29;$ $D(\xi) \approx 0{,}04; \sigma(\xi) \approx 0{,}19.$

80. $c = 2; M(\xi) = \frac{4}{3}, D(\xi) = \frac{2}{9}, \sigma(\xi) \approx 0{,}47$.

81. $M(\xi)=5; D(\xi)\approx 5{,}33;\ \sigma(\xi)\approx 2{,}31; F_\xi(x)=\begin{cases}0, & x\le 1,\\ \dfrac{x-1}{8}, & 1<x\le 9;\\ 1, & x>9.\end{cases}$

$P(0<\xi<5)=F(5)-F(0)=\dfrac{1}{2}.$

82. b=14; $M(\xi)=9; D(\xi)\approx 8{,}33; \sigma(\xi)\approx 2{,}89.$

83.

x_i	0	1	2	3
p_i	0,216	0,432	0,288	0,064

$M(\xi)=1{,}2; D(\xi)=0{,}72;\ \sigma(\xi)\approx 0{,}85.$

84. $p_2=0{,}8; x_1=1; x_2=3.$

85. $\sigma=4;\ а)P(\xi>56)\approx 0{,}07;\ б)P(\xi<42)\approx 0{,}023.$

86. а) [0;158]; б) 158 000 гр.од.

87. $P(\xi\ge 20)=0{,}264; \sigma(\xi)=M(\xi)=15$

$f_\xi(x)=\dfrac{1}{15}e^{-\frac{1}{15}x}; F_\xi(x)=1-e^{-\frac{1}{15}x}\ (x\ge 0);$ **88.** $\sigma\approx 317$ кг.

89. $\mathrm{P}\{3<\xi<8\}\approx 0{,}49>\mathrm{P}\{-90<\xi<1\}\approx 0{,}00023; \mathrm{P}\{\xi\in(2;14)\}=0{,}9973.$

90. (-3;3). **91.** M(ξ) =2,5, D(ξ)=1,45, σ(ξ)≈1,2; M(η)=-8,45, D(η)=1,15, σ(η)≈1,2. **92.** M(ξ)=6,5, D(ξ)=1,45, σ(ξ)≈1,2; M(η)=-4,45, D(η)=1,15, σ(η)≈1,2.

93. M(ξ)=10,5, D(ξ)=1,45, σ(ξ)≈1,2; M(η)=-0,45, D(η)=1,15, σ(η)≈1,2.

94. M(ξ)=12,5, D(ξ)=36,25, σ(ξ)≈6,02; M(η)=0,15, D(η)=1,15, σ(η)≈1,2.

95. $M(\xi)=M(\eta)=\dfrac{\pi}{4}, D(\xi)=D(\eta)=\dfrac{\pi^2+8\pi-32}{16}.$

$$F_{\xi,\eta}(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\left(\sin x+\sin y-\sin(x+y)\right), & x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]\ y\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right],\\ 0 & ,x\notin\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right], y\notin\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right].\end{cases}$$

96. $\dfrac{3}{128}$. **97.** $f_{\xi,\eta}(x,y)=\begin{cases}3^{-x-y}\cdot ln^2 3, & x\ge 0,\ y\ge 0,\\ 0 & ,x<0,\ y<0.\end{cases}$

98. $f_{\xi,\eta}(x,y)=\begin{cases}8e^{-4x-2y}, & x>0,\ y>0,\\ 0 & ,x<0,\ y<0.\end{cases}$ 99. $M(\xi)=M(\eta)=\dfrac{\pi+4-4\sqrt{2}}{4}$

100. $M(\xi)=M(\eta)=\dfrac{\sqrt{3\pi}}{6}, D(\xi)=D(\eta)=\dfrac{4-\pi}{12}.$

104. $M(\xi)=M(\eta)=\dfrac{1}{3};\ k_{\xi\eta}=-\dfrac{1}{36}.$

105. $a=\dfrac{\sqrt{31}}{\pi}; M(\xi)=M(\eta)=0; \sigma(\xi)=\dfrac{5}{31}; \sigma(\eta)=\dfrac{2}{31}; k_{xy}=0; r_{xy}=0.$

107. $M(\xi)=M(\eta)=\dfrac{\pi}{2}; D(\xi)=D(\eta)=\pi^2-4; k_{xy}=0.$

108. $M(\xi)=M(\eta)=\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}; D(\xi)=D(\eta)=1-\dfrac{\pi}{4}$

110. $a=\dfrac{1}{48};\ \mathrm{k}_{\xi\eta}=0;\ r_{\xi\eta}=0.$

111. $P\geq 0{,}889$. **112.** $n\geq 865$. **113.** $\geq 0{,}92$. **114.** $\geq 0{,}9985$ (практично достовірна подія). **115.** (75;105). **116.** $n\geq 1522$. **117.** $n\geq 1294$. **118.** а) 0,64; б) 0,36. **119.** 0,909. **120.** Так. $M(\xi_n)=\dfrac{-a}{2n+1}$, $D(\xi_n)=a^2$.

121. $f_\eta(y)=\begin{cases}0, y\notin[1;9]\\ \dfrac{1}{4\sqrt{y}}, y\in[1;9]\end{cases}$. **122.** $f_\eta(y)=\begin{cases}0, y\notin[-1;1]\\ \dfrac{3y^2}{2}, y\in[-1;1]\end{cases}$

123. $f_\eta(y)=\begin{cases}0, y\notin[0;1]\\ 2y, y\in[0;1]\end{cases}$. **124.** Так, є. $f_\eta(y)=\begin{cases}0, y\notin[k\alpha+b;k\beta+b]\\ \dfrac{1}{k(\beta-\alpha)}, y\in[k\alpha+b;k\beta+b]\end{cases}$

125. $f_\eta(y)=\begin{cases}0, y\notin[\frac{1}{27};1]\\ \dfrac{1}{6y\sqrt[3]{y}}, y\in[\frac{1}{27};1]\end{cases}$ **126.** $f_\eta(y)=\begin{cases}0, y\in[-\infty;1)\\ \dfrac{3}{y^4}, y\in[1;+\infty)\end{cases}$

127. $F_\eta(y)=\begin{cases}0, & y\leq\frac{1}{2}\\ 2y-1, & y\in(\frac{1}{2};1]\\ 1, & y>1\end{cases}$; $f_\eta(y)=\begin{cases}0, y\notin(\frac{1}{2};1]\\ 2, y\in(\frac{1}{2};1]\end{cases}$. **128.** $M_\eta=8$.

129. $f_\eta(y)=\begin{cases}0, y\in[-\infty;1)\\ \dfrac{\lambda}{y^{\lambda+1}}, y\in[1;+\infty)\end{cases}$; **130.** $f_\eta(y)=\begin{cases}0, y\notin[1;4]\\ \dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{4\sqrt{y}}, y\in[1;4]\end{cases}$, $M_\eta=\dfrac{31}{12}$.

ЛІТЕРАТУРА

1. Вентцель Е. С., Теория вероятностей. – М.: Наука, 1969
2. Веригіна, І. В. Теорія ймовірностей та математична статистика. Збірник задач [Електронний ресурс] : навчальний посібник / І. В. Веригіна, О. В. Островська, Д. П. Проскурін. – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2019. – 48 с. https://ela.kpi.ua/handle/123456789/27822
3. Гихман И. И., Скороход А. В., Ядренко М. И. Теория вероятностей и математическая статистика, Киев, Вища школа, 1979
4. Гмурман В. Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике: Учеб.пособ. для вузов – М.: Высш. шк., 2005. – 404 с.
5. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика: Учеб.пособ. – 12-е изд. - М.: Высш. образование., 2007. – 479 с.
6. Гнеденко Б. В. Курс теории вероятностей – М.: Наука, 1988
7. Голомозий В.В., Карташов М.В., Ральченко К.В. Збірник задач з теорії ймовірностей та математичної статистики. – К., ВПЦ «Київський університет», 2015. – 366 с.
8. Дороговцев А. Я, Сільвестров Д. С., Скорохол А. В., Ядренко М. Й. Теорія ймовірностей (збірник задач), Київ, Вища школа, 1977
9. Жлуктенко, В.І. Теорія ймовірностей і математична статистика: у 2-х ч. – Ч.1 Теорія ймовірностей. / В.І. Жлуктенко, С.І. Наконечний. – К.: КНЕУ, 2000. – 304 с.
10. Карташов М.В. Теорія ймовірностей та математична статистика. – К., «ТВіМС», 2004. – 304 с.
11. Карташов М. В. Імовірність, процеси, статистика: Посібник. – К: Видавничо-поліграфічний центр “Київський університет”, 2008
12. Коваленко И. Н., Гнеденко Б. В. Теория вероятностей, Киев, Высшая школа, 1990
13. Коршунов Д.А., Фосс С.Г. Сборник задач и упражнений по теории вероятностей: Учебное пособие. – Новосибирск, Издательство Новосибирского государственного университета, 2003. - 119 с.
14. Коршунов Д.А., Чернова Н.И. Сборник задач и упражнений по математической статистике. - Новосибирск, Издательство института математики, 2004 – 128с.
15. Листопад В.В., Островська О.В. Практикум з теорії ймовірностей із застосуванням інформаційно-комунікаційних технологій [Електронний ресурс]:навчальний посібник – К.: НУХТ, 2016. – 103 с.
16. Магнус Я.Р., Катышев П.К., Пересецкий А.А. Эконометрика. Начальный курс.- М.: Дело, 2004. — 576 с.
17. Майборода Р.Є. Регресія: Лінійні моделі. Навчальний посібник. – К., ВПЦ «Київський університет», 2007. – 296 с.
18. Майборода Р.Є., Сугакова О.В. Аналіз даних за допомогою пакету R. – К., Видавнича лабораторія РФФ КНУ, 2012. – 65 с.
19. Майборода Р.Є., Сугакова О.В. Теорія ймовірностей та математична статистика. Навчальний посібник. – К., ЕКОМЕН, 1998. – 186 с.

20. Медведєв, М.Г. Теорія ймовірностей та математична статистика : підруч. / М.Г. Медведєв, І.О. Пащенко – К.: «Ліра-К», 2008. – 536 с.

21. Севастьянов Б.А., Чистяков В.П., Зубков А.М. Сборник задач по теории вероятностей. – М., Наука, 1980 – 222 с.

22. Теорія ймовірностей: Методичні вказівки до лабораторних та самостійних робіт / Упорядники: О.І. Василик, М.В. Карташов, Г.М. Шевченко, Р.Є Ямненко. - К.: Вид.-поліг. Центр «Київський університет», 2008. – 60 с.

23. Теорія ймовірностей та математична статистика: Частина 1. Випадкові події: Лекції і практикум [Електронний ресурс] : Навч. посіб. уклад.: І. В. Веригіна, О. В. Островська. – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2018. – 57 с. https://ela.kpi.ua/handle/123456789/23501

24. Теорія ймовірностей та математична статистика: Частина 2. Випадкові величини: Лекції і практикум [Електронний ресурс]: Навч. посіб. / уклад.: І. В. Веригіна, О. В. Островська. Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2021. – 77 с. : https://ela.kpi.ua/handle/123456789/42380

25. Турчин В.М. Теорія ймовірностей і математична статистика. Основні поняття, приклади, задачі: Підручник. – Д.: Вид-во Дніпропетр. нац. ун-ту, 2006. – 476 с.

26. Турчин В.М. Теория вероятностей и математическая статистика. Основные понятия, примеры и задачи. – Днепропетровск, ИМА-ПРЕСС., 2012. – 576 с.

27. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения, Т. 1, М., Мир, 1984

28. Хампель Ф., Рончетти Э., Рауссеу П., Штаэль В. Робастность в статистике.- М.: Мир, 1989.- 512с.