МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Київський національний університет будівництва і архітектури

,

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Модуль 4. Диференціальні рівняння

Методичні вказівки
до виконання індивідуальних завдань
для студентів спеціальностей
151 «Автоматизація та комп`ютерно-інтегровані технології»,

141 «Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка»

Київ 2020

УДК 519.6

Укладачі: Баліна О.І., канд. техн. наук, доцент
Безклубенко І.С., канд. техн. наук, доцент
Буценко Ю.П., канд. фіз.-мат. наук, доцент

Рецензент О.О. Терентьєв, д-р техн. наук, професор

Відповідальний за випуск О.О. Терентьєв, д-р техн. наук, професор

Затверджено на засіданні кафедри інформаційних технологій проектування та прикладної математики, протокол №1 від 31 серпня 2020 року.

Видається в авторській редакції.

Вища математика. Модуль 4. Диференціальні рівняння: методичні вказівки до виконання індивідуальних: методичні вказівки / уклад.: О.І. Баліна та ін. – Київ: КНУБА, 2020. – 51 с.

Методичні вказівки містять спеціально підібрані задачі та вправи по розв’язку та застосуванню диференціальних рівнянь. Містять зміст, вказівки до виконання завдань з розв’язку диференціальних рівнянь, варіанти індивідуальних завдань.

Призначено для студентів спеціальностей

151 «Автоматизація та комп`ютерно-інтегровані технології»,

141 «Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка»

КНУБА, 2020

ЗМІСТ

Загальні положення

Дане видання являє собою методичні вказівки для вивчення курсу вищої математики з розділу «Диференціальні рівняння» для студентів першого курсу інженерних спеціальностей.

Студенти мають знати:

- основні математичні поняття сучасної математичної символіки, елементи теорії множин і математичної логіки як основних можливостей мінімально-збиткового представлення математично формалізованих процесів; теорію континіуму (теорію дійсних чисел), яка являється тим середовищем, де методи і засоби математичного аналізу виростають в сильні математичні знаряддя природознавства і техніки.

Студенти мають вміти:

- математично моделювати технологічні, технічні та соціально-економічні процеси в межах тих технологічних, технічних та соціально-економічних знань, які вони отримали при вивченні відповідних природничих та спеціальних дисциплін; за умов міждисциплінарних зв'язків в процесі бакалаврської підготовки та за умов подальшої інженерної діяльності чисельно розв'язувати практичні задачі в межах вище означеного, кількісно оцінювати результати практичних завдань, проектів та бізнес-пропозицій.

Елементи теорії диференціальних рівнянь.

Диференціальним рівнянням називається співвідношення типу

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots, \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0,$$

де x - незалежна змінна, $y(x)$ - невідома функція аргументу x, $F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots, \frac{d^ny}{dx^n}\right)$ - задана функція змінних $x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots, \frac{d^ny}{dx^n}$.

Найвищий порядок похідної, яка міститься в рівнянні, називають *порядком диференціального рівняння*.

Якщо незалежна змінна одна, то рівняння називається *звичайним диференціальним рівнянням*; якщо ж змінних більше, то рівняння називають *диференціальним рівнянням з частинними похідними.*

Розглянемо спочатку звичайні диференціальні рівняння першого порядку, тобто рівняння виду $F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right)=0$, або $\frac{dy}{dx}= f(x, y)$ - розв'язане відносно похідної, де $f(x, y)$ - задана функція.

Часто використовують *симетричну форму запису диференціального рівняння першого порядку (у диференціалах)* $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$, де $P(x, y), Q(x, y)$ - задані функції змінних x і y.

Розв'язком диференціального рівняння першого порядку на інтервалі I називають неперервно диференційовну функцію $y=\varphi(x)$, яка перетворює це рівняння на тотожність на інтервалі I, тобто $F\left(x, \varphi(x), \frac{d\varphi(x)}{dx}\right)=0$, або $\frac{d\varphi(x)}{dx}= f(x, \varphi(x))$ для всіх $x \in I$.

Процес відшукання розв'язку диференціального рівняння називається *інтегруванням диференціального рівняння.*

Співвідношення $\psi(x, y)=0$ називають *інтегралом диференціального рівняння першого порядку*, якщо воно неявно задає розв'язок $y=\varphi(x)$ цього рівняння.

Зауваження: якщо процес розв'язання диференціального рівняння доведений до обчислення інтегралів, то отриманий результат називають його розв'язком у інтегралах.

Графік розв'язку $y=\varphi(x)$ називають *інтегральною кривою диференціального рівняння*. Проекцію інтегральної кривої на вісь ординат називають *фазовою кривою, або траєкторією диференціального рівняння.*

Задачу знаходження розв'язку $y=\varphi(x)$ диференціального рівняння першого порядку, який задовольняє умову $y_0=\varphi(x_0)$, називають *задачею Коші*. З геометричної точки зору, розв'язати задачу Коші означає виділити з множини інтегральних кривих ту, яка проходить через точку (x_0, y_0).

Загальним розв'язком диференціального рівняння першого порядку називають функцію $y=\varphi(x, C)$, яка залежить від довільної сталої C, і таку, що:

1) при довільному c вона є розв'язком даного рівняння;

2) для довільної початкової умови $y_0 = \varphi(x_0)$ існує єдине значення $c = c_0$, при якому розв'язок $y = \varphi(x, c_0)$ задовольняє задану початкову умову.

Якщо загальний розв'язок диференціального рівняння знайдено в неявному вигляді $\varphi(x, y, C) = 0$, то таке співвідношення називається *загальним інтегралом диференціального рівняння першого порядку.*

Розв'язок, який утворюється із загального розв'язку при фіксованому значенні сталої c, називається *частинним.*

Розв'язок диференціального рівняння, в кожній точці якого порушується умова єдиності, називають *особливим розв'язком.*

Особливий розв'язок неможливо отримати із загального при жодному значенні сталої c.

Наведемо достатні умови існування та єдиності розв'язку задачі Коші $\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$.

Теорема Пікара. Нехай функція $f(x, y)$ неперервна в прямокутнику $\Pi = \{(x, y) : |x - x_0| \le a, \ |y - y_0| \le b\}, \quad a > 0, \ b > 0$ і задовольняє умову Ліпшица по y рівномірно відносно x, тобто $|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \le N|y_1 - y_2|$ для всіх x, таких що $(x, y) \in \Pi$.

Позначимо $M = \max\limits_{(x,y)\in\Pi} |f(x, y)|, \quad h = \min\left(a, \frac{b}{M}\right)$. Тоді задача Коші на проміжку $[x_0 - h, x_0 + h]$ має єдиний розв'язок $y = \varphi(x)$.

Теорема Пеано. Нехай функція $f(x, y)$ неперервна в прямокутнику Π, причому $M = \max\limits_{(x,y)\in\Pi} |f(x, y)|, \quad h = \min\left(a, \frac{b}{M}\right)$. Тоді задача Коші на проміжку $[x_0 - h, x_0 + h]$ має принаймні один розв'язок $y = \varphi(x)$.

Через кожну точку (x, y) області визначення рівняння $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ проведемо пряму, тангенс кута нахилу якої до осі абсцис дорівнює $f(x, y)$. Цю сім'ю прямих називають *полем напрямів вказаного* *рівняння , або полем напрямів функції* $f(x,y)$.

Інтегральна крива в кожній своїй точці дотикається до поля напрямів функції $f(x,y)$. Крива, яка в кожній своїй точці дотикається до напряму поля в цій точці, є інтегральною.

Ізокліною називають криву, в кожній точці якої напрям поля однаковий. Усі інтегральні криві, що перетинають дану ізокліну, утворюють із віссю абсцис один і той самий кут.

Деякі типи диференціальних рівнянь першого порядку:

1) *Диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними.*

Рівняння виду $\frac{dy}{dx}=f(x)g(y)$, де $f(x)$ і $g(y)$ - задані неперервні на деякому інтервалі функції, називається *диференціальним рівнянням з відокремлюваними змінними.*

Для його розв’язання змінні відокремлюють: $\left[\begin{array}{l}\frac{dy}{g(y)}=f(x)dx\\ g(y)=0\end{array}\right.$.

Загальний інтеграл диференціального рівняння має вид
$\left[\begin{array}{l}\int\frac{dy}{g(y)}=\int f(x)dx+C\\ g(y)=0\end{array}\right.$.

Приклад 1. Знайти загальний інтеграл диференціального рівняння $\frac{dy}{dx}=\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y$.

Розв’язання. Відокремлюємо змінні: $\left[\begin{array}{l}\frac{dy}{\operatorname{tg}y}=\operatorname{tg}xdx\\ \operatorname{tg}y=0\end{array}\right.$ і знаходимо

загальний інтеграл рівняння
$\left[\begin{array}{l}\ln|\sin y|=-\ln|\cos x|+\ln C,\quad C>0\\ \operatorname{tg}y=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\sin y\cos x=C,\quad C\in R$.

Приклад 2. Знайти розв’язок задачі Коші $\begin{cases}(1+x^2)dy+ydx=0\\ y(1)=1\end{cases}$.

Розв’язання. Відокремлюючи змінні маємо $\left[\begin{array}{l}\frac{dy}{y}=-\frac{dx}{1+x^2}\\ y=0\end{array}\right.$, звідки

$\left[\begin{array}{l}\int\frac{dy}{y}=-\int\frac{dx}{1+x^2}\\ y=0\end{array}\right.$, тобто $\left[\begin{array}{l}\ln|y|=-\operatorname{arctg}x+C\\ y=0\end{array}\right.$ - загальний інтеграл диференціального рівняння. Враховуючи початкову умову $y(1)=1$ знайдемо сталу С: $\ln 1=-\operatorname{arctg}1+C \Rightarrow C=\frac{\pi}{4}$.

Отже, розв’язком задачі Коші є функція $y=e^{\frac{\pi}{4}-\operatorname{arctg}x}$.

Приклад 3. Розв’язати рівняння $y'=xy^2+2xy$.

Розв’язання. Запишемо рівняння у вигляді $\frac{dy}{dx}=xy(y+2)$.

Відокремимо змінні $\left[\begin{array}{l}\frac{dy}{y(y+2)}=xdx\\ y=0,\quad y=-2\end{array}\right.$. Функції $y=0$ і $y=-2$ є розв’язками рівняння. Інші розв’язки знайдемо зінтегрувавши рівняння:

$$\int\frac{dy}{y(y+2)}=\int xdx \quad\Rightarrow \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{y+2}\right)dy-\int xdx=\frac{1}{2}\ln C,\quad C>0 \quad\Rightarrow$$

$$\ln|y|-\ln|y+2|-x^2=\ln C,\quad C>0 \quad\Rightarrow\left|\frac{y}{y+2}\right|=Ce^{x^2},\quad C>0.$$

Оскільки розв’язок $y=0$ можна дістати з останнього співвідношення при $c=0$, то загальний інтеграл рівняння має вид

$$\left[\begin{array}{l}\frac{y}{y+2}=Ce^{x^2},\quad C\in R\\ y=-2\end{array}\right.,$$

де $y=-2$ є особливим розв’язком.

Приклад 4. Крива $y=\varphi(x)$ проходить через точку $(1,2)$. Кожна дотична до цієї кривої перетинає пряму $y=1$ у точці з абсцисою, яка дорівнює подвійній абсцисі точки дотику. Знайти криву $y=\varphi(x)$.

Розв’язання. Нехай (x,y) - довільна точка на даній кривій. Рівняння дотичної, проведеної до цієї кривої в точці (x,y) має вид $Y-y=\frac{dy}{dx}(X-x)$, де X,Y - змінні координати точок дотичної.

З умови, що дотична перетинає пряму $Y=1$ у точці з абсцисою $2x$, дістаємо диференціальне рівняння, якому задовольняє шукана крива: $1-y=\frac{dy}{dx}(2x-x) \Rightarrow x\frac{dy}{dx}=1-y$. Відокремивши змінні та зінтегрувавши це рівняння, знайдемо

$$\left[\begin{array}{l} \frac{dy}{1-y}=\frac{dx}{x} \\ y=1 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} -\ln|1-y|=\ln|x|+\ln C, \quad C>0 \\ y=1 \end{array}\right. \Rightarrow y-1=\frac{C}{x}, \quad C\in R.$$

Шукана крива проходить через точку $(1,2)$, тому $2-1=\frac{C}{1} \Rightarrow C=1$.

Отже, $y=1+\frac{1}{x}$ - шукана крива. Особливий розв'язок не задовольняє умові.

Приклад 5. Крива $y=\varphi(x)$ проходить через точку $(0,1)$ і в кожній її точці тангенс кута нахилу дотичної до кривої в точці (x,y) дорівнює подвоєному добутку координат точки дотику. Знайти криву $y=\varphi(x)$.

Розв'язання. Нехай (x,y) - довільна точка на шуканій кривій. Тангенс кута нахилу дотичної до кривої в точці (x,y) дорівнює значенню похідної шуканої функції в точці x, тобто $\frac{dy}{dx}$. За умовою $\frac{dy}{dx}=2xy$, звідки $y=Ce^{x^2}$, $C\in R$. Оскільки $y(0)=1$, то $C=1$ і $y=e^{x^2}$ - рівняння шуканої кривої.

Логістичне рівняння (*рівняння Ферхюльста*) є диференціальним рівнянням з відокремлюваними змінними, яке описує зміну чисельності популяції деяких організмів у залежності від наявних ресурсів, які забезпечують її існування.

Якщо через $N(t)$ позначити чисельність цієї популяції у момент часу t, а через N_0 її чисельність при $t=0$, то маємо $\frac{dN}{dt}=kN\left(1-\frac{N}{K}\right)$, де k - характеристика швидкості зростання популяції (розмноження організмів), K - підтримуюча місткість середовища (ресурс, який обмежує чисельність популяції). Розв'язком цього рівняння є логістична функція $N(t)=\frac{KN_0e^{kt}}{K+N_0(e^{kt}-1)}$.

Приклад. Початкова температура тіла $-5^\circ C$, температура оточуючого середовища незмінна та складає $22^\circ C$. Визначити, через скільки хвилин тіло нагріється до $20^\circ C$, якщо до $15^\circ C$ воно нагрілося за 10 хвилин.

Розв'язання. Позначивши через $T(t)$ температуру тіла в момент часу t (час вимірюється у хвилинах), можемо записати *за законом Ньютона* $\frac{dT}{dt}=k(T_0-T(t))$, де k - коефіцієнт пропорціональності, T_0 - температура оточуючого середовища, тобто $\frac{dT}{dt}=k(22-T(t))$ - це рівняння з відокремлюваними змінними, звідки, після відокремлення змінних та інтегрування маємо $-\ln|22-T(t)|=kt+\ln C,\quad T(t)=22+Ce^{-kt}$. Оскільки $T(0)=5$, то $C=-17$, також $T(10)=15$, тобто $15=22-17e^{-10k},\quad k=-\frac{1}{10}\ln\frac{7}{17}$, тобто $T(t)=22+17e^{\frac{t}{10}\ln\frac{7}{17}}$.

Поклавши $T(t)=20$, отримуємо $t=10\frac{\ln\frac{2}{17}}{\ln\frac{7}{17}}\approx 24{,}12$ (хв.).

Приклад. Аудиторія має об'єм 300 метрів кубічних, повітря у ній містить 0,2% вуглекислого газу. Вентиляція щохвилини дає 30 кубічних метрів «свіжого» повітря, яке містить 0,04% co_2, тиск незмінний. Через який час вміст co_2 у повітрі цієї кімнати складатиме 0,1%?

Розв'язання. Нехай t - час у хвилинах, $y(t)$ - концентрація вуглекислого газу у приміщенні. Можемо записати, що $300(y(t+\Delta t)-y(t))=30(0{,}0004-(y(t)+\alpha))\Delta t$.

Це рівняння описує зміну кількості co_2 у кімнаті, доданок α пов'язаний із тимчасовим припущенням про незмінність концентрації вуглекислого газу у приміщенні на проміжку часу $[t,t+\Delta t]$. Звідси маємо $\frac{y(t+\Delta t)-y(t)}{\Delta t}=\frac{1}{10}(0{,}0004-(y(t)+\alpha))$.

Спрямовуючи Δt до 0 (відповідно, прямуватиме до 0 і число α) маємо задачу Коші для диференціального рівняння з відокремлюваними змінними $y'=\frac{1}{10}(0{,}0004-y),\quad y(0)=0{,}02$.

Інтегруючи, отримуємо $y(t)=0{,}0004+Ce^{-\frac{t}{10}}$, з початкової умови маємо, що $C = 0{,}0196$. Поклавши $y(t) = 0{,}01$, маємо $0{,}01 = 0{,}0004 + 0{,}0196e^{-\frac{t}{10}}$,

звідки $e^{-\frac{t}{10}} = \dfrac{0{,}0096}{0{,}0196} \approx 0{,}49$,

$t \approx 7$ хв.

Приклад. Визначити період піврозпаду радію 226_{Ra}, якщо з одного його граму протягом року розпадається 0,44мг.

Розв’язання. За Ф. Содді та Е. Резерфордом, швидкість розпаду радіоактивних речовин пропорційна наявній їх кількості, тобто $\dfrac{dm}{dt} = km$, де $m(t)$ - кількість радіоактивної речовини у момент часу t. Вимірюючи $m(t)$ у грамах, а час t у роках, маємо

$m(0) = 1, \quad m(1) = 0{,}99956$.

Розв’язуючи рівняння з відокремлюваними змінними, визначаємо $m(t) = Ce^{-kt}, \quad C = 1, \quad e^{-k} = 0{,}99956$, звідки $k = -\ln 0{,}99956$. Поклавши $m(t) = 0{,}5$, отримуємо $e^{t \ln 0{,}99956} = 0{,}5, \quad t = \dfrac{\ln 0{,}5}{\ln 0{,}99956} \approx 1575$, тобто період піврозпаду даного ізотопу радію складає приблизно 1575 років.

Приклад. Ємність, площа горизонтального перерізу якої є функцією відстані від її дна $S(h)$, заповнена рідиною до рівня H. Протягом якого часу рідина витече повністю через отвір у дні площею σ?

Розв’язання. Відповідно до закону Торрічеллі, швидкість витікання рідини через малий отвір на глибині h є $v = \mu\sqrt{2gh}$, де μ - коефіцієнт, який визначається типом рідини.

Для нашого випадку, якщо висота рідини у ємності є $h(t)$, то за час $[t, t + \Delta t]$ витече приблизний об’єм $\sigma v(h)\Delta t$ рідини, при цьому рівень рідини знизиться приблизно на $S(h)\Delta h$. Прирівнюючи об’єми та спрямовуючи Δt до 0, отримуємо диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними $\dfrac{dh}{dt} = \dfrac{\sigma v(h)}{S(h)} = \dfrac{\sigma\mu\sqrt{2gh}}{S(h)}$, звідси

$$t = \frac{1}{\sigma\mu\sqrt{2g}} \int_0^H \frac{S(h)}{\sqrt{h}} dh .$$

Вправи та задачі

1. Знайдіть загальний розв’язок диференціального рівняння з відокремлюваними змінними:

1) $\frac{2ydy}{xdx}=5x-2$

2) $\frac{ydy}{dx}=2y-3$

3) $(3y-2)\sin 2xdx=cos2xdy$

4) $\cos y(2x-1)dy=\sin xdx$

5) $\frac{dy}{dx}=\frac{y+2}{\cos^2 x(tgx+1)}$

6) $\frac{dy}{dx}=\frac{y-1}{x(\ln x+2)}$

7) $y'=3^{x+y}$

8) $y'=10^{x-y}$

9) $y(e^{2x}+1)dy=(y+3)e^{x}dx$

10) $e^{-x}\left(1+\frac{dy}{dx}\right)=1$

11) $y'=2xe^{-y}\ln x$

12) $y'=xe^{2y}\cos x$.

2. Знайдіть частинні розв’язки диференціальних рівнянь, які задовольняють початковим умовам:

1) $\begin{cases}2ydy=(3x^2+2x+1)dx\\ y(0)=1\end{cases}$

2) $\begin{cases}(2x+5)dy=(2y-3)dx\\ y(-2)=2\end{cases}$

3) $\begin{cases}2\cos 2y\cos^2 xdy-dx=0\\ y(0)=\pi\end{cases}$

4) $\begin{cases}2(y+2)\sqrt{x}dy-ydx=0\\ y(0)=1\end{cases}$

5) $\begin{cases}\sqrt{1-y^2}dx-y\sqrt{1-x^2}dy=0\\ y(0)=1\end{cases}$

6 $\begin{cases}y'=e^{-y}shx\\ y(0)=0\end{cases}$

7) $\begin{cases}(\sqrt{x}+1)y^2dy=x(y^2+1)dx\\ y(0)=0\end{cases}$

8) $\begin{cases}x\sqrt{x^2-1}\ln 2dy=2^{-y}dx\\ y(1)=0\end{cases}$.

3. Текстові задачі

1) Знайдіть всі лінії, в яких відрізок дотичної між точкою дотику і віссю абсцис ділиться навпіл в точці перетину з віссю ординат.

2) Знайдіть всі лінії, в яких відрізок дотичної, що міститься між осями координат, ділиться навпіл в точці дотику.

3) Знайдіть криві, для яких площа трикутника, що утворений дотичною, ординатою точки дотику та віссю абсцис є величина

стала і рівна a^2.

4) В ємності знаходяться 100 літрів розчину, що містить 10 кг солі. В ємність неперервно подається вода зі швидкістю 5 л/хв., яка перемішується з розчином. З тією ж швидкістю утворений розчин витікає. Скільки солі залишиться в ємності через годину?

5) За 30 днів розпалось 50% початкової кількості радіоактивної речовини.Через який час залишиться 1% від початкової кількості.

2) *Однорідні диференціальні рівняння першого порядку.*

Диференціальне рівняння $\frac{dy}{dx}=f(x,y)$ називається *однорідним диференціальним рівнянням першого порядку*, якщо функція $f(x,y)$ задовольняє умову $f(tx,ty)=f(x,y)$ для всіх $t\neq 0$, тобто $f(x,y)$ є однорідною функцією виміру 0.

Заміна $y=x\cdot z(x)$ зводить однорідне рівняння до рівняння з відокремлюваними змінними. Рівняння виду $\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{ax+by+c}\right)$ зводиться до однорідного за допомогою підстановки $\begin{cases} x=t+\alpha \\ y=q+\beta \end{cases}$, де t,q - нові змінні, α і β - розв'язок системи рівнянь $\begin{cases} a_1\alpha+b_1\beta+c_1=0 \\ a\alpha+b\beta+c=0 \end{cases}$ за умови, що визначник $\Delta=a_1b-ab_1\neq 0$. Якщо ж $\Delta=0$, то підстановка $z=a_1x+b_1y+c_1$ зводить вказане рівняння до рівняння до рівняння з відокремлюваними змінними.

Приклад 6. Розв'язати рівняння $\frac{dy}{dx}=\frac{xy+y^2e^{-\frac{x}{y}}}{x^2}$.

Розв'язання. Дане рівняння є однорідним. Поклавши $y=x\cdot z(x)$, дістанемо $x\frac{dz}{dx}+z=z+z^2e^{-\frac{1}{z}}$ $\Rightarrow\frac{e^{\frac{1}{z}}}{z^2}dz=\frac{dx}{x}$ $\Rightarrow -e^{\frac{1}{z}}=\ln|x|-C$ $\Rightarrow e^{\frac{x}{y}}+\ln|x|=C$ - загальний інтеграл рівняння.

Приклад 7. Крива проходить через точку $(1,1)$. Відстань від будь-якої дотичної до цієї кривої до початку координат дорівнює абсцисі точки дотику. Скласти рівняння кривої.

Розв'язання. Нехай точка (x, y) належить даній кривій $y = y(x)$. Дотична $Y - y = \frac{dy}{dx}(X - x)$ до цієї кривої в точці (x, y) лежить від початку координат на відстані $\frac{\left|y - x\frac{dy}{dx}\right|}{\sqrt{1 + y'^2}}$, яка за умовою дорівнює x.

Тому дана крива є інтегральною кривою рівняння $\frac{\left|y - x\frac{dy}{dx}\right|}{\sqrt{1 + y'^2}} = x$.

Піднісши обидві частини рівняння до квадрату, дістанемо $y^2 - 2xyy' + x^2(y')^2 = x^2 + x^2(y')^2$, тобто $2xyy' = y^2 - x^2$. Це однорідне рівняння. Покладемо $y = x \cdot z(x)$. Тоді

$$2x^2 z\left(\frac{dz}{dx}x + z\right) = x^2(z^2 - 1) \quad \Rightarrow 2xz\frac{dz}{dx} + z^2 + 1 = 0 \quad \Rightarrow \frac{2z}{z^2 + 1}dz + \frac{dx}{x} = 0 \quad \Rightarrow$$

$\ln(z^2 + 1) + \ln|x| = \ln C, \quad C > 0 \quad \Rightarrow (z^2 + 1)x = C, \quad C \in R$. Оскільки $z = \frac{y}{x}$, то $y^2 + x^2 = Cx$. За умовою крива проходить через точку $(1,1)$. Тому $1 + 1 = C$, тобто $C = 2$.

Отже, рівняння шуканої кривої $y^2 + x^2 = 2x$, або $(x - 1)^2 + y^2 = 1$.

Приклад 8. Розв'язати рівняння $\frac{dy}{dx} = 2\left(\frac{y + 1}{x + y - 2}\right)^2$.

Розв'язання. Зробимо заміну змінних $\begin{cases} x = t + 3 \\ y = q - 1 \end{cases}$. Відносно нової шуканої функції $q(t)$ дістанемо однорідне рівняння $\frac{dq}{dt} = 2\frac{q^2}{(t + q)^2}$.

Заміна $q = tu$ зводить його до рівняння з відокремлюваними змінними $t\frac{du}{dt} + u = \frac{2u^2}{(1 + u)^2} \quad \Rightarrow t\frac{du}{dt} + \frac{u + u^2}{(1 + u)^2} = 0$, звідки

$\ln|u| + 2\,\mathrm{arctg}\, u + \ln|t| = \ln C, \quad C > 0 \quad \Rightarrow ut = Ce^{-2\,\mathrm{arctg}\, u}, \quad C \in R$.

Повертаючись до змінних x і y, дістанемо $y + 1 = Ce^{-2\,\mathrm{arctg}\frac{y+1}{x-3}}$.

Приклад 9. Розв'язати рівняння $(2x - 4y + 6)dx + (x + y - 3)dy = 0$.

Розв’язання. Із системи рівнянь $\begin{cases} 2x-4y+6=0 \\ x+y-3=0 \end{cases}$ знаходимо,що $(x_0, y_0)=(1,2)$. Зробимо заміну змінних $\begin{cases} x=t+1 \\ y=q+2 \end{cases}$ і відносно нової шуканої функції $q(t)$ дістанемо однорідне рівняння $(2t-4q)dt+(t+q)dq=0$. Заміна $q=tu$ зводить його до виду $2t(1-2u)dt+t(1+u)(udt+tdu)=0$, звідки $(2-3u+u^2)dt+t(1+u)=0$.

Очевидно, функції $u=1$, $u=2$ є розв’язками цього рівняння. Інші розв’язки знайдемо, відокремивши змінні: $\frac{dt}{t}+\frac{1+u}{2-3u+u^2}du=0$.

Оскільки $\frac{1+u}{2-3u+u^2}=\frac{3}{u-2}-\frac{2}{u-1}$, то останнє рівняння можна записати у вигляді $\frac{dt}{t}+\left(\frac{3}{u-2}-\frac{2}{u-1}\right)du=0$. Після інтегрування дістанемо

$\ln|t|+\ln\frac{|u-2|^3}{(u-1)^2}=\ln C,\quad C>0$, або $t\frac{(u-2)^3}{(u-1)^2}=C,\quad C\in R$.

Враховуючи, що $u=\frac{q}{t}=\frac{y-2}{x-1}$, загальний інтеграл запишемо у вигляді $(q-2t)^3=C(q-t)\quad\Rightarrow(y-2x)^3=C(y-x-1)^2$.

Функціям $u=1$ і $u=2$ відповідають розв’язки $y=x+1$ і $y=2x$ вихідного рівняння. Розв’язок $y=2x$ дістаємо з загального при $C=0$, отже, особливим розв’язком є $y=x+1$.

Вправи та задачі

1. Знайдіть загальний розв’язок однорідного рівняння:

1) $(2x-y)dx-ydy=0$

2) $(x+y)dx+(x-y)dy=0$

3) $(x^2-2xy)dx+y^2dy=0$

4) $(x^2+y^2)dy-2xydx=0$

5) $2xy-y^2=x^2\cdot y'$

6) $y^2+x^2\cdot y'=xyy'$

7) $2x^3y'=2yx^2-y^3$

8) $3y^3y'=x(2y^2-x^2)$

9) $xy'-y=x\,\mathrm{tg}\frac{y}{x}$

10) $xy'-y+xe^{\frac{y}{x}}=0$

11) $xy' = y \sin \ln \frac{y}{x}$

12) $\frac{xy' - y}{x + y} = \ln \frac{x + y}{x}$

13) $\frac{y}{x} + \frac{\sqrt{xy}}{x} = y'$

14) $xy' = \sqrt{x^2 - y^2} + y$.

2. Знайдіть загальний розв'язок рівняння, попередньо звівши його до однорідного:

1) $y' = \frac{2x - 4y + 6}{-x - y + 3}$

2) $y' = \frac{2x + y + 1}{4x - 2y - 3}$

3) $(2y - x - 5)\,dx = (2x - y + 4)\,dy$

4) $(3y - 7x + 7)\,dx = (3x - 7y - 3)\,dy$

3. Знайдіть розв'язок задачі Коші:

1) $\begin{cases} (3y^2 + 3xy + x^2)\,dx = (x^2 + 3xy)\,dy \\ y(1) = 0 \end{cases}$

2) $\begin{cases} (y^2 - 2xy)\,dx + x^2\,dy = 0 \\ y(1) = 2 \end{cases}$

3) $\begin{cases} y' = \frac{x + 4y - 5}{6x - y - 5} \\ y(2) = 3 \end{cases}$

4) $\begin{cases} y' = \frac{y - 2x + 3}{x - 1} \\ y(2) = 3 \end{cases}$.

4. Знайдіть лінію, для якої відстань довільної дотичної до початку координат рівне абсцисі точи дотику.

3) *Лінійні диференціальні рівняння першого порядку.*

Рівняння виду $\frac{dy}{dx} + P(x)\,y = Q(x)$ називається *лінійним диференціальним рівнянням першого порядку.*

Якщо $Q(x) \neq 0$, то рівняння називають *лінійним неоднорідним*, якщо ж $Q(x) = 0$, то рівняння набуває виду $\frac{dy}{dx} + P(x)\,y = 0$ і називається *лінійним однорідним.*

Лінійне однорідне рівняння є рівнянням з відокремлюваними змінними. Відокремивши їх, отримаємо:

$$\left[\begin{array}{l} \frac{dy}{y} = -P(x)\,dx \\ y = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \int \frac{dy}{y} = -\int P(x)\,dx \\ y = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \ln|y| = -\int P(x)\,dx + \ln C, \quad C > 0 \\ y = 0 \end{array}\right. \Rightarrow$$

$y = Ce^{-\int P(x)dx}$, $C \in R$ - загальний розв'язок лінійного однорідного диференціального рівняння.

Для розв'язання лінійного неоднорідного диференціального рівняння застосовують метод варіації довільної сталої (метод Лагранжа), або метод Бернуллі.

Метод Бернуллі. Розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння шукають у вигляді добутку двох функцій $y(x) = u(x)v(x)$, одна з яких є частинним розв'язком лінійного однорідного диференціального рівняння. Після підстановки розв'язку вказаного виду у неоднорідне рівняння воно набуває вигляду $\frac{du}{dx}v + u\frac{dv}{dx} + P(x)uv = Q(x)$, або $\left(\frac{du}{dx} + P(x)u\right)v + u\frac{dv}{dx} = Q(x)$. Якщо $u(x)$ є частинним розв'язком лінійного однорідного диференціального рівняння, то $\frac{du}{dx} + P(x)u = 0$ і, тоді $u\frac{dv}{dx} = Q(x)$. За функцію $u(x)$ можна взяти $u(x) = e^{-\int P(x)dx}$. Тоді функцію $v(x)$ шукаємо з рівняння $\frac{dv}{dx}e^{-\int P(x)dx} = Q(x)$, звідки $\frac{dv}{dx} = Q(x)e^{\int P(x)dx}$ і тому $v(x) = \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C$. Отже, загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння має вигляд:

$$y(x) = u(x)v(x) = e^{-\int P(x)dx}\left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C\right) = Ce^{-\int P(x)dx} + e^{-\int P(x)dx}\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx .$$

Перший доданок в останньому виразі є загальним розв'язком відповідного однорідного диференціального рівняння, а другий доданок є частинним розв'язком неоднорідного диференціального рівняння.

Метод варіації довільної сталої (метод Лагранжа). Розв'язок неоднорідного диференціального рівняння шукають у вигляді загального розв'язку відповідного однорідного диференціального рівняння, вважаючи довільну змінну невідомою функцією, тобто

$$y = C(x)e^{-\int P(x)dx}.$$

Підставивши цю функцію в неоднорідне рівняння, дістанемо $C'(x) = Q(x)e^{\int P(x)dx}$, звідки $C(x) = \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C$. Тоді загальний розв'язок неоднорідного рівняння задається формулою

$y(x)=e^{-\int P(x)dx}\left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C\right)$, яка збігається з отриманою методом Бернуллі.

Задачі та вправи

1. Знайдіть загальний розв'язок лінійного рівняння:

1) $y'+\frac{3y}{x}=x^2$ 2) $y'+4xy=4x^3$

3) $y'-\frac{y}{x}=-\frac{\ln x}{x}$ 4) $y'+\frac{y}{x+1}=e^x(x+1)$

5) $y'+y\cos x=\sin 2x$ 6) $y'+y\,\mathrm{tg}\,x=\cos^2 x$

7) $y'-\frac{2y}{x+1}=e^x(x+1)^2$ 8) $y'+2xy=xe^{-x^2}$

9) $(x^2+\ln^2 y-\ln y)\,y'=\frac{y}{2}$ 10) $(2xy+\sqrt{y})\,y'+2y^2=0$

11) $3ydx+(y^2-6x)dy=0$ 12) $(1+x^2)dy-2xydx=(1+x^2)^2dx$

2. Знайдіть розв'язок задачі Коші:

1) $\begin{cases} y'-\frac{y}{x+5}=e^x(x+5) \\ y(0)=5 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y'-\frac{2x+4}{x^2}y=3 \\ y(4)=-12 \end{cases}$

3) $\begin{cases} y'+\frac{y}{x+2}=\frac{\ln(x+2)}{x+2} \\ y(-1)=1 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} y'+3xy=x \\ y(0)=\frac{2}{3} \end{cases}$

4) *Рівняння Бернуллі.*

Рівнянням Бернуллі називають рівняння виду $\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)y^k$, де k - дійсне число.

Заміною $z=y^{1-k}$ рівняння Бернуллі зводиться до лінійного. Проте на практиці розв'язки рівняння Бернуллі зручніше відразу шукати за методом Бернуллі у вигляді $y=uv$.

Деякі рівняння стають лінійними, якщо x вважати функцією, а y

- аргументом. Так, нелінійне відносно y рівняння $A(x)+(B(y)x-C(y))\frac{dy}{dx}=0$ зведеться до лінійного $\frac{dx}{dy}+\varphi(y)x=f(y)$ де $\varphi(y)=\frac{B(y)}{A(y)}$, $f(y)=\frac{C(y)}{A(y)}$.

Приклад. Розв'язати рівняння $y'-2xy=3x^2-2x^4$.

Розв'язання. Це рівняння є лінійним неоднорідним. Застосуємо метод варіації довільної сталої. Розглянемо відповідне йому однорідне рівняння $y'-2xy=0$. Функція $y=0$ є розв'язком цього рівняння. Інші його розв'язки знайдемо, відокремлюючи змінні: $\frac{dy}{y}=2xdx$. Звідси знаходимо $\ln|y|=x^2+\ln C$, $C>0 \Rightarrow y=Ce^{x^2}$, $C\in R$, $C\neq 0$. Розв'язок $y=0$ можна дістати з останньої формули при $C=0$, тому всі розв'язки однорідного рівняння визначаються рівністю $y=Ce^{x^2}$, $C\in R$. Розв'язки вихідного рівняння шукаємо у вигляді $y=C(x)e^{x^2}$. Підставивши цей вираз у дане рівняння, дістанемо

$$\frac{dC(x)}{dx}e^{x^2}+2xe^{x^2}C(x)-2xC(x)e^{x^2}=3x^2-2x^4 \Rightarrow$$

$$\frac{dC(x)}{dx}=e^{-x^2}(3x^2-2x^4) \Rightarrow C(x)=\int e^{-x^2}(3x^2-2x^4)dx=x^3e^{-x^2}+C,$$ де $C\in R$ - довільна стала.

Розв'язки заданого рівняння мають вигляд $y=\left(x^3e^{-x^2}+C\right)e^{x^2}=Ce^{x^2}+x^3$.

Приклад. Розв'язати рівняння $xy'-2y=2x^4$.

Розв'язання. Застосуємо метод Бернуллі. Розв'язок шукаємо у вигляді $y=u(x)v(x)$. Маємо $xu'v+xuv'-2uv=2x^4$. Функцію v виберемо так,щоб $xv'-2v=0$. Наприклад $v(x)=x^2$. Тоді для функції $u(x)$ дістанемо рівняння $x^3u'=2x^4$, тобто $u(x)=x^2+C$. Отже, всі розв'язки заданого рівняння визначаються формулою $y=Cx^2+x^4$.

Приклад. Крива $y=y(x)$ проходить через початок координат. Середина відрізку її нормалі, який міститься між будь-якою точкою кривої та віссю абсцис, лежить на параболі $y^2=ax$. Скласти рівняння цієї кривої.

Розв'язання. Нехай $M(x,y)$ - довільна точка кривої. Точка A

перетину нормалі в точці M кривої з віссю абсцис має координати $A(x+yy',0)$, а середина B відрізка AM нормалі – координати $B\left(x+\frac{1}{2}yy',\frac{y}{2}\right)$. Точка B лежить на параболі $y^2=ax$, і її координати задовольняють рівняння параболи: $\frac{y^2}{4}=a\left(x+\frac{1}{2}yy'\right)$, або $y'-\frac{y}{2a}=-\frac{2x}{y}$. Це рівняння Бернуллі. Поклавши $y=u(x)v(x)$, дістанемо $\frac{du}{dx}v+\frac{dv}{dx}u-\frac{uv}{2a}=-\frac{2x}{uv}$. Функцію $v(x)$ виберемо з рівняння $\frac{dv}{dx}=\frac{v}{2a}$, наприклад, $v=e^{\frac{x}{2a}}$. Тоді для $u(x)$ маємо рівняння $u\frac{du}{dx}=-2xe^{-\frac{x}{a}}$. Звідси $u^2=-4\int xe^{-\frac{x}{a}}dx=4e^{-\frac{x}{a}}\left(a^2+ax+Ce^{\frac{x}{a}}\right)$, або $y^2=4\left(a^2+ax+Ce^{\frac{x}{a}}\right)$.

Задана крива проходить через початок координат, тому $0=4(a^2+C)\Rightarrow C=-a^2$. Отже, її рівняння має вигляд $y^2=4ax+4a^2\left(1-e^{\frac{x}{a}}\right)$.

Приклад. Розв’язати рівняння $y=xy'+y'\ln y$.

Розв’язання. Це рівняння зводиться до лінійного, якщо вважати y аргументом, а x - функцією. Тоді рівняння набирає вигляду $y\frac{dx}{dy}=x+\ln y$. Інтегруючи відповідне однорідне рівняння $y\frac{dx}{dy}=x$, маємо $\frac{dy}{y}=\frac{dx}{x}\Rightarrow x=Cy$. Розв’язок вихідного рівняння шукаємо методом варіації довільної сталої (методом Лагранжа) у вигляді $x=C(y)y$, звідки $\frac{dx}{dy}=C'(y)y+C(y)$. Підставивши в рівняння, маємо $C'(y)y^2+C(y)y=C(y)y+\ln y$, звідки $C'(y)=\frac{\ln y}{y^2}\Rightarrow C(y)=C-\frac{1+\ln y}{y}$.
Розв’язок вихідного рівняння має вид $x=Cy-1-\ln y$.

Приклад. Розв’язати рівняння $(x^2\ln y-x)y'=y$.

Розв’язання. Використовуємо ідею з попереднього прикладу: вважаємо y незалежною змінною, а x - функцією. Рівняння набирає вигляду $x^2\ln y-x=yx'$, тобто $yx'+x=x^2\ln y$. Це рівняння Бернуллі відносно функції $x(y)$. Інтегруючи відповідне лінійне однорідне рівняння $yx'+x=0$, знаходимо $x=\frac{C}{y}$. Підставляючи функцію $x=\frac{C(y)}{y}$ в вихідне рівняння, маємо $x'=\frac{C'(y)}{y}-\frac{C(y)}{y^2}$ і рівняння для визначення $C(y)$ набирає вигляду:

$C'(y)-\frac{C(y)}{y}+\frac{C(y)}{y}=\frac{(C(y))^2}{y}\ln y$, тобто $C'(y)=\frac{(C(y))^2}{y}\ln y$. Відокремлюємо змінні і інтегруємо:

$\frac{dC(y)}{(C(y))^2}=\frac{\ln y}{y^2}dy \Rightarrow -\frac{1}{C(y)}=C-\frac{\ln y+1}{y} \Rightarrow C(y)=\frac{y}{\ln y+1-Cy}$. Отже, загальний розв'язок вихідного рівняння $x=\frac{1}{\ln y+1-Cy}$.

Приклад. Точка маси m рухається прямолінійно під дією сили, пропорційної часу від початку руху (коефіцієнт пропорційності k_1). Сила опору при цьому пропорційна швидкості цієї матеріальної точки (коефіцієнт пропорційності k_2). Знайти закон залежності швидкості від часу.

Розв'язання. Відповідно до другого закону Ньютона

$$m\cdot\frac{dv}{dt}=k_1t-k_2v,\quad v(0)=0.$$

Таким чином $\frac{dv}{dt}+\frac{k_2}{m}v=\frac{k_1}{m}t$. Це лінійне диференціальне рівняння першого порядку, звідки

$$v(t)=e^{-\frac{k_2}{m}t}\left(\int_0^t\frac{k_1}{m}te^{\frac{k_2}{m}t}dt+C\right)=e^{-\frac{k_2}{m}t}\left(\frac{k_1m}{k_2}te^{\frac{k_2}{m}t}-\frac{k_1m}{k_2^2}e^{\frac{k_2}{m}t}+C\right)=Ce^{-\frac{k_2}{m}t}+\frac{k_1}{k_2}t-\frac{k_1m}{k_2^2}.$$

Поклавши $t=0$, отримуємо, що $C=\frac{k_1m}{k_2^2}$. Остаточно

$$v(t)=\frac{k_1m}{k_2^2}\left(e^{-\frac{k_2}{m}t}-1\right)+\frac{k_1}{k_2}t.$$

Приклад. У електричному колі з опором R та самоіндукцією L діє електрорушійна сила $E(t)=A\sin\omega t$. Знайти закон $I(t)$ зміни струму у колі, якщо $I(0)=0$.

Розв'язання. Відповідно до правила Кірхгофа $I(t)\cdot R+L\frac{dI}{dt}=A\sin\omega t$, тобто $\frac{dI}{dt}+\frac{R}{L}I=\frac{A}{L}\sin\omega t$. Маємо лінійне диференціальне рівняння першого порядку. Розв'язуючи його, отримуємо

$$I(t)=e^{-\frac{R}{L}t}\left(\int_0^t \frac{A}{L}\sin\omega u e^{\frac{R}{L}u}du+C\right)=e^{-\frac{R}{L}t}\left(\frac{A}{L}e^{\frac{R}{L}u}\cdot\frac{\frac{R}{L}\sin\omega u-\omega\cos\omega u}{\frac{R^2}{L^2}+\omega^2}\Bigg|_0^t+C\right)=$$

$$=\frac{A}{R^2+\omega^2L^2}(R\sin\omega t-\omega L\cos\omega t)+\frac{A}{R^2+\omega^2L^2}\omega L e^{-\frac{R}{L}t}+Ce^{-\frac{R}{L}t}.$$

З початкової умови отримуємо, що $C=0$. Таким чином

$$I(t)=\frac{A}{R^2+\omega^2L^2}\left(R\sin\omega t-\omega L\cos\omega t+\omega L e^{-\frac{R}{L}t}\right).$$

Задачі та вправи

1. Знайдіть загальний розв'язок рівняння Бернуллі:

1) $y'-\frac{xy}{2(1-x^2)}=xy^2$

2) $y'+xy=xy^3$

3) $y'+y=xy^3$

4) $y'-\frac{y}{x+1}=\sqrt{x+1}\cdot y^2$

5) $y'+2xy=2x^3y^3$

6) $y'+\frac{2y}{x^2-9}=\frac{y^4}{x}$

7) $xy'+y=y^2\ln x$

8) $y'+\frac{2y}{x}=\frac{2\sqrt{y}}{\cos^2 x}$

2. Знайдіть розв'язок задачі Коші для рівняння Бернуллі:

1) $\begin{cases} y'-9x^2y=(x^5+x^2)y^{\frac{2}{3}} \\ y(0)=0 \end{cases}$

2) $\begin{cases} xy'+y=y^2\ln x \\ y(1)=1 \end{cases}$

3. Знайдіть лінію, у якої відрізок, що відтинається дотичною на осі ординат в довільній точці пропорційний квадрату ординати точки дотику.

5) *Диференціальні рівняння у повних диференціалах.*

Диференціальне рівняння виду $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$, у якому ліва частина є повним диференціалом деякої функції $u(x,y)$, тобто

$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$, називають *рівнянням у повних диференціалах.* У цьому випадку загальний інтеграл рівняння має вид $u(x, y) = C$. Вираз $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ є повним диференціалом, якщо виконується умова $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$. Функцію $u(x, y)$ можна знайти, розв'язавши систему рівнянь $\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = P(x, y) \\ \frac{\partial u}{\partial y} = Q(x, y) \end{cases}$, або скориставшись формулою $u(x, y) = \int_{x_0}^{x} P(x, y_0)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x, y)dy$.

Приклад. Розв'язати рівняння $ye^x dx + (y + e^x)dy = 0$.

Розв'язання. Переконаємось, що це рівняння є рівнянням в повних диференціалах. В цьому випадку $P(x, y) = ye^x$, $Q(x, y) = y + e^x$ $\Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = e^x$, $\frac{\partial P}{\partial y} = e^x$. Отже, умова $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ виконана і тому існує така функція $u(x, y)$, яка задовольняє систему рівнянь $\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = P(x, y) = ye^x, \\ \frac{\partial u}{\partial y} = Q(x, y) = y + e^x. \end{cases}$

Інтегруючи перше рівняння, маємо $u = \int ye^x dx = ye^x + \varphi(y)$, звідки $\frac{\partial u}{\partial y} = e^x + \varphi'(y)$. Прирівнявши праві частини останньої рівності і другого рівняння системи, отримаємо $e^x + \varphi'(y) = y + e^x$, Остаточно $ye^x + \frac{y^2}{2} = C$ - загальний інтеграл даного рівняння.звідки $\varphi'(y) = y$ і тоді $\varphi = \frac{y^2}{2} + C_1$. Таким чином, $u = ye^x + \frac{y^2}{2} + C_1$.

Інтегрувальним множником для рівняння $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ називають таку функцію $m(x, y)$, після множення на яку вказане рівняння перетворюється на рівняння в повних диференціалах.

Якщо $m(x, y)$ - інтегрувальний множник вказаного рівняння, то рівняння $m(x,y)M(x,y)dx + m(x,y)N(x,y)dy = 0$ є рівнянням у повних диференціалах і тому $\frac{\partial}{\partial y}(m(x,y)M(x,y)) = \frac{\partial}{\partial x}(m(x,y)N(x,y))$, тобто інтегрувальний множник $m(x,y)$ є розв'язком рівняння з частинними похідними першого порядку:

$$m(x,y)\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = N\frac{\partial m}{\partial x} - M\frac{\partial m}{\partial y}.$$

Іноді останнє рівняння спрощується й інтегрувальний множник для вихідного рівняння легко знайти. Розглянемо кілька таких випадків.

Якщо початкове рівняння має інтегрувальний множник, що залежить лише від x, тобто $m(x,y) = m(x)$, то $\frac{1}{m}\frac{\partial m}{\partial x} = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N}$.

Якщо початкове рівняння має інтегрувальний множник, що залежить лише від y, тобто $m(x,y) = m(y)$, то $\frac{1}{m}\frac{\partial m}{\partial y} = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{-M}$.

Якщо початкове рівняння має інтегрувальний множник, що залежить від деякої відомої функції $\omega(x,y)$, тобто $m(x,y) = m(\omega(x,y))$, то $\frac{1}{m}\frac{\partial m}{\partial \omega} = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N\frac{\partial \omega}{\partial x} - M\frac{\partial \omega}{\partial y}}$.

Приклад. Розв'язати рівняння $(2xy^2 - y)dx + (y^2 + x + y)dy = 0$.

Розв'язання. Маємо

$M(x,y) = 2xy^2 - y$, $\frac{\partial M}{\partial y} = 4xy - 1$, $N(x,y) = y^2 + x + y$, $\frac{\partial N}{\partial x} = 1$, $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$ - рівняння не є рівнянням у повних диференціалах. Скористаємось інтегрувальним множником $m(x,y) = \frac{1}{y^2}$, маємо

$$\frac{2xy^2 - y}{y^2}dx + \frac{y^2 + x + y}{y^2}dy = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{2xy^2 - y}{y^2}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(2x - \frac{1}{y}\right) = \frac{1}{y^2}, \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y^2 + x + y}{y^2}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(1 + \frac{x}{y^2} + \frac{1}{y}\right) = \frac{1}{y^2}.$$

Отримано рівняння у повних диференціалах, звідки маємо його загальний інтеграл $x^2 - \frac{x}{y} + y + \ln|y| = C$.

Задачі та вправи

1. Знайдіть загальний розв'язок рівняння в повних диференціалах:

1) $(x^2 + y)dx + (x - 2y)dy = 0$

2) $e^y dx + (xe^y - 2y)dy = 0$

3) $(\sin x + y)dy + (y\cos x - x^2)dx = 0$

4) $x\sin(x + y)(dx + dy) + \cos(x + y)dy = 0$

5) $(3x^2 + 6xy^2)dx + (6x^2 y + 4y^3)dy = 0$

6) $(x^3 + 3xy^2)dx + (3x^2 y + y^3)dy = 0$

2. Знайдіть розв'язок задачі Коші:

1) $\begin{cases} (x^2 - 4xy - 2y^2)dx + (y^2 - 4xy - 2x^2)dy = 0 \\ y(1) = 1 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \frac{dy}{dx} = \frac{y - 3x^2}{4y - x} \\ y(1) = 1 \end{cases}$

6) Важливими різновидами диференціальних рівнянь першого порядку є *рівняння Лагранжа*

$$y = x\varphi(y') + \phi(y')$$

та його найпростіший різновид – *рівняння Клеро* $y = xy' + \phi(y')$.

Приклад. Розв'язати рівняння $y = xy' + (y')^2$.

Розв'язання. Це рівняння Клеро. Застосуємо підстановку $y' = p$ та про диференціюємо обидві частини цього рівняння: $p = p + xp' + 2pp'$. Звідси $p'(2p + x) = 0$, тобто маємо сукупність рівнянь $\left[\begin{array}{l} p' = 0 \\ p = -\frac{x}{2} \end{array}\right.$. Звідси отримуємо $p = C$, $y = Cx + C^2$ - загальний розв'язок, та особливий розв'язок $y=-\frac{x^2}{4}$.

Диференціальні рівняння вищих порядків.

Диференціальним рівнянням n *-го порядку* називається рівняння виду $F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)})=0$.

Розв'язком такого рівняння є будь-яка n раз диференційовна функція $y=\varphi(x)$, яка обертає дане рівняння в тотожність, тобто $F(x, \varphi(x), \varphi'(x), \varphi''(x), ..., \varphi^{(n)}(x))=0$.

Задача Коші для цього рівняння полягає в тому, щоб знайти такий розв'язок рівняння, який задовольняє умовам: $y(x_0)=y_0,\ y'(x_0)=y_0^1, ..., y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)}$, де $x_0, y_0, y_0', ..., y_0^{(n-1)}$ - задані числа, які називаються *початковими умовами*.

Функція $y=\varphi(x, C_1, C_2, ..., C_n)$ називається *загальним розв'язком даного диференціального рівняння* n *-го порядку*, якщо при відповідному виборі довільних сталих $C_1, C_2, ..., C_n$ ця функція є розв'язком будь-якої задачі Коші,поставленої для даного рівняння.

Будь-який розв'язок, який отримано з загального розв'язку при фіксованих значеннях сталих $C_1, C_2, ..., C_n$ (зокрема, будь-який розв'язок задачі Коші), називається *частинним розв'язком* цього рівняння, та при довільному виборі $C_1, C_2, ..., C_n$ є його розв'язком.

Інтегрування диференціальних рівнянь n-го порядку вдається здійснити тільки в деяких частинних випадках.

1) *Рівняння виду* $y^{(n)}=f(x)$. Розв'язок цього рівняння знаходять n-кратним інтегруванням, а саме

$$y^{(n)}=f(x),\quad y^{(n-1)}=\int f(x)\,dx=f_1(x)+C_1,\quad y^{(n-2)}=\int(f_1(x)+C_1)\,dx=f_2(x)+C_1x+C_2,$$

$$\ldots,\quad y=f_n(x)+\frac{C_1}{(n-1)!}x^{n-1}+\frac{C_2}{(n-2)!}x^{n-2}+\ldots+C_{n-1}x+C_n,\ \text{де}\quad f_n(x)=\underbrace{\int\int\int\ldots\int}_{n} f(x)\,dx.$$

В силу того, що величини $\frac{C_1}{(n-1)!}, \frac{C_2}{(n-2)!}, \ldots$ є сталими, загальний розв'язок рівняння можна записати у вигляді $y=f_n(x)+C_1x^{n-1}+C_2x^{n-2}+\ldots+C_{n-1}x+C_n$.

Приклад. Знайти загальний розв'язок рівняння $y''' = e^{2x} + \sin x$.

Розв'язання. Послідовно інтегруючи, дістанемо

$$y''' = e^{2x} + \sin x \quad \Rightarrow y'' = \int (e^{2x} + \sin x)\,dx = \frac{1}{2}e^{2x} - \cos x + C_1 \quad \Rightarrow$$

$$y' = \int\left(\frac{1}{2}e^{2x} - \cos x + C_1\right)dx = \frac{1}{4}e^{2x} - \sin x + C_1 x + C_2 \quad \Rightarrow$$

$y = \int\left(\frac{1}{4}e^{2x} - \sin x + C_1 x + C_2\right)dx = \frac{1}{8}e^{2x} + \cos x + \frac{C_1}{2}x^2 + C_2 x + C_3$, де C_1, C_2, C_3 - довільні сталі.

2) *Диференціальне рівняння виду* $F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \dots, y^{(n)}) = 0$, яке не містить шуканої функції і її похідних до $(k-1)$-го порядку включно.

Підстановка $y^{(k)} = z(x)$ *знижує порядок рівняння на* k *одиниць* і зводить його до виду $F(x, z, z', \dots, z^{(n-k)}) = 0$.

Приклад. Знайти загальний розв'язок рівняння $xy'' = y' \ln \frac{y'}{x}$.

Розв'язання. Заміна $z = y'$ зводить рівняння до виду $xz' = z \ln \frac{z}{x}$, звідки $z' = \frac{z}{x}\ln\frac{z}{x}$. Це однорідне рівняння першого порядку. Поклавши $z = tx$, звідки $z' = t'x + t$, дістанемо $t'x + t = t\ln t$, тобто $\frac{dt}{t(\ln t - 1)} = \frac{dt}{t}$ $\Rightarrow \ln(\ln t - 1) = \ln x + \ln C_1 \quad \Rightarrow \ln t - 1 = C_1 x$, звідки $t = e^{1+C_1 x}$. Повертаючись до змінної y, дістанемо рівняння $y' = xe^{1+C_1 x}$, з якого знаходимо $y = \int xe^{1+C_1 x}dx = \frac{1}{C_1}xe^{1+C_1 x} - \frac{1}{C_1^2}e^{1+C_1 x} + C_2$ - загальний розв'язок вихідного рівняння.

3) *Диференціальні рівняння виду* $F(y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$, *яке не містить явно незалежної змінної* x.

Таке рівняння допускає *зниження порядку на одиницю шляхом введення нової функції* $p(y)$, *яка залежить від змінної* y: $y' = p(y)$.

Тоді $y'' = \frac{dp(y)}{dx} = \frac{dp}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} = p'p, \quad y''' = \frac{d(pp')}{dx} = \frac{d(pp')}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} = (p''p + (p')^2)p$, і т.д.

Легко бачити, що порядок всіх наступних похідних також знижується на одиницю. В результаті дістанемо рівняння виду $\Phi(y, p, p', ..., p^{(n-1)}) = 0$.

Приклад. Знайти загальний розв’язок рівняння $1 + (y')^2 = yy''$.

Розв’язання. В наслідок заміни $y' = p(y)$, звідки $y'' = \frac{dp(y)}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p'p$, рівняння набирає вигляду $1 + p^2 = yp\frac{dp}{dy}$. Це рівняння з відокремлюваними змінними. Відокремлюємо змінні і інтегруємо

$$\frac{p\,dp}{1+p^2} = \frac{dy}{y} \quad \Rightarrow \ln(1+p^2) = 2\ln y + 2\ln C_1 \quad \Rightarrow 1 + p^2 = C_1^2 y^2 \quad \Rightarrow p = \pm\sqrt{C_1^2 y^2 - 1}.$$

Повертаючись до змінної y, маємо

$$y' = \pm\sqrt{C_1^2 y^2 - 1} \quad \Rightarrow \frac{dy}{\sqrt{C_1^2 y^2 - 1}} = \pm dx \quad \Rightarrow \frac{1}{C_1}\ln\left(C_1 y + \sqrt{C_1^2 y^2 - 1}\right) = \pm(x + C_2) \quad \Rightarrow$$

$$y = \frac{1}{2C_1}\left(e^{\pm(x+C_2)C_1} + e^{\mp(x+C_2)C_1}\right) = \frac{1}{C_1}\operatorname{ch} C_1(x + C_2)$$ - загальний розв’язок вихідного рівняння.

Задачі та вправи

1. Знайдіть загальний розв’язок рівняння:

1) $y'' = x^2 + \cos x$ 2) $y'' = 2x - \sin 2x$

3) $y'' = \ln 2x$ 4) $y'' = \operatorname{arctg} 2x$

5) $xy'' = y'\ln\frac{y'}{x}$ 6) $y'' = \frac{y'}{x} + x$

7) $x^2\sqrt{x}\,y''' + x\sqrt{x}\,y'' = 1$ 8) $y'''\operatorname{tg} 6x = 6y''$

9) $1 + (y')^2 = 2yy'$ 10) $(y')^2 + 2yy'' = 0$

11) $9y'' - y = 0$ 12) $y'' = \frac{1}{16\sqrt{y}}$

2. Знайдіть розв’язок задачі Коші:

1) $\begin{cases} y'' = \cos x + e^{-x} \\ y(0) = -1, \quad y'(0) = 1 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y'' = \sin^2 3x \\ y(0) = -\frac{\pi^2}{16}, \quad y'(0) = 0 \end{cases}$

3) $\begin{cases} y''' = x\sin x \\ y(0) = y'(0) = y''(0) = 0 \end{cases}$

4) $\begin{cases} y''' = e^{\frac{x}{2}} + 1 \\ y(0) = 8, \quad y'(0) = 5, \quad y''(0) = 2 \end{cases}$

5) $\begin{cases} y''(x^2+1) = 2xy' \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 3 \end{cases}$

6) $\begin{cases} y'' = \dfrac{y'}{x} + \dfrac{x^2}{y'} \\ y(2) = 0, \quad y'(2) = 4 \end{cases}$

7) $\begin{cases} 2y'' = 3y^2 \\ y(-2) = 1, \quad y'(-2) = -1 \end{cases}$

8) $\begin{cases} y^3 y'' = -1 \\ y(1) = 1, \quad y'(1) = 0 \end{cases}$

9) $\begin{cases} 4y^3 y'' = y^4 - 16 \\ y(0) = 2\sqrt{2}, \quad y'(0) = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$

10) $\begin{cases} 4y^3 y'' = 16y^4 - 1 \\ y(0) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}, \quad y'(0) = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$

Лінійні диференціальні рівняння вищих порядків.

Лінійним диференціальним рівнянням n *-го порядку* називається рівняння виду $y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + \ldots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = f(x)$, де функції $p_i(x), \quad i = 1, 2, \ldots, n; \quad f(x)$ - задані і неперервні в деякому проміжку (a, b).

Рівняння називається неоднорідним, якщо $f(x) \neq 0$ *. Якщо ж* $f(x) \equiv 0$ *, то рівняння називається лінійним однорідним. Однорідне рівняння з тою ж лівою частиною, що і неоднорідне, називається відповідним йому.*

$\begin{cases} y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + \ldots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = f(x) \\ y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_0^1, \quad \ldots \quad, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{n-1} \end{cases}$ - задача Коші для рівняння n -го порядку.

Якщо $p_i(x), \quad f(x) \in C_{[a,b]}$, то задача Коші має єдиний розв'язок.

Ліва частина рівняння $L[y] = y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + \ldots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y$ є результатом дії на функцію y *диференціального оператору*. Очевидно, що цей оператор лінійний, тобто $L\left[c_1 y_1 + c_2 y_2\right] = c_1 L\left[y_1\right] + c_2 L\left[y_2\right]$.

Загальні властивості лінійних однорідних диференціальних рівнянь:

- якщо $y(x)$ - розв'язок лінійного однорідного диференціального рівняння (тобто $L[y]=0$), то $\forall c=const \quad cy(x)$ - теж є розв'язком;

- якщо $y_1(x), y_2(x)$ - розв'язки лінійного однорідного диференціального рівняння, то $y_1(x)+y_2(x)$ - теж є розв'язком.

Наслідок. Лінійна комбінація розв'язків лінійного однорідного диференціального рівняння є його розв'язком.

Лінійно залежні і лінійно незалежні системи функцій.

Система функцій $y_1(x),\ldots,y_n(x)\in C_{[a,b]}$ називається *лінійно залежною на* $[a,b]$, якщо існує набір чисел $\alpha_1,\ldots,\alpha_n\in R$, одночасно відмінних від нуля, (тобто $\alpha_1^2+\alpha_2^2+\ldots+\alpha_n^2\neq 0$), для яких виконується умова $\alpha_1 y_1+\alpha_2 y_2+\ldots+\alpha_n y_n\equiv 0$ для всіх $x\in[a,b]$.

Якщо ж $\alpha_1 y_1+\alpha_2 y_2+\ldots+\alpha_n y_n\equiv 0 \quad\Leftrightarrow\quad \alpha_1=\alpha_2=\ldots=\alpha_n=0$, то система функцій $y_1(x),\ldots,y_n(x)\in C_{[a,b]}$ *називається лінійно незалежною на* $[a,b]$.

Наприклад, система функцій $y_1=1,\quad y_2=\cos^2 x,\quad y_3=\sin^2 x$ є лінійно залежною, оскільки існує набір дійсних чисел $\alpha_1=1, \quad ,\alpha_2=-1,\quad \alpha_3=-1$, що виконується рівність $\alpha_1 y_1+\alpha_2 y_2+\alpha_3 y_3\equiv 0$, так як $1-\cos^2 x-\sin^2 x=0 \qquad \forall x\in R$.

Система ж функцій $y_1=1,\quad y_2=x,\quad y_3=x^2,\ldots,y_{n+1}=x^n$ є лінійно незалежною, так як $\alpha_1\cdot 1+\alpha_2 x+\ldots+\alpha_{n+1}x^n\equiv 0 \quad\Leftrightarrow\quad \alpha_1=\alpha_2=\ldots=\alpha_{n+1}=0$.

Критерій лінійної залежності або незалежності функцій можна сформулювати використовуючи визначник Вронського (вронскіан) системи функцій
$$W[y_1,y_2,\ldots,y_n]=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_n \\ y_1' & y_2' & \ldots & y_n' \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \ldots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}.$$

Теорема. Система функцій $y_1(x),\ldots,y_n(x)\in C^{(n-1)}_{(a,b)}$ є лінійно незалежною на даному проміжку тоді і тільки тоді, коли визначник

Вронського цієї системи функцій не дорівнює нулю хоча б в одній точці даного проміжку.

Довільну систему з n лінійно незалежних розв'язків лінійного однорідного диференціального рівняння n-го порядку називають його *фундаментальною системою розв'язків.*

Якщо $y_1, y_2, ..., y_n$ - фундаментальна система розв'язків лінійного однорідного диференціального рівняння n-го порядку, то його загальний розв'язок має вигляд $y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + ... + C_n y_n$, де $C_1, C_2, ..., C_n$ - довільні сталі.

Теорема Остроградського-Ліувіля. Якщо $\forall x \in [a,b]$ система функцій $y_1, y_2, ..., y_n$ є фундаментальною системою розв'язків лінійного однорідного диференціального рівняння n-го порядку

$y^{(n)} + p_1(x) y^{(n-1)} + ... + p_{n-1}(x) y' + p_n(x) y = 0$, то $W(x) = W(x_0) e^{-\int_{x_0}^{x} p_1(x)dx}$, $x_0 \in (a,b)$.

Для випадку $n = 2$ доведення цього факту має вид:

Запишемо лінійне однорідне диференціальне рівняння 2-го порядку $y'' + p_1(x) y' + p_2(x) y = 0$.

Нехай y_1, y_2 - фундаментальна система його розв'язків. Тоді маємо дві рівності $\begin{cases} y_1'' + p_1(x) y_1' + p_2(x) y_1 = 0 \\ y_2'' + p_1(x) y_2' + p_2(x) y_2 = 0 \end{cases}$. Помноживши першу рівність на y_2, другу – на y_1 і віднявши від першої другу, дістанемо $y_1'' y_2 - y_2'' y_1 + p_1(x)(y_1' y_2 - y_2' y_1) = 0$, тобто

$$-W'(x) - W(x) p_1(x) = 0 \Rightarrow \frac{dW(x)}{W(x)} = -p_1(x)dx \Rightarrow \ln|W(x)| = -\int p_1(x)dx + \ln C \Rightarrow$$

$$W(x) = Ce^{-\int p_1(x)dx} \Rightarrow \begin{cases} W(x) = Ce^{-\int_{x_0}^{x} p_1(x)dx} \\ W(x_0) = Ce^{0} = C \end{cases} \Rightarrow W(x) = W(x_0) e^{-\int_{x_0}^{x} p_1(x)dx}.$$

Наслідок. Якщо $y_1(x)$ - один з елементів фундаментальної системи розв'язків рівняння $y'' + p_1(x) y' + p_2(x) y = 0$, то другий її елемент може бути знайденим з рівності $y_2(x) = y_1(x) \int \frac{e^{-\int p_1(x)dx}}{y_1^2(x)} dx$.

Дійсно, при $C = 1$ з рівності $W(x) = Ce^{-\int p_1(x)dx}$ дістанемо $W(x) = e^{-\int p_1(x)dx}$, тобто,

$$-y_2' y_1 = -e^{-\int p_1(x)dx} \Rightarrow \frac{y_2' y_1 - y_1' y_2}{y_1^2(x)} = \frac{e^{-\int p_1(x)dx}}{y_1^2(x)} \Rightarrow \left(\frac{y_2}{y_1}\right)' = \frac{e^{-\int p_1(x)dx}}{y_1^2(x)} \Rightarrow \frac{y_2}{y_1} = \int \frac{e^{-\int p_1(x)dx}}{y_1^2(x)} dx \Rightarrow$$

$$y_2(x) = y_1(x) \int e^{\frac{-\int p_1(x)dx}{y_1^2(x)}} dx .$$

Приклад. Знайти загальний розв'язок рівняння $x^2 y'' + 2xy' + 2y = 0$, якщо відомий один його

частинний розв'язок $y_1 = x^2$.

Розв'язання. Використовуючи попередні міркування, маємо

$$p_1(x) = -\frac{2x}{x^2} = -\frac{2}{x} \Rightarrow y_2(x) = x^2 \int \frac{e^{\int \frac{2}{x} dx}}{x^4} dx = x^2 \int \frac{x^2}{x^4} dx = -x \Rightarrow y(x) = C_1 x^2 - C_2 x \text{ -}$$

загальний розв'язок, де c_1, c_2 - довільні сталі.

Лінійні однорідні диференціальні рівняння n-го порядку з сталими коефіцієнтами.

Лінійне однорідне диференціальне рівняння n-го порядку з сталими коефіцієнтами має вид

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1} y' + p_n y = 0, \quad p_i = const, \quad i = 1, 2, \ldots, n .$$

Нагадаємо*, що загальний розв'язок лінійного однорідного диференціального рівняння n-го порядку задається формулою* $y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n$, *де $C_1, C_2, \ldots, C_n$ - довільні сталі, а $y_1, y_2, \ldots, y_n$ - лінійно незалежні частинні розв'язки лінійного однорідного диференціального рівняння(фундаментальна система)*

Частинні розв'язки лінійного однорідного диференціального рівняння шукають у вигляді $y = e^{kx}$, де k - невідома стала (метод Ейлера). Підставивши $y = e^{kx}$, $y' = ke^{kx}$, ..., $y^{(n)} = k^n e^{kx}$ в вихідне рівняння, дістанемо $e^{kx}\left[k^n + p_1 k^{n-1} + \ldots + p_n\right] = 0 \Rightarrow k^n + p_1 k^{n-1} + \ldots + p_n = 0$ - *характеристичне рівняння*, відповідне вказаному диференціальному рівнянню.

Характеристичне рівняння є алгебраїчним рівнянням n-го степеня, а тому має n коренів (дійсних або комплексних, серед *яких можуть бути і однакові). Частинні розв'язки лінійного однорідного диференціального рівняння залежать від вигляду коренів відповідного характеристичного рівняння наступним чином:*

- *якщо* k *- дійсний простий корінь (кратності один) характеристичного рівняння, то йому відповідає один частинний розв'язок лінійного однорідного диференціального рівняння* e^{kx} *;*

- *якщо* k *- дійсний корінь кратності* m *характеристичного рівняння, то йому відповідають* m *лінійно незалежних частинних розв'язків лінійного однорідного диференціального рівняння* $e^{kx}, \; xe^{kx}, \; x^2 e^{kx}, \dots, x^{m-1} e^{kx}$

- *якщо* $k = \alpha \pm i\beta$ *- пара комплексно спряжених простих коренів характеристичного рівняння, то йому відповідають два частинні розв'язки лінійного однорідного диференціального рівняння* $e^{\alpha x}\cos\beta x, \quad e^{\alpha x}\sin\beta x$ *;*

- *якщо* $k = \alpha \pm i\beta$ *- пара комплексно спряжених коренів характеристичного рівняння кратності* m *, то йому відповідають* $2m$ *частинних розв'язків лінійного однорідного диференціального рівняння*
$e^{\alpha x}\cos\beta x, \quad e^{\alpha x}\sin\beta x, \quad xe^{\alpha x}\cos\beta x, \quad xe^{\alpha x}\sin\beta x, \dots, x^{m-1}e^{\alpha x}\cos\beta x, \quad x^{m-1}e^{\alpha x}\sin\beta x$ *.*

Розглянемо випадок *лінійного однорідного диференціального рівняння другого порядку* $y'' + p_1 y' + p_2 y = 0$. Відповідне йому характеристичне рівняння $k^2 + p_1 k + p_2 = 0$ є квадратним.

Можливі три наступні конфігурації множини розв'язків цього рівняння і, відповідний вигляд загального розв'язку диференціального рівняння.

- *Корені характеристичного рівняння* k_1, k_2 *- дійсні і не рівні між собою* (дискримінант рівняння додатний). Тоді $y_1 = e^{k_1 x}, \; y_2 = e^{k_2 x}$ утворюють фундаментальну систему розв'язків диференціального рівняння і, тому*, загальний розв'язок диференціального рівняння визначається формулою* $y(x) = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$ *.*

- *Корені характеристичного рівняння* k_1, k_2 *- дійсні і рівні між* собою (дискримінант рівняння рівний нулю, $k_1 = k_2 = -\frac{p_1}{2}$). Тоді

$y_1 = e^{-\frac{p_1}{2}x}$ - частинний розв'язок диференціального рівняння. Інший частинний розв'язок рівняння знайдемо, враховуючи наслідок з теореми Ліувіля, а саме

$$y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int p_1(x)dx}}{y_1^2(x)} dx = e^{-\frac{p_1}{2}x} \int \frac{e^{-\int p_1 dx}}{e^{-p_1 x}} dx = e^{-\frac{p_1}{2}x} \int dx = xe^{-\frac{p_1}{2}x}.$$

- Тобто $y_1 = e^{-\frac{p_1}{2}x}$, $y_2 = xe^{-\frac{p_1}{2}x}$ утворюють фундаментальну систему розв'язків диференціального рівняння і, тому, *загальний розв'язок диференціального рівняння визначається формулою* $y(x) = C_1 e^{-\frac{p_1}{2}x} + C_2 xe^{-\frac{p_1}{2}x}$.

- *Корені характеристичного рівняння* $k_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ *- комплексно спряжені* (дискримінант рівняння від'ємний). Функції $\tilde{y}_1 = e^{(\alpha+i\beta)x}$, $\tilde{y}_2 = e^{(\alpha-i\beta)x}$ є лінійно незалежними розв'язками однорідного диференціального рівняння. За властивостями розв'язків однорідного диференціального рівняння, їх лінійна комбінація теж є розв'язком. Тому визначимо $y_1 = \frac{\tilde{y}_1 + \tilde{y}_2}{2}$, $y_2 = \frac{\tilde{y}_1 - \tilde{y}_2}{2}$, тобто $y_1 = e^{\alpha x}\frac{e^{\beta ix} + e^{-\beta ix}}{2}$, $y_2 = e^{\alpha x}\frac{e^{\beta ix} - e^{-\beta ix}}{2}$, або $y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x$, $y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x$, і запишемо *загальний розв'язок диференціального рівняння* $y(x) = C_1 e^{\alpha x}\cos\beta x + C_2 e^{\alpha x}\sin\beta x$.

Приклад. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння $y'' - 3y' - 4y = 0$.

Розв'язання. Характеристичним рівнянням, яке відповідає вказаному диференціальному є рівняння $k^2 - 3k - 4 = 0$, коренями якого є $k_1 = 4$, $k_2 = -1$. Фундаментальна система розв'язків відповідного диференціального рівняння складається з функцій $y_1 = e^{4x}$, $y_2 = e^{-x}$ і загальним розв'язком диференціального рівняння є функція $y(x) = C_1 e^{4x} + C_2 e^{-x}$.

Приклад. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння $y'' - 2y' + y = 0$.

Розв'язання. Характеристичним рівнянням, яке відповідає вказаному диференціальному є рівняння $k^2-2k+1=0$, коренями якого є $k_{1,2}=1$. Фундаментальна система розв'язків відповідного диференціального рівняння складається з функцій $y_1=e^x$, $y_2=xe^x$ і загальним розв'язком диференціального рівняння є функція $y(x)=C_1e^x+C_2xe^x$.

Приклад. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння $y''-y'+y=0$.

Розв'язання. Характеристичним рівнянням, яке відповідає вказаному диференціальному є рівняння $k^2-k+1=0$, коренями якого є $k_{1,2}=\frac{1}{2}\pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Фундаментальна система розв'язків відповідного диференціального рівняння складається з функцій $y_1=e^{\frac{x}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x$, $y_2=e^{\frac{x}{2}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x$ і загальним розв'язком диференціального рівняння є функція

$y(x)=C_1e^{\frac{x}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+C_2e^{\frac{x}{2}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x$.

Приклад. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння $y^{(4)}-4y^{(3)}+4y''=0$.

Розв'язання. Характеристичним рівнянням, яке відповідає вказаному диференціальному є рівняння $k^4-4k^3+4k^2=0$, коренями якого є $k_1=k_2=0$, $k_3=k_4=2$. Фундаментальна система розв'язків відповідного диференціального рівняння складається з функцій $y_1=1$, $y_2=x$, $y_3=e^{2x}$, $y_4=xe^{2x}$ і загальним розв'язком диференціального рівняння є функція $y=C_1+C_2x+C_3e^{2x}+C_4xe^{2x}$.

Приклад. Матеріальна точка закріплена на пружині та рухається по прямій без тертя після виводу зі стану рівноваги (розтягнення або стиснення пружини). Записати її закон руху.

Розв'язання. Відповідно до другого закону Ньютона, маємо $m\frac{d^2x}{dt^2}=-kx(t)$, де $x(t)$ - відхилення точки у момент часу t від положення рівноваги, m - маса точки, k - константа пружності пружини, врахована у законі Гука. Нехай $x(0)=x_0$, $\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0}=v_0$. Тоді маємо задачу Коші для однорідного лінійного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами: $x''+\frac{k}{m}x=0,\quad x(0)=x_0,\quad x'(0)=v_0$, звідки загальний розв’язок рівняння має вид

$x_{з/о}(t)=C_1\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t+C_2\sin\sqrt{\frac{k}{m}}t$, а розв’язок задачі Коші

$x(t)=x_0\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t+v_0\sqrt{\frac{m}{k}}\sin\sqrt{\frac{k}{m}}t$.

Приклад. Матеріальна точка рухається прямолінійно внаслідок відхилення її від положення рівноваги утримуючої пружини. Сила опору пропорційна швидкості. Має місце зовнішня змушуючи сила $F(t)=F_0\cos\omega t$. Знайти закон руху точки.

Розв’язання. Скориставшись другим законом Ньютона та позначивши відхилення від положення рівноваги через $x(t)$,

маємо $m\ddot{x}=-kx-r\dot{x}+F_0\cos\omega t$, звідки $\ddot{x}+\frac{r}{m}\dot{x}+\frac{k}{m}x=\frac{F_0\cos\omega t}{m}$ - рівняння вимушених коливань. При цьому $x(t)=x_1(t)+x_2(t)$, де

$x_1(t)=A_0e^{-\delta t}\cos(\omega_1 t+\varphi_1),\quad \delta=\frac{r}{2m},\quad \omega_1=\sqrt{\frac{r}{m}-\delta^2},\quad A_0$ - початкова амплітуда вільних коливань, $x_2(t)$ - частинний розв’язок неоднорідного рівняння. У випадку $\omega\neq\omega_1$ він має вигляд

$$x_2(t)=A\cos(\omega t+\varphi),\quad A=\frac{A_0}{\sqrt{(\omega_1^2-\omega^2)+4\delta^2\omega^2}},\quad \varphi=arctg\frac{2\delta\omega}{\omega_1^2-\omega^2}.$$

Якщо $\omega=\omega_1$ спостерігається явище резонансу – зростання з часом амплітуди коливання до нескінченної.

Задачі та вправи

1. Знайти загальний розв’язок лінійного однорідного диференціального рівняння:

1) $y''+y'-2y=0$ 2) $y''-9y=0$

3) $y''-4y'=0$ 4) $y''-2y'+y=0$

5) $4y''-2y'+25y=0$ 6) $y''+y=0$

7) $y''+6y'+13y=0$ 8) $4y''-8y'+5y=0$

9) $y'''+16y'=0$ 10) $y^{(4)}-13y''+36y=0$

2. Знайти розв'язок задачі Коші:

1) $y''-4y'+3y=0, \quad y(0)=6, \quad y'(0)=10$

2) $y''-4y'+3y=0, \quad y(0)=6, \quad y'(0)=10$

3) $y''+4y'+29y=0, \quad y(0)=0, \quad y'(0)=15$

Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння n-го порядку.

Теорема про структуру загального розв'язку лінійного неоднорідного диференціального рівняння: загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння є сумою загального розв'язку лінійного однорідного диференціального рівняння, яке відповідає йому, і деякого частинного розв'язку лінійного неоднорідного диференціального рівняння.

Позначимо символом $L_n[y]$ диференціальний оператор n-го порядку $L_n[y]=y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+p_2(x)y^{(n-2)}+\ldots+p_{n-1}(x)y'+p_n(x)y$.Вже було!

Принцип суперпозиції: частинний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння n-го порядку $L_n[y]=f(x)+g(x)$ являє собою суму частинних розв'язків відповідних рівнянь $L_n[y]=f(x)$ і $L_n[y]=g(x)$.

Метод невизначених коефіцієнтів застосовується для знаходження частинного розв'язку лінійного неоднорідного диференціального рівняння n -го порядку зі сталими коефіцієнтами і правою частиною спеціального вигляду $f(x)=e^{\alpha x}(P_n(x)\cos\beta x+Q_m(x)\sin\beta x)$*, де α і β - сталі, $P_n(x)$ і $Q_m(x)$ - задані многочлени змінної x степеня n і m відповідно.*

Частинний розв'язок рівняння з правою частиною вказаного виду шукають у вигляді $y^*=x^r e^{\alpha x}(P_l(x)\cos\beta x+Q_l(x)\sin\beta x)$*, де $P_l(x)$ і $Q_l(x)$ - многочлени з невизначеними коефіцієнтами степеня $l=\max(n,m)$, r - кратність числа $\alpha+i\beta$ як кореня характеристичного рівняння відповідного лінійного однорідного рівняння.*

Приклад. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння $y''-3y'-4y=x$.

Розв'язання. Розв'яжемо спочатку відповідне однорідне рівняння $y''-3y'-4y=0$. Характеристичним рівнянням, яке відповідає вказаному диференціальному є рівняння $k^2-3k-4=0$, коренями якого є $k_1=-1,\quad k_2=4$. Фундаментальна система розв'язків відповідного диференціального рівняння складається з функцій $y_1=e^{-x},\quad y_2=e^{4x}$ і загальним розв'язком однорідного диференціального рівняння є функція $y=C_1e^{-x}+C_2e^{4x}$.

Права частина неоднорідного рівняння $f(x)=x$ має спеціальний вид. Число $\alpha+i\beta=0$ не є коренем характеристичного рівняння, тому $r=0$ і частинний розв'язок неоднорідного диференціального рівняння шукаємо у вигляді $y^*=Ax+B$. Невідомі сталі A і B знайдемо, підставивши вказану функцію $y^*=Ax+B$ та її похідні $(y^*)'=A,\quad (y^*)''=0$ в вихідне рівняння і прирівнявши коефіцієнти при однакових степенях x

$$-3A-4(Ax+B)=x\quad\Rightarrow\begin{cases}x^1: & -4A=1\\ x^0: & -3A-4B=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=-\dfrac{1}{4}\\ B=\dfrac{3}{16}\end{cases}$$

. Отже $y^*=-\frac{1}{4}x+\frac{3}{16}$ - частинний розв'язок цього рівняння, а $y=C_1e^{-x}+C_2e^{4x}-\frac{1}{4}x+\frac{3}{16}$ - його загальний розв'язок.

Приклад. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння $y''+y=3\sin x$.

Розв'язання. Характеристичне рівняння $k^2+1=0$ має корені $k_{1,2}=\pm i$, а тому загальний розв'язок однорідного диференціального рівняння $y=C_1\cos x+C_2\sin x$. Частинний розв'язок цього рівняння слід шукати у вигляді $y^*=x(A\cos x+B\sin x)$ (в даному випадку $\alpha=0,\ \beta=1,\ \alpha+i\beta=i$, так як i є простим коренем характеристичного рівняння, то $r=1,\quad m=n=l=0$). Знайдемо похідні

$$(y^*)'=(-A\sin x+B\cos x)x+(A\cos x+B\cos x\sin x),$$

$$(y^*)''=2(-A\sin x+B\cos x)+(-A\cos x-B\sin x)\cdot x$$

і, підставивши в вихідне рівняння, отримаємо $-2A\sin x+2B\cos x=3\sin x$, звідки $A=-\frac{3}{2},\quad B=0$.

Отже $y=C_1\cos x+C_2\sin x-\frac{3}{2}x\cos x$ - загальний розв'язок диференціального рівняння.

Приклад. Знайти загальний розв'язок рівняння $y''+y=xe^{x}+2e^{-x}$.

Розв'язання Характеристичне рівняння $k^{2}+1=0$ має корені $k_{1,2}=\pm i$, а тому загальний розв'язок однорідного диференціального рівняння $y=C_1\cos x+C_2\sin x$. Використовуючи метод суперпозиції, частинний розв'язок цього рівняння слід шукати у вигляді $y^{*}=y_1^{*}+y_2^{*}=(Ax+B)e^{x}+Ce^{-x}$ (маємо для y_1^{*}: $f_1(x)=xe^{x}$, $\alpha_1=1$, $\beta_1=0$, $\alpha_1+i\beta_1=1$, так як такого кореня у характеристичного рівняння немає, то $r_1=0$, $n_1=l_1=1$; для y_2^{*}: $f_2(x)=2e^{-x}$, $\alpha_2=-1$, $\beta_2=0$, $\alpha_2+i\beta_2=-1$, $r_2=0$, $n_2=l_2=0$). Отже,

$$y^{*}=(Ax+B)e^{x}+Ce^{-x}\ \Rightarrow\ (y^{*})'=Ae^{x}+(Ax+B)e^{x}-Ce^{-x}\ \Rightarrow$$

$(y^{*})''=2Ae^{x}+(Ax+B)e^{x}+Ce^{-x}$. Підставивши в рівняння, отримаємо $2Axe^{x}+(2A+2B)e^{x}+2Ce^{-x}\equiv xe^{x}+2e^{-x}$, звідки $2A=1$, $2A+2B=0$, $2C=2$, тобто $A=\frac{1}{2}$, $B=-\frac{1}{2}$, $C=1$. Отже, $y=C_1\cos x+C_2\sin x+\frac{1}{2}(x-1)e^{x}+e^{-x}$ - загальний розв'язок диференціального рівняння.

Приклад. Знайти загальний розв'язок рівняння $y'''+y''-2y'=x-e^{x}$.

Розв'язання. Характеристичне рівняння $k^{3}+k^{2}-2k=0$ має корені $k_1=0$, $k_2=1$, $k_3=2$, а тому загальний розв'язок однорідного диференціального рівняння $y=C_1+C_2e^{x}+C_3e^{-2x}$. Використовуючи метод суперпозиції, частинний розв'язок цього рівняння слід шукати у вигляді $y^{*}=y_1^{*}+y_2^{*}=x(Ax+B)+Cxe^{x}$. Знайшовши похідні

$(y^{*})'=2Ax+B+Ce^{x}+Cxe^{x}$, $(y^{*})''=2A+2Ce^{x}+Cxe^{x}$ $(y^{*})'''=3Ce^{x}+Cxe^{x}$ і підставивши в рівняння, отримаємо $-4Ax+(2A-2B)+3Ce^{x}\equiv x-e^{x}$.

Звідси $-4A=1$, $2A-2B=0$, $3C=-1$, тобто $A=-\frac{1}{4}$, $B=-\frac{1}{4}$, $C=-\frac{1}{3}$ і загальний розв'язок рівняння має вид

$$y=C_1+C_2e^{x}+C_3e^{-2x}-\frac{1}{4}x(x+1)-\frac{1}{3}xe^{x}.$$

Приклад. Знайти розв'язок задачі Коші

$y'' - 5y' + 6y = 13\sin 3x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$.

Розв’язання. Характеристичне рівняння $k^2 - 5k + 6 = 0$ має корені $k_1 = 2,\ k_2 = 3$, а тому загальний розв’язок однорідного диференціального рівняння $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$. Частинний розв’язок цього рівняння слід шукати у вигляді $y^* = A\cos 3x + B\sin 3x$. Знайшовши похідні

$(y^*)' = -3A\sin 3x + 3B\cos 3x, \quad (y^*)'' = -9A\cos 3x - 9B\sin 3x$ і підставивши в рівняння, отримаємо $-3(A+5B)\cos 3x + 3(5A - B)\sin 3x \equiv 13\sin 3x$. Звідси, прирівнявши коефіцієнти при $\sin 3x$ і $\cos 3x$ маємо систему рівнянь $\begin{cases} -3(A+5B) = 0 \\ 3(5A - B) = 13 \end{cases}$, розв’язавши яку знайдемо $A = \frac{5}{6}, \quad B = -\frac{1}{6}$. Отже

$y^* = \frac{5}{6}\cos 3x - \frac{1}{6}\sin 3x$ - частинний розв’язок неоднорідного рівняння. Загальний розв’язок даного рівняння має вид

$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} + \frac{5}{6}\cos 3x - \frac{1}{6}\sin 3x$. Для знаходження розв’язку задачі Коші обчислимо похідну загального розв’язку

$y' = 2C_1 e^{2x} + 3C_2 e^{3x} - \frac{1}{2}(5\sin 3x + \cos 3x)$ і запишемо початкові умови

$\begin{cases} y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 + \frac{5}{6} = 1 \\ 2C_1 + 3C_2 - \frac{1}{2} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} C_1 = 0 \\ C_2 = \frac{1}{6} \end{cases}$. Таким чином, розв’язок задачі Коші має вид $y = \frac{1}{6}e^{3x} + \frac{5}{6}\cos 3x - \frac{1}{6}\sin 3x$.

Задачі та вправи

1. Знайдіть загальний розв’язок рівняння:

1) $4y'' + 16y' + 15y = 4e^{-\frac{3x}{2}}$ 2) $y'' - y' = 2(1 - x)$

3) $y'' - 2y' = e^x(x^2 + x - 3)$ 4) $y'' + y = -\sin 2x$

5) $y'' - y' = -5e^{-x}(\sin x + \cos x)$ 6) $y'' - 2y' + 2y = 4e^x \cos x$

7) $y''' + 2y'' + y' = -2e^{-2x}$ 8) $y''' - y' = 3(2 - x^2)$

9) $y''' - 16y' = 48e^{4x} + 64\cos 4x - 64\sin 4x$

10) $y'' + 49y = 14\sin 7x + 7\cos 7x - 98e^{7x}$

2. Знайдіть розв'язок задачі Коші:

1) $y'' + y = 4e^{x}, \quad y(0) = 4, \quad y'(0) = 3$

2) $y'' - y' = 2x, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = -1$

3) $y'' + y = 2(1 - x), \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = -2$

4) $y'' + y = 4x\cos x, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$

5) $y'' - 4y' + 5y = 2x^2 e^{x}, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 2$

6) $y'' - y' = -5e^{-x}(\sin x + 2\cos x), \quad y(0) = -1, \quad y'(0) = -1$

7) $y'' - 5y' + 6y = e^{-x}(12x - 4), \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1$

Метод Лагранжа (варіації довільної сталої).

Цей метод застосовують для відшукання загального розв'язку лінійного диференціального рівняння з довільною правою частиною.

Розглянемо метод Лагранжа на прикладі рівняння другого порядку $y'' + p_1 y' + p_2 y = f(x)$.

Нехай $\tilde{y} = C_1 y_1 + C_2 y_2$ *- загальний розв'язок однорідного рівняння* $y'' + p_1 y' + p_2 y = 0$.

Загальний розв'язок неоднорідного рівняння шукають у вигляді $y = C_1(x) y_1 + C_2(x) y_2$, *де функції* $C_1(x)$ *і* $C_2(x)$ *задовольняють системи рівнянь* $\begin{cases} C_1'(x) y_1 + C_2'(x) y_2 = 0 \\ C_1'(x) y_1' + C_2'(x) y_2' = f(x) \end{cases}$, яка є системою лінійних алгебраїчних рівнянь відносно змінних $C_1'(x)$ і $C_2'(x)$, яку можна розв'язати методом Крамера, а саме, обчислити визначники

$$\Delta = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ f(x) & y_2' \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & f(x) \end{vmatrix}$$ і тоді $C_1'(x) = \dfrac{\Delta_1}{\Delta}, \quad C_2'(x) = \dfrac{\Delta_2}{\Delta}$,

звідки $C_1(x) = \int C_1'(x)\,dx + C_3, \quad C_2(x) = \int C_2'(x)\,dx + C_4$.

Приклад. Знайти загальний розв'язок рівняння $y'' + y = \operatorname{tg} x$.

Розв'язання. Характеристичним рівнянням відповідного однорідного диференціального рівняння є рівняння $k^2+1=0$, коренями якого є числа $k_{1,2}=\pm i$. Тому, фундаментальна система розв'язків однорідного диференціального рівняння складається з функцій $y_1=\cos x$, $y_2=\sin x$ і загальний розв'язок має вид $y=C_1\cos x+C_2\sin x$. Функція $f(x)=\operatorname{tg} x$ не є функцією спеціального вигляду, тому розв'язок неоднорідного рівняння будемо шукати методом варіації довільних сталих у вигляді $y=C_1(x)\cos x+C_2(x)\sin x$, де функції $C_1(x)$ і $C_2(x)$ задовольняють систему рівнянь $\begin{cases} C_1'(x)\,y_1+C_2'(x)\,y_2=0 \\ C_1'(x)\,y_1'+C_2'(x)\,y_2'=f(x) \end{cases}$, тобто

$$\begin{cases} C_1'(x)\cos x+C_2'(x)\sin x=0 \\ -C_1'(x)\sin x+C_2'(x)\cos x=\operatorname{tg} x \end{cases}.$$

Розв'язуючи цю систему, дістанемо $C_1'(x)=-\dfrac{\sin^2 x}{\cos x}$, $C_2'(x)=\sin x$, звідки

$$C_1(x)=-\int\frac{\sin^2 x}{\cos x}dx=\sin x-\ln\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)+C_3,\quad C_2(x)=\int\sin x dx=-\cos x+C_4.$$

Таким чином, загальний розв'язок вихідного рівняння має вигляд $y=\left(\sin x-\ln\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)+C_3\right)\cos x+(-\cos x+C_4)\sin x$, звідки

$$y=C_3\cos x+C_4\sin x-\cos x\cdot\ln\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right).$$

Приклад. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y''+5y'+6y=\frac{1}{1+e^{2x}}.$$

Розв'язання. Характеристичним рівнянням відповідного однорідного диференціального рівняння є рівняння $k^2+5k+6=0$, коренями якого є числа $k_1=-2$, $k_2=-3$. Тому, фундаментальна система розв'язків однорідного диференціального рівняння складається з функцій $y_1=e^{-2x}$, $y_2=e^{-3x}$ і загальний розв'язок має вид $y=C_1e^{-2x}+C_2e^{-3x}$. Функція $f(x)=\dfrac{1}{1+e^{2x}}$ не є функцією спеціального вигляду, тому розв'язок неоднорідного рівняння будемо шукати методом варіації довільних сталих у вигляді $y=C_1(x)e^{-2x}+C_2(x)e^{-3x}$, де функції $C_1(x)$ і $C_2(x)$ задовольняють систему рівнянь $\begin{cases} C_1'(x)\,y_1 + C_2'(x)\,y_2 = 0 \\ C_1'(x)\,y_1' + C_2'(x)\,y_2' = f(x) \end{cases}$, тобто

$$\begin{cases} C_1'(x)\,e^{-2x} + C_2'(x)\,e^{-3x} = 0 \\ -2C_1'(x)\,e^{-2x} - 3C_2'(x)\,e^{-3x} = \dfrac{1}{1+e^{2x}} \end{cases}$$. Розв'яжемо цю систему методом Крамера. Для цього обчислимо визначники

$$\Delta = \begin{vmatrix} e^{-2x} & e^{-3x} \\ -2e^{-2x} & -3e^{-3x} \end{vmatrix} = -e^{-5x}, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & e^{-3x} \\ \dfrac{1}{1+e^{2x}} & -3e^{-3x} \end{vmatrix} = -\frac{e^{-3x}}{1+e^{2x}},$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} e^{-2x} & 0 \\ -2e^{-2x} & \dfrac{1}{1+e^{2x}} \end{vmatrix} = \frac{e^{-2x}}{1+e^{2x}}$$ і знайдемо $C_1'(x) = \dfrac{e^{2x}}{1+e^{2x}}$, $C_2'(x) = -\dfrac{e^{3x}}{1+e^{2x}}$,

звідки $C_1(x) = \displaystyle\int \frac{e^{2x}}{1+e^{2x}}dx = \frac{1}{2}\int \frac{d(e^{2x}+1)}{1+e^{2x}} = \frac{1}{2}\ln(1+e^{2x}) + C_3$,

$$C_2(x) = \int \frac{e^{3x}}{1+e^{2x}}dx = \begin{vmatrix} e^{x} = t \\ e^{x}dx = dt \end{vmatrix} = -\int \frac{t^2}{1+t^2}dt = -(t - \operatorname{arctg} t) + C_4 = -(e^{x} - \operatorname{arctg} e^{x}) + C_4.$$

Отже, $y = e^{-2x}\left(\dfrac{1}{2}\ln(1+e^{2x}) + C_3\right) + e^{-3x}\left(-(e^{x} - \operatorname{arctg} e^{x}) + C_4\right)$ - загальний розв'язок даного рівняння, де C_3, C_4 - довільні сталі.

Задачі та вправи

1. Знайдіть загальний розв'язок рівняння:

1) $y'' + 4y = \dfrac{1}{\cos 2x}$

2) $y'' + 4y' + 4y = e^{-2x}\ln x$

3) $y'' - 2y = \dfrac{2}{x^3}(x^2 - 1)$

4) $y'' - y' = e^{2x}\cos e^{x}$

5) $y'' + 2y' + 2y = \dfrac{1}{e^{x}\sin x}$

6) $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^{x}}{x^2 + 1}$

7) $y'' + 2y' + y = 3e^{-x}\sqrt{x+1}$

8) $y'' + 4y = 2\operatorname{tg} x$

9) $y'' + 5y' + 6y = (e^{2x} + 1)^{-\frac{3}{2}}$

10) $y'' + 2y' + y = \sqrt{x}e^{-x}$

2. Знайдіть розв'язок задачі Коші:

1) $y'' - 2y' = \frac{4e^{-2x}}{e^{-2x}+1}$, $y(0) = \ln 4$, $y'(0) = \ln 4 - 2$

2) $y'' + \frac{y}{4} = \frac{1}{4}\operatorname{ctg}\frac{x}{2}$, $y(\pi) = 2$, $y'(\pi) = \frac{1}{2}$

3) $y'' + 9y = \frac{9}{\cos 3x}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$

4) $y'' - 3y' + 2y = \frac{1}{2+e^{-x}}$, $y(0) = 1 + 3\ln 3$, $y'(0) = 5\ln 3$

5) $y'' + 4y = \frac{4}{\sin 2x}$, $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2$, $y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \pi$

6) $y'' + y = 2\operatorname{ctg} x$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$, $y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$

Системи диференціальних рівнянь.

Систему диференціальних рівнянь $\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, x_2, ..., x_n)$, $i = 1, 2, ...n$ називають *системою в нормальній формі*, або системою, розв'язаною відносно похідних шуканих функцій $x_i = x_i(t)$.

Розв'язком такої системи на проміжку $I \subset R$ називають сукупність неперервно диференційовних на I функцій $x_i = \varphi_i(t)$, $i = 1, 2, ...n$, таких що $\frac{d\varphi_i}{dt} = f_i(t, \varphi_1(t), \varphi_2(t), ..., \varphi_n(t))$, $\forall t \in I$.

Задача Коші для такої системи полягає у відшуканні такого її розв'язку, який задовольняє початкові умови $x_1(t_0) = a_1$, $x_2(t_0) = a_2$, ..., $x_n(t_0) = a_n$, де $a_1, a_2, ..., a_n$ - задані дійсні числа.

Якщо праві частини нормальної системи диференціальних рівнянь є лінійними функціями відносно $x_1, x_2, ..., x_n$, то система диференціальних рівнянь називається лінійною.

Інколи нормальну систему диференціальних рівнянь можна звести до одного рівняння n-го порядку, яке містить одну невідому функцію. Таке зведення може бути досягнуте диференціюванням одного з рівнянь системи і виключенням всіх невідомих функцій, крім однієї. Такий метод називають *методом виключення.*

В деяких випадках, комбінуючи рівняння системи, після деяких перетворень вдається отримати легко інтегровані рівняння, що дозволяє знайти розв'язок системи. Такий метод називають *методом інтегрованих комбінацій*.

Приклад. Знайти розв'язок системи диференціальних рівнянь $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + y \\ \dfrac{dy}{dt} = x - y \end{cases}$, який задовольняє початковим умовам $\begin{cases} x(0) = 2 \\ y(0) = 0 \end{cases}$.

Розв'язання. Продиференціюємо перше рівняння по змінній t: $\dfrac{d^2x}{dt^2} = \dfrac{dx}{dt} + \dfrac{dy}{dt}$ і виключивши з отриманого рівняння $\dfrac{dy}{dt}$ і y, маємо $\dfrac{d^2x}{dt^2} - 2x = 0$. Характеристичне рівняння $k^2 - 2 = 0$ має корені $k_{1,2} = \pm\sqrt{2}$. Тому загальний розв'язок для функції x запишеться у вигляді $x = C_1 e^{t\sqrt{2}} + C_2 e^{-t\sqrt{2}}$. Загальний розв'язок для функції y знайдемо з першого рівняння $y = \dfrac{dx}{dt} - x = C_1(\sqrt{2} - 1)e^{t\sqrt{2}} - C_2(\sqrt{2} + 1)e^{-t\sqrt{2}}$. Для визначення довільних сталих використаємо початкові умови:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 2 \\ \sqrt{2}(C_1 - C_2) - (C_1 + C_2) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = \dfrac{\sqrt{2} + 2}{2} \\ C_2 = \dfrac{2 - \sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

. Таким чином, шуканий частинний розв'язок має вид

$$\begin{cases} x = \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + 1\right)e^{t\sqrt{2}} + \left(1 - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)e^{-t\sqrt{2}} \\ y = \dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{t\sqrt{2}} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{-t\sqrt{2}} \end{cases}.$$

Приклад. Знайти розв'язок системи диференціальних рівнянь $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{x}{2x + 3y} \\ \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{y}{2x + 3y} \end{cases}$, який задовольняє початковим умовам $\begin{cases} x(0) = 1 \\ y(0) = 2 \end{cases}$.

Розв'язання. Складемо першу інтегровну комбінацію. Поділивши перше рівняння на друге, отримаємо

$$\frac{dx}{dy} = \frac{x}{y} \quad \Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \ln x = \ln y + \ln C_1 \quad \Rightarrow x = C_1 y.$$

Складемо другу інтегровану комбінацію. Додавши подвоєне перше і потроєне друге рівняння, дістанемо

$$2\frac{dx}{dt}+3\frac{dy}{dt}=1 \quad \Rightarrow 2dx+3dy=dt \quad \Rightarrow 2x+3y=t+C_2 .$$

З системи рівнянь $\begin{cases} x=C_1 y \\ 2x+3y=t+C_2 \end{cases}$ знаходимо загальний розв'язок

системи $\begin{cases} x=\dfrac{C_1(t+C_2)}{2C_1+3} \\ y=\dfrac{t+C_2}{2C_1+3} \end{cases}$.

Використавши початкові умови, дістанемо $\begin{cases} 1=\dfrac{C_1 C_2}{2C_1+3} \\ 2=\dfrac{C_2}{2C_1+3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1=\dfrac{1}{2} \\ C_2=8 \end{cases}$.

Підставивши знайдені значення c_1 і c_2 в загальний розв'язок

системи, дістанемо шуканий розв'язок $\begin{cases} x=\dfrac{1}{8}t+1 \\ y=\dfrac{1}{4}t+2 \end{cases}$.

Задачі та вправи

1. Розв'яжіть методом виключення неоднорідні лінійні системи:

1) $\begin{cases} x'=2x+3y-3e^{2t} \\ y'=x+4y-3e^{2t} \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x'=5x+8y=2e^{-t} \\ y'=x+3y-3e^{-t} \end{cases}$

3) $\begin{cases} x'=2x-3y+5e^{4t} \\ y'=x+6y-3e^{4t} \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x'=x-7y+7e^{t} \\ y'=x+9y-10e^{t} \end{cases}$

5) $\begin{cases} x'=2x+7y-2\cos t-\sin t \\ y'=x+8y-\cos t \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x'=4x+8y+\cos t-4\sin t \\ y'=x+6y-\sin t \end{cases}$

7) $\begin{cases} x'=2x+9y-9\sin t \\ y'=x+10y-\cos t-10\sin t \end{cases}$ 8) $\begin{cases} x'=-4x+16y+4\cos 2t-2\sin 2t \\ y'=x+3y-\sin 2t \end{cases}$

9) $\begin{cases} x'=x-16y+1-t \\ y'=x+11y-t \end{cases}$ 10) $\begin{cases} x'=-2x-3y+2t-2t^2 \\ y'=x-6y+t^2 \end{cases}$

Розглянемо *алгебраїчний метод розв'язання лінійної однорідної системи диференціальних рівнянь (узагальнений метод Ейлера).*

Нехай дано систему диференціальних рівнянь $\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ \dfrac{dx_2}{dt} = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{cases}$.

Цю систему можна записати у вигляді одного матричного рівняння

$\dfrac{dX}{dt} = AX$, *де* $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $\dfrac{dX}{dt} = \begin{pmatrix} \dfrac{dx_1}{dt} \\ \dfrac{dx_2}{dt} \end{pmatrix}$.

Загальний розв'язок цієї системи має вигляд

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \end{pmatrix}$, де $x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, x_1^{(2)}, x_2^{(2)}$ - лінійно незалежні розв'язки цієї системи. Частинний розв'язок системи шукаємо у вигляді $x_1 = p_1 e^{kt}, x_2 = p_2 e^{kt}$, де p_1, p_2, k - невідомі сталі. Після підстановки цих формул в систему дістанемо однорідну систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих p_1 і p_2

$\begin{cases} (a_{11} - k)p_1 + a_{12}p_2 = 0 \\ a_{21}p_1 + (a_{22} - k)p_2 = 0 \end{cases}$. Отримана система повинна мати ненульовий розв'язок. Отже $\begin{vmatrix} a_{11} - k & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - k \end{vmatrix} = 0$, або $k^2 - (a_{11} + a_{22})k + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0$. Це рівняння називають *характеристичним рівнянням системи.*

Нехай k_1, k_2 - різні дійсні корені характеристичного рівняння.

Тоді кореню k_1 відповідає власний вектор $(p_1^{(1)}, p_2^{(1)})$ і частинний $(p_1^{(2)}, p_2^{(2)})$ розв'язок $x_1^{(1)} = p_1^{(1)} e^{k_1 t}$, $x_2^{(1)} = p_2^{(1)} e^{k_1 t}$. Аналогічно кореню k_2 відповідає власний вектор $(p_1^{(2)}, p_2^{(2)})$ і частинний розв'язок $x_1^{2} = p_1^{(2)} e^{k_2 t}$, $x_2^{(2)} = p_2^{(2)} e^{k_2 t}$. Загальний розв'язок системи такий $x_1 = C_1 x_1^{(1)} + C_2 x_1^{(2)}, x_2 = C_1 x_2^{(1)} + C_2 x_2^{(2)}$, який у матричній формі записують так:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} p_1^{(1)} \\ p_2^{(1)} \end{pmatrix} e^{k_1 t} + C_2 \begin{pmatrix} p_1^{(2)} \\ p_2^{(2)} \end{pmatrix} e^{k_2 t}.$$

Відмітимо, що у випадку, коли характеристичне рівняння має кратні корені, систему зручніше розв'язувати методом виключень.

Приклад. Знайти загальний розв’язок системи $\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = 5x_1 + 2x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = 4x_1 + 3x_2 \end{cases}$.

Розв’язанння . Застосуємо узагальнений метод Ейлера. Складемо характеристичне рівняння системи $\begin{vmatrix} 5-k & 2 \\ 4 & 3-k \end{vmatrix} = 0$, тобто $k^2 - 8k + 7 = 0$. Його корені $k_1 = 1$, $k_2 = 7$.

При $k = 1$ система $\begin{cases} (a_{11} - k)p_1 + a_{12}p_2 = 0 \\ a_{21}p_1 + (a_{22} - k)p_2 = 0 \end{cases}$ рівносильна одному рівнянню $4p_1 + 2p_2 = 0$. Візьмемо $p_1 = 1$, тоді $p_2 = -2$. Отже, кореню $k = 1$ відповідає власний вектор $(1, -2)$. Тоді $x_1^{(1)} = e^t$, $x_2^{(1)} = -2e^t$ - частинний розв’язок даної системи.

При $k = 7$ із системи дістаємо рівняння $-2p_1 + 2p_2 = 0$, або $p_1 = p_2$, яке визначає власний вектор $(1,1)$. Тоді $x_1^{(2)} = e^{7t}$, $x_2^{(2)} = e^{7t}$ - також частинний розв’язок даної системи.

Загальний розв’язок даної системи записуємо у вигляді $x_1 = C_1e^t + C_2e^{7t}$, $x_2 = -2C_1e^t + C_2e^{7t}$, або $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = C_1\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}e^t + C_2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}e^{7t}$.

Приклад. Знайти загальний розв’язок системи $\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_1 + x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = -2x_1 + 3x_2 \end{cases}$.

Розв’язанння . Застосуємо узагальнений метод Ейлера. Складемо характеристичне рівняння $\begin{vmatrix} 1-k & 1 \\ -2 & 3-k \end{vmatrix} = 0$, тобто $k^2 - 4k + 5 = 0$ має пару комплексно-спряжених коренів $k_{1,2} = 2 \pm i$. У цьому випадку для побудови розв’язку даної системи достатньо знати лише розв’язок, що відповідає значенню $k = 2 + i$. При $k = 2 + i$ відповідна система перейде в рівняння $(-1 - i)p_1 + p_2 = 0$ якщо $p_1 = 1$ то $p_2 = 1 + i$. Отже, кореню $k = 2 + i$ відповідає власний вектор $(1, 1 + i)$ і відповідний частинний розв’язок $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \end{pmatrix}e^{(2+i)t} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \end{pmatrix}e^{2t}(\cos t + i\sin t) =$

$$=\begin{pmatrix}\cos t\\ \cos t-\sin t\end{pmatrix}e^{2t}+i\begin{pmatrix}\sin t\\ \cos t+\sin t\end{pmatrix}e^{2t}.$$

Оскільки коефіцієнти системи дійсні, то розв'язками є як дійсна, так і уявна частини такого виразу.

Тоді $\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=C_1\begin{pmatrix}\cos t\\ \cos t-\sin t\end{pmatrix}e^{2t}+C_2\begin{pmatrix}\sin t\\ \cos t+\sin t\end{pmatrix}e^{2t}$ - загальний розв'язок системи .

Приклад. Розв'язати задачу Коші $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=3x+y\\ \dfrac{dy}{dt}=-x+y\end{cases}$, $\begin{cases}x(0)=1\\ y(0)=0\end{cases}$.

Розв'язаннння. Характеристичне рівняння даної системи має вигляд $\begin{vmatrix}3-k & 1\\ -1 & 1-k\end{vmatrix}=0$, звідки $(3-k)(1-k)+1=0 \Rightarrow k^2-4k+4=0 \Rightarrow k_1=k_2=2$.

Оскільки власні числа рівні, то розв'язки даної системи шукаємо у вигляді $\begin{cases}x=(\alpha+\gamma t)e^{2t}\\ y=(\beta+\delta t)e^{2t}\end{cases}$.

Підставивши ці вирази в дану систему, дістанемо
$$\begin{aligned}&\gamma+2(\alpha+\gamma t)=3(\alpha+\gamma t)+\beta+\delta t\\ &\delta+2(\beta+\delta t)=-\alpha-\gamma t+\beta+\delta t\end{aligned}.$$

Ці рівності виконуються при довільному t тоді і тільки тоді, коли виконуються рівності $\begin{cases}\alpha-\gamma+\beta=0\\ \gamma+\delta=0\end{cases}$. Звідси дістаємо два лінійно незалежні розв'язки, наприклад, $\begin{cases}\alpha=1\\ \beta=-1\\ \gamma=0\\ \delta=0\end{cases}$ і $\begin{cases}\alpha=1\\ \beta=0\\ \gamma=1\\ \delta=-1\end{cases}$.

Отже, записуємо лінійно незалежні розв'язки системи: $\begin{cases}x_1(t)=e^{2t}\\ y_1(t)=-e^{2t}\end{cases}$, $\begin{cases}x_2(t)=(1+t)e^{2t}\\ y_2(t)=-te^{2t}\end{cases}$.

Загальний розв'язок даної системи такий: $\begin{cases}x=C_1e^{2t}+C_2(1+t)e^{2t}\\ y=-C_1e^{2t}-C_2te^{2t}\end{cases}$.

Визначимо тепер сталі c_1 і c_2. Враховуючи початкові умови $\begin{cases} x(0)=1 \\ y(0)=0 \end{cases}$,

дістанемо систему рівнянь $\begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ -C_1 = 0 \end{cases}$, розв'язки якої $\begin{cases} C_2 = 1 \\ C_1 = 0 \end{cases}$. Отже,

$\begin{cases} x = (1+t)e^{2t} \\ y = -te^{2t} \end{cases}$ - розв'язок задачі Коші.

Приклад. Знайти загальний розв'язок системи $\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = 4x_1 - 3x_2 \\ \dfrac{dx_2}{dt} = 3x_1 + 4x_2 \end{cases}$.

Розв'язанння . Запишемо характеристичне рівняння системи $\begin{vmatrix} 4-k & -3 \\ 3 & 4-k \end{vmatrix} = 0$, тобто $(4-k)^2 = -9$, корені якого $k_{1,2} = 4 \pm 3i$.

Для кореня $k_1 = 4+3i$ маємо систему для визначення відповідного власного вектора $\begin{cases} 3ip_1 - 3p_2 = 0 \\ 3p_1 + 3ip_2 = 0 \end{cases}$, звідки $p_2 = ip_1$ і відповідний власний вектор $(1,i)$.

Для кореня $k_2 = 4-3i$ маємо систему для визначення відповідного власного вектора $\begin{cases} -3ip_1 - 3p_2 = 0 \\ 3p_1 - 3ip_2 = 0 \end{cases}$, звідки $p_2 = -ip_1$ і відповідний власний вектор $(1,-i)$.

Фундаментальна система розв'язків:

Для $k_1 = 4+3i$ маємо $x_{11} = e^{(4+3i)t}(\cos 3t + i\sin 3t)$, $x_{21} = e^{(4+3i)t}(i\cos 3t - \sin 3t)$;

Для $k_2 = 4-3i$ маємо $x_{12} = e^{(4-3i)t}(\cos 3t - i\sin 3t)$, $x_{22} = e^{(4-3i)t}(-i\cos 3t - \sin 3t)$.

Отже, отримуємо загальний розв'язок

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 e^{(4+3i)t}(\cos 3t + i\sin 3t) + C_2 e^{(4-3i)t}(\cos 3t - i\sin 3t) \\ C_1 e^{(4+3i)t}(i\cos 3t - \sin 3t) + C_2 e^{(4-3i)t}(-i\cos 3t - \sin 3t) \end{pmatrix}$, тобто

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{4t}\left[(C_1 + C_2)\cos 3t + (C_1 - C_2)i\sin 3t\right] \\ e^{4t}\left[-(C_1 + C_2)\sin 3t + (C_1 - C_2)i\cos 3t\right] \end{pmatrix}$. Поклавши

$C_1 + C_2 = C_1^*,\quad C_1 - C_2 = C_2^*$, отримуємо $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{4t}(C_1^* \cos 3t + C_2^* \sin 3t) \\ e^{4t}(-C_1^* \sin 3t + C_2^* \cos 3t) \end{pmatrix}$.

Задачі та вправи

1. Розв'яжіть матричним методом однорідну систему:

1) $\begin{cases} x' = x + 4y \\ y' = x + y \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x' = 2x - 4y \\ y' = x + y \end{cases}$

3) $\begin{cases} x' = x - 5y \\ y' = x + 5y \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x' = 3x + 3y \\ y' = x + 5y \end{cases}$

5) $\begin{cases} x' - 2x - 5y = 0 \\ y' - x + 4y = 0 \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x' - 4x + 16y = 0 \\ y' - x - 2y = 0 \end{cases}$

2. Знайдіть частинні розв'язки систем диференціальних рівнянь, що задовольняють початковим умовам:

1) $\begin{cases} x' = x - 2y, & x(0) = 3 \\ y' = 3x + 4y, & y(0) = 2 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x' = 2x + y, & x(0) = 0 \\ y' = 3x + 4y, & y(0) = 4 \end{cases}$

3) $\begin{cases} x' = 2x + 7y - 2\cos t - \sin t, & x(0) = 1 \\ y' = x + 8y - \cos t, & y(0) = 1 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x' = 2x - 3y + 5e^{4t}, & x(0) = -3 \\ y' = x + 6y - 3e^{4t}, & y(0) = 3 \end{cases}$

Крайова задача для звичайних диференціальних рівнянь другого порядку.

Крайовою задачею для лінійного звичайного диференціального рівняння другого порядку називають задачу знаходження функції $y(x)$, двічі неперервно диференційовної на $[a, b]$, яка задовольняє

$$y'' + p(x)\,y' + q(x)\,y = f(x) \quad (1)$$

наступним умовам

$$c_{11}\,y(a) + c_{12}\,y'(a) + d_{11}\,y(b) + d_{12}\,y'(b) = 0 \quad (2),$$

$$c_{21}\,y(a) + c_{22}\,y'(a) + d_{21}\,y(b) + d_{22}\,y'(b) = 0 \quad (3)$$

причому $c_{11}^2 + c_{12}^2 + c_{21}^2 + c_{22}^2 \neq 0,\quad d_{11}^2 + d_{12}^2 + d_{21}^2 + d_{22}^2 \neq 0$.

Крайові умови (2), (3) називають *відокремленими*, якщо вони мають вигляд $\begin{cases} c_{11}\,y(a) + c_{12}\,y'(a) = 0 \\ c_{21}\,y(b) + c_{22}\,y'(b) = 0 \end{cases}$.

Якщо у правій частині відповідних рівностей стоять не нулі, то умови є *неоднорідними*, за допомогою відповідної заміни невідомої функції вони можуть бути зведені до однорідних (попереднього вигляду).

Приклад . Статичний прогин навантаженої струни із закріпленими кінцями описується рівностями $y''=-\frac{1}{k}f(x),\quad y(a)=y(b)=0$, де $y(x)$ - відхилення точки струни з абсцисою x від положення рівноваги, $a\le x\le b,\quad f(x)$ - зовнішня сила, що діє на одиницю довжини струни, k - пружність струни.

Приклад. $y''+y=0,\quad y(0)=y(\pi)=0$.

Розв’язанння . Загальним розв’язком рівняння є функція $y=C_1\cos x+C_2\sin x$. З граничних умов маємо $\begin{cases} C_1\cos 0+C_2\sin 0=0\\ C_1\cos\pi+C_2\sin\pi=0\end{cases}$, звідки розв’язком крайової задачі є довільна функція вигляду $y=C\sin x$.

Серед граничних задач для звичайних диференціальних рівнянь найбільш «популярною» є *задача Штурма-Ліувілля.* Вона полягає у знаходженні двічі неперервно диференційованої на інтервалі $[a,b]$ і не рівних на цьому інтервалі тотожно нулю функцій $y(x)$, для яких

$$(1)\qquad \frac{d}{dx}\left(-p(x)\frac{dy}{dx}\right)+q(x)\,y(x)=\lambda\rho(x)\,y(x),$$

$$(2)\qquad \begin{cases} A_1\,y(a)+B_1\,y'(a)=0\\ A_2\,y(b)+B_2\,y'(b)=0\end{cases}$$

Функції $p(x),\ q(x),\ \rho(x)$ - задані, неперервні на $[a,b]$ ($p(x)$- неперервно диференційована), λ - числовий параметр.

Якщо розглядати ліву частину диференціального рівняння (1) як результат дії на функцію y лінійного диференціального оператора (оператора *Штурма-Ліувілля,* який часто називають також *оператором Шредінгера*), то маємо задачу знаходження власних чисел λ лінійного оператора L та відповідних їм власних функцій y .

Найпростішими крайовими умовами при цьому є *умови Діріхлє* $y(a)=y(b)=0$.

Рівняння (1) за допомогою *перетворення Ліувілля* може бути зведеним до вигляду $y''-q(x)\,y=-\lambda y$, при цьому функцію $q(x)$

називають *потенціалом.*

Приклад. Розглянемо задачу Штурма-Ліувілля на інтервалі $[0,1]$ з умовами Діріхле та нульовим потенціалом: $\begin{cases} y'' = -\lambda y \\ y(0) = y(1) = 0 \end{cases}$.

Розв'язанння . Загальний розв'язок диференціального рівняння $y'' + \lambda y = 0$ залежить від знаку параметру λ. Маємо:

A) $\lambda < 0$, $y = C_1 e^{-\sqrt{-\lambda}x} + C_2 e^{\sqrt{-\lambda}x}$.

Початкові умови дають систему $\begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ C_1 e^{-\sqrt{-\lambda}} + C_2 e^{\sqrt{-\lambda}} = 0 \end{cases}$, звідки $C_1 = C_2 = 0$.

B) $\lambda = 0$, $y = C_1 + C_2 x$.

Початкові умови дають систему $\begin{cases} C_1 = 0 \\ C_1 + C_2 = 0 \end{cases}$, звідки $C_1 = C_2 = 0$.

C) $\lambda > 0$, $y = C_1 \cos\sqrt{\lambda}x + C_2 \sin\sqrt{\lambda}x$.

Початкові умови дають систему $\begin{cases} C_1 = 0 \\ C_1 + C_2 \sin\sqrt{\lambda} = 0 \end{cases}$, тобто $C_1 = 0$, $C_2 \neq 0$ при $\sqrt{\lambda} = \pi k$, $k = 1, 2, \ldots$.

Таким чином, задача має ненульові розв'язки лише при $\lambda_k = (\pi k)^2$, $k = 1, 2, \ldots$. Власні функції при цьому $y_k = \sin \pi k x$.

Диференціальні рівняння першого порядку з частинними похідними.

Лінійним однорідним рівнянням першого порядку з частинними похідними називають рівняння

$a_1(x_1,\ldots,x_n)\dfrac{\partial u}{\partial x_1} + a_2(x_1,\ldots,x_n)\dfrac{\partial u}{\partial x_2} + \ldots + a_n(x_1,\ldots,x_n)\dfrac{\partial u}{\partial x_n} = 0$, де $a_i(x_1,\ldots,x_n)$ - функції, визначені в деякій області $D \subset R^n$; $u = u(x_1,\ldots,x_n)$ - шукана функція.

Систему звичайних диференціальних рівнянь $\dfrac{dx}{dt} = a(x)$, $x = x(x_1,\ldots,x_n)$, $a = (a_1,\ldots,a_n)$ *називають системою рівнянь характеристик для відповідного диференціального рівняння з* *частинними похідними, а фазові криві системи – характеристиками відповідного рівняння.*

Теорема. Функція $u = u(x_1, \ldots, x_n)$ є розв'язком диференціального рівняння тоді й лише тоді, коли вона є першим інтегралом системи рівнянь характеристик.

Задачею Коші для вказаного диференціального рівняння називають задачу про відшукання розв'язку $u = u(x)$ цього рівняння, який задовольняє умову $u(x)\big|_{x\in\gamma} = \varphi(x)$, де γ-деяка гладка гіперповерхня в області $D \subset R^n$, а $\varphi(x)$ - задана гладка функція на цій гіперповерхні. Гіперповерхню γ називають *початковою гіперповерхнею,* а функцію $\varphi(x)$ - *початковою умовою*.

Точку $x_0 \in \gamma$ називають *нехарактеристичною*, якщо характеристика, що проходить через цю точку, трансверсальна (не дотична) до початкової гіперповерхні.

Теорема. Нехай x - нехарактеристична точка на початковій гіперповерхні γ. Тоді існує такий окіл точки x, що задача Коші для відповідного диференціального рівняння в цьому околі має єдиний розв'язок.

Якщо відомо $n-1$ незалежних в області D перших інтегралів системи рівнянь характеристик $\varphi_i(x_1, \ldots, x_n) = C_i$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$, то всі розв'язки відповідного диференціального рівняння можна дістати з формули $u = \Phi(\phi_1, \ldots, \phi_{n-1})$, де Φ - довільна неперервно диференційована функція.

Лінійним неоднорідним рівнянням першого порядку з частинними похідними називають рівняння

$$a_1(x_1, \ldots, x_n)\frac{\partial u}{\partial x_1} + a_2(x_1, \ldots, x_n)\frac{\partial u}{\partial x_2} + \ldots + a_n(x_1, \ldots, x_n)\frac{\partial u}{\partial x_n} = b(x_1, \ldots, x_n).$$

Задача Коші для нього ставиться так само, як і для однорідного рівняння.

Теорема. Задача Коші для неоднорідного рівняння в досить малому околі будь-якої нехарактеристичної точки x початкової поверхні γ має єдиний розв'язок. Цей розв'язок можна записати у вигляді $u(g(x,t)) = \varphi(x) + \int_0^t b(g(x,\tau))\,d\tau$, де $g(x,t)$ - значення розв'язку системи рівнянь характеристик (із початковою умовою $g(x,0) = x$ на початковій поверхні) в момент часу t.

Приклад. Знайти розв'язки рівняння $y\frac{\partial u}{\partial x} - x\frac{\partial u}{\partial y} = 0$. Із множини розв'язків виділити той, який задовольняє умову $u(0, y) = py^2$.

Розв'язання. З рівняння $\frac{dx}{y} = \frac{dy}{-x}$ знаходимо характеристики $x^2 + y^2 = c$. Усі розв'язки даного рівняння мають вигляд $u = \Phi(x^2 + y^2)$, де $\Phi(z)$ - довільна неперервно диференційовна функція. Зазначимо, що це рівняння визначає поверхні обертання навколо осі Ou.

Знайдемо ту з цих поверхонь, яка проходить через параболу $u = py^2$ у площині $x = 0$. Виключимо x і y з рівнянь $x = 0$, $u = py^2$, $x^2 + y^2 = c$. Маємо: $u = pc$. Підставивши в цю рівність $x^2 + y^2 = c$, дістанемо шуканий розв'язок: $u = p(x^2 + y^2)$ - рівняння параболоїда обертання навколо осі Ou.

Приклад. Знайти той розв'язок лінійного неоднорідного рівняння $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = 1$, який задовольняє умову $u(x,1) = x$.

Розв'язання. Складемо рівняння характеристик: $\frac{dx}{dt} = x$, $\frac{dy}{dt} = y$. Зальним розв'язком цієї системи є вектор $(c_1 e^t, c_2 e^t)$. Поклавши $c_1 = x$, $c_2 = 1$, дістанемо розв'язок $(g_1(x, y, t), g_2(x, y, t))$, де $g_1 = xe^t$, $g_2 = e^t$. Значення розв'язку при $t = 0$ лежать на початковій поверхні $x = x$, $y = 1$. Використовуючи вище зазначену теорему шуканий розв'язок $u = u(x, y)$ задовольняє рівність $u(xe^t, e^t) = x + \int_0^t 1\, d\tau = x + t$. Поклавши $e^t = y$, дістанемо $u(xy, y) = x + \ln y$, або остаточно $u(x, y) = \frac{x}{y} + \ln y$.

Приклад. Знайти розв'язок задачі Коші
$y\frac{\partial u}{\partial x} - x\frac{\partial u}{\partial y} = y^2 - x^2$, $u(0, y) = \frac{1}{y^2}$.

Розв'язання. З рівняння характеристик $\frac{dx}{dt} = y$, $\frac{dy}{dt} = -x$ знаходимо загальний розв'язок $(C_1 \sin t + C_2 \cos t, \cos t,\ C_1 \cos t - C_2 \sin t)$, де C_1, C_2 - довільні сталі. Поклавши $C_1 = y,\ C_2 = 0$, дістанемо розв'язок $(g_1(x, y, t), g_2(x, y, t))$, де $g_1 = y \sin t,\quad g_2 = y \cos t$. Значення розв'язку при $t = 0$ лежать на початковій поверхні $x = 0,\quad y = y$.

Згідно з вище зазначеною теоремою шуканий розв'язок задовольняє співвідношення $u = u(y \sin t, y \cos t) = \frac{1}{y^2} + \int_0^t y^2 (\cos^2 \tau - \sin^2 \tau) d\tau$.

Звідси $u(y \sin t, y \cos t) = \frac{1}{y^2} + \frac{y^2}{2} \sin 2t$.

Замінивши $y \sin t$ на x і $y \cos t$ на y, дістанемо $u(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2} + xy$.

Приклад. Знайти розв'язок рівняння $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z} = 0$, який задовольняє таку початкову умову $u(1, y, z) = y^2 + z^2$.

Розв'язання. Складемо рівняння характеристик:
$\frac{dx}{dt} = x,\quad \frac{dy}{dt} = y,\quad \frac{dz}{dt} = z$.

Розв'язуючи ці рівняння, знаходимо загальний розв'язок $(C_1 e^t, C_2 e^t, C_3 e^t)$, де C_1, C_2, C_3 - довільні сталі. Поклавши $C_1 = 1,\quad C_2 = y,\quad C_3 = z$, дістанемо розв'язок $(g_1(x, y, z, t), g_2(x, y, z, t)\ g_3(x, y, z, t))$, де $g_1 = e^t,\quad g_2 = ye^t,\quad g_3 = ze^t$. Значення розв'язку при $t = 0$ лежать на початковій поверхні $x = 0,\quad y = y,\quad z = z$.

Згідно з теоремою маємо $u(e^t, ye^t, ze^t) = y^2 + z^2 + \int_0^t 0\, d\tau = y^2 + z^2$.

Замінюючи e^t на x, y - на $\frac{y}{x}$, z на $\frac{z}{x}$, дістанемо $u(x, y, z) = \frac{y^2 + z^2}{x^2}$.

Додаток до теорії диференціальних рівнянь першого порядку.

6) Для будь-якого диференціального рівняння першого порядку виду $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$, де $P(x, y), Q(x, y)$ - неперервні за сукупністю змінних функції, існує інтегруючий множник – функція $\varphi(x, y) \neq 0$ така, що $P(x, y)\varphi(x, y)dx + Q(x, y)\varphi(x, y)dy = 0$ є рівнянням в повних диференціалах.

Відзначимо, що правила знаходження такої функції існують лише у деяких частинних випадках.

Приклад. Розв'язати рівняння $(2xy^2 - y)dx + (y^2 + x + y)dy = 0$.

Розв'язання. Маємо $P(x,y) = 2xy^2 - y \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = 4xy = 1$,

$Q(x,y) = y^2 + x + y \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = 1$, тобто $\frac{\partial Q}{\partial x} \neq \frac{\partial P}{\partial y}$ і тому рівняння не є рівнянням в повних диференціалах. Скористаємось інтегруючим множником $\varphi(x,y) = \frac{1}{y^2}$. Маємо $\frac{2xy^2 - y}{y^2}dx + \frac{y^2 + x + y}{y^2}dy = 0$, звідки

$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{2xy^2 - y}{y^2}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(2x - \frac{1}{y}\right) = \frac{1}{y^2}$; $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y^2 + x + y}{y^2}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(1 + \frac{x}{y^2} + \frac{1}{y}\right) = \frac{1}{y^2}$. Отже, отримано рівняння в повних диференціалах і його загальний інтеграл $x^2 = \frac{x}{y} + y + \ln|y| = C$.

7) Важливими різновидами диференціальних рівнянь першого порядку є рівняння Лагранжа $y = x(y') + \psi(y')$ та його найпростіший різновид – рівняння Клеро $y = xy' + \psi(y')$.

Приклад. Розв'язати рівняння $y = xy' + (y')^2$.

Це рівняння Клеро. Застосуємо підстановку $y' = p$ та продиференціюємо обидві частини цього рівняння: $p = p + xp' + 2pp'$.

Звідси $p'(2p + x) = 0$, тобто маємо сукупність рівнянь $\left[\begin{array}{l} p' = 0, \\ p = -\frac{x}{2} \end{array}\right.$.

Звідси отримуємо $p = C$, $y = Cx + C^2$ - загальний розв'язок, та особливий розв'язок $y = -\frac{x^2}{4}$.

Крайова задача для звичайних диференціальних рівнянь другого порядку.

Крайовою задачею для лінійного звичайного диференціального рівняння другого порядку називають задачу знаходження функції $y(x)$, двічі неперервно диференційовної на $[a,b]$, яка задовольняє

$$(1)\quad y'' + p(x)\, y' + q(x)\, y = f(x)$$

наступним умовам $(2)\quad c_{11}\, y(a) + c_{12}\, y'(a) + d_{11}\, y(b) + d_{12}\, y'(b) = 0$, причому

$$(3)\quad c_{21}\, y(a) + c_{22}\, y'(a) + d_{21}\, y(b) + d_{22}\, y'(b) = 0$$

$c_{11}^2 + c_{12}^2 + c_{21}^2 + c_{22}^2 \neq 0$, $\quad d_{11}^2 + d_{12}^2 + d_{21}^2 + d_{22}^2 \neq 0$.

Крайові умови (2), (3) називають відокремленими, якщо вони мають вигляд $\begin{cases} c_{11}\, y(a) + c_{12}\, y'(a) = 0 \\ c_{21}\, y(b) + c_{22}\, y'(b) = 0 \end{cases}$.

Якщо у правій частині відповідних рівностей стоять не нулі, то умови є неоднорідними. За допомогою відповідної заміни невідомої функції вони можуть бути зведені до однорідних (попереднього вигляду).

Приклад 1. Рівняння статичного прогину навантаженої струни із закріпленими кінцями $y'' = -\frac{1}{k} f(x)$, $\quad y(a) = y(b) = 0$, де $y(x)$ - відхилення точки струни з абсцисою x від положення рівноваги, $a \le x \le b$, $f(x)$ - зовнішня сила, що діє на одиницю довжини струни, k - пружність струни.

Приклад 2. $y'' + y = 0$, $\quad y(0) = y(\pi) = 0$.

Розв'язання. Загальний розв'язок рівняння є $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$.

Таким чином, маємо з граничних умов $\begin{cases} C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0 = 0 \\ C_1 \cos \pi + C_2 \sin \pi = 0 \end{cases}$, звідки розв'язком крайової задачі є довільна функція виду $y = C \sin x$.

Серед граничних задач для звичайних диференціальних рівнянь найбільш «популярною» є задача Штурма-Ліувілля. Вона полягає у знаходженні двічі неперервно диференційовних на інтервалі $[a,b]$ і не рівних на цьому інтервалі тотожньо нулю функцій $y(x)$, для яких

$$\frac{d}{dx}\left[-p(x)\frac{dy}{dx}\right] + q(x)\, y(x) = \lambda \rho(x)\, y(x), \qquad (1)$$

$$\begin{cases} A_1\, y(a) + B_1\, y'(a) = 0 \\ A_2\, y(b) + B_2\, y'(b) = 0 \end{cases} \qquad (2)$$

Функції $p(x)$, $q(x)$, $\rho(x)$ - задані, неперервні на $[a,b]$ ($p(x)$ - неперервно диференційована), λ - числовий параметр.

Якщо розглядати ліву частину диференціального рівняння (1) як результат дії на функцію $y(x)$ лінійного диференціального оператора (оператора Штурма-Ліувілля, який часто називають також оператором Шредінгера) , то маємо задачу знаходження власних чисел λ лінійного оператора L та відповідних їм власних функцій y.

Найпростішими крайовими умовами є умови Діріхлє $y(a)=y(b)=0$.

Рівняння (1) за допомогою перетворення Ліувілля може бути зведене до вигляду $y''-q_1(x)y=-\lambda y$, при цьому функцію $q_1(x)$ називають потенціалом.

Приклад 3. Розглянемо задачу Штурма-Ліувілля на інтервалі $[0,1]$ з умовами Діріхлє та нульовим потенціалом: $\begin{cases} y''=-\lambda y \\ y(0)=y(1)=0 \end{cases}$.

Розв'язання. Загальний розв'язок диференціального рівняння $y''+\lambda y=0$ залежить від знаку параметра λ.

Маємо

а) $\lambda<0$, $y=C_1e^{-\sqrt{-\lambda}x}+C_2e^{\sqrt{-\lambda}x}$. Початкові умови дають систему $\begin{cases} C_1+C_2=0 \\ C_1e^{-\sqrt{-\lambda}}+C_2e^{\sqrt{-\lambda}}=0 \end{cases}$, звідки $C_1=C_2=0$.

б) $\lambda=0$, $y=C_1+C_2x$, з початкових умов маємо $\begin{cases} C_1=0 \\ C_1+C_2=0 \end{cases}$, отже $C_1=C_2=0$.

в) $\lambda>0$, $y=C_1\cos\sqrt{\lambda}x+C_2\sin\sqrt{\lambda}x$, з початкових умов $\begin{cases} C_1=0 \\ C_1+C_2\sin\sqrt{\lambda}x=0 \end{cases}$, тобто $C_1=0$, $C_2\neq 0$ при $\sqrt{\lambda}=\pi k$, $k=1,2,\ldots$.

Таким чином, задача має ненульові розв'язки лише при $\lambda_k=(\pi k)^2$, $k=1,2,\ldots$, власні функції при цьому $y_k=\sin \pi kx$.

Список літератури

1. Овчинников П.П. Вища математика: Підручник, ч.II /П.П. Овчинников, В.М. Міхайленко, Ф.П. Яремчук/ - К.: Техніка, 2000. – 59 с.
2. Федоренко Н.Д. Вища математика: Навчальний посібник /Н.Д. Федоренко, О.І. Баліна, І.С. Безклубенко/ - К.: КНУБА, 2003. – 246 с.
3. Федоренко Н.Д. Вища математика у двох частинах: Навчальний посібник. ч. І /Н.Д. Федоренко, О.І. Баліна, І.С. Безклубенко/ - К.: КНУБА, 2009. – 168 с.

Навчально-методичне видання

ВИЩА МАТЕМАТИКА
Модуль 4. Диференціальні рівняння

Методичні вказівки
до виконання індивідуальних завдань
для студентів спеціальностей
151 «Автоматизація та комп`ютерно-інтегровані технології»,

141 «Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка»

Укладачі: **Баліна Олена Іванівна**
Безклубенко Ірина Сергіївна
Буценко Юрій Павлович

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Київський національний університет будівництва і архітектури

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Модуль 4. Диференціальні рівняння

Методичні вказівки
до виконання індивідуальних завдань
для студентів спеціальностей
151 «Автоматизація та комп`ютерно-інтегровані технології»,

141 «Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка»

Усі цитати, цифровий
та фактичний матеріал,
бібліографічні відомості
перевірені. Написання
одиниць вимірювання
відповідає стандартам

Підписи авторів_______________________
«______» _____________________2020 р.
Підпис голови методичної комісії факультету
____
«______» _____________________2020 р.

Київ - 2020