Виберіть форму подання навчального матеріалу

Докладне подання √ **Скорочене подання**

11. Метод сил

Зміст глави

11.1. Ступінь статичної невизначуваності

Основною характеристикою статично невизначуваних систем є ступінь статичної невизначуваності, який характеризує кількість “зайвих” (з точки зору кінематичного аналізу) в’язей. Різниця між кількістю невідомих статичних характеристик і кількістю рівнянь рівноваги характеризує **ступінь статичної невизначуваності** стержневої системи.

Ступінь статичної невизначуваності може бути обчислений за формулою Чебишова. Проте для практичних розрахунків існує зручніша формула:

$$n=3k-ш. \tag{11.1}$$

У цій формулі n – ступінь статичної невизначуваності плоскої стержневої системи, k – число замкнених контурів в схемі, яке визначається кількістю ділянок, на які розподіляє площину розрахункова схема споруд, $ш$ – кількість простих шарнірів, які входять до замкнених контурів.

11.2. Основна система і основні невідомі методу сил

Основною системою методу сил називають геометрично незмінювану і статично визначувану систему, яка одержана із заданої статично невизначуваної схеми відкиданням “зайвих” в’язей

Реакції відкинутих в’язей прикладаються до основної системи разом із заданими зовнішніми діями, як сили, величини яких невідомі. У подальшому ці сили визначатимуться в першу чергу. Вони становлять основні невідомі задачі і позначаються символами X_1, X_2, ...,X_n, де n – ступінь статичної невизначуваності задачі. .

Можна навести кілька найпоширеніших способів відкидання “зайвих” в’язей:

1. Відкидання опорних в’язей. При цьому до основної системи прикладаються реакції відкинутих в’язей (рис.11.1,а,б,г).
2. Введення шарніра еквівалентне відкиданню однієї в’язі. При цьому з обох боків від шарніра прикладаються зосереджені моменти невідомої величини, які дорівнюють один одному, але спрямовані в протилежних напрямах (рис.11.1,в,е).
3. Розріз стержня, який має на обох кінцях жорсткі вузли, є еквівалентним відкиданню трьох в’язей. При цьому в місці розрізу прикладаються поздовжні, поперечні сили, а також зосереджені моменти, величини яких невідомі (рис.11.1,д).

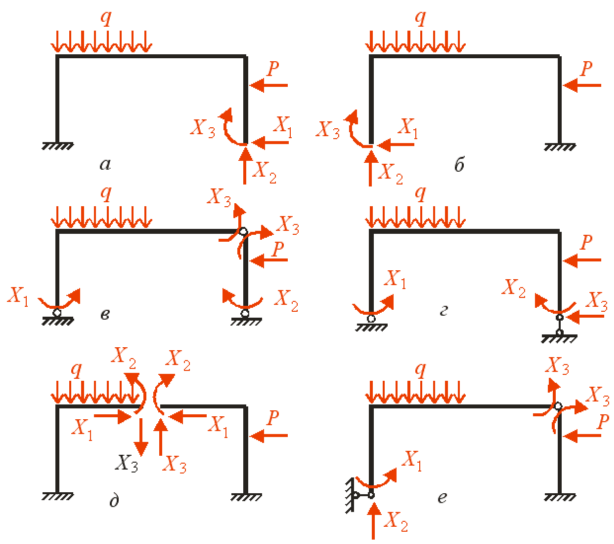

Рис.11.1

11.3. Система розв’язувальних рівнянь методу сил

Завдяки переходу від розрахункової схеми до основної системи розрахунок статично невизначуваної схеми замінюється на розрахунок її статично визначуваної основної системи. Деформації і, отже, зусилля, які виникають у цих двох схемах будуть різними.

Для усунення розбіжності в деформуванні цих двох схем на основну систему слід накласти додаткові умови, які зроблять неможливими переміщення в напрямі відкинутих “зайвих” в’язей. Математично ці умови можуть бути записані як система лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{array}{ccccccccccccc} \delta_{11}X_1 & + & \delta_{12}X_2 & + & \ldots & + & \delta_{1n}X_n & + & \Delta_{1p} & = & 0; \\ \delta_{21}X_1 & + & \delta_{22}X_2 & + & \ldots & + & \delta_{2n}X_n & + & \Delta_{2p} & = & 0; \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \delta_{n1}X_1 & + & \delta_{n2}X_2 & + & \ldots & + & \delta_{nn}X_n & + & \Delta_{np} & = & 0. \end{array} \qquad (11.2)$$

Система лінійних алгебраїчних рівнянь (11.2) є математичною умовою відсутності переміщень в основній системі в напрямах відкинутих “зайвих” в’язей. При виконанні цих умов деформований і, отже, й напружений стан статично визначуваної основної системи буде еквівалентним напружено-деформованому стану вихідної статично невизначуваної системи.

Рівняння (11.2) не залежать від вигляду, навантаження, обраної основної системи, чи від характеру основних невідомих. Вони мають стандартний **(канонічний)** вигляд:

- кількість рівнянь і, отже, кількість невідомих в кожному рівнянні, дорівнює ступеню статичної невизначуваності n;
- коефіцієнт δ_{ij} при кожному невідомому має два індекси: перший індекс i відповідає номеру

рядка, другий індекс j – номеру стовпця (номеру невідомого);

- у кожному рівнянні є вільний член Δ_{ip}, перший індекс якого відповідає номеру рівняння;
- коефіцієнти δ_{ii}, розташовані на головній діагоналі системи рівнянь, суттєво додатні (їх називають головними коефіцієнтами);
- побічні коефіцієнти відповідно до теореми Максвелла (δ_{ij}=δ_{ji}) симетричні відносно головної діагоналі системи рівнянь

Система рівнянь (11.2) називається **системою канонічних рівнянь методу сил.** Невідомі системи канонічних рівнянь становлять сили – реакції відкинутих "зайвих" в'язей, коефіцієнти – переміщення в основній системі в напрямі цих в'язей від дії одиничних основних невідомих. Коефіцієнти при невідомих називають **одиничними** переміщеннями, а вільні члени – **вантажними**.

Система канонічних рівнянь методу сил може бути записана в матричному вигляді:

$$\mathbf{B}\,\vec{\mathbf{X}} + \vec{\mathbf{\Delta}} = \vec{\mathbf{0}}, \qquad (11.3)$$

де $\vec{\mathbf{X}}^T = \{X_1 \quad X_2 \quad \dots \quad X_n\}$ – вектор основних невідомих,

$\vec{\mathbf{\Delta}}^{\mathbf{T}} = \{\Delta_{1P} \quad \Delta_{2P} \quad \dots \quad \Delta_{nP}\}$ – вектор вантажних переміщень,

$\mathbf{B}$ – матриця податливості основної системи в напрямах відкинутих в'язей:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \dots & \delta_{1n} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \dots & \delta_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \delta_{n1} & \delta_{n2} & \dots & \delta_{nn} \end{bmatrix} \qquad (11.4)$$

Нагадаємо властивості елементів матриці податливості:

- головні коефіцієнти являють собою додатні числа: $\delta_{ii} > 0$;
- побічні коефіцієнти є симетричними відносно головної діагоналі, тобто $\delta_{ij} = \delta_{ji}$.

11.4. Обчислення коефіцієнтів системи канонічних рівнянь

Коефіцієнти системи канонічних рівнянь методу сил (елементи матриці податливості основної системи) являють собою переміщення основної системи від дії основних невідомих, які покладають за одиницю. Для обчислення необхідно скористатися формулою Максвелла–Мора, яка для плоских систем має вигляд

$$\Delta_{ip} = \sum \int_l \frac{\overline{N}_i N_p}{EA} dx + \sum \int_l \frac{\overline{M}_i M_p}{EI} dx + \sum \int_l \frac{\eta \overline{Q}_i Q_p}{GA} dx.$$

Для різного типу розрахункових схем звичайно утримують лише деякі складові формули. Так, при розрахунку елементів, які переважно працюють на згин (балки, рами), утримується доданок, який залежить від згинальних моментів:

$$\delta_{ij} = \sum \int_l \frac{\overline{M}_i \overline{M}_j}{EI} dx, \quad \Delta_{ip} = \sum \int_l \frac{\overline{M}_i M_p}{EI} dx. \qquad (11.5)$$

Для ферм ураховують лише поздовжні сили:

$$\delta_{ij} = \sum \int_l \frac{\overline{N}_i \overline{N}_j}{EA} dx, \qquad \Delta_{ip} = \sum \int_l \frac{\overline{N}_i N_p}{EA} dx. \qquad (11.6)$$

Для арок

$$\delta_{ij} = \sum \int_l \frac{\overline{N}_i \overline{N}_j}{EA} dx + \sum \int_l \frac{\overline{M}_i \overline{M}_j}{EI} dx, \qquad (11.7)$$

$$\Delta_{ip} = \sum \int_l \frac{\overline{N}_i N_p}{EA} dx + \sum \int_l \frac{\overline{M}_i M_p}{EI} dx.$$

Таким чином, для обчислення коефіцієнтів системи канонічних рівнянь необхідно визначити зусилля, які виникають у всіх елементах основної системи від дії зовнішнього навантаження, а також від дії кожного основного невідомого $X_i = 1$.

У практичних розрахунках безпосереднє інтегрування замінюється чисельним з використанням правила Верещагіна, формули Сімпсона – Корноухова, формули прямокутників, трапецій тощо. Тому для подальшого розрахунку будуються епюри зусиль у статично визначуваній основній системі. Розв’язок системи рівнянь визначає величини основних невідомих – реакцій “зайвих” в’язей.

11.5. Визначення дійсних зусиль

Існує два основних способи визначення дійсних зусиль в елементах статично невизначуваної системи, що розраховується за методом сил. Обидва способи грунтуються на тому, що епюри будуються не в заданій схемі, а в статично визначуваній основній системі, яка перебуває під дією заданих зовнішніх навантажень і реакцій відкинутих в’язей, які знайдено після розв’язання канонічних рівнянь.

Перший спосіб, який називають **статичним**, полягає в тому, що виконується звичайний статичний розрахунок основної системи від одночасної дії всіх сил, включно з основними невідомими задачі. При цьому звичайними способами визначаються опорні реакції і будуються епюри зусиль, або відшукуються їхні величини в характерних точках схеми.

Другий спосіб – це спосіб **накладання.** Він грунтується на принципі незалежності дій (принцип суперпозиції) і полягає в тому, що будь-яке зусилля, напруження або переміщення може бути одержано як сума цих величин від кожної дії окремо. На цій підставі можна записати

$$M_\partial = \overline{M}_1 X_1 + \overline{M}_2 X_2 + \ldots + \overline{M}_n X_n + M_p;$$

$$Q_\partial = \overline{Q}_1 X_1 + \overline{Q}_2 X_2 + \ldots + \overline{Q}_n X_n + Q_p; \qquad (11.8)$$

$$N_\partial = \overline{N}_1 X_1 + \overline{N}_2 X_2 + \ldots + \overline{N}_n X_n + N_p.$$

Під величинами $\overline{M}_i, \overline{Q}_i, \overline{N}_i$ слід розуміти або зусилля в якомусь перерізі або епюри зусиль в основній системі, зумовлені дією одиничних основних невідомих .

11.6. Обчислення переміщень у статично невизначуваних системах

Переміщення в статично невизначуваних системах можуть бути обчислені за формулою Максвелла–Мора:

$$\Delta_{k\partial} = \sum \int_l \frac{\overline{N}_k N_\partial}{EA} dx + \sum \int_l \frac{\overline{M}_k M_\partial}{EI} dx + \sum \int_l \frac{\eta \overline{Q}_k Q_\partial}{GA} dx. \qquad (11.9)$$

У цьому співвідношенні $M_\partial, Q_\partial, N_\partial$– дійсні зусилля в статично невизначуваній системі, $\overline{M}_k, \overline{Q}_k, \overline{N}_k$ – зусилля в статично визначуваній основній системі. Для обчислення переміщень можна брати як основну систему, за якою провадився розрахунок, так і будь-яку іншу.

11.7. Використання симетрії

11.7.1. Симетрія розрахункової схеми і навантаження

Система називається **симетричною** відносно осі, якщо за допомогою прямої, котра збігається з віссю симетрії, її можна розділити на дві частини, кожна з яких є дзеркальним відображенням іншої (рис.11.2,а).

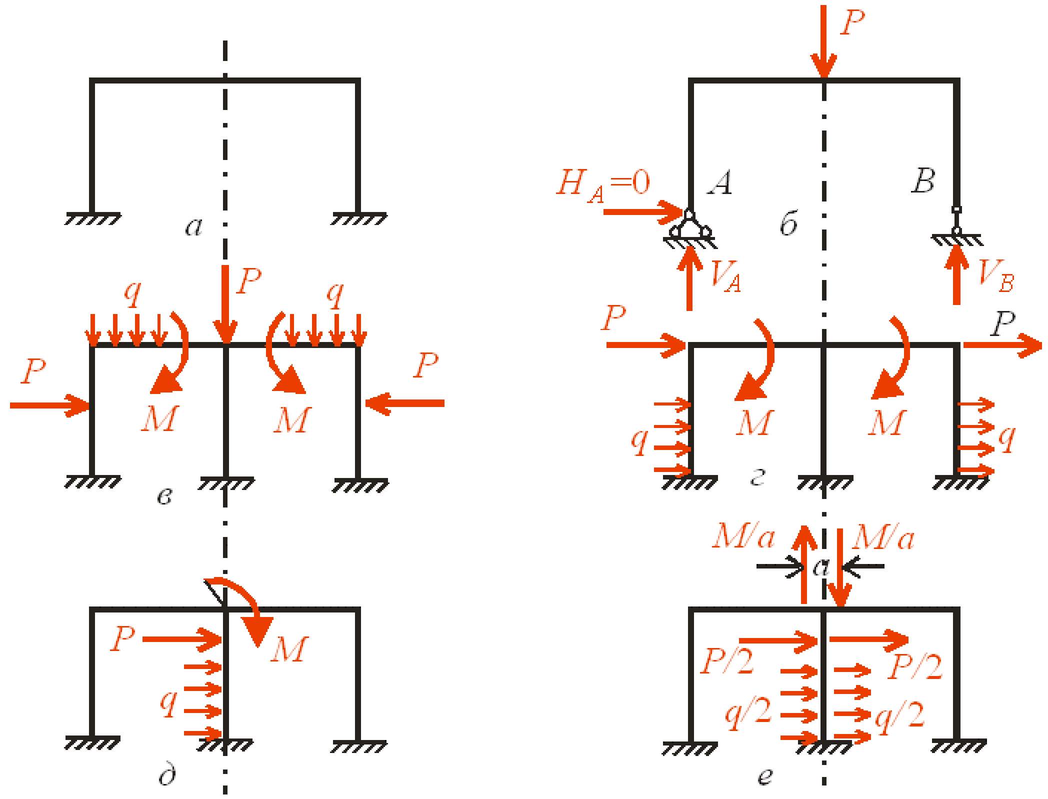

Рис.11.2

Разом із симетричними існують не цілком симетричні системи, які можуть розглядатись як симетричні за певних умов. Так, наприклад, рама (рис.11.2,б), хоча і не повністю симетрична, оскільки має ліворуч шарнірно-нерухому, а праворуч – шарнірно-рухому опору, при дії вертикального навантаження може розглядатись як симетрична, тому що горизонтальна реакція лівої опори дорівнює нулю і дана опора може трактуватись як шарнірно-рухома. Системи такого типу називають **умовно симетричними**.

Поняття симетрії поширюється на навантаження, дію температури, зміщення опор: дія вважається симетричною, якщо вона на одній половині конструкції є дзеркальним відображенням дії на другій половині (рис.11.2,в). Якщо ж дія розташована симетрично, але по відношенню до осі симетрії в протилежних напрямах, то така дія зветься **кососиметричною** або **обернено-симетричною** (рис.11.2,г). Зокрема, зосереджена сила *P*, лінія дії якої збігається з віссю симетрії, є симетричною, а зосереджена сила або розподілене навантаження, які прикладені до осі симетрії і напрямлені перпендикулярно до неї, є кососиметричними. Те саме можна стверджувати відносно зосередженого моменту (рис.11.2,д). Це пов’язано з тим, що зосереджену силу *P* можна подати як дві зосереджені сили величиною *P*/2, розподілене навантаження інтенсивністю *q* – як два навантаження з інтенсивністю *q*/2 кожне, а зосереджений момент *M* замінити парою сил (рис.11.2,е).

Будь-яка дія загального вигляду може бути представлена як сума двох дій, одна з яких є симетричною, а друга – **кососиметричною** або **оберненосиметричною**. Наприклад, зосереджена сила P_1 (рис.11.3,а) замінюється двома симетричними і двома кососиметричними зосередженими силами $P_1/2$, рівномірно розподілене навантаження q – двома симетричними (рис.11.3,б) і двома кососиметричними (рис.11.3,в) навантаженнями інтенсивністю $q/2$. Якщо дія початково є симетричною (сила P_2) або кососиметричною, то розкладення її не здійснюється.

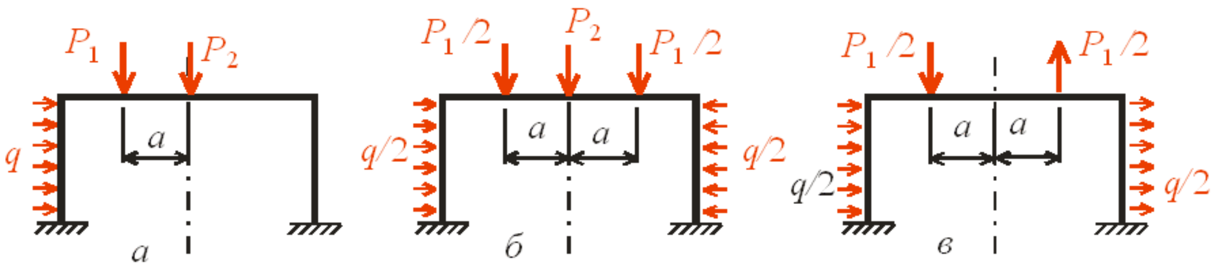

Рис.11.3

На симетричне і кососиметричне може бути розкладене навантаження, яке прикладається в симетричних перерізах, але має різні величини. Так, два зосереджених моменти M_1 і M_2 (рис.11.4,а) замінюються двома парами зосереджених моментів. Моменти першої пари дорівнюють $\left(M_1 + M_2\right)/2$ (рис.11.4,б) і спрямовані симетрично.

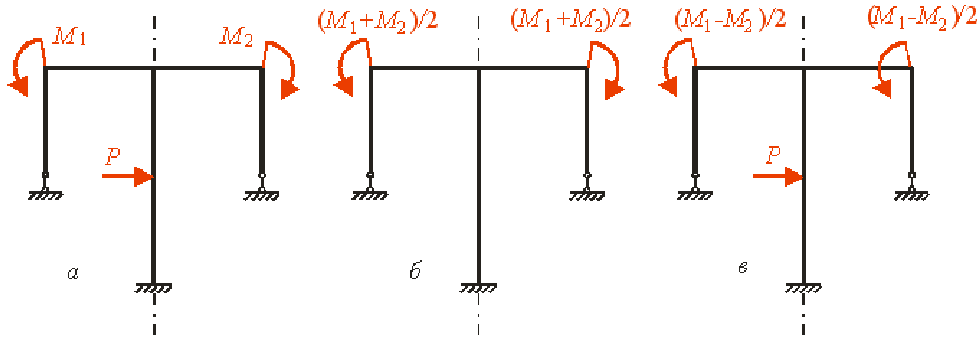

Рис.11.4

Величини моментів другої пари, які спрямовані кососиметрично, становлять $(M_1 - M_2)/2$ (рис.11.4,в). При цьому первісно кососиметрична сила P не розкладається.

11.7.2. Навантаження загального вигляду

Для спрощення розрахунку за методом сил симетричної системи необхідно, щоб основна система була симетричною або умовно симетричною. Також необхідно, щоб умовам симетрії та косої симетрії відповідали основні невідомі.

Епюри згинальних моментів, що зумовлені дією симетричних невідомих, є симетричними, а епюри, побудовані від дії кососиметричних невідомих – кососиметричними, а вантажна епюра M_p – епюрой загального вигляду, оскільки вона є результатом дії навантаження загального вигляду.

Внаслідок симетрії та косої симетрій одиничних епюр система канонічних рівнянь методу сил розпадається на дві підсистеми, одна з яких містить лише симетричні основні невідомі, а друга – кососиметричні.

Підсистеми розв'язуються незалежно одна від одної. Дійсні епюри можуть бути побудовані способом накладання. і матимуть загальний вигляд.

11.7.3. Симетричне навантаження

У симетричній рамі під дією симетричного навантаження кососиметричні невідомі напевно дорівнюють нулю. Необхідно визначати лише симетричні основні невідомі. Дійсні епюри M_∂ і N_∂ будуть симетричними, а епюра Q_∂ – кососиметричною.

11.7.4. Кососиметричне навантаження

У симетричній рамі під дією кососиметричного навантаження симетричні невідомі напевно дорівнюють нулю. Необхідно визначати лише кососиметричні основні невідомі. Дійсні епюри M_∂ і N_∂ будуть кососиметричними, а епюра Q_∂ – симетричною.

11.7.5. Групові невідомі

Нагадаємо, що дістати спрощення при розрахунку симетричної конструкції можливо тоді, коли при симетричній основній системі основні невідомі розділяються на симетричні і кососиметричні, тобто такі, що приводять до симетричних і кососиметричних епюр згинальних моментів в одиничних станах. Якщо при побудові симетричної основної системи відкидаються "зайві" в'язі, що не розташовані на осі симетрії, одиничні епюри згинальних моментів можуть бути несиметричними. Це виключає одержання спрощень розрахунку. Однак, оскільки основні невідомі є силами, вони можуть бути розкладені на симетричні і кососиметричні складові, які становитимуть сукупності невідомих дій і називаються **груповими невідомими**.

Зрештою, як було вже показано, вихідна система чотирьох канонічних рівнянь розпадеться на дві незалежні підсистеми. Перша підсистема містить як невідомі лише симетричні, а друга – лише кососиметричні сили:

Підсистеми розв'язуються незалежно одна від одної. Дійсні епюри можуть бути побудовані за способом накладання:

Дійсні епюри, які є результатом накладання симетричних і кососиметричних графіків, будуть епюрами загального вигляду.

Зауважимо, що за необхідності виконання розрахунку симетричної рами на дію навантаження загального вигляду зручно розкласти це навантаження на симетричну і кососиметричну складові. В цьому випадку виконуються два окремих розрахунки рами: на дію симетричного та на дію кососиметричного навантажень. Остаточні епюри зусиль від вихідного навантаження загального вигляду одержуються як суми відповідних епюр, побудованих від його симетричних і кососиметричних складових:

$$M_{\partial} = M_{\partial}^{сим.} + M_{\partial}^{ксим};$$

$$Q_{\partial} = Q_{\partial}^{сим.} + Q_{\partial}^{ксим};$$

$$N_{\partial} = N_{\partial}^{сим.} + N_{\partial}^{ксим}.$$

11.8. Розрахунок статично невизначуваних ферм

Розрахунок статично невизначуваних ферм за методом сил має деякі особливості, які пов'язані з особливостями їхньої структури, навантаження і напружено-деформованого стану (див. главу 8). Так, ступінь статичної невизначуваності ферм можна обчислювати як за формулою (11.1), так і за іншою формулою, призначеною лише для ферм:

$$n = C + C_{оп} - 2B, \qquad (11.10)$$

де C – кількість стержнів ферми, $C_{оп}$ – кількість опорних стержнів, B – кількість вузлів ферми.

Відкидання "зайвих" в'язей під час призначення основної системи здійснюється або розрізанням стержнів ферми (рис.11.5,а), або відкиданням опорних стержнів. У першому випадку до місця розрізу прикладаються поздовжні сили, величина яких невідома, у другому – невідомих реакцій відкинутих опорної в'язей (рис.11.5,б). Проте в усіх випадках основна система повинна бути геометрично незмінюваною. З цих причин схема, що зображена на рис.11.5,в, не може бути обрана для розрахунку оскільки є миттєво змінюваною (вузол *D* прикріплюється до ферми двома стержнями *CD* і *DE*, які розташовані вздовж однієї прямої).

Система канонічних рівнянь має звичайний вигляд і для ферми, що розглядається, може бути записана в такий спосіб:

$$\delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 + \Delta_{1p} = 0;$$

$$\delta_{21} X_2 + \delta_{22} X_2 + \Delta_{2p} = 0.$$

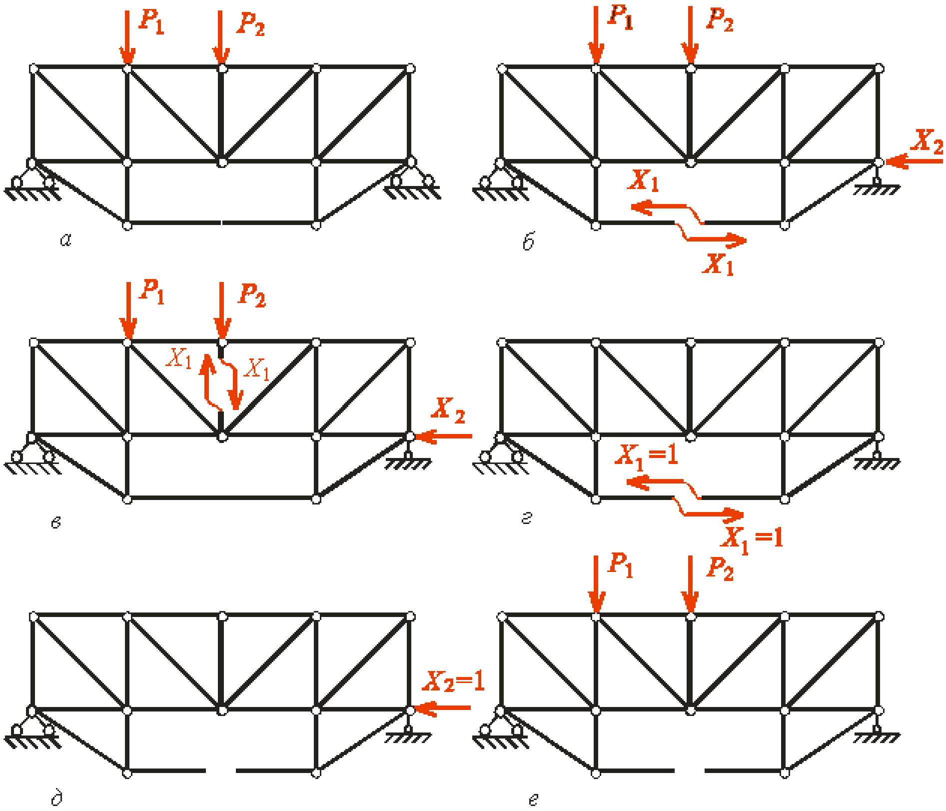

Рис.11.5

Для обчислення коефіцієнтів системи рівнянь необхідно утворити допоміжні і вантажний стан (рис.11.5,г,д,е). Оскільки в стержнях ферми виникають лише поздовжні сили, формула Мора набиратиме такий вигляд:

$$\delta_{ij} = \frac{1}{EA_0}\sum_{k=1}^{C} \overline{N}_i \overline{N}_j l'; \qquad \Delta_{ip} = \frac{1}{EA_0}\sum_{k=1}^{C} \overline{N}_i N_p l'. \tag{11.11}$$

У цих формулах $\overline{N}_i, \overline{N}_j, N_p$ – поздовжні зусилля в стержнях основної системи відповідно від дії одиничних невідомих $X_i = 1$, $X_j = 1$ і від зовнішнього навантаження, EA_0 – довільна константа, яку доцільно покладати такою, що дорівнює жорсткості на поздовжні деформації якогось стержня ферми, l' – зведені довжини стержнів ферми, які обчислюються за формулою

$$l'_k = \frac{EA_0}{EA_k} l_k, \tag{11.12}$$

де l_k, EA_k – довжина і згинна жорсткість стержня k ферми.

Дійсні зусилля можуть обчислюватись за способом накладання:

$$N_\partial = \overline{N}_1 X_1 + \overline{N}_2 X_2 + \ldots + \overline{N}_n X_n + N_p. \tag{11.13}$$

11.9. Розрахунок нерозрізних балок

Суцільну статично невизначувану балку, яка не переривається на всьому протязі шарнірами, називають **нерозрізною**.

Ступінь статичної невизначуваності балки може бути обчислений за формулою

$$n = C - 3, \tag{11.14}$$

де C – кількість опорних в’язей (для шарнірно-рухомої опори $C=1$, для шарнірно-нерухомої $C=2$, для затиснення $C=3$).

Ступінь статичної невизначуваності балки може бути також обчислений за формулою $n=3k–ш$.

11.9.1. Рівняння трьох моментів

Основна система для розрахунку нерозрізної балки за методом сил може бути утворена відкиданням будь-яких в’язей, що можуть розглядатись як “зайві”. Проте якщо вибрати основну систему шляхом введення в балку наскрізних шарнірів над опорами, то основними невідомими будуть згинальні моменти, які виникають над опорами в нерозрізній балці (опорні моменти). Система канонічних рівнянь при цьому набуває вигляду рівнянь трьох моментів, коли кожне з рівнянь матиме вигляд

$$l_i' M_{i-1} + 2(l_i' + l_{i+1}')M_i + l_{i+1}' M_{i+1} = -6\left(\frac{l_i'}{l_i} B_i^{\phi.} + \frac{l_{i+1}'}{l_{i+1}} A_{i+1}^{\phi.}\right) \tag{11.15}$$

і називається **рівнянням трьох моментів**. Цим рівнянням можна скористатися для формального складання системи канонічних рівнянь методу сил, якщо нерозрізна балка має стандартний вигляд, тобто має на кінцях шарнірні опори.

Тут позначено: l_i', l_{i+1}' – зведені довжини прогонів, які обчислюються за формулами: $l_i' = \dfrac{EI_\circ}{EI_i} l_i$, $l_{i+1}' = \dfrac{EI_\circ}{EI_{i+1}} l_{i+1}$, де EI_o – жорсткість на згин одного з прогонів балки, яка обирається за основну; $B_i^{\phi.}, A_{i+1}^{\phi.}$ – фіктивні опорні реакції на опорі i в прогонах l_i і l_{i+1} відповідно.

Для визначення фіктивних опорних реакцій необхідно побудувати епюри M_p від зовнішнього навантаження в цих прогонах, як в окремих однопрогонових балках. Ці епюри слід розглядати як деяке фіктивне навантаження, що зумовлює появу означених фіктивних реакцій.

Значення фіктивних реакцій опор для деяких прогонових навантажень наведено в Додатку 1.

Для переходу до стандартної схеми балки потрібно:

- відкинути консолі, якщо вони є, а затиснення замінити на фіктивні прогони нульової довжини;
- пронумерувати опори зліва направо;
- пронумерувати прогони в такий спосіб, щоб їхні номери відповідали номерам правих опор прогонів.

Так, розрахункова схема нерозрізної балки (рис.11.6,а) замінена стандартною схемою (рис.11.6,б).

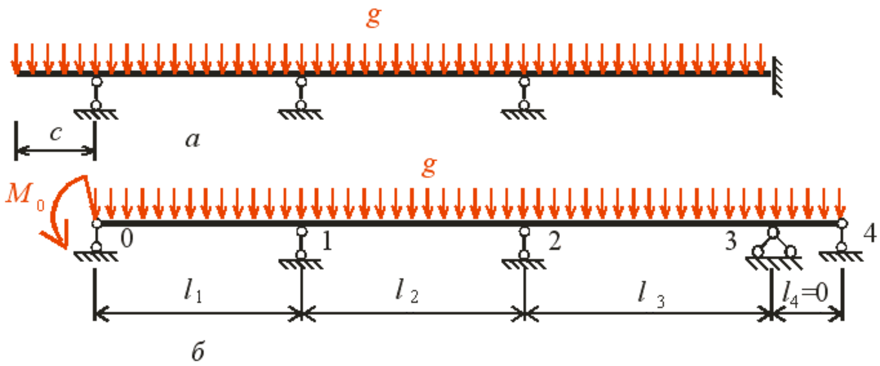

Рис.11.6

З викладеного випливає, що для складання системи канонічних рівнянь методу сил для нерозрізної балки не обов'язково будувати одиничні епюри в основній системі і обчислювати переміщення за формулою Мора. Цілком достатньо записати рівняння трьох моментів (11.15) для кожної проміжної опори стандартної схеми балки, надаючи індексу *i* почергового значення 1,2 тощо.

Розглянемо обчислення дійсних зусиль у довільному прогоні нерозрізної балки l_i.

Для будь-якого перерізу з координатою *z* можна записати, що

$$M_\partial^z = \frac{M_{i-1}}{l_i}(l_i - z) + \frac{M_i}{l_i} z + M_p^z . \tag{11.16}$$

$$Q_\partial^z = \frac{dM_\partial^z}{dz} = \frac{M_i - M_{i-1}}{l_i} + Q_p^z . \tag{11.17}$$

Опорні реакції можуть бути обчислені виходячи з рівнянь рівноваги опорних в’язей

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow R_i = Q_{i+1} - Q_i \,, \tag{11.18}$$

де Q_{i+1} і Q_i – поперечні сили відповідно праворуч і ліворуч опори.

11.9.2. Метод моментних фокусів

Метод моментних фокусів безпосередньо випливає з розрахунку за допомогою рівнянь трьох моментів нерозрізних балок, у яких навантажено лише один прогін. Розглянемо таку балку (рис.11.7,а).

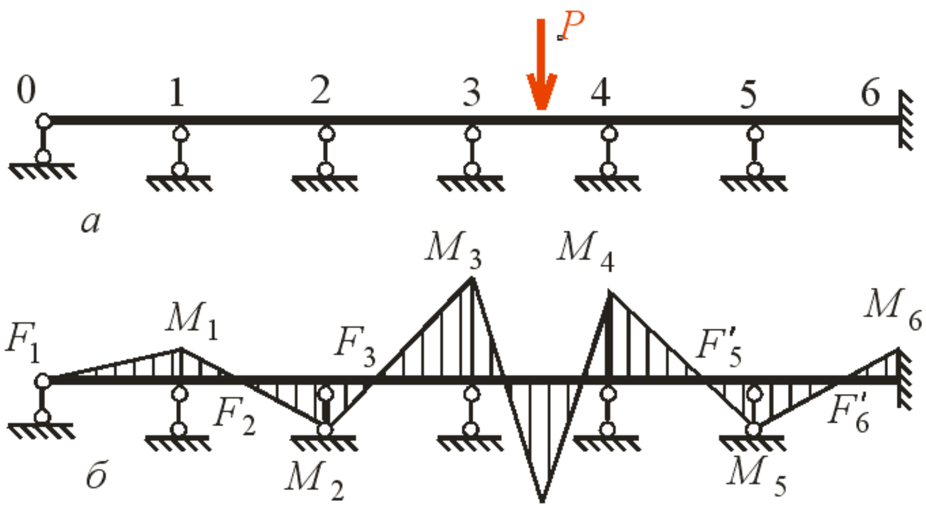

Рис.11.7

> Епюра згинальних моментів, одержана завдяки розрахунку, побудована на рис.11.7,б. З аналізу цієї епюри можна дійти таких висновків:
>
> - у міру віддалення від завантаженого прогону опорні моменти зменшуються за значенням;
> - на кожному ненавантаженому прогоні епюра *М* прямолінійна і перетинає вісь балки, тобто має нульову точку. Цю точку називають **моментним фокусом** даного прогону.

Залежно від розташування навантаження щодо даного прогону розрізняють ліві і праві моментні фокуси. **Лівим фокусом** називають нульову точку епюри *М* у ненавантаженому прогоні, якщо він розташований ліворуч від навантаженого прогону (точки F_1, F_2, F_3 на рис.11.7,б). Аналогічно визначаються праві фокуси (точки F'_5, F'_6).

Кожному фокусу відповідає деяке додатне число, яке називається **фокусним співвідношенням**. Воно характеризує співвідношення опорних моментів на кінцях даного ненавантаженого прогону. Так, для фокуса F_1 (рис.11.7,б) фокусне співвідношення $k_1 = -M_1/M_0 = \infty$, для фокусів F_2 і F_3 фокусне співвідношення $k_2 = -M_2/M_1$ і $k_3 = -M_3/M_2$. І взагалі для довільного прогону l_i (рис.11.7,а) ліве фокусне співвідношення

$$k_i = -\frac{M_i}{M_{i-1}}. \qquad (11.19)$$

Величина фокусного співвідношення визначає розташування фокуса в прогоні балки (рис.11.8).

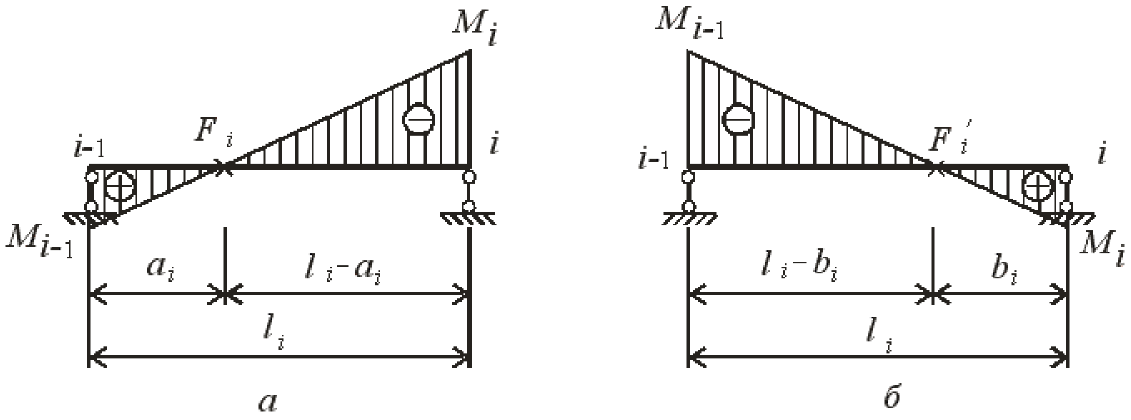

Рис.11.8

Відстань a_i виражається через фокусне співвідношення залежністю

$$a_i = \frac{l_i}{1+k_i}. \qquad (11.20)$$

Аналогічні залежності можна записати для правих фокусів. Так, для фокусів F'_5, F'_6 фокусні співвідношення мають вигляд: $k'_5 = -M_4/M_5$, $k'_6 = -M_5/M_6$. В правому фокусі F'_i довільного прогону l_i відповідне фокусне співвідношення виражається формулою

$$k'_i = -\frac{M_{i-1}}{M_i}, \qquad (11.21)$$

а відстань правого фокуса до правої опори прогону – формулою

$$b_i = \frac{l_i}{1+k'_i}. \qquad (11.22)$$

Ліве фокусне співвідношення для довільного прогону *i* у вигляді

$$k_i = 2 + \frac{l'_{i-1}}{l'_i}\left(2 - \frac{1}{k_{i-1}}\right). \qquad (11.23)$$

Аналогічну формулу можна одержати і для правих фокусних співвідношень:

$$k_i' = 2 + \frac{l_{i+1}'}{l_i'}\left(2 - \frac{1}{k_{i+1}'}\right). \tag{11.24}$$

Необхідно звернути увагу на те, що фокусні співвідношення залежать тільки від фізико-геометричних характеристик балки і не залежать від розташування, характеру і величини навантаження. Звідси випливає, що і точки моментних фокусів також не залежать від навантаження і являють собою деякі константи нерозрізної балки.

Формула (11.23) дає змогу обчислити фокусне співвідношення в прогоні l_i, якщо відоме фокусне співвідношення в попередньому прогоні l_{i-1}, а для обчислення правого фокусного співвідношення за формулою (11.24) потрібно мати співвідношення у прогоні l_{i+1}. Таким чином обчислення лівих фокусних співвідношень необхідно розпочинати з лівого, а правих – з правого кінця балки. Крім того, необхідно знати ліве фокусне співвідношення у крайньому лівому і праве фокусне співвідношення у крайньому правому прогоні, які залежать від виду крайньої опори. Ці величини зображені на рис.11.9.

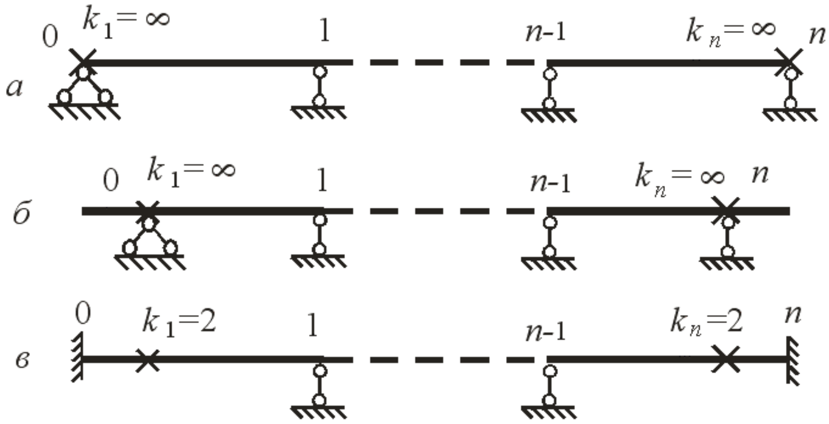

Рис.11.9

Опорні моменти по кінцях навантаженого прогону визначаються формулами:

$$M_{i-1} = -\frac{6}{l_i}\cdot\frac{A_i^{\phi}k_i' - B_i^{\phi}}{k_i k_i' - 1}; \tag{11.25}$$

$$M_i = -\frac{6}{l_i}\cdot\frac{B_i^{\phi}k_i - A_i^{\phi}}{k_i k_i' - 1}. \tag{11.26}$$

Отже, може бути запропонована така процедура розрахунку нерозрізної балки:

- обчислити фокусні співвідношення за формулами (11.23) і (11.24);
- визначити опорні моменти на лівому і правому кінцях навантаженого прогону за формулами (11.25) – (11.26);

- переміщуючись вліво відносно навантаженого прогону, обчислити опорні моменти на наступних опорах через ліві фокусні співвідношення ($M_j = M_{j+1}/k_j$);
- переміщуючись відносно завантаженого прогону в правий бік, обчислити опорні моменти на наступних опорах через праві фокусні співвідношення ($M_j = M_{j-1}/k'_j$).
- за формулами (11.16) – (11.18) визначити внутрішні зусилля в прогонах балки і опорні реакції.

11.10. Особливості розрахунку статично невизначуваних комбінованих систем

Комбінованими системами називаються такі, що мають у своєму складі елементи, які піддані згину (балки, рами, арки), так і елементи, які мають лише поздовжні деформації (ферми, стержні із шарнірним приєднанням обох кінців).

Ступінь статичної невизначуваності комбінованих систем краще обчислювати за формулою (11.1), перераховуючи складні шарніри у прості.

Основна система обирається за загальними правилами, система канонічних рівнянь для визначення основних невідомих має стандартний вигляд.

Основна відмінність розрахунку комбінованих систем полягає в обчисленні коефіцієнтів і вільних членів системи канонічних рівнянь, для чого використовується формула Мора у вигляді

$$\begin{aligned} \delta_{ij} &= \sum \int_l \frac{\overline{M}_i \overline{M}_j}{EI} dx + \sum \frac{\overline{N}_i \overline{N}_j}{EA} l; \\ \Delta_{ip} &= \sum \int_l \frac{\overline{M}_i M_p}{EI} dx + \sum \frac{\overline{N}_i N_p}{EA} l. \end{aligned} \tag{11.27}$$

У перші доданки цих формул входять згинальні моменти одиничних та вантажного станів основної системи, що виникають лише в елементах балок, рам, арок. В других доданках беруться до уваги поздовжні сили лише в елементах, що зазнають тільки поздовжні деформації (ферми, прямолінійні стержні, приєднані шарнірами на обох кінцях). Впливом на значення коефіцієнта чи вільного члена поздовжніх сил в елементах, що зазнають згину, можна знехтувати. Дійсні зусилля можуть бути обчислені за формулами (11.8).