

Виберіть форму подання навчального матеріалу

[Докладне подання](#)

✓ [Скорочене подання](#)

22. Статично визначувані балки

Зміст глави

[22.1. Лінії впливу для двоопорної балки](#)

[22.2. Лінії впливу для консольної балки](#)

[22.3. Навантаження ліній впливу](#)

[22.4. Вузлове прикладення навантаження](#)

[22.5. Лінії впливу для шарнірно–консольної балки](#)

[Запитання для самоперевірки](#)

22.1. Лінії впливу для двоопорної балки

Розглянемо побудову ліній впливу для опорних реакцій та внутрішніх зусиль для однопрогонової двоопорної балки. Нехай однопрогонова балка AB перебуває під дією вертикальної зосередженої сили $P = 1$ ([рис.22.1.а](#)). Сила може перебувати в будь-якій точці балки (зона можливого розташування сили, тобто зона руху показана на рисунку штриховою лінією). Розташування сили визначається координатою x (початок системи координат взято на лівій опорі A). Таким чином, у процесі руху одиничної сили координата x змінюється в межах $-c_1 \leq x \leq l + c_2$.

Лінії впливу опорних реакцій

В опорах балки виникають вертикальні опорні реакції V_A та V_B . Горизонтальна складова H_A в шарнірно-нерухомій опорі A дорівнює нулю

Для обчислення опорної реакції V_A складемо рівняння рівноваги

$$\sum M_B = 0 \Rightarrow V_A l - 1 \cdot (l - x) = 0 \Rightarrow V_A = \frac{l - x}{l}.$$

Отже, реакція V_A є лінійною функцією координати x : $V_A = V_A(x)$.

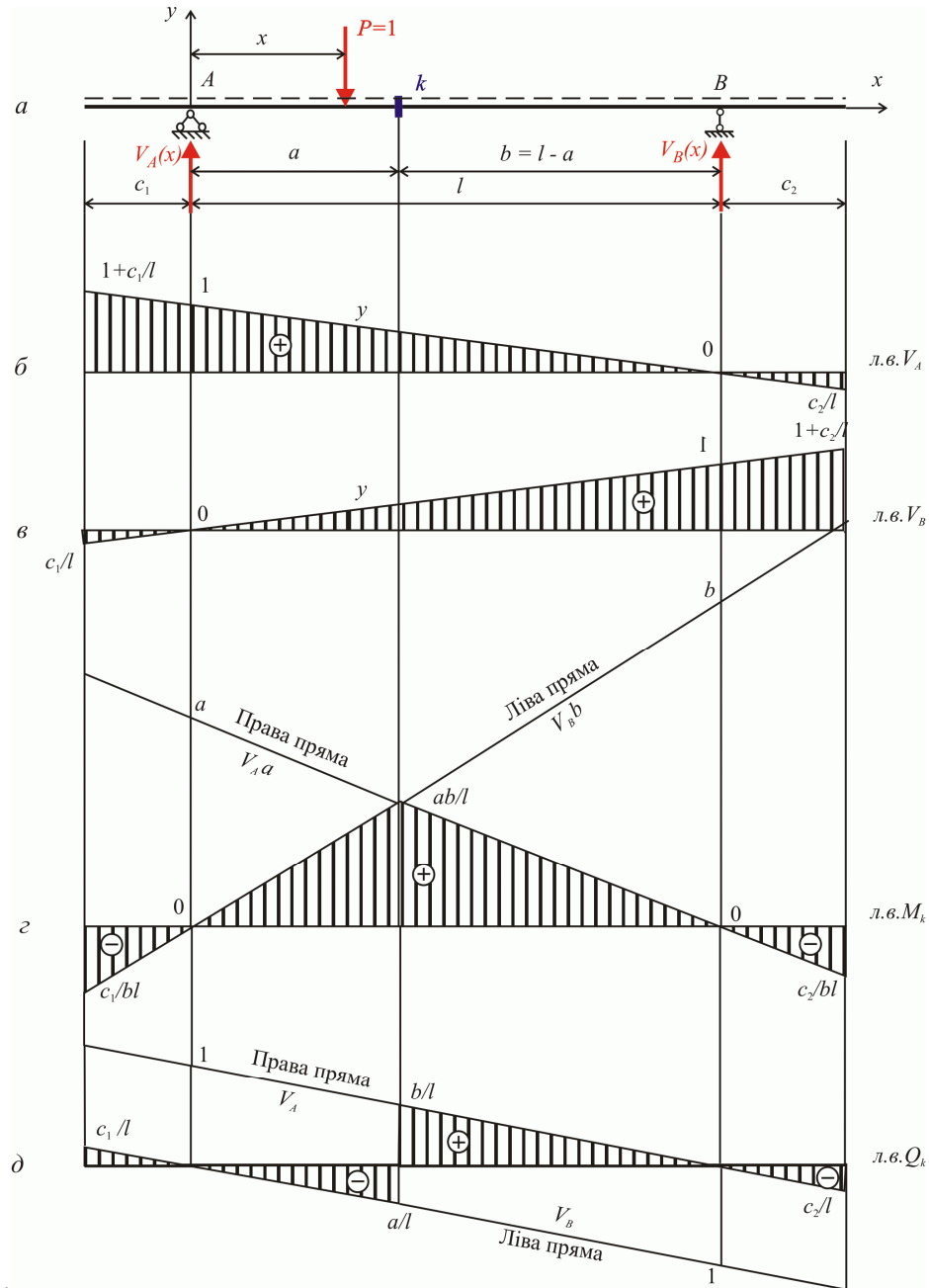


Рис.22.1

Графік зазначеної функції є прямою. Графік функції $V_A = V_A(x)$ представлено на рис.22.1,б. Він називається лінією впливу опорної реакції V_A . Графік показує, як змінюється опорна реакція V_A , коли по балці рухається одинична вертикальна сила $P=1$. Будь-яка ордината y графіка характеризує величину опорної реакції V_A , коли сила розташована на балці над цією ординатою.

Аналогічно побудуємо лінію впливу опорної реакції V_B .

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow -V_B l + 1 \cdot x = 0 \Rightarrow V_B = \frac{x}{l}.$$

Отже, реакція V_B також є лінійною функцією координати x

$$V_B = V_B(x).$$

Графік цієї функції – пряма. Лінія впливу опорної реакції V_B побудована на [рис.22.1.в](#). Отже, побудовано графік, який показує закон зміни опорної реакції V_B залежно від розташування одиничної сили $P=1$. Будь-яка ордината у графіка характеризує величину опорної реакції V_B , коли на балці над цією ординатою розташована сила.

Таким чином, для балки на двох опорах лінія впливу опорної реакції V_A – це пряма, яка має одиницю на опорі A і нуль на опорі B , а лінія впливу опорної реакції V_B – пряма, яка має одиницю на опорі B і нуль на опорі A . Графіки розповсюджуються на всю балку.

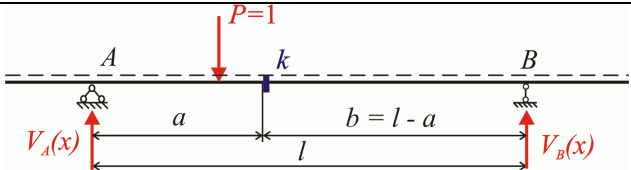
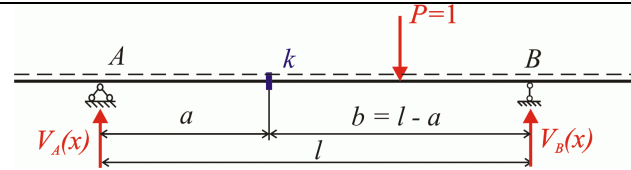
Лінія впливу згинального моменту

Визначимо згинальний момент в перерізі k , розташованого в прогоні двоопорної балки ([рис.22.1.а](#)) на відстані a від опори A і на відстані $b = l - a$ від опори B . Згинальний момент в будь-якому перерізі k обчислюється як алгебраїчна сума моментів всіх сил, що діють на балку по один бік від перерізу, стосовно його центру:

$$M_k = \sum M_k^{ліє} \quad \text{або} \quad M_k = \sum M_k^{прає}. \quad (22.1)$$

Для обчислення згинального моменту при дії рухомої сили доцільно вибирати ту формулу, яка має меншу кількість доданків. Так, при розташуванні сили ліворуч перерізу k слід вибирати другу, а при розташуванні сили праворуч перерізу – першу формулу.

Отже, розглянемо два випадка розташування одиничної сили.

Сила $P=1$ ліворуч перерізу k	Сила $P=1$ праворуч перерізу k
 <p style="text-align: center;">$M_k = \sum M_k^{прає} = V_B(x)b.$</p>	 <p style="text-align: center;">$M_k = \sum M_k^{ліє} = V_A(x)a.$</p>

Таким чином, ліворуч перерізу k лінію впливу згинального моменту в перерізі k можна отримати множенням лінії впливу опорної реакції V_B на множник b (див.[рис.22.1.г](#)). Цей графік називається лівою прямою. Він справедливий і, відповідно, штрихується ліворуч перерізу k .

Аналогічно, праворуч перерізу k лінію впливу згинального моменту в перерізі k можна отримати множенням лінії впливу опорної реакції V_A на множник a ([рис.22.1.г](#)). Цей графік називається правою прямою. Він штрихується праворуч перерізу k .

Таким чином, лінія впливу згинального моменту в перерізі k складається з двох прямих, які перетинаються під перерізом k :

- ліва пряма проходить через нуль лівій опорі і штрихується ліворуч перерізу;
- права пряма проходить через нуль правій опорі і штрихується праворуч перерізу.

Проміжні ординати лінії впливу можна обчислити з умов подібності трикутників.

Остаточна лінія впливу згинального моменту в перерізі k представлена на [рис.22.1,г](#).

Лінія впливу поперечної сили

Поперечна сила в перерізі k обчислюється як сума проєкцій на вертикальну вісь всіх сил, що діють на балку по один бік від перерізу:

$$Q_k = \sum F_y^{лів} \quad \text{або} \quad Q_k = \sum F_y^{прав}. \quad (22.2)$$

Додатною вважається поперечна сила, яка намагається повернути балку відносно перерізу за годинниковою стрілкою.

При дії рухомої сили доцільно вибирати ту формулу, яка має меншу кількість доданків. Так, при розташуванні рухомої сили ліворуч перерізу k слід вибирати другу формулу, а при розташуванні сили праворуч перерізу – першу.

Отже, розглянемо два випадка розташування одиничної сили.

Сила $P=1$ ліворуч перерізу k	Сила $P=1$ праворуч перерізу k
<p style="text-align: center;">$Q_k = \sum F_y^{прав} = -V_B(x).$</p>	<p style="text-align: center;">$Q_k = \sum F_y^{лів} = V_A(x).$</p>

Таким чином, ліворуч перерізу k лінія впливу поперечної сили в перерізі k еквівалентна від'ємній лінії впливу опорної реакції V_B (див.[рис.22.1,д](#)). Цей графік називається лівою прямою. Він справедливий і, відповідно, штрихується ліворуч перерізу k .

Аналогічно, праворуч перерізу k лінія впливу поперечної сили в перерізі k еквівалентна лінії впливу опорної реакції V_A ([рис.22.1,д](#)). Цей графік називається правою прямою. Він штрихується праворуч перерізу k .

Таким чином, лінія впливу поперечної сили в перерізі k складається з двох паралельних прямих:

- ліва пряма проходить через нуль лівій опорі і штрихується ліворуч перерізу;
- права пряма проходить через нуль правій опорі і штрихується праворуч перерізу.

Проміжні ординати лінії впливу можна обчислити з умов подібності трикутників.

Остаточна лінія впливу поперечної сили в перерізі k представлена на [рис.22.1,д](#).

22.2. Лінії впливу для консольної балки

Розглянемо консольну балку AC , по якій переміщується одинична вертикальна сила $P=1$ (рис.22.2,а).

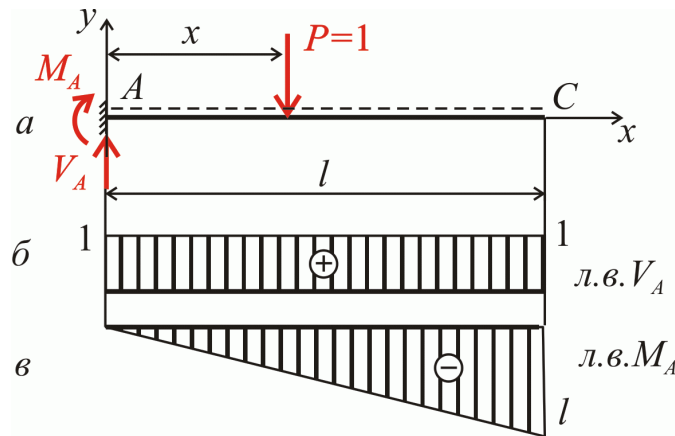


Рис.22.2

Лінії впливу опорних реакцій

У затисненні A виникає вертикальна опорна реакція V_A та моментна реакція M_A . Щодо горизонтальної опорної реакції затиснення, то вона дорівнює нулю. Визначаємо опорну реакцію V_A :

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow V_A - 1 = 0 \Rightarrow V_A = 1.$$

Таким чином, опорна реакція V_A є константою, яка не залежить від місцезоташування сили. Лінія впливу опорної реакції V_A показана на [рис.22.2.б](#).

Для визначення моментної реакції M_A складаємо рівняння моментів стосовно точки A :

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow M_A + 1 \cdot x = 0 \Rightarrow M_A = -x.$$

Отже, опорний момент M_A змінюється за лінійним законом. Для побудови прямої, яка характеризує зміну моменту залежно від розташування сили $P=1$, тобто для побудови лінії впливу, достатньо визначити значення функції M_A в двох довільних точках:

$$x=0 \Rightarrow M_A(0) = 0;$$

$$x=l \Rightarrow M_A(l) = -l.$$

Лінія впливу опорного моменту M_A побудована на [рис.22.2.в](#).

Лінії впливу внутрішніх зусиль

Згинальні моменти і поперечні сили в довільному перерізі k консольної балки, що перебуває під дією рухомої сили (рис.22.3,а), можна обчислювати за формулами (22.1) та (22.2) відповідно.

Причому незалежно від розташування сили доцільно завжди аналізувати рівновагу консольної частини.

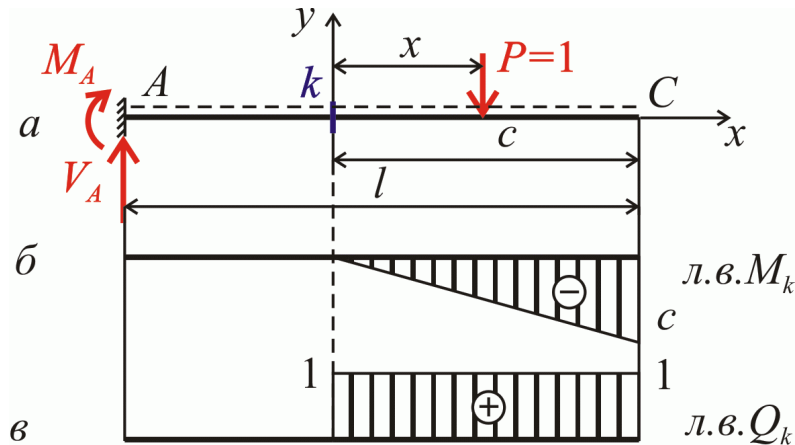


Рис.22.3

Сила $P=1$ ліворуч перерізу k	Сила $P=1$ праворуч перерізу k
$M_k = \sum M_k^{npas} = 0.$ $Q_k = \sum F_y^{npas} = 0.$	$M_k = \sum M_k^{npas} = -1 \cdot x.$ $Q_k = \sum F_y^{npas} = 1.$

Лінії впливу згинального моменту M_k та поперечної сили Q_k побудовано на [рис.22.3.б](#) та [22.3.в](#).

22.3. Навантаження ліній впливу

Лінії впливу є графіками зміни величини тих чи інших параметрів, що визначають напружено-деформований стан будь-яких конструкцій чи споруд, від дії одиничної рухомої сили. За допомогою ліній впливу можна обчислювати величини зазначених параметрів, від різноманітних силових дій. Причому силові дії можуть бути як нерухомими, так і рухомими. Така процедура називається навантаженням ліній впливу.

Навантаження нерухомими силовими діями

Нехай для якоїсь конструкції (наприклад, для двоопорної балки) побудовано лінію впливу якогось фактора S_k . Цим фактором може бути опорна реакція, згинальний момент в певному перерізі, прогин деякої точки осі балки тощо). Визначимо величину зазначеного фактора S_k від деяких силових дій за допомогою його лінії впливу.

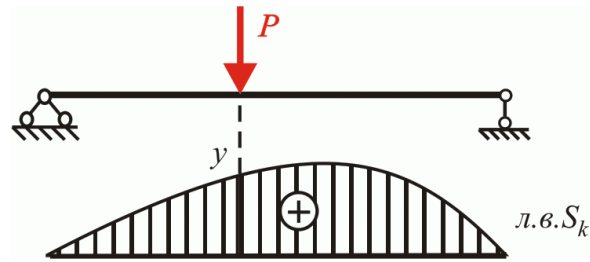


Рис.22.4

Якщо на конструкцію діє нерухома сила P (рис.22.4), то величина фактора S_k може бути обчислена за формулою

$$S_k = Py. \quad (22.3)$$

У цій формулі сила, що спрямована вниз, вважається додатною.

Величина фактора S_k при дії зосередженої вертикальної сили дорівнює добутку величини цієї сили на ординату лінії впливу фактора, в точці прикладення сили.

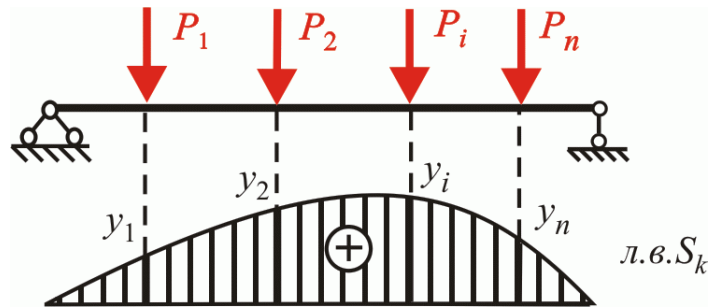


Рис.22.5

Якщо на конструкцію діє система нерухомих вертикальних сил (рис.22.5), то на підставі принципу незалежності дії сил величина фактора S_k може бути обчислена за формулою

$$S_k = \sum_{i=1}^n P_i y_i. \quad (22.4)$$

Величина фактора S_k від дії системи зосереджених вертикальних сил дорівнює сумі добутків величин сил на ординати лінії впливу цього фактора в точках прикладення відповідних сил.

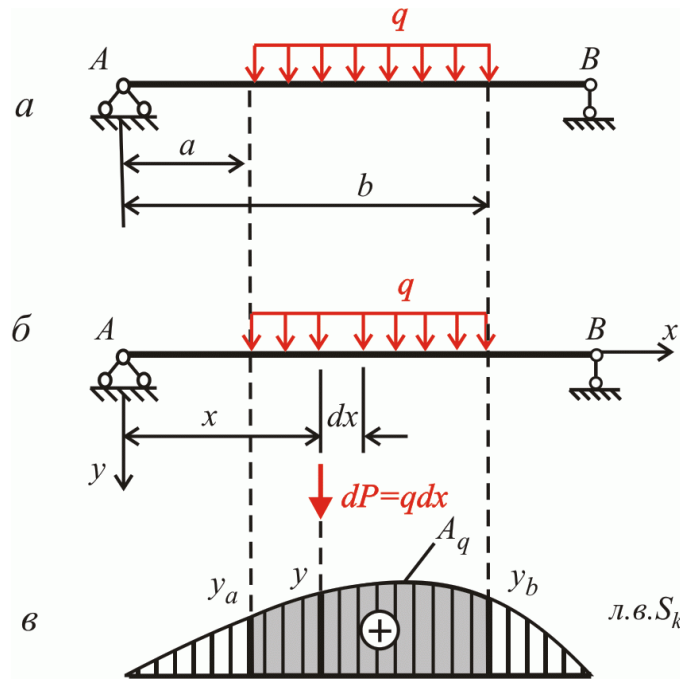


Рис.22.6

Якщо на конструкцію діє рівномірно розподілене навантаження інтенсивністю q (рис.22.6,а), то величина фактора S_k може бути обчислена за формулою

$$S_k = qA_q . \tag{22.5}$$

Отже, величина фактора S_k від дії вертикального рівномірно розподіленого навантаження дорівнює добутку інтенсивності навантаження q на площу A_q лінії впливу цього фактора в межах навантаження.

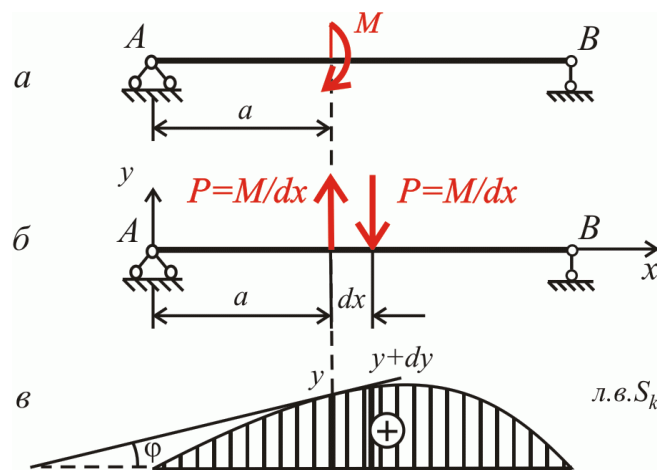


Рис.22.7

При навантаженні конструкції зосередженим моментом M (рис.22.7,а), величина фактора S_k може бути обчислена за формулою

$$S_k = M \operatorname{tg} \varphi . \tag{22.6}$$

Таким чином, величина фактора S_k від дії зосередженого момента дорівнює добутку величини момента M на тангенс нахилу дотичної до лінії впливу фактора в точці прикладення моменту. Момент, який обертається за годинниковою стрілкою вважається додатним. Тангенс вважається додатним для кута, розташованого в першій або третій чверті.

І нарешті, у разі, якщо на систему водночас діє сукупність n зосереджених сил, k – рівномірно розподілених навантажень та m – зосереджених моментів, то величина фактора S_k може бути обчислена за формулою

$$S_k = \sum_{i=1}^n P_i y_i + \sum_{i=1}^k q_i A_{qi} + \sum_{i=1}^m M_i \operatorname{tg} \varphi_i . \quad (22.7)$$

Отже, для обчислення величини будь-якого фактора від нерухомого навантаження за допомогою лінії впливу необхідно:

- усунути задане нерухоме навантаження;
- побудувати лінію впливу фактора, вважаючи, що по конструкції рухається одинична вертикальна сила;
- завантажити побудовану лінію впливу заданим нерухомим навантаженням за формулами (22.3) – (22.7).

Навантаження рухомими силами

Мета навантаження лінії впливу рухомими силами полягає в обчисленні найбільшої величини того чи іншого фактора, коли по конструкції переміщується система сил.

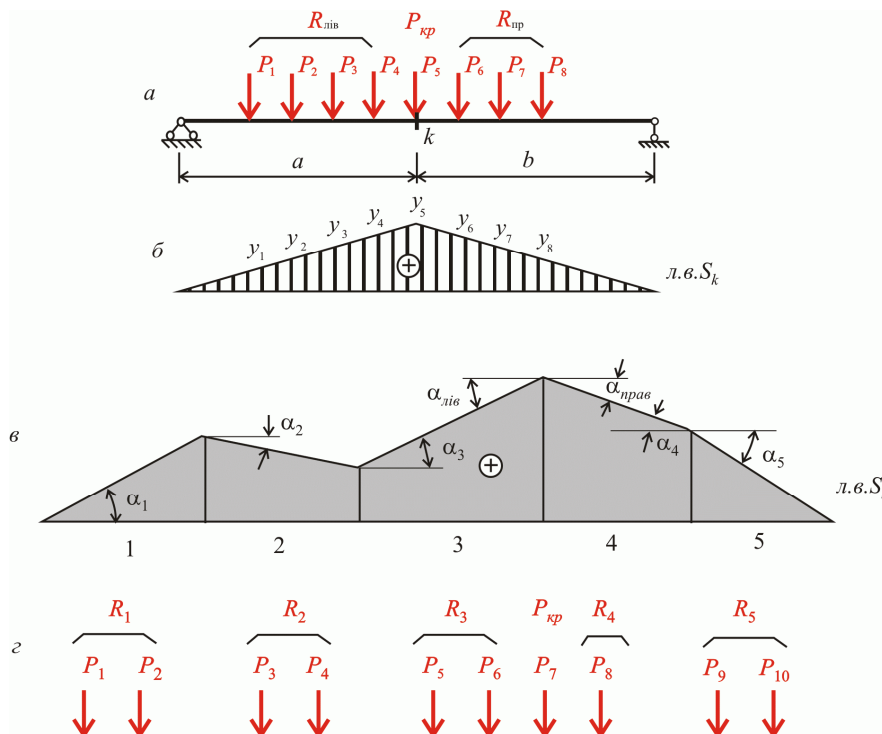


Рис.22.8

Нехай по однопрогоновій балці рухається система вертикальних зосереджених сил (рис.22.8,а), відстані між яким в процесі руху не змінюються. На рис.22.8,б показана лінія впливу якогось фактора S_k , побудована від руху одиничної сили.

Процес навантаження системою рухомих сил має два етапи.

Перший етап. Визначення розташування системи рухомих сил, при якому шуканий фактор матиме найбільше за величиною значення. Положення буде небезпечним за двох умов:

1. Одна з сил має бути розташована над вершиною лінії впливу. Така сила називається критичним вантажем. У нашому випадку $P_{кр} = P_5$ (рис.22.8,а).
2. Має виконуватись система двох нерівностей, яка для трикутної лінії впливу має вигляд:

$$\begin{aligned} \frac{R_{лів} + P_{кр}}{a} &\geq \frac{R_{прав}}{b}; \\ \frac{R_{лів}}{a} &\leq \frac{R_{прав} + P_{кр}}{b}. \end{aligned} \quad (22.9)$$

У випадку полігональної лінії впливу (рис.22.8,в) умову небезпечного розташування вантажів можна записати у вигляді

$$S_L \cdot S_R \leq 0, \quad (22.10)$$

де

$$S_L = \sum R_i \operatorname{tg} \alpha_i + P_{кр} \operatorname{tg} \alpha_{лів}. \quad (22.11)$$

$$S_R = \sum R_i \operatorname{tg} \alpha_i + P_{кр} \operatorname{tg} \alpha_{прав}.$$

У цих співвідношеннях позначено: $P_{кр}$ – критична сила (величина вантажу, встановленого в місці найбільшої випуклої ординати лінії впливу); $\operatorname{tg} \alpha_i$ – тангенси кутів нахилу прямолінійних ділянок лінії впливу (додатні, якщо кути знаходяться в I або III чверті, і від’ємні, якщо кути розташовані в II або IV чвертях); R_i – рівнодійні сил, розташованих у межах відповідних прямолінійних ділянок лінії впливу (рис.22.8,г).

Другий етап. Для встановленої в небезпечне положення системи сил обчислюється величина шуканого фактора S_k за формулою (22.4). Це й буде його найбільше за величиною значення.

22.4. Вузлове прикладення навантаження

У мостових конструкціях часто зустрічається випадок, коли навантаження рухається не безпосередньо по головній балці, а по надбудові, яка являє собою систему поздовжніх балок проїзної частини, яка спирається на головну через систему другорядних поперечних балок. Так, на

рис.22.9,а балки проїзної частин 0-1, 1-2, 2-3 спираються на головну балку AB в окремих точках, які називаються вузловими. Таке навантаження на головну балку називається вузловим.

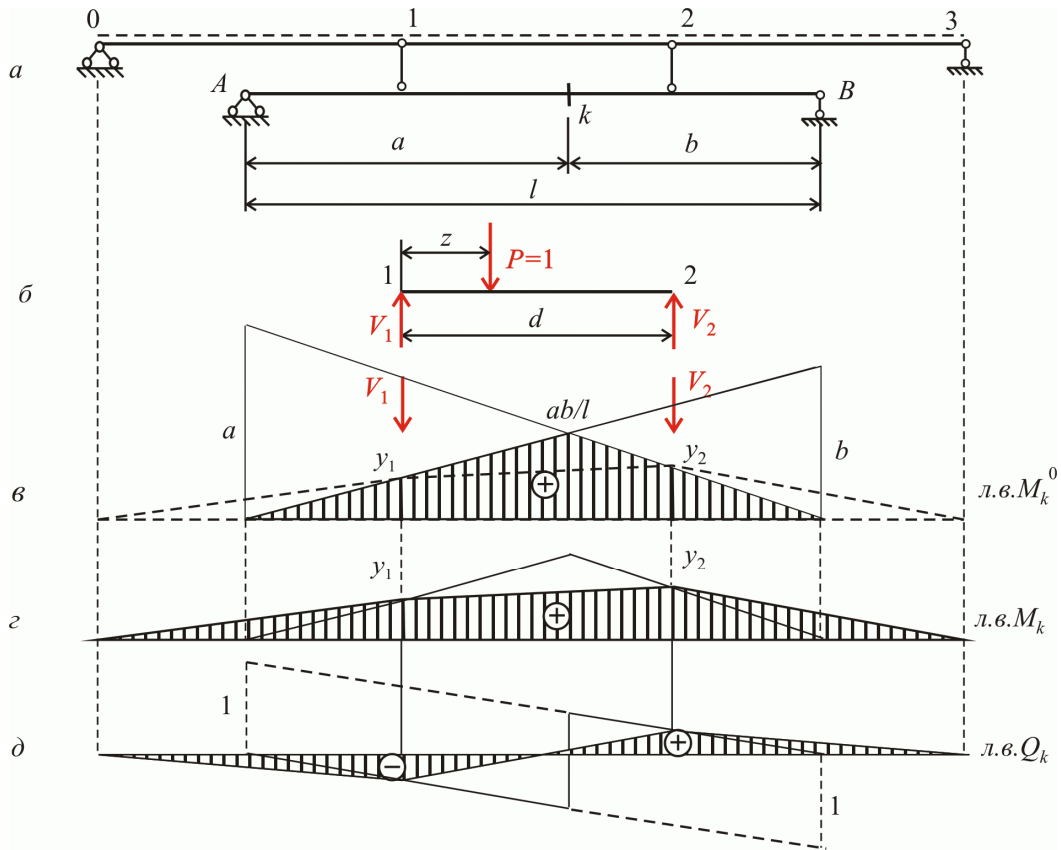


Рис.22.9

Фактично головна балка AB перебуває під дією нерухомих сил, якими є реакції опор балок проїзної частини. Причому, якщо навантаження рухається по проїзній частині, ці реакції змінюються за величиною.

Звідси впливає наступний порядок побудови ліній впливу для головної балки при вузловій передачі навантаження:

- Побудувати лінію впливу шуканого фактору для головної балки без урахування вузлової передачі.
- На побудовану лінію впливу спроецирувати вузлові точки і з'єднати їх прямими відрізками.

На рис.22.9,д за означеними правилами побудовано лінію впливу поперечної сили в перерізі k головної балки.

22.5. Лінії впливу для шарнірно–консольної балки

Для побудови ліній впливу шарнірно–консольну балку доцільно представити у вигляді сукупності однопрогонових балок, які мають або одну опору – затиснення, або дві шарнірні

опори, одна з яких шарнірно-нерухома, а друга – шарнірно-рухома. Кожна з таких однопрогонових балок спирається або на основу, або на інші прості балки. Утворена схема називається "поверховою", де кожна однопрогонова балка розглядається як окремий "поверх" конструкції. Більш докладно утворення "поверхових" схем розглядається в [главі 10](#).

Побудова ліній впливу будь яких факторів, які виникають в шарнірно-консольній балці виконується за два етапи:

1. За звичайними правилами будується лінія впливу лише для однопрогонової балки, до якої відноситься фактор, що аналізується.
2. Побудована лінія впливу послідовно продовжується на однопрогонові балки сусідніх "поверхів" в такий спосіб, щоб на кожному поверсі вона, по-перше, була прямолінійною, і, по-друге, перетинала вісь балки на віддаленій опорі "поверху".

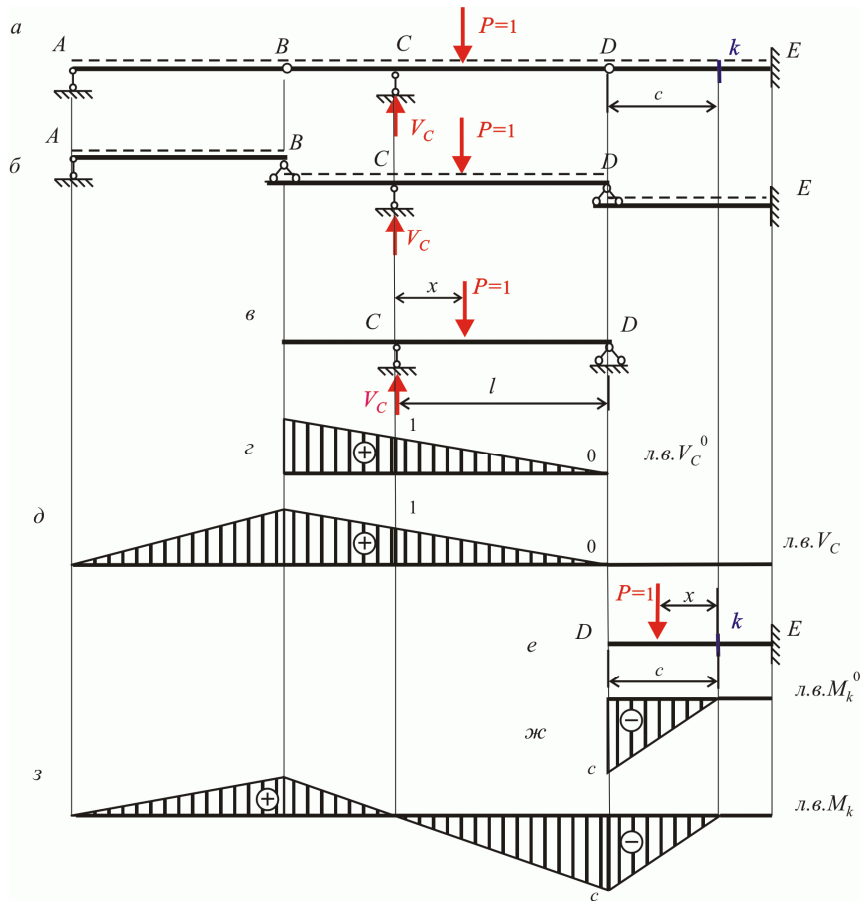


Рис.22.10

Виберіть форму подання навчального матеріалу

[Докладне подання](#)

✓ [Скорочене подання](#)

23. Статично визначувані ферми

Зміст глави

[23.1. Лінії впливу в простих фермах](#)

[23.2. Лінії впливу в шпренгельних фермах](#)

[23.2.1. Метод перерізів](#)

[23.2.2. Метод вирізання вузлів](#)

[23.2.3. Практичні прийоми побудови ліній впливу в шпренгельних фермах](#)

[Запитання для самоперевірки](#)

23.1. Лінії впливу в простих фермах

Лінії впливу опорних реакцій в фермах аналогічні лініям впливу опорних реакцій в балках. Так, для ферми, представленої на [рис.23.1,а](#) лінії впливу опорних реакцій наведено на [рис.23.1,б](#) та [23.1,в](#).

Для визначення поздовжніх сил в стержнях ферми використовуються тіж самі методи, що й для дії нерухомих сил. Проте, на відміну від балки, необхідно заздалегідь визначити, по якому поясу ферми рухається одинична сила. Це пов'язано з тим, що для деяких стержнів лінії впливу зусиль при русі сили по верхньому і по нижньому поясу ферми відрізняються одна від одної.

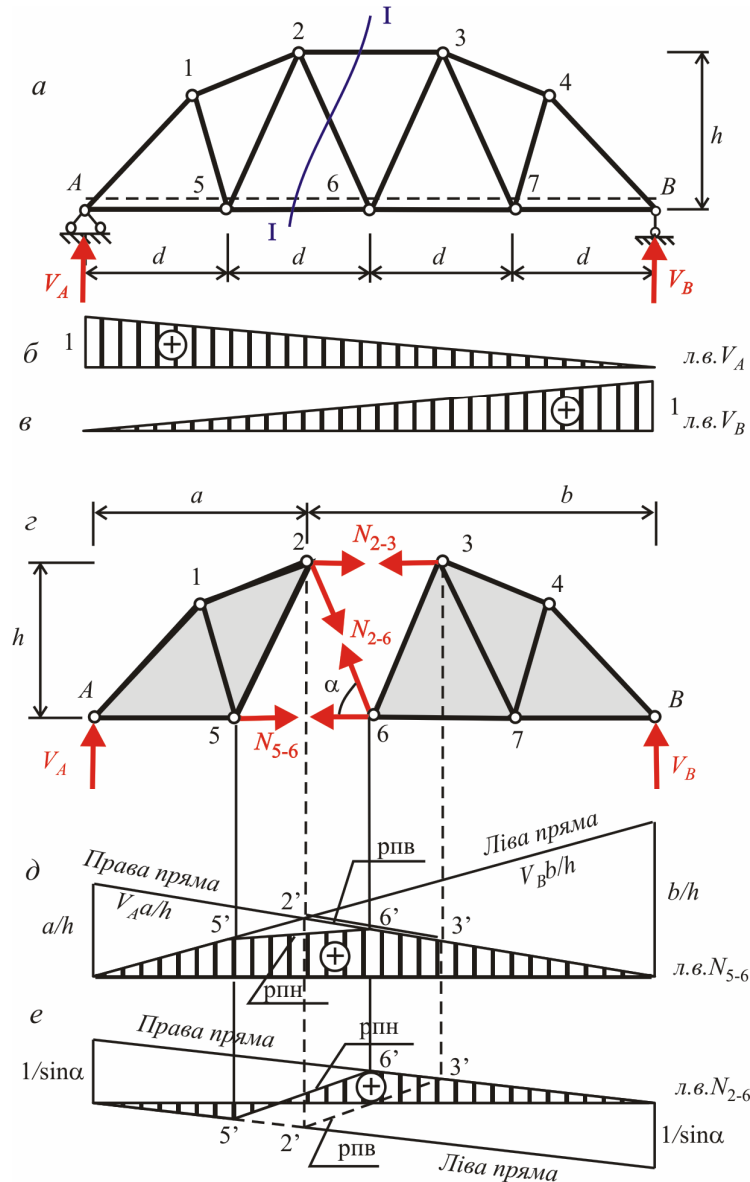


Рис.23.1

Метод наскрізних перерізів

Застосуємо метод наскрізних перерізів для аналізу поведінки зусиль в стержнях N_{5-6} та N_{2-6} . Переіз I-I, який перетинає обидва зазначені стержні, поділяє ферму на два окремі диски (рис.23.1,г). Замість розрізаних стержнів прикладаємо поздовжні сили $N_{5-6}, N_{2-6}, N_{2-3}$, які спрямовуються в додатних напрямках, тобто від відповідних вузлів. Будемо вважати, що одинична сила переміщується по нижньому поясу ферми ("рух по низу"). В опорах виникають вертикальні опорні реакції $V_A(x), V_B(x)$, графіки зміни яких (лінії впливу) побудовано на рис.23.1,б та 23.1,в.

Для зусилля N_{5-6} існує моментна точка (точка Ріттера), яка розташована у місці перетину двох інших зусиль, тобто у вузлі 2. Тому для визначення зусилля N_{5-6} необхідно скласти рівняння

моментів щодо цього вузла. Що стосується зусилля N_{2-6} , то тут моментної точки не існує, бо два інші зусилля паралельні між собою. Тому для визначення зусилля N_{2-6} необхідно скласти рівняння проєкцій на вертикальну вісь.

Як для визначення зусилля N_{5-6} , так і для визначення зусилля N_{2-6} необхідно розглядати рівновагу того диска, на який діє менша кількість сил. Зважаючи на те, що одинична сила рухається і в процесі руху може перебувати як на лівому, так і на правому дисках, будемо розглядати обидва можливі випадки. Причому, якщо сила перебуває на лівому диску, будемо аналізувати рівновагу правого диска, а якщо перебуває на правому диску, то рівновагу лівого.

Сила $P=1$ на лівому диску	Сила $P=1$ на правому диску
$\sum M_2 = 0 \Rightarrow N_{6-5}h - V_B b = 0,$ $N_{6-5} = \frac{b}{h} V_B$	$\sum M_2 = 0 \Rightarrow N_{5-6}h - V_A a = 0,$ $N_{5-6} = \frac{a}{h} V_A.$
$\sum F_y = 0 \Rightarrow N_{6-2} \sin \alpha + V_B = 0,$ $N_{6-2} = -\frac{1}{\sin \alpha} V_B.$	$\sum F_y = 0 \Rightarrow -N_{2-6} \sin \alpha + V_A = 0,$ $N_{2-6} = \frac{1}{\sin \alpha} V_A.$

Отже, в межах лівого диска лінія впливу зусилля N_{5-6} може бути побудована множенням лінії впливу опорної реакції V_B на коефіцієнт $\frac{b}{h}$ (це буде, так звана, ліва пряма), а в межах правого диска – множенням лінії впливу опорної реакції V_A на коефіцієнт $\frac{a}{h}$ (права пряма).

Ліва пряма штрихується в межах лівого, а права – в межах правого диска (рис.23.1,д). Якщо одинична сила перебуває на нижньому поясі, ліва пряма штрихується на ділянці $A - 5$, а права – на ділянці $6 - B$. У межах розрізаної панелі нижнього поясу ферми $5-6$ ліва і права прямі з'єднуються прямим відрізком, який називається **передатною прямою, або зрізкою**. Якщо ж рух здійснюється по верхньому поясу, то ліва пряма штрихується на ділянці $A - 2$, а права – на ділянці $3 - B$. Аналогічно, ліва й права прямі в межах розрізаної панелі верхнього поясу ферми $2-3$ з'єднуються передатною прямою. Таким чином, лінія впливу має дві передатні прямі, одна для руху по

верхньому, а інша – для руху по нижньому поясу ферми. Слід звернути увагу на те, що **ліва й права прямі завжди перетинаються під моментною точкою.**

Так само будується лінія впливу зусилля N_{2-6} . У межах лівого диска лінія впливу опорної реакції V_B множиться на коефіцієнт $-\frac{1}{\sin \alpha}$ (це буде ліва пряма), а в межах правого диска – множенням лінії впливу опорної реакції V_A на коефіцієнт $\frac{1}{\sin \alpha}$ (права пряма). Ліва і права прямі паралельні. Вони не перетинаються, що відповідає відсутності моментної точки.

Ліва пряма штрихується в межах лівого, а права – в межах правого вантажного поясу диска (рис.23.1.е). Так, якщо одинична сила перебуває на нижньому поясі, ліва пряма штрихується на ділянці $A - 5$, а права – на ділянці $6 - B$. У межах розрізаної панелі нижнього поясу ферми $5-6$ ліва і права прямі з'єднуються передатною прямою. Якщо ж рух здійснюється по верхньому поясу, то ліва пряма штрихується на ділянці $A - 2$, а права – на ділянці $3 - B$. Аналогічно, ліва і права прямі в межах розрізаної панелі верхнього поясу ферми $2-3$ з'єднуються передатною прямою. Отже, лінія впливу також має дві передатні прямі, одна для руху по верхньому, а інша – для руху по нижньому поясу ферми.

Для визначення зусиль в стержнях консольних систем опорні реакції визначати не обов'язково, бо при розрахунку зусиль методом наскрізних перерізів можна завжди обмежитись аналізом рівноваги консольної частини. Побудуємо, наприклад, лінії впливу зусиль в стержнях $1-2$ та $2-5$ консольної ферми (рис.23.2,а).

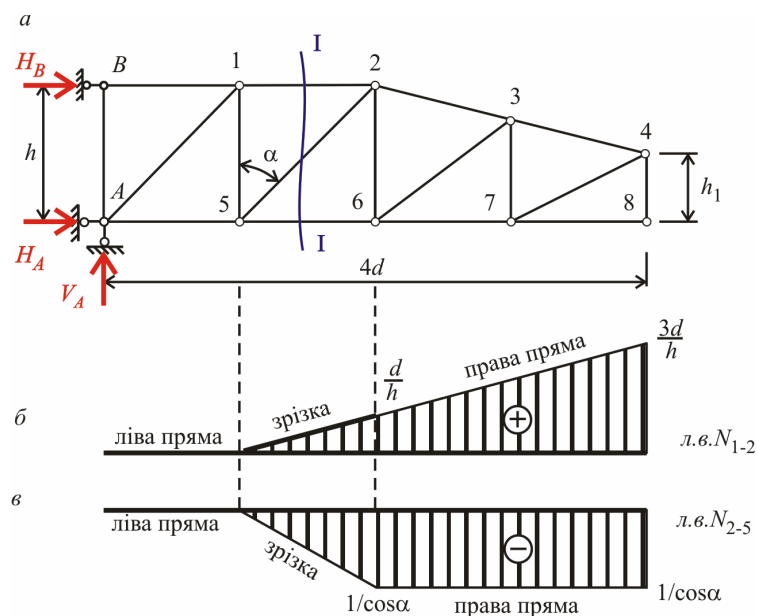
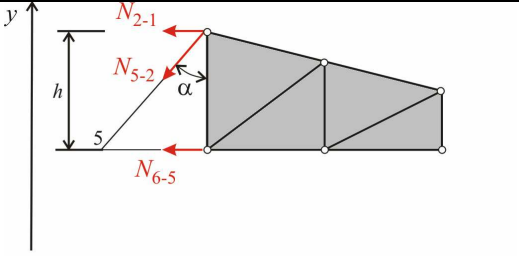
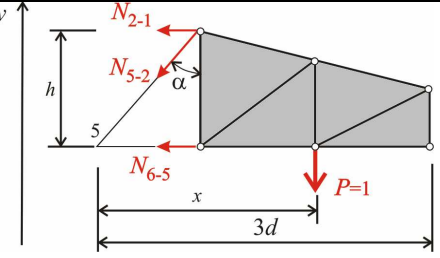


Рис.23.2

Проводимо переріз I-I, який поділяє ферму на два диска, і розглянемо рівновагу правого диска для обох випадків розташування рухомої сили: сила на лівому диску та сила на правому диску.

Сила $P=1$ на лівому диску	Сила $P=1$ на правому диску
	
$\sum M_5 = 0 \Rightarrow -N_{2-1}h = 0 \Rightarrow N_{2-1} = 0.$	$\sum M_5 = 0 \Rightarrow -N_{2-1}h + 1 \cdot x = 0 \Rightarrow N_{2-1} = \frac{x}{h}.$ <p style="text-align: center;">При $x = d \Rightarrow N_{2-1}(d) = \frac{d}{h}.$</p> <p style="text-align: center;">При $x = 3d \Rightarrow N_{2-1}(3d) = \frac{3d}{h}.$</p>
$\sum F_y = 0 \Rightarrow -N_{5-2} \cos \alpha = 0 \Rightarrow N_{5-2} = 0.$	$\sum F_y = 0 \Rightarrow -N_{5-2} \cos \alpha - 1 = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow N_{5-2} = -\frac{1}{\cos \alpha}.$

Для обох ліній впливу ліві прямі (прямі в межах лівих дисків) збігаються з базовою лінією. Права пряма лінії впливу N_{2-1} є похилою прямою, а на лінії впливу зусилля N_{5-2} – права пряма паралельна базовій лінії. Як і раніше, зрізки (передатні прямі), з’єднують ліві і праві прямі в межах розрізаної панелі вантажного поясу ферми. Остаточні лінії впливу побудовано на [рис.23.2.б](#) та [23.2.в](#).

Таким чином, лінія впливу, побудована способом наскрізних перерізів, складається з трьох прямих:

1. Ліва пряма, яка перетинає вісь на лівій опорі і штрихується в межах вантажного поясу лівого диска.
2. Права пряма, що перетинає вісь на правій опорі і штрихується в межах вантажного поясу правого диска. Ліва й права прямі завжди перетинаються під моментною точкою.
3. Передатна пряма з’єднує ліву й праву прямі в межах розрізаної панелі вантажного поясу ферми. Іноді передатна пряма може збігатися з лівою чи правою прямою.

Метод вирізання вузлів

Метод застосовується у випадку, коли можна замкненим перерізом вирізати вузол ферми і скласти для нього рівняння проєкцій, яке міститиме лише одну невідому величину – зусилля в стержні, що аналізується. Рівняння проєкцій складається для двох випадків розташування

одиночної сили: сила розташована поза вузлом, тобто за межами панелей, які розсікаються при вирізанні вузла, і сила знаходиться у вузлі.

Для прикладу побудуємо лінії впливу зазначеним методом для стержнів 2–2' та 3–3' (рис.23.3,а).

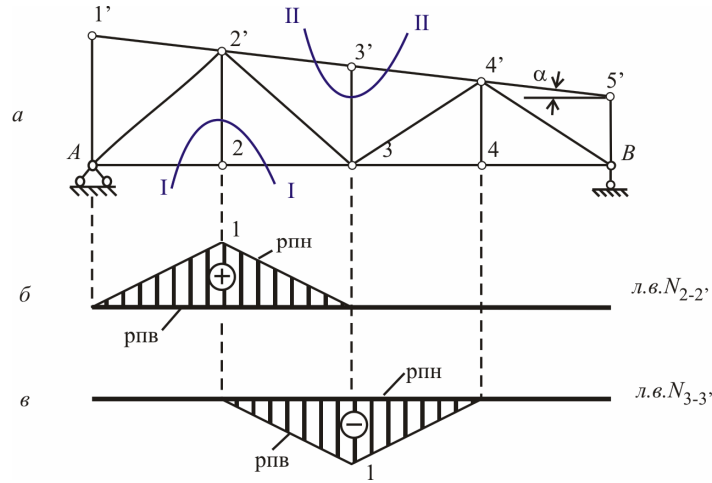


Рис.23.3

Перерізами I–I і II–II вирізаємо вузли 2 та 3' відповідно. Далі для кожного вузла складаємо рівняння проєкцій, вибираючи для проєцирування вісь в такий спосіб, щоби на неї проєцирувалось лише одне невідоме – зусилля в стержні, що аналізується.

Сила $P=1$ поза вузлом 2	Сила $P=1$ у вузлі 2
$\sum F_y = 0 \Rightarrow N_{2-2'} = 0.$	$\sum F_y = 0 \Rightarrow N_{2-2'} - 1 = 0 \Rightarrow N_{2-2'} = 1.$
Сила $P=1$ поза вузлом 3'	Сила $P=1$ у вузлі 3'
$\sum F_u = 0 \Rightarrow N_{3-3'} = 0.$	$\sum F_u = 0 \Rightarrow -N_{3-3'} \cos \alpha - 1 \cdot \cos \alpha = 0.$ $N_{3-3'} = -1.$

Як впливає з розрахунку, зусилля N_{2-2} , поза вирізаним вузлом 2, тобто за межами розрізаних панелей А-2 та 2-3, дорівнює нулю, а в самому вузлі дорівнює одиниці. Тому на розрізаних панелях необхідно провести передатні прямі, що з'єднують одиничну ординату у вузлі 2 з нулями у вузлах А та 3. Це й буде лінія впливу зусилля N_{2-2} . Причому, оскільки в процесі розрахунку розглядалось розташування одиничної сили у вузлі нижнього поясу, це графік для руху "по низу". Якщо ж сила рухається по верхньому поясу, то вона не може потрапити у вузол 2. Тому лінія впливу зусилля N_{2-2} , буде нульовою (рис.23.3.б).

Аналогічно будеться лінія впливу зусилля N_{3-3} , (рис.23.3.в). Проте в цьому випадку одиничне значення у вирізаному вузлі відповідає руху сили по верхньому, а нульове – по нижньому поясу.

Метод сумісних перерізів

Метод застосовують для визначення зусиль у стержнях, які неможливо обчислити за способами вирізання вузлів і наскрізних перерізів. Ідея методу полягає в тому, що шукане зусилля виражається через інше, яке можна знайти способом вирізання вузлів або способом наскрізних перерізів.

Побудємо, наприклад, лінію впливу зусилля в стержні N_{3-6} (рис.23.4,а).

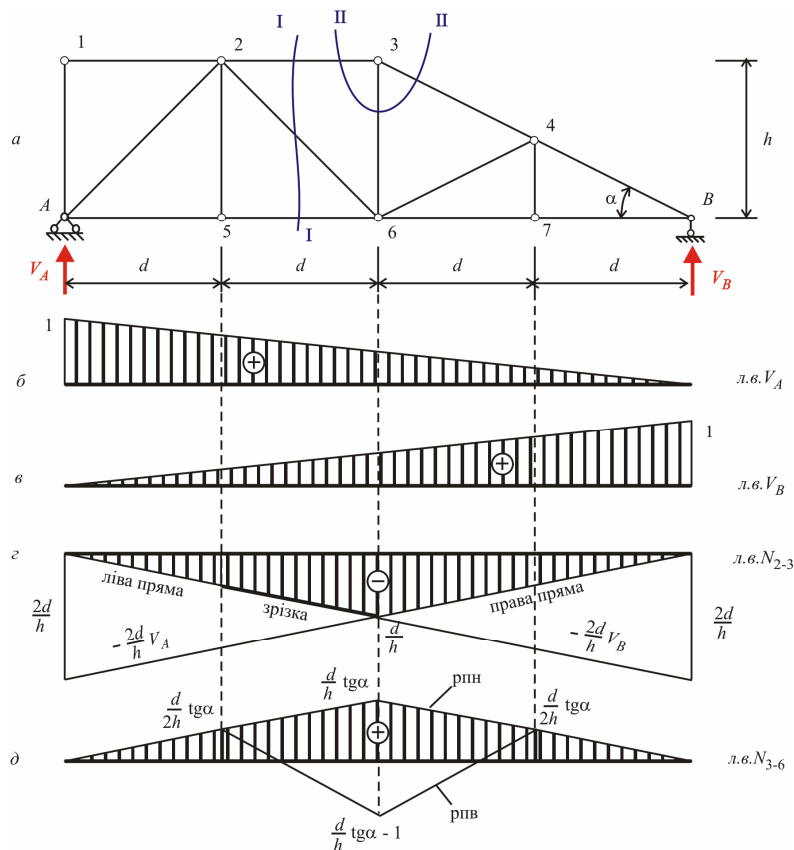


Рис.23.4

Лінії впливу опорних реакцій показано на рис.23.4,б та рис.23.4,в.

Як допоміжну побудуємо лінію впливу зусилля N_{2-3} , використовуючи метод наскрізних перерізів. Переріз I-I поділяє ферму на два незалежних диска. Визначимо зусилля N_{2-3} для двох випадків розташування одиичної сили: сила на лівому і сила на правому диску.

Сила $P=1$ на лівому диску	Сила $P=1$ на правому диску
$\sum M_6 = 0 \Rightarrow -N_{3-2}h - V_B \cdot 2d = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow N_{3-2} = -\frac{2d}{h}V_B.$	$\sum M_6 = 0 \Rightarrow N_{2-3}h + V_A \cdot 2d = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow N_{2-3} = -\frac{2d}{h}V_A.$

Лінія впливу зусилля в стержні N_{3-6} будується шляхом множення ліній впливу опорних реакцій на коефіцієнт $-\frac{2d}{h}$ (рис.23.4,г). Ліва пряма штрихується в межах лівого, а права – в межах правого диска. Зрізка (передатна пряма), яка в межах розрізаної панелі з'єднує ліву та праву прямі, розташована на лівій прямій.

Далі проводимо переріз II-II, який виокремлює вузол 3, і складаємо рівняння рівноваги для двох випадків: сила $P=1$ поза вузлом, тобто за межами розрізаних стержнів 2-3 та 3-4, та сила $P=1$ у вузлі.

Сила $P=1$ поза вузлом 3	Сила $P=1$ у вузлі 3
$\sum F_x = 0 \Rightarrow N_{3-4} \cos \alpha - N_{3-2} = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow N_{3-4} = \frac{1}{\cos \alpha} N_{3-2}.$	$\sum F_x = 0 \Rightarrow N_{3-4} \cos \alpha - N_{3-2} = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow N_{3-4} = \frac{1}{\cos \alpha} N_{3-2}.$
$\sum F_y = 0 \Rightarrow -N_{3-6} - N_{3-4} \sin \alpha = 0 \Rightarrow$	$\sum F_y = 0 \Rightarrow -N_{3-6} - N_{3-4} \sin \alpha - 1 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow N_{3-6} = -N_{3-4} \sin \alpha \Rightarrow$ $\Rightarrow N_{3-6} = -N_{3-2} \operatorname{tg} \alpha.$	$\Rightarrow N_{3-6} = -N_{3-4} \sin \alpha - 1 \Rightarrow$ $\Rightarrow N_{3-6} = -N_{3-2} \operatorname{tg} \alpha - 1 \Rightarrow$ $\Rightarrow N_{3-6} = \frac{d}{h} \operatorname{tg} \alpha - 1.$
---	--

Отже, у випадку розташування одиничної сили поза вузлом 3, що належить верхньому поясу ферми, лінія впливу зусилля N_{3-6} може бути отримана множенням лінії впливу зусилля N_{3-2} на коефіцієнт $(-\operatorname{tg} \alpha)$. Таке розташування відповідає руху одиничної сили по нижньому поясу ферми. Тому заштрихований на [рис.23.4.д](#) графік являє собою лінію впливу зусилля N_{3-6} при пересуванні сили по нижньому поясу.

Розташування сили у вузлі 3 можливе лише за умови руху по верхньому поясу ферми. До того ж слід врахувати, що у разі розташування сили у вузлі 3 всі зусилля мають певні значення. Зокрема, $N_{3-2} = -\frac{d}{h}$ (див. [рис.23.4.г](#)). Так само, величина $N_{3-6} = \frac{d}{h} \operatorname{tg} \alpha - 1$ являє собою ординату лінії впливу N_{3-6} у вузлі 3. Провівши в межах розрізаних панелей прямолінійні відрізки від цієї ординати до лівої і до правої прямої, маємо передатні прямі для руху "по верху" ([рис.23.4.д](#)).

23.2. Лінії впливу в шпренгельних фермах

У ферми, що мають великі відстані між вузлами вантажного поясу, часто вводять додаткові вузли, на які спиратимуться поперечні балки, що несуть навантаження від покриття або від проїжджої частини мостів. Для збереження геометричної незмінюваності водночас із вузлами вводять додаткові стержні, які називаються **шпренгельними стержнями**. Ферми, які містять додаткові вузли вантажного поясу та відповідні ним додаткові стержні, називають **шпренгельними фермами**.

З точки зору геометричної структури шпренгельну ферму можна розглядати як таку, що складається з основної ферми, в панелі якої введено додаткові трикутні ферми, які спираються на вузли основної ферми. Такі додаткові однопанельні ферми називаються **шпренгелями**. Навантаження на шпренгелі передається лише через сили, прикладені в додаткових вузлах поясу. Якщо ці вузли не навантажені, то зусилля у відповідному шпренгелі відсутні. Таким чином, шпренгелі працюють лише на локальне навантаження панелей.

Деякі типові види шпренгелів розглянемо на прикладі шпренгельної ферми ([рис.23.5.а](#)).

Ферму можна розглядати як основну ферму з паралельними поясами 1–2–3–4–5–6 та 1'–2'–3'–4'–5'–6', в панелі якої вставлено додаткові вузли, трикутні шпренгелі та додаткові стійки, через які

навантаження передається на шпренгелі (рис.23.5,б). Схеми шпренгелів представлено на рис.23.5,в.

Шпренгель, який введено у першу панель, спирається на вузли 1 і 2 основної ферми. Завантажується шпренгель через додаткову стійку 7–7'. Навантаження з додаткового вузла 7 верхнього поясу через опорні реакції шпренгеля передаються на вузли 1 і 2 знов–таки верхнього поясу. Такого типу шпренгелі називаються **одноярусними**.

Шпренгель, введений в другу панель, спирається на вузли 2' і 3' нижнього поясу. Через стійку 8–8' навантаження з додаткового вузла 8, який розташовано в верхньому поясі, через шпренгель передається на вузли нижнього поясу основної ферми. Шпренгелі такого типу називаються **двоярусними**.

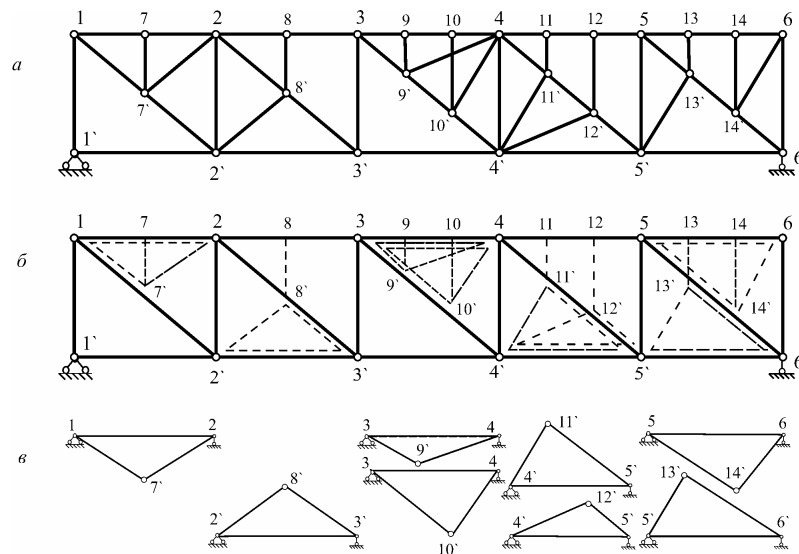


Рис.23.5

У третій панелі основної ферми показано два трикутні одноярусні шпренгелі 3–4–9', який навантажується через додаткову стійку 9–9', та шпренгель 3–4–10'. Останній навантажується через додаткову стійку 10–10'.

Аналогічно, в четверту панель введено два двоярусних шпренгеля 4'–5'–11' і 4'–5'–12', які через додаткові стійки 11–11' та 12–12' відповідно передають навантаження з додаткових вузлів верхнього поясу 11 та 12 на вузли 4' і 5' основної ферми.

П'ята панель містить два шпренгеля, причому шпренгель 5'–6'–13' є двоярусним, а шпренгель 5'–6'–14' – одноярусним.

Усі стержні шпренгельної ферми можна поділити на 4 категорії (рис.23.5,а):

- 1.Стержні які відносяться лише до основної ферми. Наприклад, 2–8, 8–3, 2–8', 3'–4' тощо.
- 2.Стержні, які належать лише шпренгелям та додаткові стійки, через які шпренгелі навантажуються (2–7', 7–7', 2'–8', 8–8' тощо).

3. Стержні, які водночас належать як основній фермі, так і шпренгелю (1–7, 7–2, 2'–3', 9'–10' тощо).
4. Сійки основної ферми, якщо принаймні в одній, суміжній зі сійкою, панелі введено двоярусний шпренгель. Наприклад, 2–2', 3–3', 4–4', 5–5', але не сійка 1–1', бо в першій панелі, з якою межує зазначений стержень, немає двоярусного шпренгеля. Це стержень першої категорії.

23.2.1. Метод перерізів

Для побудови ліній впливу в стержнях шпренгельних ферм можна безпосередньо використовувати метод перерізів. Так, якщо можна розділити шпренгельну ферму перерізом на два окремих диска, провівши розріз через три стержня, то використовується спосіб наскрізних перерізів. Якщо ж можна вирізати вузол шпренгельної ферми, провівши розріз через три стержня, так щоби два стержня були розташовані вздовж прямої, то використовується спосіб вирізання вузлів.

Лінії впливу зусиль в стержнях 4'–7', 6'–7', 6–7 та 9–9' шпренгельної ферми побудовано на рис.23.6,а.

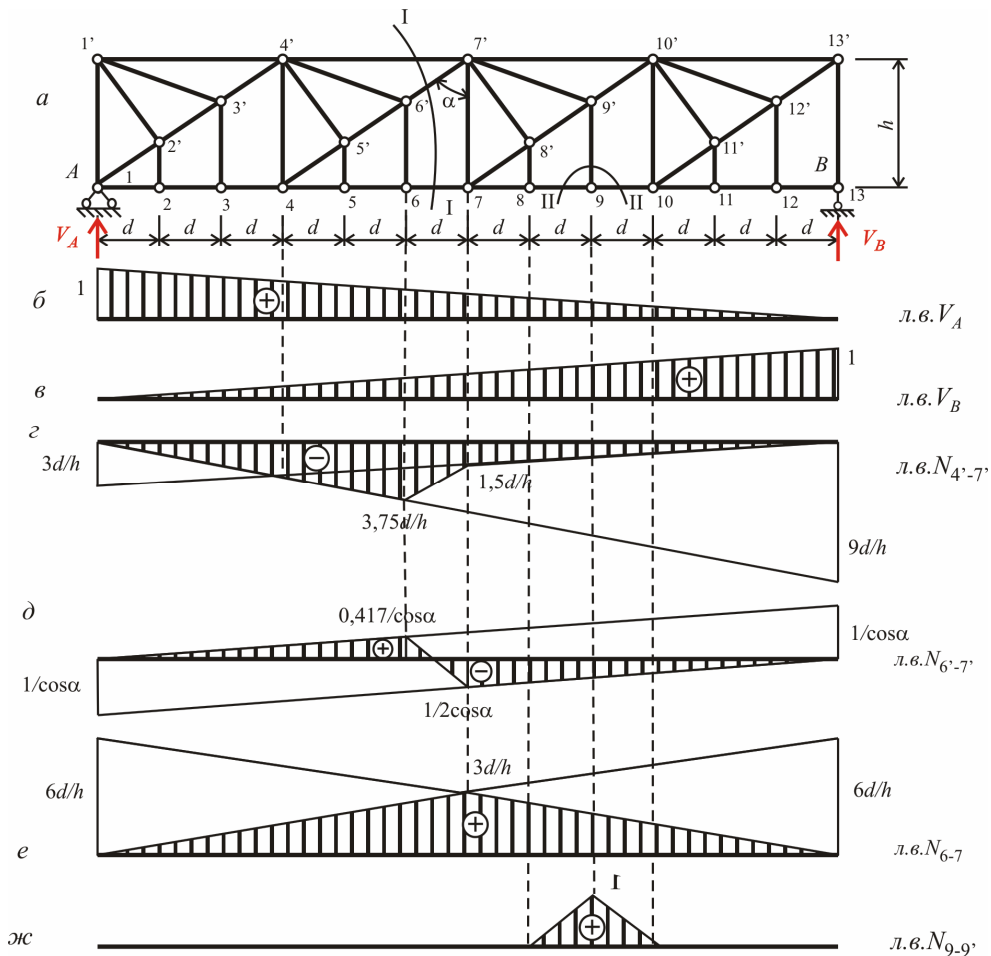


Рис.23.6

23.2.2. Метод вирізання вузлів

Метод застосовують у випадках, коли метод наскрізних перерізів незручний для використання. Так, для побудови лінії впливу зусилля в стержні 9–9' проводимо переріз II–II, який вирізає вузол 9 і розглядаємо два положення рухомої сили: сила поза вузлом і сила у вузлі.

Сила $P=1$ поза вузлом 9	Сила $P=1$ у вузлі 9
<p>$\sum F_y = 0 \Rightarrow N_{9-9'} = 0.$</p>	<p>$\sum F_y = 0 \Rightarrow N_{9-9'} - 1 = 0 \Rightarrow N_{9-9'} = 1.$</p>

Лінія впливу зусилля в стержні 9–9' побудовано на [рис.23.б.ж.](#)

23.2.3. Практичні прийоми побудови ліній впливу в шпренгельних фермах

Якщо для побудови ліній впливу в шпренгельних фермах метод перерізів використати неможливо або надто складно, то можна застосовувати спеціальні прийоми, які базуються на представленні шпренгельної ферми як сукупності основної ферми та шпренгелів.

Стержні I категорії

До першої категорії відносять стержні, які належать виключно основній фермі. Зусилля в таких стержнях можна визначати як зусилля в лише в основній фермі, яка залишається після вилучення шпренгельних вузлів і стержнів ([рис.23.7.б.](#)).

Так, стержень 4-5' шпренгельної ферми ([рис.23.7.а.](#)) відноситься до першої категорії. Тому лінія впливу $N_{4-5'}$ еквівалентна лінії впливу N_{4-7}^0 основної ферми: л.в. $N_{4-5'}$ = л.в. N_{4-7}^0 .

Сила $P=1$ на лівому диску	Сила $P=1$ на правому диску
$\sum F_y = 0 \Rightarrow -N_{7-4'} \cos \alpha + V_B = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow N_{7-4'} = \frac{1}{\cos \alpha} V_B.$	$\sum F_y = 0 \Rightarrow N_{4'-7'} \cos \alpha + V_A = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow N_{4-7'} = -\frac{1}{\cos \alpha} V_A.$

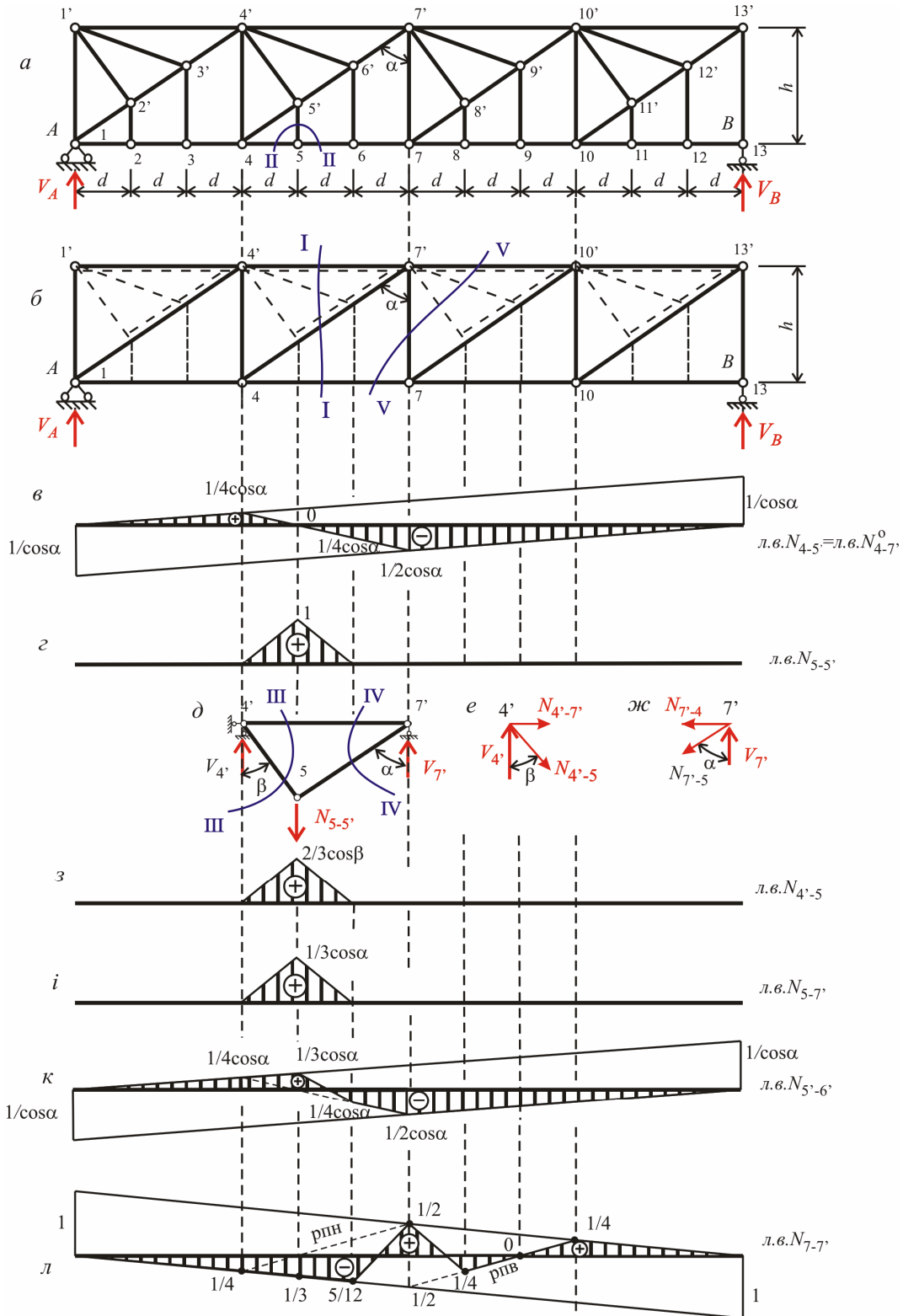


Рис.23.7

Отже, замість лінії впливу зусилля N_{4-5} , будемо лінією впливу зусилля N_{4-7}^0 , для основної ферми (рис.23.7,б). Проводимо переріз I-I, який поділяє основну ферму на два диска і аналізуємо рівновагу при розташуванні одиничної сили на лівій і на правій половині ферми: якщо сила розташована на лівій половині ферми – рівновагу правого диска, а якщо на правій – лівого диска.

Ліва пряма лінії впливу будується множенням лінії впливу опорної реакції V_B на коефіцієнт $\frac{1}{\cos \alpha}$, а права – лінії впливу опорної реакції V_A на коефіцієнт $\left(-\frac{1}{\cos \alpha}\right)$. Ліва пряма заштрихована в межах лівого, а права – в межах правого диска. Обидві прямі в межах розрізаної панелі з'єднуються передатною прямою (рис.23.7.в).

Стержні II категорії

До II категорії відносяться стержні, які належать лише шпренгелю. Наприклад, до цієї категорії відноситься стержень $N_{4'-5'}$, (рис.23.7.а), який входить до складу шпренгеля 4'-5'-7'. Навантаження на зазначений шпренгель передається через підвіску 5-5'. Тому перш ніж аналізувати зусилля $N_{4'-5'}$, слід побудувати лінію впливу зусилля в підвісці $N_{5-5'}$. Це можна зробити, вирізавши перерізом II-II вузол 5 шпренгельної ферми (рис.23.7.а) і розглянувши два положення одиничної сили: сила поза вузлом 5 та сили у вузлі.

Сила $P=1$ поза вузлом 5	Сила $P=1$ у вузлі 5
$\sum F_y = 0 \Rightarrow N_{5-5} = 0.$	$\sum F_y = 0 \Rightarrow N_{5-5} \cdot (-1) = 0 \Rightarrow N_{5-5} = 1.$

Лінія впливу зусилля всюди за межами розрізаних панелей 4-5-6 шпренгельної ферми збігається з базовою прямою і дорівнює одиниці у вузлі 5 (рис.23.7.г).

Далі розглянемо лише самий шпренгель 4'-5'-7', який спирається на вузли 4' і 7' основної ферми та навантажується зусиллям $N_{5-5'}$ (рис.23.7.д).

Визначаємо опорну реакцію $V_{4'}$:

$$\sum M_{7'} = 0 \Rightarrow V_{4'} \cdot 3d - N_{5-5'} \cdot 2d = 0 \Rightarrow V_{4'} = \frac{2}{3} N_{5-5'}$$

Тоді з рівноваги вузла 4' (переріз III-III) визначаємо зусилля $N_{4'-5'}$ (рис.23.7.е):

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow -N_{4'-5'} \cos \beta + V_{4'} = 0,$$

$$N_{4'-5'} = \frac{1}{\cos \beta} V_{4'} = \frac{2}{3 \cos \beta} N_{5-5'}$$

На [рис.23.7.з](#) показано лінію впливу зусилля $N_{4'-5'}$, яку одержано множенням раніше побудованої лінії впливу зусилля $N_{5-5'}$ на коефіцієнт $\frac{2}{3 \cos \beta}$.

Стержні III категорії

До III категорії належать стержні, що водночас входять до складу як основної ферми, так і шпренгеля. Наприклад, стержень $5'-6'$ ([рис.23.7.а](#)) можна трактувати як поєднання елемента $4-7'$ основної ферми та елемента $5'-7'$ шпренгеля ([рис.23.7.д](#)). Лінії впливу зусиль в таких стержнях можна отримати додаванням ліній впливу зусиль у стержнях основної ферми та у відповідних стержнях шпренгеля. Так, для зазначеного стержня

$$л.в. N_{5'-6'} = л.в. N_{4-7'}^0 + л.в. N_{5'-7'}^III.$$

Лінія впливу зусилля в основній фермі $N_{4-7'}^0$ уже побудована на [рис.23.7.в](#). Побудуємо тепер лінію впливу зусилля $N_{5'-7'}^III$, яке виникає в стержні, що входить до складу шпренгеля $4'-5'-7'$ ([рис.23.7.д](#)).

Опорну реакцію у вузлі $7'$ обчислимо з умов рівноваги шпренгеля ([рис.23.7.д](#)):

$$\sum M_{4'} = 0 \Rightarrow V_{7'} \cdot 3d - N_{5-5'} \cdot d = 0 \Rightarrow V_{7'} = \frac{1}{3} N_{5-5'}.$$

Визначимо зусилля $N_{5'-7'}^III$ із умов рівноваги опорного вузла $7'$ шпренгеля ([рис.23.7.ж](#)):

$$\begin{aligned} \sum F_y = 0 &\Rightarrow -N_{4'-7'} \cos \alpha + V_{7'} = 0, \\ N_{4'-7'} &= \frac{1}{\cos \alpha} V_{7'} = \frac{1}{3 \cos \alpha} N_{5-5'}. \end{aligned}$$

Отже, лінію впливу зусилля $N_{5'-7'}^III$ ([рис.23.7.і](#)) отримаємо, помноживши графік ([рис.23.7.г](#)) на числовий коефіцієнт $\frac{1}{3 \cos \alpha}$.

Сума лінії впливу зусилля $N_{4-7'}^0$ в основній фермі та лінії впливу зусилля $N_{5'-7'}^III$ у шпренгелі представлена на [рис.23.7.к](#). Це й буде остаточна лінія впливу в стержні III категорії $5'-6'$.

Стержні IV категорії

До таких стержнів відносять стійки основної ферми, в яку введено двоярусні шпренгелі. Наприклад, стержень $7'-7$ ([рис.23.7.а](#)).

Утворення ліній впливу зусилля в таких стержнях можна здійснити за два етапа:

1. Побудувати лінію впливу лише для основної ферми, показавши на ній дві передатні прямі (зрізки) – для руху одиничної сили по верхньому і по нижньому поясах. За межами розрізаних панелей лінія впливу має вже остаточний вигляд.

2. У межах розрізаних панелей необхідно передатні прямі, проведені для основної ферми, перетворити на зрізки для шпренгельної ферми. З цією метою одиничну силу у межах розрізаних панелей послідовно встановлюють у вузли вантажного поясу шпренгельної ферми і аналізують, на який пояс ферми передається навантаження через відповідний шпренгель. Якщо навантаження передається на верхній пояс, то вузлову точку проєциують на передатну пряму для "руху по верху", якщо на нижній – то на передатну пряму для "руху по низу". Точки, які отримано на передатних прямих, з'єднують прямими відрізками.

Отже, побудуємо лінію впливу зусилля $N_{7-7'}$.

Починаємо з лінії впливу для основної ферми. Переріз V-V поділяє ферму на два диска (рис.23.7.6). З умов рівноваги визначаємо зусилля $N_{7-7'}$ для двох випадків розташування одиничної сили: сила на лівому і сила на правому диску.

Сила $P=1$ на лівому диску	Сила $P=1$ на правому диску
$\sum F_y = 0 \Rightarrow N_{7-7'} + V_B = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow N_{7-7'} = -V_B.$	$\sum F_y = 0 \Rightarrow -N_{7-7'} + V_A = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow N_{7-7'} = V_A.$

Ліва і права прямі заштриховано на [рис.23.7.л](#) між вузлами 1-4 та 10-13 відповідно. Передатна пряма для руху "по низу" з'єднує ліву й праву прямі на ділянці 4-7, а для руху "по верху" – на ділянці 7'-10' ([рис.23.7.б](#)).

Далі визначаємо передатні прямі для шпренгельної ферми в межах розрізаних панелей, тобто між вузлом 4 нижнього і вузлом 10' верхнього поясу. Очевидно, розташована у вузлах 5, 6, 8 та 9 сила через відповідні шпренгелі передається на вузли верхнього поясу. Тому ці вузли проєцируємо на передатну пряму для руху "по верху". Нарешті, якщо сила перебуває у вузлі 7, який розташовано на нижньому поясі основної ферми, то шпренгелі не працюють, і тому вузол 7 необхідно спроециувати на передатну пряму для руху "по низу".

Проводимо відрізки, які з'єднують заштриховані ділянки лівої і правої прямих з отриманими точками на зрізках, і маємо остаточну лінію впливу $N_{7-7'}$ ([рис.23.7.л](#)).