

Виберіть форму подання навчального матеріалу

[Докладне подання](#)

✓ [Скорочене подання](#)

## 11. Метод сил

### Зміст глави

[11.8. Розрахунок статично невизначуваних ферм](#)

[11.9. Розрахунок нерозрізних балок](#)

[11.9.1. Рівняння трьох моментів](#)

[11.9.2. Метод моментних фокусів](#)

[11.10. Особливості розрахунку статично невизначуваних комбінованих систем](#)

[Запитання для самоперевірки](#)

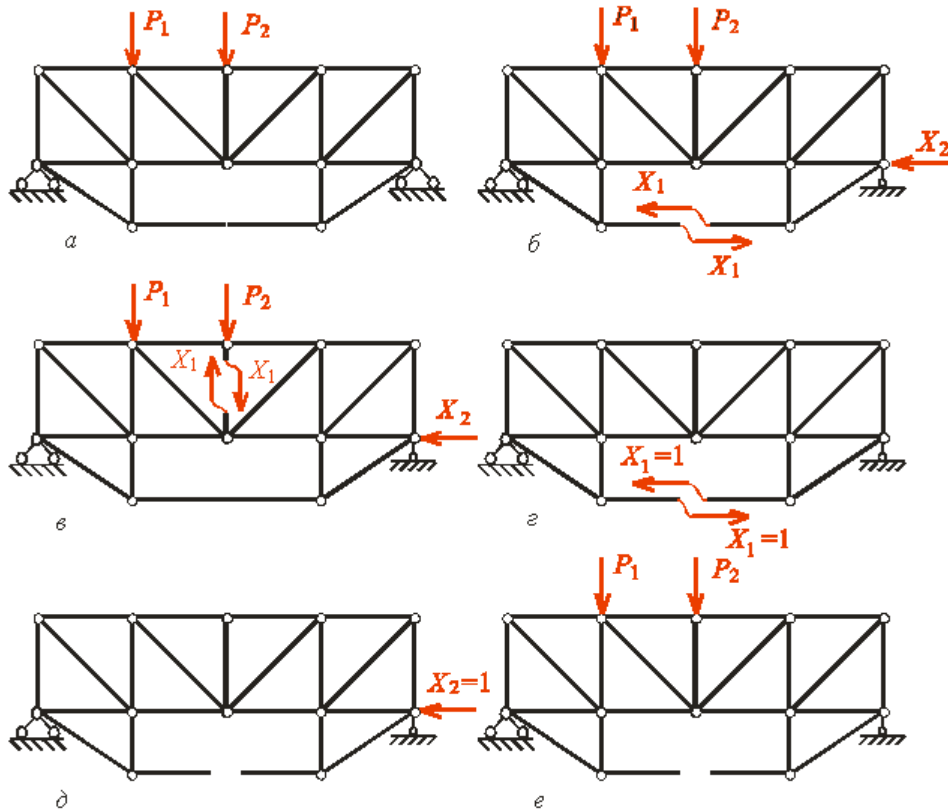


Рис.11.5

Для обчислення коефіцієнтів системи рівнянь необхідно утворити допоміжні і вантажний стан (рис.11.5,г,д,е). Оскільки в стержнях ферми виникають лише поздовжні сили, формула Мора набиратиме такий вигляд:

$$\delta_{ij} = \frac{1}{EA_0} \sum_{k=1}^C \bar{N}_i \bar{N}_j l'_k; \quad \Delta_{ip} = \frac{1}{EA_0} \sum_{k=1}^C \bar{N}_i N_p l'_k. \quad (11.11)$$

У цих формулах  $\bar{N}_i, \bar{N}_j, N_p$  – поздовжні зусилля в стержнях основної системи відповідно від дії одиничних невідомих  $X_i = 1, X_j = 1$  і від зовнішнього навантаження,  $EA_0$  – довільна константа, яку доцільно покласти такою, що дорівнює жорсткості на поздовжні деформації якогось стержня ферми,  $l'$  – зведені довжини стержнів ферми, які обчислюються за формулою

$$l'_k = \frac{EA_0}{EA_k} l_k, \quad (11.12)$$

де  $l_k, EA_k$  – довжина і згина жорсткість стержня  $k$  ферми.

Дійсні зусилля можуть обчислюватись за способом накладання:

$$N_\partial = \bar{N}_1 X_1 + \bar{N}_2 X_2 + \dots + \bar{N}_n X_n + N_p. \quad (11.13)$$

### 11.9. Розрахунок нерозрізних балок

Суцільну статично невизначувану балку, яка не переривається на всьому протязі шарнірами, називають **нерозрізною**.

Ступінь статичної невизначуваності балки може бути обчислений за формулою

$$n = C - 3, \quad (11.14)$$

де  $C$  – кількість опорних в'язей (для шарнірно-рухомої опори  $C=1$ , для шарнірно-нерухомої  $C=2$ , для затиснення  $C=3$ ).

Ступінь статичної невизначуваності балки може бути також обчислений за формулою  $n=3k-u$ .

#### 11.9.1. Рівняння трьох моментів

Основна система для розрахунку нерозрізної балки за методом сил може бути утворена відкиданням будь-яких в'язей, що можуть розглядатись як “зайві”. Проте якщо вибрати основну систему шляхом введення в балку наскрізних шарнірів над опорами, то основними невідомими будуть згинальні моменти, які виникають над опорами в нерозрізній балці (опорні моменти). Система канонічних рівнянь при цьому набуває вигляду рівнянь трьох моментів, коли кожне з рівнянь матиме вигляд

$$l'_i M_{i-1} + 2(l'_i + l'_{i+1}) M_i + l'_{i+1} M_{i+1} = -6 \left( \frac{l'_i}{l_i} B_i^{\phi} + \frac{l'_{i+1}}{l_{i+1}} A_{i+1}^{\phi} \right) \quad (11.15)$$

і називається **рівнянням трьох моментів**. Цим рівнянням можна скористатися для формального складання системи канонічних рівнянь методу сил, якщо нерозрізна балка має стандартний вигляд, тобто має на кінцях шарнірні опори.

Тут позначено:  $l'_i, l'_{i+1}$  – зведені довжини прогонів, які обчислюються за формулами:

$$l'_i = \frac{EI_o}{EI_i} l_i, \quad l'_{i+1} = \frac{EI_o}{EI_{i+1}} l_{i+1}, \quad \text{де } EI_o - \text{ жорсткість на згин одного з прогонів балки, яка}$$

обирається за основну;  $B_i^{\phi}, A_{i+1}^{\phi}$  – фіктивні опорні реакції на опорі  $i$  в прогонах  $l_i$  і  $l_{i+1}$  відповідно.

Для визначення фіктивних опорних реакцій необхідно побудувати епюри  $M_p$  від зовнішнього навантаження в цих прогонах, як в окремих однопрогонових балках. Ці епюри слід розглядати як деяке фіктивне навантаження, що зумовлює появу означених фіктивних реакцій.

Значення фіктивних реакцій опор для деяких прогонових навантажень наведено в [Додатку 1](#).

Для переходу до стандартної схеми балки потрібно:

- відкинути консолі, якщо вони є, а затиснення замінити на фіктивні прогони нульової довжини;
- пронумерувати опори зліва направо;
- пронумерувати прогони в такий спосіб, щоб їхні номери відповідали номерам правих опор прогонів.

Так, розрахункова схема нерозрізної балки (рис.11.6,а) замінена стандартною схемою (рис.11.6,б).

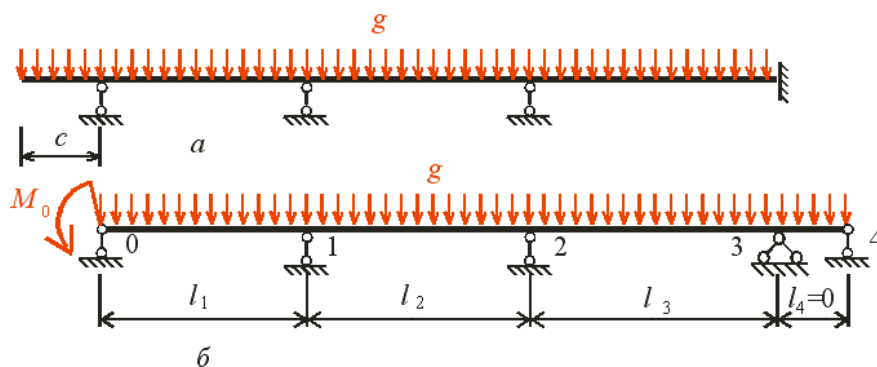


Рис.11.6

З викладеного випливає, що для складання системи канонічних рівнянь методу сил для нерозрізної балки не обов'язково будувати одиничні епюри в основній системі і обчислювати переміщення за формулою Мора. Ціком достатньо записати рівняння трьох моментів (11.15) для кожної проміжної опори стандартної схеми балки, надаючи індексу  $i$  почергового значення 1,2 тощо.

Розглянемо обчислення дійсних зусиль у довільному прогоні нерозрізної балки  $l_i$ .

Для будь-якого перерізу з координатою  $z$  можна записати, що

$$M_{\partial}^z = \frac{M_{i-1}}{l_i}(l_i - z) + \frac{M_i}{l_i}z + M_p^z. \quad (11.16)$$

$$Q_{\partial}^z = \frac{dM_{\partial}^z}{dz} = \frac{M_i - M_{i-1}}{l_i} + Q_p^z. \quad (11.17)$$

Опорні реакції можуть бути обчислені виходячи з рівнянь рівноваги опорних в'язей

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow R_i = Q_{i+1} - Q_i, \quad (11.18)$$

де  $Q_{i+1}$  і  $Q_i$  – поперечні сили відповідно праворуч і ліворуч опори.

### 11.9.2. Метод моментних фокусів

Метод моментних фокусів безпосередньо впливає з розрахунку за допомогою рівнянь трьох моментів нерозрізних балок, у яких навантажено лише один прогін. Розглянемо таку балку (рис.11.7,а).

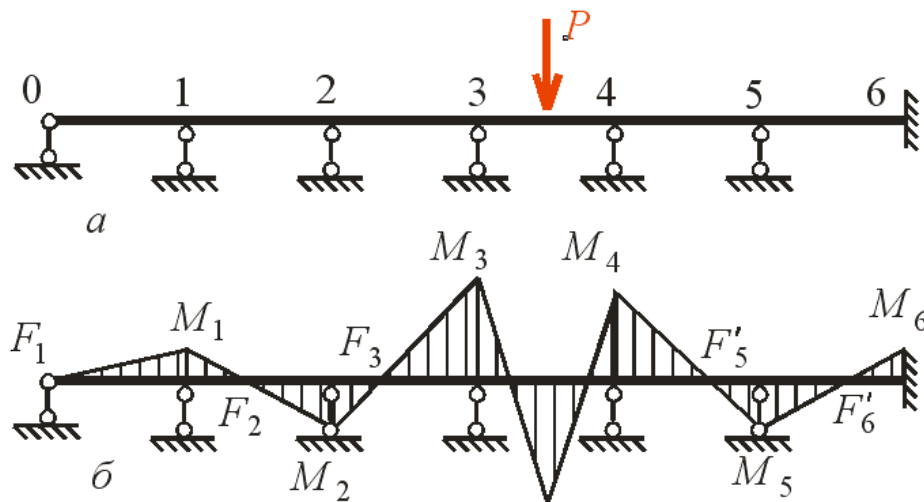


Рис.11.7

Епюра згинальних моментів, одержана завдяки розрахунку, побудована на рис.11.7,б. З аналізу цієї епюри можна дійти таких висновків:

- у міру віддалення від навантаженого прогону опорні моменти зменшуються за значенням;
- на кожному ненавантаженому прогоні епюра  $M$  прямолінійна і перетинає вісь балки, тобто має нульову точку. Цю точку називають **моментним фокусом** даного прогону.

Залежно від розташування навантаження щодо даного прогону розрізняють ліві і праві моментні фокуси. **Лівим фокусом** називають нульову точку епюри  $M$  у ненавантаженому прогоні, якщо він розташований ліворуч від навантаженого прогону (точки  $F_1, F_2, F_3$  на рис.11.7,б). Аналогічно визначаються праві фокуси (точки  $F'_5, F'_6$ ).

Кожному фокусу відповідає деяке додатне число, яке називається **фокусним співвідношенням**. Воно характеризує співвідношення опорних моментів на кінцях даного ненавантаженого прогону. Так, для фокуса  $F_1$  (рис.11.7,б) фокусне співвідношення  $k_1 = -M_1/M_0 = \infty$ , для фокусів  $F_2$  і  $F_3$  фокусне співвідношення  $k_2 = -M_2/M_1$  і  $k_3 = -M_3/M_2$ . І взагалі для довільного прогону  $l_i$  (рис.11.7,а) ліве фокусне співвідношення

$$k_i = -\frac{M_i}{M_{i-1}}. \quad (11.19)$$

Величина фокусного співвідношення визначає розташування фокуса в прогоні балки (рис.11.8).

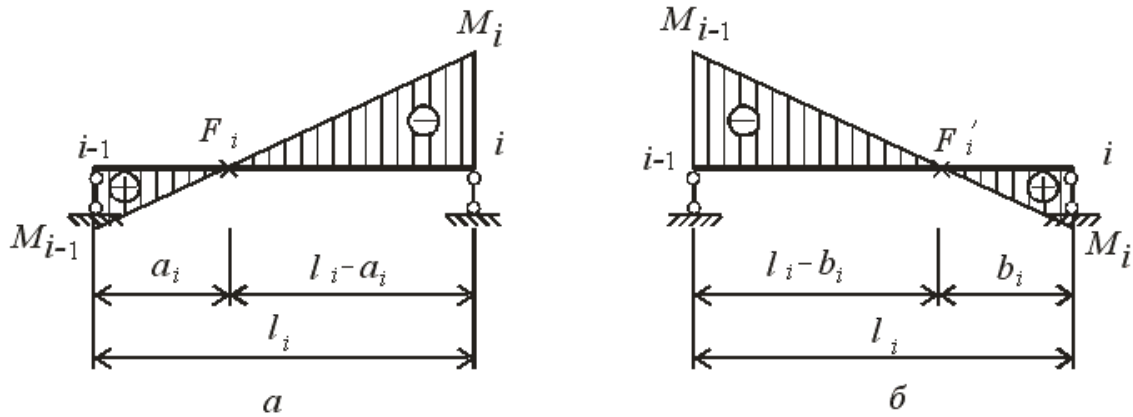


Рис.11.8

Відстань  $a_i$  виражається через фокусне співвідношення залежністю

$$a_i = \frac{l_i}{1 + k_i}. \quad (11.20)$$

Аналогічні залежності можна записати для правих фокусів. Так, для фокусів  $F'_5, F'_6$  фокусні співвідношення мають вигляд:  $k'_5 = -M_4/M_5$ ,  $k'_6 = -M_5/M_6$ . В правому фокусі  $F'_i$  довільного прогону  $l_i$  відповідне фокусне співвідношення виражається формулою

$$k'_i = -\frac{M_{i-1}}{M_i}, \quad (11.21)$$

а відстань правого фокуса до правої опори прогону – формулою

$$b_i = \frac{l_i}{1 + k'_i}. \quad (11.22)$$

Ліве фокусне співвідношення для довільного прогону  $i$  у вигляді

$$k_i = 2 + \frac{l'_{i-1}}{l'_i} \left( 2 - \frac{1}{k_{i-1}} \right). \quad (11.23)$$

Аналогічну формулу можна одержати і для правих фокусних співвідношень:

$$k'_i = 2 + \frac{l'_{i+1}}{l'_i} \left( 2 - \frac{1}{k'_{i+1}} \right). \quad (11.24)$$

Необхідно звернути увагу на те, що фокусні співвідношення залежать тільки від фізико-геометричних характеристик балки і не залежать від розташування, характеру і величини навантаження. Звідси випливає, що і точки моментних фокусів також не залежать від навантаження і являють собою деякі константи нерозрізної балки.

Формула (11.23) дає змогу обчислити фокусне співвідношення в прогоні  $l_i$ , якщо відоме фокусне співвідношення в попередньому прогоні  $l_{i-1}$ , а для обчислення правого фокусного співвідношення за формулою (11.24) потрібно мати співвідношення у прогоні  $l_{i+1}$ . Таким чином обчислення лівих фокусних співвідношень необхідно розпочинати з лівого, а правих – з правого кінця балки. Крім того, необхідно знати ліве фокусне співвідношення у крайньому лівому і праве фокусне співвідношення у крайньому правому прогоні, які залежать від виду крайньої опори. Ці величини зображені на рис.11.9.

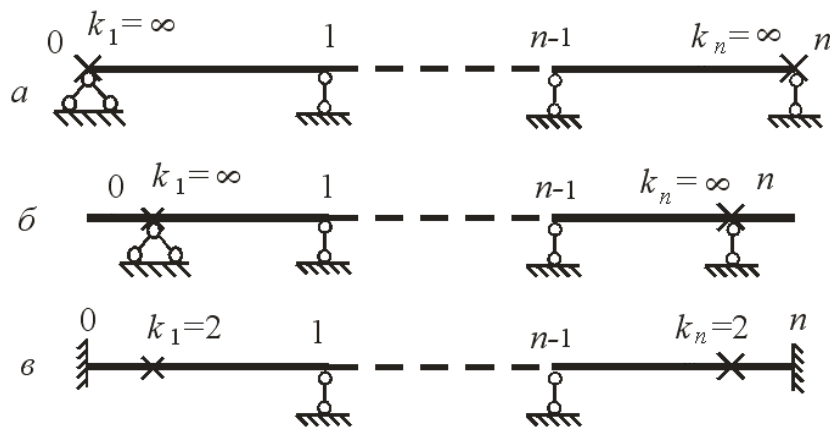


Рис.11.9

Опорні моменти по кінцях навантаженого прогону визначаються формулами:

$$M_{i-1} = -\frac{6}{l_i} \cdot \frac{A_i^\phi k'_i - B_i^\phi}{k_i k'_i - 1}; \quad (11.25)$$

$$M_i = -\frac{6}{l_i} \cdot \frac{B_i^\phi k_i - A_i^\phi}{k_i k'_i - 1}. \quad (11.26)$$

Отже, може бути запропонована така процедура розрахунку нерозрізної балки:

- обчислити фокусні співвідношення за формулами (11.23) і (11.24);
- визначити опорні моменти на лівому і правому кінцях навантаженого прогону за формулами (11.25) – (11.26);

- переміщуючись вліво відносно навантаженого прогону, обчислити опорні моменти на наступних опорах через ліві фокусні співвідношення ( $M_j = M_{j+1}/k_j$ );
- переміщуючись відносно завантаженого прогону в правий бік, обчислити опорні моменти на наступних опорах через праві фокусні співвідношення ( $M_j = M_{j-1}/k'_j$ );
- за формулами (11.16) – (11.18) визначити внутрішні зусилля в прогонах балки і опорні реакції.

### 11.10. Особливості розрахунку статично невизначуваних комбінованих систем

Комбінованими системами називаються такі, що мають у своєму складі елементи, які піддані згину (балки, рами, арки), так і елементи, які мають лише поздовжні деформації (ферми, стержні із шарнірним приєднанням обох кінців).

Ступінь статичної невизначуваності комбінованих систем краще обчислювати за формулою (11.1), перераховуючи складні шарніри у прості.

Основна система обирається за загальними правилами, система канонічних рівнянь для визначення основних невідомих має стандартний вигляд.

Основна відмінність розрахунку комбінованих систем полягає в обчисленні коефіцієнтів і вільних членів системи канонічних рівнянь, для чого використовується формула Мора у вигляді

$$\begin{aligned}\delta_{ij} &= \sum \int_l \frac{\bar{M}_i \bar{M}_j}{EI} dx + \sum \frac{\bar{N}_i \bar{N}_j}{EA} l; \\ \Delta_{ip} &= \sum \int_l \frac{\bar{M}_i M_p}{EI} dx + \sum \frac{\bar{N}_i N_p}{EA} l.\end{aligned}\tag{11.27}$$

У перші доданки цих формул входять згинальні моменти одиничних та вантажного станів основної системи, що виникають лише в елементах балок, рам, арок. В других доданках беруться до уваги поздовжні сили лише в елементах, що зазнають тільки поздовжні деформації (ферми, прямолінійні стержні, приєднані шарнірами на обох кінцях). Впливом на значення коефіцієнта чи вільного члена поздовжніх сил в елементах, що зазнають згину, можна знехтувати. Дійсні зусилля можуть бути обчислені за формулами [\(11.8\)](#).