МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Національний університет «Одеська юридична академія»
Кафедра кібербезпеки

Теорія ймовірностей та математична статистика

Методичні вказівки до практичних занятьдля
підготовки бакалаврів з галузі знань
12 «Інформаційні технології»

Одеса 2020

Автори:
Бакуніна О.В. – кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри кібербезпеки Національного університету «Одеська юридична академія»

Рекомендовано навчально-методичною радою Національного університету «Одеська юридична академія», протокол № 2 від 4 грудня 2020 р.

Рецензенти:

Задерейко О.В. – кандидат технічних наук, доцент кафедри Інформаційніх технологій Національного університету «Одеська юридична академія»

Глушков А.В. – академік, доктор фізико-математичних наук, професор, зав.кафедри вищої та прикладної математики Одеського Державного екологічного університету.

Мета та завдання даних методичних вказівок – надання студенту загальних рекомендацій для самостійної роботи над курсом та для виконання контрольних робіт під час вивчення дисципліни.

Знати - основні визначення і теореми теорії випадкових подій, теорії випадкових величин, їх основні характеристики, закон великих чисел, центральну граничну теорему, елементи теорії випадкових процесів, елементи математичної статистики, основні поняття про перевірку статистичних гіпотез і критерії згод.

Вміти використовувати результати самостійного пошуку, аналізу та синтезу інформації з різних джерел для ефективного рішення спеціалізованих задач професійної діяльності .

ЗМІСТ

Бакуніна О. В. Методичні вказівки до лекційних та практичних занять з теорії ймовірностей та математичної статистики / Бакуніна О. В., – Одеса, 2020. – 30 с.

ПЕРЕДМОВА

Дисципліна «Теорія ймовірностей та математична статистика» вивчається студентами академії за напрямом бакалаврської підготовки з галузі знань 12 «Кібербезпека» за спеціальністю 125 «Кібербезпека» на першом курсі навчання.

Дисципліна відноситься до однієї з важливих дисциплін фундаментального циклу, яка спрямована на вивчення основних положень,методів теорії випадкових події,теорії випадкових величин, основних понять і методів математичної статистики. Важливий аспект вивчення дисципліни пов’язаний із узагальненням можливостей практичного використання вивчених методів при вирішенні практичних задач у конкретній науково-практичній діяльності.

Мета вивчення дисципліни: забезпечити фундаментально засвоєння теоретичного курсу теорії імовірності та математичної статистики,сприяти формуванню навичок у застосуванні відомих методів в різних галузях,навиків творчого дослідження та математичного моделювання задач. Загальний обсяг навчального процесу в годинах,рівнянь знань та умінь при вивченні дисципліни визначаються освітньо-професійними програмами.

Завдання дисципліни «Теорія ймовірностей та математична статистика» навчити студентів:- правильно використовувати вивчені методи при вирішуванні задач;- правильно аналізувати результати математичних обчислень. Вивчення шуканої базується на засадах інтеграції теоретичних і практичних знань, отриманих студентами у загально-освітніх навчальних закладах. Обсяги вивчення окремих розділів і тем визначаються робочими програмами.

Після вивчення дисципліни студент має засвоїти базові знання та вміння;він повинен **Знати:**

- основні поняття і теореми теорії ймовірностей та математичної статистики;
- основні методи знаходження ймовірностей випадкових величин;
- основні закони розподілу випадкових величин;
- граничні теореми теорії ймовірностей;

- основні методи статистичного опису результатів спостереження. статистичних гіпотез і критерії згод;

Вміти:

– використовувати теоретичні знання та навички при аналізі випадкових подій,

- теоретико-ймовірностних розрахунках характеристик випадкових величин, функцій розподілу, при дослідженні випадкових процесів,
- практично застосувати методі кореляційного й регресійного аналізу, статистичних розрахунків, оцінок невідомих параметрів розподілу по вибірці,
- здійснювати вибори критерія та перевірці статистичних гіпотез.

Одним з найважливіших факторів засвоєння матеріалу є самостійна робота студентів (СРС).

1. МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ДО ВИВЧЕННЯ МАТЕРІАЛУ

Вивчення курсу «Теорія ймовірностей та математична статистика» потребує від студентів знання основ вищої математики в обсязі програми курсу математичного аналізу, відповідної спеціалізації: вступу до аналізу, теорії границь, диференціального та інтегрального числення функцій однієї змінної.

Вивчення теоритичного матеріалу обов'язково треба супроводжувати практичним розв'язанням задач за відповідною тематикою. Слід також приділити увагу тим прикладам, які надаються з розв'язанням у тексті матеріалу, що рекомендований до вивчення.

Тема 1. Випадкові явища.

Література:[2,п.1-4][3,гл.1-3].

Питання для самоперевірки

1. Сформулюйте аксіоми теорії ймовірності та наслідки з них.
2. Сформулюйте класичне визначення ймовірності. В чому є різниця між ймовірностю та відносною частотою?
3. Сформулюйте теореми додавання і множення. Наведіть формулу повної ймовірності, формулу Байєса.
4. Дайте визначення випадкової величини та її властивостей. Математичне чекання і дисперсія.
5. Даите характеристику для таких розподілів: нормальне, пуасонівське, біноміальне, рівномірне, показникове.

Тема 2. Випадкові величини.

Література;[2,п.5-7],[3,гл.4-7].

Питання для самоперевірки

1. Дайте визначення випадкової величини та її властивостей. Математичне чекання і дисперсія.
2. Дайте характеристику для таких розподілів: нормальне, пуасонівське, біноміальне, рівномірне, показникове.
3. Нерівність Чебишева та закон великих чисел для послідовностей незалежних випадкових величин. Теореми Бернуллі та Чебишева.
4. Центральна гранична теорема. Характеристичні функції, їх властивості.
5. Центральна гранична теорема для однаково розподілених доданків. Сформулюйте теорему Ляпунова.

Тема 3. Системи випадкових величин.

Література;[2,п.8,9],[3,гл.8].

Питання для самоперевірки

1. Дати означення Функції від випадкових величин.
2. Математичне чекання і дисперсія.
3. Коефіцієнт кореляції.

Тема 4. Елементи математичної статистики.

Література;[2,п.10-15],[3,гл.9-13].

Питання для самоперевірки

1. Що називається: статистичною залежністю; кореляційною залежністю; умовним середньої; рівнянням регресії; лінією регресії?
2. Яка кореляційна залежність називається лінійною?не лінійною?
3. Що називається кореляційною таблицею?
4. Як знаходиться рівняння прямої лінії регресії?
5. Що називається коефіцієнтом регресії?кореляції?
6. Як оцінити тісноту лінійної кореляційної залежності?
7. Якими властивостями володіє коефіцієнт кореляції?
8. Що називається кореляційним відношенням?
9. Якою властивістю володіє кореляційне відношення?
10. Як визначається криволінійна кореляція?
11. Що називається множинною кореляцією?
12. Що називається: генеральною сукупністю об’єктів; вибірковою; обсягом сукупності; частотою варіанти; відносною частотою варіанти? Якими властивостями володіє емпірична функція розподілу.

Тема 5. Імовірносні процеси.

Література;[2,п.16,17],[3,гл.14-15].

Питання для самоперевірки

1. Теорема Хінчіга
2. Ланцюжки Маркова
3. Обчислення граничних ймовірностей
4. Узагальнений пуасонівський процес
5. Простіший потік однорідних подій

6. Розплділи Стьюдента хіквадрат
7. Метод Монте-Карло
8. Проблеми збору та обробки статистичних даних
9. Критерій w^2 Мізеса
10. Визначення параметрів лінійної регресії методом найменших квадратів
11. Визначення параметрів нелінійних рівнянь регресії
12. Оцінка параметрів багатомірних лінійних функцій регресії

2. РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ТИПОВИХ ЗАВДАНЬ

Тема 1. Випадкові події.

Приклад №1. .Прилад містить 7 елементів, з яких три зношені. При включенні приладу випадковим чином включаються три елементи. Знайти ймовірність того, що при цьому виявляться включеними два незношені елементи.

Розв'язання
А – {серед трьох включених елементів виявляться два незношені елементи }.

$$p(A)=\frac{m}{n}.$$

$n=C_7^3=\frac{7!}{3!\times4!}=\frac{5\times6\times7}{1\times2\times3}=35.$
$m=C_4^2\times C_3^1=\frac{4!}{2!\times2!}\times\frac{3!}{1!\times2!}=\frac{2\times3\times1\times2\times3}{2}=18.$
$p(A)=\frac{18}{35}\approx 0{,}51.$

Приклад №2. Для сигналізації про аварію встановлено два незалежно працюючих сигналізатори. Ймовірність того, що при аварії спрацює перший сигналізатор дорівнює 0,95, ця ймовірність для другого сигналізатора дорівнює 0,9. Знайти ймовірність того, що при аварії спрацює: а) хоча б один сигналізатор; б) тільки один сигналізатор.

Розв'язання A_1 - {подія, що полягає в тому, що при аварії спрацюєперший сигналізатор}.
$P(A_1)=0{,}95.$
A_2 - {подія, що полягає в тому, що при аварії спрацює другий сигналізатор} $p(A_2)=0{,}9$.
а) B - {при аварії спрацює хоча б один сигналізатор}.

$$B = A_1 + A_2.$$

Події A_1 і та A_2 сумісні.

Тоді $p(B) = p\{A_1 + A_2) = p(A_1) + p(A_2) - p(A_1 \times A_2)$.
Події $A1$та A_2 незалежні, тому
$p(A_1A_2)=p(A_1) \times p(A_2)$.
Отже, $p(B) = p(A_1) + p(A_2) - p(A_x) \times p(A_2) =$
$= 0{,}95 + 0{,}9 - 0{,}95 \times 0{,}9 = 1{,}85 - 0.855 = 0{,}995.$
б) С - {при аварії спрацює тільки один сигналізатор}.

$\bar{A}_i$- {при аварії не спрацює i-ий сигналізатор}. $(i = 1, 2)$.

$$C=A_1\overline{A_2}+\overline{A_1}A_2$$

Доданки цієї суми є подіями несумісними, а множники є подіями незалежними.
Тоді $p(C)=p(A_1\overline{A_2})+p(\overline{A_1}A_2)=p(A_1)\times p(\overline{A_2})+p(A_1)\times p(A_2)$.
$p(A_1)=0{,}95,$ $p(A_1)=1-p(A_1)=1-0{,}95=0{,}05.$
$p(A_2)=0{,}9,$ $p(\overline{A_2})=1-p(A_2)=1-0{,}9=0{,}1.$
$P(C)=0{,}95\times 0{,}1+0{,}05\times 0{,}9=0{,}095+0{,}045=0{,}14.$

Приклад №3. Два верстати-автомати виготовляють однакові вироби, які попадають на загальний конвеєр. Продуктивність першого автомата в два раза біль ніж продуктивність другого. Перший верстат-автомат виготовляє 60 % виробів вищого гатунку, а другий - 84 %.
а) Знайти ймовірність того, що навмання взятий з конвеєра виріб виш ґатунку.
б) Навмання взятий з конвеєра виріб має вищий ґатунок.
Знайти ймовірність того, що він виготовлений на першому верстаті.

Розв'язання
A - {навмання взятий з конвеєра виріб має вищий гатунок}.
H_1- {навмання взятий з конвеєра виріб виготовлено на першому версті}.
H_2 - {навмання взятий з конвеєра виріб виготовлено на другому верста}.
а) Застосуємо формулу повної ймовірності

$p(A) = p(H_1)\times p(A/H_1) + p(H_2)\times p(A/H_2)$
$p(H_1) = \frac{2}{3},\ p(H_2) = \frac{1}{3}.$
$p(A/H_1) = \frac{60}{100} = 0{,}6,\ p(A/H_2) = \frac{84}{100} = 0{,}84.$
$p(A)=\frac{2}{3}\times 0{,}6+\frac{1}{3}\times 0{,}84=\frac{1}{3}\times(1{,}2+0{,}84)\approx 0{,}68.$
б) Застосуємо формулу Байєса
$p((H_1/A) = \frac{p(H_1)\times p(A/H_1)}{p(H_1)\times p(A/H_1)+p(H_2)\times p(A/H_2)} = \frac{\frac{2}{3}\times 0{,}6}{0{,}68} = \frac{0{,}4}{0{,}68} \approx 0{,}59.$

Приклад №4. Проводиться випробування 15 конденсаторів. Ймовірність того,що конденсатор не витримає випробування дорівнює 0,2. Знайти наймовірніше число конденсаторів,що витримають випробування.

Розв'язання. Позначимо ймовірність того,що конденсатор витримає випробування *p*,а ймовірність того,що конденсатор не витримає випробування *q*.
q=0,2, p=1-q=1-0,2=0,8.
Наймовірніше число успіхів у схемі Бернуллі знаходиться за формулою

$$n\,p-q\le k_0<n\,p+p.$$

За умовою n=15.
$15\times0{,}8-0{,}2\le k_0<15\times0{,}8=0{,}8$,
$11{,}8\le k_0<12{,}8$.
Отже,наймовірніше,що 12 конденсаторів із даних15 витримають випробування.

Тема 2. Випадкові величини.

Приклад №5. Пристрій складається з трьох незалежно працюючих елементів. Ймовірність відмови кожного елемента в одному досліді дорівнює 0,1. Скласти закон розподілу числа елементів, що відмовили в одному досліді.M[x],D[x],σ[x]-?

Розв'язання.
Розглядаємо випадкову величину *X* - число елементів, що відмовили в одному досліді.
X- дискретна випадкова величина. Вона може приймати такі значення:
$X_1=0, x_2=1, x_3=2, x_4=3$.
Ймовірності, з якими ці значення можуть прийматись випадковою величиною *X* можна знайти за формулою Бернуллі.
$p_1=p_3(0)=C_3^0\times p^0\times q^3, q=1-p,\ p=0{,}1,\ q=0{,}9.$
$p_1=0{,}9^3=0{,}729.$
$p_2=p_3(1)=C_3^1\times 0{,}1\times(0{,}9)^2=\frac{3!}{1!\times2!}\times0{,}1\times(0{,}9)^2=3\times0{,}1\times(0{,}9)^2=0{,}243.$
$p_3=p_3(2)=C_3^2\times(0{,}1)^2\times0{,}9=\frac{3!}{2!\times1!}\times(0{,}1)^2\times0{,}9=3\times(0{,}1)^2\times0{,}9=0{,}027.$
$p_4=p_4(3)=C_3^3\times(0{,}1)^3\times(0{,}9)^0=(0{,}1)^3=0{,}001.$
Випадкова величина X має біноміальний закон розподілу:

x_i	0	1	2	3
p_i	0,729	0,243	0,027	0,001

Контроль: 0,729+0,243+0,027+0,001=1.

Математичне сподівання x знаходиться за формулою: $\sum_{i=1}^{n} x_i p_i$

M[x]= $0 \times 0{,}729 + 1 \times 0{,}243 + 2 \times 0{,}027 + 3 \times 0{,}001 = 0{,}3$

Дисперсію дискретної випадкової величини x знайдемо за формулою:

D[x]=M[x^2] - M^2[x]

M[x^2]= $0^2 \times 0{,}729 + 1^2 \times 0{,}243 + 2^2 \times 0{,}027 + 3^2 \times 0{,}001 = 0{,}36$

M^2[x]= $0{,}3^2 = 0{,}09$

D[x]=0,36 – 0,09=0,27

Середнє квадратичне відхилення: $\sigma[x] = \sqrt{D[x]} = \sqrt{0{,}27} \approx 0{,}52$

Приклад №6. Неперервна випадкова величина X задана функцією розподілу ймовірностей:

$$F(x) = \begin{cases} 0; \ x < 0 \\ \frac{a}{2}x^2 + \frac{1}{3}x; 0 \le x \le 2 \\ 1 \ ; x > 2 \end{cases}$$

Знайти: a - ?, щільність розподілу f (x) - ?, M[x] - ?, D[x] - ?, σ[x] - ?, P(0< x < 1) - ?

$$f(x) = F(x) = \begin{cases} 0; x < 0 \\ ax + \frac{1}{3}; 0 \le x \le 2 \\ 0; x > 2 \end{cases}$$

Розв'язання.

a знайдемо з властивостей щільності розподілу

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$; $\int_0^2 (ax + \frac{1}{3})\,dx = 1$;

$\left(\frac{ax^2}{2} + \frac{1}{3}x\right) = 1 \Rightarrow 2a + \frac{2}{3} = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{6}$, т.о.

$$F(x) = \begin{cases} 0; x < 0 \\ \frac{1}{6}x + \frac{1}{3}; 0 \le x \le 2 \\ 0; x > 2 \end{cases}$$

Математичне сподівання неперервної випадкової величини знайдем за формулою:

$M[x] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\, dx$

$M[x] = \int_0^2 x(\frac{1}{6}x + \frac{1}{3})\, dx = \int_0^2 (\frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{3}x)\, dx = \left(\frac{1}{18}x^3 + \frac{1}{6}x^2\right) = \frac{8}{18} + \frac{4}{6} = \frac{10}{9}$

Дисперсію неперервної випадкової величини знайдемо за формулою:

$D[x] = M[x^2] - M^2[x]$

$M[x^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\, dx$

$M[x^2] = \int_0^2 x^2 \left(\frac{1}{6}x + \frac{1}{3}\right) dx = \int_0^2 \left(\frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{3}\right) dx = (\frac{x^4}{24} + \frac{x^3}{9}) = \frac{2^4}{24} + \frac{2^4}{9} = \frac{14}{9}$

$D[x] = \frac{14}{9} - \left(\frac{10}{9}\right)^2 = \frac{14}{9} - \frac{100}{81} = \frac{26}{81}$

$\delta[x] = \sqrt{\frac{26}{81}} = \frac{\sqrt{26}}{9}$

Ймовірність попадання випадкової величини в інтервал
$P(0 < x < 1)$ - ?

$P(a < x < b) = \int_b^a f(x)\, dx$
$P(0 < x < 1) = \int_0^1 \left(\frac{1}{6}x + \frac{1}{3}\right) dx = (\frac{1}{6} \times \frac{x^2}{2} + \frac{1}{3}x) = \frac{1}{12} + \frac{1}{3} = \frac{5}{12}.$

Приклад №7. Хвилинна стрілка годинника, що працює на батарейках, переміщується стрибком в кінці кожної хвилини. Знайти ймовірність того, що в даний момент годинник покаже час, що відрізняється від істинного часу, більше чим на 20 секунд.

Розв'язання. Помилку в показаннях часу годинником можна розглядати випадкову величину *X*, яка розподілена рівномірно на інтервалі між двома с сусідніми хвилинними поділками годинника. Щільність розподілу ймовірностей такої випадкової величини задається функцією
$f(x) = \frac{1}{b-a}$,
де *Ь-а* - довжина інтервалу, в якому знаходяться можливі значення величини *X;* поза цим індолом / *(x)* = 0. Оскільки, за умовою задачі *Ь – а*=1, то f *(x)* = 1.

Ясно, що помилка буде більше чим 20с=1/3хв, якщо буде належати інтервалу $\left(\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right)$.

Отже, треба знайти $P\left(\frac{1}{3} < x < \frac{2}{3}\right)$.

$P\left(\frac{1}{3} < x < \frac{2}{3}\right) = \int_{1/3}^{2/3} f(x)\,dx = \int_{1/3}^{2/3} f\,dx = x|_{1/3}^{2/3} = \frac{1}{3} \approx 0{,}33.$

Тема 3. Системи випадкових величин.

Приклад №8

y \ x	-1	2	4
0	0,05	0,10	0,30
2	0,20	0,15	0,20

1) Знайти M[x], M[y], D[x], D[y], Kxy, Rxy.

2) Знайти умовне математичне очікування M[x/y=2].

Розв'язання: Знайдемо математичне очікування для x і y

$M[x]= -1\times 0{,}25+2\times 0{,}25+4\times 0{,}5= -0{,}25+0{,}5+2=2{,}25$

$M[y]=0\times 0{,}45+2\times 0{,}55=0+1{,}1=1{,}1$

Знайдемо тепер D[x],D[y]

Для x буде $D[x]=M[x^2] - M^2[x]$

$M[x^2]=(-1)^2\times 0{,}25+2^2\times 0{,}25+4^2\times 0{,}5=0{,}25+1+8=9{,}25$

$M^2[x]=(2{,}25)^2=5{,}0625$

Для y буде $D[y]=M[y^2] - M^2[y]$

$M[y^2]=(0)^2\times 0{,}45+(2)^2\times 0{,}55=0+4\times 0{,}55=2{,}2$

$M^2[y]=(1{,}1)^2=1{,}21$

Тепер знаходимо:

$D[x]=9{,}25-5{,}0625=4{,}1875\approx 4{,}19$

$D[y]=2{,}2 - 1{,}21=0{,}99$

Знайдемо G[x] і G[y]

$G[x]=\sqrt{D[x]}$

$G[x]=\sqrt{4{,}1875}\approx 2{,}046$

$G[y]=\sqrt{D[y]}$

$G[y]=\sqrt{0{,}99}\approx 0{,}995$

Тепер знайдемо корреляціоний момент за формулою: Kxy=M[xy] – M[x]×M[y]

M[xy]=
$0 \times 0{,}05 \times (-1) + 0 \times 0{,}10 \times 2 + 0 \times 0{,}3 \times 4 + 2 \times 00{,}20 \times (-1) + 2 \times 0{,}15 \times 2 + 2 \times 0{,}15 \times 2 + 2 \times 0{,}20 \times 4 = 0 + 0 + 0 - 0{,}4 + 0{,}6 + 1{,}6 = 1{,}8$

M[x] ×M[y]=2,25×1,1=2,475

Kxy=1,8 – 2,475= -0,675

Знаходимо коефіцієнт корреляції за формулою: $\mathcal{R}$xy=$\frac{Kxy}{G[x]G[y]}$,потрібно щоб

$\mathcal{R}$xy ϵ [-1;1]

$\mathcal{R}$xy=$\frac{-0{,}675}{2{,}036 \times 0{,}995} = \frac{-0{,}675}{2{,}036} = -0{,}335$

Знайдемо умовне математичне очікування M[x/y=2]

M[x/y=2]= $\frac{-1\times 0{,}20}{0{,}55} + \frac{2\times 0{,}15}{0{,}55} + \frac{4\times 0{,}20}{0{,}55} = \frac{-0{,}2}{0{,}55} + \frac{0{,}3}{0{,}55} + \frac{0{,}8}{0{,}55} = \frac{-0{,}2+0{,}3+0{,}8}{0{,}55} = \frac{0{,}9}{0{,}55} \approx 1{,}64$

Відповідь: M[x]=2,25; M[y]=1,1; D[x]=4,1875; D[y] =0,99; Kxy= -0,675; $\mathcal{R}$xy= -0,675 і M[x/y=2] $\approx 1{,}64$.

Тема 4. Елементи математичної статистики.

Приклад №9.

Зроблена вибірка 10 валиків із валиків, оброблених на верста.Відхилення *X* розміру діаметрів валиків від норми має нормальний закон розподілу. У вибраних валиків ці відхилення рівні: 2, 1, -2, 3, 2, 4, -1, 5, 3, 4. Відомо, що середнє квадратичне відхилення випадкової величини *X* дорівнює 3. Знайти надійний інтервал для математичного сподівання випадкової величини: *X з* надійністю γ = 0,95.

Розв'язання. Задамо вибірку у вигляді таблиці розподілу частот:

x_i	-2	1	2	3	4	5
n_i	2	1	2	2	2	1

Об'єм вибірки *n* = 10. Знайдемо вибіркову середню:

$\bar{x}_в = \frac{\sum_{i=1}^{n} xini}{n} = \frac{-4+1+4+6+8+5}{10} = \frac{20}{10} = 2.$

Надійним інтервалом з надійністю γ для математичного сподівання *a* не мально розподіленої випадкової величини *X* з відомим середнім квадратичним відхиленням σ є інтервал

$\left(\bar{x}в\text{-}t \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x}в + t \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$, де t – рішення рівняння 2 A (t)=γ , (Φ(x)- функція Лапласа). Маємо 2 Φ(t)=0,95, Φ(t)=0,475.

З таблиці знаходимо t=1,96.

$t \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$=1,96 $\times \frac{3}{\sqrt{10}}=\frac{5,88}{3,16} \approx 1,86.$

Найдений інтервал: 2-1,86<a<2+1,86; 0,16<x<3,86.

3. Завдання до контрольних робіт.

3.1 Завдання контрольної роботи №1.

№1 .

А, В, С - три випадкові події, що можуть відбутися в деякому пробуванні. Знайти вираз через події А, В, С наступних подій при одному пробуванні:

1) появиться хоча б одна із подій А, В, С;
2) появиться тільки подія А;
3) появляться події А та В і не появиться С;
4) появляться всі три події;
5) появиться тільки одна із подій;
6) появляться тільки дві із подій;
7) ні одна подія не появиться;
8) появиться не більше двох подій.

№2.

Студент знає 20 питань із 25 питань програми. Знайти ймовірн того, що студент знає два питання, що стоять в екзаменаційному білеті.

№3.

Два стрільці роблять по одному пострілу в мішень. Ймовірність падання в ціль для першого стрільця дорівнює 0,7, а для другого - 0,8. Зн< ймовірність того, що

а) в ціль попаде хоча б один стрілець;
б) в ціль попаде тільки один стрілець;
в) в ціль попадуть обидва стрільці.

№4.

Студент шукає потрібну йому формулу в довідниках. Ймовірність того, що ця формула міститься в першому довіднику, дорівнює 0,6, в другому довіднику - 0,7, в третьому довіднику - 0,8. Знайти ймовірність того, що потрібна формула міститься:

а) тільки в одному довіднику;
б) тільки в двох довідниках;
в) хоча б в одному довіднику;
г) не більше чим в двох довідниках.

№5.

Ймовірність хоча б одного попадання в ціль при чотирьох пострілах дорівнює 0,9984. Знайти ймовірність попадання в ціль при одному пострілі. (0,8).

№6.

Ймовірність виграти по одному білету лотереї дорівнює 1/7. Яка ймовірність, купивши 5 білетів, виграти:

а) по усіх п'яти білетах;

б) ні по одному білету;

в) хоча б по одному білету?

№7.

Із цифр 1, 2, 3, 4, 5 вибирається навмання одна цифра, а із тих, що залишились, вибирається ще одна цифра. Знайти ймовірність того, що буде вибрано непарну цифру

а) перший раз;

б) другий раз;

в) обидва раза. (0,6; 0,6; 0,3).

№8.

Робітник, що виготовляє деталі, допускає 4 % браку. Яка ймовірність того, що серед взятих навмання п'яти деталей не буде ні однієї бракованої?

№9.

В ящику міститься 90 стандартних та 10 бракованих деталей. Робітник послідовно без повернення дістає із ящика 10 деталей. Знайти ймовірність того, що серед взятих деталей:

а) немає бракованих;

б) хоча б одна бракована.

№10.

Відділ технічного контролю перевіряє вироби на якість. Ймовірність того, що виріб має вищу якість, дорівнює 0,8. Знайти ймовірність того, що серед перевірених чотирьох виробів:

а) тільки два вищого ґатунку;

б) всі чотири вироби вищого ґатунку;

в) хоча б один виріб немає вищої якості;

г) не більше трьох виробів мають вищу якість.

№11.

В урну, де було дві кулі, поклали ще одну білу кулю. Після ц навмання з урни взяли одну кулю. Знайти ймовірність того, що ця куля буде білою.

№12.

В першій урні є 10 куль, серед яких 8 білих; в другій урні є 20 і серед яких 4 білих. З кожної урни навмання беруть по одній кулі, а потім із двох куль беруть одну. Знайти ймовірність того, що взята куля є білою.

№13.

Число вантажних автомашин, які рухаються по дорозі біля бензоколонки, відноситься до числа легкових автомашин як 3 : 2. Ймовірність того,що буде брати бензин вантажна автомашина,дорівнює 0,1; для легкової автомашини ця ймовірність дорівнює 0,2. До бензоколонки підїхала автомашина для заправки бензином. Знайти ймовірність того,що ця автомашина вантажна.

№14.

В групі спортсменів 20 лижників, 6 велосипедиста та 4 бігуна. Ймовірність виконати кваліфіковану норму для лижника дорівнює 0,9, для велосипедиста – 0,8, для бігуна 0,75. Знайти ймовірність того, що спортсмен, викликаний наймання, виконає кваліфіковану норму.

№15.

Із повного набору каменів доміно (всього 28) взяли наймання один камінь. Знайти ймовірність того, що взятий другий камінь можна буде прикласти до першого.

№16.

Статистикою встановлено, що із кожної тисячі новонароджених в середньому народжується 485 дівчаток і 515 хлопчиків. В сім`ї п’ятеро дітей. Знайти ймовірність того, що серед дітей 3 дівчини.

№17.

Два рівні за майстерністю шахісти грали в шахи. Що ймовірніше виграти: 2 партії із 4 чи 3 із 6 (нічию до уваги не брати).

№18.

Монету підкидають 5 разів. Знайти ймовірність тог, що герб випаде: а) менше 3 разів; б) не менше 4 разів; в) не більше 4 разів.

№19.

В телевізійному ательє є 4 кінескопи. Ймовірність того, що кінескоп витримає гарантійний термін відповідно дорівнює: 0,8; 0,9; 0,85; 0,95. Знайти ймовірність того, що взятий навмання кінескоп витримає гарантійний термін.

№20.

Для участі в студентських відбіркових змаганнях виділено з першої групи курса 4 студента, з другої групи – 6, а з третьої – 5 студентів. Ймовірність того, що студент першої, другої і третьої групи попаде в збірну інституту, відповідно дорівнюють: 0,9; 0,7; 0,8. Навмання вибраний студент в результаті змагання попав в збірну інституту. Знайти ймовірність того, що цей студент з другої групи.

№21. Товарознавець оглядає 24 зразків товарів. Ймовірність того ,що кожен із цих товарів буде допущений до продажу,дорівнює 0,6. Знайти наймовірніше число зразків,які товарознавець визнає такими,що придатні до продажу.

№22.

Ймовірність попадання в ціль при одному пострілі дорівнює 0,8. Знайти ймовірність того, що при100 пострілах в ціль попадуть 75 разів.

№23.

Ймовірність того, що покупцю потрібне взуття 41-го розміру, дорівнює 0,2. Знайти ймовірність того, що серед 100 покупців взуття 41-го розміру потрібне буде 25 особам.

№24.

150 верстатів працюють незалежно один від одного, при чому ймовірність безперебійної роботи кожного із них на протязі зміни дорівнює 0,8. Знайти ймовірність того, що на протязі зміни безперебійно перцюватимуть від 85 до 105 станків.

№25.

Проростання насіння даного сорту оцінюється ймовірністю рівною 0,85. Яка ймовірність того, що із 100 посіяних насінин проросте 75?

№26.

Ймовірність того, що будь-який абонент подзвонить на комутатор на протязі години, дорівнює 0,01. Телефонна станція обслуговує 800 абонентів. Знайти ймовірність того, що на протязі години на комутатор подзвонять 5 абонентів.

№27.

Виробництво дає 1% бракованих виробів. Яка ймовірність того, що з 1100 виробів забраковано буде 20 виробів?

№28.

Відділ технічного контролю перевіряє партію із 10 деталей. Ймовірність того, що деталь стандартна,дорівнює 0,75. Знайти наймовірніше число деталей,що будуть визнані стандартними.

№29.

Знайти ймовірність того,що подія А в кожному випробуванні дорівнює 0,25.

№30.

Ймовірність народження хлопчика дорівнює 0,51. Знайти ймовірність того, що серед 100 новонароджених виявиться 50 хлопчиків.

3.2. Завдання контрольної роботи №2

ВАРІАНТ 1

1 .З партії, що містить 10 виробів, серед яких є 3 дефектних, вибрано випадковим чином 3 вироби для перевірки їх якості. Побудувати ряд розподілів випадкового числа X дефектних виробів, що містяться у вибірці. Знайти M(X), D(X).

2. Випадкова величина X задана функцією розподілу F(X). Знайти щільність розподілу імовірності, M(X), D(X).

$$F(X) = \begin{cases} 0, x \le 0 \\ x^2, 0 < x \le 1 \\ 1, x > 1 \end{cases}$$

ВАРІАНТ 2

1. Побудувати ряд розподілу і функцію розподілу випадкового числа попадань м'ячем в корзину при трьох кидках, якщо імовірність попадання м'ячем в корзину при одному кидку p=0,3. Знайти D(X) і M(X).

2. Випадкова величина X задана функцією розподілу F(X). Знайти щільність розподілу імовірності, M(X), D(X).

$$F(X) = \begin{cases} 0, x \le 1 \\ (x^2 - x), 1 < x \le 2 \\ 1, x > 2 \end{cases}$$

ВАРІАНТ 3

1. Чому дорівнює середнє число попадань м'ячем в корзину при чотирьох кидках, якщо імовірність попадання в одному кидку дорівнює 0,4?

2. Щільність імовірності випадкової величини X задана виразенням f(x). Знайти a, M(X), D(X).

$$f(x) = \begin{cases} x^2 ; 0<x\le 2 \\ 0 ; x<0 ; x>2 \end{cases}$$

ВАРІАНТ 4

1. У урні є 4 кулі з номерами від 1 до 4. Вийняли 2 кулі. Випадкова величина X – сума номерів куль. Побудувати ряд розподілу випадкової величини X. Найті M(X), D(X).
2. Випадкова величина X задана функцією розподілу F(x). Знайти щільність розподілу імовірності, M(X), D(X).

$$F(x) = \begin{cases} 0, x < 2 \\ (x-2)^3, 2 \le x \le 3 \\ 1, x > 3 \end{cases}$$

ВАРІАНТ 5

1. Наугад вибирається натуральне число, що не перевершує 10. X – число натуральних дільників вибраного числа. Знайдіть закон розподілу X і імовірність події x.
2. Випадкова величина X задана функцією розподілу F(X). Знайти щільність розподілу імовірності, M(X), D(X).

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 2 \\ (x-2)^2, & 2 < x \le 3 \\ 1, & x > 3 \end{cases}$$

ВАРІАНТ 6

1. Знайти закон розподілу вірогідності числа гербів при двох киданнях правильної монети. Знайти M(X), D(X).
2. Задана функція розподілу випадкової величини X. Знайти щільність імовірності, M(X) і D(X).

$$F(x) = \begin{cases} 0, x \le 1 \\ \frac{x-1}{2}, 1 < x \le 3 \\ 1, x > 3 \end{cases}$$

ВАРІАНТ 7

1. У партії з 6 деталей є 3 стандартних. Наугад відібрали 3 деталі. Скласти закон розподілу дискретної випадкової величини X – числа стандартних деталей серед відібраних. Знайти D(X) і M(X).
2. Випадкова величина X задана функцією розподілу F(X) .найті щільність розподілу імовірності, (X) і D(X).

$$F(x) = \begin{cases} 0, x \le 0 \\ 2\sin x, 0 < x \le \frac{\pi}{6} \\ 1, x > \frac{\pi}{6} \end{cases}$$

ВАРІАНТ8

1. Монету кидають, поки не випаде герб. Знайти закон розподілу імовірності випадкової величини «число кидань до першої появи герба».

1. Дана функція

$$f(x) = \begin{cases} 0\ ;\ x \le 0 \\ 1/2\cos x\ ;\ 0 < x \le \pi \\ 0\ ;\ x > \pi \end{cases}$$

Показати, що f(x) може служити щільністю вірогідності деякої випадкової величини X. Найті M(X), D(X).

ВАРІАНТ 9

1. Пристрій складається з трьох незалежно працюючих елементів. Імовірність відмови кожного елементу в одному досвіді дорівнює 0,2. Скласти закон розподілу числа елементів, що відмовили, в одному досвіді. Знайти M-код(X), D(X).
2. Випадкова величина X задана функцією розподілу F(X). Знайти щільність розподілу імовірності, M(X),D(X).

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le -2\\ \frac{x}{2}+\frac{1}{2}, & -2<x\le 2\\ 1, & x>2\end{cases}$$

ВАРІАНТ 10

1. У партії з 10 деталей 8 стандартних. Наугад узято 2 деталі. Знайдіть закон розподілу випадкової величини, рівної числу стандартних деталей у вибірці. Знайти M(X), D(x).
2. Задана щільність імовірності . Знайти a, M(X),D(X).

$$f(x)=\begin{cases}0\ ; & x\le 0\\ a\sin x\ ; & 0<x<\pi\\ 0\ ; & x>\pi\end{cases}$$

ВАРІАНТ 11

1. Проводяться послідовні незалежнимиє випробування 5 приладів на надійність. Кожен наступний прилад випробовується лише в тому випадку, якщо попередній виявився надійним. Побудувати ряд розподілу випадкового числа випробуваних приладів, якщо імовірність витримати випробування для кожного з них рівна 0,9. Знайти M(X), D(X).
2. Випадкова величина X задана функцією розподілу F(X). Знайти щільність розподілу імовірності, M(X),D(X).

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ {}^{x}/9, & 0<x\le 3\\ 1, & x>3\end{cases}$$

ВАРІАНТ 12

1 .Гральна кість кидається до першої появи шестірки. Знайдіть закон розподілу випадкової величини X – «число кидань кісті» і імовірність події X.
2.При якому значенні a функція f(x) буде щільністю імовірності? Визначивши a, знайти імовірність події 0<X<1/4.

$$f(x)=\begin{cases} ax^3 & ; \ 0\le x\le 1 \\ 0 & ; \ x<0 \ ; \ x>1 \end{cases}$$

3.3. Завдання контрольної роботи №3

ВАРІАНТ 1

y \ x	-2	1	3
-2	0,15	0,10	0,30
0	0,05	0,25	0,15

1. Знайти M[x], M[y], D[x], D[y], k_{xy}, r_{xy}.

2. Знайти умовне математичне очікування M[y/x=3].

ВАРІАНТ 2

y \ x	-2	1
-1	0,10	0,30
0	0,20	0,10
3	0,15	0,15

1. Знайти M[x], M[y], D[x], D[y], k_{xy}, r_{xy}.

2. Знайти умовне математичне очікування M[x/y=0].

ВАРІАНТ 3

y \ x	-3	1	2
-2	0,20	0,15	0,25
0	0,05	0,20	0,15

1. Знайти M[x], M[y], D[x], D[y], k_{xy}, r_{xy}.

2. Знайти умовне математичне очікування M[x/y=-2].

ВАРІАНТ 4

y \ x	0	2
-2	0,25	0,05
0	0,15	0,25
2	0,15	0,15

1. Знайти M[x], M[y], D[x], D[y], k_{xy}, r_{xy}.

2. Знайти умовне математичне очікування M[x/y=2].

ВАРІАНТ 5

y \ x	-1	2	4
0	0,05	0,10	0,30
2	0,20	0,15	0,20

1. Знайти M[x], M[y], D[x], D[y], k_{xy}, r_{xy}.

2. Знайти умовне математичне очікування M[x/y=2].

ВАРІАНТ 6

x / y	-2	1
-3	0,10	0,20
0	0,15	0,05
3	0,30	0,20

1. Знайти M[x], M[y], D[x], D[y], k_{xy}, r_{xy}.
2. Знайти умовне математичне очікування M[y/x=-2].

ВАРІАНТ 7

x / y	-2	1
-1	0,10	0,30
0	0,20	0,10
3	0,15	0,15

1. Знайти M[x], M[y], D[x], D[y], k_{xy}, r_{xy}.
2. Знайти умовне математичне очікування M[x/y=0].

ВАРІАНТ 8

x / y	-1	4
-2	0,10	0,15
0	0,20	0,10
3	0,25	0,20

1. Знайти M[x], M[y], D[x], D[y], k_{xy}, r_{xy}.

2. Знайти умовне математичне очікування M[x/y=3].

ВАРІАНТ 9

x / y	-3	0	4
-1	0,15	0,05	0,25
5	0,20	0,10	0,25

1. Знайти M[x], M[y], D[x], D[y], k_{xy}, r_{xy}
2. Знайти умовне математичне очікування M[y/x=4].

ВАРІАНТ 10

x / y	-2	1	3
-2	0,15	0,10	0,30
0	0,05	0,25	0,15

1. Знайти M[x], M[y], D[x], D[y], k_{xy}, r_{xy}.
2. Знайти умовне математичне очікування M[y/x=3].

ВАРІАНТ 11

x / y	0	2
-2	0,25	0,05
1	0,15	0,25
2	0,15	0,15

1. Знайти M[x], M[y], D[x], D[y], k_{xy}, r_{xy}.
2. Знайти умовне математичне очікування M[x/y=1].

ВАРІАНТ 12

y \ x	-1	2	4
0	0,05	0,10	0,30
2	0,20	0,15	0,20

1. Знайти M[x], M[y], D[x], D[y], k_{xy}, r_{xy}.
2. Знайти умовне математичне очікування M[x/y=2].

ВАРІАНТ 13

y \ x	-3	1	2
0	0,20	0,15	0,25
2	0,05	0,20	0,15

1. Знайти M[x], M[y], D[x], D[y], k_{xy}, r_{xy}
2. Знайти умовне математичне очікування M[x/y=2].

3.4. Завдання контрольної роботи №4

№1. Знайти емпіричну функцію за даним розподілом вибірки:

x_i	2	5	7	8
n_i	1	3	2	4

Побудувати полігон частот.

№2. Побудувати полігон відносних частот за даними розподілу вибірки:

x_i	15	20	25	30	35
n_i	10	15	30	20	25

№3. З генеральної сукупності зроблено вибірку з об'ємом n = 50:

x_i	2	5	7	10
n_i	16	12	8	14

Знайти незсувну оцінку математичного сподівання та незсувну оцінку дисперсії генеральної випадкової величини.

№4. . В таблиці наведені результати вимірювання росту (в см) випадково відібраних 100 студентів.

Ріст	154-158	158-162	162-166	166-170	170-174	174-178	178-182
Число студентів	10	14	26	28	12	8	2

Знайти вибіркову середню та вибіркову дисперсію росту обстежених студентів.

№5. З великої партії електроламп зроблено вибірку з об'ємом 100 ламп. Середня тривалість горіння лампи вибірки виявилась рівною 1000 годин. Знайти з надійністю 0,95 надійний інтервал для середньої тривалості *a* горіння лампи всієї партії, якщо відомо, що середнє квадратичне відхилення тривалості горіння лампи 0 = 40 год.

№6. Побудувати полігон частот та знайти емпіричну функцію за даним розподілом вибірки:

x_i	1	4	5	7
n_i	20	10	14	6

№7. Побудувати гістограму відносних частот за даними розподілу і вибірки:

Номер інтервалу	Інтервал ($x_i \div x_{i=1}$)	Сума частот інтервалу, варіант
i	$x_i \div x_{i=1}$	*ni*
1	0-2	20
2	2-4	30
3	4-6	50
		$n=\sum n_i=100$

№8. З генеральної сукупності зроблено вибірку з об'ємом $n = 60$.

x_i	1	3	6	26
n_i	8	40	10	2

Знайти вибіркову середню, вибіркову та виправлену дисперсію.

№9. З генеральної сукупності зроблено вибірку з об'ємом $n= 41$. Знайдено вибіркову дисперсію $D_в= 3$. Знайти незсувну оцінку дисперсії генеральної випадкової величини.

№10. Знайти надійний інтервал для оцінки з надійністю $\gamma= 0,95$ невідомого, мого математичного сподівання *a* нормально розподіленої генеральної випадкової величини *X*, якщо генеральне середнє квадратичне відхилення $\sigma= 5$, вибіркова середня $\bar{x}_в = 14$ і об'єм вибірки $n = 25$.

ПЕРЕЛІК НАВЧАЛЬНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

Основна:

1. Пискунов. Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления. Т.1,2. М., «Наука»,1985

2. Гмурман В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика. М., «Высшая школа»,1972.

3. Гмурман В. Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. М., «Высшая школа»,1975.

4. Турчин В.М., Теорія імовірностей, основни поняття, приклади, задачі. Київ.АСК.2004.

5. Турчин В.М., Дрожжина Л.В., Теорія імовірностей в прикладах і задачах. Київ. ІСДО.

Додаткова:

6. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я., Высшая математика в упражнениях и задачах. Т.2.-М.: «Высшая школа»,1986.

7. Амбросов С.В., Глушков О.В., Малиновська С.В., «Елементи теорії клітинних автоматів» в курсах «Теорія імовірностей та випадкових процесів» та «Обчислювальні методи» // В кн. Актуальні проблеми математики – Київ.2000

Навчально-методичне видання

Доц.   Бакуніна О.В.

Теорія ймовірностей та математична статистика

Методичні вказівки до практичних занятьдля підготовки бакалаврів з галузі знань 12 «Інформаційні технології»