

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Київський національний університет будівництва і архітектури

ВИЩА МАТЕМАТИКА
Модуль 3. Інтегральне числення

Методичні вказівки
до виконання індивідуальних завдань
для студентів спеціальностей
151 «Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології»,
141 «Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка»

Київ 2019

УДК 519.6

Укладачі: Баліна О.І., канд. техн. наук, доцент
Безклубенко І.С., канд. техн. наук, доцент
Буценко Ю.П., канд. техн. наук, доцент

Рецензент В.М. Міхайленко, д-р техн. наук, професор

Відповідальний за випуск В.М. Міхайленко, д-р техн. наук,
професор

*Затверджено на засіданні кафедри інформаційних технологій
проектування та прикладної математики, протокол №1 від 30
серпня 2019 року.*

Видається в авторській редакції.

Вища математика. Модуль 3. Інтегральне числення:
методичні вказівки до виконання індивідуальних: методичні
вказівки / уклад.: О.І. Баліна та ін. – Київ: КНУБА, 2019. – 32 с.

Методичні вказівки містять спеціально підібрані задачі та
вправи по знаходженню та застосуванню невизначених,
визначених інтегралів. Містять зміст, вказівки до виконання
завдань з інтегрального числення, варіанти індивідуальних завдань.

Призначено для студентів спеціальностей

151 «Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології»,

141 «Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка»



ЗМІСТ

ЗАГАЛЬНІ ПОЛОЖЕННЯ.....	4
Завдання 1. Знаходження невизначених інтегралів.....	4
Завдання 2. Інтегрування ірраціональних виразів.....	6
Завдання 3. Інтегрування тригонометричних виразів.....	8
Завдання 4. Обчислення визначених інтегралів.....	10
Завдання 5. Обчислення площ плоских фігур за допомогою визначеного інтеграла.....	11
Завдання 6. Обчислення довжини дуги за допомогою визначеного інтегралу.....	13
Завдання 7. Обчислення об'ємів і площ поверхні обертання за допомогою визначеного інтеграла.....	14
Список літератури.....	16
Додатки:	
Додаток 1.....	17
Додаток 2.....	21
Додаток 3.....	23
Додаток 4.....	28
Додаток 5.....	31

Загальні положення

Дане видання являє собою методичні вказівки для вивчення курсу вищої математики з розділу «Інтегральне числення» для студентів першого курсу інженерних спеціальностей.

Студенти мають знати:

- основні математичні поняття сучасної математичної символіки, елементи теорії множин і математичної логіки як основних можливостей мінімально-збиткового представлення математично формалізованих процесів; теорію континууму (теорію дійсних чисел), яка являється тим середовищем, де методи і засоби математичного аналізу виростають в сильні математичні знаряддя природознавства і техніки.

Студенти мають вміти:

- математично моделювати технологічні, технічні та соціально-економічні процеси в межах тих технологічних, технічних та соціально-економічних знань, які вони отримали при вивченні відповідних природничих та спеціальних дисциплін; за умов міждисциплінарних зв'язків в процесі бакалаврської підготовки та за умов подальшої інженерної діяльності чисельно розв'язувати практичні задачі в межах вище означеного, кількісно оцінювати результати практичних завдань, проектів та бізнес-пропозицій.

Розділ: Інтегральне числення

Завдання 1. Знаходження невизначених інтегралів.

Завдання 2. Інтегрування ірраціональних виразів.

Завдання 3. Інтегрування тригонометричних виразів.

Завдання 4. Обчислення визначених інтегралів.

Завдання 5. Обчислення площ плоских фігур за допомогою визначеного інтеграла.

Завдання 6. Обчислення довжини дуги за допомогою визначеного інтегралу.

Завдання 7. Обчислення об'ємів і площ поверхні обертання за

допомогою визначеного інтеграла.

Розв'язання типового варіанта

Завдання 1. Знаходження невизначених інтегралів

1) *Інтегрування методом підстановки.*

Нехай треба знайти $\int f(x)dx$, знайти первісну для $f(x)$ неможливо, але відомо, що вона існує. Зробимо заміну $x = \varphi(t)$, де $\varphi(t)$ – неперервна функція з неперервною похідною. Тоді $dx = \varphi'(t)dt$ і $\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$.

Приклад 1. Знайти $\int \frac{xdx}{1+x^2}$, зробимо заміну $t = 1 + x^2$, тоді $dt = 2xdx$ і

$$I = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2} \ln|t| + C = \frac{1}{2} \ln|1+x^2| + C.$$

2) *Інтегрування по частинах.*

Формула інтегрування по частинах має вигляд $\int u dv = uv - \int v du$, де u, v диференційовані функції.

Приклад 2. Знайти $I = \int \arctg x dx$. Позначимо $u = \arctg x$, $dv = dx$, тоді

$$du = \frac{dx}{1+x^2}; v = x, I = x \arctg x - \int \frac{xdx}{1+x^2} = x \arctg x - \frac{1}{2} \ln|1+x^2| + C \quad \text{при}$$

цьому був використаний приклад 1.

3) *Інтегрування раціональних дробів*

Нехай треба обчислити $\int \frac{Q(x)}{f(x)} dx$, де $\frac{Q(x)}{f(x)}$ – раціональний дріб, який

розкладається на суму простіших дробів методом невизначених коефіцієнтів.

Приклад 3. Обчислити $I = \int \frac{xdx}{(x^2+1)(x-1)}$. Розкладемо $\frac{x}{(x^2+1)(x-1)} =$

$$\frac{A_1 x + A_2}{x^2 + 1} + \frac{A_3}{x-1}, \text{ звідки } x = (A_1 x + A_2)(x-1) + A_3(x^2 + 1). \text{ При } x=1,$$

$$\text{одержимо } 1 = 2A_3, A_3 = \frac{1}{2}; \text{ при } x=0, \text{ маємо } 0 = -A_2 + A_3, A_2 = \frac{1}{2};$$

$$\text{прирівнюючи коефіцієнти при } x^2, \text{ маємо } 0 = A_1 + A_3, A_1 = -\frac{1}{2}. \text{ Таким}$$

$$\text{чином } \frac{x}{(x^2 + 1)(x-1)} = -\frac{1}{2} \frac{x-1}{x^2 + 1} + \frac{1}{2} \frac{1}{x-1}, \text{ тоді}$$

$$I = -\frac{1}{2} \int \frac{x-1}{x^2 + 1} dx + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x-1} = -\frac{1}{2} \int \frac{xdx}{x^2 + 1} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2 + 1} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x-1} =$$

$$-\frac{1}{4} \ln|x^2 + 1| + \frac{1}{2} \arctg x + \frac{1}{2} \ln|x-1| + c.$$

Завдання 2. Інтегрування ірраціональних виразів

У завданні три приклади:

- а) інтегрування деяких ірраціональних функцій;
- б) інтегрування виразів виду $R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})$;
- в) інтегрування диференціальних біномів.

а) Розглянемо $I = \int R(x, x^{\frac{m}{n}}, \dots, x^{\frac{r}{s}}) dx$

Підстановка $x = t^k$, де k -спільний знаменник дробів $\frac{m}{n}, \dots, \frac{r}{s}$

Для $\int R(x, (\frac{a_1 x + a_2}{a_3 x + a_4})^{\frac{m}{n}}, \dots, (\frac{a_1 x + a_2}{a_3 x + a_4})^{\frac{r}{s}}) dx$ підстановка $\frac{a_1 x + a_2}{a_3 x + a_4} = t^k$, де k

– спільний знаменник дробів $\frac{m}{n}, \dots, \frac{r}{s}$.

Приклад 1. Обчислити $I = \int \frac{x^2}{x^4 + 1} dx$, використаємо підстановку

$x = t^4$, тоді $dx = 4t^3 dt$ і

$$I = 4 \int \frac{t^2}{t^3+1} \cdot t^3 dt = 4 \int \frac{t^5 dt}{t^3+1} = 4 \int \left(t^2 - \frac{t^2}{t^3+1} \right) dt = \frac{4}{3} (t^3 - \ln|t^3+1|) + c =$$

$$\frac{4}{3} \left(x^4 - \ln|x^4+1| \right) + c$$

б) Інтеграл $I = \int R(x, ax^2 + bx + c) dx$ підраховується за допомогою трьох підстановок

1) $a > 0$, тоді $\sqrt{ax^2 + bx + c} = \pm \sqrt{a}x + t$

2) $c > 0$, тоді $\sqrt{ax^2 + bx + c} = xt \pm \sqrt{c}$

3) x_1, x_2 - дійсні корені тричлена $ax^2 + bx + c$, тоді $\sqrt{ax^2 + bx + c} = (x - x_1)t$.

Приклад 2. Обчислити $I = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 3x - 4}}$, так як $x_1 = -4; x_2 = 1$, зробимо

підстановку $\sqrt{x^2 + 3x - 4} = (x + 4)t$, звідки знаходимо $x = \frac{1 + 4t^2}{1 - t^2}$;

$$dx = \frac{10t}{(1-t^2)^2} dt; \text{ тоді } I = \int \frac{10t(1-t^2)}{(1-t^2)^2} dt = 2 \int \frac{dt}{1-t^2} = \ln \left| \frac{1+t}{1-t} \right| + c = \ln \left| \frac{\sqrt{x+4} + \sqrt{x-1}}{\sqrt{x+4} - \sqrt{x-1}} \right| + c$$

в) $\int x^m (a + bx^n)^p dx$, де m, n, p - раціональні числа, знаходиться в трьох випадках

1) p - ціле число;

2) $\frac{m+1}{n}$ - ціле число, підстановка в цьому випадку $a + bx^n = t^s$, де s - знаменник дробу p ;

3) $\frac{m+1}{n} + p$ - ціле число, підстановка: $a + bx^n = t^s x^n$.

Приклад 3. Знайти $\int x^5 \sqrt[3]{(1+x^3)^2} dx$ тут $m=5; n=3; p=\frac{2}{3}$ і $\frac{m+1}{n}=2$, тоді

$$1 + x^3 = t^3, x = \sqrt[3]{t^3 - 1}; dx = \frac{t^2 dt}{\sqrt[3]{(t^3 - 1)^2}};$$

$$I = \int (\sqrt[3]{t^3 - 1})^5 \sqrt[3]{t^6} \frac{t^2 dt}{\sqrt[3]{(t^3 - 1)^2}} = \int (t^3 - 1)t^4 dt = \frac{t^8}{8} - \frac{t^5}{5} + c =$$

$$\frac{1}{8}(1+x^3)^2 \sqrt[3]{(1+x^2)^2} - \frac{1}{5}(1+x^3) \sqrt[3]{(1+x^3)^2} + c$$

Завдання 3. Інтегрування тригонометричних виразів

У завданні п'ять прикладів

- 1) інтеграли виду $\int R(\sin x) \cos x dx$, $\int R(\cos x) \sin x dx$;
- 2) інтеграли виду $\int \sin^m x \cos^n x dx$, де m, n - невід'ємні і парні;
- 3) інтеграли виду $\int R(\sin x, \cos x) dx$;
- 4) інтеграли від tg, ctg в додатній степені;
- 5) інтегрування ірраціональних виразів за допомогою тригонометричних підстановок.

1) Інтеграли виду $\int R(\sin x) \cos x dx$, $\int R(\cos x) \sin x dx$ розв'язуються за допомогою підстановки $\sin x = t$; $\cos x = t$.

Приклад 1.

$$\int \sin^4 x \cos^5 x dx = \left[\begin{array}{l} \sin x = t, \\ \cos x dx = dt \end{array} \right] = \int t^4 (1 - t^2)^2 dt =$$

$$= \int (t^4 - 2t^6 + t^8) dt = \frac{1}{5}t^5 - \frac{2}{7}t^7 + \frac{1}{9}t^9 + c = \frac{1}{5} \sin^5 x - \frac{2}{7} \sin^7 x + \frac{1}{9} \sin^9 x + c \quad 2)$$

Інтеграли виду $\int \sin^m x \cos^n x dx$, де m, n - додатні і парні підраховуються за допомогою формул

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}; \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

Приклад 2. $\int \sin^4 \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2} dx = \int \left(\frac{1 - \cos x}{2} \right)^2 \left(\frac{1 + \cos x}{2} \right) dx =$

$$= \frac{1}{8} \int (1 - \cos x - \cos^2 x + \cos^3 x) dx = \frac{x}{8} - \frac{1}{8} \sin x - \frac{1}{8} \int \frac{1 + \cos 2x}{2} dx +$$

$$+ \frac{1}{8} \int (1 - \sin^2 x) d \sin x = \frac{1}{16} x - \frac{1}{32} \sin 2x - \frac{1}{24} \sin^3 x + c$$

2) Інтегралі виду $\int R(\sin x, \cos x) dx$ обчислюються за

допомогою підстановки $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t, \sin x = \frac{2t}{1+t^2}; \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}; dx = \frac{2 dt}{1+t^2}$

Приклад 3.
$$\int \frac{dx}{\sin x} = \left[\begin{array}{l} \operatorname{tg} \frac{x}{2} = t \\ dx = \frac{2 dt}{1+t^2} \\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \end{array} \right] = \int \frac{dt}{1+t^2} \div \frac{2t}{1+t^2} = \int \frac{dt}{t} = \ln |t| + c = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + c$$

4) Інтегралі $\int (\operatorname{tg} x)^n dx, \int (\operatorname{ctg} x)^m dx$ підраховуються за допомогою підстановки $\operatorname{tg} x = t; \operatorname{ctg} x = t$.

Приклад 4.
$$\int \operatorname{tg}^4 x dx = \left[\begin{array}{l} \operatorname{tg} x = t \\ dx = \frac{dt}{1+t^2} \end{array} \right] = \int \frac{t^4}{1+t^2} dt = \int (t^2 - 1 + \frac{1}{t^2+1}) dt = \frac{1}{3} t^3 - t +$$

$$+ \operatorname{arctg} t + c = \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 x - \operatorname{tg} x + x + c$$

5) $\int R(x, \sqrt{a^2 - x^2}) dx; \int R(x, \sqrt{a^2 + x^2}) dx; \int R(x, \sqrt{x^2 - a^2}) dx$

підраховуються за допомогою підстановок

$$x = a \sin t; x = \operatorname{atg} t; x = a \sec t.$$

Приклад 5.
$$\int \frac{dx}{\sqrt{(4-x^2)^3}} = \left[\begin{array}{l} x = 2 \sin t \\ dx = 2 \cos t dt \end{array} \right] = \int \frac{2 \cos t dt}{\sqrt{(4-4 \sin^2 t)^3}} =$$

$$= \int \frac{2 \cos t dt}{8 \cos^3 t} = \frac{1}{4} \int \frac{dt}{\cos^2 t} = \frac{1}{4} \operatorname{tg} t + c = \frac{1}{4} \frac{\sin t}{\cos t} + c = \frac{1}{4} \frac{\sin t}{\sqrt{1-\sin^2 t}} =$$

$$= \frac{1}{4} \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} + c$$

Завдання 4. Обчислення визначених інтегралів.

В завданні 4 приклади – перший на використання формули

Ньютона-Лейбніца, другий – на заміну змінної, третій – інтегрування по частинах, четвертий – обчислення невластних інтегралів.

Формула Ньютона-Лейбніца має вигляд

$$\int_a^b F(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Приклад 1.
$$\int_a^b x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_a^b = \frac{b^3 - a^3}{3}$$

Якщо у визначеному інтегралі вводиться заміна змінної, необхідно змінювати границі інтегрування.

Приклад 2.

$$\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2} dx = \left[\begin{array}{l} x = r \sin t \\ dx = r \cos t dt \\ x = 0 \Rightarrow t = 0 \\ x = r \Rightarrow t = \frac{\pi}{2} \end{array} \right] = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{r^2 - r^2 \sin^2 t} r \cos t dt =$$

$$= r^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = r^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = r^2 \left(\frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi r^2}{4}$$

3) Формула інтегрування по частинах для визначеного інтеграла

має вигляд
$$\int_a^b u dv = u \cdot v \Big|_a^b - \int_a^b v du$$

Приклад 3.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx = \left[\begin{array}{l} x = u \\ dx = du \\ \cos x dx = v \\ \sin x = v \end{array} \right] = x \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = \frac{\pi}{2} + \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi - 2}{2}$$

4) Обчислення невластних інтегралів. Невласні інтеграли:

- а) інтеграли з нескінченними границями;
- б) інтеграли від функцій, що мають розрив

$$\text{а) } \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^c f(x) dx + \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_c^b f(x) dx$$

Приклад 4.

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b \rightarrow \infty} \arctg \left| \right|_0^b = \lim_{b \rightarrow \infty} \arctg b = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{б) } \int_a^c f(x) dx = \lim_{b \rightarrow c-0} \int_a^b f(x) dx,$$

якщо розрив в точці $x = x_0$ всередині відрізка $[a, c]$, то

$$\int_a^c f(x) dx = \lim_{b \rightarrow x_0-0} \int_a^b f(x) dx + \lim_{b \rightarrow x_0+0} \int_b^c f(x) dx$$

Приклад 5.

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2} &= \lim_{b \rightarrow -0} \int_{-1}^b \frac{dx}{x^2} + \lim_{b \rightarrow +0} \int_b^1 \frac{dx}{x^2} = - \lim_{b \rightarrow -0} \frac{1}{x} \Big|_{-1}^b + \lim_{b \rightarrow +0} \frac{1}{x} \Big|_b^1 = \\ &= - \lim_{b \rightarrow -0} \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{-1} \right) - \left(1 - \frac{1}{b} \right) = +\infty \end{aligned}$$

Завдання 5. Обчислення площі за допомогою визначеного інтеграла

В завданні розглянуті приклади обчислення площі, якщо фігура задана рівнянням

а) в декартовій системі координат;

б) в параметричному вигляді

в) в полярних координатах.

а) обчислення площі фігури, обмеженої $y = f(x)$; $x = a$; $x = b$ і

віссю ОХ підраховується за формулою $S = \int_a^b f(x) dx$.

Приклад 1. Обчислити площу фігури, обмеженої кривими $y = \sqrt{x}$ і $y = x^2$.

Знаходимо точки перетину цих кривих: $x_1 = 0$; $x_2 = 1$. Тоді

$$S = \int_0^1 \sqrt{x} dx - \int_0^1 x^2 dx = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \Big|_0^1 - \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

б) якщо $x = \varphi(t); y = \phi(t)$, де $a \leq t \leq \beta$ і $\varphi(a) = a; \varphi(\beta) = b$, то

$$S = \int_a^\beta \phi(t) \varphi'(t) dt$$

Приклад 2. Знайти площу еліпса: $x = a \cos t; y = b \sin t$

$$S = 2 \int_{\pi}^0 (b \sin t)(-a \sin t) dt = -2ab \int_{\pi}^0 \sin^2 t dt = 2ab \int_0^{\pi} \frac{1 - \cos 2t}{2} dt = 2ab \left(\frac{t}{2} - \frac{\sin 2t}{4} \right) \Big|_0^{\pi} = \pi ab$$

в) якщо крива задана в полярній системі координат

$$\rho = f(\theta), a \leq \theta \leq \beta, \text{ то площа дорівнює } S = \frac{1}{2} \int_a^\beta \rho^2 d\theta$$

Приклад 3. Знайти площу, обмежену лемніскатою

$$\rho = a\sqrt{\cos 2\theta}; 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}, \text{ тоді } S = \frac{4}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \rho^2 d\theta = 2a^2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\theta d\theta = a^2 \sin 2\theta \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = a^2$$

Завдання 6. Обчислення довжини дуги за допомогою визначеного інтеграла

В завданні розглянуті приклади обчислення довжини дуги, якщо лінія задана

а) в декартових координатах;

б) в параметричному вигляді;

в) в полярних координатах.

а) Довжина дуги кривої, яка задана рівнянням $y = f(x), x = a; x = b$

підраховується по формулі $l = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$.

Приклад 1. Знайти довжину дуги кола $x^2 + y^2 = R^2$. Знаходимо

$$y = \sqrt{R^2 - x^2}, y' = -\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}}, \text{ тоді } l = 4 \int_0^R \sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2}} dx =$$

$$= 4R \int_0^R \frac{dx}{\sqrt{R^2 - x^2}} = 4R \arcsin \frac{x}{R} \Big|_0^R = 2\pi R$$

б) Якщо $x = \varphi(t); y = \phi(t), a \leq t \leq \beta$, то $l = \int_a^\beta \sqrt{(\varphi')^2 + (\phi')^2} dt$

Приклад 2. Обчислити довжину дуги астроїди

$x = a \cos^3 t; y = a \sin^3 t$. Маємо: $x' = -3a \cos^2 t \sin t; y' = 3a \sin^2 t \cos t; 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$,

тоді

$$l = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{9a^2 \cos^4 t \sin^2 t + 9a^2 \sin^4 t \cos^2 t} dt = 12a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \cos t dt =$$

$$= 6a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t dt = -6a \frac{\cos 2t}{2} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 6a$$

в) Якщо рівняння кривої задано в полярних координатах

$\rho = \rho(\theta)$, тоді $l = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2} d\theta; \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$

Приклад 3. Знайти довжину дуги кардіоїди $\rho = a(1 + \cos \theta)$. Маємо:

$$\rho' = -a \sin \theta, l = 2 \int_0^\pi \sqrt{a^2 (1 + \cos \theta)^2 + a^2 \sin^2 \theta} d\theta = 2a \int_0^\pi \sqrt{2} \sqrt{1 + \cos \theta} d\theta =$$

$$= 4a \int_0^\pi \cos \frac{\theta}{2} d\theta = 8a.$$

Завдання 7. Обчислення об'ємів і поверхонь тіл за допомогою визначеного інтеграла.

Розглядаються приклади обчислення

- об'ємів тіл за площею паралельних перерізів
- об'ємів тіл обертання
- площі поверхні тіла обертання.

а) Об'єм тіла $v = \int_a^b S(x) dx$, де $S(x)$ - площа перерізу тіла

площиною, перпендикулярною до вісі OX в точці X; a, b - абсциси

крайніх точок.

Приклад 1. Знайти об'єм сегмента еліптичного параболоїда, що перетинається площиною $x = a : (\frac{y^2}{2p} + \frac{z^2}{2q} \leq x)$. В перерізі параболоїда

площиною $x = const$ одержуємо еліпс $\frac{y^2}{(\sqrt{2px})^2} + \frac{z^2}{\sqrt{2qx}} = 1$ з півосями

$$x = \sqrt{2px}; b = \sqrt{2qx}.$$

Враховуючи, що площа еліпса дорівнює πab , маємо $S(x) = 2\pi\sqrt{pqx}$

$$V = \int_0^a S(x) dx = 2\pi\sqrt{pq} \int_0^a x dx = \pi a^2 \sqrt{pq}$$

б) При обчисленні об'єму тіл, які одержуємо обертанням кривої $y = f(x)$ навколо вісі ОХ, обмеженою площинами $x = a; x = b$, то $S(x) = \pi y^2$ і

$$V = \pi \int_a^b y^2 dx = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx.$$

Приклад 2. Знайти об'єм тіла, яке одержується обертанням

$y = ach \frac{x}{a}$ навколо вісі ОХ, $0 \leq x \leq b$

$$\begin{aligned} V &= \pi a^2 \int_a^b (ch^2 \frac{x}{a}) dx = \frac{\pi a^2}{4} \int_a^b (e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}) dx = \frac{\pi a^2}{4} \int_0^b (e^{\frac{2x}{a}} + 2e^{-\frac{2x}{a}}) dx = \\ &= \frac{\pi a^2}{8} (e^{\frac{2b}{a}} - e^{-\frac{2b}{a}}) + \frac{\pi a^2 b}{2} \end{aligned}$$

в) Площа поверхні обертання кривої $y = f(x)$ навколо вісі ОХ на відрізку $a \leq x \leq b$: $P = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$.

Якщо $x = x(t); y = y(t); t_1 \leq t \leq t_2$, то $P = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} y(t) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$.

Якщо $\rho = \rho(\varphi); a \leq \varphi \leq \beta$, то $P = 2\pi \int_a^\beta \rho \sin \varphi \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2} d\varphi$

Приклад 3. Знайти площу поверхні обертання кривої $y = \sin x$ навколо осі ОХ

$$P = 2\pi \int_0^{\pi} \sin x \sqrt{1 + \cos^2 x} dx = -2\pi \left[\frac{\cos x}{2} \sqrt{1 + \cos^2 x} + \frac{1}{2} \ln(\cos x + \sqrt{1 + \cos^2 x}) \right]_0^{\pi} =$$
$$= 2\pi(\sqrt{2} + \ln(\sqrt{2} + 1))$$

Завдання для самостійної роботи

1. Знайти інтеграли А, Б, В, Г, Д, Е (Дод. 1).
2. Обчислити визначені інтеграли А, Б (Дод.2).
3. Обчислити невластні інтеграли (Дод.3).
4. а) Обчислити площу фігур.
б) Обчислити довжину дуги (Дод. 4).
5. а) Обчислити об'єм тіла обертання.
б) Обчислити площу поверхні тіла обертання (Дод.5).

Список літератури

1. Овчинников П.П., Михайленко В.М., Яремчук Ф.П. Вища математика. Підручник, ч.ІІ К.: Техніка, 2000. – 59 с.
2. Федоренко Н.Д., Баліна О.І., Безклубенко І.С. та інші Вища математика. Навчальний посібник. К.: КНУБА, 2003. – 246 с.
3. Федоренко Н.Д., Баліна О.І., Безклубенко І.С. Вища математика у двох частинах. Навчальний посібник. ч. I К.: КНУБА, 2009. – 168 с.

Додаток 1

Вар-т	Інтеграл					
	А	Б	В	Г	Д	Е
1	$\int \frac{x}{x+5} dx$	$\int \frac{1 + \ln x}{x} dx$	$\int (4 - 3x)e^{-3x} dx$	$\int \frac{3x^3 + 1}{x^2 - 1} dx$	$\int \frac{\sqrt{1 + \sqrt{x}}}{x^4 \sqrt{x^3}} dx$	$\int \sin^4 x \cdot \cos^4 x dx$
2	$\int \frac{2 + x}{2 - x} dx$	$\int \frac{(\arccos x)^3 - 1}{\sqrt{1 - x^2}} dx$	$\int (3x - 4)e^{3x} dx$	$\int \frac{2x^3 + 5}{x^2 - x - 2} dx$	$\int \frac{\sqrt{1 + \sqrt[3]{x}}}{x \sqrt{x}} dx$	$\int \frac{dx}{(3 \operatorname{tg} x + 5) \sin 2x}$
3	$\int \frac{e^{2x} - 1}{e^x} dx$	$\int \frac{\operatorname{tg}(x+1)}{\cos^2(x+1)} dx$	$\int (4 - 16x) \sin 4x dx$	$\int \frac{3x^3 + 25}{x^2 + 3x + 2} dx$	$\int \frac{\sqrt[3]{1 + \sqrt[3]{x^2}}}{x^3 \sqrt{x^8}} dx$	$\int \frac{(2 \operatorname{ctg} x + 1) dx}{(2 \sin x + \cos x)^2}$
4	$\int \frac{x^3}{x+1} dx$	$\int \frac{1 - \cos x}{(x - \sin x)^2} dx$	$\int (1 - 6x)e^{2x} dx$	$\int \frac{2x^3 + 7x + 7x - 1}{(x+2)^2(x^2 + x + 1)} dx$	$\int \frac{\sqrt[3]{(1 + \sqrt[3]{x^2})^2}}{x^2 \sqrt[9]{x}} dx$	$\int \frac{3 + 2 \operatorname{tg} x}{2 \sin^2 x + 3 \cos^2 x - 1} dx$
5	$\int \frac{(1+x)^2}{x^2 + 1} dx$	$\int \frac{x \cos x + \sin x}{(x - \sin x)^2} dx$	$\int (4x - 2) \cos 2x dx$	$\int \frac{x^3 + 6x^2 + 9x + 6}{(x+1)^2(x^2 + 2x + 2)} dx$	$\int \frac{\sqrt{1 + \sqrt[3]{x^2}}}{x^2} dx$	$\int \frac{(8 + \operatorname{tg} x) dx}{18 \sin^2 x + 2 \cos^2 x}$
6	$\int \frac{dx}{x(x-1)}$	$\int \frac{xdx}{\sqrt{x^4 - x^2 - 1}}$	$\int (5x - 2)e^{3x} dx$	$\int \frac{3x^3 + 6x^2 + 5x - 1}{(x+1)^2(x^2 + 2)} dx$	$\int \frac{\sqrt[4]{(1 + \sqrt{x})^3}}{x^8 \sqrt{x^7}} dx$	$\int \frac{(1 + \cos x) dx}{1 + \cos x + \sin x}$
7	$\int \frac{x^4 dx}{x^2 + 1}$	$\int \frac{1 + \ln(x-1)}{x-1} dx$	$\int \ln(x^2 + 4) dx$	$\int \frac{x^3 - 3x^2 - 12}{(x-4)(x-3)x} dx$	$\int \frac{\sqrt[4]{(1 + \sqrt[3]{x^2})^3}}{x^2 \sqrt[6]{x}} dx$	$\int \operatorname{arctg} \sqrt{4x-1} dx$
						Продовження

						додатку 1
Вар-т	Інтеграл					
	А	Б	В	Г	Д	Е
8	$\int \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} dx$	$\int \frac{4 \arctg x - x}{1 + x^2} dx$	$\int (2 - 4x) \sin 2x dx$	$\int \frac{3x^3 - 2}{x^3 - x} dx$	$\int \frac{\sqrt[3]{1 + 4\sqrt{x^3}}}{x^2} dx$	$\int \sin^3 x dx$
9	$\int \frac{x^2 - 5}{x^2 + 5} dx$	$\int \frac{x^2 + 4 \arctg^2 x}{1 + x} dx$	$\int e^{-2x} (4x - 3) dx$	$\int \frac{2x^6 - 8x^3 + 3}{x^2 - 2x} dx$	$\int \frac{\sqrt[5]{(1 + \sqrt{x})^4}}{x^{10} \sqrt{x^9}} dx$	$\int \sin x \cdot \cos 5x dx$
10	$\int \frac{x^2}{x^2 - 4} dx$	$\int \frac{x + \cos x}{x^2 + 2 \sin x} dx$	$\int e^{-3x} (2 - 9x) dx$	$\int \frac{3x^5 - 12x^3 - 7}{x^2 + 2x} dx$	$\int \frac{\sqrt[5]{(1 + \sqrt[3]{x^2})^4}}{x^2 \sqrt[5]{x}} dx$	$\int \sin x \cdot \cos x dx$
11	$\int \frac{x^4}{1 - x} dx$	$\int \frac{8x - \arctg 2x}{1 + 4x^2} dx$	$\int (2 - 4x) \sin 4x dx$	$\int \frac{x^3 - 17}{x^2 - 4x + 3} dx$	$\int \frac{\sqrt{1 + 5\sqrt{x^4}}}{x^2 \sqrt[5]{x}} dx$	$\int 2^8 \sin^4 x \cos^2 x dx$
12	$\int \frac{x + 2}{2x - 1} dx$	$\int \frac{xdx}{x^4 + 1} dx$	$\int e^{-x} (4x + 5) dx$	$\int \frac{x^5 - x^3 + 1}{x^2 - x} dx$	$\int \frac{\sqrt[3]{1 + 5\sqrt{x^4}}}{x^2 \sqrt[15]{x}} dx$	$\int 2^4 \cos^8 x dx$
13	$\int \frac{x^6 dx}{x^2 + 1}$	$\int \frac{(x - 1)x}{\sqrt{x^2 + 1}} dx$	$\int \arctg \sqrt{2x - 1} dx$	$\int \frac{-x^5 + 9x^3 + 4}{x^2 + 3x} dx$	$\int \frac{\sqrt[4]{(1 + \sqrt[5]{x^4})^3}}{x^5 \sqrt{x^2}} dx$	$\int \sin^4 \frac{x}{4} \cos^4 \frac{x}{4} dx$
14	$\int \frac{x^5}{x^2 - 1} dx$	$\int \frac{x - (\arctg x^4)}{1 + x^2} dx$	$\int \arctg \sqrt{5x - 1} dx$	$\int \frac{-x^5 + 25x^3 + 1}{x^2 + 5x} dx$	$\int \frac{\sqrt[3]{(1 + 4\sqrt{x})^2}}{x^{12} \sqrt{x^5}} dx$	$\int 2^4 \sin^2 \frac{x}{2} \cos^6 \frac{x}{2} dx$
						Продовження додатку 1

Вар-т	Інтеграл					
	А	Б	В	Г	Д	Е
15	$\int \frac{x^3}{x-1} dx$	$\int \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}(x+1)} dx$	$\int (3x-2) \cos 5x dx$	$\int \frac{x^3+4x^2+3x+2}{(x+1)^2(x^2+1)} dx$	$\int \frac{\sqrt[4]{(1+\sqrt[3]{x^2})}}{x^6\sqrt{x^5}} dx$	$\int \frac{4-7 \operatorname{tg} x}{2+3 \operatorname{tg} x} dx$
16	$\int \frac{x^2}{x+1} dx$	$\int \frac{x^2+\ln x^2}{x} dx$	$\int (4x+7) \cos 3x dx$	$\int \frac{2x^3+4x^2+2x-1}{(x-1)^2(x^2+2x+2)} dx$	$\int \frac{\sqrt[5]{1+\sqrt[3]{x}}}{x^5\sqrt{x^2}} dx$	$\int \frac{8 \operatorname{tg} x dx}{3 \cos^2 x+8 \sin^2 x-7}$
17	$\int \frac{x^2-2}{x-2} dx$	$\int \frac{x^3 dx}{(x^2+1)^2}$	$\int (8-3x) \cos 5x dx$	$\int \frac{2x^3-6x^2+7x}{(x+2)(x-1)^3} dx$	$\int \frac{\sqrt[3]{(1+\sqrt[5]{x^4})^2}}{x^2\sqrt[3]{x}} dx$	$\int \frac{\operatorname{tg}^2 x}{4+3 \cos 2x} dx$
18	$\int \frac{x^2}{x-\sqrt{2}} dx$	$\int \frac{x^3+x}{x^4+1} dx$	$\int (2-3x) \sin 2x dx$	$\int \frac{x^3-6x^2+13x-6}{(x+2)(x-2)^3} dx$	$\int \frac{\sqrt[3]{(1+\sqrt[4]{x})}}{x^3\sqrt{x}} dx$	$\int \frac{3 \operatorname{tg}^2 x-1}{\operatorname{tg}^2 x+5} dx$
19	$\int \frac{x^3}{x+3} dx$	$\int \frac{x dx}{\sqrt[3]{x-1}}$	$\int (7x-10) \sin 4x dx$	$\int \frac{2x^3-6x^2+7x-4}{(x-2)(x-1)^3} dx$	$\int \frac{\sqrt[4]{1+\sqrt[3]{x}}}{x^{12}\sqrt{x^5}} dx$	$\int \frac{12 dx}{(6+5 \operatorname{tg} x) \sin 2x}$
20	$\int \frac{x^2-1}{x+2} dx$	$\int \frac{1-\cos x}{(x-\sin x)^2} dx$	$\int \frac{x dx}{\cos^2 x}$	$\int \frac{2x^3-x^2-7x-12}{x(x-3)(x+1)} dx$	$\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[5]{x}}}{x^{15}\sqrt{x^4}} dx$	$\int \frac{36 dx}{(6-\operatorname{tg} x) \sin 2x}$
21	$\int \frac{x+2}{2x-1} dx$	$\int \frac{x \cos x + \sin x}{(x \sin x)^2} dx$	$\int (3x-x^2) \sin 2x dx$	$\int \frac{2x^3+6x^2+7x+2}{x(x+1)^2} dx$	$\int \frac{\sqrt[3]{(1+\sqrt[4]{x^3})^2}}{x^4\sqrt{x}} dx$	$\int \frac{\cos x dx}{1+\cos x-\sin x}$
						Закінчення

						додатку 1
Вар-т	Інтеграл					
	А	Б	В	Г	Д	Е
22	$\int \frac{x^2 + 1}{x^3 - 1} dx$	$\int \frac{x + \frac{1}{x}}{\sqrt{x^2 + 1}} dx$	$\int (x+1) \ln^2(x+1) dx$	$\int \frac{2x^3 + 6x^2 - 7x + 1}{(x-1)(x+1)^3} dx$	$\int \frac{\sqrt[5]{\left(1 + \sqrt[4]{x^3}\right)^4}}{x^{2.20} \sqrt{x^7}} dx$	$\int \frac{dx}{(1 + \sin x + \cos x)^2}$
23	$\int \frac{dx}{x^2 + 3x - 10}$	$\int \frac{\arctg x + x}{1 + x^2} dx$	$\int (x+2)^3 \ln(x+2) dx$	$\int \frac{x^3 - 6x^2 + 11x - 10}{(x+2)(x-2)^3} dx$	$\int \frac{\sqrt[3]{(1 + \sqrt{x})^2}}{x^6 \sqrt{x^5}} dx$	$\int \frac{dx}{\cos x(1 + \cos x)}$
24	$\int \frac{dx}{(x-1)^2 + 4}$	$\int \frac{x^3 dx}{x^2 + 1}$	$\int \sqrt{x} \ln^2 x dx$	$\int \frac{4x^4 + 2x^2 - x - 3}{x(x-1)(x+1)} dx$	$\int \frac{\sqrt{1+x}}{x^2 \sqrt{x}} dx$	$\int \frac{4 \operatorname{tg} x - 5}{1 - \sin 2x + 4 \cos^2 x} dx$
25	$\int \frac{dx}{4x^2 - 9}$	$\int \frac{1 - \sqrt{x}}{\sqrt{x}(x+1)} dx$	$\int x^2 e^{3x} dx$	$\int \frac{x^5 + 2x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 7x + 1}{(x+3)(x-1)x} dx$	$\int \frac{\sqrt{1 + \sqrt[4]{x^3}}}{x^2 \sqrt[8]{x}} dx$	$\int \frac{\operatorname{tg} x + 2}{\sin^2 x + 2 \cos^2 x - 3} dx$

Додаток 2

В-Т	Інтеграл	
	А	Б
1	$\int_1^e \frac{\sqrt{1 + \ln x}}{x} dx$	$\int_1^2 x 2^x dx$
2	$\int_0^1 \frac{x^3 dx}{\sqrt{10 - 3x^5}}$	$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{xdx}{\sin^2 x}$
3	$\int_0^{64} \frac{x + \sqrt{1+x}}{\sqrt[3]{1+x}} dx$	$\int_1^e \ln^2 x dx$
4	$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{xdx}{\sqrt{3 - 4x^2}}$	$\int_0^1 xe^{2x} dx$
5	$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{ctg}^5 x dx$	$\int_0^{\pi} x \sin x dx$
6	$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin x + \cos x}$	$\int_0^{e-1} \ln(x+1) dx$

В-Т	Інтеграл	
	А	Б
7	$\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^6} dx$	$\int_1^2 x \log_2 x dx$
8	$\int_1^e \frac{1 + \lg^2 x}{x} dx$	$\int_0^1 \arcsin x dx$
9	$\int_1^{e^3} \frac{dx}{x \sqrt[3]{1 + \ln^2 x}}$	$\int_0^{\pi} x^2 \sin x dx$
10	$\int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt[5]{x^2 + 1}}$	$\int_0^{\frac{\pi}{3}} x^2 \cos x dx$
11	$\int_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}} \sqrt{\frac{1 - \sin \frac{1}{x}}{x^4}} dx$	$\int_1^{e^2} x^2 \ln x dx$
12	$\int_0^3 \frac{dx}{1 + \sqrt{x+1}}$	$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{xdx}{\cos^2 x}$

Закінчення додатку 2

В-т	Інтеграл	
	А	Б
13	$\int_1^e \frac{\ln x dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$	$\int_0^{\frac{1}{2}} \arccos x dx$
14	$\int_3^8 \frac{xdx}{\sqrt{1+x}}$	$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx$
15	$\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}$	$\int_0^{\frac{\pi}{3}} x \operatorname{tg}^2 x dx$
16	$\int_1^e \sqrt{\frac{1+\lg x}{x^3}} dx$	$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x \sin x)^2 dx$
17	$\int_{-1}^1 \frac{xdx}{\sqrt{5-4x}}$	$\int_0^{\ln 2} \frac{xdx}{e^x}$
18	$\int_0^2 1-x dx$	$\int_1^e (x \ln x)^2 dx$

19	$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 x dx}{\sqrt[3]{\sin x}}$	$\int_{-1}^1 x \operatorname{arctg} x dx$
----	--	---

В-т	Інтеграл	
	А	Б
20	$\int_1^4 \frac{dx}{x\sqrt{x^2+9}}$	$\int_0^1 (xe^x)^2 dx$
21	$\int_0^1 \left \frac{x}{x+1} \right dx$	$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{x} \sin x dx$
22	$\int_1^2 \frac{\sqrt{x}}{x^2 \sqrt{xx+1}}$	$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx$
23	$\int_1^{16} \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[4]{x^3}} dx$	$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x dx$
24	$\int_2^3 \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}} dx$	$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x dx$

25	$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^4 x dx$	$\int_1^{e^2} x^2 \ln x dx$
----	---	-----------------------------

В-т	Приклади для інтегрування		
	А	Б	В
1	$\int_1^4 \frac{1 + \sqrt{x}}{x^2} dx$	$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt[3]{1 + 3 \sin x \cos x} dx$	$\int_0^{\frac{\pi}{3}} x \cos 3x dx$
2	$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos^2 x dx$	$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(2 \sin \frac{x}{2} + 3\right)^2 \cos \frac{x}{2} dx$	$\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \arccos x dx$
3	$\int_0^{\sqrt{3}} \frac{xdx}{\sqrt{4-x^2}}$	$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{(\arccos x)^5 \sqrt{1-x^2}}$	$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{x \sin x dx}{\cos^3 x}$
4	$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x dx$	$\int_1^{\sqrt{3}} \frac{\sqrt[3]{\arctg x}}{\sqrt{1+x^2}} dx$	$\int_0^{\sqrt{3}} x \arctg x dx$
5	$\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{xdx}{\sqrt{5-4x^2}}$	$\int_1^3 \frac{(2 \ln x + 3)^3 dx}{x}$	$\int_0^{0,5} x \arcsin x dx$

В-т	Приклади для інтегрування		
	А	Б	В
6	$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x dx$	$\int_2^3 \frac{x^4 dx}{\sqrt{x^{10} - 2}}$	$\int_1^2 x^2 \ln x dx$
7	$\int_0^1 \frac{dx}{x^2 + 4x + 5}$	$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2} \sqrt{5+3 \arcsin^2 x}}$	$\int_0^{\pi} x^2 \sin 4x dx$
8	$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin^3 x} dx$	$\int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{(1+x^2) \sqrt{5+3 \arctg^2 x}}$	$\int_0^{0,5} \frac{x \arccos x dx}{\sqrt{1-x^2}}$
9	$\int_{-1}^3 \frac{dx}{\sqrt{7-2x}}$	$\int_1^3 \frac{\sqrt[3]{1+\ln x}}{x} dx$	$\int_1^3 x^2 e^{3x} dx$
10	$\int_1^2 \frac{e^x}{x^2} dx$	$\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{(\arcsin x)^2}{\sqrt{1-x^2}} dx$	$\int_{0,5}^1 e^{ax} \sin bx dx$
12	$\int_3^4 \frac{dx}{x^2 - 3x + 2}$	$\int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\cos^2 x (2 \operatorname{tg} x + 1)}$	$\int_{0,5}^1 e^{ax} \cos bx dx$

В-т	Приклади для інтегрування		
	А	Б	В
13	$\int_2^9 \sqrt[3]{x-1} dx$	$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x dx}{\sqrt[3]{\cos^2 x}}$	$\int_0^3 \cos(\ln x) dx$
14	$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}}$	$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x dx}{\sqrt[3]{1 + \cos^2 x}}$	$\int_2^3 \sin(\ln x) dx$
15	$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^3 x dx}{\sqrt[3]{\sin x}}$	$\int_{\frac{1}{5}}^1 \frac{dx}{x\sqrt{1-4\ln x}}$	$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{x \cos x}{\sin^2 x} dx$
16	$\int_0^{e^2} \frac{dx}{x \ln x}$	$\int_0^2 e^x \sqrt[3]{4 + e^x} dx$	$\int_1^3 x^2 e^{-x} dx$
17	$\int_0^1 \frac{e^x}{1 + e^{2x}} dx$	$\int_0^1 \frac{x + \operatorname{arctg} x}{1 + x^2} dx$	$\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} (\arcsin x)^2 dx$
18	$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x dx$	$\int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{9-x^8}}$	$\int_0^{\sqrt{3}} (\operatorname{arctg} x)^2 dx$

			Продовження додатку 3
Приклади для інтегрування			
В-т	А	Б	В
19	$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{3+2x-x^2}}$	$\int_0^{\pi} \frac{\sin x dx}{\sqrt[3]{3+2\cos x}}$	$\int_1^2 \frac{\ln x}{x^2} dx$
20	$\int_1^6 \sqrt{x+3} dx$	$\int_2^4 \frac{e^x dx}{(7-e^x)^2}$	$\int_0^{\pi} x^2 \cos 4x dx$
21	$\int_0^1 (e^x - 1)^4 e^x dx$	$\int_1^3 \frac{dx}{x(10 + \ln^2 x)}$	$\int_0^1 \frac{\sin 2x}{2^x} dx$
22	$\int_{-1}^1 \frac{xdx}{(x^2+1)^2}$	$\int_1^3 \frac{\sqrt[3]{4+\ln x}}{x} dx$	$\int_0^2 \frac{\cos 2x}{2^x} dx$
23	$\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{16-x^2}}$	$\int_1^{\sqrt{3}} \frac{\operatorname{arctg} \sqrt{x}}{\sqrt{x(1+x)}} dx$	$\int_1^2 \ln^2 x dx$
24	$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 \frac{x}{2} dx$	$\int_{-\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{8}} \frac{\sin 3x}{\sqrt[3]{\cos^4 3x}} dx$	$\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^{2 \operatorname{arctg} x}}{1+x^2} dx$

25

$$\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{4-x}}$$

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sec^2 x dx}{\sqrt{11-5 \operatorname{tg}^2 x}}$$

$$\int_0^{\frac{1}{4}} \frac{\arcsin 2x dx}{\sqrt{1-4x^2}}$$

Додаток 4

В-т	Площа фігури		Довжина дуги
	А	Б	
1	(D) $\begin{cases} y^2 = 4 - 2x, \\ y^2 = 3z + 9 \end{cases}$	(D) $\begin{cases} x = a \cos t, \\ y = b \sin t \end{cases}$	(L) $\begin{cases} y = \ln x, \\ x_1 = \sqrt{3}, x_2 = 2\sqrt{2} \end{cases}$
2	(D) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 16 \\ y^2 = 6x \end{cases}$	(D) $\{\rho = 2 \cos \varphi\}$	(L) $\begin{cases} \frac{3}{y} = x^2, \\ 0 \leq x \leq 4 \end{cases}$
3	(D) $\begin{cases} y = \operatorname{tg} x, \\ y = \frac{2}{3} \cos x \\ x = 0 \end{cases}$	(D) $\{\rho = 1 + \cos \varphi\}$	(L) $\begin{cases} 2y = x^2 - 9 \\ -3 \leq x \leq 3 \end{cases}$
4	(D) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2x, \\ x^2 + y^2 = 2y \end{cases}$	(D) $\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$	(L) $\begin{cases} y = e^z \\ 0 \leq x \leq 5 \end{cases}$
5	(D) $\begin{cases} y = x^2, \\ y = \frac{x^3}{3} \end{cases}$	(D) $\{\rho = 4 \sin^2 \varphi\}$	(L) $\begin{cases} \frac{2}{x^3} + \frac{2}{y^3} = \frac{2}{a^3} \end{cases}$
6	(D) $\left\{ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1 \right\}$	(D) $\{\rho = 4 \cos^2 \varphi\}$	(L) $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$
7	(D) $\begin{cases} y^2 = 6x \\ x = 3 \end{cases}$	(D) $\begin{cases} \rho = a \varphi, \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{cases}$	(L) $\begin{cases} x = t^2, \\ y = t - \frac{t^3}{3} \end{cases}$
8	(D) $\begin{cases} y = \arcsin x, \\ y = \frac{\pi}{4}, y = \frac{\pi}{3}, \\ x = 0 \end{cases}$	(D) $\begin{cases} \rho = 1, \rho = 2, \\ \varphi = 0, \varphi = \frac{\pi}{4} \end{cases}$	(L) $\begin{cases} y^2 = x^3 \\ 0 \leq x \leq 2 \end{cases}$
9	(D) $\begin{cases} y = \frac{1}{1+x^2}, \\ y = \frac{1}{2} x^2 \end{cases}$	(D) $\begin{cases} x = \cos^3 t, \\ y = \sin^3 t \end{cases}$	(L) $\begin{cases} \rho = \frac{a}{\varphi}, \\ \frac{\pi}{5} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$

			Продовження додатку 4
В-т	Площа фігури		Довжина дуги
	А	Б	
10	(D) $\begin{cases} y = x^2, \\ x + y = 2 \end{cases}$	(D) $\begin{cases} \rho = a \cos^2 \varphi, \\ a > 0 \end{cases}$	(L) $\begin{cases} y = \ln \cos x \\ 0 \leq x \leq \frac{\pi}{3} \end{cases}$
11	(D) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 8, \\ y = \frac{x^2}{2} \end{cases}$	(D) $\{\rho = a^2 \cos 2\varphi\}$	(L) $\begin{cases} 2y = x^2 - 1, \\ 0 \leq x \leq \sqrt{2} \end{cases}$
12	(D) $\begin{cases} y = 4x - x^2, \\ 2x - y = 8 \end{cases}$	(D) $\{\rho = 2a(2 + \cos \varphi)\}$	(L) $\begin{cases} y = 2\sqrt{x} \\ 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$
13	(D) $\begin{cases} y = 4 - x^2, \\ y = 2x \end{cases}$	(D) $\{\rho = a \sin 3\varphi\}$	(L) $\begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$
14	(D) $\begin{cases} xy = 8, \\ y = x^2, x = 6 \end{cases}$	(D) $\{\rho = 3 + 2 \cos \varphi\}$	(L) $\begin{cases} y^2 = (x + 1)^2 \\ -1 \leq x \leq 1 \end{cases}$
15	(D) $\begin{cases} y = x^3, \\ y = x^2 - 2, \\ x = 0 \end{cases}$	(D) $\begin{cases} \rho = R, \\ \rho = 2R \cos \varphi \end{cases}$	(L) $\begin{cases} y = \ln \sin x, \\ \frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$
16	(D) $\begin{cases} y = x^2 - 2x, \\ y - 3 = 0 \\ x = 0 \end{cases}$	(D) $\begin{cases} \rho = R, \\ \rho = 2R \sin \varphi \end{cases}$	(L) $\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t \end{cases}$
17	(D) $\begin{cases} y = (x - 3)^2, \\ 4x - y = 12 \end{cases}$	(D) $\begin{cases} x = 3t^2, \\ y = 3t - t^3 \end{cases}$	(L) $\{\rho = 2 \sin \varphi\}$
18	(D) $\begin{cases} y = \sin x, \\ y = 0, \\ 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$	(D) $\{\rho = 2a(2 + \cos \varphi)\}$	(L) $\begin{cases} 2y = e^x + e^{-x}, \\ 0 \leq x \leq \ln 3 \end{cases}$
19	(D) $\begin{cases} y = \ln x, \\ y = 0, \\ x = e \end{cases}$	(D) $\left\{ \rho = \frac{2}{2 - \cos \varphi} \right\}$	(L) $\begin{cases} \rho = \varphi, \\ \frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{3\pi}{4} \end{cases}$

			Закінчення додатку 3
В-т	Площа фігури		Довжина дуги
	А	Б	
20	(D) $\{y^2 = x(x-1)^2\}$	(D) $\{\rho = 3 + \cos \varphi\}$	(L) $\begin{cases} y = 2x\sqrt{x} \\ 0 \leq x \leq \frac{4}{9} \end{cases}$
21	(D) $\begin{cases} y = x^2, \\ y = \frac{2}{1+x^2} \end{cases}$	(D) $\begin{cases} x = t - t^2, \\ y = t^2 - t^3 \end{cases}$	(L) $\{\rho = a(1 + \cos \varphi)\}$
22	(D) $\begin{cases} y = x^3, \\ y = -x, \\ y = 8 \end{cases}$	(D) $\{\rho = a \cos 5\varphi\}$	(L) $\{9y^2 = x(3-x)\}$
23	(D) $\begin{cases} y = x^2, \\ y = x \end{cases}$	(D) $\{\rho = 4 \cos \varphi\}$	(L) $\begin{cases} x = \frac{t^3}{3} - t, \\ y = t^2 + 1 \end{cases}$
24	(D) $\begin{cases} y = x^2, \\ y = x-2 \end{cases}$	(D) $\begin{cases} \rho = \frac{1}{\varphi}, \\ \varphi_1 = \frac{\pi}{2}, \varphi_2 = \pi \end{cases}$	(L) $\begin{cases} \rho = a \sin \varphi, \\ a > 0 \end{cases}$
25	(D) $\begin{cases} y = \operatorname{ctg} x, \\ y = \frac{2}{3} \sin x, \\ y = 0 \end{cases}$	(D) $\begin{cases} x = 4 \cos t, \\ y = 9 \sin t \end{cases}$	(L) $\begin{cases} \rho = a \varphi, \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{cases}$

Додаток 5

В-т	Об`єм тіла обертання	Площа тіла обертання
1	(D) $\begin{cases} y = \sin^2 x, \\ 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$	(L) $\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$
2	(D) $\begin{cases} y^2 = 3x \\ y = x \end{cases}$	(L) $\begin{cases} x = R \cos t, \\ y = R \sin t \end{cases}$
3	(D) $\begin{cases} y = x^3, \\ y = 0, x = 2 \end{cases}$	(L) $\begin{cases} y = 2\sqrt{x}, \\ 2 \leq x \leq 4 \end{cases}$
4	(D) $\begin{cases} y = \frac{2}{1+x^2}, \\ y = z, x = 0 \end{cases}$	(L) $\begin{cases} y = \sin 2x, \\ 0 \leq x \leq 2\pi \end{cases}$
5	(D) $\begin{cases} y = x^2, \\ y^2 = 8x \end{cases}$	(L) $\begin{cases} y = \operatorname{tg} x, \\ 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4} \end{cases}$
6	(D) $\begin{cases} y = \frac{1}{1+x^2}, \\ y = 0 \end{cases}$	(L) $\begin{cases} y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}), \\ 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$
7	(D) $\begin{cases} y^2 = 4(x-1), \\ y = x \end{cases}$	(L) $\begin{cases} y = x^2, \\ x = a, y = 0 \end{cases}$
8	(D) $\begin{cases} y = \sin x, \\ y = \cos x, y = 0, \end{cases}$	(L) $\{x^2 + y^2 - by + 3 = 0$
9	(D) $\begin{cases} y = (x-1)^2, \\ y = \frac{1}{2}x \end{cases}$	(L) $\begin{cases} y^2 = 4ax, \\ 0 \leq x \leq 3a \end{cases}$
10	(D) $\begin{cases} y = x^2 - 4x + 3, \\ y = 3 - x, y = 0 \end{cases}$	(L) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 1, \\ 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$
11	(D) $\begin{cases} y = \frac{1}{x}, \\ y = x, x = 2 \end{cases}$	(L) $\begin{cases} y - x^2, \\ 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$

		Продовження додатку 5
В-т	Об'єм тіла обертання	Площа тіла обертання
12	(D) $\begin{cases} y = 2x - x^2, \\ y = 0 \end{cases}$	(L) $\begin{cases} y = \sqrt{4 - x^2}, \\ -1 \leq x \leq 2 \end{cases}$
13	(D) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ y = x, x = 0 \end{cases}$	(L) $\begin{cases} y = \sqrt{x}, \\ 1 \leq x \leq 4 \end{cases}$
14	(D) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 4, \\ x = 2, y = 2 \end{cases}$	(L) $\begin{cases} y = 2x, \\ 1 \leq x \leq 4 \end{cases}$
15	(D) $\begin{cases} y = \sin x, \\ y = 0, \\ 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$	(L) $\begin{cases} y = \frac{1}{3}x^3, \\ -1 \leq x \leq 1 \end{cases}$
16	(D) $\begin{cases} \frac{2}{x^3} + \frac{2}{y^3} = \frac{2}{a^3} \end{cases}$	(L) $\begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 1 - \cos t, \\ 0 \leq t \leq 2\pi \end{cases}$
17	(D) $\begin{cases} y = xe^x, \\ x = 1, y = 0 \end{cases}$	(L) $\begin{cases} y = \operatorname{ctgx}, \\ \frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$
18	(D) $\begin{cases} y = \sin x, \\ y = 0, y = 1 \end{cases}$	(L) $\begin{cases} 9y^2 = x(3 - x), \\ 0 \leq x \leq 3 \end{cases}$
19	(D) $\begin{cases} y = -x^2 + 2x, \\ y = (x - 1)^2 \end{cases}$	(L) $\begin{cases} y = e^{-x}, \\ x \geq 0 \end{cases}$
20	(D) $\begin{cases} y = 2 - x^2, \\ y = x, x = 0 \end{cases}$	(L) $\begin{cases} y = \sqrt{R^2 - x^2}, \\ 0 \leq x \leq R \end{cases}$
21	(D) $\begin{cases} y^2 = x^2, \\ y = 0, x = 1 \end{cases}$	(L) $\begin{cases} y = 2x - x^2, \\ 0 \leq x \leq 2 \end{cases}$

22	(D) $\begin{cases} y = \sqrt{x}, y = 2\sqrt{x} \\ x = 1, x = 4 \end{cases}$	(L) $\begin{cases} y = \cos x, \\ 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$
		Закінчення додатку 5
В-т	Об'єм тіла обертання	Площа тіла обертання
23	(D) $\begin{cases} y = x , \\ y = \frac{1}{x}, y = 4 \end{cases}$	(L) $\begin{cases} y = (2 - a)^2, \\ y = \frac{a}{2}x \end{cases}$
24	(D) $\begin{cases} y = \operatorname{tg}x, \\ x + y = \frac{\pi}{2}, x = 0 \end{cases}$	(L) $\begin{cases} y = -x^2 + 1, \\ -1 \leq x \leq 1 \end{cases}$
25	(D) $\begin{cases} y = \sqrt{x}, e^x, \\ z = 1, y = 0 \end{cases}$	(L) $\begin{cases} y = 1 - x , \\ -1 \leq x \leq 1 \end{cases}$

Навчально-методичне видання

ВИЩА МАТЕМАТИКА
Модуль 3. Інтегральне числення

Методичні вказівки
до виконання індивідуальних завдань
для студентів спеціальностей
151 «Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології»,
141 «Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка»

Укладачі: **Баліна Олена Іванівна**
Безклубенко Ірина Сергіївна
Буценко Юрій Петрович

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Київський національний університет будівництва і архітектури

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Модуль 3. Інтегральне числення

Методичні вказівки

до виконання індивідуальних завдань

для студентів спеціальностей

151 «Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології»,

141 «Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка»

Усі цитати, цифровий та фактичний матеріал, бібліографічні відомості перевірені. Написання одиниць вимірювання відповідає стандартам

Підписи авторів _____

«_____» _____ 2019 р.

Підпис голови методичної комісії факультету



«_____» _____ 2019 р.

Київ - 2019