

Виберіть форму подання навчального матеріалу

✓ [Докладне подання](#)

[Скорочене подання](#)

### **Зміст глави**

[11.11. Розрахунок статично невизначуваних ферм](#)

[11.12. Приклад розрахунку статично невизначуваної ферми](#)

[11.13. Розрахунок нерозрізних балок](#)

[11.13.1. Рівняння трьох моментів](#)

[11.13.2. Метод моментних фокусів](#)

[11.13.3. Побудова огинаючих епюр](#)

[11.14. Особливості розрахунку статично невизначуваних комбінованих систем](#)

[Запитання для самоперевірки](#)

### 11.11. Розрахунок статично невизначуваних ферм

Розрахунок статично невизначуваних ферм за методом сил має деякі особливості, які пов'язані з особливостями їхньої структури, навантаження і напружено-деформованого стану (див. [главу 8](#)). Так, ступінь статичної невизначуваності ферм можна обчислювати як за формулою (11.1), так і за іншою формулою, призначеною лише для ферм:

$$n = C + C_{on} - 2B, \quad (11.19)$$

де  $C$  – кількість стержнів ферми,  $C_{on}$  – кількість опорних стержнів,  $B$  – кількість вузлів ферми. Для ферми, що зображена на [рис.11.20.а](#),

$$n = 22 + 4 - 2 \cdot 12 = 2.$$

Якщо ж скористатися формулою (11.1), то можна записати:

$$n = 3k - u = 3 \cdot 12 - 34 = 2.$$

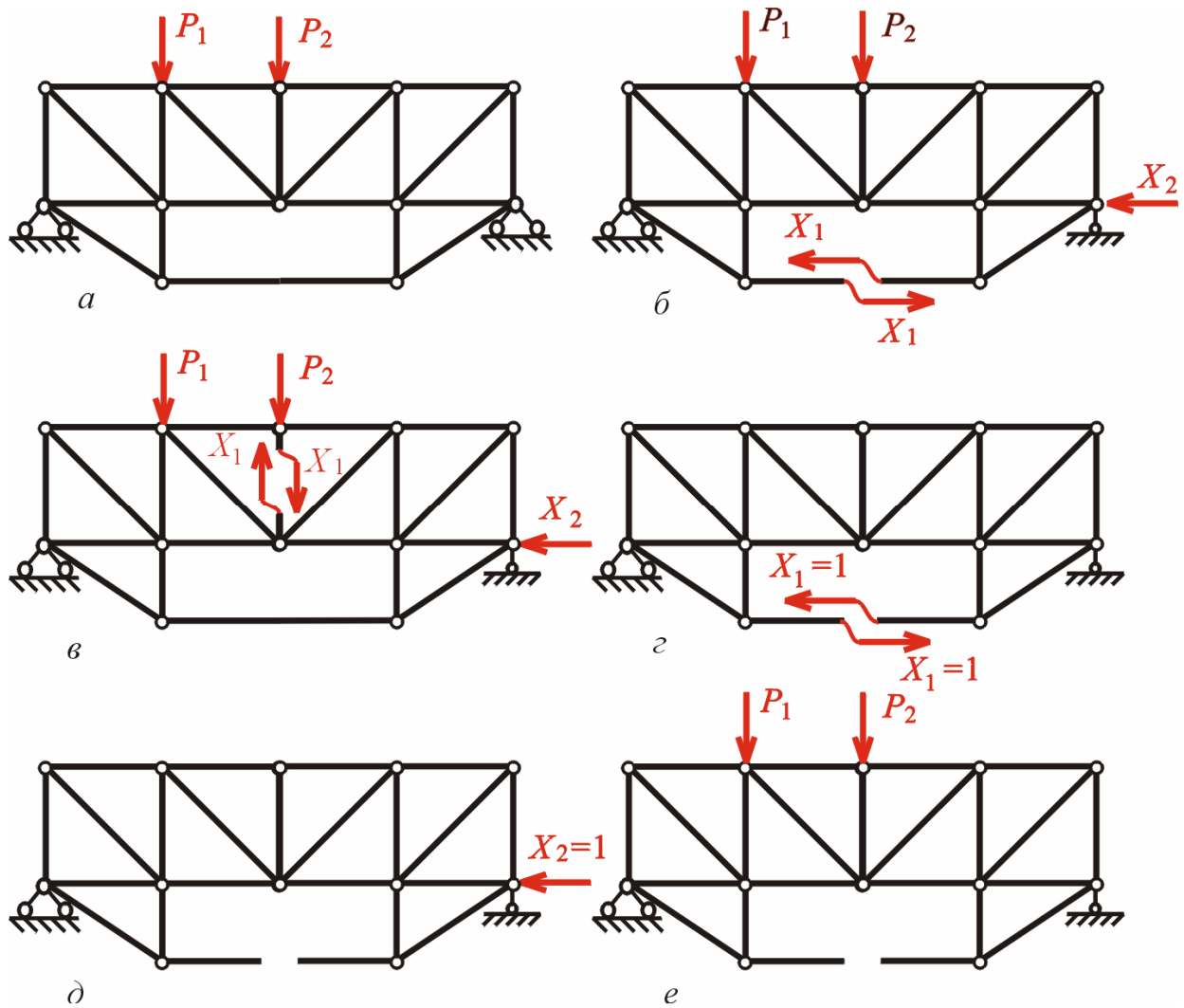


Рис.11.20

Маємо той самий результат, але він здобутий дещо складнішими розрахунками, що зумовлюється необхідністю обчислення кількості простих шарнірів.

Відкидання “зайвих” в’язей під час призначення основної системи здійснюється або розрізанням стержнів ферми, або відкиданням опорних стержнів. У першому випадку до місця розрізу прикладаються поздовжні сили, величина яких невідома, у другому – невідомих реакцій відкинутих опорної в’язей (рис.11.20,б). Проте в усіх випадках основна система повинна бути геометрично незмінюваною. З цих причин схема, що зображена на рис.11.20,в, не може бути обрана для розрахунку, оскільки є миттєво змінюваною (вузол D прикріплюється до ферми двома стержнями CD і DE, які розташовані вздовж однієї прямої).

Система канонічних рівнянь має звичайний вигляд і для ферми, що розглядається, може бути записана в такий спосіб:

$$\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1p} = 0;$$

$$\delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2p} = 0.$$

Для обчислення коефіцієнтів системи рівнянь необхідно утворити допоміжні і вантажний стан (рис.11.20,г,е). Оскільки в стержнях ферми виникають лише поздовжні сили, формула Мора набуде такого вигляду:

$$\delta_{ij} = \frac{1}{EA_0} \sum_{k=1}^C \bar{N}_i \bar{N}_j l'_k; \quad \Delta_{ip} = \frac{1}{EA_0} \sum_{k=1}^C \bar{N}_i N_p l'_k. \quad (11.24)$$

У цих формулах  $\bar{N}_i, \bar{N}_j, N_p$  – поздовжні зусилля в стержнях основної системи відповідно від дії одиничних невідомих  $X_i = 1, X_j = 1$  і від зовнішнього навантаження,  $EA_0$  – довільна константа, яку доцільно покласти такою, що дорівнює жорсткості на поздовжні деформації якогось стержня ферми,  $l'$  – зведені довжини стержнів ферми, які обчислюються за формулою

$$l'_k = \frac{EA_0}{EA_k} l_k, \quad (11.25)$$

де  $l_k, EA_k$  – довжина і згина жорсткість стержня  $k$  ферми.

Дійсні зусилля можуть обчислюватись за способом накладання:

$$N_\partial = \bar{N}_1 X_1 + \bar{N}_2 X_2 + \dots + \bar{N}_n X_n + N_p. \quad (11.26)$$

## 11.12. Приклад розрахунку статично невизначуваної ферми

Виконаємо розрахунок статично невизначуваної ферми, представленій на рис.11.21,а.

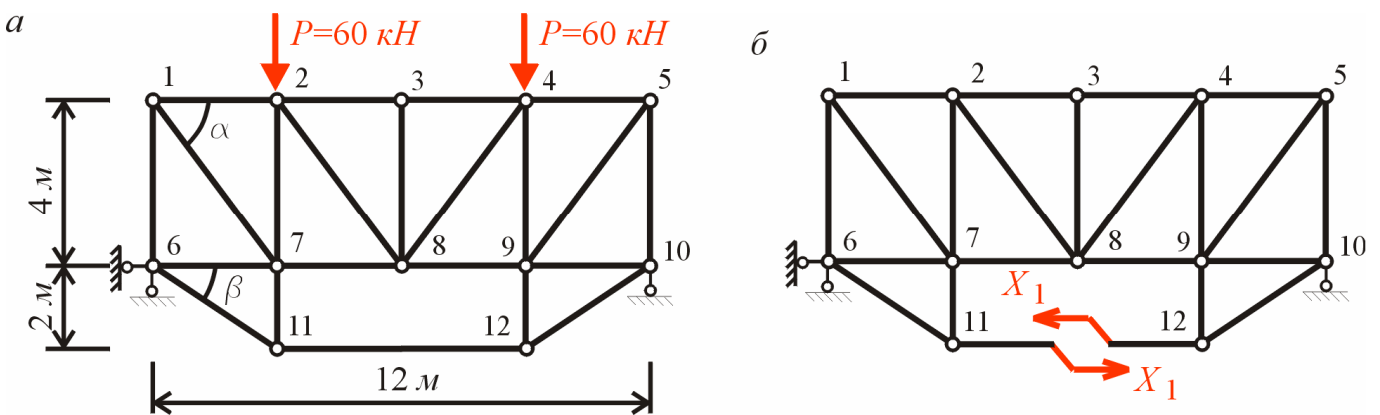


Рис.11.21

Стержні ферми мають такі жорсткості:

- нижній пояс і підвіска –  $EA$ ;
- верхній пояс і стійки –  $2EA$ ;
- розкоси –  $1,5EA$ .

### 11.12.1. Ступінь статичної невизначуваності

Ступінь статичної невизначуваності обчислюємо за формулою (11.19):

$$n = 22 + 3 - 2 \cdot 12 = 1.$$

Оскільки кількість опорних в'язей дорівнює їх мінімально можливій кількості, очевидно, що “зайвим” можна вважати один зі стержнів решітки.

### 11.12.2. Вибір основної системи

Основну систему утворимо шляхом розрізу горизонтального стержня підвіски (рис.11.21.б). Легко впевнитись, що перетворена в такий спосіб ферма утворена способом “діад” і, отже, є геометрично незмінюваною. За основне невідоме  $X_1$  береться зусилля, яке діє в горизонтальному стержні підвіски.

### 11.12.3. Допоміжний стан основної системи

Визначення опорних реакцій (рис.11.22,а)

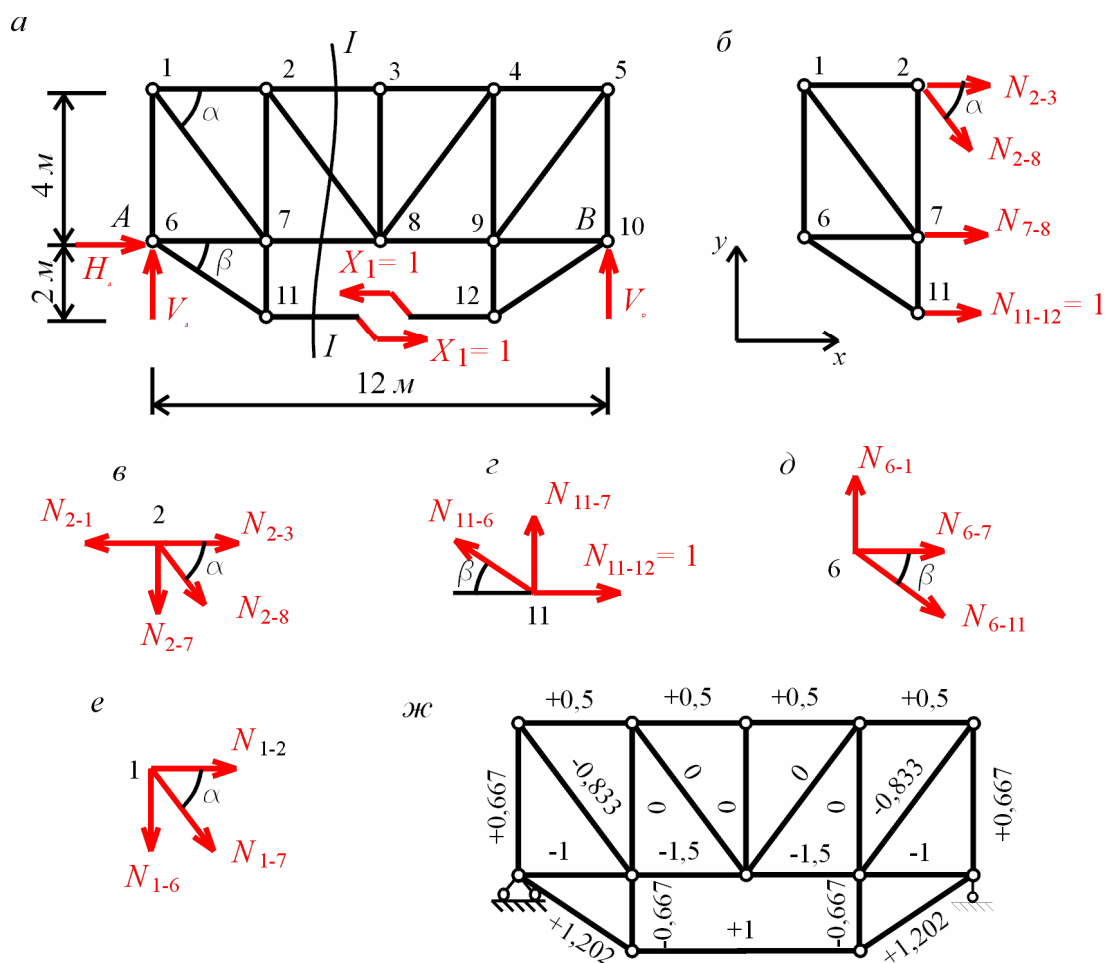


Рис.11.22

$$\sum M_B = 0 \Rightarrow V_A \cdot 12 - 1 \cdot 2 + 1 \cdot 2 = 0 \Rightarrow V_A = 0;$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow -V_B \cdot 12 - 1 \cdot 2 + 1 \cdot 2 = 0 \Rightarrow V_B = 0;$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow H_A - 1 + 1 = 0 \Rightarrow H_A = 0.$$

Тригонометричні функції кутів нахилу стержнів визначимо по геометричній схемі ферми:

$$\sin\alpha = \frac{l_{2-7}}{l_{1-7}} = \frac{4}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 0,8000; \quad \cos\alpha = \frac{l_{1-2}}{l_{1-7}} = \frac{4}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 0,6000.$$

$$\sin\beta = \frac{l_{7-11}}{l_{6-11}} = \frac{2}{\sqrt{3^2 + 2^2}} = 0,5547; \quad \cos\beta = \frac{l_{6-7}}{l_{6-11}} = \frac{3}{\sqrt{3^2 + 2^2}} = 0,8320.$$

### Внутрішні зусилля

На підставі ознак нульових стержнів доходимо висновку, що стержень 3-8 є нульовим:

$$N_{3-8} = 0.$$

Виконавши розріз *I-I* розглядаємо рівновагу лівої половини ферма (рис.11.22,б).

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow -N_{2-8}\sin\alpha = 0 \Rightarrow N_{2-8} = 0;$$

$$\sum M_7 = 0 \Rightarrow N_{2-3} \cdot 4 - 1 \cdot 2 = 0 \Rightarrow N_{2-3} = +0,5;$$

$$\sum M_2 = 0 \Rightarrow -N_{7-8} \cdot 4 - 1 \cdot 6 = 0 \Rightarrow N_{7-8} = -1,5.$$

Розглядаємо рівновагу вузлів.

Вузол 2 (рис.11.22,в):

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow N_{2-3} - N_{2-1} + N_{2-8}\cos\alpha = 0 \Rightarrow N_{2-1} = 0,5;$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow -N_{2-7} - N_{2-8}\sin\alpha = 0 \Rightarrow N_{2-7} = 0.$$

Вузол 11 (рис.11.22,г):

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow -N_{11-6}\cos\beta + N_{11-12} = 0 \Rightarrow N_{11-6} = \frac{1}{0,8320} = 1,202;$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow N_{11-7} + N_{11-6}\sin\beta = 0 \Rightarrow N_{11-7} = -N_{11-6} \cdot 0,5547 = -0,667.$$

Вузол 6 (рис.11.22,д):

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow N_{6-7} + N_{6-11}\cos\beta = 0 \Rightarrow N_{6-7} = -N_{6-11} \cdot 0,8320 = -1,000;$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow N_{6-1} - N_{6-11}\sin\beta = 0 \Rightarrow N_{6-1} = N_{6-11} \cdot 0,667 = 0,667.$$

Вузол 1 (рис.11.22,е):

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow -N_{1-7} \sin \alpha - N_{1-6} = 0 \Rightarrow N_{1-7} = -\frac{N_{1-6}}{0,8000} = -0,833;$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow N_{1-2} + N_{1-7} \cos \alpha = 0 \Rightarrow N_{1-2} = -N_{1-7} 0,6000 = 0,5.$$

Результати розрахунку (зусилля допоміжного стану  $\bar{N}_1$ ) наведено на рис.11.22,ж.

**11.12.4. Розрахунок основної системи у вантажному стані**

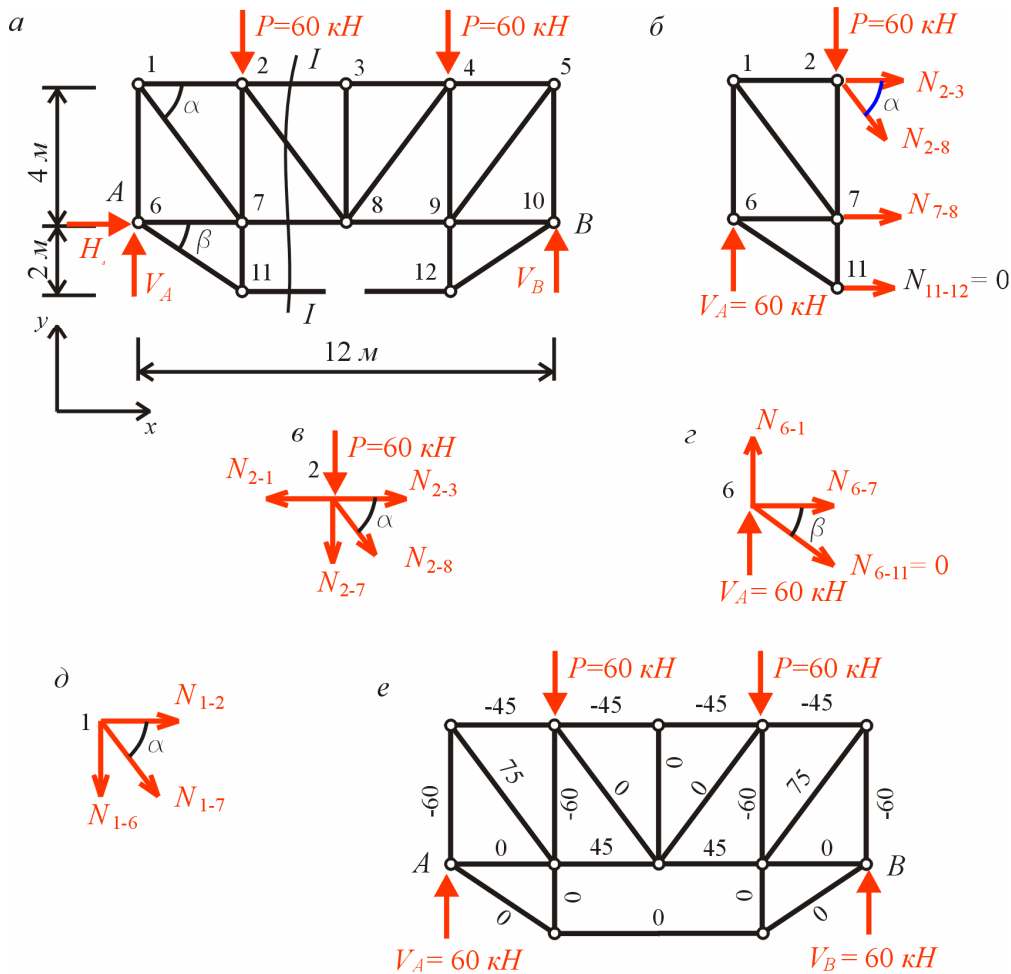


Рис.11.23

**Визначення опорних реакцій**

$$\sum M_B = 0 \Rightarrow V_A \cdot 12 - 60 \cdot 9 - 60 \cdot 3 = 0 \Rightarrow V_A = 60 \text{ кН};$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow -V_B \cdot 12 + 60 \cdot 9 + 60 \cdot 3 = 0 \Rightarrow V_B = 60 \text{ кН};$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow H_A = 0.$$

**Внутрішні зусилля**

Шість стержнів основної системи є завідомо нульовими:

$$N_{11-12} = N_{7-11} = N_{6-11} = N_{9-12} = N_{10-12} = N_{3-8} = 0.$$

Для визначення зусиль в інших стержнях скористаємось методами наскрізних перерізів та вирізання вузлів.

Переріз  $I-I$  (рис.11.23,б).

$$\begin{aligned}\sum F_y = 0 &\Rightarrow -N_{2-8}\sin\alpha + 60 - 60 = 0 \Rightarrow N_{2-8} = 0; \\ \sum M_7 = 0 &\Rightarrow N_{2-3} \cdot 4 + 60 \cdot 3 = 0 \Rightarrow N_{2-3} = -45 \text{ кН}; \\ \sum M_2 = 0 &\Rightarrow -N_{7-8} \cdot 4 + 60 \cdot 4 = 0 \Rightarrow N_{7-8} = 45 \text{ кН}.\end{aligned}$$

Вузол 2 (рис.11.23,в):

$$\begin{aligned}\sum F_x = 0 &\Rightarrow -N_{2-1} + N_{2-3} + N_{2-8}\cos\alpha = 0 \Rightarrow N_{2-1} = -45 \text{ кН}; \\ \sum F_y = 0 &\Rightarrow -N_{2-7} - N_{2-8}\sin\alpha - 60 = 0 \Rightarrow N_{2-7} = -60 \text{ кН}.\end{aligned}$$

Вузол 6 (рис.11.23,г):

$$\begin{aligned}\sum F_x = 0 &\Rightarrow N_{6-7} + N_{6-11}\cos\beta = 0 \Rightarrow N_{6-7} = 0; \\ \sum F_y = 0 &\Rightarrow N_{6-1} - N_{6-11}\sin\beta + 60 = 0 \Rightarrow N_{6-1} = -60 \text{ кН}.\end{aligned}$$

Вузол 1 (рис.11.23,д):

$$\begin{aligned}\sum F_y = 0 &\Rightarrow -N_{1-7}\sin\alpha - N_{1-6} = 0 \Rightarrow N_{1-7} = -\frac{N_{1-6}}{0,8000} = 75 \text{ кН}; \\ \sum F_x = 0 &\Rightarrow N_{1-2} + N_{1-7}\cos\alpha = 0 \Rightarrow N_{1-2} = -N_{1-7} \cdot 0,6000 = -45 \text{ кН}.\end{aligned}$$

Унаслідок симетрії зусилля для правої половини основної системи є дзеркальним відбиттям зусиль лівої половини.

### Система канонічних рівнянь методу сил

Унаслідок того, що задана ферма один раз статично невизначувана, система канонічних рівнянь методу сил складається з одного рівняння

$$\delta_{11} X_1 + \Delta_{1P} = 0,$$

яке виражає рівність нулю взаємного наближення точок прикладення основних невідомих.

### Обчислення коефіцієнтів системи канонічних рівнянь

Практичний розрахунок рами складається з однотипних обчислень для всіх стержнів ферми, тому розрахунок зручно виконувати в табличній формі (див. [табл. 11.1](#)).



Перший стовпець містить перелік всіх стержнів ферми. Стовпці 2 і 3 – довжини стержнів і жорсткості – визначаються по схемі ферми. Тут вважаємо, що  $EA_0 = EA$ . Зведені довжини стержнів, обчислені за формулою (11.25), записано в стовпець 4.

Зусилля в допоміжному і вантажному станах занесено відповідно в стовпці 5 і 6.

Коефіцієнти системи рівнянь визначаються за формулами (11.24). Обчислення записані в стовпці 7 і 8. Суми чисел в цих стовпцях дорівнюють відповідно коефіцієнтам  $\delta_{11}$  та  $\Delta_{1P}$ . Отже

$$\delta_{11} = \frac{45,602}{EA_0}, \quad \Delta_{1P} = -\frac{1116,580}{EA_0}.$$

Таблиця 11.1

Ст.	$l$	$\frac{EA}{EA_0}$	$l'$	$\bar{N}_1$	$N_P$	$\bar{N}_1\bar{N}_1l'$	$N_P\bar{N}_1l'$	$\bar{N}_1X_1$	$N_\delta$	$N_\delta\bar{N}_1l'$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1-2	3	2	1,5	0,5	-45	0,375	-33,750	12,243	-32,757	-24,568
2-3	3	2	1,5	0,5	-45	0,375	-33,750	12,243	-32,757	-24,568
3-4	3	2	1,5	0,5	-45	0,375	-33,750	12,243	-32,757	-24,568
4-5	3	2	1,5	0,5	-45	0,375	-33,750	12,243	-32,757	-24,568
6-7	3	1	3	-1	0	3,000	0	-24,485	-24,485	73,456
7-8	3	1	3	-1,5	45	6,750	-202,500	-36,728	8,272	-37,224
8-9	3	1	3	-1,5	45	6,750	-202,500	-36,728	8,272	-37,224
9-10	3	1	3	-1	0	3,000	0	-24,485	-24,485	73,456
1-6	4	2	2	0,667	-60	0,890	-80,040	16,332	-43,668	-58,254
2-7	4	2	2	0	-60	0	0	0	-60	0
3-8	4	2	2	0	0	0	0	0	0	0
4-9	4	2	2	0	-60	0	0	0	-60	0
5-10	4	2	2	0,667	-60	0,890	-80,040	16,332	-43,668	-58,254
1-7	5	1,5	3,333	-0,833	75	2,313	-208,250	-20,396	54,604	-151,616
2-8	5	1,5	3,333	0	0	0	0	0	0	0
4-8	5	1,5	3,333	0	0	0	0	0	0	0
5-9	5	1,5	3,333	-0,833	75	2,313	-208,250	-20,396	54,604	-151,616
7-11	2	1	2	-0,667	0	0,890	0	-16,332	-16,332	21,786
9-12	2	1	2	-0,667	0	0,890	0	-16,332	-16,332	21,786
6-11	3,605	1	3,605	1,202	0	5,209	0	29,431	29,431	127,532
10-12	3,605	1	3,605	1,202	0	5,209	0	29,431	29,431	127,532
11-12	6	1	6	1	0	6,000	0	24,485	24,485	146,912
						45,602	-1116,580			0,000

### Розв'язання канонічних рівнянь

Підставляємо коефіцієнти до канонічного рівняння:

$$\frac{45,602}{EA_0} X_1 - \frac{1116,580}{EA_0} = 0.$$

Звідси

$$X_1 = 24,485.$$

### Обчислення дійсних зусиль в стержнях ферми

Дійсні зусилля в стержнях статично невизначуваної ферми обчислимо, базуючись на принципі незалежності дій сил, як суми зусиль в основній системі від основного невідомого і від зовнішнього навантаження, тобто за формулою

$$N_{\partial} = \bar{N}_1 X_1 + N_P.$$

Добутки  $\bar{N}_1 X_1$  підраховуються в стовпці 9, а дійсні зусилля – в стовпці 10.

### Кінематична перевірка результатів розрахунку

Результати розрахунку перевіряються перемноженням дійсних зусиль в стержнях ферми  $N_{\partial}$  на одиничні зусилля  $\bar{N}_1$ , тобто

$$\Delta_{1\partial} = \frac{1}{EA_0} \sum \bar{N}_1 N_{\partial} l'.$$

Перемноження для кожного стержня записуються в стовпці 11. Сума чисел стовпця дорівнює нулю, тобто

$$\Delta_{1\partial} = \frac{1}{EA_0} \sum \bar{N}_1 N_{\partial} l' = 0.$$

Отже, розрахунок виконано правильно.

## 11.13. Розрахунок нерозрізних балок

Суцільну статично невизначувану балку, яка не переривається шарнірами, називають **нерозрізною**.

З погляду кінематичного аналізу всі опорні в'язі, за винятком трьох, є “зайвими”. Отже ступінь статичної невизначуваності балки може бути обчислений за формулою

$$n = C - 3, \quad (11.27)$$

де  $C$  – кількість опорних в'язей (для шарнірно-рухомої опори  $C=1$ , для шарнірно-нерухомої  $C=2$ , для затиснення  $C=3$ ). Так, для балки, що показана на рис.11.24,а, ступінь статичної невизначуваності  $n=7 - 3 = 4$ .

Ступінь статичної невизначуваності балки може бути також обчислений за формулою  $n=3k-u$ .

### 11.13.1. Рівняння трьох моментів

Основна система для розрахунку нерозрізної балки за методом сил може бути утворена відкиданням будь-яких в'язей, що можуть розглядатись як “зайві”. Так, можна відкинути всі проміжні шарнірно-рухомі опори. Тоді основна система становитиме статично визначувану і геометрично незмінювану балку на двох опорах, до якої разом із зовнішніми навантаженнями прикладені реакції відкинутих опор  $X_1$ ,  $X_2$ ,  $X_3$  і  $X_4$  як сили невідомої величини. Хоч така основна система формально і є правильною, разом із тим вона вкрай нераціональна.

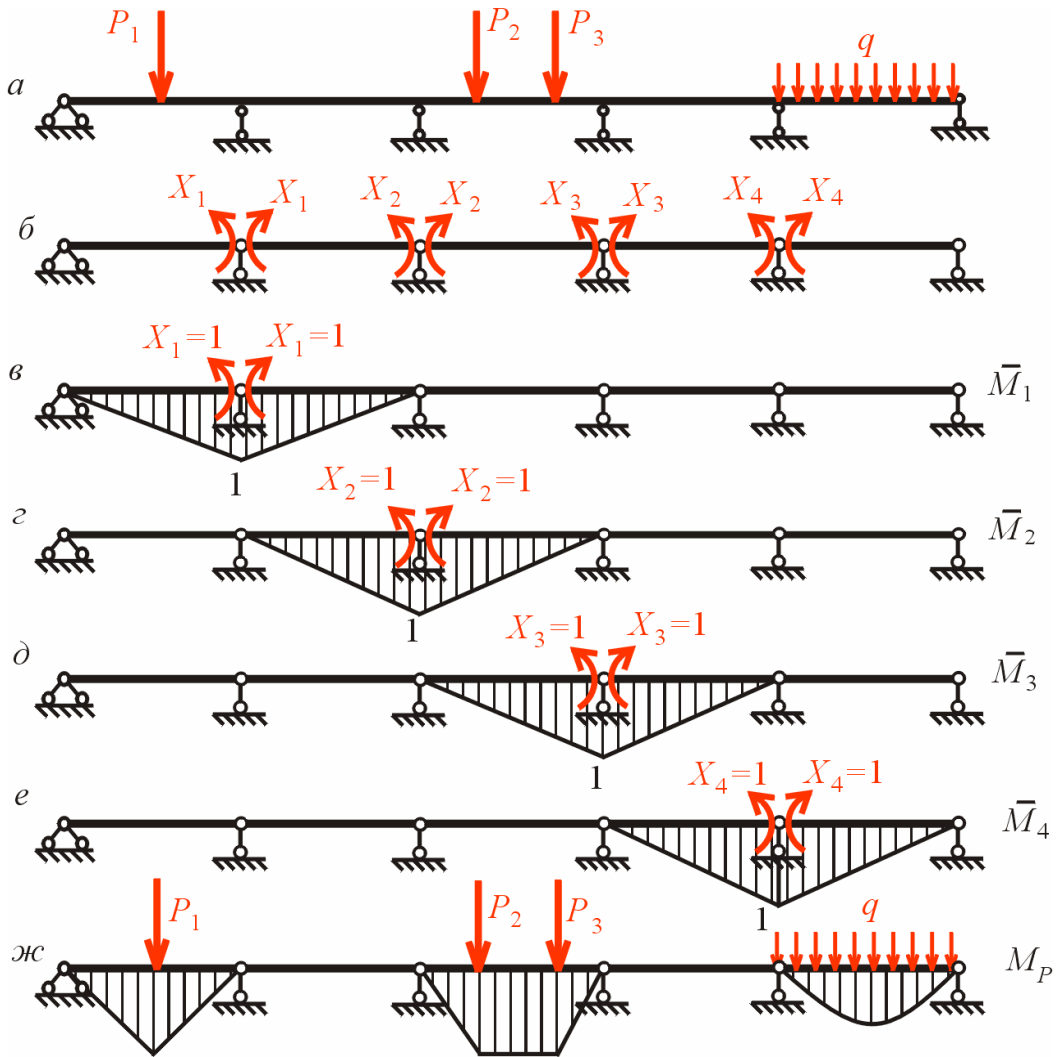


Рис.11.24

Для розрахунку нерозрізних балок слід використовувати запропоновану Б.П.Клапейроном стандартну основну систему, що утворюється постановкою шарнірів над опорами (рис.11.24,б). Система являє собою сукупність окремих однопрогонових балок, які деформуються незалежно одна від одної. Тому дія зовнішнього навантаження з однієї однопрогової балки на іншу не передається. Основними невідомими в даному випадку є згинаючі моменти, що виникають у перерізах балки над її опорами, так звані **опорні моменти**.

Для нерозрізної балки, що розглядається, система канонічних рівнянь матиме такий вигляд:

$$\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{13}X_3 + \delta_{14}X_4 + \Delta_{1p} = 0;$$

$$\delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{23}X_3 + \delta_{24}X_4 + \Delta_{2p} = 0;$$

$$\delta_{31}X_1 + \delta_{32}X_2 + \delta_{33}X_3 + \delta_{34}X_4 + \Delta_{3p} = 0;$$

$$\delta_{41}X_1 + \delta_{42}X_2 + \delta_{43}X_3 + \delta_{44}X_4 + \Delta_{4p} = 0.$$

Одиничні і вантажна епюри згинальних моментів побудовані на рис.11.24,в,г,д,е,є.

На підставі того, що деякі епюри не мають спільних ділянок, можна записати

$$\delta_{13}=\delta_{14}=\delta_{24}=\delta_{31}=\delta_{41}=\delta_{42}=0.$$

Система канонічних рівнянь з урахуванням цього матиме такий вигляд:

$$\begin{aligned} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 &+ \Delta_{1p} = 0; \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{23}X_3 &+ \Delta_{2p} = 0; \\ \delta_{32}X_2 + \delta_{33}X_3 + \delta_{34}X_4 + \Delta_{3p} &= 0; \\ \delta_{43}X_3 + \delta_{44}X_4 + \Delta_{4p} &= 0. \end{aligned}$$

Як бачимо, в кожному рівнянні, крім першого та останнього, тільки три коефіцієнти при невідомих відмінні від нуля: головний і два сусідніх з ним. Тому довільне рівняння  $i$  матиме вигляд

$$\delta_{i,i-1}X_{i-1} + \delta_{i,i}X_i + \delta_{i,i+1}X_{i+1} + \Delta_{ip} = 0.$$

Розглянемо епюри, необхідні для обчислення коефіцієнтів цього рівняння. На рис.11.25 зображено фрагмент нерозрізної балки та епюри згинальних моментів від одиничних невідомих та від зовнішнього навантаження.

Обчислимо коефіцієнти рівняння за формулою Мора:

$$\delta_{i,i-1} = \sum \int_l \frac{\bar{M}_i \bar{M}_{i-1}}{EI} dx = \frac{1}{EI_i} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot l_i \cdot \frac{1}{3} = \frac{l_i}{6EI_i},$$

$$\delta_{i,i} = \sum \int_l \frac{\bar{M}_i \bar{M}_i}{EI} dx = \frac{1}{EI_i} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot l_i \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{EI_{i+1}} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot l_{i+1} \cdot \frac{2}{3} = \frac{l_i}{3EI_i} + \frac{l_{i+1}}{3EI_{i+1}},$$

$$\delta_{i,i+1} = \sum \int_l \frac{\bar{M}_i \bar{M}_{i+1}}{EI} dx = \frac{1}{EI_{i+1}} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot l_{i+1} \cdot \frac{1}{3} = \frac{l_{i+1}}{6EI_{i+1}},$$

$$\Delta_{ip} = \sum \int_l \frac{\bar{M}_i M_p}{EI} dx = \frac{1}{EI_i} \Omega_{p,i} y_i + \frac{1}{EI_{i+1}} \Omega_{p,i+1} y_{i+1}.$$

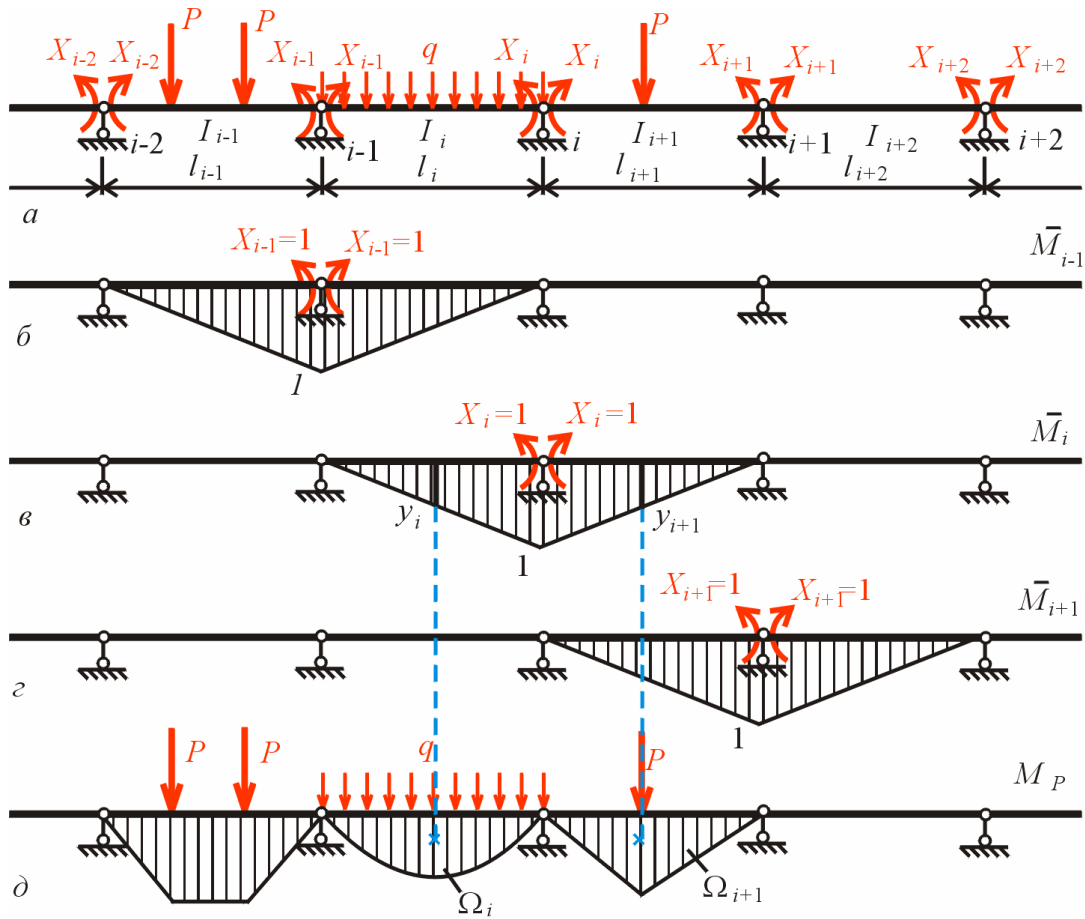


Рис.11.25

Після підстановки переміщень до рівняння та деяких перетворень одержимо остаточно:

$$l'_i X_{i-1} + 2(l'_i + l'_{i+1}) X_i + l'_{i+1} X_{i+1} = -6 \left( \frac{l'_i}{l_i} B_i^{\phi} + \frac{l'_{i+1}}{l_{i+1}} A_{i+1}^{\phi} \right). \quad (11.28)$$

Тут позначено:  $l'_i, l'_{i+1}$  – зведені довжини прогонів, які обчислюються за формулами:  $l'_i = \frac{EI_o}{EI_i} l_i$ ,

$l'_{i+1} = \frac{EI_o}{EI_{i+1}} l_{i+1}$ , де  $EI_o$  – жорсткість на згин одного з прогонів балки, яка обирається за основну;

$B_i^{\phi}, A_{i+1}^{\phi}$  – фіктивні опорні реакції на опорі  $i$  в прогонах  $l_i$  і  $l_{i+1}$  відповідно.

Для визначення фіктивних опорних реакцій необхідно побудувати епюри  $M_p$  від зовнішнього навантаження в цих прогонах, як в окремих однопрогонових балках. Ці епюри слід розглядати як деяке фіктивне навантаження, що зумовлює появу означених фіктивних реакцій. На рис.11.26 показано дві схеми фіктивного навантаження і фіктивних опорних реакцій розглянутої балки.

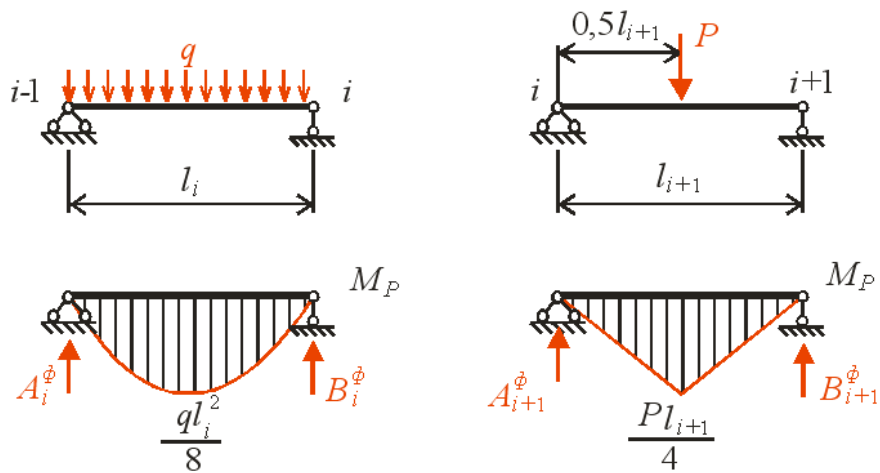


Рис.11.26

Значення фіктивних реакцій опор для деяких прогонових навантажень наведено в [Додатку 1](#). Записане рівняння слушне лише в тому випадку, якщо основна система одержана постановкою шарнірів над опорами і основні невідомі являють собою опорні моменти, тобто  $X_{i-1} \equiv M_{i-1}$ ,  $X_i \equiv M_i$ ,  $X_{i+1} \equiv M_{i+1}$ . Тому це рівняння часто записують так:

$$l'_i M_{i-1} + 2(l'_i + l'_{i+1}) M_i + l'_{i+1} M_{i+1} = -6 \left( \frac{l'_i}{l_i} B_i^{\phi} + \frac{l'_{i+1}}{l_{i+1}} A_{i+1}^{\phi} \right) \quad (11.29)$$

ї називають **рівнянням трьох моментів**. Цим рівнянням можна скористатися для формального складання системи канонічних рівнянь методу сил, якщо нерозрізна балка має стандартний вигляд, тобто має на кінцях шарнірні опори.

Щоб перейти до стандартної схеми потрібно:

- відкинути консолі, якщо вони є, а затиснення замінити на фіктивні прогони нульової довжини;
- пронумерувати опори зліва направо;
- пронумерувати прогони в такий спосіб, щоб їхні номери відповідали номерам правих опор прогонів.

Так, розрахункова схема нерозрізної балки (рис.11.27,а) замінена стандартною схемою (рис.11.27,б).

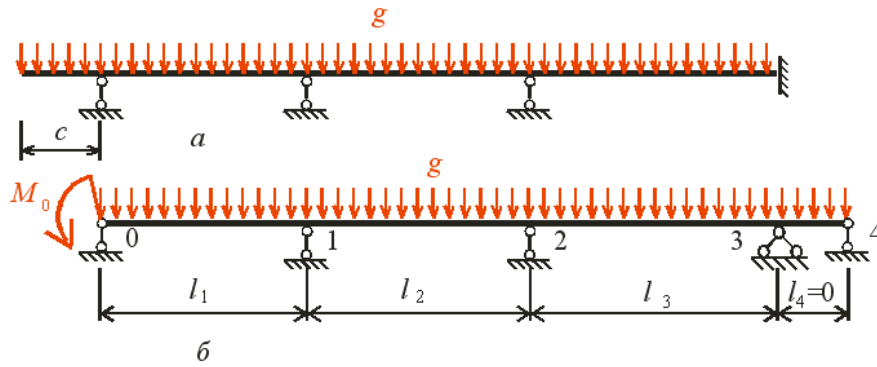


Рис.11.27

З викладеного випливає, що для складання системи канонічних рівнянь методу сил для нерозрізної балки не обов'язково будувати одиничні епюри в основній системі і обчислювати переміщення за формулою Мора. Цілком достатньо записати рівняння трьох моментів (11.28) або (11.29) для кожної проміжної опори стандартної схеми балки, надаючи індексу  $i$  почергового значення 1,2 тощо.

Розглянемо обчислення дійсних зусиль у довільному прогоні нерозрізної балки  $l_i$ . Скористаємось способом накладання:

$$M_{\partial} = \sum_{i=1}^n \bar{M}_i X_i + M_p.$$

Оскільки в довільному прогоні  $l_i$  лише дві одиничні епюри, що відмінні від нуля, запишемо

$$M_{\partial} = \bar{M}_{i-1} X_{i-1} + \bar{M}_i X_i + M_p.$$

Для будь-якого перерізу з координатою  $z$  (рис.11.28) можна записати, що

$$M_{\partial}^z = \frac{M_{i-1}}{l_i} (l_i - z) + \frac{M_i}{l_i} z + M_p^z. \quad (11.30)$$



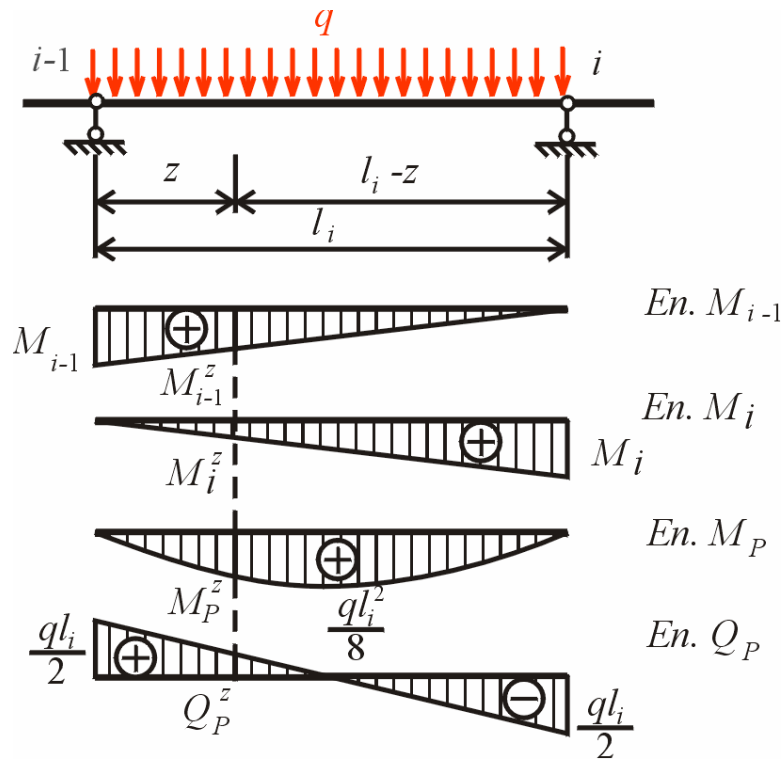


Рис.11.28

Продиференціювавши цей вираз, дістанемо формулу для обчислення поперечних сил у довільному перерізі будь-якого прогону нерозрізної балки:

$$Q_{\partial}^z = \frac{dM_{\partial}^z}{dz} = \frac{M_i - M_{i-1}}{l_i} + Q_P^z. \quad (11.31)$$

Опорні реакції можуть бути обчислені виходячи з рівнянь рівноваги опорних в'язей (рис.11.29):

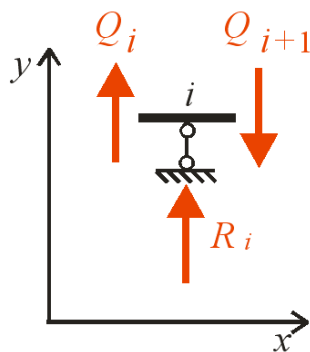


Рис.11.29

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow R_i = Q_{i+1} - Q_i, \quad (11.32)$$

де  $Q_{i+1}$  і  $Q_i$  – поперечні сили відповідно праворуч і ліворуч опори.

### 11.13.2. Метод моментних фокусів

Метод моментних фокусів безпосередньо впливає з розрахунку за допомогою рівнянь трьох моментів нерозрізних балок, у яких навантажено лише один прогін. Розглянемо таку балку (рис.11.30,а).

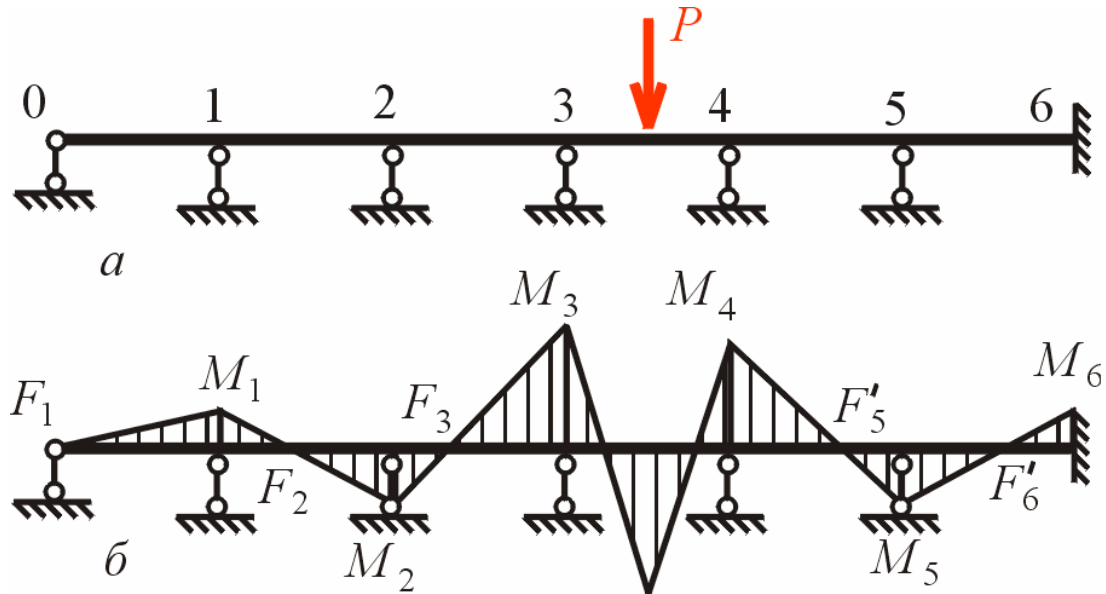


Рис.11.30

Епюра згинальних моментів, одержана завдяки розрахунку, побудована на рис.11.30,б. З аналізу цієї епюри можна дійти таких висновків:

- у міру віддалення від навантаженого прогону опорні моменти зменшуються за значенням;
- на кожному ненавантаженому прогоні епюра  $M$  прямолінійна і перетинає вісь балки, тобто має нульову точку. Цю точку називають **моментним фокусом** цього прогону.

Залежно від розташування навантаження щодо даного прогону розрізняють ліві і праві моментні фокуси. **Лівим фокусом** називають нульову точку епюри  $M$  у ненавантаженому прогоні, якщо він розташований ліворуч від навантаженого прогону (точки  $F_1, F_2, F_3$  на рис.11.30,б). Аналогічно визначаються праві фокуси (точки  $F'_5, F'_6$ ).

Кожному фокусу відповідає деяке додатне число, яке називається **фокусним співвідношенням**. Воно характеризує співвідношення опорних моментів на кінцях даного ненавантаженого прогону. Так, для фокуса  $F_1$  (рис.11.30,б) фокусне співвідношення  $k_1 = -M_1/M_0 = \infty$ , для фокусів  $F_2$  і  $F_3$  фокусне співвідношення  $k_2 = -M_2/M_1$  і  $k_3 = -M_3/M_2$ . І взагалі для довільного прогону  $l_i$  (рис.11.30,а) ліве фокусне співвідношення

$$k_i = -\frac{M_i}{M_{i-1}}. \quad (11.33)$$

Величина фокусного співвідношення визначає розташування фокуса в прогоні балки (рис.11.31).

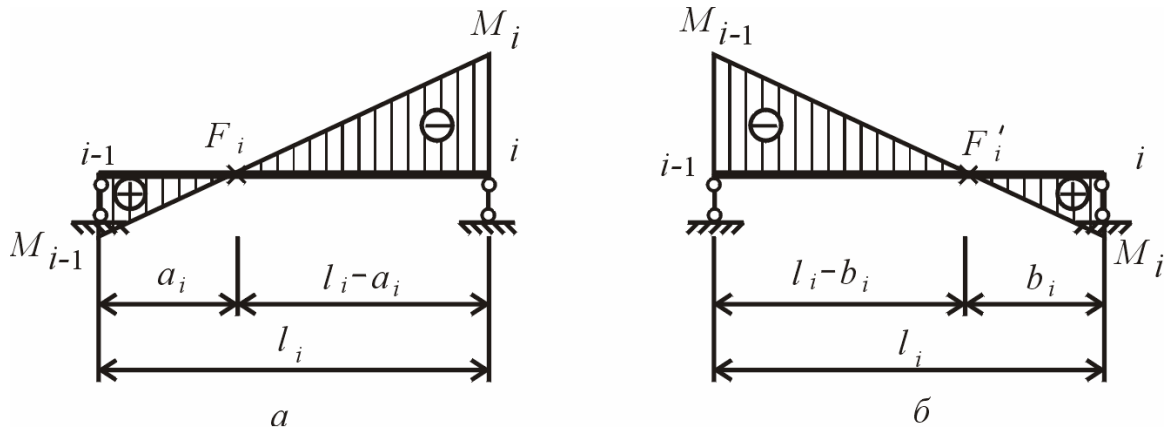


Рис.11.31

З геометричних міркувань

$$\frac{l_i - a_i}{a_i} = -\frac{M_i}{M_{i-1}} = k_i,$$

звідки відстань  $a_i$  виражається через фокусне співвідношення залежністю

$$a_i = \frac{l_i}{1 + k_i}. \quad (11.34)$$

Аналогічні залежності можна записати для правих фокусів. Так, для фокусів  $F'_5, F'_6$  фокусні співвідношення мають вигляд:  $k'_5 = -M_4/M_5$ ,  $k'_6 = -M_5/M_6$ . У правому фокусі  $F'_i$  довільного прогону  $l_i$  (рис.11.29,б) відповідне фокусне співвідношення виражається формулою

$$k'_i = -\frac{M_{i-1}}{M_i}, \quad (11.35)$$

а відстань правого фокуса до правої опори прогону – формулою

$$b_i = \frac{l_i}{1 + k'_i}. \quad (11.36)$$

Для визначення величин фокусних співвідношень розглянемо яку-небудь нерозрізну балку (рис.11.32).

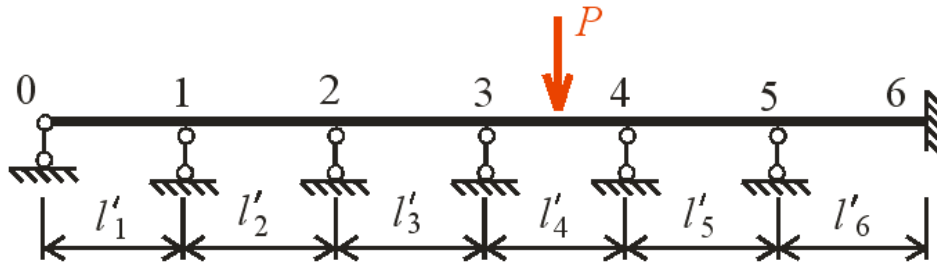


Рис.11.32

Запишемо рівняння трьох моментів (11.29) почергово для кожної проміжної опори. Для опори 1 ( $i=1$ )

$$l'_1 M_0 + 2(l'_1 + l'_2)M_1 + l'_2 M_2 = -6\left(\frac{l'_1}{l_1} B_1^\phi + \frac{l'_2}{l_2} A_2^\phi\right).$$

Оскільки в прогонах  $l_1$  і  $l_2$  відсутнє зовнішнє навантаження, то фіктивні опорні реакції  $B_1^\phi = A_2^\phi = 0$ . Також дорівнює нулю опорний момент на крайній опорі  $M_0 = 0$ . Зрештою маємо

$$2(l'_1 + l'_2)M_1 + l'_2 M_2 = 0,$$

звідки можемо записати

$$-\frac{M_2}{M_1} = \frac{2(l'_1 + l'_2)}{l'_2} = k_2 = \text{const}.$$

Для опори 2 ( $i=2$ )

$$l'_2 M_1 + 2(l'_2 + l'_3)M_2 + l'_3 M_3 = 0.$$

Тут враховано, що зовнішнє навантаження в прогонах  $l_2$  і  $l_3$  відсутнє. Після нескладних перетворень маємо:

$$-\frac{M_3}{M_2} = 2 + \frac{l'_2}{l'_3} \left(2 - \frac{1}{k_2}\right) = k_3 = \text{const}.$$

Продовжуючи такі самі записи для наступних опор, можемо зрештою записати ліве фокусне співвідношення для довільного прогону  $i$  у вигляді

$$k_i = 2 + \frac{l'_{i-1}}{l'_i} \left(2 - \frac{1}{k_{i-1}}\right). \quad (11.37)$$

Аналогічну формулу можна одержати і для правих фокусних співвідношень:

$$k'_i = 2 + \frac{l'_{i+1}}{l'_i} \left( 2 - \frac{1}{k'_{i+1}} \right). \tag{11.38}$$

Необхідно звернути увагу на те, що фокусні співвідношення залежать тільки від фізико-геометричних характеристик балки і не залежать від розташування, характеру і величини навантаження. Звідси випливає, що і точки моментних фокусів також не залежать від навантаження і являють собою деякі константи нерозрізної балки.

Формула (11.37) дає змогу обчислити фокусне співвідношення в прогоні  $l_i$ , якщо відоме фокусне співвідношення в попередньому прогоні  $l_{i-1}$ , а для обчислення правого фокусного співвідношення за формулою (11.38) потрібно мати співвідношення у прогоні  $l_{i+1}$ . Таким чином обчислення лівих фокусних співвідношень необхідно розпочинати з лівого, а правих – з правого кінця балки. Крім того, необхідно знати ліве фокусне співвідношення у крайньому лівому і праве фокусне співвідношення у крайньому правому прогоні, які залежать від виду крайньої опори. Ці величини зображені на рис.11.33.

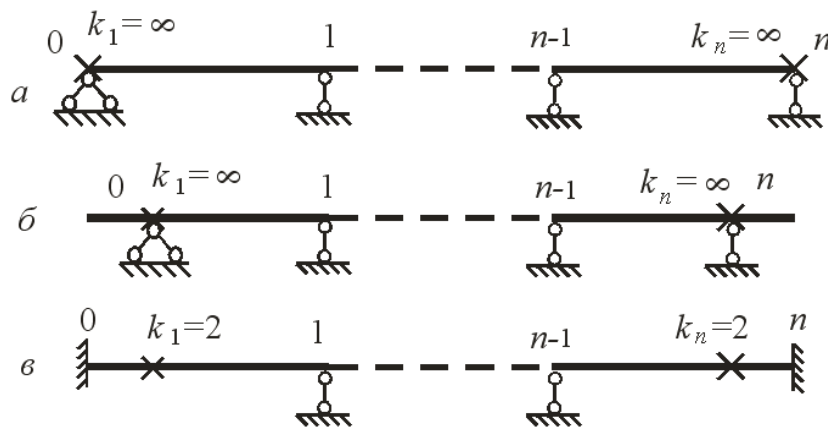


Рис.11.33

Для розрахунку нерозрізної балки за методом моментних фокусів необхідно також визначити опорні моменти по кінцях навантаженого прогону. З цією метою розглянемо фрагмент балки, який містить цей прогін (рис.11.34), разом із очікуваною епюрою згинальних моментів.

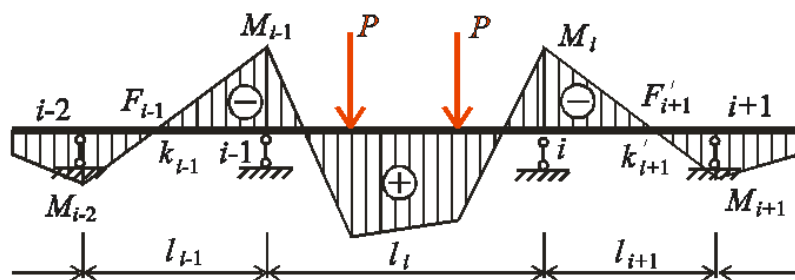


Рис.11.34

Запишемо рівняння трьох моментів для опор по кінцях навантаженого прогону.

Опора  $i-1$ :

$$l'_{i-1}M_{i-2} + 2(l'_{i-1} + l'_i)M_{i-1} + l'_iM_i = -6 \left( \frac{l'_i}{l_i} A_i^\phi \right)$$

Тут враховано, що внаслідок відсутності навантаження у прогоні  $l_{i-1}$  фіктивна реакція  $B_{i-1}^\phi = 0$ .

Опора  $i$ :

$$l'_iM_{i-1} + 2(l'_i + l'_{i+1})M_i + l'_{i+1}M_{i+1} = -6 \left( \frac{l'_{i+1}}{l_{i+1}} B_i^\phi \right).$$

Ще два рівняння дістанемо, виходячи з фокусних співвідношень у ненавантажених прогонах:

$$-\frac{M_{i-1}}{M_{i-2}} = k_{i-1}; \quad -\frac{M_i}{M_{i+1}} = k'_{i+1}.$$

Розв'язавши чотири рівняння відносно опорних моментів на кінцях навантаженого прогону маємо, зрештою маємо

$$M_{i-1} = -\frac{6}{l_i} \cdot \frac{A_i^\phi k'_i - B_i^\phi}{k_i k'_i - 1}; \quad (11.39)$$

$$M_i = -\frac{6}{l_i} \cdot \frac{B_i^\phi k_i - A_i^\phi}{k_i k'_i - 1}. \quad (11.40)$$

Отже, може бути запропонована така процедура розрахунку нерозрізної балки:

- обчислити фокусні співвідношення за формулами (11.37) і (11.38);
- визначити опорні моменти на лівому і правому кінцях навантаженого прогону за формулами (11.39) – (11.40);
- переміщуючись вліво відносно навантаженого прогону, обчислити опорні моменти на наступних опорах через ліві фокусні співвідношення ( $M_j = -M_{j+1} / k_{j+1}$ );
- переміщуючись відносно завантаженого прогону в правий бік, обчислити опорні моменти на наступних опорах через праві фокусні співвідношення ( $M_j = -M_{j-1} / k'_j$ );
- за формулами (11.30) – (11.32) визначити внутрішні зусилля в прогонах балки і опорні реакції.

### 11.13.3. Побудова огинаючих епюр

Навантаження, що діють на будівельну конструкцію, можуть бути постійними або тимчасовими. Як постійне навантаження розглядається власна вага балки. Вага обладнання і

вантажів, які розташовуються на балці і в процесі експлуатації споруди можуть змінювати свої величини та положення, розглядаються як тимчасові навантаження. Таким чином, внутрішні зусилля – це сума зусиль від дії постійного і тимчасових навантажень. Проте оскільки величини і розташування тимчасових навантажень можуть змінюватися, змінюватимуться і сумарні значення зусиль. Під час проектування важливо знати екстремальні величини зусиль, які можуть виникнути в системі за будь-яких можливих змін тимчасового навантаження. Ці розрахунки для будь-якого перерізу балки  $k$  можуть бути виконані за допомогою формул:

$$\begin{aligned} S_{max}^k &= S_{пост}^k + \sum (+S_{тим}^k); \\ S_{min}^k &= S_{пост}^k + \sum (-S_{тим}^k). \end{aligned} \quad (11.41)$$

У цих формулах  $S_{max}^k$ ,  $S_{min}^k$  – максимальні і мінімальні зусилля в перерізі  $k$  від дії постійного і тимчасових навантажень,  $S_{пост}^k$  – зусилля від дії постійного навантаження,  $(+S_{тим}^k)$ ,  $(-S_{тим}^k)$  – відповідно додатні і від’ємні величини зусиль при передбачуваних тимчасових навантаженнях.

У балках обчислюють максимальні і мінімальні згинальні моменти і поперечні сили:

$$\begin{aligned} M_{max}^k &= M_{пост}^k + \sum (+M_{тим}^k); \\ M_{min}^k &= M_{пост}^k + \sum (-M_{тим}^k); \\ Q_{max}^k &= Q_{пост}^k + \sum (+Q_{тим}^k); \\ Q_{min}^k &= Q_{пост}^k + \sum (-Q_{тим}^k). \end{aligned}$$

Епюри  $M_{max}$ ,  $M_{min}$ ,  $Q_{max}$ ,  $Q_{min}$ , що характеризують максимальні і мінімальні згинальні моменти і поперечні сили, які виникають у перерізах балки за будь-яких передбачуваних тимчасових навантажень, називають огинаючими епюрами внутрішніх зусиль.

#### 11.14. Особливості розрахунку статично невизначуваних комбінованих систем

Комбінованими системами називаються такі, що мають у своєму складі елементи, які піддані згину (балки, рами, арки), так і елементи, які мають лише поздовжні деформації (ферми, стержні із шарнірним приєднанням обох кінців).

Ступінь статичної невизначуваності комбінованих систем краще обчислювати за формулою (11.1), перераховуючи складні шарніри у прості.

Основна система обирається за загальними правилами, система канонічних рівнянь для визначення основних невідомих має стандартний вигляд.

Так, для балки, яка підсилена фермою (рис.11.35,а), ступінь статичної невизначуваності

$$n = 3k - u = 3 \cdot 4 - 11 = 1.$$

Основна система, що одержана шляхом розрізу стержня ферми, зображена на рис.11.35,б.

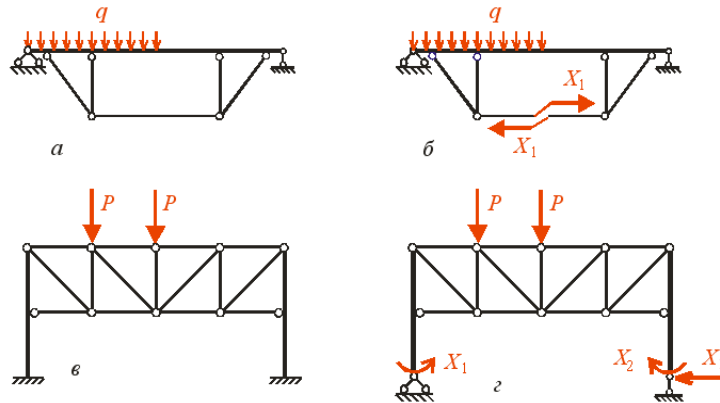


Рис.11.35

Система розв'язувальних рівнянь містить лише одне рівняння

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1P} = 0.$$

Стержнева система на рис.11.35,в є комбінацією двох консольних балок з фермою. Ступінь її статичної невизначуваності

$$n = 3k - u = 3 \cdot 9 - 24 = 3.$$

Основну систему, яка одержана відкиданням опорних в'язей, наведено на рис.11.35,г. Система розв'язувальних рівнянь має вигляд

$$\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{13}X_3 + \Delta_{1P} = 0;$$

$$\delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{23}X_3 + \Delta_{2P} = 0;$$

$$\delta_{31}X_1 + \delta_{32}X_2 + \delta_{33}X_3 + \Delta_{3P} = 0.$$

Основна відмінність розрахунку комбінованих систем полягає в обчисленні коефіцієнтів і вільних членів системи канонічних рівнянь, для чого використовується формула Мора у вигляді

$$\begin{aligned} \delta_{ij} &= \sum_l \int \frac{\bar{M}_i \bar{M}_j}{EI} dx + \sum \frac{\bar{N}_i \bar{N}_j}{EA} l; \\ \Delta_{ip} &= \sum_l \int \frac{\bar{M}_i M_p}{EI} dx + \sum \frac{\bar{N}_i N_p}{EA} l. \end{aligned} \quad (11.42)$$

У перші доданки цих формул входять згинальні моменти одиничних та вантажного станів основної системи, що виникають лише в елементах балок, рам, арок. В других доданках беруться



---

до уваги поздовжні сили лише в елементах, що зазнають тільки поздовжніх деформацій (ферми, прямолінійні стержні, приєднані шарнірами на обох кінцях). Впливом на значення коефіцієнта чи вільного члена поздовжніх сил в елементах, що зазнають згину, можна знехтувати. Дійсні зусилля можуть бути обчислені за формулами [\(11.20\)](#).