МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД
“УЖГОРОДСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ”
КАФЕДРА ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ І МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

О.О. Синявська

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ТА ВАРІАНТИ ТИПОВО-РОЗРАХУНКОВИХ РОБІТ **З ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ**

ДЛЯ СТУДЕНТІВ МАТЕМАТИЧНОГО ФАКУЛЬТЕТУ

Ужгород – 2019

Синявська О.О. Методичні вказівки та варіанти типово-розрахункових робіт з теорії ймовірностей для студентів математичного факультету. – Ужгород: ДВНЗ “УжНУ”, 2019. – 58 с.

Рецензенти: докт. техн. наук, проф. Гече Ф.Е.,
канд. фіз-мат. наук, доц. Погоріляк О.О.

Рекомендовано до друку науково-методичною комісією математичного факультету ДВНЗ «Ужгородський національний університет» від 11 вересня 2019 року, протокол № 1.

Рекомендовано до друку Вченою радою математичного факультету ДВНЗ «Ужгородський національний університет» від 19 вересня 2019 року, протокол № 1.

ЗМІСТ

ВСТУП

Теорія ймовірностей – це наука, яка вивчає закономірності, що виникають у випробуваннях (дослідах, експериментах, спостереженнях) з випадковими наслідками (результатами) при їх масовому повторенні. Відповідно, основним об'єктом досліджень теорії ймовірностей є випробування з випадковими наслідками, або стохастичні випробування.

Виникнення теорії ймовірностей як науки та її розвиток пов'язані з іменами таких вчених, як Б. Паскаль (1623-1662), П. Ферма (1601-1665), Х. Гюйгенс (1629-1695), Я. Бернуллі (1654-1705), А. Муавр (1667 1754), П.-С. Лаплас (1749-1827), С. Пуассон (1781-1840), К. Гаусс (1777-1855), П. Л. Чебишев (1821-1824), А. А. Марков (1856-1922), А. М. Ляпунов (1857-1918), С. Н. Бернштейн (1880-1968), Р. Мізес (1883-1953), Е. Борель (1871 1956), А. Н. Колмогоров (1903-1987).

Даний збірник містить 20 варіантів індивідуальних завдань із таких тем: імовірність події в класичній імовірнісній схемі, геометричні ймовірності, статистичне означення ймовірності події, теореми додавання і множення ймовірностей та висновки з них, імовірності гіпотез, формули повної ймовірності та Байєса, повторні незалежні випробування та формула Бернуллі8, випадкові величини та закони їх розподілу, основні числові характеристики, основні розподіли дискретних випадкових величин, основні розподіли неперервних випадкових величин, системи випадкових величин, кореляційний момент та коефіцієнт кореляції, закон великих чисел, центральна гранична теорема.

Для виконання завдань варіанта розрахункової роботи студентам пропонується ознайомитися з теоретичним матеріалом за відповідними темами, а також розібратися у наведених прикладах розв'язування типових задач.

Розділ 1. ВИПАДКОВІ ПОДІЇ

1.1. Елементи комбінаторики

<table>
<tr><td>Факторіал</td><td colspan="2">$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n, 0! = 1$</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Розміщення. Розміщенням з n елементів по k елементів ($0 \le k \le n$) називають будь-який упорядкований набір з k елементів n -елементної множини.
Розміщення відрізняються одне від одного або складом елементів або порядком їх розташування.</td><td colspan="2">Кількість розміщень</td></tr>
<tr><td>без повторень</td><td>з повторенням</td></tr>
<tr><td>$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = n(n-1)(n-2\ldots(n-k+1)$.</td><td>$\tilde{A}_n^k = n^k$.</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Комбінація. Комбінацією з n елементів по k елементів ($0 \le k \le n$) називають будь-який набір з k елементів n -елементної множини.
Комбінації відрізняються одне від одного тільки складом елементів.</td><td colspan="2">Кількість комбінацій</td></tr>
<tr><td>без повторень</td><td>з повторенням</td></tr>
<tr><td>$C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$</td><td>$\tilde{C}_n^k = C_{n+k-1}^k$</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Перестановка. Перестановкою з n елементів (без повторень) називають будь-яку впорядковану підмножину з n елементів заданої множини.
Перестановки відрізняються одне від одного тільки порядком розташування елементів.</td><td colspan="2">Кількість перестановок
$(n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n)$</td></tr>
<tr><td>без повторень</td><td>з повторенням</td></tr>
<tr><td>$P_n = n!$</td><td>$P_n(n_1, n_2, \ldots, n_k) = \frac{n!}{n_1!\,n_2! \cdots n_k!}$</td></tr>
<tr><td>Правило суми. Якщо елемент a можна вибрати m способами, а елемент b можна вибрати k способами, то вибір «a або b» можна здійснити $m + k$ способами.</td><td colspan="2">Правило добутку. Якщо елемент a можна вибрати m способами і після кожного такого вибору елемент b можна вибрати k способами, то вибір «a і b» в указаному порядку, тобто вибір упорядкованої пари $(a; b)$, можна зробити $m \cdot k$ способами.</td></tr>
</table>

1.2. Випробування та події

Випадковий експеримент – це певне випробування, спостереження чи дослід, результати якого передбачити неможливо.	Можливі наслідки випадкового (стохастичного) експерименту називаються ***випадковими подіями*** *(*позначаються великими латинськими літерами A, B, C, *…).*

<table>
<tr><td>Достовірна подія – подія, яка в результаті експерименту неодмінно відбудеться (позначається Ω).</td><td>Неможлива подія – подія, яка в даному експерименті не може відбутись (позначається $\emptyset$).</td></tr>
<tr><td>Із кожною подією A можна пов'язати подію, яка полягає в тому, що A не настає. Цю подію називають протилежною до A і позначають $\bar{A}$.</td><td>Несумісними називають події, якщо в одному випробуванні поява однієї події виключає появу іншої. В протилежному випадку такі події називають сумісними.</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Операції над подіями.
1. Сумою подій B і C називається подія A (позначають $A = B + C$ або $A = B \cup C$), яка полягає в настанні принаймні однієї з цих подій.
2. Різницею подій B і C називається подія A (позначають $A = B - C$ або $A = B \setminus C$), яка настає тоді, коли настає подія B і не настає подія C.
3. Добутком подій B і C називається подія A (позначають $A = B \cdot C$ або $A = B \cap C$), яка полягає в тому, що в результаті експерименту відбувається як подія B, так і подія C.</td><td>Подія A спричиняє подію B (позначають $A \subset B$), якщо з того що, подія A настала випливає, що настає подія B.</td></tr>
<tr><td>Подія ω буде елементарною, якщо її не можна розкласти на простіші події. Множина $\Omega = \{\omega\}$ всіх елементарних подій називається простором (множиною) елементарних подій.</td></tr>
<tr><td>Сукупність подій $A_1, A_2, \dots, A_n$ утворюють повну групу, якщо одна і тільки одна із цих подій в результаті експерименту обов'язково настає: $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \Omega,\ A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j$.</td></tr>
</table>

1.3. Поняття ймовірності події

<table>
<tr><td rowspan="2">Класичне означення ймовірності. Ймовірністю випадкової події A називається відношення кількості елементарних подій m, які сприяють появі цієї події (становлять множину її елементарних подій), до загальної кількості n рівноможливих елементарних подій, що утворюють простір елементарних подій Ω:
$$P(A) = \frac{m}{n}.$$
Основні властивості ймовірності:
1. Імовірність достовірної події $P(\Omega) = 1$.
2. Імовірність неможливої події $P(\emptyset) = 0$.
3. Імовірність будь-якої випадкової події $0 < P(A) < 1$.</td><td>Геометричне означення ймовірності. Якщо простір елементарних подій Ω можна подати у вигляді деякого геометричного образу, а множину елементарних подій для події A – як частину цього геометричного образу, то ймовірність події A визначається як відношення мір μ цих множин:
$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}.$$</td></tr>
<tr><td>Статистичне означення ймовірності. Відносна частота $W(A)$ події A – це відношення кількості μ випробувань, в яких подія A відбулась, до кількості ν всіх фактично проведених випробувань:</td></tr>
</table>

4. Якщо події A та B – несумісні, то $P(A \cup B) = P(A) + P(B), A \cap B = \emptyset$. 5. Ймовірність протилежної події: $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$. 6. Якщо подія A спричинює подію B, тобто $A \subset B$, то $P(B \backslash A) = P(B) - P(A) \Rightarrow P(A) \le P(B)$.	$W(A) = \frac{\mu}{\nu}$. *Статистичною ймовірністю* події A називається границя, до якої наближається відносна частота події A при необмеженому збільшенні числа всіх випробувань, тобто $P(A) = \lim_{n \to \infty} W(A)$.
Нехай Ω – довільна множина елементарних подій. Система F підмножин з Ω називається *алгеброю*, якщо виконуються умови 1-3 (аксіоми): 1. $F \in \Omega$; 2. $A \in \Omega \Rightarrow \bar{A} = \Omega \backslash A \in F$; 3. $A \in F, B \in F \Rightarrow A \cup B \in F$. 3′. Якщо $A_1, A_2, \dots, A_n \in F$ – події, то їх об'єднання $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \in F$. Клас множин F називається *σ-алгеброю* (*борелівською алгеброю*), якщо він задовольняє умовам 1-2 та 3.	***Аксіоматичне означення ймовірності.*** На σ-алгебрі F задано розподіл ймовірностей, якщо кожній події $A \in F$ однозначно поставлено у відповідність число $P(A)$, яке називається *ймовірністю події* A, так що виконуються наступні аксіоми: 1. $P(A) \ge 0$. 2. $P(\Omega) = 1$. 3. Якщо події $A_i \in F$ $(i = 1,2, \dots)$ попарно несумісні $(A_i \cap A_j = \emptyset, i \ne j)$, то $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$.

1.4. Теореми додавання та добутку ймовірностей. Умовна ймовірність. Формули повної ймовірності та Байєса

Імовірність події A, визначена за умови, що подія B відбулася, називається ***умовною*** і позначається $P(A\|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$.	Події називаються ***залежними***, якщо ймовірність однієї з них змінюється залежно від того, відбулась друга подія чи ні. У протилежному випадку події називаються ***незалежними***.
Теорема додавання ймовірностей. Нехай подія A є сумою двох подій B і C. Тоді: а) якщо події B і C несумісні, то $P(A) = P(B \cup C) = P(B) + P(C)$; б) якщо події B і C сумісні, то $P(A) = P(B \cup C) = P(B) + P(C) - -P(B \cap C)$.	***Теорема добутку ймовірностей.*** Нехай подія A є добутком двох подій B і C. Тоді: а) якщо події B і C незалежні, то $P(A) = P(B \cap C) = P(B) \cdot P(C)$; б) якщо події B і C залежні, то $P(A) = P(B \cap C) = P(B) \cdot P(C\|B)$.
Імовірність настання принаймні однієї події. Нехай у результаті випробування можуть відбутися n подій $A_1, A_2, \dots, A_n$. Потрібно знайти ймовірність події A, що відбудеться принаймні одна з них. Тоді	

<table>
<tr><td colspan="2">

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - P\left(\bigcap_{i=1}^{n} \bar{A}_i\right),$$

де подія $\bar{A}$ полягає в тому, що в результаті випробування одночасно настали протилежні події: $\bar{A} = \bigcap_{i=1}^{n} \bar{A}_i$.
</td></tr>
<tr><td>

Нехай подія A може відбутися тільки за умови настання однієї із несумісних подій $B_i (i = 1,2, \dots, n)$, які утворюють повну групу. Оскільки наперед невідомо, з якою з подій B_i відбудеться подія A, то події B_i називають ***гіпотезами***.
</td><td>

Формула повної ймовірності. Якщо ймовірності гіпотез задано або їх можна обчислити з умов випробування, то ймовірність події A обчислюється за формулою:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i) P(A|B_i),$$

де $P(B_i)$ – імовірність події B_i (гіпотези), $P(A|B_i)$ – умовні ймовірності настання події А.
</td></tr>
<tr><td colspan="2">

Формули Байєса. Гіпотези B_i і подія A залежні, тому якщо відбулась подія A, імовірності гіпотез $P(B_i)$ змінюються. Умовні ймовірності гіпотез $P(B_i|A)$, обчислені за умови, що подія A відбулась, знаходять за формулами Байєса:

$$P(B_i|A) = \frac{P(B_i) P(A|B_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(B_i) P(A|B_i)}.$$
</td></tr>
</table>

1.5. Схема та формула Бернуллі

<table>
<tr><td rowspan="2">

Схема Бернуллі. Розглядається деяке стохастичне випробування, яке в однакових умовах проводиться n раз, причому при кожному його повторенні певна подія A може відбутися з однією і тією самою ймовірністю p або не відбутися з імовірністю $q = 1 - p$. Такі випробування, в яких імовірність того чи іншого результату в одному з них не залежить від результату інших, називають ***повторними незалежними випробуваннями***, або ***схемою Бернуллі***.
</td><td>

Формула Бернуллі. Імовірність того, що в n незалежних випробуваннях, у кожному з яких імовірність $P(A) = p$, подія A відбудеться k раз, обчислюється за ***формулою Бернуллі***:

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}.$$
</td></tr>
<tr><td>

Найімовірніша кількість. Частота m_0 настання події A в n незалежних повторних випробуваннях називається ***найімовірнішою кількістю*** (появи цієї події), якщо їй відповідає найбільша ймовірність. Вона визначається за формулою:

$$np - q \le m_0 \le np + q.$$
</td></tr>
<tr><td>

Локальна теорема Муавра-Лапласа. Якщо в кожному з n незалежних випробувань імовірність p появи події
</td><td>

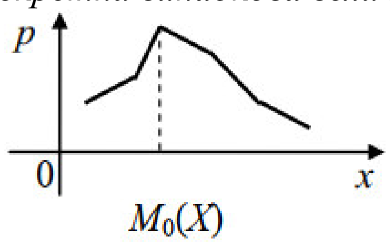
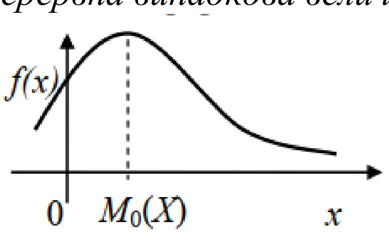
Формула Пуассона. Якщо число n проведених випробувань велике, а ймовірність появи події A в кожному
</td></tr>
</table>

A стала і не дорівнює 0 і 1, то ймовірність того, що в цих n випробуваннях подія A відбудеться рівно k раз, наближено дорівнює $$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x),$$ де $$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}},$$ $$x = \frac{k-np}{\sqrt{npq}}, npq \geq 10.$$	випробуванні мала ($p \leq 0{,}01$), то ймовірність появи події A в цих n випробуваннях k раз обчислюють за формулою Пуассона: $$P_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda},$$ де $\lambda = np$ – середнє число появ події A в n випробуваннях, $npq < 10$.
Інтегральна теорема Муавра-Лапласа. Якщо в кожному з n незалежних випробувань імовірність p появи події A стала і не дорівнює 0 і 1, то ймовірність того, що в n випробуваннях подія A відбудеться від k_1 до k_2 раз, наближено дорівнює: $$P_n(k_1 \leq k \leq k_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1),$$ де $$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt;$$ $$x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}};\ x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}.$$	***Відхилення відносної частоти від ймовірності***. Ймовірність того, що при проведенні n незалежних випробувань відхилення відносної частоти події A від її ймовірності за модулем не перевищить $\varepsilon > 0$, визначається за формулою: $$P\left(\left\lvert\frac{m}{n} - p\right\rvert < \varepsilon\right) = 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right).$$
Функція Гаусса. *Функція* $\varphi(x)$ називається функцією Лапласа (дод. 1). Функція $\varphi(x)$ парна, тобто $\varphi(-x) = \varphi(x)$, а при $x > 5$ $\varphi(x) \approx 0$.	***Функція Лапласа.*** *Функція* $\Phi(x)$ називається функцією Лапласа (дод. 2). Функція $\Phi(x)$ непарна, тобто $\Phi(-x) = -\Phi(x)$, а при $x \geq 5$ $\Phi(x) = 0{,}5$.

Розділ 2. ВИПАДКОВІ ВЕЛИЧИНИ

2.1. Випадкові величини та закони їх розподілу. Основні числові характеристики

<table>
<tr><td colspan="2">Випадковою називають величину, яка в результаті випробування набуває одне і лише одне з можливих значень, наперед не відоме і залежне від випадкових причин, які заздалегідь не можуть бути враховані. Випадкові величини прийнято позначати великими латинськими літерами: X, Y, Z, ..., а їх можливі значення – відповідними малими: x, y, z, ...</td></tr>
<tr><td>Якщо множина можливих значень випадкової величини скінченна або зліченна, то таку величину називають дискретною.</td><td>Неперервною випадковою величиною називається величина, яка набуває будь-яких значень з деякого скінченного або нескінченного інтервалу (області).</td></tr>
<tr><td colspan="2">Співвідношення, що встановлює зв’язок між можливими значеннями випадкової величини та відповідними їй імовірностями, називають законом розподілу випадкової величини.</td></tr>
<tr><td>Ряд розподілу. Якщо у результаті експерименту дискретна величина X набуває одного із значень $x_1, x_2, \dots, x_n$, тобто відбулась одна з повної групи несумісних подій: $X = x_1, \dots, X = x_n$ з ймовірностями цих подій $p_1 = P(X = x_1), \dots, p_n = P(X = x_n)$, то
$$\sum_{i=1}^{n} P(X = x_i) = \sum_{i=1}^{n} p_i = 1.$$
<table><tr><td>X</td><td>x_1</td><td>...</td><td>x_n</td></tr><tr><td>p</td><td>p_1</td><td>...</td><td>p_n</td></tr></table></td><td>Функція розподілу $F(x) = P(X < x)$.
Властивості $F(x)$:
1. $0 \le F(x) \le 1$.
2. $F(x)$ неспадна, неперервна зліва, $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$, $\lim_{x \to \infty} F(x) = 1$.
3. Для довільних a i b,
$$P(a \le X < b) = F(b) - F(a),$$
$$P(a < X \le b) = F(b+0) - F(a+0),$$
$$P(a \le X \le b) = F(b+0) - F(a),$$
$$P(a < X < b) = F(b) - F(a+0).$$</td></tr>
<tr><td>Функцією розподілу дискретної випадкової величини X називається функція $F(x)$, яка для кожного значення x дорівнює ймовірності того, що в.в. X набуде значення, меншого за x, тобто $F(x) = P(X < x) = \sum_{x_i < x} p(x_i)$.</td><td>Щільність розподілу неперервної випадкової величини X $F'(x) = f(x)$.
Властивості $f(x)$:
1. $f(x) \ge 0$.
2. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$;
3. $P\{a \le X < b\} = \int_{a}^{b} f(x)dx = Fb - F(a)$.
4. $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Числові характеристики випадкових величин</td></tr>
<tr><td>Характеристики положення: математичне сподівання MX, мода</td><td>Характеристики розподілу: дисперсія DX, середнє квадратичне</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>$Mo(X)$, медіана $Me(X)$.</td><td>відхилення $\sigma(X)$.</td></tr>
<tr><td>Математичним сподіванням або середнім значенням дискретної випадкової величини X, називається число, яке дорівнює сумі добутків усіх можливих значень X на відповідні їм імовірності
$$MX = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i.$$
Якщо X приймає нескінчену кількість значень, то
$$MX = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i,$$
причому математичне сподівання існує, якщо ряд у правій частині рівності збігається абсолютно.</td><td>Якщо неперервна випадкова величина X приймає значення на відрізку $[a, b]$ та має щільність імовірності $f(x)$, то її математичне сподівання знаходиться за формулою:
$$MX = \int_a^b xf(x)dx.$$
Якщо ж можливі значення неперервної в.в. X належать інтервалу $(-\infty; +\infty)$, то її математичне сподівання знаходиться за формулою
$$MX = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx,$$
за умови, що інтеграл збігається абсолютно.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Основні властивості математичного сподівання:
1) $MC = C, C = const$;
2) $M(CX) = C \cdot MX, C = const$;
3) $M(X \pm Y) = MX \pm MY$;
4) $M(XY) = MX \cdot MY$, де X та Y – незалежні випадкові величини.</td></tr>
<tr><td>Модою $Mo\ (X)$ випадкової величини X називається її найбільш імовірне можливе значення (тобто таке значення X, при якому ймовірність p_i або щільність $f(x)$ досягає максимуму).</td><td>Медіаною $Me(X)$ випадкової величини X називається те значення x, для якого
$P\{X < Me(X)\} = P\{X > Me(X)\} = \frac{1}{2}$.</td></tr>
<tr><td>X – дискретна випадкова величина

</td><td>X – неперервна випадкова величина

</td></tr>
<tr><td>Дисперсією або розсіюванням DX випадкової величини X називають число, яке дорівнює математичному сподіванню квадрата відхилення випадкової величини X від її математичного сподівання, тобто
$DX = M(X - MX)^2 = MX^2 - (MX)^2$.</td><td>Основні властивості дисперсії:
1) $DX \geq 0$;
2) $DC = 0, C = const$;
3) $D(CX) = C^2 DX, C = const$
4) $D(X \pm Y) = DX + DY$, де X та Y – незалежні випадкові величини.</td></tr>
</table>

Якщо X – *дискретна випадкова величина,* то $$DX = \sum_{i=1}^{n}(x_i - MX)^2 p_i = = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i - (MX)^2.$$	Якщо X – *неперервна випадкова величина,* то $$DX = \int_a^b (x - MX)^2 f(x)dx =$$ *abx2fxdx−(MX)2* при *x∈[a, b],* $$DX = \int_{+\infty}^{-\infty}(x - MX)^2 f(x)dx =$$ *+∞−∞x2fxdx−(MX)2* при $x \in (-\infty; +\infty)$,
Корінь квадратний з дисперсії називається ***середнім квадратичним відхиленням*** і позначається: $$\sigma(X) = \sqrt{DX}.$$	***Початковий, центральний і абсолютний початковий моменти порядку*** k величини X визначають відповідно за такими формулами: $$v_k = MX^k, \mu_k = M(X - MX)^k,$$ $$\alpha_k = M\|X\|^k.$$
Коефіцієнт асиметрії характеризує асиметрію графіка $f(x)$ щодо точки математичного сподівання випадкової величини та визначається за формулою: $$A_s = \frac{\mu_3}{\sigma^3}.$$	***Ексцес*** характеризує ступінь відхилення закону розподілу випадкової величини X від нормального розподілу та визначається за формулою: $$E_s = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3.$$
Характеристичною функцією випадкової величини X називається функція $\varphi(t)$ дійсної змінної $t \in \mathbb{R}$: $\varphi(t) = Me^{itX}$. Для дискретної випадкової величини X характеристична функцыя обчислюється за формулою: $$\varphi(t) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{itx_k} p_k,$$ а для неперервної випадкової величини X – $$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} dF(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} p(x)dx.$$ Очевидно, що $\varphi(0) = 1$ та $\|\varphi(t)\| \leq 1, t \in \mathbb{R}$.	

2.2. Основні закони розподілу ймовірностей

X – дискретна випадкове величина	
Біномний закон розподілу	***Закон розподілу Пуассона***
Схема Бернуллі: проводиться *n* незалежних випробувань, у кожному з яких випадкова подія *A* може або відбутися зі сталою ймовірністю p, або невідбутися з імовірністю $q = 1 - p$, а випадкова величина X – кількість появ події *A* в цих *n* випробуваннях.	

X	0	1	…	k	…	n
p	p_0	p_1	…	p_k	…	p_n

$$P_k = P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k},$$
$$k = 0,1,\dots,n, q = 1-p.$$

X	0	1	…	k	…
p	p_0	p_1	…	p_k	…

$$P_k = P_n(k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},$$
$$k = 0,1,\dots,\lambda = np, n \to \infty, p \to 0.$$

Числові характеристики:

$$MX = np, DX = npq.$$

Числові характеристики:

$$MX = DX = \lambda\,.$$

Геометричний розподіл виникає, коли незалежні випробування, у кожному з яких подія A може відбутися зі сталою ймовірністю p, проводяться до першого «невдалого» випробування (подія A не відбулась) і далі припиняються, а випадкова величина X – кількість проведених «вдалих» випробувань.

$$P_k = P(X=k) = p(1-p)^{k-1},$$
$$k = 1,2,\dots\,.$$

Гіпергеометричний розподіл описує ймовірність настання m успішних результатів у n випробуваннях, якщо значення n мале порівняно з обсягом сукупності N:

$$P(X=m) = \frac{C_k^n C_{N-k}^{n-m}}{C_N^n},$$
$$m = 0,1,2,\dots,n; k \ge n.$$

Числові характеристики:

$$MX = \frac{1}{p}, DX = \frac{1-p}{p^2}.$$

Числові характеристики:

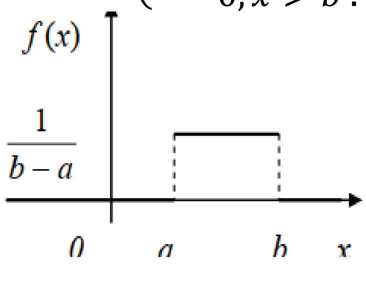
$$MX = \frac{kn}{N}, DX = \frac{nk(N-k)(N-n)}{N^2(N-1)}.$$

X – неперервна випадкова величина

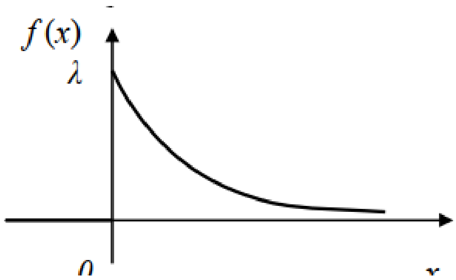
Рівномірний закон розподілу	***Показниковий (експоненціальний) закон розподілу***

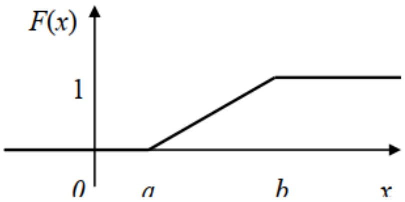
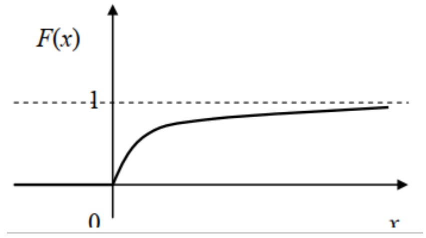
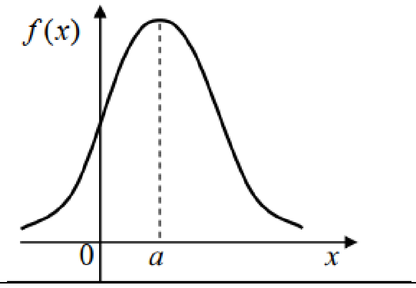
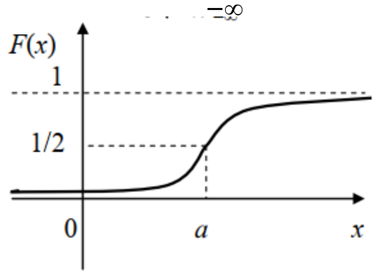
Щільність розподілу

$$f(x) = \begin{cases} 0, x < a \\ \dfrac{1}{b-a}, a \le x \le b \\ 0, x > b\,. \end{cases}$$



$$f(x) = \begin{cases} 0, x < 0, \\ \lambda e^{-\lambda x}, x \ge 0. \end{cases}$$



<table>
<tr><td colspan="2">Функція розподілу</td></tr>
<tr><td>$$F(x)=\begin{cases}0, x<a,\\ \dfrac{x-a}{b-a}, a\le x\le b,\\ 1, x>b.\end{cases}$$

</td><td>$$F(x)=\begin{cases}0, x<0,\\ 1-e^{-\lambda x}, x\ge 0.\end{cases}$$

</td></tr>
<tr><td>Числові характеристики:
$$MX=\frac{a+b}{2}, DX=\frac{(b-a)^2}{12}.$$</td><td>Числові характеристики:
$$MX=\frac{1}{\lambda}, DX=\frac{1}{\lambda^2}.$$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Нормальний (гауссівський) закон розподілу</td></tr>
<tr><td>Щільність розподілу
$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, x\in(-\infty;\infty).$$

</td><td>Функція розподілу
$$F(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}}dt.$$

</td></tr>
<tr><td colspan="2">Числові характеристики: $MX=a, DX=\sigma^2$.</td></tr>
<tr><td>Ймовірність потрапляння у проміжок:
$$P(\alpha\le X<\beta)=\Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right).$$</td><td>Ймовірність відхилення в.в. X від математичного сподівання на величину ε
$$P(|X-a|<\varepsilon)=2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right).$$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Правило «трьох сигм»
Якщо випадкова величина X має нормальний закон розподілу з параметрами a і σ^2, то практично достовірно, що її значення містяться в інтервалі $(a-3\sigma; a+3\sigma)$.</td></tr>
</table>

РОЗДІЛ 3. СИСТЕМИ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН

Сукупність випадкових величин $(X_1, X_2, \dots, X_n)$, які розглядаються спільно, називається ***системою n випадкових величин.***
При $n = 2$ систему випадкових величин називають також ***двовимірною випадковою величиною*** (X, Y). Величини X і Y, які утворюють систему (X, Y), називають її *складовими*.

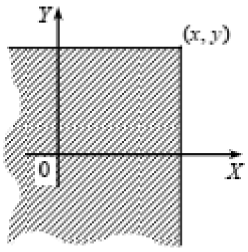
Закон розподілу системи (X, Y) дискретних випадкових величин задається таблицею (матрицею):

$X \backslash Y$	y_1	y_2	…	y_n
x_1	p_{11}	p_{21}	…	p_{n1}
x_2	p_{21}	p_{22}	…	p_{n2}
…	…	…	…	…
x_m	p_{m1}	p_{m2}	…	p_{mn}

Причому, $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p_{ij} = 1.$

Функція розподілу $F(x, y)$ системи двох випадкових величин визначає ймовірність спільного настання двох подій: $X < x$ і $Y < y$;

$$F(x, y) = P(X < x, Y < y).$$



Для дискретної випадкової величини (X, Y) функція розподілу набуває вигляду суми:

$$F(x, y) = \sum_{x_i < x}\sum_{y_j < y} p_{ij}\,.$$

Властивості функції розподілу :
1) $0 \le F(x, y) \le 1$;
2) $F(x, y)$ – неспадна функція x і y;
3) $F(-\infty, -\infty) = F(x, -\infty) = F(-\infty, y) = 0$;
4) $F(+\infty, +\infty) = 1$;
5) $F(x, +\infty) = F_1(x)$, $F(+\infty, y) = F_2(y)$.

Ймовірність потрапляння випадкової точки у прямокутник, сторони якого паралельні осям координат:

$$P(x_1 \le X < x_2, y_1 \le Y < y_2) = F(x_2, y_2) - F(x_2, y_1) - -F(x_1, y_2) + F(x_1, y_1).$$

<table>
<tr>
<td rowspan="2">Щільність розподілу системи (X,Y):
$$f(x,y)=\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\partial y}.$$
Властивості $f(x,y)$:
1. $f(x,y)\geq 0$;
2. $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy=1$.
3. Імовірність того, що неперервна випадкова величина (X,Y) потрапить в область D подається формулою:
$$P\big((X,Y)\epsilon D\big)=\iint_D f(x,y)dxdy.$$
4. Функція розподілу системи (X,Y) виражається через щільність розподілу $f(x,y)$:
$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)dudv.$$</td>
<td>Розподіли складових системи (X,Y):
$$P(X=x_i)=p(x_i)=\sum_{j=1}^{m} p_{ij},$$
$$P(Y=y_j)=p(y_j)=\sum_{i=1}^{n} p_{ij}.$$</td>
</tr>
<tr>
<td>Щільності розподілу складових системи (X,Y):
$$f_1(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy;$$
$$f_2(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx.$$</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">Умови незалежності випадкових складових системи</td>
</tr>
<tr>
<td>Дві випадкові величини незалежні, якщо закон розподілу однієї з них не залежить від того, які можливі значення прийняла друга величина.</td>
<td rowspan="2">Щоб неперервні випадкові величини X та Y були незалежними, необхідно і достатньо, щоб диференціальна функція системи (X, Y) дорівнювала добутку диференціальних функцій складових
$$f(x,y)=f_1(x)\cdot f_2(y).$$</td>
</tr>
<tr>
<td>Теорема. Для того, щоб випадкові величини X і Y були незалежними, необхідно і достатньо, щоб
$$F(x,y)=F_1(x)\cdot F_2(y).$$</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">Основні числові характеристики складових системи</td>
</tr>
<tr>
<td>X і Y — дискретні</td>
<td>X і Y — неперервні</td>
</tr>
<tr>
<td>Математичні сподівання:
$$MX=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_i p_{ij},$$
$$MY=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} y_j p_{ij},$$
Дисперсії
$$DX=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_i^2 p_{ij}-(MX)^2,$$
$$DY=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} y_j^2 p_{ij}-(MY)^2.$$</td>
<td>Математичні сподівання:
$$MX=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x,y)dxdy,$$
$$MY=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} yf(x,y)dxdy,$$
Дисперсії
$$DX=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x,y)dxdy-(MX)^2,$$
$$DY=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} y^2 f(x,y)dxdy-(MY)^2.$$</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>Умовним розподілом дискретної випадкової величини X за умови, що $Y = y_j$, називається сукупність умовних імовірностей
$$p(x_i/y_j) = \frac{p(x_i, y_j)}{p(y_j)},\ i = 1,2,\dots,n.$$
Аналогічно
$$p(y_j/x_i) = \frac{p(y_j, x_i)}{p(x_i)},\ \text{де } j = 1,2,\dots,m.$$</td>
<td>Умовні щільності
$$\varphi(x/y) = \frac{f(x,y)}{f_2(y)} = \frac{f(x,y)}{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx};$$
$$\varphi(y/x) = \frac{f(x,y)}{f_1(x)} = \frac{f(x,y)}{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy}.$$</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2" align="center">Умовне математичне сподівання</td>
</tr>
<tr>
<td>Для системи дискретних випадкових величин
$$M(X/Y = y_j) = \sum_{i=1}^{n} x_i p(x_i/y_j);$$
$$M(Y/X = x_i) = \sum_{j=1}^{m} y_j p(y_j/x_i);$$</td>
<td>Для системи неперервних випадкових величин
$$M(X/Y = y) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\varphi(x/y)dx;$$
$$M(Y/X = x) = \int_{-\infty}^{+\infty} y\varphi(y/x)dy.$$</td>
</tr>
<tr>
<td>Кореляційним моментом K_{XY} (кореляцією $cov(X,Y)$) випадкових величин X та Y називається число
$$K_{XY} = M\big((X - MX)(Y - MY)\big) = \\ = M(XY) - MX \cdot MY.$$
Кореляційний момент характеризує тісноту лінійної залежності між величинами.</td>
<td>Якщо випадкові величини незалежні, то $K_{XY} = 0$.
Якщо кореляційний момент дорівнює нулю, то величини називаються некорельованими.</td>
</tr>
<tr>
<td>Коефіцієнтом кореляції випадкових величин X та Y називається число
$$r_{XY} = \frac{K_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y}.$$</td>
<td rowspan="2">Властивості коефіцієнта кореляції:
1) $r_{XY} = r_{YX}$;
2) $r_{XX} = 1$;
3) $-1 \le r_{XY} \le 1$;
4) Якщо X та Y зв’язані лінійніною функціональною залежностю $Y = aX + b$, то $r_{XY} = \pm 1$, причому його знак збігається зі знаком коефіцієнта a.</td>
</tr>
<tr>
<td>Кореляційна матриця
$$K = \begin{pmatrix} K_{XX} & K_{XY} \\ K_{YX} & K_{YY} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_X^2 & K_{XY} \\ K_{YX} & \sigma_Y^2 \end{pmatrix}.$$</td>
</tr>
</table>

РОЗДІЛ 4. ГРАНИЧНІ ТЕОРЕМИ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ

<table>
<tr><td colspan="2">Закон великих чисел: у випадку дуже великої кількості випадкових явищ усереднений їхній результат практично перестає бути випадковим і може бути передбачений із великою часткою вірогідності.</td></tr>
<tr><td>Перша нерівність Чебишова: якщо випадкова величина $X \geq 0$ має скінченне математичне сподівання MX, то для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ виконується нерівність:
$$P\{X > \varepsilon\} \leq \frac{MX}{\varepsilon}.$$
Для ймовірності протилежної події відповідна оцінка має вигляд:
$$P\{X \leq \varepsilon\} \geq 1 - \frac{MX}{\varepsilon}.$$</td><td>Друга нерівність Чебишова: якщо випадкова величина X має скінченну дисперсію DX, то для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ виконується нерівність:
$$P\{|X - MX| > \varepsilon\} \leq \frac{DX}{\varepsilon^2}.$$
Для ймовірності протилежної події відповідна оцінка має вигляд:
$$P\{|X - MX| \leq \varepsilon\} \geq 1 - \frac{DX}{\varepsilon^2}.$$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Послідовність в.в. X_n називається збіжною за ймовірністю до в.в. X, якщо $\forall \varepsilon > 0$: $\lim_{n\to\infty} P\{|X_n - X| > \varepsilon\} = 0$ або $\lim_{n\to\infty} P\{|X_n - X| \leq \varepsilon\} = 1$.
Позначається $X_n \xrightarrow{p} X, n \to \infty$.</td></tr>
<tr><td>Теорема Чебишова. Якщо X_n – послідовність попарно незалежних випадкових величин зі скінченними математичними сподіваннями і дисперсіями, обмеженими однією і тією самою сталою C: $DX_i \leq C$ $(i = 1,2,\ldots)$, то для довільного як завгодно малого числа $\varepsilon > 0$ виконується нерівність
$$P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} MX_i\right| \leq \varepsilon\right\} \geq 1 - \frac{C}{n\varepsilon^2},$$
яка при $n \to \infty$ переходить у граничну рівність
$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} MX_i\right| \leq \varepsilon\right\} = 1.$$</td><td>Теорема Хінчина. При необмеженому зростанні числа n попарно незалежних випадкових величин $X_n, n \geq 1$ із однаковими математичними сподіваннями $MX_i = a$ та рівномірно обмеженими дисперсіями $DX_i \leq C$ $(i = 1,2,\ldots)$, їх середнє арифметичне прямує за ймовірністю до числа m, тобто:
$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - a\right| \leq \varepsilon\right\} = 1.$$</td></tr>
<tr><td>Теорема Бернуллі. Якщо k – кількість появ події A в n незалежних випробуваннях, а p – імовірність появи події A в кожному з цих випробувань, то для будь-якого як завгодно малого числа $\varepsilon > 0$ виконується нерівність</td><td>Теорема Пуассона. Якщо проведено n незалежних випробувань та ймовірність появи події A в i-му випробуванні дорівнює $p_i (i = \overline{1,n})$, то при збільшенні n частота $\frac{k}{n}$ події A</td></tr>
</table>

$P\left\{\left\|\frac{k}{n}-p\right\| \leq \varepsilon\right\}=1$, яка при $n\to\infty$ переходить у граничну рівність $$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left\|\frac{k}{n}-p\right\| \leq \varepsilon\right\}=1.$$	збігається за ймовірністю до середнього арифметичного ймовріностей p_i, тобто $$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left\|\frac{k}{n}-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} p_i\right\| \leq \varepsilon\right\}=1,$$ де ε – будь-яке додатнє число.
Центральна гранична теорема (ЦГТ): розподіл випадкової величини, яка формується як результат дії багатьох незалежних випадкових факторів, кожний з яких має на неї незначний вплив, мало відрізняється від нормального закону.	
Теорема Ляпунова. Нехай $X_n, n \geq 1$ – послідовність незалежних випадкових величин зі скінченними математичними сподіваннями і дисперсіями. Якщо виконується умова $$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{i=1}^{n} M\|X_i-MX_i\|^3}{\left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n} DX_i}\right)^3}=0,$$ то для будь-якого дійсного числа x для послідовності випадкових вепличин $Y_n=\left(\sum_{i=1}^{n} X_i-\sum_{i=1}^{n} MX_i\right)/\sqrt{\sum_{i=1}^{n} DX_i}$ виконується гранична рівність $$\lim_{n\to\infty} F_{Y_n}(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}dt.$$	***Наслідок з ЦГТ (теорема Ліндеберга-Леві).*** Нехай $X_n, n \geq 1$ – послідовність незалежних випадкових величин зі скінченними математичними сподіваннями $MX_i=a$ і дисперсіями $DX_i=\sigma^2$. Тоді для будь-якого дійсного числа x виконується гранична рівність $$\lim_{n\to\infty} P\left\{\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i-na}{\sigma\sqrt{n}}<x\right\} =\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}dt.$$

РОЗДІЛ 5. ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

5.1. Варіанти індивідуальних завдань до розділу «Випадкові події»

Завдання 1. Знайти ймовірність проходження електричного сигналу через систему паралельно і послідовно сполучених вузлів $A_1, A_2, \ldots, A_5$, утворенихза відповідними схемами, якщо ймовірність безвідовної роботи вузлів відповідно дорівнює $P(A_1) = p_1, P(A_2) = p_2, \ldots, P(A_5) = p_5$.

№ варіанту	№ схеми	Ймовірність безвідмовної роботи вузлів				
		1	2	3	4	5
1	1	0,9	0,9	0,8	0,7	0,4
2	2	0,9	0,9	0,8	0,7	0,4
3	3	0,9	0,9	0,8	0,7	0,4
4	4	0,9	0,9	0,8	0,7	0,4
5	5	0,9	0,9	0,8	0,7	0,4
6	6	0,9	0,9	0,8	0,7	0,4
7	7	0,9	0,9	0,8	0,7	0,4
8	8	0,9	0,9	0,8	0,7	0,4
9	9	0,9	0,9	0,8	0,7	0,4
10	10	0,9	0,9	0,8	0,7	0,4
11	1	0,8	0,7	0,9	0,6	0,9
12	2	0,8	0,7	0,9	0,6	0,9
13	3	0,8	0,7	0,9	0,6	0,9
14	4	0,8	0,7	0,9	0,6	0,9
15	5	0,8	0,7	0,9	0,6	0,9
16	6	0,8	0,7	0,9	0,6	0,9
17	7	0,8	0,7	0,9	0,6	0,9
18	8	0,8	0,7	0,9	0,6	0,9
19	9	0,8	0,7	0,9	0,6	0,9
20	10	0,8	0,7	0,9	0,6	0,9

Схема 1

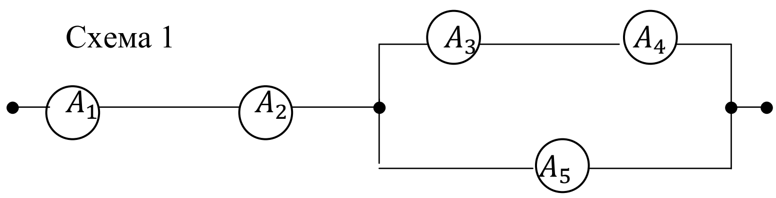


Схема 2

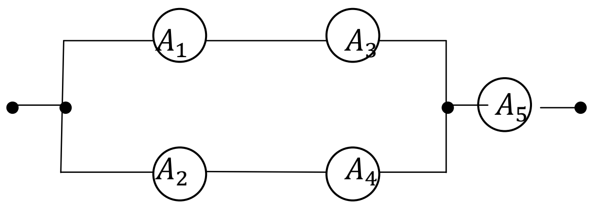


Схема 3

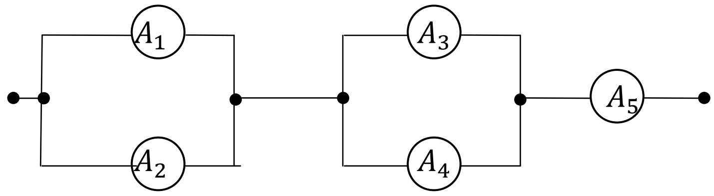


Схема 4

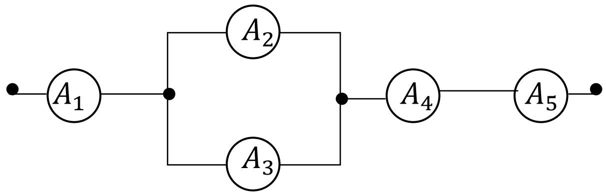


Схема 5

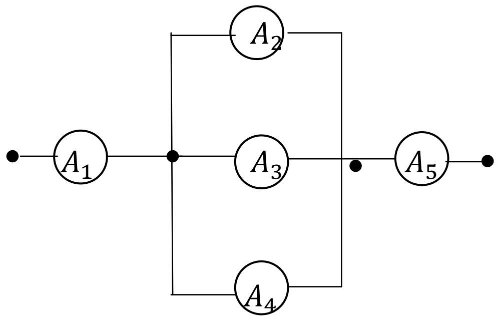


Схема 6

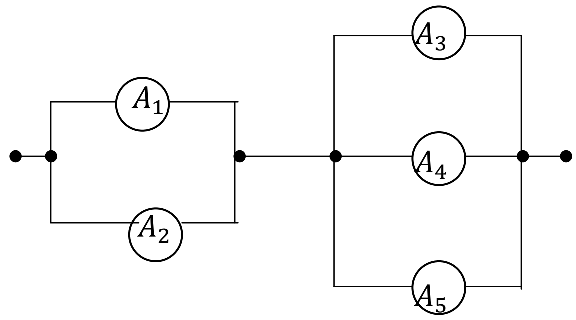


Схема 7

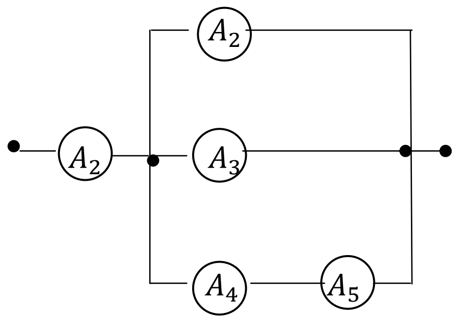


Схема 8

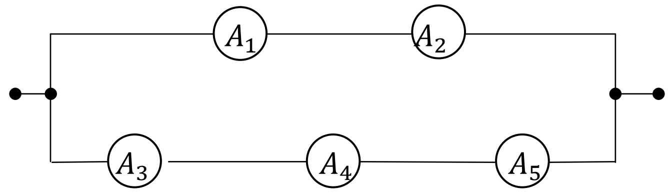


Схема 9

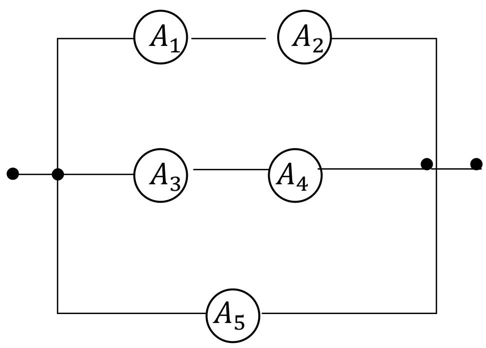


Схема 10

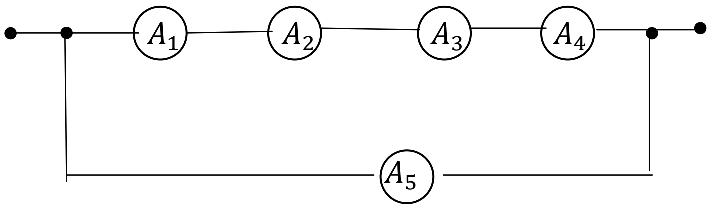


Схема 11

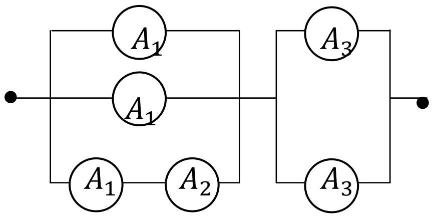


Схема 12

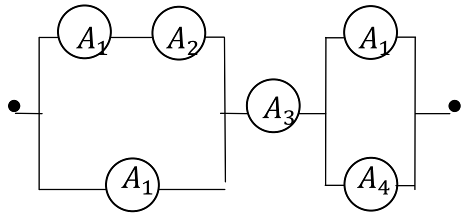


Схема 13

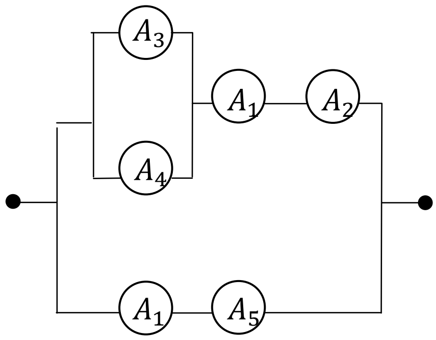


Схема 14

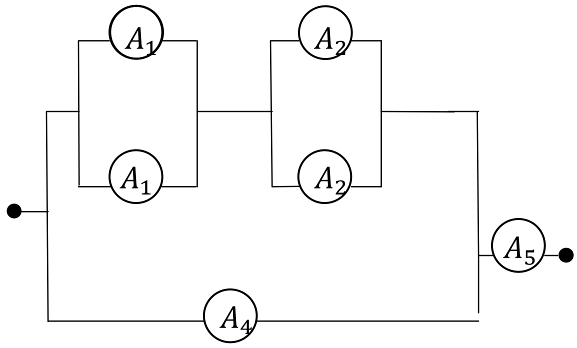


Схема 15

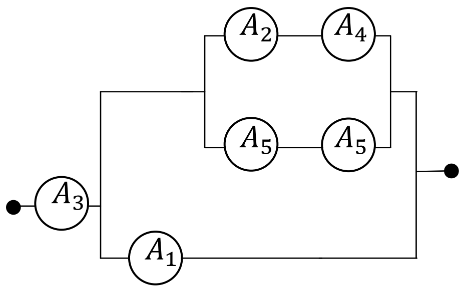


Схема 16

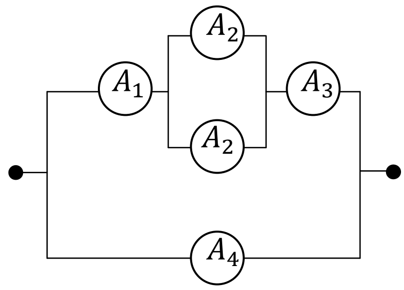


Схема 17

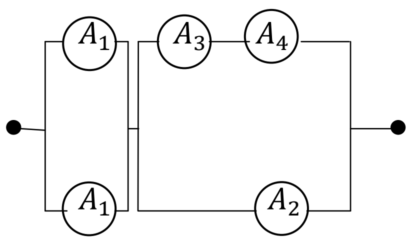


Схема 18

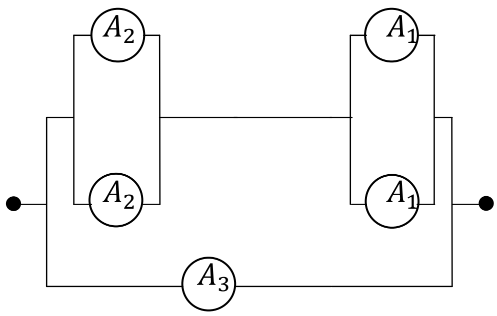


Схема 19

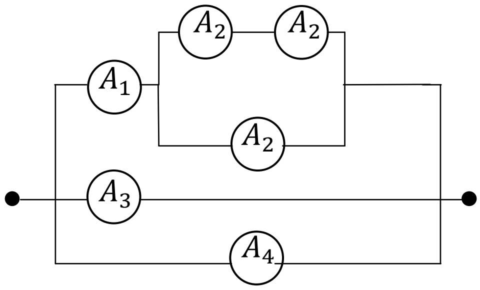
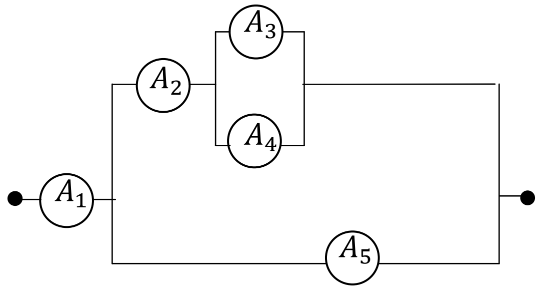


Схема 20



Завдання 2. В урні №1 лежить *m* чорних і *n* білих куль. В урні №2 лежить k чорних і *r* білих куль. З урни №1 навмання переклали 2 кулі. Потім з урни №2 навмання вийняли одну кулю. Визначити ймовірність того, що куля, вийнята з урни №2, виявиться білою (для непарних варіантів) або чорного (для парних варіантів).

№ варіанту	1 урна		2 урна		№ варіанту	1 урна		2 урна	
	m	*n*	*k*	*r*		*m*	*n*	*k*	*r*
1	2	8	4	4	11	8	4	6	2
2	3	7	4	4	12	9	1	6	2
3	4	6	4	4	13	8	2	6	2
4	5	5	5	3	14	7	3	7	1
5	6	4	5	4	15	6	4	7	1
6	7	3	5	3	16	5	5	7	1
7	6	4	4	3	17	8	2	6	4
8	7	3	4	5	18	7	3	6	4
9	8	2	4	5	19	6	4	8	5
10	9	1	6	4	20	5	5	8	4

Завдання 3. Іспит складали студенти трьох груп, причому в i-й групі навчаються m_i студентів, $i = 1,2,3$. Ймовірність скласти іспит на позитивну оцінку для студента i-й групи p_i. Навмання обраний студент іспит не склав. Визначити ймовірність того, що цей студент з i-ої групи?

№ варіанту	m_1	m_2	m_3	p_1	p_2	p_3	i
1	40	20	40	0,9	0,9	0,8	1
2	30	10	30	0,4	0,5	0,3	2
3	25	20	30	0,1	0,7	0,1	3
4	20	18	25	0,2	0,6	0,2	1
5	30	25	26	0,3	0,5	0,3	2
6	35	30	28	0,4	0,4	0,4	3

№ варіанту	m_1	m_2	m_3	p_1	p_2	p_3	i
7	45	26	30	0,3	0,3	0,5	1
8	20	24	20	0,4	0,2	0,6	2
9	35	29	30	0,5	0,1	0,7	3
10	22	32	40	0,6	0,65	0,8	1
11	32	36	34	0,8	0,55	0,9	2
12	38	38	26	0,9	0,45	0,25	3
13	34	40	34	0,3	0,35	0,35	1
14	28	30	26	0,2	0,25	0,45	2
15	26	20	22	0,4	0,15	0,55	3
16	40	20	40	0,9	0,9	0,8	1
17	34	22	24	0,8	0,1	0,4	2
18	36	24	38	0,7	0,2	0,1	3
19	38	26	25	0,6	0,3	0,2	1
20	40	28	26	0,5	0,4	0,3	2

Завдання 4. В урні міститься k чорних і h білих куль. Навмання виймають m куль. Знайти ймовірність того, що серед них міститься: а) p білих куль; б) меньше, ніж p білих куль; в) хоча би одну білу кулю.

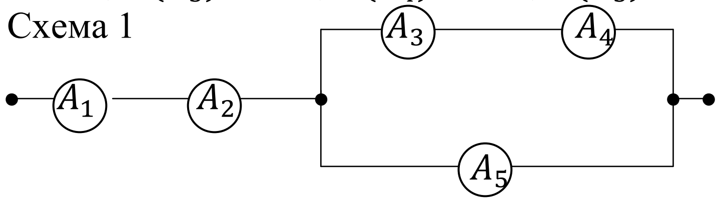
Вар-т	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
k	5	6	6	7	4	8	6	4	5	7
h	6	5	5	4	5	6	7	7	6	4
m	5	4	5	4	4	5	4	4	5	4
p	3	2	3	2	2	3	4	2	3	2

Вар-т	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
k	8	6	4	8	5	8	6	4	8	5
h	6	5	6	6	6	6	5	6	6	6
m	4	4	4	5	5	4	4	4	5	5
p	3	3	3	2	4	3	3	3	2	4

Виконання типового варіанту

Завдання 1. Знайти ймовірність проходження електричного сигналу через систему паралельно і послідовно сполучених вузлів, A_1, A_2, A_5, якщо ймовірність безвідомовної роботи вузлів відповідно дорівнює $P(A_1) = 0,8$, $P(A_2) = 0,7$, $P(A_3) = 0,6$, $P(A_4) = 0,9$, $P(A_5) = 0,5$.

Схема 1



Розв'язання. Позначимо подією В безвідмовну роботу паралельно сполучених ланок A_3, A_4, A_5. Щоб електричний сигнал пройшов через ці ланки, достатньо, щоб він пройшов або через A_3, A_4 або через A_5, або через всі разом. Події A_5 і A_3, A_4 сумісні, тому визначемо ймовірність суми сумісних подій:

$$P(B) = P(A_3 \cdot A_4 + A_5) = P(A_3) \cdot P(A_{4)} + P(A_5) - P(A_3 A_4 A_5) =$$
$$= 0{,}6 \cdot 0{,}9 + 0{,}5 - 0{,}6 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}5 = 0{,}77.$$

Позначимо подією С проходження електричного сигналу через послідоно сполучені ланки A_1, A_2, B. Подія С відбувається лише в тому випадку, якщо відбудуться полії A_1, A_2, B, тому

$$P(A_1 A_2 B) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(B) = 0{,}8 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}77 = 0{,}4312.$$

Завдання 2. В урні №1 лежить 6 чорних і 8 білих куль. В урні №2 лежить 5 чорних і 7 білих куль. З урни №1 до урни №2 навмання взяті 2 кулі. Потім з урни №2 навмання вийняли одну кулю. Визначити ймовірність того, що куля з урни №2, виявиться білою.

Роз'язання. Позначимо через А подію – куля, вийнята з урни №2, виявилася білою. З першої урни могли бути вийняті 2 білі кулі (подія B_1), 2 чорні кулі (подія B_2), 1 чорну і 1 білу кулі (подія B_3). Тоді за класичним означенням ймовірності маємо:

$$P(B_1) = \frac{C_8^2}{C_{14}^2} = \frac{28}{91};$$

$$P(B_2) = \frac{C_6^2}{C_{14}^2} = \frac{15}{91};\ P(B_3) = \frac{C_6^1 * C_8^1}{C_{14}^2} = \frac{48}{91};$$

Умовна ймовірність того, що з другої урни дістали білу кулю, за умови, що відбулася подія B_1, дорівнює (у другій урні стало 5 чорних і 9 білих куль) $P(A|B_1) = \frac{9}{14}$; умовна ймовірність того, що з другої урни дістали білу кулю, за умови, що відбулася подія B_2, дорівнює (у другій урні стало 7 чорних і 7 білих куль) $P(A|B_2) = \frac{7}{14}$; умовна ймовірність того, що з другої урни дістали білу кулю, за умови, що відбулася подія B_3, дорівнює (у другій урні стало 6 чорнихі 8 білих куль) $P(A|B_3) = \frac{8}{14}$.

Шукана ймовірність того, що куля, вийнята з другої урни виявиться білою, за формулою повної ймовірностей дорівнює

$$P(A) = P(B_1) \cdot P(A|B_1) + P(B_2) \cdot P(A|B_2) + P(B_3) \cdot P(A|B_3) =$$
$$= \frac{28}{91} \cdot \frac{9}{14} + \frac{15}{91} \cdot \frac{7}{14} + \frac{48}{91} \cdot \frac{8}{14} = \frac{741}{1274}.$$

Завдання 3. Іспит складали студенти трьох груп, причому в i-й групі навчаються m_i студентів, $i = 1,2,3$. Ймовірність скласти іспит на позитивну оцінку для студентів i-й групи p_i. Навмання обраний студент іспит не склав. Визначити ймовірність того, що цей студент з 2-ої групи?

$$m_1 = 20;\ m_2 = 30;\ m_3 = 26;\ p_1 = 0{,}3;\ p_2 = 0{,}6;\ p_3 = 0{,}4.$$

Розв'язання. Позначимо через A подію – навмання обраний студент іспит не склав.

Зробимо наступні припущення:

1) Навмання обраний студент з першої групи (гіпотеза B_1) ;
2) Навмання обраний студент з другої групи (гіпотеза B_2) ;
3) Навмання обраний студент з третьої групи (гіпотеза B_3) .

Шукану ймовірність того, що навмання обраний студент з другої групи, знайдемо за формулою Байєса:

$$P(B_2|A) = \frac{P(B_2) \cdot P(A|B_2)}{P(B_1) \cdot P(A|B_1) + P(B_2) \cdot P(A|B_2) + P(B_3) \cdot P(A|B_3)}.$$

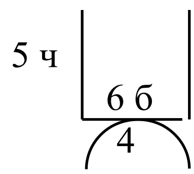
$$P(B_1) = \frac{20}{76} = 0{,}26;\ P(B_2) = \frac{30}{76} = 0{,}4;\ P(B_3) = \frac{26}{76} = 0{,}34,$$
$$P(A|B_1) = 0{,}7;\ P(A|B_2) = 0{,}4;\ P(A|B_3) = 0{,}6$$

Шукана ймовірність

$$P(B_2|A) = \frac{0{,}4 \cdot 0{,}7}{0{,}26 \cdot 0{,}7 + 0{,}4 \cdot 0{,}4 + 0{,}34 \cdot 0{,}6} = 0{,}51.$$

Завдання 4. В урні 5 чорних та 6 білих куль. Навмання виймають 4 кулі. Знайти ймовірність того, що серед них міститься: а) 2 білі кулі; б) меньше ніж 2 білі кулі; в) хоча би одну білу кулю.

Розв'язання. Випадковий експеримент полягає у випадковому виборі чотирьох куль. Елементарними подіями будуть всеможливі комбінації по 4 із 11 куль. Їх число дорівнює



$$n = C_{11}^4 = \frac{11!}{4!\,7!} = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 330.$$

а) Нехай подія A_1 – серед вийнятих куль 2 білі. Тоді, серед вийнятих куль 2 білі та 2 чорні. Використовуючи правило добутку, отримаємо

$$m = C_5^2 C_6^2 = \frac{5!}{2! \cdot 3!} \cdot \frac{6!}{2! \cdot 4!} = \frac{5 \cdot 4}{2} \cdot \frac{6 \cdot 5}{2} = 10 \cdot 15 = 150,$$

$$P(A_1) = \frac{m}{n} = \frac{150}{330} = \frac{5}{11}.$$

б) Нехай подія A_2 – серед вийнятих куль меньше ніж 2 білі кулі. Ця подія складається із двох несумісних подій: B_1 – серед вийнятих куль тільки одна біла та 3 чорні кулі, B_2 – серед вийнятих куль немає жодної білої, всі 4 кулі чорні, тобто $A_2 = B_1 \cup B_2$.

Так як події B_1 и B_2 несумісні, то

$$P(A_2) = P(B_1) + P(B_2).$$

Знайдемо ймовірності подій B_1, B_2 та A_2. Маємо:

$$m_1 = C_6^1 C_5^3 = 6 \cdot \frac{5!}{2! \cdot 3!} = 6 \cdot \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} = 60;\ m_2 = C_5^4 = \frac{5!}{4! \cdot 1!} = 5;$$

$$P(B_1) = \frac{m_1}{n} = \frac{60}{330}, P(B_2) = \frac{m_2}{n} = \frac{5}{330};$$

$$P(A_1) = \frac{60}{330} + \frac{5}{330} = \frac{65}{330} = \frac{13}{66}.$$

в) Нехай подія A_3 – серед вийнятих куль хоча би одна біла. Так як подія A_3 визначається, як «хоча би одна куля», то простіше спочатку знайти ймовірність протилежної до A_3 події $P(\bar{A}_3)$, а потім за формулою $P(A_3) = 1 - P(\bar{A}_3)$ обчислити ймовірність шуканої події. Нехай подія $\bar{A}_3$ – серед вийнятих куль немає жодної білої кулі. Тоді

$$m = C_5^4 = 5,\ \ P(\bar{A}_3) = \frac{5}{330} = \frac{1}{66}, P(A_3) = 1 - \frac{1}{66} = \frac{65}{66}.$$

5.2. Варіанти індивідуальних завдань до розділу «Випадкові величини»

Завдання 1. У партії з n виробів m бракованих. Для контролю їх якості випадковим чином вибирають k вирбів. Вападкова величина X – число бракованих виробів. Знайти закон розподілу вказаної дискретної випадкової величини X і її функцію розподілу $F(x)$. Обчислити математичне сподівання MX, дисперсію DX і середнє квадратичне відхилення. Побудувати графік функції розподілу $F(x)$.

Варіант	n	m	k	Варіант	n	m	k
1	20	5	3	11	16	7	4
2	15	4	3	12	20	5	3
3	25	6	4	13	26	6	4
4	22	5	3	14	18	5	3

5	23	7	5	15	23	6	3
6	24	8	5	16	22	7	4
7	18	5	3	17	21	5	2
8	26	4	3	18	20	6	2
9	20	6	4	19	15	5	3
10	16	4	2	20	10	6	3

Завдання 2. Знайдіть невідомі значення у рядах розподілу дискретних випадкових величин.

1. Дискретну випадкову величину задано рядом розподілу

X	0	x_2	2	3
P	$0{,}15$	p_2	$0{,}45$	p_4

Знайдіть x_2, p_2, p_4, якщо відоме математичне сподівання $MX = 1{,}6$ і дисперсія $DC = 0{,}84$. Побудуйте функцію розподілу $F(x)$ випадкової величини X та знайдіть імовірність потрапляння даної випадкової величини в інтервал $(0{,}5;\ 2)$.

2. Дискретну випадкову величину задано рядом розподілу

X	-3	x_2	0	x_4
P	p_1	$0{,}1$	$0{,}1$	$0{,}3$

Знайдіть x_2, x_4, p_1, якщо $x_2 < x_4$ і відомі математичне сподівання $MX = -0{,}5$ і дисперсія $DX = 9{,}45$. Побудуйте функцію розподілу $F(x)$ випадкової величини X та знайдіть імовірність потрапляння даної випадкової величини в інтервал $(-3; 1)$.

3. Дискретну випадкову величину задано рядом розподілу

X	x_1	x_2	-1	1
P	0,1	0,3	p_3	0,2

Знайдіть x_1, x_2, p_3, якщо $x_1 < x_2$ і відомі математичне сподівання $MX = -1{,}2$ і середнє квадратичне відхилення $\sigma(X) = 1{,}4$. Побудуйте функцію розподілу $F(x)$ випадкової величини X та знайдіть імовірність потрапляння даної випадкової величини в інтервал $(-0{,}5;\ 1)$.

4. Дискретну випадкову величину задано рядом розподілу

X	1	x_2	4	5
P	0,2	p_2	p_3	0,2

Знайдіть x_2, p_2, p_3, якщо $p_2 < p_3$ і відомі математичне сподівання $MX = 3{,}4$ і дисперсія $DX = 2{,}04$. Побудуйте функцію розподілу $F(x)$ випадкової величини X та знайдіть імовірність потрапляння даної випадкової величини у проміжок $(0.5; 4]$.

5. Дискретну випадкову величину задано рядом розподіл

X	$-0{,}2$	$-0{,}1$	0,1	x_4
P	0,5	0,3	p_3	p_4

Знайдіть x_4, p_3, p_4, якщо відомі математичне сподівання $MX = -0.09$ і дисперсія $DX = 0{,}0249$. Побудуйте функцію розподілу $F(x)$ випадкової величини X та знайдіть імовірність потрапляння даної випадкової величини у проміжок $(-0.15;\ 0.1]$.

6. Дискретну випадкову величину задано рядом розподілу

X	x_1	$-0{,}1$	0,2	x_4
P	0,3	p_4	0,4	0,2

Знайдіть x_1, x_4, p_4, якщо $x_1 < x_4$ і відомі математичне сподівання $MX = 0{,}09$ і дисперсія $DX = 0{,}0529$. Побудуйте функцію розподілу $F(x)$ випадкової величини X та знайдіть імовірність потрапляння даної випадкової величини у проміжок $(-0{,}1;\ 0{,}4]$.

7. Дискретну випадкову величину задано рядом розподілу

X	x_1	$-0{,}5$	$-0{,}1$	0
P	p_1	0,3	0,2	p_4

Знайдіть x_1, p_1, p_4, якщо відомі математичне сподівання $MX = -0{,}57$ і середнє квадратичне відхилення $\sigma(X) = 0{,}39$. Побудуйте функцію розподілу $F(x)$ випадкової величини X та знайдіть імовірність потрапляння цієї величини у проміжок $[-0{,}6;\ -0{,}1]$.

8. Дискретну випадкову величину задано рядом розподілу

X	-5	x_2	3	4
P	p_1	0,3	p_3	0,2

Знайдіть x_2, p_1, p_3, якщо відомі математичне сподівання $MX = -0{,}3$ і середнє квадратичне відхилення $\sigma(X) = 3{,}9$. Побудуйте функцію розподілу $F(x)$ випадкової величини X та знайдіть імовірність потрапляння цієї величини у проміжок $(0;\ 3]$.

9. Дискретну випадкову величину задано рядом розподілу

X	$-3{,}2$	x_2	$0{,}4$	$4{,}9$
P	p_1	$0{,}25$	p_3	$0{,}3$

Знайдіть x_2, p_1, p_3, якщо відомі математичне сподівання $MX = 0.53$ і дисперсія $DX = 9{,}6501$. Побудуйте функцію розподілу $F(x)$ випадкової величини X та знайдіть імовірність потрапляння цієї величини у проміжок $[-1;\ 0{,}4]$.

10. Дискретну випадкову величину задано рядом розподілу

X	x_1	4	6	x_4
P	$0{,}2$	p_2	$0{,}4$	$0{,}2$

Знайдіть x_1, p_2, x_4, якщо $x_1 < x_4$ і відомі математичне сподівання $MX = 7{,}6$ і середнє квадратичне відхилення $\sigma(\mathrm{X}) = 4{,}8$. Побудуйте функцію розподілу $F(x)$ випадкової величини X та знайдіть імовірність потрапляння цієї величини у проміжок $(3;\ 6]$.

11. Дискретну випадкову величину задано рядом розподілу

X	x_1	0	x_3	3
P	p_1	$0{,}2$	$0{,}1$	$0{,}2$

Знайдіть x_1, p_1, x_3, якщо відомі математичне сподівання $MX = -0{,}3$ і дисперсія $DX = 3{,}81$. Побудуйте функцію розподілу $F(x)$ випадкової величини X та знайдіть імовірність потрапляння даної випадкової величини у проміжок $[1{,}5;\ 3]$.

12. Дискретну випадкову величину задано рядом розподілу

X	$0{,}5$	1	$1{,}7$	x_4
P	$0{,}1$	$0{,}2$	p_3	p_4

Знайдіть x_4, p_3, p_4, якщо відомі математичне сподівання $MX = 1{,}56$ і дисперсія $DX = 0{,}2584$. Побудуйте функцію розподілу $F(x)$ величини X та знайдіть імовірність потрапляння цієї величини у проміжок $(1{,}2;\ 1.7]$.

13. Дискретну випадкову величину задано рядом розподілу

X	0	x_2	2	3
P	$0{,}15$	p_2	$0{,}45$	p_4

Знайдіть x_2, p_2, p_4, якщо відомі математичне сподівання $MX = 1{,}6$ і дисперсія $DX = 0{,}84$. Побудуйте функцію розподілу $F(x)$ випадкової величини

X та знайдіть імовірність потрапляння даної випадкової величини у проміжок $(1{,}5;\ 3]$.

14. Дискретну випадкову величину задано рядом розподілу

X	-3	x_2	0	x_4
P	p_1	$0{,}1$	$0{,}1$	$0{,}3$

Знайдіть x_2, x_4, p_1, якщо $x_2 < x_4$ і відомі математичне сподівання $MX = -0{,}5$ і дисперсія $DX = 9{,}45$. Побудуйте функцію розподілу $F(x)$ випадкової величини X та знайдіть імовірність потрапляння даної випадкової величини у проміжок $[-3;\ 1)$.

15. Дискретну випадкову величину задано рядом розподілу

X	x_1	x_2	$0{,}5$	2
P	$0{,}2$	$0{,}3$	p_3	$0{,}1$

Знайдіть x_1, x_2, p_3, якщо $x_1 < x_2$ і відомі математичне сподівання $MX = 0{,}05$ і дисперсія $DX = 0{,}7725$. Побудуйте функцію розподілу $F(x)$ величини X та знайдіть імовірність потрапляння цієї випадкової величини в інтервал $(1{,}5; 2)$.

16. Дискретну випадкову величину задано рядом розподілу

X	1	2	x_3	x_4
P	p_1	$0{,}2$	$0{,}3$	$0{,}1$

Знайдіть x_3, x_4, p_1, якщо $x_3 < x_4$ і відомі математичне сподівання $MX = 2{,}6$ і дисперсія $DX = 2{,}84$. Побудуйте функцію розподілу $F(x)$ випадкової величини X та знайдіть імовірність потрапляння цієї величини у проміжок $[1; 2{,}5)$.

17. Дискретну випадкову величину задано рядом розподілу

X	x_1	-1	x_3	2
P	$0{,}1$	p_2	$0{,}4$	$0{,}3$

Знайдіть x_1, x_3, p_2, якщо $x_1 < x_3$ і відомі математичне сподівання $MX = 0{,}2$ і дисперсія $DX = 1{,}76$. Побудуйте функцію розподілу $F(x)$ величини X та знайдіть імовірність потрапляння цієї величини у проміжок $(1;\ 2]$.

18. Дискретну випадкову величину задано рядом розподілу

X	x_1	1	3	x_4
P	$0{,}2$	$0{,}4$	p_3	$0{,}3$

Знайдіть x_1, x_4, p_3, якщо $x_1 < x_4$ і відомі математичне сподівання $MX = 2$ і дисперсія $DX = 5$. Побудуйте функцію розподілу $F(x)$ випадкової величини X та знайдіть імовірність потрапляння цієї величини у проміжок $(0{,}5;\ 3]$.

19. Дискретну випадкову величину задано рядом розподілу

X	1	x_2	1,5	x_4
P	p_1	0,1	0,4	0,2

Знайдіть x_2, x_4, p_1, якщо $x_2 < x_4$ і відомі математичне сподівання $MX = 1{,}27$ і дисперсія $DX = 0{,}3961$. Побудуйте функцію розподілу $F(x)$ величини X та знайдіть імовірність потрапляння цієї величини у проміжок $[1{:}\, 1{,}7)$.

20. Дискретну випадкову величину задано рядом розподілу

X	0	x_2	2	x_4
P	0,15	0,25	p_3	0,15

Знайдіть x_2, x_4, p_3, якщо $x_2 < x_4$ і відомі математичне сподівання $MX = 1{,}6$ і дисперсія $DX = 0{,}84$. Побудуйте функцію розподілу $F(x)$ випадкової величини X та знайдіть імовірність потрапляння цієї величини у проміжок $(0{,}2;\ 2]$.

Завдання 3. Неперервну випадкову величину X задано функцією розподілу $F(x)$ (щільністю йомовірності $f(x)$). Необхідно: 1) знайти параметр A; 2) знайти щільність йоморності $f(x)$ (функцію розподілу $F(x)$); 3) побудуйте графіки функцій $F(x)$, $f(x)$; 4) знайти числові характеристики $MX, DX, \sigma(X)$; 5) обчислити імовірність того, що випадкова величина X у результаті випробування набуде можливого значення із заданого інтервалу $(\alpha; \beta)$. Порядковий номер відповідає номеру варіанта.

1. $F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 1, \\ A\ln x, & 1 < x \le e, \\ 1, & x > e. \end{cases}$ $\qquad \left(\frac{e}{3}; \frac{3}{2}\right)$.

2. $F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 1, \\ A\left(1 - \frac{1}{x^2}\right), & 1 < x \le 2, \\ 1, & x > 2. \end{cases}$ $\qquad (1{,}2; 1{,}7)$.

3. $F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 1, \\ A\sin x, & 0 < x \le \frac{\pi}{2}, \\ 1, & x > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$ $\qquad \left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{3}\right)$.

4. $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 1,\\ A(x^2+x-2), & 1<x\le 2,\\ 1, & x>2.\end{cases}$ $(1{,}5; 1{,}8)$.

5. $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ A\sin^2 x, & 0<x\le \frac{\pi}{3},\\ 1, & x>\frac{\pi}{3}.\end{cases}$ $\left(\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{4}\right)$.

6. $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ A(x-\sin x), & 0<x\le 2\pi,\\ 1, & x>2\pi.\end{cases}$ $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$.

7. $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ Ax\sqrt{x}, & 0<x\le 4,\\ 1, & x>4.\end{cases}$ $(1; 2{,}25)$.

8. $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ Acos x, & \frac{-\pi}{2}<x\le 0,\\ 1, & x>0\end{cases}$ $\left(-\frac{\pi}{3}; -\frac{\pi}{6}\right)$.

9. $f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ \frac{Ax}{1+x^2}, & 0<x\le 3,\\ 0, & x>3.\end{cases}$ $(0; 1)$.

10. $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ A\sqrt[5]{x^2}, & 0<x\le 1,\\ 1, & x>1\end{cases}$ $\left(\frac{1}{32}; 1\right)$.

11. $f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ A\sqrt{1-x^2}, & 0<x\le 1,\\ 0, & x>1.\end{cases}$ $\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

12. $f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ \frac{A}{1+x}, & 0<x\le e-1,\\ 1. & x>e-1\end{cases}$ $(0; 1)$.

13. $F(x)=\begin{cases}0, & x\le -1,\\ A\sqrt{x+1}, & -1<x\le 3,\\ 1. & x>3\end{cases}$ $(0; 2)$.

14. $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ A(-x^2+4x), & -2<x\le 2,\\ 1. & x>2\end{cases}$ $(0; 1)$.

15. $f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ Axe^{-x}, & 0<x<\infty\end{cases}$ $(0;1)$.

16. $f(x)=\begin{cases}0, & x\le -3,\\ \frac{A}{\sqrt{x+3}}, & -3<x\le 1,\\ 0, & x>1.\end{cases}$ $(-1;1)$.

17. $F(x)=\begin{cases}0, & x\le -\frac{\pi}{2},\\ A(\sin x+1), & -\frac{\pi}{2}<x\le \frac{\pi}{2},\\ 1, & x>\frac{\pi}{2}.\end{cases}$ $\left(-\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{3}\right)$.

18. $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ A(1-\cos x), & 0<x\le \pi,\\ 1, & x>\pi.\end{cases}$ $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$.

19. $f(x)=\begin{cases}0, & x\le -1,\\ A\ln(2+x), & -1<x\le 1,\\ 0, & x>1.\end{cases}$ $(0;2)$.

20. $f(x)=\begin{cases}0, & x\le \frac{3\pi}{4},\\ A\sin 2x, & \frac{3\pi}{4}<x\le \pi,\\ 0, & x>\frac{\pi}{2}.\end{cases}$ $\left(\frac{5\pi}{6};\pi\right)$.

Виконання типового варіанту

Завдання 1. У партії з $n=25$ виробів $m=6$ бракованих. Для контролю їх якості випадковим чином вибирають $k=4$ вирбів. Випадкова величина X – число бракованих виробів. Знайти закон розподілу вказаної дискретної випадкової величини X і її функцію розподілу $F(x)$. Обчислити математичне сподівання MX, дисперсію DX і середнє квадратичне відхилення. Побудувати графік функції розподілу $F(x)$.

Розв'язання. Випадкова величина $X-$ число баркованих виробів серед відбірних виробів має наступні можливості значення: $x_1=0; x_2=1; x_3=2; x_4=3; x_5=4$.

Ймовірність можливих значень знайдемо за формулою $P(x=r)=\frac{C_m^r\cdot C_{n-m}^{k-r}}{C_n^k}$. Тоді

$$P(x=0)=\frac{C_6^0\cdot C_{19}^4}{C_{25}^4}=\frac{1938}{6325}=0{,}306; P(x=1)=\frac{C_6^1\cdot C_{19}^3}{C_{25}^4}=\frac{2907}{6325}=0{,}459;$$

$$P(x=2)=\frac{C_6^2\cdot C_{19}^2}{C_{25}^4}=\frac{513}{2530}=0{,}204; P(x=3)=\frac{C_6^3\cdot C_{19}^1}{C_{25}^4}=\frac{38}{1265}=0{,}03;$$

$$P(x=4)=\frac{C_6^4\cdot C_{19}^0}{C_{25}^4}=\frac{3}{2530}=0{,}001.$$

Складемо шуканий закон розподілу:

X	0	1	3	4	5
P	0,306	0,459	0,204	0,03	0,001

Побудуємо функцію розподілу. Для різних значень x знайдемо $F(x) = P\{X<x\}$.

1) Якщо $x\le 0$, то $F(x)=P\{X<0\}=0$;
2) Якщо $0<x\le 1$, то $F(x)=P\{X<x\}=P\{X=0\}=0{,}306$
3) Якщо $1<x\le 2$,то $F(x)=P\{X=0\}+P\{X=1\}=0{,}306+0{,}459=0{,}765$;
4) Якщо $2<x\le 3$, то $F(x)=P\{X=0\}+P\{X=1\}+P\{X=2\}=0{,}306+0{,}459+0{,}204=0{,}969$;
5) Якщо $3<x\le 4$, то $F(x)=P\{X=0\}+P\{X=1\}+P\{X=2\}+P\{X=3\}=0{,}306+0{,}459+0{,}204+0{,}03=0{,}999$
6) Якщо $4<x$, то $F(x)=P\{X=0\}+P\{X=1\}+P\{X=2\}+P\{X=3\}+P\{X=4\}=0{,}306+0{,}459+0{,}204+0{,}03+0{,}001=1.$

Отже,

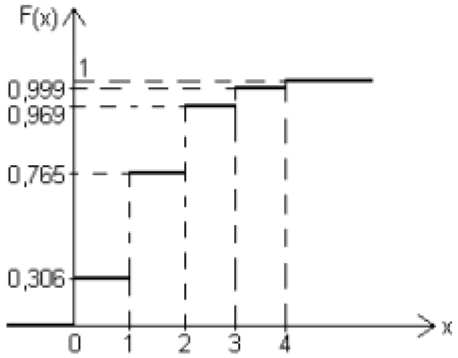


Рисунок 5.1. Графік функції розподілу

Обчислимо за розподілом випадкової величини X математичне сподівання, дисперсію, середнє квадратичне відхилення:

$$MX = \sum_{k=1}^{n} x_k p_k = 0 \cdot 0{,}306 + 1 \cdot 0{,}459 + 2 \cdot 0{,}204 +$$

$$+3 \cdot 0{,}03 + 4 \cdot 0{,}001 = 0{,}96,$$

$$DX = \sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{n}} x_k^2 p_k - (MX)^2 \ = 0^2 \cdot 0{,}306 + 1^2 \cdot 0{,}459 + 2^2 \cdot 0{,}204 +$$

$$+3^2 \cdot 0{,}03 + 4^2 \cdot 0{,}001 - (0.961)^2 = 0{,}961,$$

$$\sigma(X) = \sqrt{DX} = 0{,}798.$$

Завдання 2. Дискретну випадкову величину задано рядом розподілу

X	$-0{,}1$	x_2	$0{,}2$	$0{,}4$
P	$0{,}3$	$0{,}1$	p_3	p_4

Знайти x_2, p_3, p_4, якщо відомі математичне сподівання $MX = 0{,}13$ і дисперсія $DX = 0{,}0341$. Скласти функцію розподілу $F(\mathrm{x})$ випадкової величини X та знайти ймовірність потрапляння цієї випадкової величини у проміжок $(-0{,}05;\ 0{,}2]$.

Розв'язання. За властивістю ймовірності для ряду розподілу отримаємо:

$$0{,}3 \ + \ 0{,}1 \ + p_3 + \ p_4 = 1 \text{ або } p_4 = 0{,}6 — \ p_3.$$

За означенням математичного сподівання:

$$MX = -0{,}03 \ + \ 0{,}1x_2 \ + \ 0{,}2p_3 \ + \ 0{,}4(0{,}6 \ - \ p_3) = 0{,}13,$$

звідки дістаємо перше рівняння для знаходження x_2 і p_3

$$0{,}1x_2 - 0{,}2p_3 \ = -0{,}08.$$

За формулою для дисперсії $DX = MX^2 - (MX)^2$ отримаємо:

$$DX = 0{,}003 \ + \ 0{,}1x_2^2 \ + 0{,}04p_3 \ + 0{,}16(0{,}6 - p_3) - (0{,}13)^2 \ = 0{,}0341,$$

звідки дістаємо друге рівняння:

$$0{,}1x_2^2 - \ 0{,}12p_3 \ = -0{,}048.$$

Система рівнянь

$$\begin{cases} 0{,}1x_2 - 0{,}2p_3 = -0{,}08, \\ 0{,}1x_2^2 - 0{,}12p_3 = -0{,}048 \end{cases}$$

має розв'язки: $x_{2_1} = 0, p_{3_1} = 0{,}4$ і $x_{2_2} = 0{,}6, p_{3_2} = 0{,}7$ другий із яких незадовольняє умову задачі, оскільки не виконується обов'язкова вимога $\sum_{i=1}^{4} p_i = 1$. Тому остаточно $x_2 = 0$, $p_3 = 0{,}4$, $p_4 = 0{,}2$, і ряд розподілу набирає вигляду:

X	$-0{,}1$	0	0,2	0,4
P	0,3	0,1	0,4	0,2

Функцію розподілу $F(X)$ складемо згідно з означення:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le -0{,}1, \\ 0{,}3 & -0{,}1 < x \le 0, \\ 0{,}4, & 0 < x \le 0{,}2, \\ 0{,}8 & 0{,}2 < x \le 0{,}4, \\ 1, & x > 0{,}4. \end{cases}$$

Імовірність того, що X у результаті випробування набуде можливого значення з проміжку $(-0{,}05;\ 0{,}2]$ обчислимо безпосередньо з ряду розподілу:

$$P\{-0{,}05 < X \le 0{,}2\} = P\{X = 0\} + P\{X = 0{,}2\} = 0{,}5$$

або

$$P\{-0{,}05 < X \le 0{,}2\} = F(0{,}2 + 0) - F(-0{,}05 + 0) = 0{,}8 - 0{,}3 = 0{,}05.$$

Завдання 3. Неперервну випадкову величину X задано функцією розподілу:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 1, \\ A\sqrt[3]{x-1}, & 1 < x \le 9, \\ 1, & x > 9. \end{cases}$$

Необхідно: а) знайти параметр A; б) щільність імовірності $f(x)$; в) числові характеристики $MX, DX, \sigma(X)$; г) імовірність того, що випадкова величина X у результаті випробування набуде можливого значення з інтервалу (1;3).

Роз'язання. а) За властивістю 4 функція розподілу $F(9) = 2A = 1$, звідки $A = \frac{1}{2}$.

б) Щільність імовірності:

$$f(x) = F'(x) = \frac{1}{6\sqrt[3]{(x-1)}^2}, x \in (1; 9).$$

в) Математичне сподівання обчислюємо за формулою:

$$MX = \int_1^9 xf(x)dx = \frac{1}{6}\int_1^9 \frac{xdx}{\sqrt[3]{(x-1)}^2}.$$

Виконавши заміну $x - 1 = t^3$, перейдемо до змінної інтегрування $t \in (0; 2)$:

$$MX = \frac{1}{2}\int_0^2 (t^3 + 1)dt = 3.$$

Дисперсію обчислюємо за формулою $DX = MX^2 - (MX)^2$, знову застосовуючи при інтегруванні заміну змінної $x - 1 = t^3$:

$$DX = \int_1^9 \frac{x^2dx}{\sqrt[3]{(x-1)}^2} - 9 = \frac{1}{2}\int_0^2 (t^3 + 1)^2dt - 9 \approx 5.143,$$

$$\sigma(X) = \sqrt{DX} \approx 2{,}268.$$

г) Знайдемо імовірність того, що в результаті випробування X набуде можливого значення з інтервалу (0;1):

$$P\{1 < X < 3\} = F(3) - F(1) = \frac{1}{2}\sqrt[3]{2} \approx 0{,}63.$$

Завдання 3'. Неперервна величина X задана щільністю розподілу

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < -3; \\ Ax^2, & -3 \le x \le 0; \\ 0, & x > 0. \end{cases}$$

Необхідно: 1) визначити коефіцієнт; 2) Знайти функцію розподілу $F(x)$; 3)побудувати графіки $f(x)\,, F(x)$; 4) обчислити математичне сподівання MXі дисперсію DX; 5) Знайти ймовірність того, що випадвкова величина набуде значення з інтервалу $(-2; -1)$.

Розв'язання. а) Для визначення коефіцієнта A використовуємо настпуну властивіть щільності розподілу:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{-3} 0dx + A\int_{-3}^{0} x^2\,dx + \int_{0}^{\infty} 0dx = A\frac{x^2}{3}\Bigg|_{-3}^{0} = 9A.$$

Звідси, $9A = 1$. Отже, $A = \frac{1}{9}$.

б) Функція $F(x)$ розподілу знаходимо таким чином:

при $x < -3$: $F(x) = \int_{-\infty}^{x} 0dx = 0$;

при $-3 \le x \le 0$:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{3} 0dx + \int_{-3}^{x} \frac{1}{9}x^2dx = \frac{1}{9}\cdot\frac{x^3}{3}\Bigg|_{-3}^{3} = \frac{1}{27}(x^3+27) = 1+\frac{x^3}{27};$$

при $0 < x$:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{3} 0dx + \int_{-3}^{x} \frac{1}{9}x^2dx + \int_{0}^{x} 0dx = \frac{1}{9}\cdot\frac{x^3}{3}\Bigg|_{-3}^{3}.$$

Отже,

$$F(x) = \begin{cases} 0. & x < -3, \\ 1+\frac{x^3}{27}, & -3 \le X \le 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

в) Побудуємо графік $f(x)$ та $F(x)$.

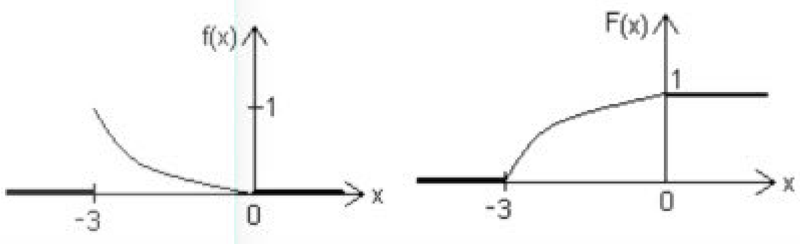


Рисунок 5.2. Графіки щільності розподілу та функції розподілу

г) Знайдемо математичне сподівання і дисперсію випадкової величини:

$$MX = \int_{-3}^{0} x\cdot\frac{1}{9}\cdot x^2dx = \frac{1}{9}\cdot\frac{x^4}{4}\Bigg|_{-3}^{0} = -\frac{9}{4},$$

$$DX = MX^2-(MX)^2 = \int_{-3}^{0} x^2\cdot\frac{1}{9}\cdot x^2dx - \frac{81}{16} = \frac{1}{9}\cdot\frac{x^5}{5}\Bigg|_{-3}^{0} - \frac{81}{16} = \frac{27}{80}.$$

д) Знайдемо ймовірність того, що випадкова величина набуде значення з інтервалу $(-2;-1)$

$$P(-2 < x < -1) = F(-1)-F(-2) = \left(1-\frac{1}{27}\right)-\left(1-\frac{8}{27}\right) = \frac{7}{27}.$$

5.3. Варіанти індивідуальних завдань до розділу «Системи випадкових величин»

Завдання 1. Систему дискретних випадкових величин $(X;Y)$ задано матрицею розподілу. Знайдіть: а) ряди розподілу складових X і $У$ б) математичні сподівання та середні квадратичні відхилення складових; в) кореляційний момент та коефіцієнт кореляції системи.

1.

y / X	**0**	**1**	**2**	**3**
0, 1	0,2	0,1	0,05	0
0, 2	0,05	0,1	0,1	0,05
0, 3	0	0	0,15	0,2

2.

y / X	**1**	**2**	**4**	**5**
1	0,1	0,05	0,05	0
2	0,05	0,2	0,1	0,15
3	0	0,05	0,05	0,2

3.

y / X	**−2**	**− 1**	**0**	**2**
3	0	0,05	0,15	0,1
4	0	0,1	0,1	0,2
5	0,2	0,05	0,05	0

4.

y / X	**0, 1**	**0, 2**	**0. 4**	**0, 5**
0	0,3	0,1	0,05	0
1	0,05	0,1	0,05	0,1
2	0	0,05	0,1	0,1

5.

y / X	$\mathbf{-1}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{2}$	$\mathbf{3}$
$\mathbf{0,2}$	0	0,05	0,1	0,2
$\mathbf{0,4}$	0,05	0,1	0,15	0
$\mathbf{0,6}$	0,25	0,05	0,05	0

6.

y / X	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0,2}$	$\mathbf{0,4}$	$\mathbf{0,5}$
$\mathbf{-2}$	0	0,05	0,1	0,15
$\mathbf{-1}$	0,05	0,15	0,15	0,05
$\mathbf{1}$	0,15	0,1	0,05	0

7.

y / X	$\mathbf{-3}$	$\mathbf{-2}$	$\mathbf{-1}$	$\mathbf{0}$
$\mathbf{-0,5}$	0,2	0,1	0,05	0
$-0,3$	0,05	0,15	0,15	0
$\mathbf{-0,1}$	0	0,05	0	0,25

8.

y / X	$\mathbf{-6}$	$\mathbf{-5}$	$\mathbf{-4}$	$\mathbf{-2}$
$\mathbf{0,3}$	0,05	0,2	0,1	0,2
$\mathbf{0,6}$	0,05	0,1	0,2	0
$\mathbf{0,9}$	0	0,1	0	0

9.

y / X	$\mathbf{0,6}$	$\mathbf{0,4}$	$\mathbf{0,2}$	$\mathbf{0,1}$
$\mathbf{-1}$	0	0,05	0,1	0,1
0	0,05	0,3	0,25	0
2	0,1	0,0	0,05	0

10.

У / X	$\mathbf{-0,3}$	$\mathbf{-0,2}$	$\mathbf{-0,1}$	**0**
$\mathbf{-3}$	0	0,05	0,05	0,3
$\mathbf{-2}$	0,05	0,1	0,25	0
$\mathbf{-1}$	0,1	0	0,1	0

11.

y / X	$\mathbf{-1}$	**0**	**1**	**2**
$\mathbf{-1}$	0,012	0,004	0,17	0,002
0	0,07	0,13	0,23	0,25
1	0,002	0,03	0,045	0,055

12.

y / X	**1**	**2**	**3**	**5**
0	0,15	0,1	0,2	0,05
2	0,1	0,09	0,15	0,11
4	0	0,03	0	0,02

13.

y / X	**0**	**4**	**6**	**8**
−9	0	0,01	0,01	0,21
−7	0,04	0,5	0	0,01
−5	0,22	0,17	0,13	0,15

14.

y / X	**−1**	**0**	**1**
−1	0,055	0,03	0,002
0	0,045	0,23	0,17
1	0,25	0,13	0,07
2	0,002	0,004	0,012

15.

y / X	**−2**	**1**	**0**	**2**
4	0,05	0,2	0	0,13
5	0	0,1	0,01	0,12
6	0,01	0,2	0,02	0,16

16.

y / X	−1	**0**	2
1	0	0,05	0
2	0,15	0,2	0,05
3	0,1	0.15	0.02
4	0	0.25	0,03

17.

y / X	**2**	**3**	**4**	**5**
−1	0,1	0,15	0,2	0,3
0	0	0,02	0,01	0
1	0,07	0,12	0	0,03

18.

y / X	**0**	**2**	**4**
1	0,15	0,08	0
2	0,1	0,09	0,11
3	0,2	0,15	0
4	0,05	0,03	0,04

19.

y / X	**0**	**2**	**3**	**4**
− 1	0,15	0,2	0,05	0,25
0	0,1	0,15	0	0
1	0,02	0,05	0	0,03

20.

y / X	**4**	**5**	**6**
−2	0,02	0	0,09
0	0,2	0,17	0,1
1	0,01	0,04	0
3	0,15	0,13	0,09

Завдання 2. Система неперервних випадкових величин (X; Y) задана щільністю розподілу. Знайдіть: а) коефіцієнт A; б) математичні сподівання та середні квадратичні відхилення складових X і Y; в) кореляційний момент та коефіцієнт кореляції системи.

1. $f(x,y) = \begin{cases} A(1-x), (x;y) \in D, \\ 0, \quad (x;y) \notin D, \end{cases}$

де область D обмежена лініями $x = 0, y = x, y = 1$.

2. $f(x,y) = \begin{cases} A\sqrt{x}y, (x;y) \in D, \\ 0, \quad (x;y) \notin D, \end{cases}$

де область D обмежена лініями $y = \sqrt{x}, y = x^2$.

3. $f(x,y) = \begin{cases} A(x^2+y), (x;y) \in D, \\ 0, \quad (x;y) \notin D, \end{cases}$

де область D обмежена лініями $x = 0, y = x^2, y = 4$.

4. $f(x,y) = \begin{cases} A(1-xy), (x;y) \in D, \\ 0, \quad (x;y) \notin D, \end{cases}$

де область D обмежена лініями $x = 0, y = x^2, y = 1$.

5. $f(x,y) = \begin{cases} A(x+y), (x;y) \in D, \\ 0, \quad (x;y) \notin D, \end{cases}$

де область D обмежена лініями $x = 0, x = 3, y = 1, y = 2$.

6. $f(x,y) = \begin{cases} Ax^2y, (x;y) \in D, \\ 0, \quad (x;y) \notin D, \end{cases}$

де область D обмежена лініями $x = 0, x = 1, y = 2, y = 3$.

7. $f(x,y) = \begin{cases} A(x+y)y, (x;y) \in D, \\ 0, \quad (x;y) \notin D, \end{cases}$

де область D обмежена лініями $x = 1, y = 1, x + y = 2$.

8. $f(x,y) = \begin{cases} A(y+x^2), (x;y) \in D, \\ 0, \quad (x;y) \notin D, \end{cases}$

де область D обмежена лініями $x = 2, y = x^2, y = 0$.

9. $f(x,y) = \begin{cases} A\sqrt{x}y, (x;y) \in D, \\ 0, \quad (x;y) \notin D, \end{cases}$

де область D обмежена лініями $x = -1, x = 1, y = 1, y = 3$.

10. $f(x,y)=\begin{cases}A(y+3), (x;y)\in D,\\ 0, \quad\quad\quad (x;y)\notin D,\end{cases}$

де область D обмежена лініями $x=1, y=x, y=0$.

11. $f(x,y)=\begin{cases}A(1-xy), (x;y)\in D,\\ 0, \quad\quad\quad (x;y)\notin D,\end{cases}$

де область D обмежена лініями $y=x, y=\sqrt{x}$.

12. $f(x,y)=\begin{cases}A(x+y), (x;y)\in D,\\ 0, \quad\quad\quad (x;y)\notin D,\end{cases}$

де область D обмежена лініями $x=1, y=0, y=x^2$.

13. $f(x,y)=\begin{cases}Ax^2y, (x;y)\in D,\\ 0, \quad\quad\quad (x;y)\notin D,\end{cases}$

де область D обмежена лініями $x=1, y=x, y=0$.

14. $f(x,y)=\begin{cases}Axy^2, (x;y)\in D,\\ 0, \quad\quad\quad (x;y)\notin D,\end{cases}$

де область D обмежена лініями $y=x, y=x^2$.

15. $f(x,y)=\begin{cases}A(x+y)y, (x;y)\in D,\\ 0, \quad\quad\quad (x;y)\notin D,\end{cases}$

де область D обмежена лініями $y=x, y=x^2$.

16. $f(x,y)=\begin{cases}A(y+x^2), (x;y)\in D,\\ 0, \quad\quad\quad (x;y)\notin D,\end{cases}$

де область D обмежена лініями $x=1, x=2, y=0, y=2$.

17. $f(x,y)=\begin{cases}A(1-x), (x;y)\in D,\\ 0, \quad\quad\quad (x;y)\notin D,\end{cases}$

де область D обмежена лініями $y=x, y=x^2$.

18. $f(x,y)=\begin{cases}A(x^2-y), (x;y)\in D,\\ 0, \quad\quad\quad (x;y)\notin D,\end{cases}$

де область D обмежена лініями $x=0, x=2, y=0, y=3$.

19. $f(x,y)=\begin{cases}A\sqrt{x}y, (x;y)\in D,\\ 0, \quad\quad\quad (x;y)\notin D,\end{cases}$

де область D обмежена лініями $x=1, y=0, y=\sqrt{x}$.

20. $f(x,y) = \begin{cases} A(x+y), (x;y) \in D, \\ 0, \qquad (x;y) \notin D, \end{cases}$

де область D обмежена лініями $x = 0, y = x, y = 1$.

Виконання типового варіанту

Завдання 1. Систему дискретних випадкових величин $(X;Y)$ задано матрицею розподілу. Знайдіть: а) ряди розподілу складових X і $У$ б) математичні сподівання та середні квадратичні відхилення складових; в) кореляційний момент та коефіцієнт кореляції системи.

X \ $У$	**1**	**2**	**3**	**4**
0	0	0	0	0,1
1	0,3	0,2	0,1	0
2	0,1	0,1	0,1	0

Розвязання. а) Підсумовуючи ймовірності по рядках матриці, дістаємо ряд розподілу складової X, а по стовпцях – ряд розподілу складової Y:

X	0	1	2
P	0,1	0,6	0,3

Y	1	2	3	4
P	0,4	0,3	0,2	0,1

б) За формулами знаходження математичного сподівання дискретної випадкової величини та отриманих вище рядів розподілів величин X та Y маємо:

$$MX = \sum_{i=1}^{3} x_i p_i = 0 + 0{,}6 + 0{,}6 = 1{,}2; MY = \sum_{i=1}^{4} y_i p_i = 0{,}4 + 0{,}6 + 0{,}6 + 0{,}4 = 2.$$

Аналогічно, знайдемо дисперсії випадкових величин X та Y:

$$DX = \sum_{i=1}^{3} x_i^2 p_i - (MX)^2 = 0 + 0{,}6 + 1{,}2 - (1{,}2)^2 = 0{,}36;$$

$$DY = \sum_{i=1}^{4} y_i^2 p_i - (MX)^2 = 0{,}4 + 1{,}2 + 1{,}8 + 1{,}6 - (2)^2 = 1,$$

і відповідно $\sigma(X) = \sqrt{DX} = 0{,}6; \sigma(Y) = \sqrt{DY} = 1$.

в) Обчислимо кореляційний момент:

$$K_{XY} = M(XY) - MX \cdot MY = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{4} x_i y_j \, p_{ij} - MX \cdot MY =$$

$$= 0 + 0 + 0 + 0 + 0{,}3 + 0{,}4 + 0{,}3 + 0 + 0{,}2 + 0{,}4 + 0{,}6 + 0 - 1{,}2 \cdot 2 =$$

$$= 2{,}2 - 1{,}2 \cdot 2 = -0{,}2.$$

Тоді коефіцієнт кореляції матиме вигляд:

$$r_{XY} = \frac{K_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{-0{,}2}{0{,}6 \cdot 1} = -\frac{1}{3}.$$

Завдання 2. Система неперервних випадкових величин (*X*; *Y*) задана щільністю розподілу. Знайдіть: а) коефіцієнт *A*; б) математичні сподівання та середні квадратичні відхилення складових *X* і *Y*; в) кореляційний момент та коефіцієнт кореляції системи.

$$f(x, y) = \begin{cases} A\sqrt{xy}, (x; y) \in D, \\ 0, \qquad (x; y) \notin D, \end{cases}$$

де область D обмежена лініями $x = 0, y = x, y = 1$.

Розв'язання. а) Область *D* – трикутник, поданий на рис. 5.3.

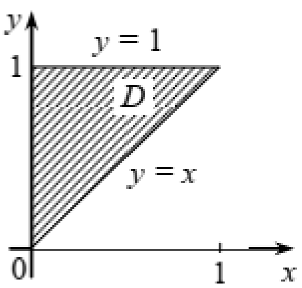


Рисунок 5.3. Графік щільності розподілу $f(x, y)$.

Параметр *A* знайдемо за властивістю щільності ймовірності

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx dy = 1 \Rightarrow A \int_{0}^{1} \sqrt{x} dx \int_{x}^{1} \sqrt{y} dy = 1.$$

Обчислюючи послідовно повторний інтеграл, одержимо:

$$A\int_0^1 \sqrt{x}\frac{y^{3/2}}{3/2}\bigg|_x^1 dx = \frac{2}{3}A\int_0^1 x^{1/2}\left(1-x^{3/2}\right)dx = \frac{2}{3}A\int_0^1 \left(x^{1/2}-x^2\right)dx =$$

$$= \frac{2}{3}A\int_0^1 \left(x^{1/2}-x^2\right)dx = \frac{2}{3}A\left(\frac{x^{3/2}}{3/2}-\frac{x^3}{3}\right)\bigg|_0^1 = \frac{2}{9}A = 1 \Rightarrow A = \frac{9}{2}.$$

б) Знайдемо математичні сподівання складових:

$$MX = \frac{9}{2}\int_0^1 x\sqrt{x}dx\int_x^1 \sqrt{y}dy = \frac{9}{2}\cdot\frac{2}{3}\int_0^1 x^{3/2}\left(1-x^{1/2}\right)dx =$$

$$= 3\int_0^1 \left(x^{3/2}-x^3\right)dx = 0{,}45; MY = \frac{9}{2}\int_0^1 \sqrt{x}dx\int_x^1 y\sqrt{y}dy =$$

$$= \frac{9}{2}\cdot\frac{2}{5}\int_0^1 x^{1/2}\left(1-x^{5/2}\right)dx = \frac{9}{5}\int_0^1 \left(x^{1/2}-x^3\right)dx = 0{,}75.$$

Тоді дисперсії складових дорівнюють:

$$DX = M^2X-(MX)^2 = \frac{9}{2}\int_0^1 x^2\sqrt{x}dx\int_x^1 \sqrt{y}dy-(0{,}45)^2 =$$

$$= \frac{9}{2}\cdot\frac{2}{3}\int_0^1 x^{5/2}\left(1-x^{3/2}\right)dx-(0{,}45)^2 = 3\int_0^1 \left(x^{5/2}-x^4\right)dx-(0{,}45)^2 =$$

$$= \frac{9}{35}-(0{,}45)^2 \approx 0{,}0546; DY = M^2Y-(MY)^2 = \frac{9}{2}\int_0^1 \sqrt{x}dx\int_x^1 y^2\sqrt{y}dy -$$

$$-(0{,}75)^2 = \frac{9}{2}\cdot\frac{2}{7}\int_0^1 x^{1/2}\left(1-x^{7/2}\right)dx-(0{,}75)^2 = \frac{9}{7}\int_0^1 \left(x^{1/2}-x^4\right)dx -$$

$$-(0{,}75)^2 = \frac{3}{7}-(0{,}75)^2 = 0{,}0375.$$

і відповідно $\sigma(X) = \sqrt{DX} \approx 0{,}234; \sigma(Y) = \sqrt{DY} \approx 0{,}194.$

в) Кореляційний момент матиме вигляд:

$$K_{XY} = M(XY) - MX \cdot MY = \frac{9}{2}\int_0^1 x^{3/2}dx \int_x^1 y^{3/2}dy - 0{,}45 \cdot 0{,}75 =$$

$$= \frac{9}{2} \cdot \frac{2}{5}\int_0^1 x^{3/2}\left(1 - x^{5/2}\right)dx - 0{,}3375 = \frac{9}{5}\int_0^1 \left(x^{3/2} - x^4\right)dx - 0{,}3375 =$$

$$= 0{,}36 - 0{,}3375 = 0{,}0025,$$

а коефіцієнт кореляції

$$r_{XY} = \frac{K_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{0{,}0225}{0{,}234 \cdot 0б194} = 0{,}496.$$

5.4. Варіанти індивідуальних завдань до розділу «Граничні теореми теорії ймовірностей»

Завдання 1. Оцініть імовірності, застосовуючи нерівності і теорему Чебишова або теорему Бернуллі.

1. Кількість сонячних днів протягом року для даної місцевості є випадковою величиною X із середнім значенням, що дорівнює 75. Оцініть імовірність того, що в наступному році в цій місцевості буде менш як 120 сонячних днів.

2. Імовірність своєчасного виконання рейсу авіакомпанією дорівнює 0,9. За нерівністю Чебишова оцініть імовірність того, що з 200 виконуваних рейсів кількість виконаних своєчасно міститиметься в межах від 150 до 175.

3. Пристрій складається з 15 елементів, що працюють незалежно один від одного. Імовірність відмови кожного елемента за час t дорівнює 0,05. За нерівністю Чебишова оцініть імовірність того, що абсолютна величина різниці між кількістю елементів, що відмовили за час t , і математичним сподіванням відмови буде меншою за 2.

4. Послідовно з’єднані 40 опорів по 50 Ом кожний із середнім квадратичним відхиленням $\pm$ 2 Ом. Оцініть імовірність того, що загальний опір міститиметься в межах від 1960 до 2010 Ом.

5. Імовірність сходження з конвеєра виробу найвищої якості дорівнює 0,75. За нерівністю Чебишова оцініть імовірність того, що серед 600 виробів, які зійшли з конвеєра, міститься від 340 до 375 виробів найвищої якості.

6. Імовірність виготовлення стандартної деталі робітником дорівнює 0,96. Контролю підлягають 500 деталей. За нерівністю Чебишова оцініть імовірність того, що кількість нестандартних деталей, виготовлених робітником, буде в межах від 5 до 20 деталей.

7. За даними вимірювань середня висота прольоту дальнього приводу H при заході літака на посадку становить 350 м. 1) Оцініть імовірність того, що при заході літака на посадку висота прольоту дальнього приводу не буде перевищувати 400 м; 2) оцініть ту саму ймовірність, якщо середнє квадратичне відхилення висоти прольоту дальнього приводу дорівнює 40 м.

8. Середня температура повітря в салоні літака на висоті 10 000 м дорівнює 20 °C, а середнє квадратичне відхилення дорівнює 2 °C. За нерівністю Чебишова оцініть імовірність того, що температура в салоні відхилиться від середньої за абсолютною величиною менше ніж на 4 °C.

9. Хлібозавод випікає хліб із середньою масою 1 кг і стандартним відхиленням $\pm 0{,}02$ кг. Оцініть імовірність того, що маса 1000 виготовлених паляниць міститься в межах від 995 до 1020 кг.

10. Довжина виробів є випадковою величиною із середнім значенням 90 см і дисперсією 0,0225. Оцініть імовірність того, що: а) довжина взятого на контроль виробу відхилиться за абсолютною величиною від середнього значення не більш ніж на 0,4 см; б) довжина виробу буде в межах від 90 до 94 см.

11. Середнє квадратичне відхилення похибки вимірювання курсу літака $\sigma = 2°$. Оцініть імовірність того, що похибка при даному вимірюванні курсу літака буде більшою за 5°, якщо математичне сподівання похибки вимірювання дорівнює нулю.

12. Середнє завантаження літака перед польотом становить 89 т. 1) Оцініть імовірність того, що завантаження перед польотом буде більше, ніж 92 т; 2) оцініть ту саму ймовірність, якщо середнє квадратичне відхилення завантаження дорівнює 5 т.

13. Середня швидкість літака при відриві його від злітної смуги дорівнює 240 км/год. 1) Оцініть імовірність того, що при випробуванні чергового літака швидкість відриву від смуги виявиться не меншою за 250 км/год; 2) оцініть ту саму ймовірність, якщо середнє квадратичне відхилення швидкості відриву дорівнює 5 км/год.

14. За даними вимірювань середнє значення відхилення осі маятника від вертикалі становить 0,05°. 1) Оцініть імовірність того, що відхилення осі маятника від вертикалі (у випадковий час) не перевищить 2,5°; 2) оцініть ту саму ймовірність, якщо середнє квадратичне відхилення осі маятника дорівнює 1,6°.

15. Імовірність проростання насіння даної рослини дорівнює 0,96. За нерівністю Чебишова оцініть імовірність того, що з 900 висаджених насінин кількість тих, що проросли, міститься в межах від 790 до 830.

16. Середня кількість рейсів, виконуваних авіакомпанією протягом місяця, дорівнює 160. За нерівністю Чебишова оцініть імовірність того, що в наступному місяці кількість рейсів перевищить 200.

17. Виробництво дає 1 % браку. Оцініть імовірність того, що серед перевірених 1100 виробів бракованих буде не більш як 20.

18. Імовірність того, що пасажир при посадці в літак скористається так званим «зеленим» коридором, дорівнює 0,7. За нерівністю Чебишова оцініть імовірність того, що серед 600 пасажирів, які мають пройти контроль, «зеленим» коридором скористаються від 350 до 410 пасажирів.

19. Пристрій складається з десяти елементів, що працюють незалежно один від одного. Імовірність відказу кожного елемента протягом доби дорівнює 0,05. Оцініть імовірність того, що різниця між кількістю елементів, які відкажуть наступної доби, і середньою кількістю відказів за добу буде меншою від 2.

20. Відсоток зайнятості місць на рейсах авіакомпанії – випадкова величина із середнім значенням 88 % і дисперсією 1 %. За нерівністю Чебишова оцініть імовірність того, що цей відсоток на випадково взятому рейсі авіакомпанії міститиметься в межах від 84 до 88.

Виконання типового варіанту

Завдання 1. Річна виручка авіакомпанії від перевезень пасажирів – випадкова величина з середнім значенням 200 млн грн і стандартним (середнім квадратичним) відхиленням 25 млн грн. Знайти: 1) оцінку ймовірності того, що в наступному році авіакомпанія матиме виручку, не меншу за 250 млн грн; 2) оцінку ймовірності того, що виручка міститиметься в межах від 150 до 250 млн грн.

Розв’язання. 1) За умовою $\boldsymbol{MX=200}$, $\boldsymbol{\varepsilon}=250$, тому за першою нерівністю Чебишова $P\{X>\varepsilon\}\le\frac{MX}{\varepsilon}$, отримаємо:

$$\boldsymbol{P}\{\boldsymbol{X}>250\}\le\frac{\mathbf{200}}{\mathbf{250}}=\mathbf{0,8}.$$

2) За умовою задачі $\boldsymbol{\sigma_X = 25}$ тому $\boldsymbol{DX = 625}$. Події $\{\mathbf{150} < X < 250\}$, $\{-\mathbf{50} < \boldsymbol{X} - \mathbf{250} < 50\}$, $\{\boldsymbol{X} - \mathbf{250}\mid < 50\}$ – рівносильні, тому за другою нерівністю Чебишова $P\{|X - MX| < \varepsilon\} \geq \frac{DX}{\varepsilon^2}$, отримаємо:

$$\boldsymbol{P}\{\mathbf{150} < X < 250\} = P\{|X - 250| < 50\} \geq \mathbf{1} - \frac{625}{2500} = 0{,}75.$$

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Барковський В. В., Барковський Н. В., Лопатін О. К. Математика для економістів: теорія ймовірності та математична статистика. – К.: НАУ, 1999. – 447 с.
2. Вища математика: Модульна технологія навчання : У 4 ч. : навч. посіб. У Ч. 4. Теорія ймовірностей і математична статистика / В. П. Денисюк, В.М. Бобков, Т. А. Погребецька, В. К. Репета. – 2-ге вид. доопрац. – К. : Вид-во Нац. авіац. ун-ту «НАУ-друк», 2009. – 256 с.
3. Глеч С. Г., Ледяєв С. Ф., Ольшанська І. В. Теорія ймовірностей та математична статистика: навч. посібник. – Севастополь: СевНТУ, 2011. – 176 с.
4. Гончаренко Я. В. Теорія ймовірностей і математична статистика. Практикум – К.: НПУ імені М.П.Драгоманова, 2011. – 145 с.
5. Жерновий Ю. В. Теорія ймовірностей та математична статистика: Тексти лекцій для студентів нематематичних спеціальностей. – Львів, 2008. – 101 с.
6. Зайцев Є. П. Теорія ймовірності і математична статистика. Базовий курс з індивідуальними завданнями і розв’язком типових варіантів: навч. посібн. – К. : Алерта, 2013. –440 с.
7. Практикум з теорії ймовірностей та математичної статистики / за ред. Р. К. Чорнея. – К. : МАУП, 2003. – 328 с.

ДОДАТКИ

Додаток 1. Таблиця значень функції нормального розподілу Гаусса−Лапласа $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}}$.

Цілі і десяті частини	Соті частини x									
x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	0,3989	0,3989	0,3988	0,3986	0,3984	0,3982	0,3980	0,3977	0,3973
0,1	0,3970	0,3965	0,3961	0,3956	0,3951	0,3945	0,3939	0,3932	0,3925	0,3918
0,2	0,3910	0,3902	0,3894	0,3885	0,3876	0,3867	0,3857	0,3847	0,3836	0,3825
0,3	0,3814	0,3802	0,3790	0,3778	0,3765	0,3752	0,3739	0,3725	0,3712	0,3697
0,4	0,3683	0,3668	0,3653	0,3637	0,3621	0,3605	0,3589	0,3572	0,3555	0,3538
0,5	0,3521	0,3503	0,3485	0,3467	0,3448	0,3429	0,3410	0,3391	0,3372	0,3352
0,6	0,3332	0,3312	0,3292	0,3271	0,3251	0,3230	0,3209	0,3187	0,3166	0,3144
0,7	0,3123	0,3101	0,3079	0,3056	0,3034	0,3011	0,2989	0,2966	0,2943	0,2920
0,8	0,2897	0,2874	0,2850	0,2827	0,2803	0,2780	0,2756	0,2732	0,2709	0,2685
0,9	0,2661	0,2637	0,2613	0,2589	0,2565	0,2541	0,2516	0,2492	0,2468	0,2444
1,0	0,2420	0,2396	0,2371	0,2347	0,2323	0,2299	0,2275	0,2251	0,2227	0,2203
1,1	0,2179	0,2155	0,2131	0,2107	0,2083	0,2059	0,2036	0,2012	0,1989	0,1965

Цілі і десяті частини	Соті частини x									
x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1,2	0,1942	0,1919	0,1895	0,1872	0,1849	0,1826	0,1804	0,1781	0,1758	0,1736
1,3	0,1714	0,1691	0,1669	0,1647	0,1626	0,1604	0,1582	0,1561	0,1539	0,1518
1,4	0,1497	0,1476	0,1456	0,1435	0,1415	0,1394	0,1374	0,1354	0,1334	0,1315
1,5	0,1295	0,1276	0,1257	0,1238	0,1219	0,1200	0,1182	0,1163	0,1145	0,1127
1,6	0,1109	0,1092	0,1074	0,1057	0,1040	0,1023	0,1006	0,0989	0,0973	0,0957
1,7	0,0940	0,0925	0,0909	0,0893	0,0878	0,0863	0,0848	0,0833	0,0818	0,0804
1,8	0,0790	0,0775	0,0761	0,0748	0,0734	0,0721	0,0707	0,0694	0,0681	0,0669
1,9	0,0656	0,0644	0,0632	0,0620	0,0608	0,0596	0,0584	0,0573	0,0562	0,0551
2,0	0,0540	0,0529	0,0519	0,0508	0,0498	0,0488	0,0478	0,0468	0,0459	0,0449
2,1	0,0440	0,0431	0,0422	0,0413	0,0404	0,0396	0,0387	0,0379	0,0371	0,0363
2,2	0,0355	0,0347	0,0339	0,0332	0,0325	0,0317	0,0310	0,0303	0,0297	0,0290
2,3	0,0283	0,0277	0,0270	0,0264	0,0258	0,0252	0,0246	0,0241	0,0235	0,0229
2,4	0,0224	0,0219	0,0213	0,0208	0,0203	0,0198	0,0194	0,0189	0,0184	0,0180
2,5	0,0175	0,0171	0,0167	0,0163	0,0158	0,0154	0,0151	0,0147	0,0143	0,0139

Цілі і десяті частини	Соті частини *x*									
x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2,6	0,0136	0,0132	0,0129	0,0126	0,0122	0,0119	0,0116	0,0113	0,0110	0,0107
2,7	0,0104	0,0101	0,0099	0,0096	0,0093	0,0091	0,0088	0,0086	0,0084	0,0081
2,8	0,0079	0,0077	0,0075	0,0073	0,0071	0,0069	0,0067	0,0065	0,0063	0,0061
2,9	0,0060	0,0058	0,0056	0,0055	0,0053	0,0051	0,0050	0,0048	0,0047	0,0046
3,0	0,0044	0,0043	0,0042	0,0040	0,0039	0,0038	0,0037	0,0036	0,0035	0,0034
3,1	0,0033	0,0032	0,0031	0,0030	0,0029	0,0028	0,0027	0,0026	0,0025	0,0025
3,2	0,0024	0,0023	0,0022	0,0022	0,0021	0,0020	0,0020	0,0019	0,0018	0,0018
3,3	0,0017	0,0017	0,0016	0,0016	0,0015	0,0015	0,0014	0,0014	0,0013	0,0013
3,4	0,0012	0,0012	0,0012	0,0011	0,0011	0,0010	0,0010	0,0010	0,0009	0,0009
3,5	0,0009	0,0008	0,0008	0,0008	0,0008	0,0007	0,0007	0,0007	0,0007	0,0006
3,6	0,0006	0,0006	0,0006	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0004
3,7	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003
3,8	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002
3,9	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0001	0,0001

Додаток 2. Таблиця значень функції Лапласа $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{\frac{-t^2}{2}} dt$.

Цілі і десяті частин и x	Соті частки x									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,0000	0,0040	0,0080	0,0120	0,0160	0,0199	0,0239	0,0279	0,0319	0,0359
0,1	0,0398	0,0438	0,0478	0,0517	0,0557	0,0596	0,0636	0,0675	0,0714	0,0753
0,2	0,0793	0,0832	0,0871	0,0910	0,0948	0,0987	0,1026	0,1064	0,1103	0,1141
0,3	0,1179	0,1217	0,1255	0,1293	0,1331	0,1368	0,1406	0,1443	0,1480	0,1517
0,4	0,1554	0,1591	0,1628	0,1664	0,1700	0,1736	0,1772	0,1808	0,1844	0,1879
0,5	0,1915	0,1950	0,1985	0,2019	0,2054	0,2088	0,2123	0,2157	0,2190	0,2224
0,6	0,2257	0,2291	0,2324	0,2357	0,2389	0,2422	0,2454	0,2486	0,2517	0,2549
0,7	0,2580	0,2611	0,2642	0,2673	0,2704	0,2734	0,2764	0,2794	0,2823	0,2852
0,8	0,2881	0,2910	0,2939	0,2967	0,2995	0,3023	0,3051	0,3078	0,3106	0,3133
0,9	0,3159	0,3186	0,3212	0,3238	0,3264	0,3289	0,3315	0,3340	0,3365	0,3389
1,0	0,3413	0,3438	0,3461	0,3485	0,3508	0,3531	0,3554	0,3577	0,3599	0,3621
1,1	0,3643	0,3665	0,3686	0,3708	0,3729	0,3749	0,3770	0,3790	0,3810	0,3830
1,2	0,3849	0,3869	0,3888	0,3907	0,3925	0,3944	0,3962	0,3980	0,3997	0,4015
1,3	0,4032	0,4049	0,4066	0,4082	0,4099	0,4115	0,4131	0,4147	0,4162	0,4177
1,4	0,4192	0,4207	0,4222	0,4236	0,4251	0,4265	0,4279	0,4292	0,4306	0,4319
1,5	0,4332	0,4345	0,4357	0,4370	0,4382	0,4394	0,4406	0,4418	0,4429	0,4441
1,6	0,4452	0,4463	0,4474	0,4484	0,4495	0,4505	0,4515	0,4525	0,4535	0,4545
1,7	0,4554	0,4564	0,4573	0,4582	0,4591	0,4599	0,4608	0,4616	0,4625	0,4633
1,8	0,4641	0,4649	0,4656	0,4664	0,4671	0,4678	0,4686	0,4693	0,4699	0,4706
1,9	0,4713	0,4719	0,4726	0,4732	0,4738	0,4744	0,4750	0,4756	0,4761	0,4767
2,0	0,4772	0,4778	0,4783	0,4788	0,4793	0,4798	0,4803	0,4808	0,4812	0,4817
2,1	0,4821	0,4826	0,4830	0,4834	0,4838	0,4842	0,4846	0,4850	0,4854	0,4857
2,2	0,4861	0,4864	0,4868	0,4871	0,4875	0,4878	0,4881	0,4884	0,4887	0,4890
2,3	0,4893	0,4896	0,4898	0,4901	0,4904	0,4906	0,4909	0,4911	0,4913	0,4916
2,4	0,4918	0,4920	0,4922	0,4925	0,4927	0,4929	0,4931	0,4932	0,4934	0,4936
2,5	0,4938	0,4940	0,4941	0,4943	0,4945	0,4946	0,4948	0,4949	0,4951	0,4952
2,6	0,4953	0,4955	0,4956	0,4957	0,4959	0,4960	0,4961	0,4962	0,4963	0,4964
2,7	0,4965	0,4966	0,4967	0,4968	0,4969	0,4970	0,4971	0,4972	0,4973	0,4974
2,8	0,4974	0,4975	0,4976	0,4977	0,4977	0,4978	0,4979	0,4979	0,4980	0,4981
2,9	0,4981	0,4982	0,4982	0,4983	0,4984	0,4984	0,4985	0,4985	0,4986	0,4986
3,0	0,4986	0,4987	0,4987	0,4988	0,4988	0,4989	0,4989	0,4989	0,4990	0,4990
3,1	0,4990	0,4991	0,4991	0,4991	0,4992	0,4992	0,4992	0,4992	0,4993	0,4993
3,2	0,4993	0,4993	0,4994	0,4994	0,4994	0,4994	0,4994	0,4995	0,4995	0,4995
3,3	0,4995	0,4995	0,4995	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4997
3,4	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4998
3,5	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998
3,6	0,4998	0,4998	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
3,7	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
3,8	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
3,9	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000

Відповідальний за випуск: завідувач кафедри теорії ймовірностей і математичного аналізу кандидат фіз.-мат. наук, доц. Слюсарчук П.В.

Автор: канд. фіз.-мат. наук, доц. Синявська О.О.

Рецензенти: докт. техн. наук, проф. Гече Ф.Е.,
канд. фіз-мат. наук, доц. Погоріляк О.О.

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ТА ВАРІАНТИ ТИПОВО-РОЗРАХУНКОВИХ РОБІТ **З ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ**

ДЛЯ СТУДЕНТІВ МАТЕМАТИЧНОГО ФАКУЛЬТЕТУ