

Виберіть форму подання навчального матеріалу

[Докладне подання](#)

✓ [Скорочене подання](#)

12. Метод переміщень

Зміст глави

[12.1. Припущення методу переміщень](#)

[12.2. Основна система методу переміщень](#)

[12.3. Основні невідомі методу переміщень](#)

[12.4. Система розв'язувальних рівнянь](#)

[12.4.1. Канонічна форма](#)

[12.4.2. Розгорнута форма](#)

[12.5. Побудова дійсних епюр зусиль](#)

[Запитання для самоперевірки](#)

Метод переміщень є одним з найрасповсюджених методів розрахунку стержневих статично невизначуваних систем. У багатьох випадках застосування методу призводить до меншої трудомісткості обчислювальних робіт, ніж метод сил.

12.1. Припущення методу переміщень

Метод переміщень ґрунтується на спрощуючих припущеннях, від яких залежить кількість основних невідомих методу.

- 1) Кути між стержнями, які збігаються у жорсткому вузлі, не змінюються після деформування споруди. Це означає, що при деформуванні всі кінці стержнів, з'єднані між собою в жорсткому вузлі, повертаються на однаковий кут.
- 2) Деформаціями від поздовжніх і поперечних сил можна знехтувати.
- 3) Не береться до уваги зближення кінців стержня внаслідок його згину.
- 4) Довжина проекції стержня на його початковий напрям до і після деформації вважається незмінною.
- 5) Кути повороту внаслідок їх мализни обираються рівними їх тангенсам і синусам.

Ці припущення базуються на тому, що в реальних стержневих системах переміщення від пружних деформацій вельми незначні, порівняно з розмірами споруди, а відтак їх вплив на зміну її розмірів можна не враховувати.

12.2. Основна система методу переміщень

Основна система методу переміщень утворюється з вихідної статично невизначуваної системи введенням у вузли системи додаткових в'язей двох видів.

1. Для запобігання повороту всіх жорстких вузлів до них встановлюються, так звані, **рухомі (плаваючі) затиснення**. Це такі умовні в'язі, які усувають повороти вузлів, але не усувають їх поступальні переміщення. У таких затисненнях виникає лише одна реакція – реактивний момент.

Жорсткими вузлами є місця з'єднання кінців прямолінійних стержнів постійної жорсткості за допомогою припаювання. До жорстких вузлів треба віднести місця, в яких:

- з'єднуються без наскрізних шарнірів два або більше стержнів;
- змінюється під кутом напрям осі стержня;
- до стержня приєднується за допомогою прилеглого шарніра інший стержень або кілька стержнів;
- ступінчасто змінюється жорсткість стержня;
- приєднується шарніром стержень або інший вузол до жорсткого вузла будь-якого з перелічених типів.

2. Можливі поступальні переміщення вузлів системи виключаються встановленням **додаткових опорних стержнів**. У таких стержнях виникає лише одна реакція – спрямована вздовж стержня сила. Кількість додаткових стержнів повинна бути мінімальною, але достатньою для забезпечення нерухомості всіх вузлів системи.

Додаткові опорні стержні потрібно встановлювати не до всіх вузлів системи, а лише до тих, що мають **незалежні поступальні переміщення**. Для визначення кількості незалежних поступальних переміщень та місць встановлення необхідних додаткових опорних стержнів доцільно скористатися шарнірною схемою. **Шарнірна схема** системи утворюється введенням наскрізних шарнірів в усі жорсткі вузли вихідної системи, включаючи опорні. Зауважимо, що при створенні шарнірної схеми споруди консолі можна відкидати.

Якщо шарнірна схема геометрично незмінювана, то вихідна система не має незалежних поступальних переміщень, тобто при створенні основної системи методу переміщень встановлювати додаткові опорні стержні не потрібно.

Якщо ж у процесі структурного аналізу шарнірної схеми виявляється можливість поступального переміщення якогось її вузла, необхідно ввести додатковий опорний стержень,

який перешкоджає появі цього переміщення. Кількість таких додаткових опорних стержнів визначає кількість незалежних переміщень вузлів вихідної системи. При створенні основної системи методу переміщень необхідно встановлювати додаткові опорні стержні саме в цих місцях.

12.3. Основні невідомі

Переміщення, які виключаються в'язями, накладеними при створенні основної системи, розглядаються як основні невідомі методу переміщень.

Таким чином, основними невідомими методу переміщень є кути повороту жорстких вузлів системи та незалежні поступальні переміщення її вузлів. Ці невідомі позначаються літерами $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \Delta_1, \Delta_2, \dots$ тощо – при використанні розгорнутої форми методу переміщень, чи Z_1, Z_2, \dots тощо – в канонічній формі.

Кількість основних невідомих методу переміщень називається **ступенем кінематичної невизначуваності системи**. Її можна визначити за формулою

$$k = k_{\varphi} + k_{\Delta}, \quad (12.1)$$

де k_{φ} – кількість кутових переміщень жорстких вузлів системи, k_{Δ} – кількість незалежних лінійних переміщень її вузлів.

Рама (рис.12.1,а) має два проміжних жорстких вузла 3 і 4, в її шарнірну схему необхідно ввести один додатковий опорний стержень (рис.12.1,б). Отже, маємо ступінь кінематичної невизначуваності $k=2+1=3$. Основна система рами зображена на рис.12.1,в.

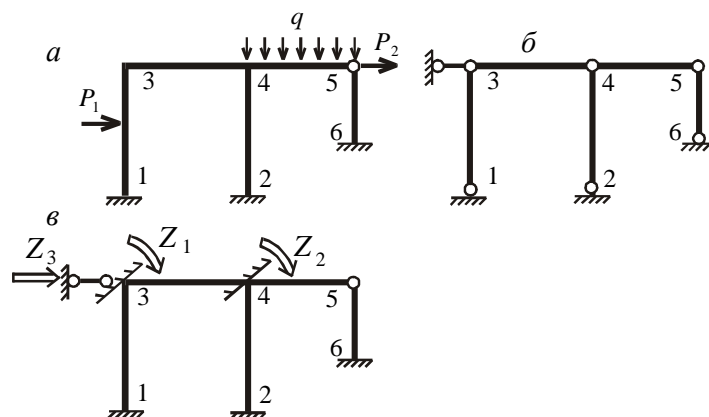


Рис.12.1

Таким чином, ступінь кінематичної невизначуваності дорівнює мінімальній кількості додаткових в'язей, які повністю закріплюють вузли системи від можливих кутових і поступальних переміщень.

12.4. Система розв'язувальних рівнянь

Основна система буде еквівалентною заданій рамі за умови рівності нулю реакцій в додаткових в'язях. Ця обставина використовується для складання системи розв'язувальних рівнянь.

Розв'язувальні рівняння методу переміщень утворюють систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих переміщень, яким перешкоджають накладені додаткові в'язі, і можуть бути одержані в канонічній формі або в розгорнутій формі.

12.4.1. Канонічна форма

Система розв'язувальних рівнянь має вигляд

$$\begin{aligned}
 r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + \dots + r_{1n}Z_n + R_{1p} &= 0, \\
 r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + \dots + r_{2n}Z_n + R_{2p} &= 0, \\
 \dots & \dots \dots \dots \dots \dots \\
 r_{n1}Z_1 + r_{n2}Z_2 + \dots + r_{nn}Z_n + R_{np} &= 0.
 \end{aligned}
 \tag{12.2}$$

Тут Z_1, Z_2, \dots, Z_n – основні невідомі методу переміщень, пронумеровані підряд, r_{jk} – реакція (реактивний момент у рухомому затисненні або реактивна сила у додатковому стержні) у накладеній в'язі j основної системи від примусового переміщення $Z_k = 1$, R_{jp} – реакція в накладеній в'язі j від зовнішнього навантаження.

Система розв'язувальних рівнянь (12.2) має стандартний (канонічний) вигляд і називається системою канонічних рівнянь методу переміщень.

Для визначення коефіцієнтів і вільних членів системи рівнянь (12.2) необхідно заздалегідь побудувати епюри згинальних моментів в основній системі від одиничних значень основних невідомих Z_1, Z_2, \dots, Z_n і від дії зовнішнього навантаження. Побудова одиничних і вантажної епюр здійснюється за допомогою даних, наведених у [Додатку 2](#).

Реакції в додаткових в'язях r_{jk} і R_{jp} обчислюються з умов рівноваги вузлів рами (реактивні моменти в рухомих затисненнях) або відсічених частин рами (реакції в додаткових стержнях). При цьому реакції вважаються додатними, якщо їхні напрями збігаються з напрямками примусових переміщень, які надавались відповідним вузлам при побудові одиничних епюр.

12.4.2. Розгорнута форма

Для складання системи розв'язувальних рівнянь використовуються формули, що виражають внутрішні зусилля на кінцях статично невизначуваних однопрогонових балок (кінцеві зусилля) залежно від переміщень опор і зовнішніх навантажень (див.табл.12.1).

12.5. Побудова дійсних епюр зусиль

При розв'язанні задачі в канонічній формі дійсна епюра згинальних моментів будується способом накладення епюр у відповідності до формули

$$M_o = \bar{M}_1 Z_1 + \bar{M}_2 Z_2 + \dots + \bar{M}_n Z_n + M_p. \quad (12.3)$$

Тут $\bar{M}_1, \bar{M}_2, \dots, \bar{M}_n$ – епюри згинальних моментів в основній системі від одиничних примусових переміщень $Z_1 = 1, Z_2 = 1, \dots, Z_n = 1$; M_p – епюра згинальних моментів в основній системі від зовнішнього навантаження; Z_1, Z_2, \dots, Z_n – дійсні величини основних невідомих.

У розгорнутій формі попередньо будується епюра вузлових моментів. Останні визначаються за формулами для кінцевих моментів в однопрогонових балках (див.табл.12.1) при значеннях переміщень, що одержані при розв'язанні системи рівнянь. Означені моменти відкладаються на відповідних кінцях стержня і з'єднуються прямими лініями, тобто будується епюра вузлових моментів $M_{вузл}$. У межах стержнів, до яких прикладені зовнішні навантаження, від епюри вузлових моментів відкладаються епюри балкових моментів $M_{бал}$, побудовані від зовнішнього навантаження в стержнях як в простих статично визначуваних балках на двох шарнірних опорах.

Епюра поперечних сил будується на базі диференціальної залежності

$$Q_o = \frac{dM_o}{ds}. \quad (12.4)$$

При застосуванні розгорнутого способу дійсні поперечні сили можуть бути обчислені за формулами для кінцевих зусиль (див.табл.12.1).

Для складання будь-якого розв'язувального рівняння слід прирівняти до нуля реакцію у відповідній додатковій в'язі. Якщо це рухоме затиснення, то необхідно вирізати вузол, на який було накладене означене затиснення. Реактивний момент, який визначається як сума кінцевих моментів в усіх балках, що примикають до вирізаного вузла, прирівнюється нулю. Якщо ж розглядається додатковий опорний стержень, то слід відокремити частину рами, яка утримується від переміщення означеним стержнем. До відокремленої частини необхідно прикласти зовнішні

навантаження і поперечні сили в місцях розрізів. Реакція в додатковому стержні, що визначається з рівняння проєкцій, прирівнюється до нуля.

Таблиця 12.1

№	Схема стержня	Кінцеві зусилля
1		$M_{ab} = 2i_{ab}(2\varphi_a + \varphi_b - 3\psi_{ab}) + M'_{ab}$ $M_{ba} = 2i_{ab}(\varphi_a + 2\varphi_b - 3\psi_{ab}) + M'_{ba}$ $Q_{ab} = -\frac{6i_{ab}}{l_{ab}}(\varphi_a + \varphi_b - 2\psi_{ab}) + Q'_{ab}$ $Q_{ba} = -\frac{6i_{ab}}{l_{ab}}(\varphi_a + \varphi_b - 2\psi_{ab}) + Q'_{ba}$
2		$M_{ab} = 3i_{ab}(\varphi_a - \psi_{ab}) + M''_{ab}$ $M_{ba} = 0$ $Q_{ab} = -\frac{3i_{ab}}{l_{ab}}(\varphi_a - \psi_{ab}) + Q'_{ab}$ $Q_{ba} = -\frac{3i_{ab}}{l_{ab}}(\varphi_a - \psi_{ab}) + Q'_{ba}$

У наведених формулах $\psi_{ab} = \frac{\Delta_b - \Delta_a}{l_{ab}}$ – кут перекосу стержня (додатний, якщо здійснюється за

годинниковою стрілкою). Величини доданків M'_{ab} , M'_{ba} , M''_{ab} , Q'_{ab} , Q'_{ba} , Q''_{ab} , Q''_{ba} залежать від зовнішнього навантаження і визначаються з [Додатку 2](#).

Згинальні моменти вважаються додатними, якщо вони діють на вузол навпроти, а на стержень – за годинниковою стрілкою (рис.12.2,а). Додатні поперечні сили обертають і вузол і стержень за годинниковою стрілкою (рис.12.2,б). Додатні напрями кутів повороту φ і кутів перекосу стержнів ψ приймаються в напрямі руху годинникової стрілки.

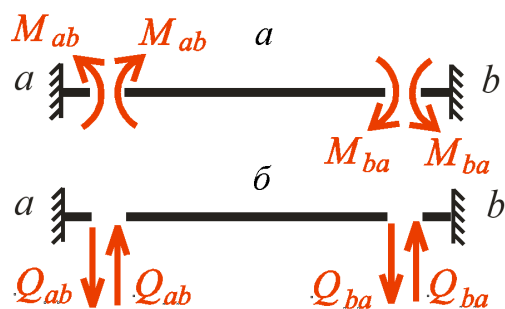


Рис.12.2

Поздовжні сили визначаються з умов рівноваги вузлів або окремих частин рами, до яких прикладаються задані зовнішні навантаження, а в перерізах – поперечні сили, що беруться з епюри Q_D , і поздовжні сили. Вузли необхідно розглядати в такій послідовності, щоб у кожному з них було не більше двох невідомих поздовжніх сил.