МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Київський національний університет будівництва і архітектури

ПРАКТИКУМ З МАТЕМАТИЧНОЇ СТАТИСТИКИ

Методичні вказівки та завдання для самостійної роботи

для здобувачів для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти за спеціальностями 073 «Менеджмент», 051 «Економіка», 071 «Облік і оподаткування»

Київ – 2024

УДК 519.221.25
ББК 22.172
П69

Укладачі: З.І. Наголкіна, канд.-фіз.-мат.наук, доцент
В.П. Шитюк, асистент
С.Г. Роде, асистент

Рецензент: Н.В. Бондаренко, канд. фіз.-мат.наук, доцент

Відповідальний за випуск: Н.В. Бондаренко, канд. фіз.-мат. наук, доцент, завідувач кафедри вищої математики

Затверджено на засіданні кафедри вищої математики, протокол № 11 від 25 березня 2024 року.

Практикум з математичної статистики: методичні вказівки та завдання для самостійної роботи для студентів першого курсу за напрямом підготовки "менеджмент" 6.030601 / уклад.: З.І. Наголкіна, В.П. Шитюк, С.Г. Роде – К.: КНУБА, 2024 – 34 с.

Видається в авторській редакції.

Містить варіанти завдань для самостійної роботи і методичні вказівки до їх виконання.

Призначені для здобувачів для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти за спеціальностями 073 «Менеджмент», 051 «Економіка», 071 «Облік і оподаткування».

ЗМІСТ

Загальні положення …………………………………………………...4
Література ……………………………………………………………..4
Розділ 1. Основні поняття математичної статистики. Вибірковий метод. Первинна обробка статистичної інформації:
1.1. Теоретичні відомості…………………………………………...…5
1.2. Практичне завдання. Приклад розв’язання……………………...8
1.3. Завдання для самостійної роботи (30 варіантів)……………..…...10
Розділ 2. Статистична оцінки. Перевірка статистичних гіпотез. Критерій Неймана-Пірсона. Перевірка гіпотези про розподіл даної вибірки:
2.1. Теоретичні відомості………………………………………………15
2.2. Практичне завдання. Приклад розв’язання………………………21
2.3. Завдання для самостійної роботи (30 варіантів)…………………22
Розділ 3. Елементи кореляційної теорії. Визначення рівняння лінійної регресії методом найменших квадратів. Регресійний аналіз двовимірної вибірки:
3.1. Теоретичні відомості………………………………………………23
3.2. Завдання для самостійної роботи (30 варіантів)…………………25

ЗАГАЛЬНІ ПОЛОЖЕННЯ

Дані методичні вказівки містять загальні відомості і практичні завдання з основних розділів математичної статистики. Це первинна обробка статистичного матеріалу, перевірка статистичних гіпотез, а також дослідження рівняння лінійної регресії методом найменших квадратів. Для кожного розділу наведені теоретичні відомості, практичне завдання з прикладом його розв'язання і список з тридцяти завдань для самостійної роботи.

Статистичний матеріал представлений вибірками, які містять по тридцять елементів кожна, підготовлено за допомогою програм моделювання випадкових чисел.

Поданий матеріал може бути використаний як для самостійної роботи студентів так і для типових розрахункових робіт по відповідним темам.

ЛІТЕРАТУРА

1. Барковський В.В., Барковська Н.В., Лопатін О.К. Теорія ймовірностей та математична статистика. 5-те видання. — Київ: Центр учбової літератури, 2010. — 424 с.
2. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика: Учеб.пособие – 12-е изд.перераб. М.: Высшее образование, 2006. – 479 с.
3.Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике: Учеб.пособие – 11-е изд.перераб. М.: Высшее образование, 2006 – 404 с.

РОЗДІЛ 1. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ МАТЕМАТИЧНОЇ СТАТИСТИКИ. ВИБІРКОВИЙ МЕТОД. ПЕРВИННА ОБРОБКА СТАТИСТИЧНОЇ ІНФОРМАЦІЇ.

1.1. Теоретичні відомості.

Встановлення закономірностей, яким задовольняють масові випадкові явища базується на вивченні методами теорії ймовірностей результатів випробувань, які називають статистичними даними. Задача математичної статистики полягає в створенні методів відбору і обробки статистичних даних з метою отримання певних наукових і практичних висновків.

Розглянемо наступну ситуацію - нехай треба дослідити велику сукупність деяких однорідних (однотипних) об'єктів відносно деякої якісної або кількісної ознаки. Наприклад партію деталей. *Якісна ознака* - стандартність деталі, *кількісна* – розмір деталі. На практиці проводити суцільний контроль всіх деталей , особливо, коли їх дуже багато – дорого і не доцільно .В таких випадках відбирають випадковим чином з усієї сукупності обмежену кількість об'єктів і їх досліджують. Уся сукупність називається *генеральною сукупністю***,** обмежена кількість об'єктів називається *вибіркою*. Кількість елементів вибірки називають *об'ємом вибірки*. Для того, щоб за даними вибірки можна було б робити висновки про певну ознаку генеральної сукупності треба, щоб вибірка правильно представляла генеральну сукупність. Вибірка, яка правильно представляє генеральну сукупність називається *репрезентативною*, або *представницькою*.(наприклад, якщо досліджують середню заробітну плату в деякому місті, то в якості вибірки не правильно брати зарплату службовців банківської сфери, адже така вибірка не буде репрезентативною, бо не буде відображати усю сукупність зарплат у різних сферах народного господарства).

З випадкового характеру вибірки випливає, що будь-який висновок стосовно генеральної сукупності за даними вибірки є випадковим. Розрізняють вибірки двох типів – повторні і безповторні. Вибірка *повторна*, якщо з генеральної сукупності відбирають об'єкт, досліджують його і повертають в генеральну сукупність. Далі, навмання вибирають наступний об'єкт. Вибірка *безповторна***,** якщо об'єкт, який досліджується не повертають до вибірки.

Нехай спостереження за деякою випадковою величиною X утворюють генеральну сукупність. Дослідимо цю випадкову величину X за вибіркою $\{x_1, x_2, x_3 ... x_n\}$ об'єму n. Нехай значення x_1

з'явилось n_1 раз, значення x_2 – n_2 раз, значення x_k – n_k раз і крім того $n = n_1+n_2+\ldots.n_k$. Числа $x_к$ називають *варіантами*, а n_k – *частотами*. На практиці, як правило, всю генеральну сукупність розбивають на серії однакового об'єму, далі випадковим чином відбирають кілька серій, і з кожної серії випадково відбирають окремі елементи. При цьому всі вибіркові характеристики будуть випадковими.. Впорядковані варіанти $x_1 \le x_2 \le x_3 \le \ldots \le x_n$ утворюють *варіаційний ряд*. Числа спостережень кожної варіанти утворюють ряд частот: $n_1, n_2, n_3, \ldots . n_k$.

Сукупність (x_i, n_i) називають *статистичним розподілом (рядом)* вибірки. Якщо інтервал, який містить всі елементи вибірки розбити на r інтервалів, що не перетинаються (як правило вибирають інтервали однакової довжини) і визначити кількість елементів вибірки, що попали в один *i*-й інтервал n_i^*, то отримаємо *інтервальний статистичний ряд*. Елементи, які попали на границю інтервалу відносяться до правого інтервалу. Інтервальний статистичний ряд це сукупність пар (x_i^*, n_i^*), де x_i^* - середина і-го інтервалу.

Розмах вибірки ϖ - це різниця між найбільшим і найменшим значеннями, які досягаються: $\varpi = x_{\max} - x_{\min}$.

Довжина інтервалу d визначається як $d = \dfrac{\varpi}{k}$, де k - кількість інтервалів на які розбито варіаційний ряд $\sum_{i=1}^{k} n_i^* = n$.

Полігон частот – ламана з вершинами (x_i°, n_i°).

Емпірична функція розподілу визначається через статистичний ряд як співвідношення $F_n^*(z) = \dfrac{1}{n}\sum_{x_i \le z} n_i$. Тобто береться сума частот тих елементів, для яких $x_i \le z$.

Полігон накопичувальних частот (*кумулятивна крива*) – ламана з вершинами в точках $(x_i^* + \dfrac{d}{2}, \dfrac{1}{n}\sum_{j=1}^{i} n_j^*)$. $i = 1\ldots.., k.$

Гістограма частот – це ступінчаста фігура, що складається з прямокутників, основи яких це інтервали групування, а висоти обчислюються як $h_i = \dfrac{n_i^*}{dn}$. Площа гістограми при цьому очевидно дорівнює: $s = \sum_{i=}^{k}(x_{i+1} - x_i)h_i = \sum_{i=1}^{k}\dfrac{\varpi}{k}\dfrac{n_i^*}{dn} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i^* = 1$.

Введемо тепер основні числові характеристики вибірки:

Вибіркове середнє $x_в=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$ (1), у випадку інтервального ряду - $x^*_в=\frac{1}{n}\sum_{i=k}x_i^*n_i^*$)

Вибіркова дисперсія $\sigma_в^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_в)^2n_i$., у випадку інтервального ряду - $\sigma^*{}_в{}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}(x_i^*-x^*_в)^2n_i^*$.

Вибірковий центральний момент к-ого порядку $m_k=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_в)^к$, у випадку інтервального ряду $m_k^*=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}(x_i^*-x_в^*)^к$.

Вибірковий коефіцієнт асиметрії $a_s=\frac{m_3}{\sigma^3}$, у випадку інтервального ряду $a_s^*=\frac{m_3^*}{\sigma^{*3}}$.

Асиметрія характеризує асиметричність кривої розподілу відносно вибіркового середнього.

Вибірковий коефіцієнт ексцесу $e_k=\frac{m_4}{\sigma^4}$-3 , у випадку інтервального ряду $e_s^*=\frac{m_4^*}{\sigma^{*4}}$-3.

Ексцес характеризує відхилення емпіричного розподілу від нормального.

Вибіркова мода m_o – елемент вибірки, який зустрічається найбільшу кількість разів (одновершинний розподіл).

Вибіркова медіана m_e – число, яке ділить варіаційний ряд на дві частини, що мають однакову кількість елементів. Якщо $n=2m$,то m_e дорівнює середньому арифметичному m-го і $m+1$-го елементів. Якщо $n=2m+1$, то m_e дорівнює m-ому елементу варіаційного ряду.

Вибіркова квантіль порядку p - абсциса точки кумулятивної кривої, що має ординату p.

Вибірковий коефіцієнт варіації $v=\frac{\sigma_B}{x_B}\cdot 100\%$, у випадку інтервального ряду $v^*=\frac{\sigma_B^*}{x_B^*}\cdot 100\%$.

Характеризує відхилення варіант відносно середньої вибіркової.

Зауваження. Для обчислення вибіркових числових характеристик в деяких випадках зручно користуватись умовними варіантами $u_i = \frac{x_i - u_0}{h}$, де u_9, h обирають так, щоб числа u_i були невеликими. Користуючись властивостями математичного сподівання і дисперсії випадкової величини, можна показати, що $x_B = u_0 + hu_B$, і $D_B(x) = h^2 D_B(u)$.

Особливо спрощуються обчислення, якщо x_i утворюють арифметичну прогресію

$x_i = x_1 + (i-1)h$, тоді $u_i = \frac{x_i - x_m}{h} = i - m$ - ціле число.

Інколи, у якості умовного нуля u_0 зручно взяти варіанту з найбільшим значенням.

1.2. Практичне завдання. Приклад розв'язання.

Для вибіркових даних провести первинний аналіз, побудувати варіаційний ряд, інтервальний варіаційний ряд ($k=8$ інтервалів), полігон частот, гістограму, кумулятивну криву, знайти вибіркові середнє, дисперсію, моду, медіану, коефіцієнти асиметрії і ексцесу:

72,15	70,11	74,52	69,50	74,09	73,36	72,55	69,37	72,40	68,59
75,96	73,1	69,22	68,31	68,80	71,38	71,79	71,41	69,74	73,07
71,48	71,56	68,84	72,81	70,75	69,52	73,74	72,98	71,85	70,83

Первинний аналіз даних показує, що всі отримані значення вимірюваної невідомої величини X - $X_i > 0$ і більш-менш однорідні (важко вказати значення, яке б сильно виділялось серед інших).

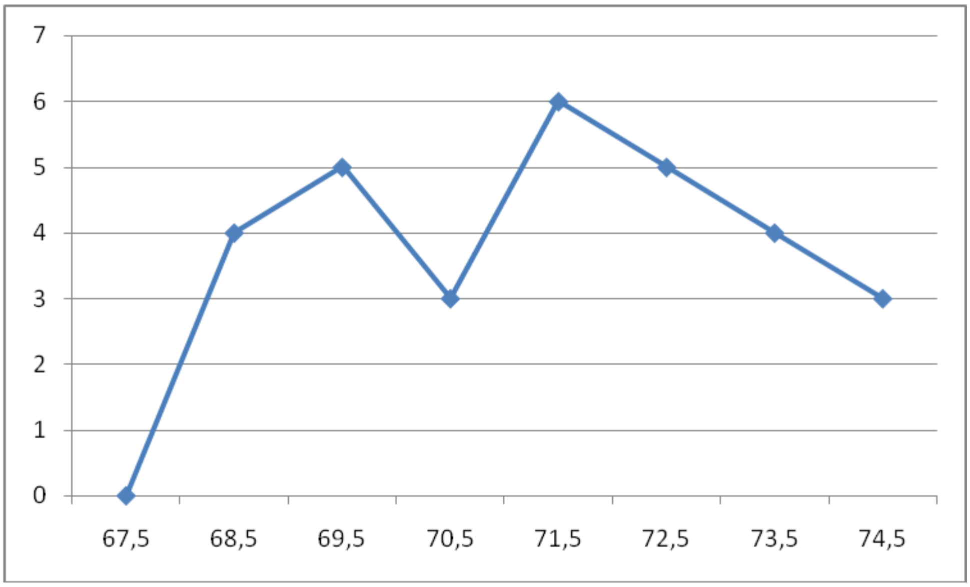
Варіаційний ряд для даної вибірки має наступний вигляд:

68,31	68,59	68,80	68,84	69,22	69,37	69,50	69,52	69,74	70,11
70,75	70,83	71,38	71,41	71,48	71,56	71,79	71,85	72,15	72,40
72,55	72,81	72,98	73,07	73,1	73,36	73,74	74,09	74,52	75,96

Інтервальний варіаційний ряд для даної вибірки зручно розглядати в межах між $-\infty < 68 < 68{,}31 < 75{,}96 < 76 < +\infty$, виділивши при цьому проміжок $(68;74)$ і розбивши його на 6 рівних інтервалів, кожен довжини 1, тобто розбивши всю числову вісь $-\infty < X < +\infty$ на 8 інтервалів. Значення при цьому розподіляться по інтервалам наступним чином:

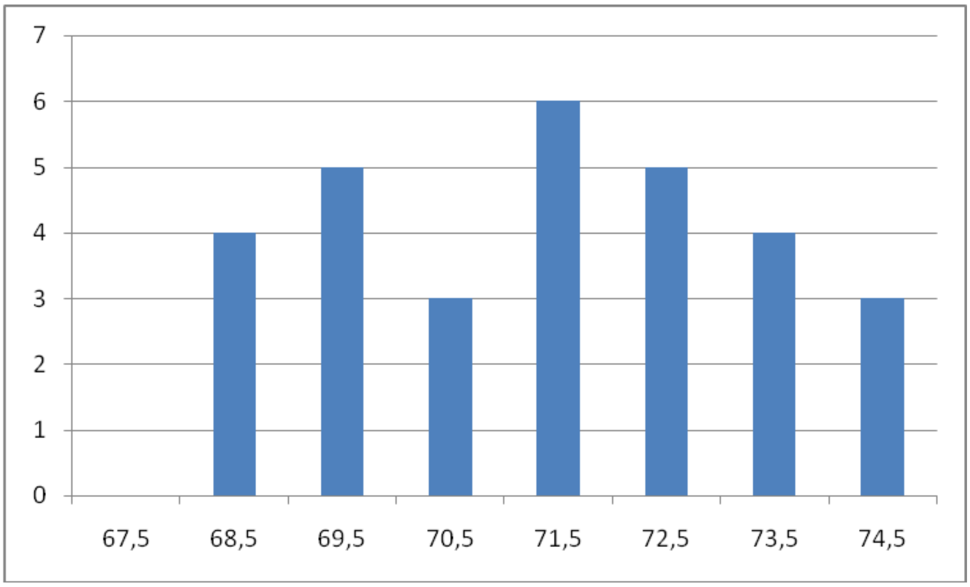
інтервал	(-∞;68)	(68;69)	(69;70)	(70;71)	(71;72)	(72;73)	(73;74)	(74;+∞)
к-сть значень	0	4	5	3	6	5	4	3

Полігон частот:



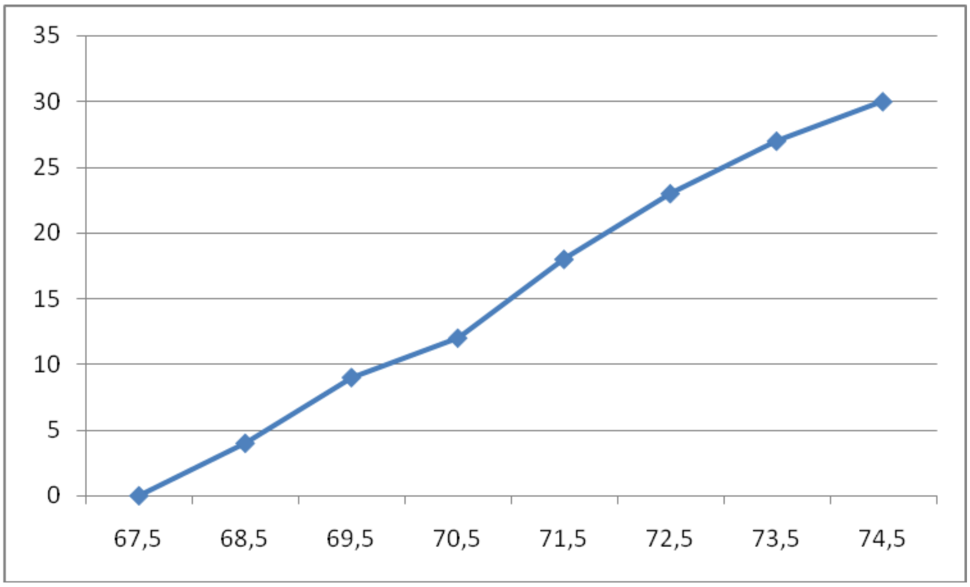
точка на інтервалі	67,5	68,5	69,5	70,5	71,5	72,5	73,5	74,5
к-сть значень	0	4	5	3	6	5	4	3

Гістограма:



Кумулятивна крива:

середина інтервалу	67,5	68,5	69,5	70,5	71,5	72,5	73,5	74,5
аккумул.к-сть значень	0	4	9	12	18	23	27	30



Таким чином, на основі аналізу даних вибірки і їх графічних відображень можна висловити примущення, що розподіл досліджуваної випаткової величини близький до нормального. Параметри відповідного нормального розподілу очевидно знайдемо, обчисливши числові характеристики вибірки – вибіркове середнє, вибіркову дисперсію та ін.

1.3. Завдання для самостійної роботи (30 варіантів).

Для вибіркових даних провести первинний аналіз, побудувати варіаційний ряд, інтервальний варіаційний ряд ($k = 8$ інтервалів), полігон частот, гістограму, кумулятивну криву, знайти вибіркові середнє, дисперсію, моду, медіану, коефіцієнти асиметрії і ексцесу:

Варіант 1.

72,01	68,70	68,92	70,77	69,42	69,55	74,72	70,98	71,62	68,15
70,08	69,01	73,31	70,83	70,99	67,56	69,25	69,26	68,74	71,31
72,43	68,85	70,46	72,19	68,60	70,69	73,75	69,10	68,18	72,47

Варіант 2.

67,89	69,90	68,93	67,20	74,16	68,78	69,49	72,616	71,49	66,87

67,83	68,78	70,01	71,03	72,89	66,51	72,19	73,85	68,36	69,56
73,68	74,09	71,55	67,99	71,55	71,58	70,84	69,42	73,11	75,35

Варіант 3.

70,92	68,88	73,29	68,27	72,86	72,13	71,32	68,14	71,17	67,36
74,73	71,87	67,99	67,08	67,57	70,15	70,56	70,18	68,51	71,84
70,25	70,33	67,61	71,58	69,52	68,29	72,51	71,75	70,62	69,60

Варіант 4.

70,92	68,88	73,29	68,27	72,86	72,13	71,32	68,14	71,17	67,36
74,73	71,87	67,99	67,08	67,57	70,15	70,56	70,18	68,51	71,84
70,25	70,33	67,61	71,58	69,52	68,29	72,52	71,75	70,62	69,60

Варіант 5.

65,46	68,21	67,69	72,59	69,92	70,92	70,31	71,14	68,10	70,78
72,93	70,40	71,53	73,98	69,16	69,26	71,73	72,55	71,29	72,16
70,61	69,30	70,75	71,56	72,43	70,22	71,01	71,52	69,99	72,19

Варіант 6.

71,78	66,46	69,38	69,28	69,08	70,89	73,89	72,17	68,63	73,65
71,35	68,78	69,70	67,29	67,61	69,47	68,30	69,79	74,98	72,31
66,86	71,89	70,34	68,75	69,76	70,04	69,78	70,51	68,75	71,61

Варіант 7.

68,37	68,40	71,24	69,96	66,62	73,76	70,53	69,44	71,10	75,39
68,52	69,64	71,98	71,24	68,23	71,55	72,31	65,96	73,61	70,49
70,70	71,97	69,20	68,59	70,51	67,88	72,47	70,21	69,00	71,63

Варіант 8

65,44	69,38	68,40	69,51	69,66	66,65	67,82	71,40	71,36	65,95
68,62	73,28	67,03	69,45	68,80	71,33	70,43	70,92	70,96	71,14
67,53	71,29	71,05	71,87	73,97	69,08	68,31	70,64	69,94	70,57

Варіант 9.

65,97	70,78	72,03	70,98	66,05	68,39	69,55	70,15	71,75	66,38
71,74	68,31	71,76	68,92	69,48	72,87	67,87	68,84	67,73	70,88

68,37	70,79	71,70	70,91	69,37	69,05	70,91	69,02	70,37	68,93

Варіант 10.

71,40	70,19	72,75	68,80	72,29	68,66	70,00	71,37	72,87	65,60
72,44	71,42	67,92	68,66	74,30	70,86	67,06	73,41	68,28	70,97
69,45	66,78	71,57	69,57	71,89	72,76	70,86	70,46	69,58	71,55

Варіант 11.

71,55	71,12	70,38	70,25	69,93	72,32	72,39	68,39	73,04	70,54
69,03	71,62	69,55	70,75	72,59	70,63	68,34	69,91	69,60	69,42
71,13	64,86	68,76	66,04	71,72	71,88	69,02	68,40	71,20	68,03

Варіант 12.

70,13	70,17	69,35	68,61	70,87	67,29	69,81	70,31	68,23	73,68
72,01	71,73	74,87	70,28	67,73	69,08	68,14	67,30	65,09	68,80
70,99	72,61	69,09	68,71	67,15	73,15	72,39	69,77	69,64	72,56

Варіант 13.

72,04	69,81	66,42	71,09	68,73	65,69	68,48	72,74	68,53	70,30
70,48	66,26	66,90	70,02	71,61	70,22	71,51	68,17	66,03	71,97
68,58	71,39	70,17	70,86	73,17	70,73	75,06	69,17	74,25	68,00

Варіант 14.

67,40	71,42	70,13	70,91	70,45	73,42	71,44	72,84	69,41	71,23
70,08	72,12	71,02	68,52	70,08	70,70	69,49	67,94	69,42	68,64
72,01	67,95	72,23	71,48	71,64	70,52	65,81	68,85	71,42	69,44

Варіант 15.

72,16	69,89	67,46	72,73	72,37	71,91	72,73	68,22	65,19	70,13
70,67	69,03	72,48	67,17	69,30	71,22	70,20	71,17	72,50	71,18
67,98	66,74	68,05	70,14	66,47	68,82	69,72	69,04	69,68	70,25

Варіант 16.

69,96	72,24	66,41	68,56	69,61	66,83	68,57	70,48	69,49	66,72
69,72	69,67	70,87	69,52	64,81	71,51	67,76	72,07	73,54	70,44
71,36	70,61	70,51	71,83	73,13	74,08	65,30	71,83	72,00	71,52

Варіант 17.

67,91	68,65	70,40	69,21	71,40	72,28	70,67	70,86	67,74	69,98
69,03	66,81	67,31	67,06	74,65	67,26	68,82	71,80	69,79	71,60
70,13	72,62	68,32	71,04	70,93	66,19	71,44	70,07	72,29	69,93

Варіант 18.

70,99	71,18	66,10	71,50	69,56	69,41	71,49	70,25	70,31	71,26
71,67	70,73	71,93	69,44	69,20	70,41	67,84	68,91	72,47	68,95
68,91	67,94	69,86	68,84	71,94	68,13	72,16	70,63	67,40	69,45

Варіант 19.

70,18	71,58	69,12	67,15	70,37	66,72	70,93	69,86	67,01	69,88
68,86	68,53	68,86	68,11	70,28	74,78	71,75	68,90	67,48	71,28
68,73	66,88	72,30	70,84	67,87	67,23	68,01	72,67	69,35	68,86

Варіант 20.

68,24	68,87	67,66	70,56	68,29	69,82	67,87	72,02	68,68	71,21
69,72	70,80	72,73	70,5	68,98	69,70	68,18	68,49	68,65	68,88
67,20	67,70	72,01	69,01	71,53	71,62	72,46	72,57	69,36	69,73

Варіант 21.

66,72	68,75	72,18	73,07	70,80	66,74	69,33	71,09	68,97	71,62
71,31	69,15	70,65	67,25	72,76	67,89	68,95	70,07	70,36	73,50
72,99	70,14	69,77	67,68	69,38	72,42	67,17	72,47	71,26	71,76

Варіант 22.

71,94	70,45	69,02	71,39	68,89	68,17	70,60	69,90	71,36	68,65
68,81	66,91	68,51	70,06	70,88	69,92	70,74	69,49	71,27	71,08
67,19	67,98	70,58	69,74	68,46	68,91	70,65	72,32	69,56	66,71

Варіант 23.

66,27	67,81	73,21	66,70	71,08	69,80	67,99	69,10	70,87	73,13
66,95	70,01	71,28	70,16	69,39	69,74	70,06	70,21	71,41	71,28
67,28	69,48	72,84	71,60	68,48	69,38	66,83	71,70	68,16	70,62

Варіант 24.

71,94	66,27	68,27	70,12	66,54	70,47	68,66	69,10	66,52	69,91
69,65	68,72	71,71	71,50	69,29	69,46	70,43	68,16	72,93	69,75
71,76	67,20	69,86	70,40	72,69	68,83	71,38	72,58	70,70	70,87

Варіант 25.

69,70	68,13	69,17	71,08	64,73	70,21	71,96	68,12	68,97	69,41
68,16	72,93	68,10	69,29	70,09	67,52	72,10	72,17	69,68	66,69
68,94	70,48	72,66	70,26	70,94	73,22	70,83	70,09	68,61	66,64

Варіант 26.

73,30	71,27	70,40	68,48	69,80	69,93	71,09	69,84	70,86	69,56
71,75	67,48	71,84	70,34	71,23	71,74	69,12	68,28	68,12	70,69
71,47	68,75	73,07	73,06	70,03	68,77	70,02	71,78	69,13	71,42

Варіант 27.

68,69	68,98	69,21	67,56	70,33	68,49	71,72	73,96	65,72	68,93
68,84	66,57	67,55	68,74	68,31	70,38	68,11	71,06	71,64	69,14
73,44	69,18	71,94	70,84	70,16	69,81	67,62	66,95	70,81	69,51

Варіант 28.

68,03	67,97	68,28	69,12	70,29	69,35	67,77	69,46	68,95	70,02
69,78	71,97	69,89	73,60	70,10	70,85	68,16	67,72	69,80	67,24
70,23	64,10	70,59	73,36	69,12	68,57	72,52	70,70	71,75	71,36

Варіант 29.

73,34	67,21	68,98	74,45	71,81	68,59	66,25	68,07	71,45	70,04
72,81	70,37	68,77	69,32	70,56	70,71	68,99	67,99	68,56	69,82
72,43	72,65	68,51	67,94	66,71	69,97	68,42	68,93	70,45	70,93

Варіант 30.

71,14	77,08	68,85	68,19	74,03	71,36	70,03	67,74	68,63	69,26
67,34	73,10	70,55	69,60	70,94	71,21	67,78	69,88	67,61	72,05
69,91	70,59	69,44	74,48	73,52	69,27	71,29	71,35	67,44	63,82

РОЗДІЛ 2. СТАТИСТИЧНІ ОЦІНКИ. ПЕРЕВІРКА СТАТИСТИЧНИХ ГІПОТЕЗ. КРИТЕРІЙ НЕЙМАНА-ПІРСОНА. ПЕРЕВІРКА ГІПОТЕЗИ ПРО РОЗПОДІЛ ДАНОЇ ВИБІРКИ.

2.1. Теоретичні відомості.

Статистичні оцінки параметрів розподілу. Припустимо, що в генеральній сукупності діють певні закони, які визначаються деякими параметрами. В такому випадку можна розглянути задачу хоча б наближеного знаходження або оцінювання цих параметрів шляхом дослідження вибірки – наприклад оцінювання деякого параметра θ, точне значення якого невідоме шляхом оцінювання вибірки значень об'єму n шляхом вимірювання значень деякої випадкової величини X - $(x_1, x_2, ... x_n)$. В такому випадку:

Статистичною оцінкою параметра θ називається функція $\theta^*(x_1, x_2 .... x_n)$ від випадкових результатів спостережень, від вибірки $(x_1, x_2, ... x_n)$. При цьому значення статистичної оцінки наближається до істинного значення самого параметра, тобто $\theta \approx \theta^*$. Статистична оцінка, як функція від випадкової величини сама є випадковою величиною. Для того, щоб статистична оцінка давала найкраще наближення, вона має задовольняти таким вимогам: бути *незміщеною, ефективною, спроможною*.

Статистична оцінка називається *незміщеною*, якщо $M(\theta^*) = \theta$**.** Ця умова гарантує від систематичних помилок.

Однак навіть коли незміщена оцінка θ^* може давати значення, які будуть сильно відхилятися (будуть розсіяні) відносно свого середнього значення і одне від одного. Очевидно, що найкращою з цієї точки зору серед даного класу оцінок буде та оцінка, яка при заданому об'ємі має мінімальну дисперсію, $D(\theta^*) \to 0$. Таку оцінку називають *ефективною*.

Спроможною називають таку оцінку, для якої ймовірність того, що оцінка відрізняється від істинного значення параметра не більш ніж на деяку, достатньо малу величину δ, близька до одиниці: $P(\left|\theta - \theta^*\right| \le \delta) \to 1$ коли $n \to \infty$.

Як відомо вибіркове середнє (1) є незміщеною, спроможною і , якщо випадкова величина розподілена за нормальним законом, то і ефективною оцінкою математичного сподівання. Вибіркова дисперсія D_B не є незміщеною оцінкою. Для того, щоб це виправити вводять *виправлену вибіркову дисперсію* $S^2 = \frac{n}{n-1} D_B$. Зауважимо, що при великому об'ємі вибірки $\frac{n}{n-1} \to 1, n \to \infty$, і $S^2 \approx D_B$ і що користуючись теоремою Чебишева можна показати, що виправлена вибіркова дисперсія є спроможною оцінкою:

$$P\left\{\left|S^2 - \sigma_B^{\ 2}\right| \le \delta\right\} \to 1, n \to \infty$$

Інтервали довіри статистичних оцінок. Оцінки математичного сподівання і дисперсії, які були розглянуті в попередньому параграфі x_B, D_B, S називаються *точковими оцінками*. Статистична оцінка є випадковою величиною і тому її значення може відрізнятися від істинного. З метою контролю точності і надійності оцінок числових характеристик користуються *інтервалами довіри*. *Інтервалом довіри статистичної оцінки* називають інтервал з центром в цій оцінці, в якому міститься істинне значення відповідного параметра θ з ймовірністю $p = 1 - \alpha$, де α - *рівень значущості*, p - *ймовірність довіри, або надійність.* Очевидно, що ці числові характеристики пов'язані наступним співвідношенням:

$$p\left\{\theta^* - \delta \le \theta \le \theta^* + \delta\right\} = 1 - \alpha$$

Розглянемо такі випадки:

1) Довірчий інтервал статистичної оцінки математичного сподівання випадкової величини, розподіленої за нормальним законом:

Нехай випадкова величина X, що задана в генеральній сукупності розподілена за нормальним законом. Її математичне сподівання a, і дисперсія σ^2. Дисперсію будемо вважати відомою, а за статистичну оцінку математичного сподівання візьмемо вибіркове середнє x_B.Оскільки оцінка незміщенна, то $M(x_B) = a$, відповідно $D(x_B) = \frac{\sigma^2}{n}$, $\sigma(x_B) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$. Відхилення нормально розподіленої випадкової величини від її математичного сподівання обчислюється за формулою $p\left\{|x - a| \le \delta\right\} = 2\Phi(\frac{\delta}{\sigma})$, де $\Phi(t)$ - функція Лапласа.

Тому $p\left\{|x_B - a| \le \delta\right\} = 2\Phi(\frac{\delta}{\sigma(x_B)}) = 2\Phi(\frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma})$.

Якщо позначити $t = \frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}$, то $\delta = \frac{t\sigma}{\sqrt{n}}$, і $p\left\{|x_B - a| \le \frac{t\sigma}{\sqrt{n}}\right\} = 2\Phi(t)$.

За означенням $2\Phi(t) = 1 - \alpha = \gamma$, де $\gamma \to 1$ - є рівень довіри, або надійність. Таким чином інтервал довіри має вигляд

$x_B - \frac{t\sigma}{\sqrt{n}} \le a \le x_B + \frac{t\sigma}{\sqrt{n}}$, де t - квантіль нормального розподілу. Наведемо кілька значень t, які відповідають певним γ і відповідно α з формули $2\Phi(t) = \gamma, \Phi(t) = \frac{\gamma}{2}$.

α	0.05	0.01	0.001
γ	0.95	0.99	0.999
t	1.96	2.56	3.29

слід відмітити, що коли n збільшується, то інтервал довіри звужується. Оскільки його довжина $\delta = \frac{t\sigma}{\sqrt{n}}$.

Зауваження. Формула для інтервалу довіри отримана за припущення, що випадкова величина X має нормальний розподіл. Проте, якщо випадкова величина X має інший розподіл, то в силу центральної граничної теореми теорії ймовірностей величина $X_B = \frac{1}{n}(X_1 + X_2 + ...X_n)$ при $n \to \infty$ розподілена за законом близьким до нормального і тому вигляд інтервалу довіри зберігається.

2) довірчий інтервал для математичного сподівання нормально розподіленої випадкової величини при невідомій дисперсії;

В цьому випадку інтервал довіри обчислюється за формулою

$$p\left\{x_B - t\frac{S}{\sqrt{n}} \le a \le x_B + t\frac{S}{\sqrt{n}}\right\} = \gamma,$$ де S - виправлена дисперсія

Взагалі кажучи випадкова величина $\dfrac{a - x_B}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$ розподілена за законом Стьюдента, але при значеннях $n \ge 30$ цей закон близький до нормального і для визначення t можна користуватись функцією Лапласа $\Phi(t)$.

Відповідно інтервал довіри має вигляд $x_B - t\frac{S}{\sqrt{n}} \le a \le x_B + t\frac{S}{\sqrt{n}}$, де t квантіль в нормальному розподілі і визначається аналогічно 1) при заданому рівню значущості, або ймовірності довіри виходячи з табл. 1.

Довірчий інтервал статистичної оцінки середнього квадратичного відхилення обчислюють за допомогою випадкової величини $\chi = \frac{s}{\sigma}\sqrt{n-1}$,яка має χ -розподіл (хі) і визначається $0 \le \sigma \le s(1+q_\gamma)$, де q_γ - квантіль χ - розподілу і визначається за таблицями.

Перевірка статистичних гіпотез. *Статистичною гіпотезою* називають гіпотезу (припущення) про вигляд невідомого закону розподілу, або про невідомі параметри відомих розподілів.

Наприклад, статистичними будуть гіпотези:

1) генеральна сукупність розподілена за нормальним законом (припущення про вигляд невідомого закону розподілу);

2) параметри розподілу для двох випадкових величин, розподілених за законом Пуассона, рівні між собою: $\lambda_1 = \lambda_2$ (припущення про невідомі параметри розподілу);

Поряд з висунутою гіпотезою, як правило, розглядають протилежну (альтернативну) гіпотезу. Якщо висунута гіпотеза буде відхилена, то має місце *альтернативна гіпотеза*. *Висунуту*, *основну гіпотезу* часто позначають H_0, альтернативну, або, як її ще називають *конкуруючу*, позначають H_1.

Наприклад, якщо перевіряється гіпотеза , про деякий параметр розподілу, то основна гіпотеза, матиме вигляд $H_0 : \theta = \theta_0$, а альтернативна, $H_1 : \theta \ne \theta_0$

Також розрізняють гіпотези, які містять одне і які містять більше одного, кілька припущень:

Простою називають гіпотезу, яка містить тільки одне припущення. Наприклад, якщо λ - параметр показникового розподілу, то гіпотеза $\lambda = 10$ - проста.

Складною називають гіпотезу, яка складається з кількох простих. Наприклад гіпотеза $\lambda \ge 10$ - вона складається з нескінченної кількості простих.

Критичною областю називають сукупність тих значень критерію, при яких нульову гіпотезу відхиляють. Головний принцип перевірки статистичних гіпотез – якщо значення $К_{сп}$ належать критичній області, то гіпотезу H_0 відхиляють. Якщо ж $К_{сп}$ належать області прийняття гіпотези, то гіпотезу приймають. Оскільки критерій К є одновимірною випадковою величиною, то всі його можливі значення належать числовому проміжку $(-\infty,\infty)$, або $(0,\infty)$.Таким чином існують критичні точки $К_{кр}$, які знаходять по таблицям відповідних розподілів, і які відділяють критичну область від області прийняття гіпотези. Розрізняють односторонню (правосторонню і лівосторонню) і двосторонню критичні області. Ми будемо розглядати правосторонню критичну область. Тобто $K \geq K_{kp}$.Для знаходження правосторонньої критичної області треба знайти критичну точку Ккр .Для цього задають достатньо малу ймовірність – рівень значущості α. Ккр знаходять з вимоги, щоб при умові справедливості нульової гіпотези , ймовірність її відхилення дорівнювала б рівню значущості $P\{K \geq k_{kp}\} = \alpha$. Виходячи з принципу неможливості малоймовірних подій в одиничному випробуванні при $\alpha \to 0$, така подія не може відбутися. Якщо ж подія $K \geq k_{kp}$ все ж таки відбулась, то це можна пояснити помилковістю гіпотези H_0, і тому вона може бути відхилена

Перевірка гіпотези про невідомий закон розподілу , що можна очікувати виконується за допомогою критерію, який є спеціально підібраною випадковою величиною і називається критерієм згоди. Є кілька критеріїв згоди χ^2 (хі – квадрат) К. Пірсона, Колмогорова, Смірнова. Обмежимось описанням критерію Л. Пірсона для перевірки про нормальний розподіл генеральної сукупності. (Даний критерій можна застосовувати також для перевірки інших розподілів).

Нехай в результаті випробування отримано емпіричний розподіл (дані вибірки об'єму n) $x_1, x_2 ...... x_k$ і $n_1, n_2 ...... n_k$, де $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$.

Припустимо, що закон розподілу генеральної сукупності нормальний і теоретичні частоти відповідно $n_1', n_2', ... n_k'$. В якості критерію перевірки нульової гіпотези розглядають випадкову величину $\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(n_i - n_i')^2}{n_i'}$.

Ця величина випадкова – в різних випробуваннях вона буде приймати різні значення. Як бачимо, критерій характеризує близькість емпіричного і теоретичного розподілів. Розподіл χ^2 має параметр $r = k - 1 - s$.Цей параметр називають степінь свободи і він залежить від k (числа груп, або інтервалів на які розбита вибірка) і від s (кількість параметрів розподілу, які обчислюються за даними вибірки). Наприклад, якщо випадкова величина розподілена за нормальним законом, то $r = k - 2 - 1 = k - 3$, якщо за показниковим законом, то $r = k - 1 - 1 = k - 2$.Будуємо правосторонню критичну область, виходячи з вимоги, щоб ймовірність попадання критерію в цю область, в припущенні справедливості нульової гіпотези, дорівнював рівню значущості, а саме $P\{\chi^2 \geq \chi^2_{kp}\} = \alpha$.Правостороння критична область $\chi^2 \geq \chi^2_{kp}(\alpha, r)$, область прийняття нульової гіпотези нерівність $\chi^2 \leq \chi^2_{kp}(\alpha, r)$.

Правило. Для того, щоб при заданому рівні значущості перевірити гіпотезу «H_0- генеральна сукупність розподілена нормально» треба знайти теоретичні частоти n_i', $i = 1.....k$, і обчислити значення критерію $\chi^2{}_{\text{сп}} = \sum_{i-1}^{k} \frac{(n_i - n_i')^2}{n_i'}$ і за таблицями критичних точок розподілу χ^2 при заданому рівні значущості α і числу степенем свободи $r = k - 3$, знайти критичну точку $\chi^2_{kp}(\alpha, r)$.Якщо $\chi^2{}_{\text{сп}} \leq \chi^2_{kp}$ - нема підстав відхилити гіпотезу, якщо $\chi^2{}_{\text{сп}} \geq \chi^2_{kp}$ - гіпотезу H_0 відхиляють.

Зауваження. Об'єм вибірки може бути достатньо великим $n \geq 50$.Кожна група повинна мати 6-8 варіант. Малочисельні групи доцільно об'єднати в одну, додаючи частоти. З метою контролю обчислення , розкриваючи квадрат , критерій χ^2 можна звести до вигляду $\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{n_i^2}{n_i'} - n$.

Методика обчислення теоретичних частот нормального розподілу за даними вибірки. Як випливає з попереднього суть критерію Пірсона полягає в порівнянні теоретичних і емпіричних частот. Емпіричні частоти визначаються вибіркою. Нижче наведено методику знаходження теоретичних частот , в припущенні , що генеральна сукупність має нормальний розподіл.

1. Весь інтервал значень випадкової величини X (значення вибірки) поділяють на k частинних інтервалів однакової довжини $[x_i, x_{i+1}]$ **,** знаходять середини частинних інтервалів x_i^*, в якості частоти варіанти x_i^* приймають n_i- кількість варіант, що попала в інтервал$[x_i, x_{i+1}]$. В результаті отримаємо варіаційний ряд $\begin{matrix} x_1^*, x_2^*, ...x_k^* \\ n_1, n_2, ...n_k \end{matrix}$, де $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$.

2. Обчислюють вибіркові числові характеристики - середню $\bar{x}_B{}^*$, середнє квадратичне відхилення -$\bar{\sigma}_B{}^* = \sqrt{\overline{D}_B{}^*}$.

3. Для можливості скористатися таблицями функції Лапласа, нормують випадкову величину X, тобто переходять до величини $Z = \frac{X - \bar{x}^*}{\bar{\sigma}^*}$. Причому найменше $z_1 = -\infty$, а найбільше $z_k = \infty$.

4. Знаходять теоретичні ймовірність за формулою попадання в заданий інтервал нормально розподіленої випадкової величини

$$p_i = P\{x_i \leq X \leq x_{i+1}\} = \Phi(\frac{x_{i+1} - \bar{x}_B^*}{\bar{\sigma}_B^*}) - \Phi(\frac{x_{i+1} - \bar{x}_B^*}{\sigma_B^*}) = \Phi(z_{i+1}) - \Phi(z_i).$$

Враховуючи, що $\Phi(-\infty)=-0{,}5, \Phi(\infty)=0{,}5$, теоретичні частоти обчислюються за правилом $n_i'=np_i$.

2.2. Практичне завдання. Приклад розв'язання.

Приклад. При рівні значущості 0,05 перевірити гіпотезу про нормальний розподіл, якщо відомі емпіричні і теоретичні частоти: n_i:6,13,38,74,106,85,30,14; n_i':3,14,42,82,99,76,37,13.

I	n_i	n_i'	$(n_i-n_i')^2$	$\frac{(n_i-n_i')^2}{n_i'}$	n_i^2	$\frac{n_i^2}{n_i'}$
1	6	3	9	3	36	12
2	13	14	1	0,07	169	12.07
3	38	42	16	0,38	1444	34.38
4	74	82	64	0,78	5476	66.78
5	106	99	49	0.49	11236	113.49
6	85	76	81	1,07	7225	95.07
7	30	37	49	1,32	900	24.32
8	14	13	1	0,08	196	15.08
$\sum$	366	366		$\chi^2_{сп}$=7,19		373.19

$\chi^2_{сп}$=7.19. За іншою формулою $\chi^2_{сп}=\sum_{i=1}^{8}\frac{n_i^2}{n_i'}-n$=373.19-366=7.19.

Враховуючи кількість груп вибірки $k=8$, число ступіней свободи $r=8-3=5$.За таблицею критичних значень розподілу χ^2 [ ] при рівні значущості $\alpha=0{,}05, r=5, \chi^2_{kp}(0{,}05{,}5)=11{,}1$. Оскільки $\chi^2_{сп}$=7.19, то $\chi^2_{сп}\le\chi^2_{kp}$ - нема підстав відхилити дану гіпотезу. Тобто дані спостережень узгоджуються з гіпотезою про нормальний розподіл.

Приклад 2. Знайти теоретичні частоти для інтервального розподілу при $n=200$, і перевірити за критерієм Пірсона гіпотезу про нормальний розподіл даної генеральної сукупності при рівні значущості $\alpha=0{,}01$.

Ном. Інт.	x_i	x_{i+1}	Емп. Част. n_i	x_i^*	$x_i-\bar{x}_B^*$	$x_{i+1}-\bar{x}_B^*$	z_i	z_{i+1}	$\Phi(z_i)$	$\Phi(z_{i+1})$	p_i	n_i'
1	4	6	15	5	-∞	-6.63	$-\infty$	-1.41	-0.5	-0.420	0.0793	15.86

										7		
2	6	8	26	7	-6.63	-4.63	-1.41	-0.99	-0.4207	-0.3389	0.0818	16.36
3	8	10	25	9	-4.63	-2.63	-0.93	-0.56	-0.3389	-0.2123	0.1266	25.32
4	10	12	30	11	-2.63	-0.63	-0.156	-0.13	-0.2123	-0.0517	0.1606	32.16
5	12	14	26	13	-0.63	1.37	-0.13	0.29	-0.0517	0.1141	0.1658	33.16
6	14	16	21	15	1.37	3.37	0.29	0.72	0.1141	0.2642	0.1501	30.02
7	16	18	24	17	3.37	5.37	0.72	1.14	0.2642	0.3729	0.1087	21.74
8	18	20	20	19	5.37	7.37	1.14	1.57	0.3729	0.4418	0.0689	13.78
9	20	22	13	21	7.37	-	1.57	∞	0.4418	0.5	0.0582	11.64
				200							1	200

$x_i^* = \dfrac{x_i + x_{i+1}}{2}$, $\quad \bar{x}^*{}_B = \dfrac{1}{200}\sum_{i=1}^{9} x_i^* n_i$ =12.63, $\quad \overline{D}_B^* = \dfrac{1}{200}\sum_{i=1}^{9}(x_i^* - \bar{x}_B^*)^2 n_i$,

$\bar{\sigma}_B^* = \sqrt{\overline{D}_B^*}$ =4.695. $\quad \chi^2 = \sum_{i=1}^{9}\dfrac{(n_i - n_i')^2}{n_i'}$ =13.3

При рівні значущості $\alpha = 0.01$ і $r = k - 3 = 6$, $\chi^2_{kp}(0{,}01{,}6) = 16{,}8$, χ^2 сп=13.37. Згідно з критерієм Пірсона – нема підстав відхилити гіпотезу про нормальний розподіл. Тобто гіпотеза приймається.

2.3. Завдання для самостійної роботи (30 варіантів).

Перевірити гіпотезу про нормальний розподіл випадкової величини за даними вибірки. Дані вибірки беруться з варіантів завдань для самостійної роботи попереднього розділу (1.3.).

РОЗДІЛ 3. ЕЛЕМЕНТИ КОРЕЛЯЦІЙНОЇ ТЕОРІЇ. ВИЗНАЧЕННЯ РІВНЯННЯ ЛІНІЙНОЇ РЕГРЕСІЇ МЕТОДОМ НАЙМЕНШИХ КВАДРАТІВ. РЕГРЕСІЙНИЙ АНАЛІЗ ДВОВИМІРНОЇ ВИБІРКИ.

3.1. Теоретичні відомості.

Розглянемо дві випадкові величини X та Y. Між ними може існувати функціональна залежність, коли значенню однієї з них відповідає певне значення іншої. Між цими величинами може існувати статистична залежність. Її ми і будемо вивчати.

Кореляційний момент. Коефіцієнт кореляції. Розглянемо вибірку об'єму n для двох випадкових величин X та Y. Нехай варіанти $X_1,...,X_n$ - варіанти X, а $Y_1,...,Y_n$ - варіанти Y. Для того, шоб оцінити оилу залежності X та Y вводять поняття кореляційного моменту та коефіцієнту кореляції.

Кореляційним моментом випадкових величин X та Y називають величину $\mu_{XY} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})(Y_i - \overline{Y})$.

де $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ - вибіркова середня величини $\overline{X}$, а $\overline{Y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i$ - вибіркова середня величини Y. Підставивши їх явний вигляд у попередню формулу можна отримати ще одну формулу для обчислення кореляційного моменту: $\mu_{XY} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i Y_i - \overline{X}\,\overline{Y}$.

Одним з недоліків використання кореляційного моменту є те, що це величина розмірна, тобто в залежності від задачі і типу випадкових величин X та Y вона буде вимірюватися в різних одиницях виміру. Тому зазвичай виявляється замість кореляційного моменту більш зручним розглядати таку безрозмірну величину як *коефіцієнт кореляції* R_{XY}: $R_{XY} = \frac{\mu_{XY}}{\sigma(X)\sigma(Y)}$

де $\sigma^2(X) = \sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$ і $\sigma^2(Y) = \sum_{i=1}^{n}(Y_i - \overline{Y})^2$ - відповідні вибіркові середні квадратичні відхилення випадкових величин X та Y.

Властивості коефіцієнта кореляції:

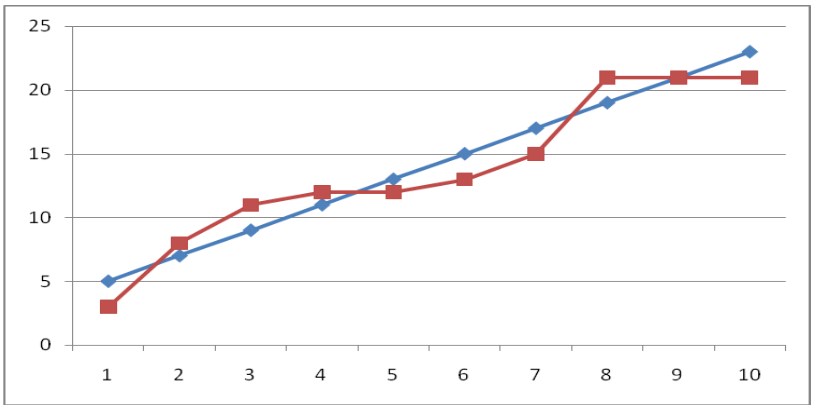
1. Якщо між випадковими величинами X та Y має місце точна лінійна залежність, то $R_{XY} = \pm 1$.
2. Коефіцієнт кореляції за абсолютною величиною не більший за одиницю $|R_{XY}| \le 1$.
3. Якщо $|R_{XY}| = 1$, то X та Y зв’язані лінійною залежністю:

$$Y - Y_i = \pm\frac{\sigma(X)}{\sigma(Y)}(X_i - \overline{X}),\ \frac{Y - Y_i}{\sigma(Y)} = \pm\frac{X_i - \overline{X}}{\sigma(X)}$$

Таким чином, коефіцієнт кореляції R_{XY} характеризує міру лінійної залежності між випадковими величинами X та Y. Якщо $R_{XY} = 0$, то X та Y називають *некорельованими*.

Визначення лінійного рівняння регресії методом найменших квадратів. Розглянемо випадкові величини X та Y, які задані двомірною вибіркою $(X_1,Y_1),(X_2,Y_2),...,(X_n,Y_n)$. Обчислимо коефіцієнт кореляції R_{XY}. Якщо $|R_{XY}|<1$, то вибіркові величини X та Y незв'язані точною лінійною залежністю. Будемо вважати залежність між випадковими величинами X та Y близькою до лінійної.

Треба знайти таке рівняння прямої $Y = kX + b$, щоб координати точок (X_i, Y_i) приблизно задовольняли цьому рівнянню, як показано на малюнку:



Шукаємо k та b методом найменших квадратів. В результаті маємо $k\sigma^2(X) = \mu_{XY}$, звідки $k = \frac{\mu_{XY}}{\sigma^2(X)}$, а b можна знайти з першого рівняння $b = \overline{Y} - k\overline{X} = \overline{Y} - \frac{\mu_{XY}}{\sigma^2(X)}\overline{X}$. Підставивши отримані вирази для k і b в рівняння прямої $y = kx + b$, одержимо:

$$Y = \frac{\mu_{XY}}{\sigma^2(X)}X + \overline{Y} - \frac{\mu_{XY}}{\sigma^2(X)}\overline{X} \text{ або } Y - \overline{Y} = \frac{\mu_{XY}}{\sigma^2(X)}(X - \overline{X}).$$

Ввівши в дане рівняння коефіцієнт кореляції $R_{XY} = \frac{\mu_{XY}}{\sigma(X)\sigma(Y)}$ одержимо: $\frac{Y - \overline{Y}}{\sigma(Y)} = R_{XY}\frac{X - \overline{X}}{\sigma(X)}$.

Це рівняння і називають *рівнянням лінійної регресії* величини Y на величину X. R_{XY}- вибірковий коефіцієнт кореляції. Рівняння лінійної регресії величини X на величину Y має вигляд:

$$\frac{Y-\overline{Y}}{\sigma(Y)}=R_{YX}\,\frac{X-\overline{X}}{\sigma(X)}$$

Прямі регресії проходять через одну й ту ж саму точку $(\overline{X},\overline{Y})$. Вони збігаються, якщо їх кутові коефіцієнти однакові $R_{XY}=\frac{1}{R_{XY}}$; $R_{XY}^2=1$; $R_{XY}=\pm 1$. В цьому випадку має місце точна лінійна залежність між X та Y.

Визначення кореляційних характеристик за вибірковими даними. На практиці, як правило, мають справу з великою кількістю спостережень. Одне й те ж саме спостереження X може зустрічатись n_X разів, а значення Y - n_Y разів. Пара (X,Y) спостерігається n_{XY} разів. Згруповані дані таких спостережень об'єднуються в кореляційну таблицю:

	Y_1	...	Y_n
X_1	n_{11}	...	n_{1n}
...	...	...	...
X_n	n_{n1}	...	n_{nn}

Згідно з означенням кореляційного моменту $\mu_{XY}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(X_i-\overline{X})(Y_i-\overline{Y})n_{ij}$ і відповідно вибірковий коефіцієнт кореляції $R_{XY}=\frac{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(X_i-\overline{X})(Y_j-\overline{Y})n_{ij}}{n\sigma(X)\sigma(Y)}$. Аналогічно наведеним раніше формулам можна показати, що: $\mu_{XY}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}X_iY_in_{ij}-\overline{X}\overline{Y}$ і

$$R_{XY}=\frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}X_iY_jn_{ij}-\overline{X}\overline{Y}}{n\sigma(X)\sigma(Y)}.$$

Застосовуючи дані формули до рівняння лінійної регресії одержують відповідні рівняння лінійної регресії, але вже для випадкових величин, які задані кореляційною таблицею.

Зауваження. Якщо випадкові величини X та Y задані у вигляді інтервальних варіаційних рядів то для знаходження вибіркових характеристик треба знайти центр цих інтервалів і перейти до розгляду кореляційної таблиці.

3.2. Завдання для самостійної роботи (30 варіантів).

За даними вибірки скласти рівняння лінійної регресії.

Варіант 1.

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
X	1,00	1,34	2,67	3,27	4,56	4,60	6,58	8,56	9,94	11,89
Y	6,12	6,76	9,27	10,41	12,83	12,91	16,65	20,38	23,00	26,67
№	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
X	10,41	11,33	11,60	13,57	16,94	16,89	16,46	19,44	18,56	20,25
Y	23,88	25,61	26,12	29,84	36,21	36,11	35,29	40,92	39,33	42,45
№	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
X	20,00	22,43	23,71	24,37	25,36	26,68	26,44	27,87	28,56	29,96
Y	41,97	46,58	48,98	50,22	52,10	54,59	54,13	56,83	58,15	60,79

Варіант 2.

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
X	1,37	3,06	2,42	3,23	4,74	7,80	6,92	9,22	8,34	10,61
Y	5,31	8,01	7,00	8,29	10,69	15,57	14,18	17,84	16,44	20,05
№	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
X	11,58	11,84	13,46	16,10	15,18	16,29	16,47	19,32	18,14	20,26
Y	21,60	22,02	24,60	28,82	27,35	29,11	29,40	33,94	32,07	35,45
№	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
X	21,94	22,66	21,99	23,90	24,01	27,72	26,73	29,90	30,39	29,37
Y	38,12	39,28	38,21	41,25	41,44	47,34	45,77	50,83	51,61	49,98

Варіант 3.

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
X	1,58	2,07	5,12	4,28	5,44	8,26	6,30	8,02	8,81	10,30
Y	5,72	6,40	10,68	9,49	11,13	15,08	12,32	14,73	15,84	17,93
№	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
X	10,41	12,02	15,12	15,03	13,95	15,53	18,59	19,03	20,55	19,80
Y	18,08	20,34	24,68	24,56	23,04	25,26	29,55	30,16	32,28	31,24
№	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
X	18,78	22,43	22,62	23,06	24,94	24,88	26,18	28,30	29,26	28,17
Y	29,81	34,92	35,19	35,80	38,44	38,36	40,18	43,14	44,49	42,95

Варіант 4.

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
X	0,48	3,04	2,66	3,96	6,23	5,09	8,71	8,09	7,88	9,86
Y	3,21	12,43	11,06	15,74	23,94	19,83	32,87	30,63	29,87	37,03
№	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
X	10,36	11,57	12,60	14,54	14,76	17,10	16,03	18,09	18,88	19,85
Y	38,82	43,19	46,91	53,89	54,66	63,12	59,27	66,68	69,54	73,02
№	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
X	24,35	24,81	23,58	23,56	24,22	25,85	26,99	27,57	28,78	30,52
Y	89,25	90,90	86,46	86,38	88,75	94,64	98,76	100,82	105,21	111,49

Варіант 5.

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
X	2,70	2,34	2,08	3,71	4,54	5,76	5,36	7,94	7,82	11,19
Y	12,11	11,10	10,41	14,91	17,20	20,58	19,48	26,61	26,29	35,61
№	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
X	9,61	10,83	12,52	14,76	13,44	15,80	16,11	18,96	18,94	19,70
Y	31,22	34,60	39,28	45,49	41,84	48,36	49,21	57,11	57,05	59,15
№	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
X	22,63	21,85	23,75	25,52	26,35	26,05	27,58	28,85	27,69	32,32
Y	67,28	65,09	70,36	75,24	77,53	76,71	80,95	84,46	81,25	94,06

Варіант 6.

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
X	1,45	1,02	2,64	4,07	2,37	6,21	7,39	7,06	10,12	7,73
Y	7,11	6,22	9,56	12,50	9,02	16,90	19,34	18,66	24,96	20,04
№	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
X	10,64	12,41	13,39	12,56	14,98	17,18	16,55	18,80	18,15	22,33
Y	26,03	29,66	31,68	29,97	34,96	39,47	38,18	42,82	41,47	50,07
№	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
X	20,46	21,36	24,76	23,76	25,33	26,58	29,21	28,82	29,30	30,81
Y	46,23	48,07	55,07	53,03	56,25	58,83	64,23	63,43	64,42	67,52

Варіант 7.

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
X	0,03	1,55	0,90	4,29	3,49	6,61	7,41	7,60	6,60	10,18
Y	6,80	9,01	8,06	12,97	11,83	16,35	17,51	17,78	16,34	21,54
№	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
X	11,05	13,61	13,59	12,40	15,12	15,02	19,07	18,61	18,73	21,17
Y	22,80	26,51	26,48	24,75	28,71	28,56	34,44	33,77	33,94	37,48
№	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
X	21,61	22,64	23,63	25,03	24,75	25,96	27,32	27,56	28,58	27,91
Y	38,12	39,62	41,06	43,09	42,68	44,44	46,41	46,76	48,24	47,27

Варіант 8

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
X	-0,19	2,47	1,65	4,52	4,82	5,09	7,81	7,28	8,84	10,77
Y	2,76	10,69	8,25	16,78	17,67	18,49	26,60	25,02	29,66	35,41
№	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
X	10,21	11,58	13,42	14,58	16,71	16,34	16,59	16,65	19,15	18,92
Y	33,74	37,82	43,32	46,78	53,11	52,03	52,76	52,94	60,38	59,71
№	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
X	21,27	20,64	23,84	22,06	25,27	27,81	27,00	28,96	28,23	31,22
Y	66,70	64,81	74,36	69,06	78,63	86,21	83,77	89,63	87,44	96,34

Варіант 9.

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
X	-0,05	2,38	2,37	2,61	5,51	6,28	5,53	9,20	10,34	8,28
Y	5,90	8,86	8,84	9,13	12,66	13,61	1270	17,16	18,55	16,04
№	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
X	10,89	11,70	13,75	15,83	15,06	15,73	18,55	17,89	20,28	22,05
Y	19,22	20,21	22,70	25,23	24,29	25,11	28,54	27,75	30,65	32,81
№	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
X	20,89	21,39	22,35	23,90	24,69	25,66	26,94	26,92	30,23	28,80
Y	31,40	32,00	33,17	35,06	36,02	37,20	38,76	38,74	42,77	41,04

Варіант 10.

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
X	0,76	2,20	3,8197	4,94	5,45	5,98	6,81	8,28	7,16	10,06
Y	11,26	13,99	17,0649	19,20	20,17	21,18	22,74	25,54	23,41	28,93
№	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
X	11,03	12,25	13,96	13,72	14,57	13,96	16,06	18,11	17,92	19,90
Y	30,77	33,09	36,34	35,89	37,51	36,35	40,34	44,23	43,87	47,64
№	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
X	20,34	21,15	23,48	26,69	23,48	24,11	27,41	27,48	29,07	32,29
Y	48,48	50,01	54,44	60,54	54,43	55,64	61,92	62,04	65,07	71,20

Варіант 11.

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
X	0,16	1,04	4,14	3,73	3,71	6,16	5,35	8,97	8,98	10,41
Y	7,56	10,13	19,16	17,97	17,92	25,07	22,71	33,28	33,29	37,46
№	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
X	9,80	13,07	14,83	13,51	13,28	16,04	18,29	17,26	18,09	19,12
Y	35,68	45,23	50,36	46,51	45,84	53,90	60,47	57,45	59,88	62,89
№	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
X	21,53	21,13	24,63	23,86	24,65	26,85	25,83	27,41	28,22	30,40
Y	69,93	68,75	78,96	76,71	79,04	85,45	82,47	87,09	89,46	95,82

Варіант 12.

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
X	-0,01	2,85	3,72	4,86	5,73	5,78	5,81	6,82	8,08	8,95
Y	7,99	18,97	22,30	26,69	30,03	30,23	30,35	34,21	39,038	42,40
№	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
X	10,15	11,92	12,86	13,03	16,44	15,25	17,11	17,60	20,40	19,15
Y	46,99	53,78	57,42	58,07	71,14	66,58	73,73	75,59	86,37	81,58
№	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
X	21,00	21,08	23,14	25,56	24,39	25,64	26,68	28,67	29,73	30,33
Y	88,66	89,00	96,88	106,20	101,70	106,50	110,49	118,14	122,20	124,52

Варіант 13.

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
X	0,48	1,78	4,05	3,78	5,16	5,87	7,12	9,92	9,97	9,95
Y	11,38	13,34	16,80	16,39	18,49	19,56	21,47	25,72	25,80	25,76
№	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
X	10,67	11,57	13,25	13,74	14,21	15,27	18,41	16,85	19,81	19,32
Y	26,87	28,24	30,78	31,53	32,25	33,85	38,64	36,26	40,76	40,01
№	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
X	20,30	22,92	23,11	22,63	24,66	27,84	27,43	27,84	28,51	31,044
Y	41,51	45,49	45,78	45,06	48,14	52,97	52,35	52,97	53,99	57,84

Варіант 14.

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
X	0,30	2,31	3,42	6,10	4,33	5,17	6,96	8,43	6,98	11,14
Y	2,70	7,35	9,90	16,08	12,00	13,92	18,06	21,43	18,11	27,67
№	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
X	10,87	12,25	12,19	14,17	13,28	15,87	16,58	17,57	19,70	20,18
Y	27,06	30,24	30,09	34,67	32,60	38,58	40,21	42,48	47,40	48,49
№	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
X	20,023	20,02	22,00	25,35	24,60	27,06	27,01	25,99	30,98	30,52
Y	48,14	48,12	52,69	60,40	58,69	64,33	64,23	61,89	73,38	72,33

Варіант 15.

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
X	3,14	2,47	5,59	3,72	5,12	6,08	6,49	6,52	6,19	10,06
Y	8,41	7,48	11,79	9,22	11,14	12,48	13,04	13,09	12,63	17,99
№	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
X	11,06	11,63	14,13	13,57	16,86	14,09	16,41	18,18	20,14	20,43
Y	19,38	20,16	23,62	22,84	27,39	23,57	26,78	29,23	31,93	32,34
№	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
X	20,06	20,42	22,05	23,95	23,69	23,71	26,44	28,53	29,05	29,10
Y	31,82	32,32	34,58	37,21	36,85	36,88	40,66	43,55	44,27	44,34

Варіант 16.

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
X	0,68	2,16	3,90	3,38	5,93	4,75	7,44	10,07	8,18	9,30
Y	3,84	7,73	12,30	10,94	17,67	14,56	21,62	28,56	23,57	26,54
№	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
X	10,50	12,02	14,07	13,98	13,19	13,91	15,83	17,31	18,74	20,38
Y	29,70	33,70	39,10	38,86	36,79	38,67	43,74	47,63	51,40	55,74
№	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
X	21,51	20,56	23,32	22,04	25,53	26,80	28,46	29,46	28,88	29,48
Y	58,70	56,21	63,48	60,09	69,29	72,64	77,02	79,65	78,11	79,69

Варіант 17.

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
X	-0,87	2,76	3,06	4,56	2,48	6,32	5,88	7,24	8,97	10,38
Y	5,52	7,39	7,54	8,32	7,25	9,22	8,90	9,70	10,59	11,32
№	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
X	11,60	11,59	13,99	12,01	13,68	17,59	17,77	18,39	19,13	20,63
Y	11,95	11,94	13,18	12,15	13,02	15,03	15,13	15,45	15,82	16,60
№	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
X	21,23	21,55	23,93	25,27	26,16	27,06	27,45	28,58	30,76	30,41
Y	16,91	17,07	18,30	18,99	19,45	19,92	20,12	20,70	21,82	21,64

Варіант 18.

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
X	0,02	2,14	3,06	3,42	6,98	6,69	5,62	8,18	8,59	9,60
Y	5,87	3,28	2,16	1,72	-2,63	-2,27	-0,97	-4,08	-4,58	-5,82
№	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
X	11,12	12,97	12,39	15,34	14,40	16,29	15,56	18,72	19,19	20,68
Y	-7,67	-9,93	-9,22	-12,82	-11,68	-13,98	-13,09	-16,95	-17,53	-19,33
№	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
X	21,30	21,36	23,15	24,84	24,37	25,44	28,87	27,74	27,87	28,47
Y	-20,10	-20,17	-22,36	-24,41	-23,84	-25,14	-29,33	-27,95	-28,11	-28,85

Варіант 19.

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
X	1,51	1,37	2,60	4,24	5,00	5,05	5,65	7,72	7,95	9,99
Y	17,82	16,53	28,20	43,84	51,05	51,58	57,32	77,04	79,22	98,67
№	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
X	11,20	11,50	13,262	15,29	16,57	14,58	17,94	21,09	19,89	20,40
Y	110,20	113,03	129,85	149,21	161,37	142,38	174,40	204,50	193,01	197,84
№	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
X	21,57	19,70	21,72	22,67	26,43	24,30	27,93	31,25	31,05	30,42
Y	208,99	191,22	210,47	219,50	255,34	235,06	269,69	301,26	299,40	293,35

Варіант 20.

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
X	-0,85	2,30	3,54	5,91	5,90	7,21	6,83	7,70	8,63	10,68
Y	-8,48	29,01	43,68	71,86	71,84	87,37	82,81	93,24	104,34	128,64
№	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
X	10,30	10,52	12,82	14,29	14,14	17,42	17,85	17,80	21,43	20,83
Y	124,17	126,75	154,10	171,61	169,79	208,90	214,04	213,43	256,59	249,46
№	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
X	21,24	23,56	22,04	24,41	24,88	27,31	29,14	30,50	26,36	28,93
Y	254,32	281,95	263,79	292,07	297,58	326,48	348,27	364,44	315,25	345,83

Варіант 21.

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
X	-0,13	2,77	2,12	4,92	5,12	6,84	6,99	10,10	8,40	8,90
Y	3,29	19,12	15,55	30,79	31,88	41,27	42,07	59,06	49,76	52,49
№	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
X	13,55	11,94	12,25	13,49	16,33	15,29	19,40	17,53	18,80	20,58
Y	77,84	69,06	70,74	77,49	92,97	87,34	109,71	99,53	106,47	116,13
№	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
X	20,49	21,89	23,25	23,51	24,76	25,77	25,98	27,30	31,05	31,59
Y	115,66	123,26	130,71	132,09	138,90	144,41	145,55	152,78	173,20	176,11

Варіант 22.

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
X	-0,86	0,57	2,70	2,76	5,29	6,85	7,22	8,34	9,18	8,70
Y	-1,90	3,82	12,39	12,62	22,77	29,06	30,52	35,05	38,43	36,48
№	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
X	11,63	10,77	12,97	12,44	16,32	15,85	18,21	18,51	18,80	19,00
Y	48,23	44,77	53,61	51,49	67,07	65,18	74,67	75,88	77,05	77,84
№	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
X	20,73	23,69	22,90	24,71	24,75	26,74	28,20	28,48	28,95	30,97
Y	84,77	96,68	93,49	100,75	100,92	108,92	114,78	115,91	117,79	125,91

Варіант 23.

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
X	0,96	2,42	3,69	4,46	6,04	7,39	8,94	8,45	7,83	8,81
Y	12,08	24,57	35,46	41,98	55,58	67,10	80,41	76,21	70,86	79,28
№	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
X	10,31	12,92	12,37	15,66	13,95	16,93	17,34	17,70	19,49	19,26
Y	92,13	114,52	109,73	137,94	123,27	148,85	152,31	155,44	170,72	168,81
№	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
X	20,66	22,19	24,37	23,61	24,56	26,75	27,84	28,63	29,48	30,14
Y	180,74	193,85	212,53	206,03	214,22	232,94	242,25	249,00	256,28	261,99

Варіант 24.

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
X	1,83	1,77	3,49	5,84	5,27	6,85	5,08	7,48	8,14	9,06
Y	8,19	8,04	12,97	19,70	18,08	22,61	17,53	24,41	26,32	28,94
№	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
X	9,14	13,02	14,27	16,35	15,23	16,64	16,29	18,37	18,84	18,93
Y	29,19	40,31	43,89	49,86	46,64	50,70	49,70	55,65	57,00	57,28
№	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
X	20,18	23,14	21,90	23,05	26,34	28,38	26,44	27,28	27,95	29,53
Y	60,88	69,35	65,80	69,09	78,52	84,39	78,81	81,23	83,16	87,69

Варіант 25.

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
X	0,84	2,79	3,07	4,64	4,15	5,03	7,25	8,77	8,78	8,65
Y	1,44	3,78	4,11	6,00	5,40	6,46	9,11	10,95	10,95	10,79
№	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
X	11,09	12,36	15,27	15,03	14,29	14,22	18,96	19,591	19,54	18,12
Y	13,72	15,24	18,74	18,44	17,56	17,48	23,15	23,91	23,85	22,15
№	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
X	20,35	21,91	23,27	23,51	24,68	27,20	27,26	28,55	27,98	29,68
Y	24,82	26,68	28,32	28,60	30,00	33,02	33,10	34,64	33,96	36,00

Варіант 26.

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
X	0,40	2,66	2,22	4,42	5,10	3,90	6,03	7,95	11,21	9,78
Y	4,80	8,85	8,08	12,01	13,23	11,07	14,89	18,33	24,19	21,61
№	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
X	9,20	12,11	14,69	12,98	14,75	16,34	16,04	17,54	18,44	19,32
Y	20,58	25,80	30,41	27,35	30,53	33,38	32,83	35,53	37,15	38,73
№	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
X	22,18	21,50	22,90	21,84	24,42	26,82	27,44	27,52	29,07	30,92
Y	43,85	42,64	45,15	43,24	47,87	52,18	53,28	53,43	56,20	59,52

Варіант 27.

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
X	0,35	0,80	3,26	3,35	4,93	5,78	5,97	7,37	8,026	9,19
Y	3,89	5,64	15,33	15,70	21,90	25,26	26,03	31,54	34,11	38,71
№	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
X	11,80	12,33	13,13	12,95	16,40	14,16	18,05	16,41	19,08	21,14
Y	48,99	51,05	54,20	53,50	67,11	58,26	73,59	67,12	77,65	85,78
№	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
X	20,83	21,49	22,95	24,68	25,90	25,19	26,12	28,21	30,37	30,97
Y	84,55	87,13	92,87	99,70	104,49	101,72	105,38	113,59	122,10	124,47

Варіант 28.

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
X	2,81	1,72	2,67	3,10	5,66	6,98	8,22	8,97	10,56	10,29
Y	17,96	13,04	17,30	19,23	30,84	36,78	42,41	45,78	52,96	51,75
№	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
X	11,42	10,90	12,61	14,19	15,71	15,96	17,59	17,44	18,13	20,89
Y	56,88	54,51	62,27	69,38	76,28	77,41	84,77	84,09	87,20	99,69
№	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
X	22,09	22,86	23,40	23,13	25,55	25,40	25,49	27,92	29,52	30,34
Y	105,12	108,59	111,02	109,80	120,73	120,07	120,49	131,45	138,70	142,39

Варіант 29.

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
X	-0,58	0,82	3,19	5,72	6,30	5,35	5,89	6,57	8,99	9,93
Y	-1,49	4,48	14,58	25,37	27,84	23,80	26,09	29,01	39,33	43,33
№	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
X	10,30	11,76	11,89	12,88	13,90	15,68	13,97	17,79	17,78	20,48
Y	44,90	51,15	51,68	55,92	60,30	67,85	60,59	76,86	76,82	88,36
№	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
X	21,05	22,28	22,33	23,27	25,08	26,49	27,88	27,61	28,67	28,66
Y	90,79	96,04	96,24	100,26	107,99	114,01	119,94	118,77	123,28	123,25

Варіант 30.

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
X	2,39	0,46	2,86	3,62	5,12	6,02	6,55	7,62	7,59	10,68
Y	8,70	-0,02	10,81	14,27	21,05	25,14	27,54	32,36	32,21	46,21
№	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
X	11,36	9,68	14,06	13,607	15,85	16,37	18,34	17,67	19,10	19,34
Y	49,28	41,67	61,49	59,46	69,62	71,98	80,90	77,86	84,32	85,41
№	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
X	20,00	22,13	22,68	23,75	24,76	24,66	23,98	29,97	28,61	30,26
Y	88,40	98,04	100,53	105,36	109,93	109,48	106,41	133,52	127,36	134,83

Навчально-методичне видання

Практикум з математичної статистики:
методичні вказівки та завдання
для самостійної роботи для здобувачів для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти за спеціальностями
073 «Менеджмент», 051 «Економіка»,
071 «Облік і оподаткування»

Укладачі: Наголкіна Зоя Іванівна,
Шитюк Віктор Петрович,
Роде Сергій Геральдович

Коректура

Комп'ютерне верстання