

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА імені О.М.БЕКЕТОВА

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ
з курсу
БУДІВЕЛЬНА МЕХАНІКА

*(для студентів 3 курсу денної форми навчання
галузі знань 19 – Архітектура та будівництво)*

Харків
ХНУМГ ім. О. М. Бекетова
2020

УДК 624.04(07)

Шпачук В. П. Конспект лекцій з курсу **Будівельна механіка:** для студентів 3 курсу денної форми навчання галузі знань 19 – Архітектура та будівництво / В. П. Шпачук, М. А. Засядько, О. І. Рубаненко, О. О. Чупринін; Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2020. – 177 с.

Автори: В. П. Шпачук, М. А. Засядько, О І. Рубаненко, О. О. Чупринін

Рецензент: : А. О. Гарбуз, доцент каф. теоретичної і будівельної механіки (Харківський національний університет міського госп-ва ім. Бекетова)

*Рекомендовано кафедрою теоретичної і будівельної механіки,
протокол засідання № 8 від ...19.03.2020 р*

© В. П. Шпачук, М. А. Засядько,

© О. І. Рубаненко, О. О. Чупринін, 2020

© ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2020

ЗМІСТ

Вступ.....	7
1 Розрахункова схема. Кінематичний аналіз споруд.....	10
1.1 Розрахункова схема споруди та її елементи.....	10
1.2 Кінематичний аналіз споруд.....	14
1.2.1 Кінематичний метод.....	15
1.2.2 Статичний метод.....	21
1.3 Припущення, що застосовуються в будівельній механіці.....	22
Запитання для самоконтролю.....	24
2. Статично визначувані плоскі ферми.....	26
2.1 Основні поняття. Класифікація ферм.....	26
2.2 Розрахунок ферм.....	29
2.2.1 Спосіб вирізання вузлів.....	29
2.2.2 Способи наскрізного перерізу. Розподіл зусиль у стержнях балочної ферми.....	31
2.2.3 Визначення зусиль у стержнях складних ферм. Спосіб замкнутого перерізу. Спосіб сумісних перерізів.....	35
2.3 Шпренгельні ферми.....	37
Запитання для самоконтролю.....	39
3. Статично визначувані розпирні системи.....	40
3.1 Основні визначення.....	40
3.2 Розрахунок тришарнірної арки на вертикальне навантаження	42
3.3 Розрахунок арки з затяжкою.....	45
3.4 Рациональна вісь тришарнірної арки.....	47
3.5 Особливості розрахунку розпирних систем.....	48
3.5.1 Тришарнірна арка при довільно спрямованому навантаженні.....	48
3.5.2 Тришарнірні рами.....	49
3.5.3 Тришарнірні аркові ферми.....	49
3.5.4 Комбіновані та висячі системи.....	51
Запитання для самоконтролю.....	53
4. Основні енергетичні теореми для пружних систем. Визначення переміщень методом Мора.....	55
4.1 Робота зовнішніх сил. Узагальнені сили та узагальнені переміщення.....	55
4.2 Робота внутрішніх сил.....	58
4.3 Потенціальна енергія деформації. Теореми Лагранжа та Кастіліано.....	59
4.4 Теореми про взаємність.....	62
4.5 Обчислення переміщень за методом Мора.....	64
4.6 Переміщення від осідання опор.....	69

4.7	Переміщення від температурних впливів.....	70
	Запитання для самоконтролю.....	71
5.	Статично невизначувані системи. Метод сил. Метод переміщень.....	72
5.1	Основи методу сил.....	73
5.1.1	Розрахунок статично невизначуваних рам методом сил...	73
5.1.2	Перевірка правильності обчислень. Переміщення у статично невизначуваних системах.....	81
	Запитання для самоконтролю.....	82
5.2	Метод переміщень.....	83
5.2.1.	Припущення. Кількість невідомих методу переміщень.....	83
5.2.2.	Суть методу.....	85
	Запитання для самоконтролю.....	91
6.	Розрахунок плоских стержневих систем методом скінченних елементів.....	92
6.1	Загальні поняття.....	92
6.2	Види скінченних елементів. Ступені вільності.....	92
6.3	Кінематичні характеристики вузлів рами.....	94
6.4	Статичні характеристики вузлів рами. Рівняння рівноваги.....	95
6.5	Матриця жорсткості стержня рами в локальній системі координат.....	98
6.6	Матриця жорсткості стержня рами у загальній системі координат.....	101
6.7	Матриця жорсткості елемента ферми.....	103
6.8	Матриця жорсткості всієї системи.....	104
6.9	Визначення зусиль у стержнях рами.....	104
6.10	Визначення зусиль у стержнях ферми.....	107
6.11	Приклад розрахунку ферми МСЕ.....	108
	Запитання для самоконтролю.....	113
7.	Загальні рівняння будівельної механіки	114
7.1	Статичні рівняння	114
7.2	Кінематичні рівняння	114
7.3	Фізичні рівняння	117
7.4	Постановка задач будівельної механіки.....	118
	Запитання для самоконтролю.....	118
8.	Основи динаміки стержневих систем.....	119
8.1	Основні поняття динаміки.....	119
8.1.1	Динамічні впливи.....	119
8.1.2	Сили, що супроводжують коливання.....	120
8.1.3	Методи динаміки споруд.....	121

8.1.4 Ступені вільності динамічної системи.....	121
Запитання для самоконтролю.....	122
8.2 Вільні коливання систем з одним ступенем вільності.....	123
8.2.1 Диференціальне рівняння руху.....	123
8.2.2 Вільні коливання без опору.....	124
8.2.3 Вільні коливання з опором.....	126
Запитання для самоконтролю.....	127
8.3 Вільні коливання систем зі скінченним числом ступенів вільності.....	128
Запитання для самоконтролю.....	131
8.4 Вимушені коливання систем з одним ступенем вільності.....	131
8.4.1 Рівняння руху. Частинні випадки збуджуючого навантаження.....	131
8.4.2 Вимушені коливання при дії періодичного збуджуючого навантаження.....	133
8.4.3 Зусилля від динамічних впливів. Динамічний коефіцієнт.....	135
Запитання для самоконтролю.....	136
8.5 Вимушені коливання систем зі скінченним числом ступенів вільності.....	137
8.5.1 Коливання при дії гармонічного навантаження.....	137
8.5.2 Загальний випадок дії збуджуючого навантаження.	
Розкладання за формами вільних коливань.....	139
Запитання для самоконтролю.....	141
8.6 Вільні поперечні коливання прямих стержнів (балок).....	141
8.6.1 Диференціальне рівняння руху елемента стержня і його розв'язання.....	141
8.6.2 Граничні умови.....	144
Запитання для самоконтролю.....	146
8.7 Кінематичне збудження коливань. Розрахунок на сейсмічні впливи.....	146
Запитання для самоконтролю.....	147
9. Стійкість стержневих систем.....	148
9.1 Основні поняття.....	148
9.1.1 Визначення.....	148
9.1.2 Ступені вільності.....	150
Запитання для самоконтролю.....	150

9.2 Методи розрахунку на стійкість.....	151
9.2.1 Динамічний метод.....	151
9.2.2 Енергетичний метод.....	151
9.2.3 Статичний метод.....	153
Запитання для самоконтролю.....	155
9.3 Стійкість прямого стиснутого стержня.....	156
9.3.1 Стійкість прямого стиснутого стержня з шарнірним закріпленням кінців. Формула Ейлера.....	156
9.3.2 Критична сила для прямого стиснутого стержня при різних закріпленнях кінців.....	158
9.3.3 Критичні напруження. Стійкість за межею пружності.....	159
9.3.4 Розрахунок стержнів на стиск з урахуванням стійкості.....	161
9.3.5 Метод початкових параметрів.....	161
9.3.6 Деформаційний розрахунок стержнів.....	163
Запитання для самоконтролю.....	164
9.4 Стійкість рам.....	165
9.4.1 Розрахунок рам на стійкість методом переміщень.....	165
9.4.2 Поняття про розрахунок рам на стійкість методом сил.....	168
Запитання для самоконтролю.....	169
9.5 Стійкість колових арок.....	169
9.5.1 Диференціальне рівняння згину кривого бруса.....	169
9.5.2 Стійкість двохарнірної арки.....	171
9.5.3 Стійкість безшарнірної арки.....	172
9.5.4 Стійкість тришарнірної арки.....	173
9.6 Приклади розрахунку на стійкість прямих стержнів	174
Запитання для самоконтролю.....	175
Список рекомендованої літератури.....	176

ВСТУП

Будівельною механікою називають науку, що вивчає методи розрахунку споруд на міцність, жорсткість, стійкість при різних впливах. У широкому значенні цього терміна будівельна механіка складається з кількох дисциплін: опору матеріалів; статички споруд або теорії споруд, що зазвичай і називається будівельною механікою; теорії пружності та теорії пластичності.

Ці науки, на відміну від будівельної механіки, розглядають роботу споруд або їх елементів, що являють собою, як правило, окремі тіла, при різних припущеннях.

Теорія пружності та теорія пластичності мають за мету визначення напружено-деформованого стану у кожній точці тіла. При цьому у теорії пружності розглядаються випадки, коли матеріал споруд знаходиться у пружній стадії, а в теорії пластичності – у пружно-пластичній стадії.

В опорі матеріалів розглядається робота окремих стержнів, для яких вводиться низка припущень, що дозволяють одержати залежність між деформаціями і напруженнями в усіх точках його довільного перерізу.

Будівельна механіка вивчає методи розрахунку споруд як систем, що складаються із пов'язаних між собою стержнів, а також пластин та оболонок на основі спрощуючих припущень.

Сфери застосування кожної з перерахованих наук важко розмежувати. Часто одну й ту саму задачу можна віднести до кількох дисциплін, а методи розв'язання та припущення однієї науки використовують в інших. Так, у будівельній механіці широко використовуються положення опору матеріалів і теорії пружності, а також методи інших наук: теоретичної механіки, математики, фізики.

Будівельна механіка як наука про міцність виокремилась із загальної механіки. Її витоки зазвичай пов'язують з Галілео Галілеєм (1564–1642 рр.). У його праці «Розмірковування та математичні докази, що стосуються двох нових галузей науки» (1638 р.) вперше була зроблена спроба систематизувати накопичені відомості про міцність споруд. Деякі положення, наведені Галілеєм, використовуються і в наш час, зокрема в теорії згину балок. Але правильної теорії розрахунків на міцність Галілей дати не міг через недостатній розвиток наук, експерименту. Зокрема, для отримання вірного розв'язку задачі згину балок знадобилось близько 200 років. Важливу роль у цьому зіграв виявлений Р. Гуком (1635–1703 рр.) закон пропорційності між навантаженням та переміщенням, а також роботи Я. Бернуллі (1654–1705 рр.) та ін.

Розвитку будівельної механіки у XVIII столітті сприяли досягнення в галузі механіки та математики, особливо роботи Л. Ейлера (1707-1783р.р.) і Ж. Л. Лагранжа (1736-1813р.р.). Будівельною механікою називають науку, що вивчає методи розрахунку споруд на міцність, жорсткість, стійкість при різних впливах. У широкому значенні цього терміна будівельна механіка складається з кількох дисциплін: опору матеріалів; статички споруд або теорії споруд, що зазвичай і називається будівельною механікою; теорії пружності та теорії пластичності.

Ці науки, на відміну від будівельної механіки, розглядають роботу споруд або їх елементів, що являють собою, як правило, окремі тіла, при різних припущеннях.

Теорія пружності та теорія пластичності мають за мету визначення напружено-деформованого стану у кожній точці тіла. При цьому у теорії пружності розглядаються випадки, коли матеріал споруд знаходиться у пружній стадії, а в теорії пластичності – у пружно-пластичній стадії.

В *опорі матеріалів* розглядається робота окремих стержнів, для яких вводиться низка припущень, що дозволяють одержати залежність між деформаціями і напруженнями в усіх точках його довільного перерізу.

Будівельна механіка вивчає методи розрахунку споруд як систем, що складаються із пов'язаних між собою стержнів, а також пластин та оболонки на основі спрощуючих припущень.

Сфери застосування кожної з перерахованих наук важко розмежувати. Часто одну й ту саму задачу можна віднести до кількох дисциплін, а методи розв'язання та припущення однієї науки використовують

Хоча до кінця XVIII століття вже були закладені теоретичні основи будівельної механіки, вона все ще залишалась відірваною від потреб практики. На той час з явилася необхідність у зведенні великих промислових споруд, будівництві залізниць. Інтенсифікація виробництва, впровадження в будівництві коштовного на той час металу викликала необхідність економії витрат матеріалу, а отже, розвитку практичних методів розрахунку споруд.

Рішучим поворотом до потреб практики стала реформа будівельної механіки, здійснена Л. Нав'є (1785-1836 рр.). Замість вивчення руйнування споруд він почав розглядати їх робочий стан. При цьому Нав'є виходив з того, що пропорційність між напруженнями та деформаціями зберігається до самого руйнування. Хоча в дійсності ця пропорційність спостерігається лише в межах дії закону Гука, введення припущення давало можливість визначити те навантаження, «яким можна завантажити елемент без того, щоб виникаючі у ньому зміни збільшувалися з часом».

Завдяки роботам Нав'є, а також Коші, Сен-Венана та ін. з будівельної механіки у цей період виокремилася та набула самостійного значення теорія пружності.

Якщо на початку XIX ст. велике значення мали графічні методи, то ускладнення конструкцій у кінці XIX – на початку XX століть, поява споруд з клепаного металу (мости, ємності, судна) зумовила розвиток аналітичних методів. Важливу роль у їх розробці зіграли такі вчені, як Г. Ламе (1795–1870 рр.), Сен-Венан (1797–1886 рр.), Д. Максвелл (1831–1879 рр.), О. Мор (1835–1918 рр.), Д. Релей (1842-1919 рр.), С. П. Тимошенко (1878–1972 рр.).

У другій половині XIX століття з'явився новий будівельний матеріал – залізобетон. Його використання у спорудах призвело у першій половині XX ст. до розробки системи придатних для широкого застосування методів розрахунку статично невизначуваних систем.

Розвиток у 20-30-х роках ХХ ст. теорії пластичності дозволив прослідкувати поведінку споруди на усіх етапах її експлуатації до самого руйнування. Дослідження, виконані у цьому напрямку, створили умови для розробки нового методу розрахунку – за граничними станами. Цей метод отримав розповсюдження, перш за все, у розрахунках залізобетонних конструкцій завдяки роботам Лолейта та Гвоздева.

Розвитку будівельної механіки сприяли роботи вчених, які працювали в Україні, зокрема, В. Л. Кирпичов, С. П. Тимошенко, Є. О. Патон, О. М. Динник, М. М. Крилов, М. М. Боголюбов, М. В. Корноухов, О. А. Уманський, О. І. Виноградов, Г. С. Писаренко та багато інших.

До середини ХХ ст. у будівельній механіці переважало прагнення до розробки відносно простих, а також наближених методів, які вимагають можливо менш складних обчислень. Широке розповсюдження комп'ютерів у другій половині ХХ ст. обумовило переворот в будівельній механіці. На перше місце при оцінюванні методів розрахунку ставиться не простота їх, а універсальність. Надається можливість більшого наближення розрахункових схем до реальних споруд, широко використовуються методи лінійної алгебри, статичні методи, математичне програмування, елементи топології.

Завдяки можливості автоматизації розрахунків зародились нові розділи будівельної механіки - динамічна стійкість, теорія надійності, теорія повзучості, нелінійна теорія оболонок, оптимальне проектування, один з найбільш універсальних методів будівельної механіки – метод скінченних елементів – своєю появою зобов'язаний комп'ютерам.

Розвиток обчислювальної техніки та пов'язана з ним універсалізація методів будівельної механіки не означає повної відмови від класичних методів. Вони є тими підвалинами і тим інструментом, за допомогою якого перевіряється усе нове. Актуальність класичних методів будівельної механіки зумовлюється також тим, що багато споруд являють собою прості системи, для яких раціонально застосовувати прості методи розрахунку.

Будівельна механіка – прикладна наука. Її завданням є розробка таких методів розрахунку, які забезпечують, з одного боку, надійність споруд і, з іншого, їх економічність. В наш час неможливо уявити жодної більш-менш відповідальної споруди, конструкції якої не були попередньо розраховані на міцність, жорсткість, стійкість. Ці розрахунки виконуються на основі методів будівельної механіки, і їх вивчення є одним з важливих етапів підготовки майбутнього спеціаліста-будівельника.

1 РОЗРАХУНКОВА СХЕМА. КІНЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ СПОРУД

1.1 Розрахункова схема споруди та її елементи

Будівельна механіка вивчає споруду як тіло або систему пов'язаних між собою тіл, яка призначена для сприймання навантаження або інших впливів і передачі їх на основу або на іншу споруду. Предметом вивчення є методи розрахунку споруд на міцність, жорсткість стійкість, тобто методи, метою яких є визначення напружено-деформованого стану.

Для визначення напружено-деформованого стану споруди неможливо врахувати усі властивості споруди. Тому для розгляду приймається її спрощена розрахункова схема. *Розрахункова схема споруди* – це спрощена схема дійсної споруди, що відображає її основні властивості. Наприклад, каркас будівлі (рис. 1.1, а) являє собою просторову систему (рис. 1.1, б). У цій просторовій системі можна виділити плоскі поперечні конструкції із суцільними (рис. 1.1, з) або гратчастими (рис. 1.1, в) елементами, які переважно визначають здатність усієї споруди сприймати задане навантаження.

У розрахунковій схемі виділяють такі елементи: тіла, що складають споруду; опори; навантаження.

Залежно від співвідношення геометричних розмірів *тіл, що складають споруду*, виділяють: *стержні* (рис. 1.2, а), у яких один вимір (довжина l) значно перевищує два інших; *пластинки* (рис. 1.2, б) та *оболонки* (рис. 1.2, в), у яких виміри в двох напрямках значно більші, ніж у третьому – товщині h ; *масивні тіла* (рис. 1.2, з), які мають усі три розміри одного порядку; *тонкостінні стержні* (рис. 1.2, д), усі три виміри яких різних порядків.

Системи, що складаються зі стержнів, називаються *стержневими*. У розрахунковій схемі кожний стержень відображають віссю – лінією, що з'єднує центри ваги його поперечних перерізів.

Стержневі системи поділяють на плоскі, просторові та плоско-просторові. Якщо осі всіх стержнів разом із навантаженням розташовані в одній площині, систему називають *плоскою*. У *плоско-просторових* системах осі стержнів розташовані в одній площині, а навантаження не належить їй. *Просторові* – це системи, у яких осі стержнів не розташовані в одній площині.

У цьому курсі розглядаються *стержневі*, переважно *плоскі*, системи.

З'єднання стержнів між собою здійснюється *жорстко* (рис. 1.3, а) або *шарнірно* (рис. 1.3, б...г). При цьому припускають, що шарніри *ідеальні*, тобто такі, у яких відсутнє тертя. Шарнір, наведений на рисунку 1.3, в, на відміну від шарніра на рисунку 1.3, з, називають *неповним*. Залежно від кількості з'єднаних у шарнірі стержнів розрізняють *прості* та *кратні*, інакше *складні*, шарніри. Простий шарнір (рис. 1.3, б, в) з'єднує два стержні, кратний (рис. 1.3, г) – три й більше. Кратний шарнір можна замінити кількома простими шарнірами, приєднуючи кожен наступний окремим простим шарніром. Наприклад, шарнір, наведений на рисунку 1.3, з, можна замінити системою простих шарнірів, наведених на рисунку 3, д. Взагалі для шарніра, що з'єднує S стержнів, еквівалентна кількість простих шарнірів III визначається за формулою:

$$Ш = С - 1.$$

(1.1)

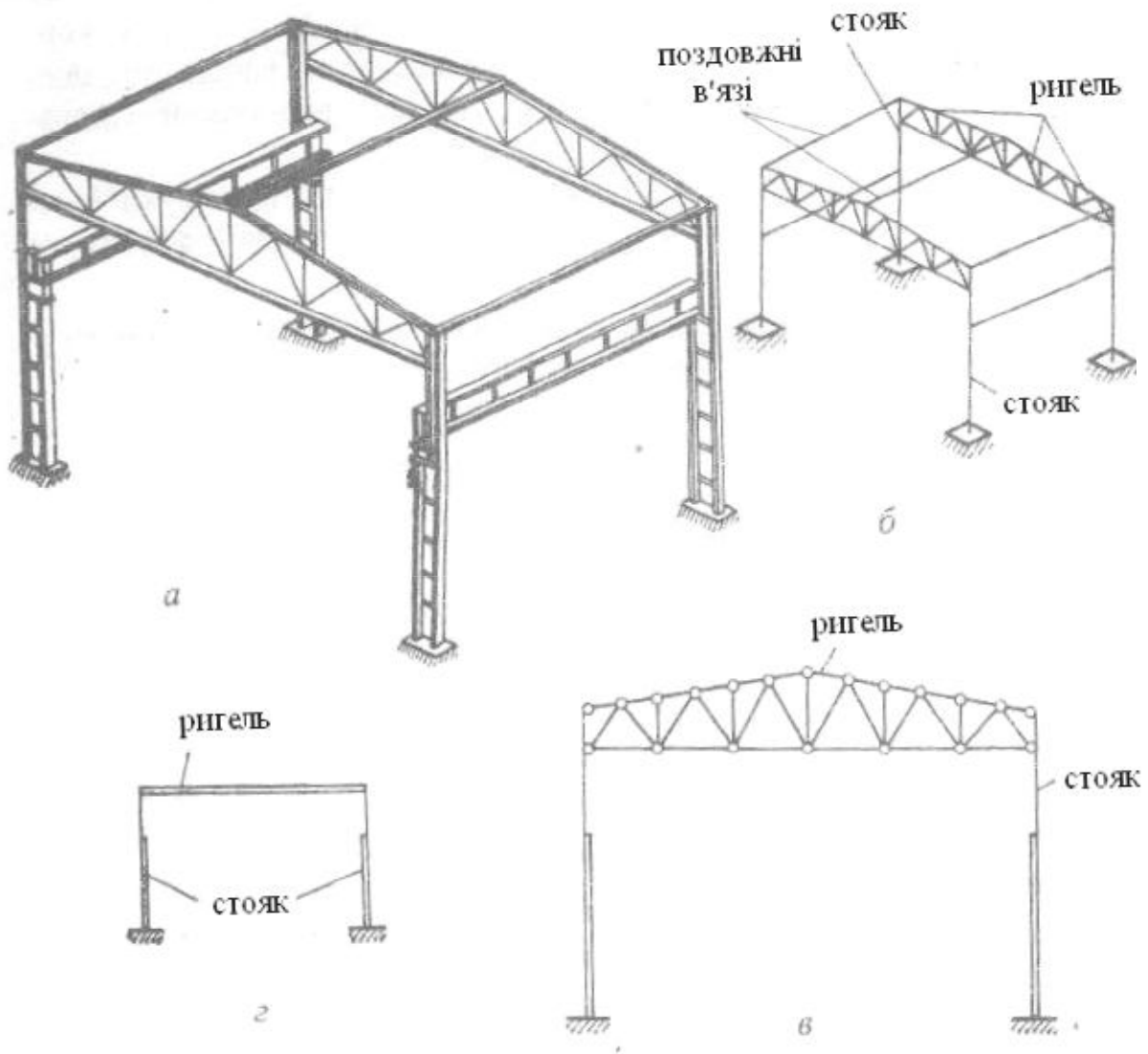


Рисунок 1.1

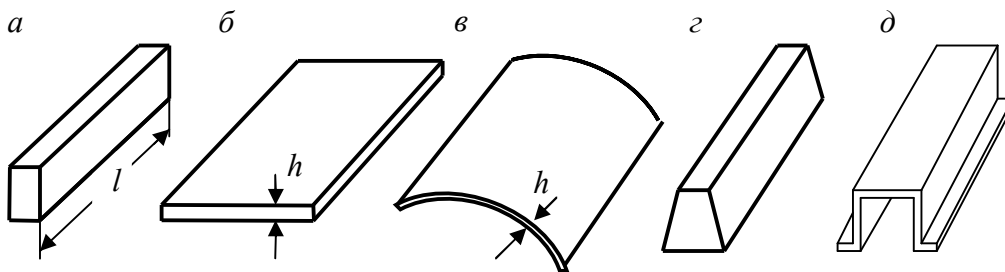


Рисунок 1.2

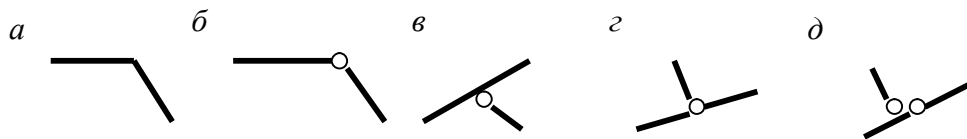


Рисунок 1.3

Залежно від способів з'єднання стержнів розрізняють системи з переважно жорсткими з'єднаннями стержнів – *рами* (рис. 1.4, а), системи тільки з шарнірними з'єднаннями – *ферми* (рис. 1.4, б), *комбіновані системи* (рис. 1.4, в).

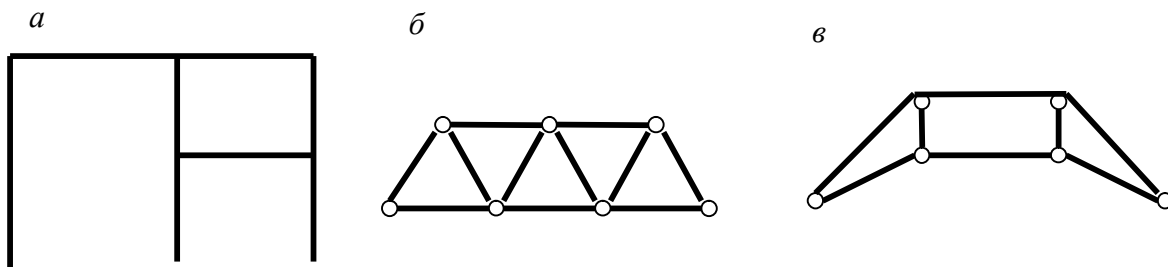


Рисунок 1.4

Опори слугують для прикріплення споруди до землі або до іншої споруди. Розрізняють три основних види опор плоских споруд: *шарнірно-рухома опора* (рис. 1.5, а), що утримує від одного лінійного переміщення вздовж опорного стержня; *шарнірно-нерухома опора* (рис. 1.5, б, в), що утримує від будь-яких лінійних переміщень; *затискаюча нерухома опора* або *затиснення* (рис. 1.5, г), що не допускає як лінійних, так і кутових зміщень опорного перерізу. Використовують і такі опорні закріплення, які показані на рисунку 1.5, д, е: *поперечний* (рис. 1.5, д) та *поздовжній* (рис. 1.5, е) *повзун*, а також пружні опори (рис. 1.5, ж), у яких можливі переміщення в напрямку закріплення пропорційні діючим у них силам.

Кожна опора накладає обмеження на переміщення перерізу, у якому вона знаходиться. Наприклад, шарнірно-рухома опора не дозволяє переміщення опорного перерізу в напрямку опорного стержня. Кількість таких обмежень являє собою кількість опорних в'язей. Так, шарнірно-нерухома опора обмежує переміщення опорного перерізу у двох напрямках, тобто накладає дві в'язі. Нерухомість опорного перерізу в напрямку накладеної в'язі відповідно законам Ньютона еквівалентна дії сили в напрямку накладеної в'язі. Ця сила називається *опорною реакцією*. Отже, *кількість опорних реакцій відповідає кількості опорних в'язей*. Так, в шарнірно-рухомій опорі (рис. 1.5, а) виникає одна реакція – R , спрямована вздовж опорного стержня, в шарнірно-нерухомій опорі – дві, наприклад, вертикальна – V і горизонтальна – H (рис. 1.5, б), в затисненні – три: вертикальна – V , горизонтальна – H і реактивний момент – M (рис. 1.5, г).

Зазначимо, що шарнірно-нерухома опора у розрахунковій схемі може бути зображена як шарнір, що з'єднує опорний переріз безпосередньо з основою (рис. 1.5, в).

Залежно від напрямку опорних реакцій *при вертикальному навантаженні* з поміж інших систем виокремлюють *балочні системи* (рис. 1.6, а, б), у яких реакції тільки вертикальні, і *розпірні* (рис. 1.6, в), у яких, крім вертикальних, з'являються й горизонтальні опорні реакції, які називають розпором.

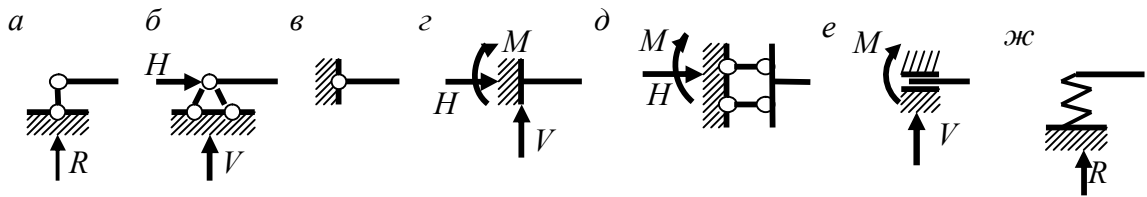


Рисунок 1.5

Одним із важливих питань, що вирішуються при виборі розрахункової схеми споруди, є з'ясування характеру та величини зовнішніх впливів. Серед них головне місце займають силові впливи, або *навантаження*. Вони класифікуються за такими ознаками: за характером розподілу – *розподілені* та *зосереджені*; за часом дії – *постійні* й *тимчасові*; за характером прикладання – *статичні* та *динамічні*, *рухомі* й *нерухомі*. Розподілені навантаження бувають *об'ємні* й *поверхневі*. Об'ємне навантаження діє в кожній точці об'єму тіла – гравітаційні сили, сили інерції та ін. Поверхневі навантаження з'являються в результаті контакту з іншими тілами.

За своєю суттю всі навантаження є розподіленими за об'ємом чи за площею поверхні тіла. Але, за принципом Сен-Венана, якщо розміри зони дії навантаження малі порівняно з розмірами тіла, воно може бути зображене у вигляді навантаження, розподіленого вздовж лінії, або зосередженої сили, що діє в одній точці.

Постійними називають навантаження, що діють протягом усього терміну експлуатації споруди. Таким навантаженням є, наприклад, власна вага тіла. Тимчасові навантаження діють протягом обмеженого терміну. Такими є снігові, вітрові навантаження, вага обладнання та ін. Постійне навантаження діє на споруду в різних сполученнях із тимчасовими навантаженнями. Кожне таке сполучення називають *завантаженням*.

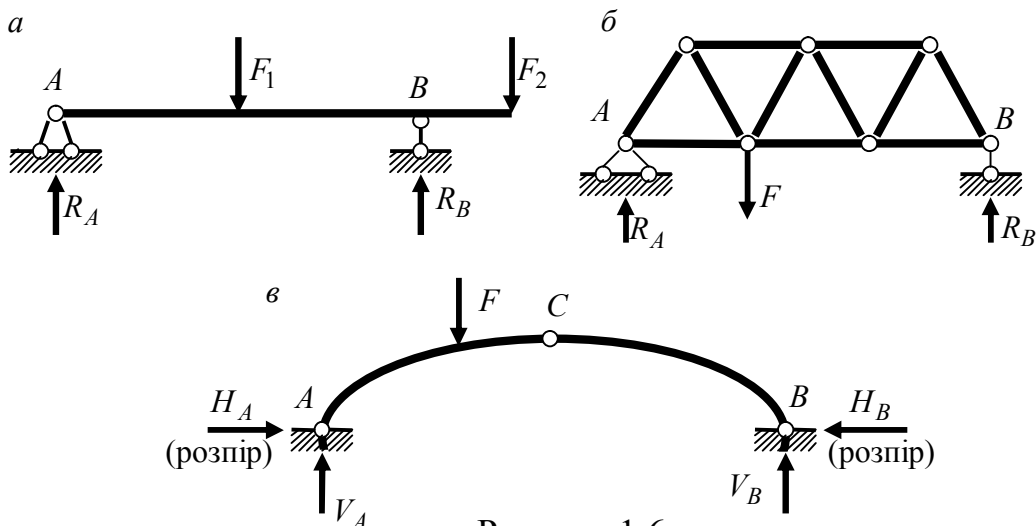


Рисунок 1.6

Статичним називають таке навантаження, яке не змінюється за часом або змінюється так, що викликаними ним прискореннями точок споруди можна знехтувати. Динамічне навантаження – це навантаження, величина, напрямок або розташування якого змінюється так, що силами інерції, які виникають при цьому, неможливо знехтувати.

Нерухомими є навантаження, що не змінюють свого розташування на споруді. До них можна зарахувати вагу споруди та окремих її частин, вагу стаціонарного обладнання й таке ін. Прикладами рухомого навантаження можуть бути дія автомобіля чи залізничного потяга на мосту, мостового крану на підкрановій балці та ін.

Крім навантажень, споруда може зазнавати й інших впливів, наприклад, температурних, осідання опор.

1.2 Кінематичний аналіз споруд

Кожна споруда під дією навантаження деформується, взаємне розміщення її точок змінюється. Якщо переміщення точок стержневої системи можливі тільки за рахунок деформації її елементів, систему називають *геометрично незмінюваною*. Якщо геометрична форма системи може змінюватись без деформації її елементів, тобто за рахунок лінійних або кутових переміщень частин системи як твердих тіл, систему називають *геометрично змінюваною*. Нарешті може виявитись, що у деякій системі у початковий момент прикладання навантаження можливі нескінченно малі переміщення точок без деформації її елементів, після чого вона формально стає незмінюваною. Така система називається *миттєво змінною*. При проектуванні споруд слід уникати геометрично змінюваних, як і миттєво змінюваних та близьких до останніх за геометрією систем.

Оскільки точки геометрично незмінюваної системи можуть зміщуватись лише за рахунок деформацій, при перевірці геометричної незмінюваності споруди достатньо розглядати її як систему абсолютно жорстких тіл. Якщо при цьому припущенні переміщення відсутні, споруда геометрично незмінювана. Шарнірно-стержневий трикутник (рис. 1.7, *а*) є найпростішою плоскою геометрично незмінюваною системою. Дійсно, за умов абсолютної жорсткості стержнів взаємне розміщення будь-яких його точок залишається фіксованим.

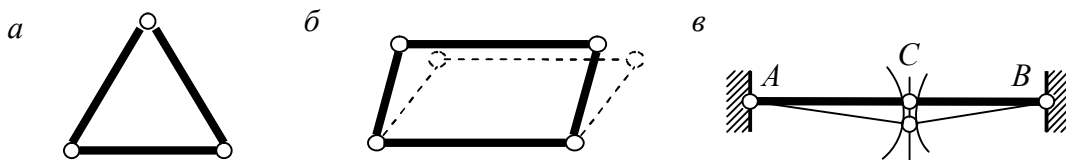


Рисунок 1.7

Прикладом геометрично змінюваної системи може бути шарнірно-стержневий чотирикутник (рис. 1.7, *б*). Дійсно, взаємне розташування стержнів, що його складають, може змінюватись без будь-якої їх деформації. Стержнева система *ACB* (рис. 1.7, *в*) є прикладом миттєво змінюваної системи, у якій точка

C має можливість нескінченно малого переміщення вздовж спільної дотичної до траєкторії руху, що відповідає обертанню стержня AC навколо точки A і стержня BC навколо точки B .

Як уже зазначалося, споруда повинна бути геометрично незмінюваною. Для перевірки геометричної незмінюваності споруд використовують два метода: кінематичний статичний. Основним вважається кінематичний метод, тому таку перевірку зазвичай називають кінематичним аналізом.

1.2.1 Кінематичний метод

В даному методі можна виділити два етапи аналізу.

На першому етапі, який можна назвати кількісним, встановлюється необхідні кількісні умови геометричної незмінюваності системи. Він базується на понятті числа ступенів вільності і відповідає на запитання: чи має система необхідну кількість в'язей.

Для дослідження рухомості системи жорстких тіл використовують поняття ступенів вільності. Числом ступенів вільності називають кількість можливих незалежних зміщень точок системи. Інакше – це мінімальна кількість незалежних параметрів, що однозначно визначають положення всіх частин споруди.

Назвемо *диском* (D) будь-яку завідомо геометрично незмінювану частину плоскої споруди. Зокрема, диском може бути стержень (рис. 1.8, *a*), шарнірно-стержневий трикутник (рис. 1.8, *б*), жорстко з'єднані між собою (рис. 1.8, *в*) або з опорою (рис. 1.8, *г*) стержні, геометрично незмінювана частина системи (рис. 1.8, *д*) та ін.

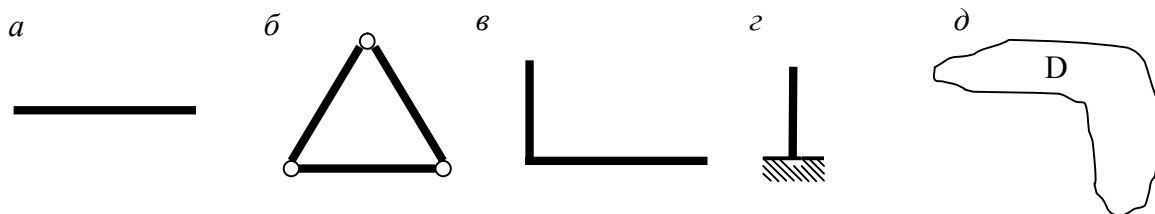


Рисунок 1.8

В подальшому будемо розглядати *прості диски* – такі, що не мають зайвих внутрішніх в'язей, зокрема замкнутих безшарнірних контурів. Кожний диск має на площині три ступеня вільності. Дійсно, щоб визначити положення всіх його точок, достатньо задати дві координати якої-небудь точки й кутову координату будь-якої прямої, що проходить через цю точку.

З'єднання дисків між собою та опорні пристрої обмежують можливість вільних переміщень дисків, тобто накладають на споруду в'язі. В'яззю називають пристрій, що усуває яке-небудь одне елементарне переміщення. Отже, кількість в'язей у з'єднанні відповідає кількості незалежних переміщень, що усуваються ними. Так, при жорсткому з'єднанні дисків відпадає можливість їх взаємних лінійних і кутових переміщень, тобто таке з'єднання накладає три в'язі, а кількість його ступенів вільності дорівнює нулю. Простий шарнір

накладає дві в'язі, що усувають можливість взаємних лінійних переміщень дисків, і має одну ступінь вільності – їх взаємний поворот навколо шарніра.

Аналогічно визначається кількість в'язей і ступенів вільності опорних закріплень. Шарнірно-рухома опора накладає одну в'язь і має два ступеня вільності. Шарнірно-нерухома опора накладає дві в'язі й має один ступінь вільності. Затискаюча нерухома опора (затиснення) накладає три в'язі. У такому закріпленні кількість ступенів вільності дорівнює нулю.

Позначивши кількість *простих дисків* D , кількість *простих шарнірів* $Ш$, кількість *опорних в'язей* C_o , можна на основі наведених вище міркувань записати формулу Чебишова для визначення кількості ступенів вільності плоскої системи:

$$W = 3D - 2Ш - C_o. \quad (1.2)$$

Зазначимо, що у цій формулі не враховуються жорсткі з'єднання дисків, оскільки при такому з'єднанні диски вважаються одним диском.

Для ферм, стержні яких можна вважати в'язями між вузлами, зручно користуватися іншою формулою для визначення кількості ступенів вільності:

$$W = 2Y - C - C_o, \quad (1.3)$$

де Y - кількість вузлів, C - кількість стержнів ферми.

На основі одержаної кількості ступенів вільності можна зробити такі **висновки**:

- якщо $W > 0$, система є геометрично змінюваною;
- якщо $W \leq 0$, система може бути геометрично незмінюваною.

Умова $W \leq 0$ – є необхідною, але недостатньою умовою геометричної змінюваності системи. Наприклад, балка, наведена на рисунку 1.9, є геометрично змінюваною (можливе зміщення частини балки показане тонкою лінією), проте для неї $W = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 2 - 6 = -1 < 0$.

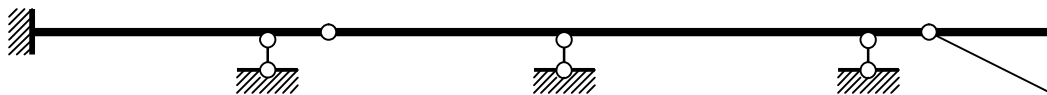


Рисунок 1.9

Зауважимо, що кількість ступенів вільності пов'язана з поняттям статичної визначуваності. *Статично визначуваною* називають геометрично незмінювану систему, усі зусилля в якій визначаються з умов рівноваги. Висновок про статичну визначуваність можна зробити в залежності від кількості ступенів вільності.

Якщо $W = 0$, то геометрично незмінювана система є *статично визначуваною*. Дійсно, для окремого диска на площині число умов рівноваги дорівнює трьом, а для системи дисків без опор – $3D$. У кожній в'язі, накладеній на диск, діє певне зусилля (у простому шарнірі – дві в'язі, отже два зусилля, у шарнірно-рухомій опорі – одна в'язь, отже одне зусилля і т. д.). Загальна кількість в'язей між дисками дорівнює $2Ш + C_o$. Тоді при $W = 0$ з формули Чебишова отримуємо $3D = 2Ш + C_o$, тобто кількість зусиль в усіх в'язях дорівнює числу умов рівноваги, і система є статично визначуваною. Слід

зазначити, що цей висновок справедливий, якщо всередині кожного диска системи немає зайвих в'язей, тобто диски прості.

Від'ємне значення кількості ступенів вільності ($W < 0$) геометрично незмінюваної системи свідчить про наявність зайвих в'язей, тобто вона є $|W|$ раз статично невизначуваною.

На другому етапі, який можна назвати якісним, (геометричним або структурним) встановлюється достатність умов геометричної незмінюваності системи. Аналіз проводиться шляхом уявної збірки системи з перевіркою достатності в'язей у кожному з'єднанні.

При якісному аналізі іноді зручно розглядати основу – землю як нерухомий диск «Земля» ($D_{\text{земля}}$), до якого кріпиться стержнева система (диск $D_{\text{земля}}$ у формулу Чебишова не входить).

Слід розуміти, що точка перетину ліній двох з'єднувальних стержнів, наприклад C_1 і C_2 на рисунку 1.10, є миттєвим центром взаємного обертання дисків D_3 і D_4 і еквівалентна фіктивному шарніру $\Pi_{1,2}$, що поміщений в цю точку і з'єднує два диска.

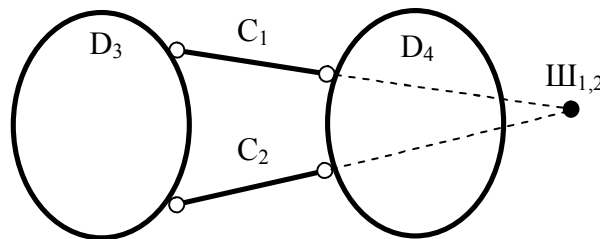


Рисунок 1.10

Нагадаємо, що у (1.2), (1.3) не враховані випадки жорсткого з'єднання дисків. Отже, жорстко з'єднані диски повинні враховуватися як один диск.

Зауважимо, що у випадку геометрично змінюваної системи ($W > 0$) етап 2 доцільно виконати лише з метою виявлення місць, де саме в системі не вистачає в'язей.

Наведемо основні способи утворення геометрично незмінюваних систем, що ґрунтуються на найпростішій геометрично незмінюваній системі, тобто шарнірно-стержневому трикутнику (табл. 1.1). При цьому слід мати на увазі такі особливості:

– наведені варіанти з'єднання містять мінімально необхідну (з точки зору геометричної незмінюваності) кількість в'язей;

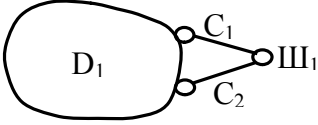
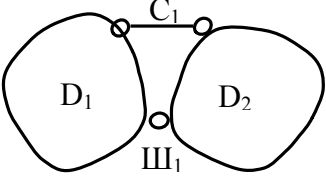
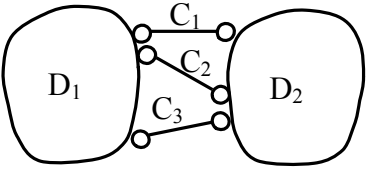
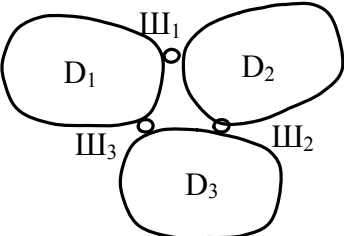
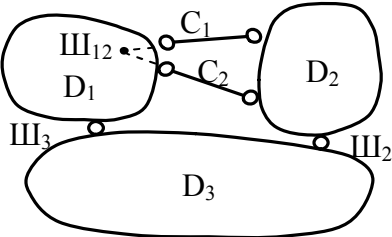
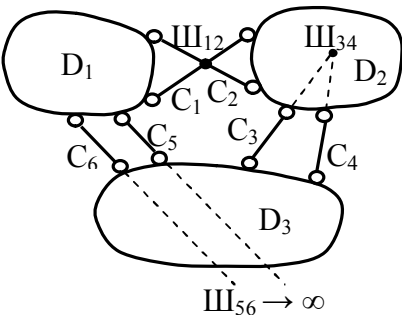
– геометричною ознакою миттєвої змінюваності є неправильне розміщення в'язей у з'єднаннях частин споруди при достатній їх кількості. Тому для кожного варіанта з'єднання слід перевіряти відповідні *умови розташування*.

Після виконання уявної збірки системи можна зробити такі **висновки**:

– якщо всі з'єднання відповідають способам та умовам, наведеним у таблиці 1.1, збірка є *правильною*. Це означає, що система геометрично незмінювана;

– якщо хоча б одне з'єднання не відповідає умовам таблиці 1.1, збірка є *неправильною*, і система є геометрично змінюваною.

Таблиця 1.1

Схема з'єднання	Логічна формула	Умови розташування
1	2	3
1. Приєднання шарніра до диску		
	$\frac{D_1 + Ш_1}{C_1, C_2} \Rightarrow D$	осі стержнів НЕ повинні лежати на одній прямій.
2. З'єднання двох дисків:		
а) за допомогою шарніра і стержня (спосіб Полонсo)		
	$\frac{D_1 + D_2}{Ш_1, C_1} \Rightarrow D$	шарнір і стержень НЕ повинні лежати на одній прямій
б) за допомогою трьох стержнів (спосіб Шухова)		
	$\frac{D_1 + D_2}{C_1, C_2, C_3} \Rightarrow D$	осі стержнів НЕ повинні : – бути паралельними; – перетинатися в одній точці.
3. З'єднання трьох дисків (спосіб шарнірно-стержньового трикутника за допомогою трьох дійсних або фіктивних шарнірів		
	$\frac{D_1 + D_2 + D_3}{Ш_1, Ш_2, Ш_3} \Rightarrow D$	шарніри (дійсні і фіктивні) НЕ повинні: – лежати на одній прямій, зокрема у жодній з пар стержнів, що утворюють фіктивний шарнір; – не повинно бути паралельних
	$\frac{D_1 + D_2 + D_3}{C_1, C_2, Ш_{12}} \Rightarrow D$	
	$\frac{D_1 + D_2 + D_3}{\underbrace{C_1 \times C_2}_{Ш_{12}}, \underbrace{C_3 \times C_4}_{Ш_{34}}, \underbrace{C_5 \times C_6}_{Ш_{56}}} \Rightarrow D$	

- Отже результати проведеного аналізу можна підсумувати таким чином:
- якщо $W > 0$, система геометрично змінювана;
 - якщо $W = 0$ і збірка є правильною, система геометрично незмінювана і статично визначувана;
 - якщо $W = 0$ або $W < 0$ і збірка є неправильною, система геометрично змінювана;
 - якщо $W < 0$ і збірка є правильною, тоді система геометрично незмінювана і $|W|$ раз статично невизначувана.

Приклад 1.1. Виконати кінематичний аналіз системи, наведеної на рисунку 1.11.

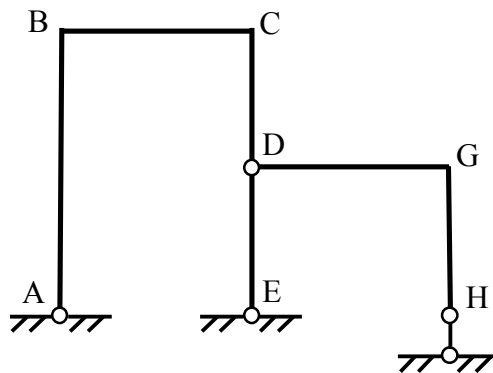


Рисунок 1.11

Розв'язання. Етап 1. Наведена система є рамою (є жорсткі з'єднання у вузлах), тому число ступенів вільності визначаємо за формулою Чебишова для загального випадку (1.2): $W = 3D - 2Ш - C_0$. Дискими будуть геометрично незмінювані частини системи ABCD (диск D_1), DE (диск D_2) і DGH (диск D_3). Отже, число простих дисків $D = 3$. Шарнір D з'єднує три диска, тобто за (1.1) $Ш_D = C - 1 = 2$, отже еквівалентний двом простим шарнірам. Більше шарнірів у з'єднаннях системи немає, тому загальне число простих з'єднувальних шарнірів $Ш = 2$. Шарнірно нерухомі опори A і E містять по дві опорні в'язі, опорний стержень H – одну в'язь, загалом число опорних в'язей $C_0 = 2 + 2 + 1 = 5$.

Таким чином, число ступенів вільності системи становить $W = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 2 - 5 = 0$. Робимо висновок, що необхідна умова геометричної незмінюваності виконана, тобто система може бути геометрично незмінюваною.

Етап 2. Додаємо особливий диск «Земля» ($D_{\text{земля}}$, рис. 1.12) і виконуємо збірку системи, використовуючи мінімально необхідне число з'єднувальних елементів згідно з таблицею 1.1

Спочатку з'єднаємо три диски D_1 , D_2 і $D_{\text{земля}}$ за допомогою трьох шарнірів A, D і E, записуючи це у вигляді логічної формули, де у чисельнику відобразимо, які елементи з'єднуються, а у знаменнику – за допомогою яких засобів:

$$\frac{D_1 + D_2 + D_{\text{земля}}}{Ш_A, Ш_D, Ш_E} \Rightarrow D_{123}.$$

Перевіримо умову розташування: шарніри А, D і Е не лежать на одній прямій.

Далі новий диск D_{123} з'єднаємо з диском D_3 за допомогою шарніра D і стержня Н:

$$\frac{D_{123} + D_3}{Ш_D, C_H} \Rightarrow D.$$

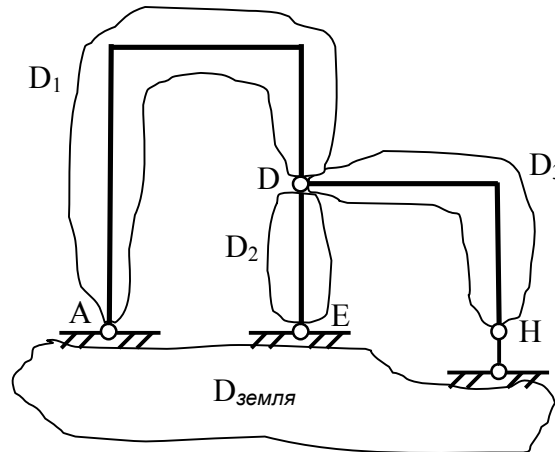


Рисунок 1.12

Перевіримо умову розташування: шарнір D і стержень Н не лежать на одній прямій.

Робимо висновок, що всі з'єднання відповідають умовам таблиці 1.1, тобто є *правильними*. Це означає, що умови геометричної незмінюваності виконані. Отже, система *геометрично незмінювана і є статично визначеною* ($W=0$).

Приклад 1.2. Виконати кінематичний аналіз системи, наведеної на рисунку 1.13, а.

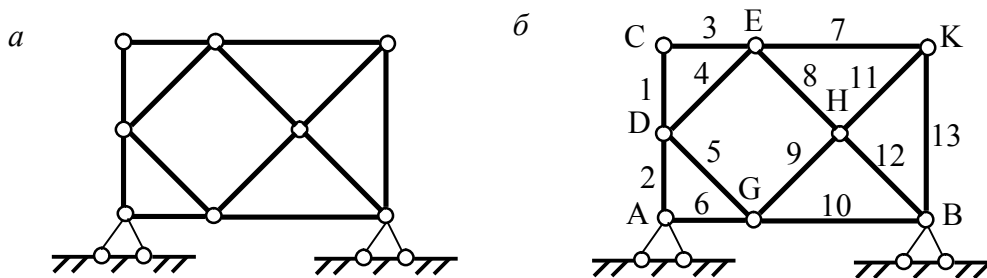


Рисунок 1.13

Розв'язання. Етап 1. Наведена система є фермою (не містить жорстких з'єднань у вузлах і опорах, усі стержні прямі), тому число ступенів вільності визначаємо за формулою Чебишова для ферми (1.3): $W = 2U - C - C_0$. Для зручності посилань позначимо вузли ферми латинськими буквами, а стержні – цифрами (рис. 1.13, б). Вузлами ферми, якщо її зібрати без опор, будуть шарніри А, В, С, D, Е, G, Н, К. Отже, *число вузлів* ферми становить $U = 8$. Вузли з'єднуються тринадцятьма стержнями, тому *число з'єднувальних стержнів* буде $C=13$. Шарнірно нерухомі опори А і В містять по дві опорні в'язі, загалом *число опорних в'язей* $C_0=2+2=4$.

Таким чином, число ступенів вільності системи становить $W = 2 \cdot 8 - 13 - 4 = -1$, що означає наявність однієї «зайвої» в'язі. Робимо висновок, що необхідна умова геометричної незмінюваності виконана, тобто система *може бути ГН* (геометрично незмінюваною).

Етап 2. Додаємо особливий диск «Земля» ($D_{\text{земля}}$, рис. 1.14) і виконуємо збірку системи.

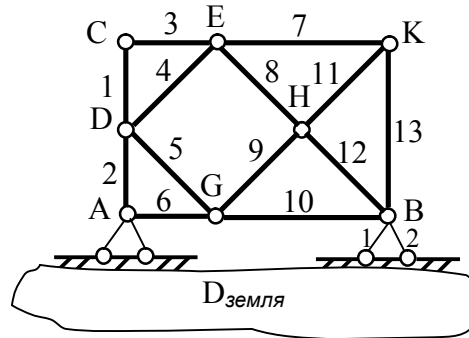


Рисунок 1.14

Для збірки ферми звичайно використовують спосіб «діад». Виберемо шарнірно-стержневий трикутник НКВ (ШСТ_{НКВ}) і будемо додавати до нього послідовно шарніри за допомогою пари стержнів. Цю однотипну операцію можна записати так

$$\frac{\text{ШСТ}_{\text{НКВ}} + \text{Ш}_G}{C_9, C_{10}} + \frac{\text{Ш}_E}{C_7, C_8} + \frac{\text{Ш}_D}{C_4, C_5} + \frac{\text{Ш}_A}{C_2, C_6} + \frac{\text{Ш}_C}{C_1, C_3} \Rightarrow D_{\phi}.$$

Перевіримо умови розташування: кожна пара стержнів при укрупненні системи не лежить на одній прямій. Отже об'єднання правильне і вся ферма може розглядатися як диск.

Для з'єднання диска «Ферма» (D_{ϕ}) з диском «Земля» ($D_{\text{земля}}$) достатньо використати один із опорних шарнірів, наприклад А, і один з двох стержнів опори В (C_{B1}):

$$\frac{D_{\phi} + D_{\text{земля}}}{\text{Ш}_{A, C_{B1}}} \Rightarrow D.$$

Перевіримо умову розташування: шарнір А і стержень C_{B1} не лежать на одній прямій.

Робимо висновок: одна в'язь C_{B2} є «зайвою» (що відповідає результату першого етапу $W = -1$), а всі з'єднання відповідають умовам таблиці 1.1, тобто є *правильними*. Це означає, що умова геометричної незмінюваності виконана.

Отже, система є *геометрично незмінюваною* і *один раз статично невизначуваною* ($W = -1$).

1.2.2 Статичний метод

Цей метод ґрунтується на тому, що геометрично змінювана система за умов довільного навантаження не може бути врівноваженою. Спроба пристосувати умови рівноваги для розрахунку такої системи приводить до несумісних рівнянь, а для миттєво змінюваних систем - до нескінченно великих

значень зусиль. Так, у балці, зображеній на рисунку 1.15, виходячи з умов рівності нулю моментів сил відносно лівої опори, маємо $R_B = F \cdot a / l$, а з умов рівності нулю згинаючого моменту в точці C – $R_B = 0$.

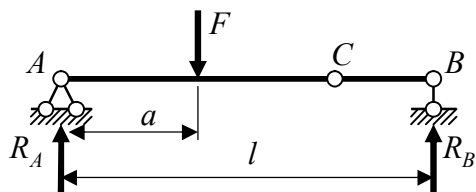


Рисунок 1.15

Отже, суперечність, що виникає при обчисленні реакцій і внутрішніх зусиль від довільного навантаження, є статичною ознакою геометричної змінюваності системи.

Аналітичною або статичною ознакою миттєвої змінюваності є наявність у системі нескінченно

великих, або невизначених (типу 0/0) зусиль.

Найпростішим навантаженням є нескінченно мале – нульове навантаження. У зв'язку з цим для перевірки геометричної незмінюваності статичним методом можна застосувати *спосіб нульового навантаження*.

Застосовуючи статичний метод, перевіримо геометричну незмінюваність рами, що зображена на рисунку 1.16.

Запишемо умову рівноваги для визначення реакції R_B :

$$\sum M_B = F \cdot l/2 + R_B \cdot 0 = 0,$$

Звідки

$$R_B = \pm(F \cdot l/2)/0.$$

При довільному значенні F отримаємо $R_B = \pm\infty$, при $F = 0$ маємо $R_B = 0/0$, тобто розглянута рама є миттєво змінюваною системою.

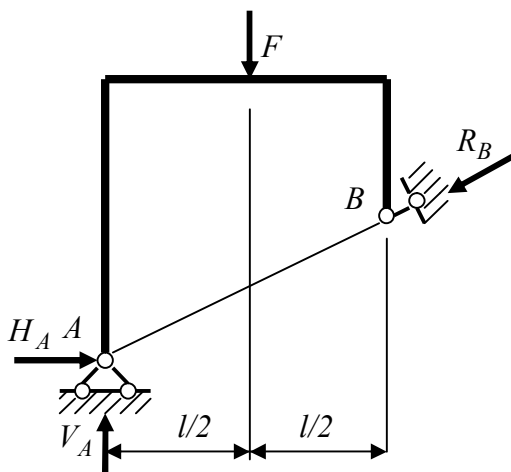


Рисунок 1.16

У загальному випадку аналітичною ознакою геометричної змінюваності є обернення на нуль визначника системи рівнянь рівноваги: $\det D = 0$.

1.3 Припущення, що застосовуються в будівельній механіці

Основні припущення, що використовуються в будівельній механіці, можна поділити на дві групи.

Перша група складається зі звичайних для опору матеріалів припущень щодо властивостей матеріалу: *суцільність і безперервність, однорідність, ізотропність і лінійна пружність* (справедливість закону Гука) матеріалу.

До другої групи відносять припущення щодо поведінки самої споруди. Це, у першу чергу, припущення про *лінійну деформованість* споруди, а також припущення щодо *малізми переміщень*.

Зазвичай в будівельній механіці вивчають лінійно деформовані системи, тобто такі, у яких переміщення і навантаження пов'язані лінійною залежністю. З цього припущення випливає *принцип незалежності дії сил*, згідно з яким переміщення в лінійно деформованій системі від дії суми сил (рис. 1.17, а) можна одержати як суму відповідних переміщень від дії кожної окремої сили (рис. 1.17, б, в):

$$y(F_1, F_2) = y(F_1) + y(F_2). \quad (1.4)$$

Відзначимо, що припущення щодо лінійної деформованості передбачає також наявність пропорційного зв'язку між силою й переміщенням:

$$y(k \cdot F) = k \cdot y(F). \quad (1.5)$$

У виразах (1.4), (1.5) замість переміщень можуть використовуватись будь-які фактори, що визначають напружено-деформований стан системи (напруження, зусилля, деформації, переміщення). Співвідношення (1.4) та (1.5) справедливі і для других зовнішніх впливів: температурних, осіданням опор тощо. У такому разі термін *принцип незалежності дії сил* є неточним, і його слід замінити більш загальним терміном – *принцип незалежності впливів* або *принцип суперпозиції*.

У зв'язку з необхідністю підвищення точності розрахунків останнім часом посилюється інтерес до систем із нелінійним зв'язком між переміщеннями й навантаженнями. Ця нелінійність може виникнути внаслідок нелінійності матеріалу – *фізична нелінійність* або визначатися властивостями самої споруди – *геометрична нелінійність*.

Важливу роль у розрахунках споруд відіграє *принцип локальності ефекту самоврівноважених сил* – *принцип Сен-Венана*. Зокрема, на підставі цього принципу, при малих порівняно з розмірами тіла зонах дії розподіленого навантаження, останнє може бути зображене у вигляді навантаження, розподіленого вздовж лінії, або зосередженої сили, що діє в одній точці.

З припущення щодо малізми переміщень випливає можливість застосування *розрахунку за недеформованою схемою*.

Суть цього розрахунку покажемо на прикладі системи, наведеної на рисунку 1.18. Внаслідок дії навантаження точки системи змінюють своє взаємне розташування за рахунок деформації її елементів. Отже, стержні *AC* та *BC* під впливом навантаження займуть нове положення *AC'* та *BC'*. При цьому кут нахилу стержнів зміниться на величину $\Delta\alpha$. З умови рівноваги такої деформованої системи зусилля в стержнях:

$$N_1 = N_2 = \frac{F}{2\sin(\alpha + \Delta\alpha)}. \quad (1.6)$$

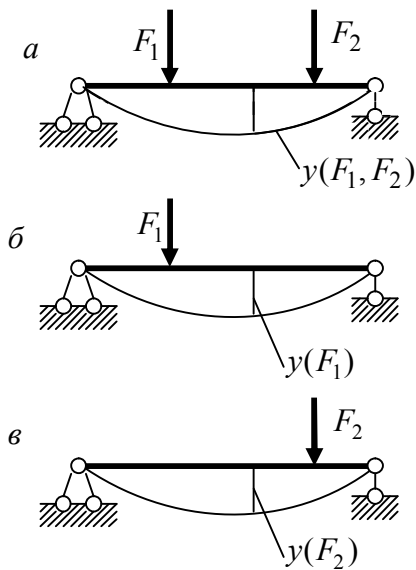


Рисунок 1.17

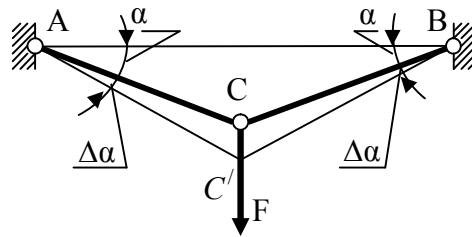


Рисунок 1.18

На підставі припущення щодо мализни переміщень останні є величинами другого порядку мализни відносно геометричних розмірів системи. Тоді в розглянутій системі $\Delta\alpha \ll \alpha$ й у виразі (1.6) можна взяти $\sin(\alpha + \Delta\alpha) \approx \sin \alpha$. Така заміна означає, що обчислення зусиль можна здійснити без урахування зміни геометрії системи – за недеформованою схемою. Зрозуміло, цей висновок справедливий лише в межах дії припущення про мализну переміщень.

Запитання для самоконтролю

1. Що таке будівельна механіка, чим вона відрізняється від опору матеріалів та інших суміжних дисциплін?
2. Що таке розрахункова схема споруди? Якими міркуваннями керуються при її виборі?
3. З яких елементів може складатися споруда?
4. Як з'єднуються між собою окремі стержні плоскої споруди?
5. Як розрізняються споруди залежно від того, яким чином з'єднуються стержні?
6. Що таке кратний шарнір?
7. Назвіть види опор плоских споруд. Які їх кінематичні й статичні властивості?
8. Наведіть класифікацію навантажень.
9. Які інші впливи можуть діяти на споруду?
10. Що називають кількістю ступенів свободи споруди?
11. Дайте визначення геометрично незмінюваної системи.
12. Дайте визначення геометрично змінюваної системи.
13. Чому при перевірці геометричної незмінюваності число ступенів свободи споруди можна визначати за умов припущення про абсолютну жорсткість окремих її елементів?

14. Як визначити кількість в'язей у з'єднанні дисків або в опорі?
15. Яка з формул (1.2) чи (1.3) є більш загальною?
16. Як геометрична незмінюваність споруди залежить від числа ступенів свободи?
17. Чому умова $W = 0$ є недостатньою для геометричної незмінюваності системи?
18. У чому суть статичного методу перевірки геометричної незмінюваності?
19. Яка система є миттєво змінюваною?
20. Наведіть статичні та геометричні ознаки миттєвої змінюваності.
21. Які припущення щодо властивостей матеріалу застосовують у будівельній механіці?
22. Яка система є лінійно деформованою?
23. Що являє собою розрахунок за недеформованою схемою?

2 СТАТИЧНО ВИЗНАЧУВАНІ ПЛОСКІ ФЕРМИ

2.1 Основні поняття. Класифікація ферм

Фермою називають геометрично незмінну конструкцію, розрахункова схема якої складається з прямих стержнів, з'єднаних між собою на кінцях шарнірами.

Стержні у вузлах реальної ферми (рис. 2.1, *а*) з'єднуються жорстко: зварюванням (рис. 2.1, *в*), на заклепках або болтах. Але через велику гнучкість стержнів урахування жорсткості їх з'єднань несуттєво відбивається на роботі ферми. У зв'язку із цим у розрахунковій схемі ферми припускають, що в усіх вузлах знаходяться ідеальні шарніри (рис. 2.1, *б*).

У спорудах, елементами яких є ферми, зазвичай передбачають передачу навантаження у вузли ферм, тому їх стержні працюють тільки на розтяг-стиск. Ця обставина зумовлює більшу економічність ферм у порівнянні з балками за рахунок більш повного використання матеріалу при роботі стержня на розтяг-стиск. Дійсно, у перерізі розтягнутого стержня, на відміну від стержня, що згинається, нормальне напруження однакове в усіх точках, тому матеріал використовується повністю.

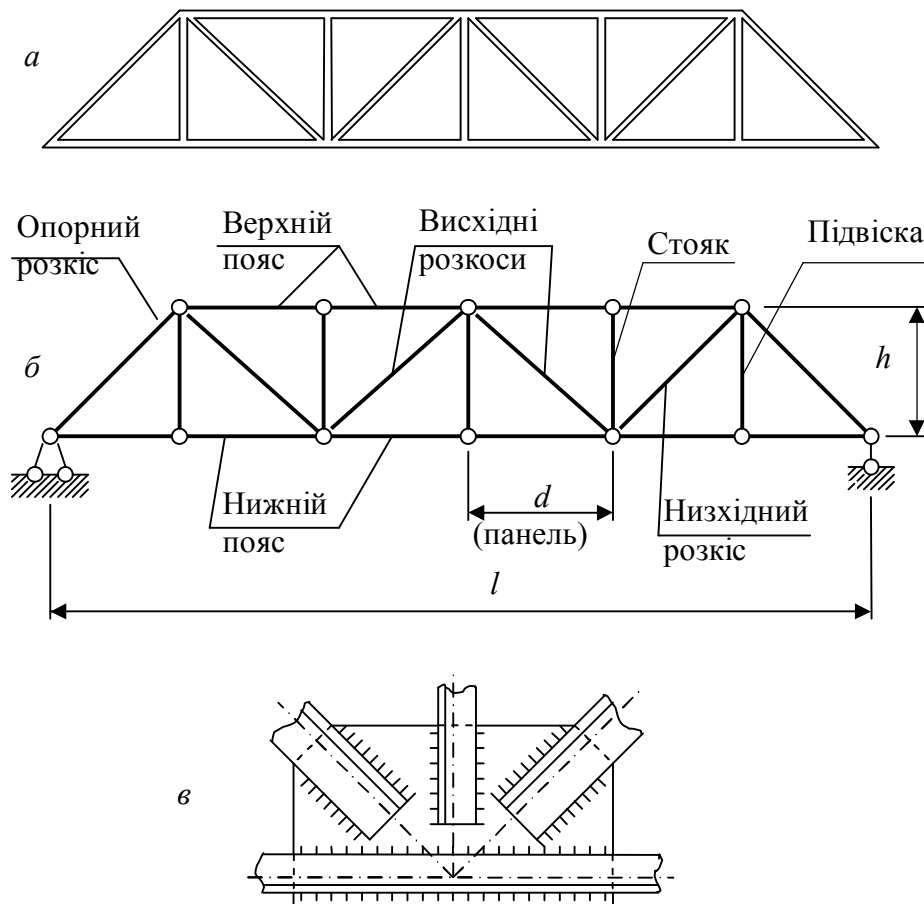


Рисунок 2.1

Ідею виникнення ферм можна подати як розвиток уявлення про роботу стержня на згин. Як відомо, при роботі стержня на згин нормальне напруження в поперечному перерізі змінюється вздовж висоти за лінійним законом (рис. 2.2, *a*). Найбільш напруженими при цьому будуть крайні волокна, а матеріал середньої частини недовикористовується. Саме тому в балках намагаються більшу частину матеріалу зосередити в поясах, максимально зменшуючи розміри іншої частини перерізу (стінки). Так виник двотавровий переріз, найбільш пристосований для роботи на згин (рис. 2.2, *б*).

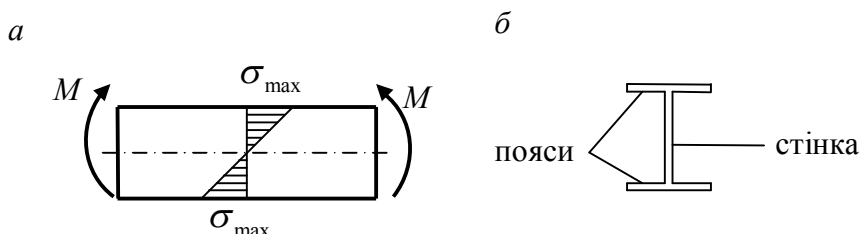


Рисунок 2.2

При зростанні прольоту для сприйняття більших згинаючих моментів висоту перерізу доводиться збільшувати настільки, що витрати матеріалу на стінку балки стають переважаючими. У цьому випадку вигідно перейти від суцільного перерізу до наскрізного, або гратчастого, коли замість суцільної балки конструкцію виготовляють у вигляді системи прямолінійних стержнів – ферм.

За розміщенням та характером роботи у фермі розрізняють *пояси* й *гратки* (рис. 2.1, *б*). Пояси складають стержні, які обмежують контур ферми зверху (*верхній пояс*) та знизу (*нижній пояс*). Пояс, у якому прикладене навантаження, називають *вантажним*.

Гратки утворюються похилими елементами – *розкосами* та вертикальними – *стояками* і *підвісками*. Стояки працюють на стиск, а підвіски – на розтяг. Серед розкосів розрізняють *висхідні* та *низхідні* за напрямком руху вздовж розкосу при пересуванні фермою від опор до середини прогону. Стояки та розкоси, розташовані біля опор, називають *опорними*.

Частину ферми, розташовану в межах між суміжними вузлами вантажного поясу, називають *панеллю*. Відстань між цими вузлами називають *довжиною панелі* й позначають *d*.

Горизонтальна відстань *l* між центрами опор називається *прольотом* або *прогоном*, найбільша відстань *h* між шарнірами верхнього і нижнього поясів – *висотою* ферми.

Ферми звичайно розрізняють за такими ознаками:

– за *призначенням*: *мостові* (ферми прогонових споруд мостів, мостових кранів), *кровоквни* (ферми покриттів будов та споруд), *ферми каркасів* будов і споруд тощо, наприклад, ферми, що є частинами корпусу судна, літака, опори ЛЕП.

– за *типом обпирання*: *балочні* (рис. 2.3, *a*), у яких при вертикальному навантаженні виникають лише вертикальні реакції опор, *аркові* або *розпірні* (рис. 2.3, *в*), у яких при вертикальному навантаженні крім вертикальних

виникають і горизонтальні реакції, а також консольні (рис. 2.3, б), у яких опори розташовані на одному з кінців ферми;

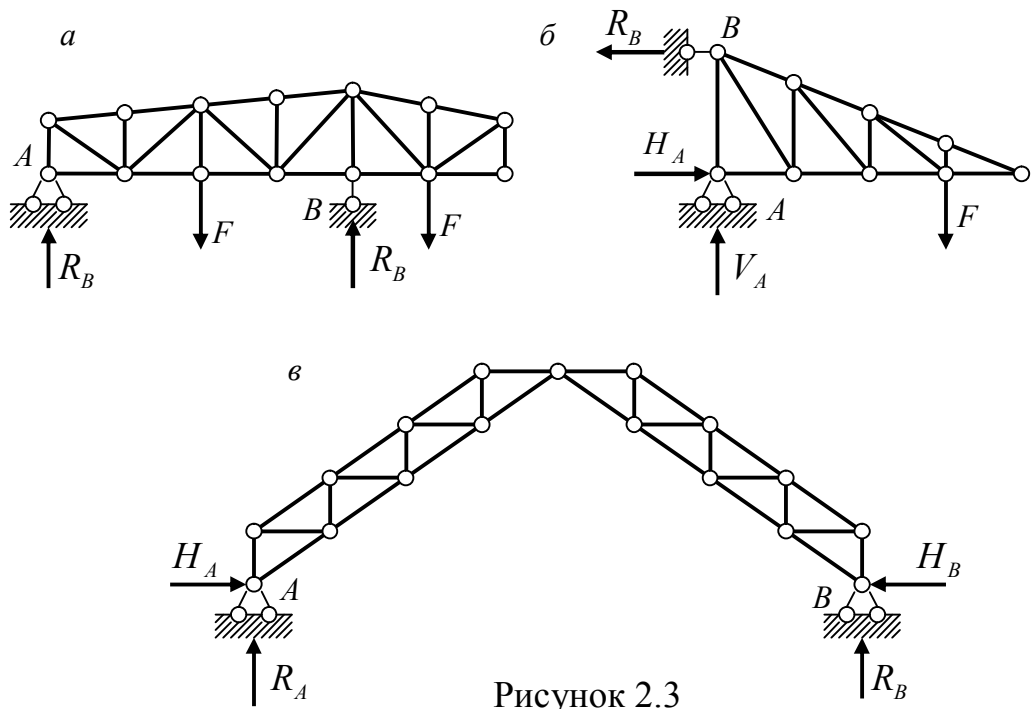


Рисунок 2.3

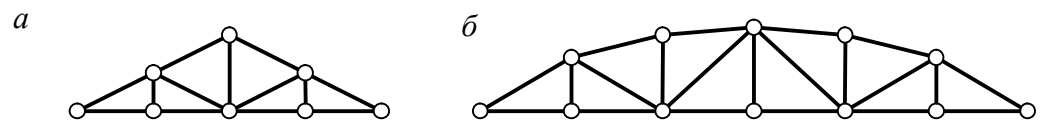


Рисунок 2.4

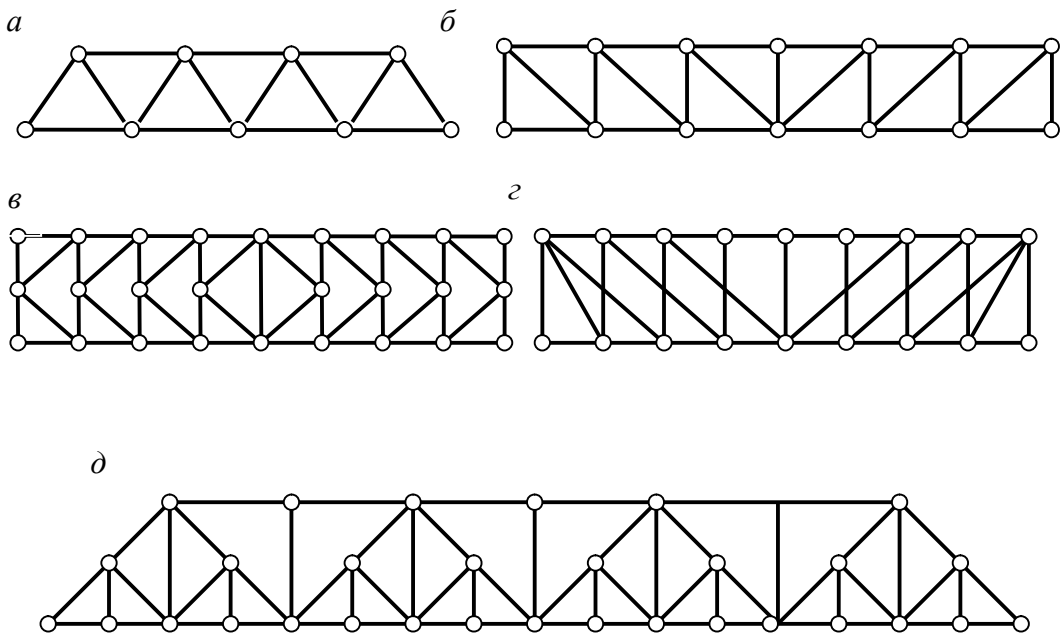


Рисунок 2.5

– за обрисом поясів: ферми з паралельними поясами (рис. 2.1, б та 2.5), із трикутним (рис. 2.4, а) та полігональним (рис. 2.4, б) обрисом;

– за системою ґраток: ферми з простими ґратками – трикутними (рис. 2.5, а), розкідними (рис. 2.5, б), напіврозкідними (рис. 2.5, в); ферми із складними ґратками – двохрозкідні (рис. 2.5, г), багаторозкідні та ін., ферми із складеними ґратками – шпренгельні (рис. 2.5, д) та інші ферми, в яких окремі стержні є ґратчастими, тобто теж фермами.

2.2 Розрахунок ферм

Розрахунок ферм полягає у визначенні зусиль у її стержнях. Зазвичай попередньо знаходять реакції опор, розглядаючи ферму в цілому. Далі для визначення зусиль у її стержнях застосовують *метод перерізів*.

При розрахунках вручну для визначення зусилля достатньо важливо обрати зручний переріз та застосувати умову рівноваги так, щоб зменшити складність розрахунків. Залежно від розміщення та конфігурації перерізу, а також від типу використаних рівнянь рівноваги розрізняють такі способи: *вирізання вузлів, наскрізного перерізу або моментної точки і проєкцій, сумісних перерізів, замкнутого перерізу*.

У комп'ютерних програмах для розрахунку ферм зручно використовувати спосіб вирізання вузлів в універсальній – матричній формі.

2.2.1 Спосіб вирізання вузлів

Спосіб вирізання вузлів у класичній формі застосовують для визначення зусиль у фермах, розрахункова схема яких може бути утворена послідовним приєднанням вузлів парами стержнів (рис. 2.6, а). У цьому випадку спершу проводять переріз, що відтинає двостержневий вузол, наприклад, вузол 1 (рис. 2.6, б), і записують його умови рівноваги:

$$\sum F_y = 0; N_{1-2} \sin \alpha + R_A = 0,$$

звідки $N_{1-2} = -R_A / \sin \alpha$, та

$$\sum F_x = 0; N_{1-6} + N_{1-2} \cos \alpha = 0,$$

звідки $N_{1-6} = R_A / \operatorname{tg} \alpha$.

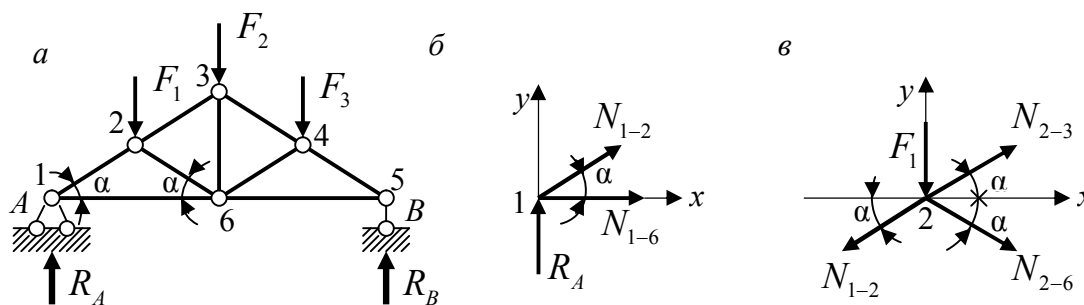


Рисунок 2.6

Далі переходять до наступного вузла, в який входять два невідомих зусилля (вузол 2 на рис. 2.6, в) і записують умови рівноваги:

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0; & -N_{1-2} \cos \alpha + N_{2-6} \cos \alpha + N_{2-3} \cos \alpha = 0; \\ \sum F_y = 0; & -N_{1-2} \sin \alpha + N_{2-3} \sin \alpha - N_{2-6} \sin \alpha - F_1 = 0. \end{aligned}$$

Сумісним розв'язанням цих рівнянь з урахуванням раніше обчисленого зусилля N_{1-2} знаходять чергові зусилля: N_{2-3} , N_{2-6} . Далі розглядають наступні вузли в такій послідовності, щоб у кожному новому вузлі зустрічалося не більше двох невідомих зусиль. Так для розглянутої ферми з рівноваги вузла 3 знаходять зусилля N_{3-4} , N_{3-6} , далі з вузла 6 – N_{4-6} , N_{5-6} і, нарешті, з вузла 4 або з вузла 5 знаходять зусилля N_{4-5} . Як бачимо, після обчислення всіх зусиль залишаються невикористаними деякі умови рівноваги (одне – у вузлі 5 або 4 і дві – у вузлі 6). Ці умови рівноваги використовують для *перевірки* правильності розрахунків.

В *окремих випадках* заздалегідь можна зробити висновки щодо зусиль залежно від розташування у вузлі стержнів та навантаження. Ці випадки наведені на рисунку 2.7 і перераховані далі.

1. Ненавантажений двостержневий вузол, у якому стержні не розташовані на одній прямій (рис. 2.7, а). З умов рівноваги вузла випливають рівності: $N_1 = 0$; $N_2 = 0$, тобто обидва стержні нульові.

2. Ненавантажений тристержневий вузол, у якому два стержні лежать на одній прямій, а третій не належить цій прямій (рис. 2.7, б). У такому вузлі $N_1 = N_2$; $N_3 = 0$, тобто зусилля у стержнях, розташованих на одній прямій однакові, а третій стержень нульовий.

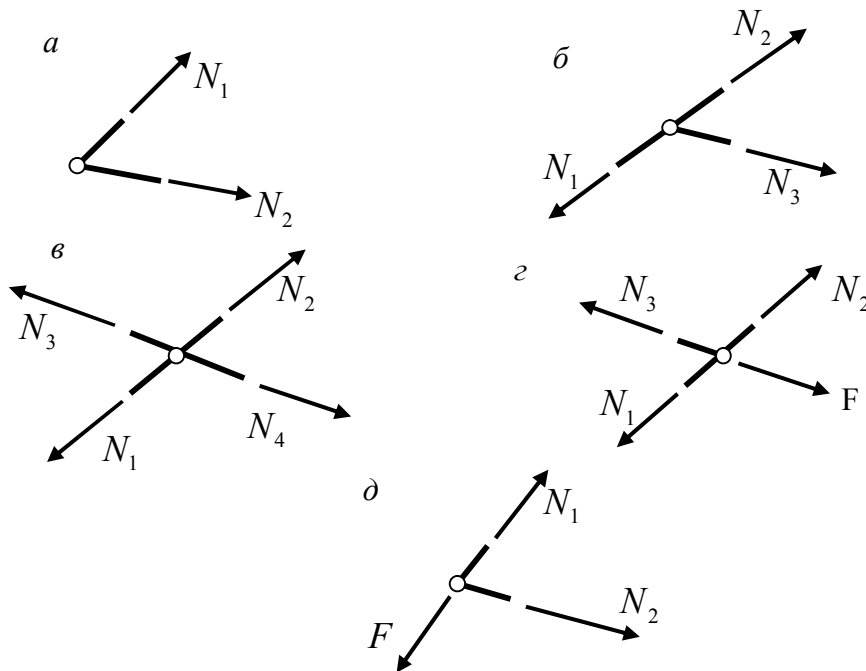


Рисунок 2.7

3. Ненавантажений чотиристержневий вузол, у якому стержні по двоє розташовані на двох прямих, що перетинаються (рис. 2.7, в). Тут маємо: $N_1 = N_2, N_3 = N_4$. Отже, для такого вузла зусилля у стержнях, розташованих на одній прямій, однакові.

4. Тристержневий вузол, у якому два стержні не лежать на одній прямій, а навантаження прикладене вздовж третього стержня, який не лежить на цій прямій (рис. 2.7, г). У такому вузлі зусилля в стержнях, що розташовані на одній прямій однакові ($N_1 = N_2$), а зусилля у третьому стержні дорівнює навантаженню ($N_3 = F$).

5. Двостержневий вузол, у якому стержні не лежать на одній прямій, а навантаження прикладене вздовж третього стержня, що не належить цій прямій (рис. 2.7, д). У цьому випадку зусилля в стержні, вздовж якого прикладене навантаження, дорівнює цьому навантаженню ($N_1 = F$), а другий стержень нульовий ($N_2 = 0$).

Зазначимо, що ознаки, за якими зусилля у наведених окремих випадках обертаються на нуль, зазвичай називають *ознаками нульових стержнів*.

Перевагою способу вирізання вузлів є одноманітність обчислення зусиль. До його вад відносять накопичення похибок розрахунку при переході від вузла до вузла.

Наведений спосіб вирізання вузлів у класичній формі добре пристосований для ручного розрахунку. Але він не є універсальним, тому що непридатний для розрахунку ферм із довільним розташуванням стержнів. У зв'язку з цим для розрахунків на комп'ютері спосіб вирізання вузлів застосовується в більш загальній формі. Цей, *загальний* для статично визначуваних ферм, *спосіб* полягає в тому, що рівняння рівноваги складаються для усіх вузлів ферми і далі розв'язується система сумісних рівнянь.

2.2.2 Способи наскрізного перерізу. Розподіл зусиль у стержнях балочної ферми

При обчисленні поодиноких зусиль у стержнях ферми зручно користуватися *способом наскрізного перерізу* у поєднанні зі *способом моментної точки або проєкцій*. Його застосування розглянемо на прикладі балочної ферми з трикутними ґратками з підвісками (рис. 2.8, а).

Визначивши опорні реакції з умов рівноваги ферми, поставимо за мету визначити зусилля в стержнях четвертої зліва панелі. Для обчислення цих зусиль проведемо *наскрізний переріз* I–I так, щоб він проходив через три стержня, і розглянемо рівновагу, наприклад, лівої частини ферми.

При обчисленні зусилля N_1 звернемо увагу на те, що інші розрізані стержні (зусилля N_2, N_3) перетинаються в точці m_1 . Ця точка є моментною (Ріттера) для зусилля N_1 , отже застосуємо *спосіб моментної точки*:

$$\sum M_{m_1} = 0, R_A \cdot 3d - F(2d + d) - N_1 \cdot h = 0. \quad (2.1)$$

Розв'язавши рівняння (2.1), знайдемо шукане зусилля:

$$N_1 = 7,5d/h.$$

Аналогічно застосуємо *спосіб моментної точки* для обчислення зусилля N_2 (моментна точка m_2 знаходиться на перетині зусиль N_1 та N_3):

$$\sum M_{m_2} = 0; R_A \cdot 4d - F(3d + 2d + d) + N_2 \cdot h = 0. \quad (2.2)$$

Відзначимо, що моментна точка не завжди знаходиться у вузлі ферми. Наприклад, для визначення зусилля N у розкосі третьої панелі ферми, наведеної на рисунку 2.8,в, проведено переріз I-I. Розрізані при цьому стержні поясів непаралельні і при продовженні перетинаються в точці m . Тоді маємо:

$$\sum M_m = 0; R_A \cdot a - F(a + d) - F(a - 2d) + N \cdot r = 0,$$

звідки

$$N = -\frac{R_A \cdot a - F(2a + 3d)}{r} = -\frac{F(1,5a - 3d)}{r}.$$

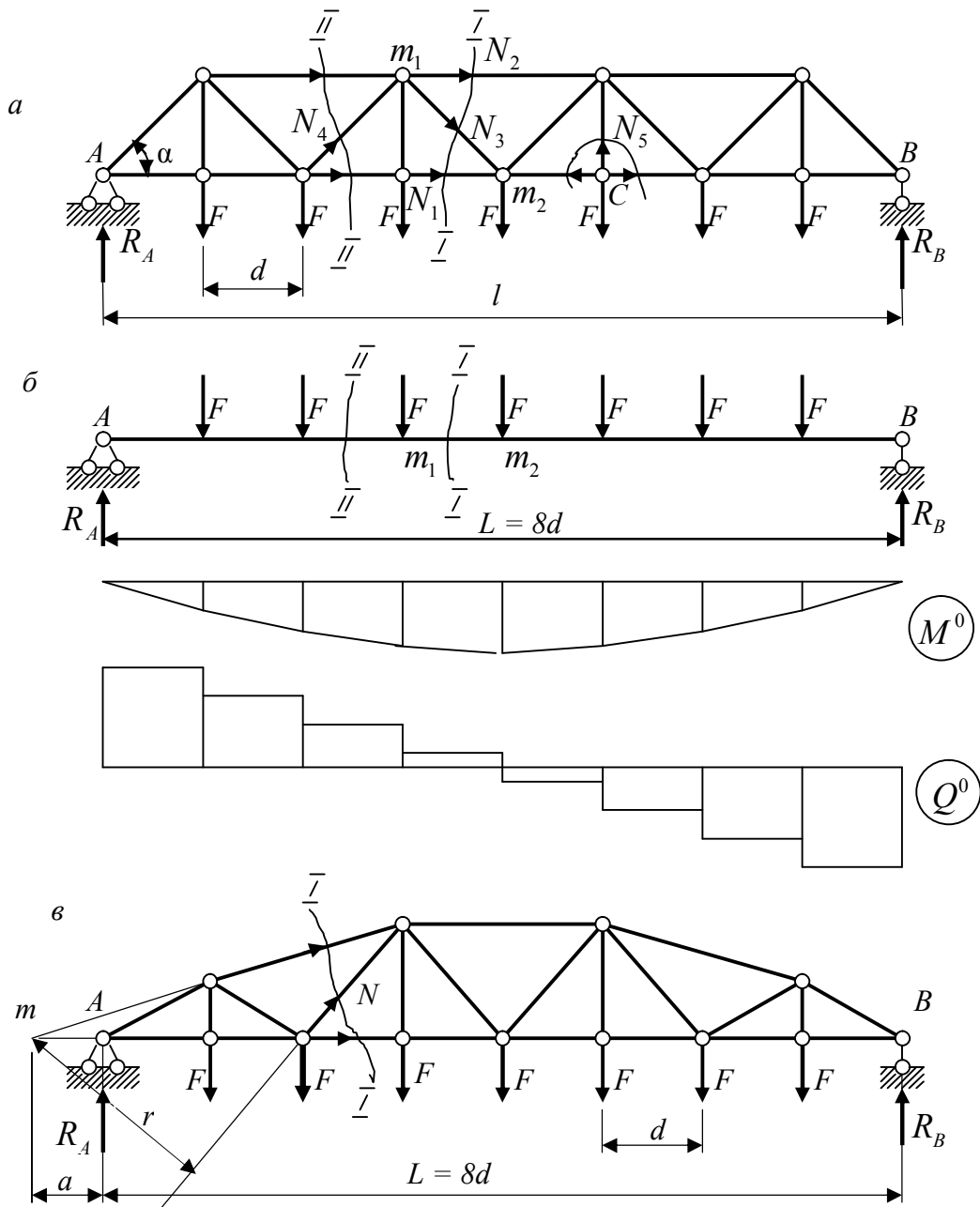


Рисунок 2.8

Обчислення зусилля N_3 у фермі (рис. 2.8, а) раціонально виконати *способом проєкцій*, оскільки інші розрізані стержні (зусилля N_1 та N_2) паралельні один одному. Для цього спроектуємо праві сили на вісь, перпендикулярну до паралельних зусиль:

$$\sum F_y = 0, R_A - 3F - N_3 \cdot \sin \alpha = 0. \quad (2.3)$$

Звідси маємо $N_3 = F/(2 \sin \alpha)$.

Отже, відзначимо, що в тих випадках, коли можна провести наскрізний переріз через три стержня, для визначення зусиль у цих стержнях завжди раціонально скористатися одним із способів – *моментної точки або проєкцій*. Якщо зусилля у двох перерізаних стержнях перетинаються при продовженні, ця точка перетину є моментною точкою для зусилля у третьому стержні. Якщо зусилля у двох стержнях паралельні одне одному, для визначення третього зусилля беруть суму проєкцій сил на вісь, перпендикулярну до паралельних зусиль.

Зазначимо, що наведені способи раціонально застосовувати і у тих випадках, коли наскрізний переріз перетинає більше трьох стержнів, але усі стержні, крім одного, перетинаються в одній точці або паралельні один одному.

Проаналізуємо *характер розподілу зусиль в стержнях* наведеної на рисунку 2.8, а балочної ферми.

Для цього розглянемо балку (рис. 2.8, б) однакового з фермою прогону, завантажену тим самим навантаженням. Опорні реакції цієї балки співпадають з реакціями вихідної ферми. Внутрішні зусилля в перерізах балки будемо називати балочними: M^o - балочний згинаючий момент і Q^o – балочна поперечна сила. Визначимо балочний згинаючий момент у перерізі m_1 :

$$M_{m_1}^o = R_A \cdot 3d - F(2d + d). \quad (2.4)$$

Замінивши перші два доданки у рівнянні (2.1) співвідношенням (2.4), одержимо $M_{m_1}^o - N_1 \cdot h = 0$, звідки одержуємо:

$$N_1 = M_{m_1}^o / h. \quad (2.5)$$

Аналогічно, використавши вираз для балочного моменту у перерізі m_2 і замінивши ним момент вертикальних сил у (2.2), одержимо: $M_{m_2}^o + N_2 \cdot h = 0$, звідки

$$N_2 = -M_{m_2}^o / h. \quad (2.6)$$

Зовнішні сили, що входять у рівняння (2.3), можна виразити через балочні поперечні сили. Дійсно, за рисунком 2.8, б $Q_I^o = R_A - 3F$ і рівняння (2.4) набуває вигляду: $Q_I^o - N_3 \cdot \sin \alpha = 0$, звідки

$$N_3 = Q_I^o / \sin \alpha. \quad (2.7)$$

Якщо виконати таку саму послідовність обчислень для зусилля N_4 (переріз II-II), прийдемо до аналогічного виразу:

$$N_4 = -Q_{II}^o / \sin \alpha. \quad (2.8)$$

Аналіз виразів (2.5), (2.6), та (2.7), (2.8) дозволяє зробити такі висновки відносно роботи елементів балочних ферм:

–зусилля в поясах за абсолютною величиною зростають від опор до середини прогону, наслідуючи закон зміни балочних згинаючих моментів (рис. 2.8, б), нижній пояс зазнає розтягу, верхній – стиску;

–зусилля в розкосах за абсолютною величиною зменшуються від опор до середини прогону відповідно до зміни балочних поперечних сил (рис. 2.8, б), нижні розкоси зазнають розтягу, верхні – стиску.

Завершуючи аналіз розподілу зусиль у досліджуваній фермі, визначимо зусилля N_5 . в підвісці Неважно побачити, що вузол С, до якого входить підвіска, відповідає окремому випадку на рисунку 2.7, з: $N_5 = F$. Очевидно, що всі підвіски працюють в однакових умовах – вони розтягнуті силою, прикладеною у відповідному вузлі нижнього поясу.

Виконаний аналіз дозволяє провести аналогію між роботою ферми та роботою балки. Серед елементів ферми виділяються пояси, що сприймають балочні згинаючі моменти, і гратки, що сприймають балочну поперечну силу. Прикладом використання балочної аналогії може бути застосування ферм з полігональним обрисом поясів (рис. 2.8, в). У цьому випадку збільшення висоти ферми до середини прогону дозволяє зробити розподіл зусиль в елементах поясів більш рівномірним.

Цю аналогію можна поширити і на інші ферми. Наприклад, для оцінки роботи поясів та розкосів ферми опори ЛЕП (рис. 2.9, а) під вітровим навантаженням можна, замінивши її стержнем (рис. 2.9, б), за епюрами M та Q одержати уявлення про роботу елементів ферми.

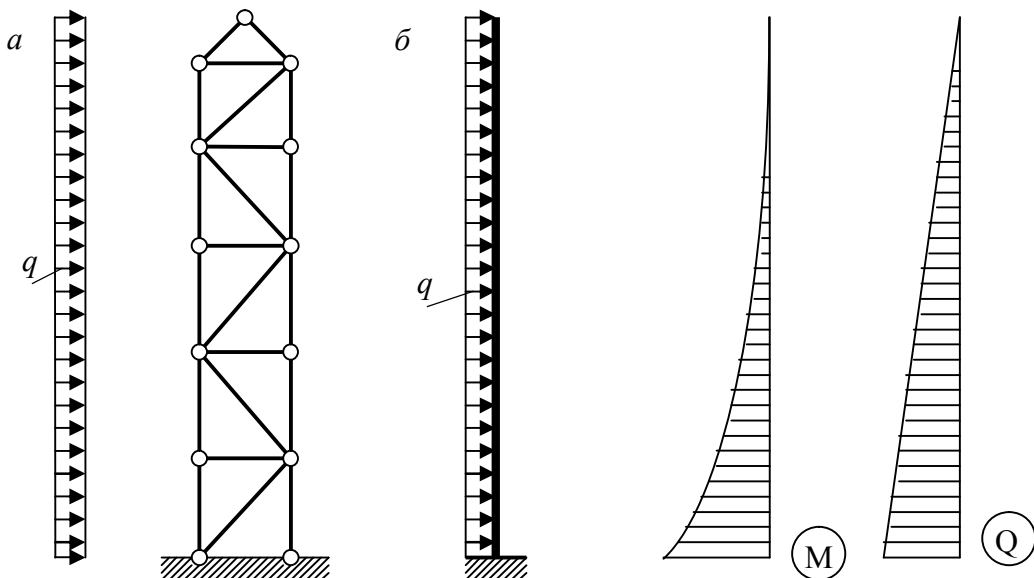


Рисунок 2.9

2.2.3 Визначення зусиль у стержнях складних ферм. Спосіб замкнутого перерізу. Спосіб сумісних перерізів

Для ряду ферм застосування розглянутих способів (вирізання вузлів у класичній формі, наскрізних перерізів) є неможливим. У деяких випадках розв'язок можна одержати, якщо провести переріз складної конфігурації, наприклад, I-I (рис. 2.10) для обчислення зусиль у поясах напіврозкритої ферми. Цей переріз перетинає чотири стержні, але можна знайти точки перетину (моментні точки) трьох з них – т. m_1 – для визначення зусилля N_1 та т. m_2 – для зусилля N_2 .

В інших випадках зусилля можна обчислити способом замкнутого перерізу або способом сумісних перерізів.

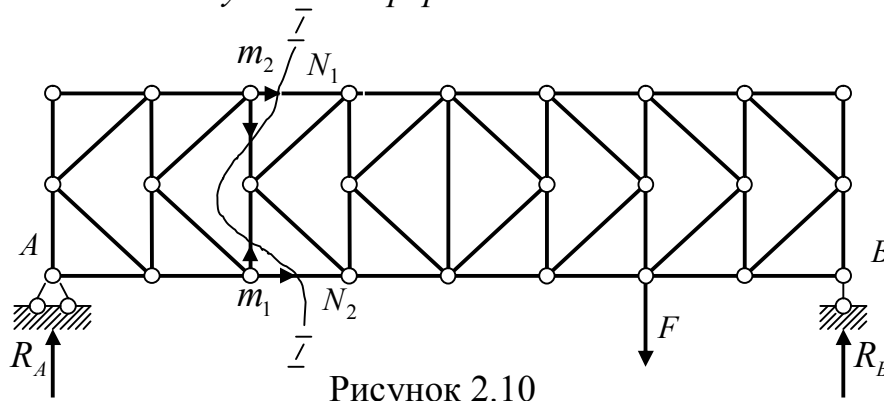


Рисунок 2.10

Розглянемо детальніше перелічені способи розрахунку складних ферм.

Спосіб замкнутого перерізу застосовують у тих випадках, коли у фермі (рис. 2.11, а) можна виділити деякий диск (1–2–3), зв'язаний з іншою частиною ферми трьома стержнями (1–4, 2–5 та 3–6). Вирізавши цей диск замкнутим перерізом, розглянемо його рівновагу (рис. 2.11, б). Застосувавши спосіб моментної точки, запишемо

$$\sum M_m = 0; F \cdot r_f - N_{2-5} \cdot r = 0,$$

звідки $N_{2-5} = F \cdot r_f / r$.

Подальший розрахунок можна виконати, наприклад, способом вирізання вузлів: у вузлі 2 залишається два невідомі зусилля – N_{1-2}, N_{2-3} і далі вузли 1, 3, 4, 5.

Замкнутий переріз може розрізати й більше трьох стержнів, якщо інші стержні перетинаються два рази (в загальному випадку парну кількість разів). Так, у фермі, наведеній на рисунку 2.12, а, замкнутий переріз, що вирізає диск 1–4–5, крім стержнів 1–2, 3–4 та 5–6, перетинає також стержні 3–6 та 2–6. Але у відокремленій частині (рис. 2.12, б) зусилля N_{3-6} та N_{2-6} в стержнях, що перерізані двічі, утворюють пари розташованих на одній прямій рівних і протилежно спрямованих сил. Геометрична сума цих сил дорівнює нулю, отже вони не входять у рівняння рівноваги і зусилля у інших стержнях (1–2, 3–4, 5–6) можна знайти способом моментної точки.

Спосіб сумісних перерізів розглянемо на прикладі ферми, показаної на рисунку 2.13. Жодний переріз у цій фермі не перетинає менше ніж чотири стержня. Звернемо увагу на перерізи I-I та II-II. Кожен з них розрізає чотири стержня, але два з них (2-7 та 3-6) повторюються. Застосовуючи спосіб моментної точки для частини, що відокремлена перерізом I-I, запишемо рівняння рівноваги так, щоб у нього увійшли лише зусилля N_{2-7} та N_{3-6} :

$$\sum M_{m_1} = 0; \quad -F \cdot r_f + N_{2-7} \cdot r_1 - N_{3-6} \cdot r_2 = 0. \quad (2.9)$$

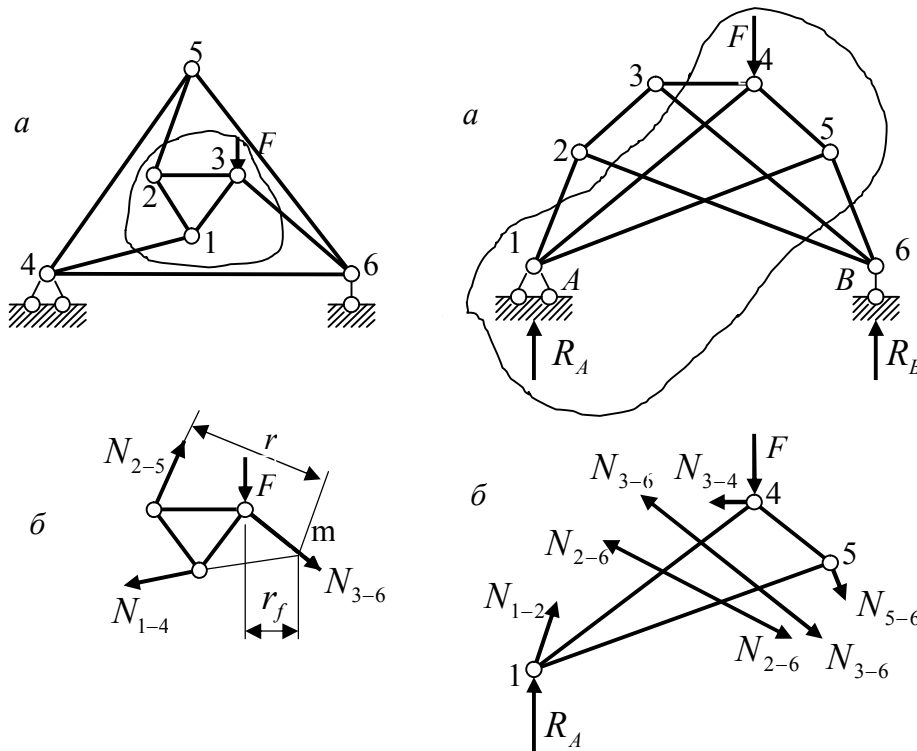


Рисунок 2.11

Рисунок 2.12

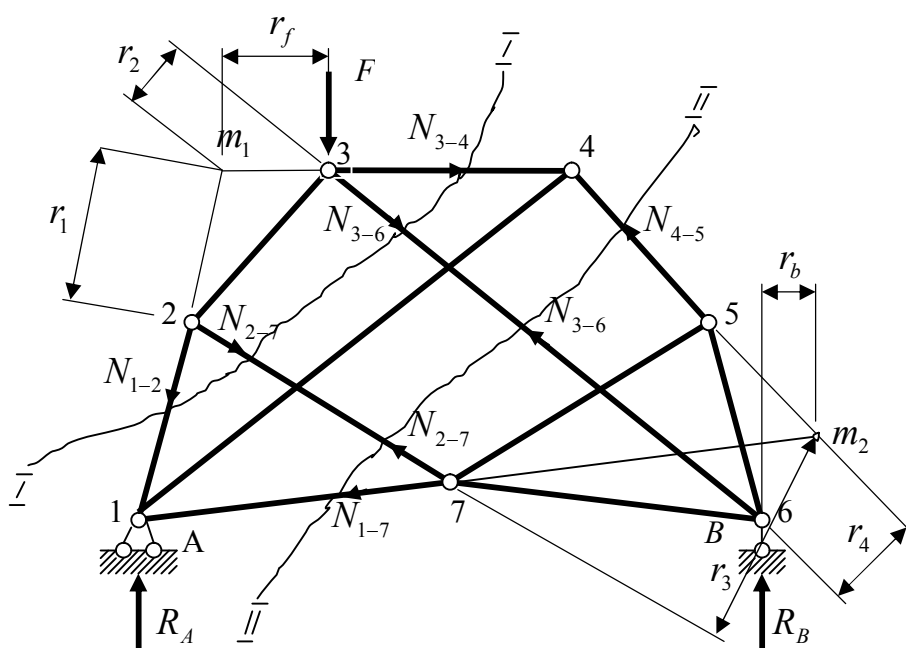


Рисунок 2.13

Аналогічно для частини, відокремленої перерізом II-II:

$$\sum M_{m_2} = 0; \quad -R_B \cdot r_b - N_{2-7} \cdot r_3 - N_{3-6} \cdot r_4 = 0. \quad (2.10)$$

Розв'язання системи рівнянь (2.9) та (2.10) дозволяє знайти величини зусиль N_{2-7} та N_{3-6} .

Подальший розрахунок ферми можна виконати, наприклад, способом вирізання вузлів.

2.3 Шпренгельні ферми

Зусилля в поясах ферми, як впливає з (2.5), (2.6), обернено пропорційні висоті ферми. Тому при великих прогонах ферм бажано збільшувати їх висоту. Через конструктивні вимоги (розміри вузлових фасонки) кут нахилу розкосів до поясів, як правило, не повинен перебільшувати 60° . Тому збільшення висоти ферм викликає подовження панелі, а це, у свою чергу, приводить до збільшення розмірів і маси тих елементів споруди, що забезпечують вузлову передачу навантаження (плит – у кроквяних фермах, балок проїзної частини – у мостових).

Щоб уникнути подовження панелі, у вантажному поясі основної ферми вводять проміжні вузли за допомогою допоміжних ферм – шпренгелів, що опираються у вузли основної ферми (рис. 2.14, а). Стержні шпренгелів зазвичай суміщають зі стержнями основної ферми, одержуючи таким чином шпренгельну ферму (рис. 2.14, б).

Особливість шпренгелів полягає в балочному характері їх роботи, тобто при вертикальному навантаженні вони передають у вузли основної ферми тільки вертикальний тиск.

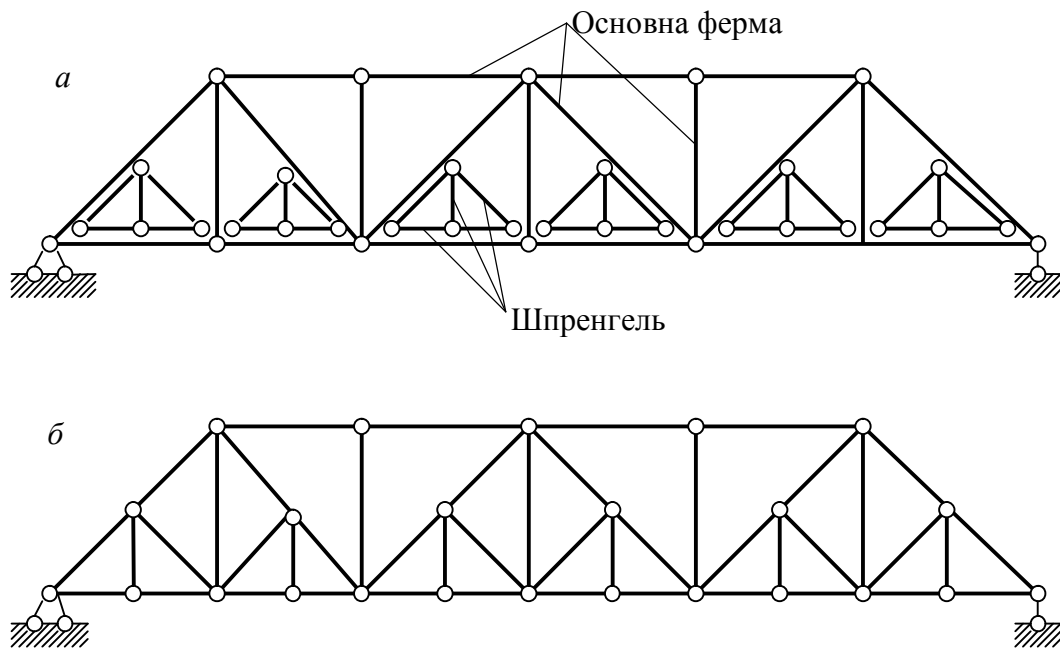


Рисунок 2.14

Конструкція шпренгелів може бути різною. На рисунку 2.15, а, б наведені розрахункові схеми таких шпренгелів. При цьому шпренгелі на рисунку 2.15, а передають навантаження у вузли вантажного поясу й називаються

однорядними, на відміну від двох'ярусних шпренгелів, (рис. 2.15, б), що передають навантаження у вузли протилежного поясу.

Розрізняють три типи стержнів шпренгельних ферм.

1. Стержні, що входять до складу лише основної ферми. Зусилля в них обчислюють розрахунком основної ферми (шпренгелі відкидають, а прикладене до них навантаження розподіляють у вузли основної ферми).

2. Стержні, що входять до складу лише шпренгелів. Зусилля в них знаходять розрахунком відповідного шпренгеля як двохопорної ферми на місцеве навантаження.

3. Стержні, що входять до складу і основної ферми, і шпренгеля. Зусилля в них одержують як алгебраїчну суму зусиль, знайдених окремо розрахунком основної ферми і, окремо, розрахунком відповідного шпренгеля.

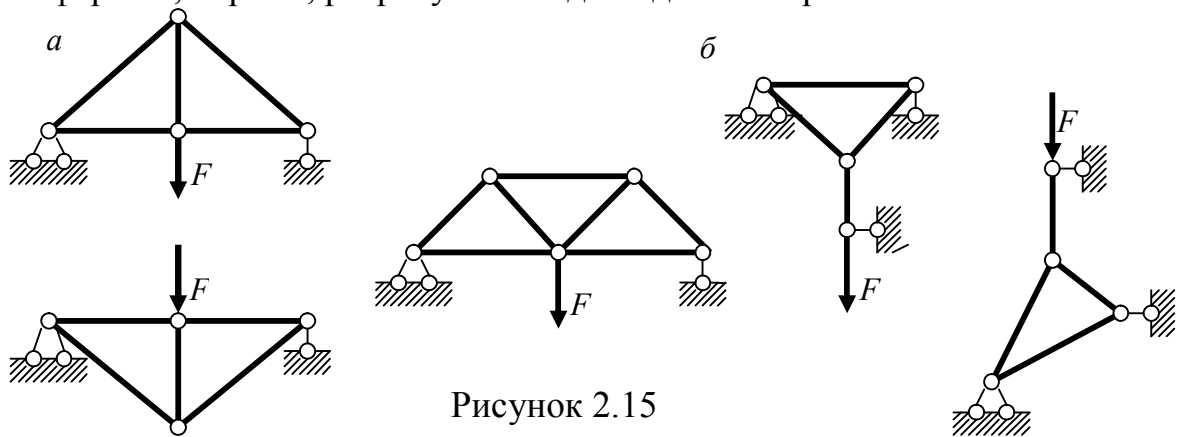


Рисунок 2.15

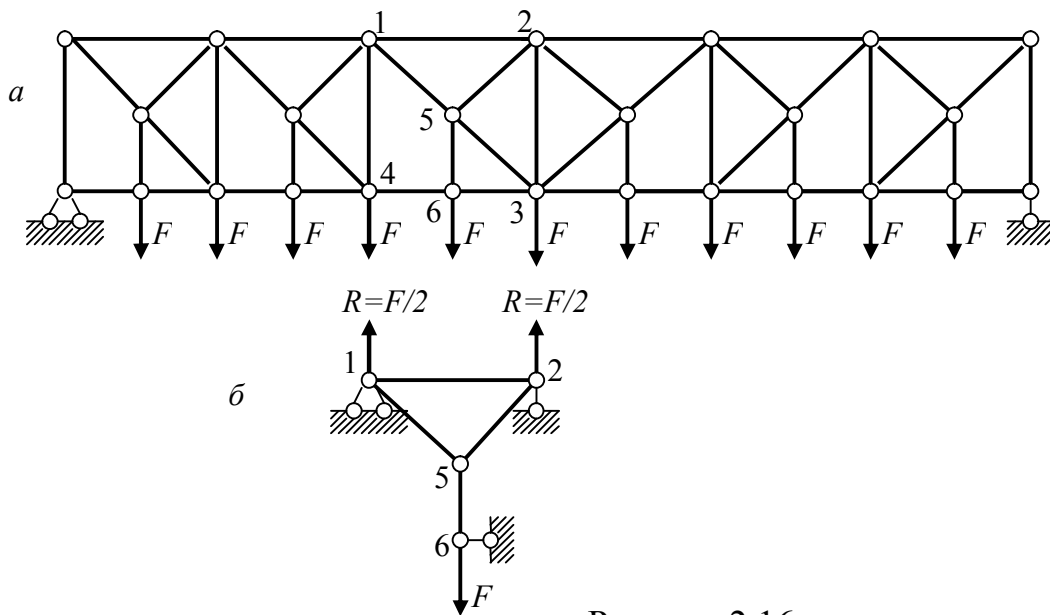


Рисунок 2.16

Наприклад, для ферми з двох'ярусними шпренгелями, наведеної на рисунку 2.16, а, для визначення зусиль у панелі 1–2–3–4 розглянемо окремо шпренгель цієї панелі (рис. 2.16, б) і, окремо, основну ферму (рис. 2.17). Оскільки шпренгель двох'ярусний, сил F , що прикладені в нижніх вузлах шпренгеля, передаються на верхні вузли основної ферми (див. реакції опор шпренгеля на рисунку 2.16, б).

Отже, зусилля в стержнях першого типу – $N_{2-3}, N_{4-6} = N_{3-6} = N_{3-4}, N_{3-5} = N_{1-3}^{осн}$ визначають за розрахунком основної ферми (рис. 2.17), зусилля в стержнях другого типу – N_{2-5}, N_{5-6} – за розрахунком шпренгеля (рис. 2.16, б), зусилля в стержнях третього типу – N_{1-2}, N_{1-5} – підсумовуючи відповідні зусилля, одержані за розрахунком шпренгеля та основної ферми:

$$N_{1-2} = N_{1-2}^{осн} + N_{1-2}^{шпр}; \quad N_{1-5} = N_{1-3}^{осн} + N_{1-5}^{шпр}.$$

Слід зазначити, що при обчисленні зусиль поділ шпренгельної ферми на основну ферму і шпренгелі в деяких випадках непотрібний. Наприклад, для визначення зусилля N_{5-6} достатньо розглянути рівновагу вузла 6 вихідної ферми (рис. 2.16, а).

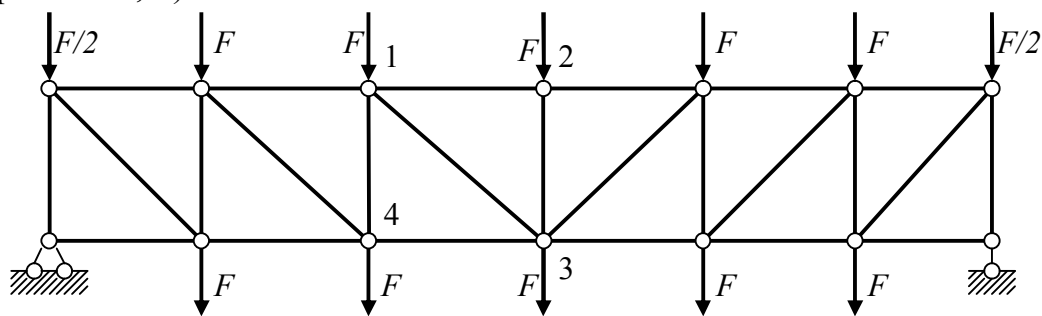


Рисунок 2.17

Запитання для самоконтролю

1. Що називається фермою?
2. Які особливості навантаження ферм?
3. Які зусилля виникають в стержнях ферм і чому?
4. Чому ферми більш економічні порівняно з балками?
5. Які елементи розрізняють у фермах?
6. За якими ознаками класифікують ферми?
7. Як застосовується спосіб вирізання вузлів для ручного розрахунку? У чому переваги й вади цього способу?
8. Назвіть особливі випадки рівноваги вузлів.
9. Як можна застосувати спосіб вирізання вузлів для розрахунку ферми з будь-яким розташуванням стержнів?
10. В якому випадку раціонально визначати зусилля способом моментної точки? Як знайти моментну точку?
11. Як залежать зусилля в поясах балочної ферми від її висоти?
12. Як змінюються зусилля в поясах балочної ферми вздовж її прогону?
13. В якому випадку раціонально застосовувати спосіб проєкцій?
14. Яка різниця в характері роботи висхідних та низхідних розкосів балочної ферми?
15. Як змінюються зусилля в розкосах балочної ферми вздовж її прогону?
16. В яких випадках застосовується спосіб замкнутого перерізу?
17. Як застосовується спосіб сумісних перерізів?
18. З якою метою застосовують шпренгелі?
19. Чим відрізняється робота двох'ярусних шпренгелів від одноярусних?
20. Як визначають зусилля в стержнях шпренгельної ферми?

3 СТАТИЧНО ВИЗНАЧУВАНІ РОЗПІРНІ СИСТЕМИ

3.1 Основні визначення

Стержень із криволінійною віссю (точніше, брус малої кривини), показаний на рисунку 3.1, *а*, є балочною системою. Справді, при дії вертикального навантаження в такій системі виникають тільки вертикальні опорні реакції. На відміну від балки, в такому брусі з'являються значні горизонтальні переміщення опорної точки *B*. Якщо закріпити обидва опорні перерізи бруса нерухомо, в опорах, крім вертикальних, з'являться і горизонтальні опорні реакції (рис. 3.1, *б*). Ці реакції називають *розпором*, а таку систему – *аркою*. Походження терміна «розпір» пов'язано з тим, що він відповідає тим силам, які діють на опорні пристрої, прагнучи розсунути («розперти») їх в горизонтальному напрямку.

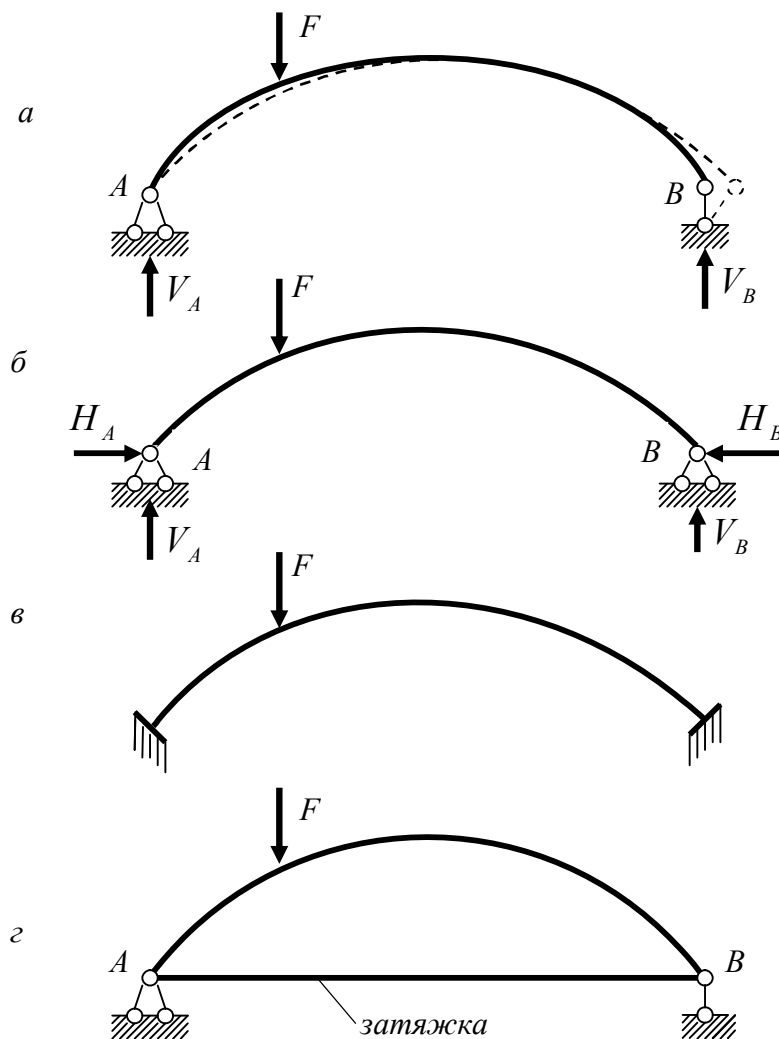


Рисунок 3.1

Перерізи, що відповідають нерухомим опорам арки, називають *п'ятами*, а перерізи, найбільш віддалені від п'ят (переріз *C* на рис. 3.2), – *ключем* або *замком*. Відстань між центрами опорних перерізів арки називають *прогоном*.

Найкоротшу відстань від лінії, що з'єднує п'яти, до замка називають *стрілою підйому арки* і позначають f . Відношення стріли підйому до прогону називають *пологістю арки*. При $f/l < 1/4$ арки звичайно вважають пологими, при $f/l > 1/4$ – крутими.

Арка, показана на рисунку 3.2, називається *тришарнірною*. Вона є статично визначуваною.

Арку, показану на рисунку 3.1, б, називають *двошарнірною*, якщо опори арки є затисненнями, арка називається *безшарнірною* (рис. 3.1, в). Двошарнірна і безшарнірна арки є статично невизначуваними.

Системи, у яких при дії вертикального навантаження, крім вертикальних, з'являються і горизонтальні опорні реакції, називають *розпирними*. Крім арок, до них відносять тришарнірні рами, аркові ферми, комбіновані і висячі системи.

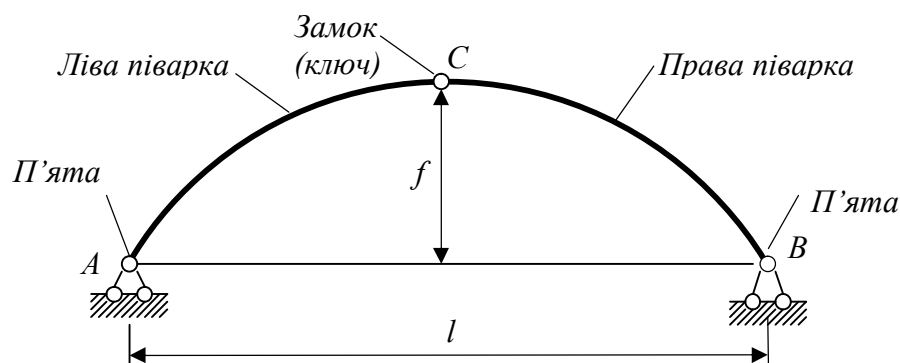


Рисунок 3.2

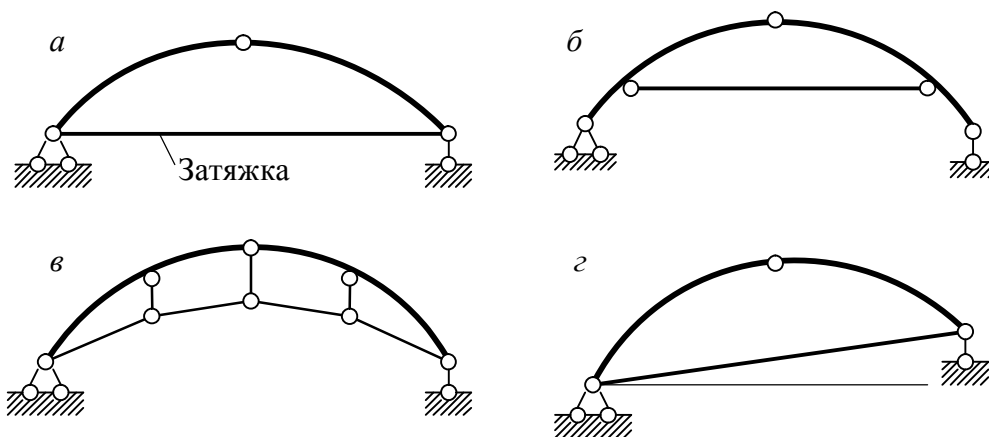


Рисунок 3.3

Взаємна нерухомість опор двошарнірної і тришарнірної арки може бути забезпечена також встановленням додаткового стержня, який з'єднує пів арки. Цей стержень називають *затяжкою* (рис. 3.1, г, 3.4, а). При цьому затяжка може розташовуватися вище рівня п'ят (*підвищена затяжка*), а також бути виконана *ламаною*. Ці варіанти розташування затяжки для тришарнірної арки наведені на рисунку 3.3, б, в.

На відміну від звичайної арки, одна з опор тришарнірної арки із затяжкою повинна бути шарнірно-рухомою, інакше наявність затяжки втрачає сенс, а арка з підвищеною затяжкою не буде статично визначуваною. За цих обставин при вертикальному навантаженні горизонтальні реакції відсутні, а розпір сприймається затяжкою всередині споруди. Арки із затяжками застосовують переважно в тих випадках, коли влаштування опор, що забезпечують сприйняття розпору, стає складним (у берегових опорах мостів та шляхопроводів при слабких ґрунтах, у покриттях будівель).

Арку, п'яти якої розташовані на різних рівнях, називають *повзучою* (рис. 3.3, з).

Вісь арки найчастіше приймають окресленою за параболою або дугою кола. Арки в цьому випадку називають відповідно *параболічними* та *коловими* (*циркульними*).

3.2 Розрахунок тришарнірної арки на вертикальне навантаження

Розглянемо тришарнірну арку з довільним обрисом осі, до якої прикладене довільне вертикальне навантаження – сили F_1 , F_2 (рис. 3.4, а). У опорах арки виникають вертикальні реакції V_A та V_B , а також горизонтальні – H_A та H_B .

Запишемо рівняння рівноваги арки:

$$\begin{aligned}\sum F_x &= H_A - H_B = 0; \\ \sum M_A &= -F_1 a_1 - F_2 a_2 + V_B l = 0; \\ \sum M_B &= F_1 (l - a_1) + F_2 (l - a_2) - V_A l = 0.\end{aligned}\tag{3.1}$$

З першого рівняння (3.1) одержимо $H_A = H_B$, тобто *при вертикальному навантаженні горизонтальні реакції опор будуть однакові*. Ці реакції називають *розпором* і позначають так:

$$H_A = H_B = H.\tag{3.2}$$

З другого та третього рівняння (3.1) знаходяться вертикальні реакції:

$$V_B = (F_1 a_1 + F_2 a_2) / l; \quad V_A = [F_1 (l - a_1) + (F_2 (l - a_2))] / l.$$

При розрахунку арки на вертикальне навантаження, як і при розрахунку ферм, використовуються балочні аналогії. Розглянемо балку на двох опорах (рис. 3.4, б) одного прогону з аркою, завантажену таким самим навантаженням, що і арка. Реакції і зусилля у цій балці, як і раніше для ферм, будемо називати балочними.

Неважко упевнитись, що умови рівності нулю сум моментів сил балки відносно її опорних точок A та B повністю співпадають з другим та третім

рівняннями (3.1). Звідси можна зробити висновок, що *вертикальні реакції опор тришарнірної арки при вертикальному навантаженні є балочними*.

Для визначення розпору використаємо умову рівності нулю згинаючого моменту в проміжному шарнірі C арки.

Цей момент запишемо, наприклад, через сили, розташовані ліворуч від перерізу C : $M_C = \sum_{лів} M_C = 0$ або:

$$-V_A \frac{l}{2} + F_1 \left(\frac{l}{2} - a_1 \right) + H f = 0. \quad (3.3)$$

Звернемо увагу на те, що перші два доданки у (3.3) являють собою взятий зі зворотним знаком балочний згинаючий момент M_C^o у перерізі C (рис. 3.4, б):

$$M_C^o = V_A \frac{l}{2} - F_1 \left(\frac{l}{2} - a_1 \right).$$

З урахуванням цього одержуємо:

$$H = M_C^o / f. \quad (3.4)$$

Оскільки величина балочного згинаючого моменту залежить лише від прогону арки та заданого навантаження, можна зробити висновок, що *величина розпору обернено пропорційна стрілі підйому арки*.

Обчислимо внутрішні зусилля у перерізі K арки (рис. 3.4, а) з координатами центру ваги x_K та y_K . Для цього розглянемо рівновагу лівої від перерізу частини арки (рис. 3.4, в) під дією зовнішніх та внутрішніх сил. Умови рівності нулю суми моментів цих сил відносно центру ваги перерізу та сум проєкцій сил на нормаль і дотичну до осі арки мають такий вид:

$$\sum M_R = -V_A x_K + F_1 (x_K - a_1) + H y_K + M_K = 0; \quad (3.5)$$

$$\sum F_{норм} = (V_A - F_1) \cos \varphi_K - H \sin \varphi_K - Q_K = 0; \quad (3.6)$$

$$\sum F_{дот} = (V_A - F_1) \sin \varphi_K + H \cos \varphi_K + N_K = 0. \quad (3.7)$$

Перші два доданки у (3.5) – моменти вертикальних сил - являють собою взятий зі зворотним знаком балочний згинаючий момент (рис. 3.4, б) в перерізі K :

$$M_K^o = V_A x_K - F_1 (x_K - a_1).$$

З урахуванням цього з (3.5) одержимо вираз для згинаючого моменту в перерізі арки при вертикальному навантаженні:

$$M_K = M_K^o - H y_K. \quad (3.8)$$

У рівняннях (3.6), (3.7) вираз у дужках являє собою балкову поперечну силу ($Q_K^o = V_A - F_1$) у перерізі K (рис. 3.4, б). З урахуванням цього одержуємо такі залежності:

$$Q_K = Q_K^o \cos \varphi_K - H \sin \varphi_K; \quad (3.9)$$

$$N_K = -Q_K^o \sin \varphi_K - H \cos \varphi_K. \quad (3.10)$$

Аналізуючи (3.8), (3.9), (3.10), можна зробити наступні висновки.

Розпір створює в перерізі арки момент, протилежний за знаком моменту вертикальних сил. За рахунок цього згинаючі моменти в арці зменшуються порівняно зі згинаючими моментами в еквівалентній балці.

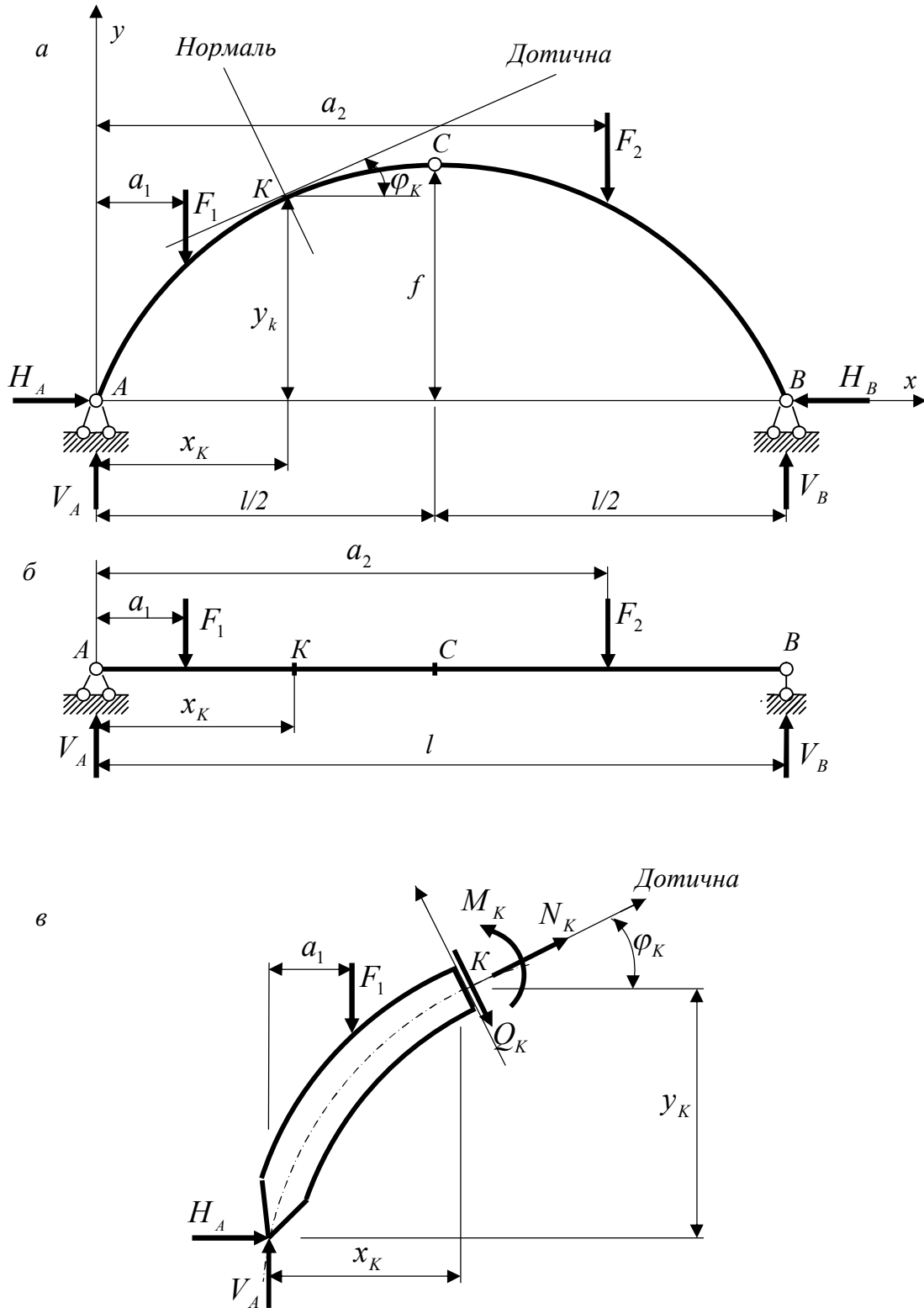


Рисунок 3.4

У перерізах арки з'являються значні поздовжні сили, тобто, по суті, порівняно з балкою, деформація згину в арці частково замінюється деформацією стиску. Ця обставина робить арку більш економічною порівняно з балкою за рахунок повнішого використання матеріалу при розтягу-стиску.

Вирази для внутрішніх зусиль містять нелінійні величини y , $\sin \varphi$, $\cos \varphi$, отже незалежно від наявності розподіленого навантаження зусилля змінюються вздовж осі арки нелінійно. Цю обставину необхідно враховувати при побудові епюр.

Як впливає із виразу (3.10), поздовжні сили в арці при дії вертикального навантаження завжди стискаючі. У зв'язку із цим в арці, на відміну від інших систем, іноді стискаючі поздовжні сили вважають додатними.

При обчисленні зусиль положення перерізу на осі арки зазвичай задають координатою x . Для визначення ординат y центрів ваги перерізів та тригонометричних функцій кута φ нахилу дотичної до осі у арках різного обрису осі користуються такими залежностями:

- вісь окреслена за квадратною параболою:

$$y = \frac{4f}{l^2} x(l-x); \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{dy}{dx} = \frac{4f}{l^2} (l-2x);$$

- вісь окреслена за дугою кола:

$$y = f - r(1 - \cos \varphi); \quad \varphi = \arcsin \frac{1}{r} \left(\frac{l}{2} - x \right), \text{ де } r = \frac{f}{2} + \frac{l^2}{8f};$$

- вісь окреслена за синусоїдою:

$$y = f \sin \frac{\pi x}{l}; \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{dy}{dx} = \frac{\pi f}{l} \cos \frac{\pi x}{l};$$

- вісь окреслена за дугою еліпса:

$$y = \frac{2f}{l} \sqrt{x(l-x)}; \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{f}{l} \frac{(l-2x)}{\sqrt{x(l-x)}}.$$

3.3 Розрахунок арки з затяжкою

Розглянемо арку з затяжкою (рис. 3.5), завантажену довільним вертикальним навантаженням. Відповідно до опорних кріплень ця арка зовні є балковою системою. Горизонтальна реакція при вертикальному навантаженні відсутня, а вертикальні реакції – є балковими, тобто відповідають реакціям еквівалентної двохопорної балки. Для визначення зусилля в затяжці проведемо переріз $I-I$ через шарнір C . З умови рівності нулю згинаючого моменту в шарнірі одержимо:

$$N_s = M_C^o / f. \quad (3.11)$$

З одержаного виразу випливає, що зусилля в затяжці відповідає розпору арки без затяжки, тому його часто називають *внутрішнім розпором*.

Внутрішні зусилля у перерізах арки визначають за формулами, аналогічними (3.8)...(3.10), замінивши в них H на N_3 :

$$\begin{aligned} M_k &= M_k^0 - N_3 y_k; \\ Q_k &= Q_k^0 \cos \varphi_k - N_3 \sin \varphi_k; \\ N_k &= -Q_k^0 \sin \varphi_k - N_3 \cos \varphi_k. \end{aligned} \quad (3.12)$$

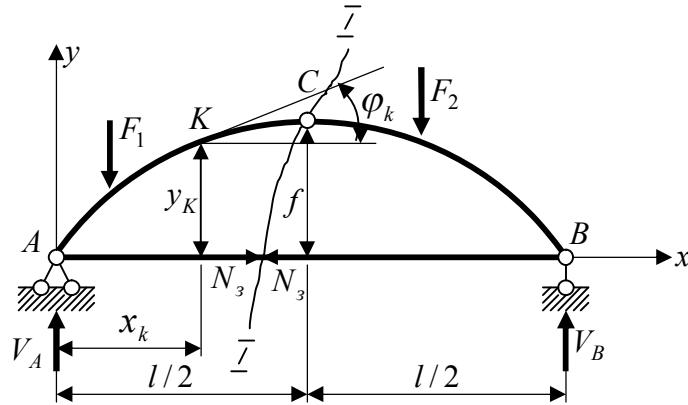


Рисунок 3.5

При розрахунку арки з підвищеною затяжкою (рис. 3.6) слід мати на увазі, що частина арки, розташована нижче затяжки, працює як балочна система. Зусилля в такій затяжці визначається за формулою:

$$N_3 = M_C^0 / f', \quad (3.13)$$

де f' – відстань від затяжки до замка С.

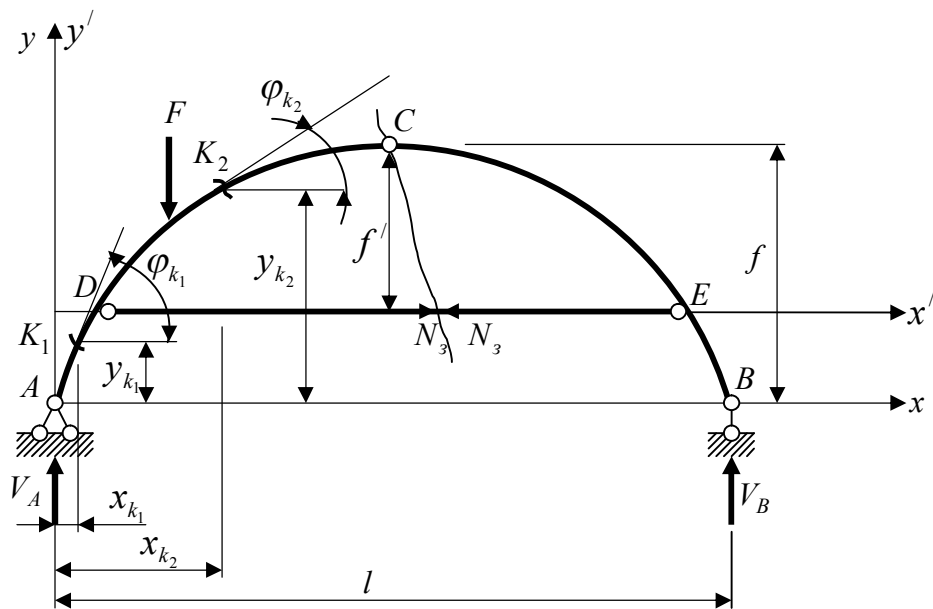


Рисунок 3.6

Внутрішні зусилля в перерізах, розташованих нижче затяжки, не залежать від наявності затяжки:

$$\left. \begin{aligned} M_{K_1} &= M_{K_1}^o, \\ Q_{K_1} &= Q_{K_1}^o \cdot \cos \varphi_{K_1}, \\ N_{K_1} &= -Q_{K_1}^o \cdot \sin \varphi_{K_1}. \end{aligned} \right\} \quad (3.14)$$

Для перерізів, розташованих вище затяжки, необхідно враховувати наявність горизонтальних сил N_3 , прикладених до арки в точках D та E :

$$\left. \begin{aligned} M_{K_2} &= M_{K_2}^o - N_3 \cdot y_{K_2}; \\ Q_{K_2} &= Q_{K_2}^o \cdot \cos \varphi_{K_2} - N_3 \cdot \sin \varphi_{K_2}; \\ N_{K_2} &= -Q_{K_2}^o \cdot \sin \varphi_{K_2} - N_3 \cdot \cos \varphi_{K_2}. \end{aligned} \right\} \quad (3.15)$$

3.4 Раціональна вісь тришарнірної арки

Раціональною називають таку вісь арки, при якій згинаючі моменти в усіх її перерізах дорівнюють нулю:

$$M = M^0 - Hy = 0.$$

Звідси одержуємо:

$$y_{\text{рац}} = M^0 / H \quad (3.16)$$

Як випливає з (3.4), величина розпору при заданих навантаженні та стрілі підйому є константою. Отже, *раціональна вісь арки окреслена за балковою епюрою згинаючих моментів*.

Для прикладу наведемо арку при дії рівномірно розподіленого вздовж прогону навантаження інтенсивності q (рис. 3.7, а).

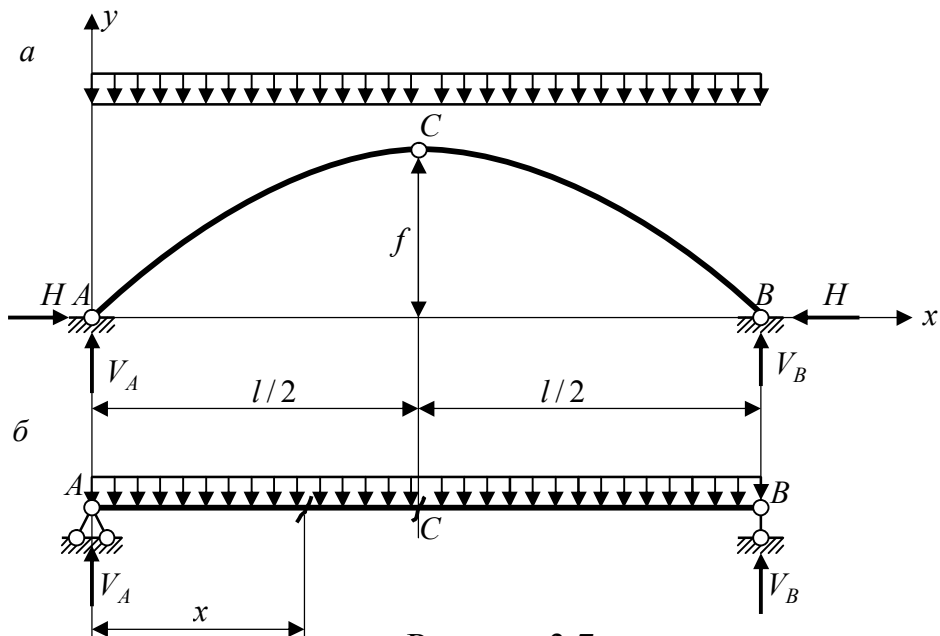


Рисунок 3.7

Балочні реакції та згинаючі моменти неважко визначити за рисунком 3.7, б:

$$V_A = V_B = ql / 2;$$

$$M^0 = V_A x - qx^2 / 2 = \frac{q}{2} x(l - x);$$

$$M_C^0 = ql^2 / 8.$$

Розпір арки визначаємо за (3.4):

$$H = \frac{M_C^0}{f} = \frac{ql^2}{8f}.$$

Підставляючи вирази балочних моментів та розпору в (3.16), одержимо:

$$y_{рац} = \frac{4f}{l^2} x(l - x).$$

Отже, раціональна вісь арки при рівномірно розподіленому вздовж прогону навантаженні окреслена за квадратною параболою.

Зазначимо, що перерізи арки з раціональною віссю зазнають лише стиску і, особливо при малих стрілах підйому, слід враховувати можливість втрати стійкості арки.

3.5 Особливості розрахунку розпірних систем

3.5.1 Тришарнірна арка при довільно спрямованому навантаженні

При дії на арку такого навантаження (рис. 3.8) останнє розкладають на вертикальні F_{1y}, F_{2y} й горизонтальні F_{1x}, F_{2x} складові.

Для визначення вертикальних реакцій V_A, V_B розглядають рівновагу арки як твердого тіла:

$$\sum M_A = -F_{1x}y_1 - F_{1y}x_1 - F_{2x}y_2 - F_{2y}x_2 + V_B l = 0;$$

$$\sum M_B = -F_{1x}y_1 + F_{1y}(l - x_1) - F_{2x}y_2 + F_{2y}(l - x_2) - V_A l = 0,$$

звідки:

$$V_B = (F_{1x}y_1 + F_{1y}x_1 + F_{2x}y_2 + F_{2y}x_2) / l,$$

$$V_A = [-F_{1x}y_1 + F_{1y}(l - x_1) - F_{2x}y_2 + F_{2y}(l - x_2)] / l.$$

Отже, при довільно спрямованому навантаженні вертикальні реакції опор арки не є балочними.

Для визначення горизонтальних складових H_A та H_B реакцій опор записують умови рівності нулю згинаючого моменту в замковому шарнірі C . Розглядаючи ліві від шарніру сили, одержимо:

$$M_C = \sum M_{C,лів} = V_A \frac{l}{2} - F_{1x}(f - y_1) - F_{1y} \left(\frac{l}{2} - x_1 \right) - H_A f = 0,$$

$$\text{звідки } H_A = \left[V_A \frac{l}{2} - F_{1x}(f - y_1) - F_{1y} \left(\frac{l}{2} - x_1 \right) \right] / f.$$

Так само через праві сили маємо:

$$M_C = \sum M_{C,прав} = V_B \frac{l}{2} + F_{2x}(f - y_2) - F_{2y} \left(x_2 - \frac{l}{2} \right) - H_B f = 0,$$

$$\text{звідки } H_B = \left[V_B \frac{l}{2} + F_{2x}(f - y_2) - F_{2y} \left(x_2 - \frac{l}{2} \right) \right] / f.$$

Умова рівності нулю суми проекцій сил арки на вісь x дає:

$$H_A + F_{1x} + F_{2x} - H_B = 0,$$

звідки випливає, що при довільно спрямованому навантаженні горизонтальні реакції опор у загальному випадку не будуть однаковими.

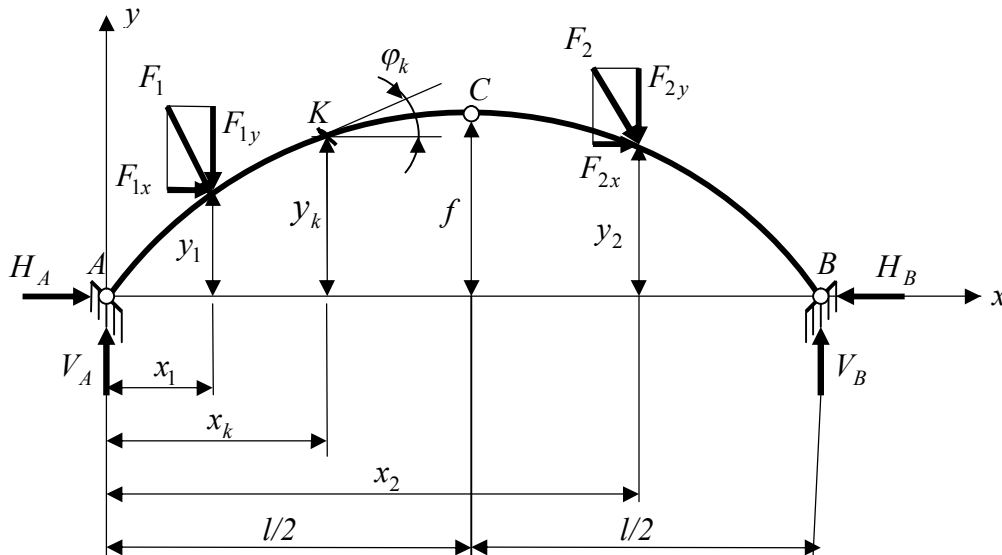


Рисунок 3.8

При обчисленні внутрішніх зусиль у перерізах арки необхідно користуватися загальними правилами опору матеріалів. Наприклад, для перерізу K (рис. 3.8) маємо:

$$M_K = V_A \cdot x_K - F_{1y}(x_K - a_1) - H_A \cdot y_K - F_{1x}(y_K - y_1),$$

$$Q_K = (V_A - F_{1y}) \cos \varphi_K - (H_A + F_{1x}) \sin \varphi_K,$$

$$N_K = (F_{1y} - V_A) \sin \varphi_K - (H_A + F_{1x}) \cos \varphi_K.$$

3.5.2 Тришарнірні рами

Розрахунок тришарнірної рами (рис. 3.9) відрізняється від розрахунку інших рам лише методикою визначення опорних реакцій V_A, V_B, H_A, H_B . Їх знаходять з рівнянь рівноваги, аналогічних рівнянням рівноваги тришарнірної арки при довільно спрямованому навантаженні (п. 3.5.1). Визначення внутрішніх зусиль та побудовання їх епюр виконуються як для звичайних рам.

3.5.3 Тришарнірні аркові ферми

Тришарнірна аркова ферма (рис. 3.10, а) являє собою тришарнірну арку, напіварки якої виконані у вигляді ферм. Вертикальні реакції і розпір визначаються в арковій фермі так само, як і в тришарнірній арці або рамі. Наприклад, при вертикальному навантаженні (рис. 3.10, а) $\sum M_A = 0$, звідки

$V_B = 3,5F$; $\sum M_B = 0$, звідки $V_A = 3,5F$; $\sum F_x = 0$, звідки $H_A = H_B = H$;
 $\sum M_{C,l} = 0$, звідки $H = M_C^0 / h$ (M_C^0 – балочний згинаючий момент у перерізі C за рис. 3.10, б).

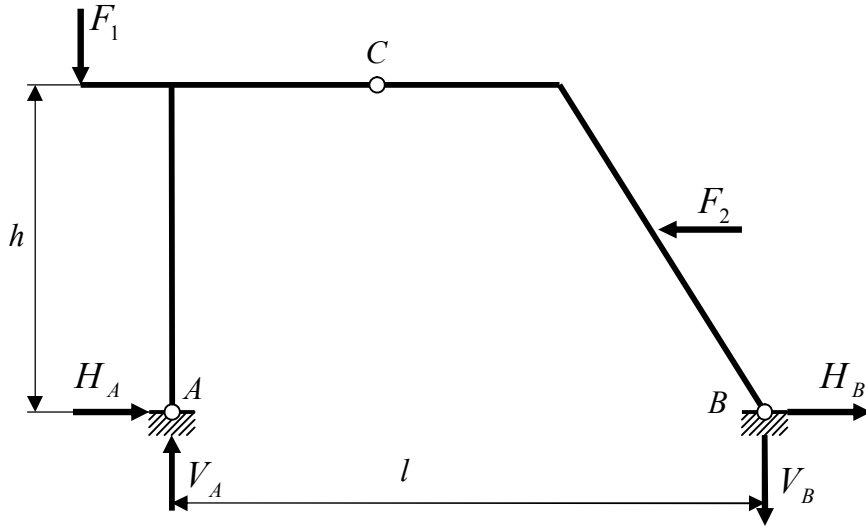


Рисунок 3.9

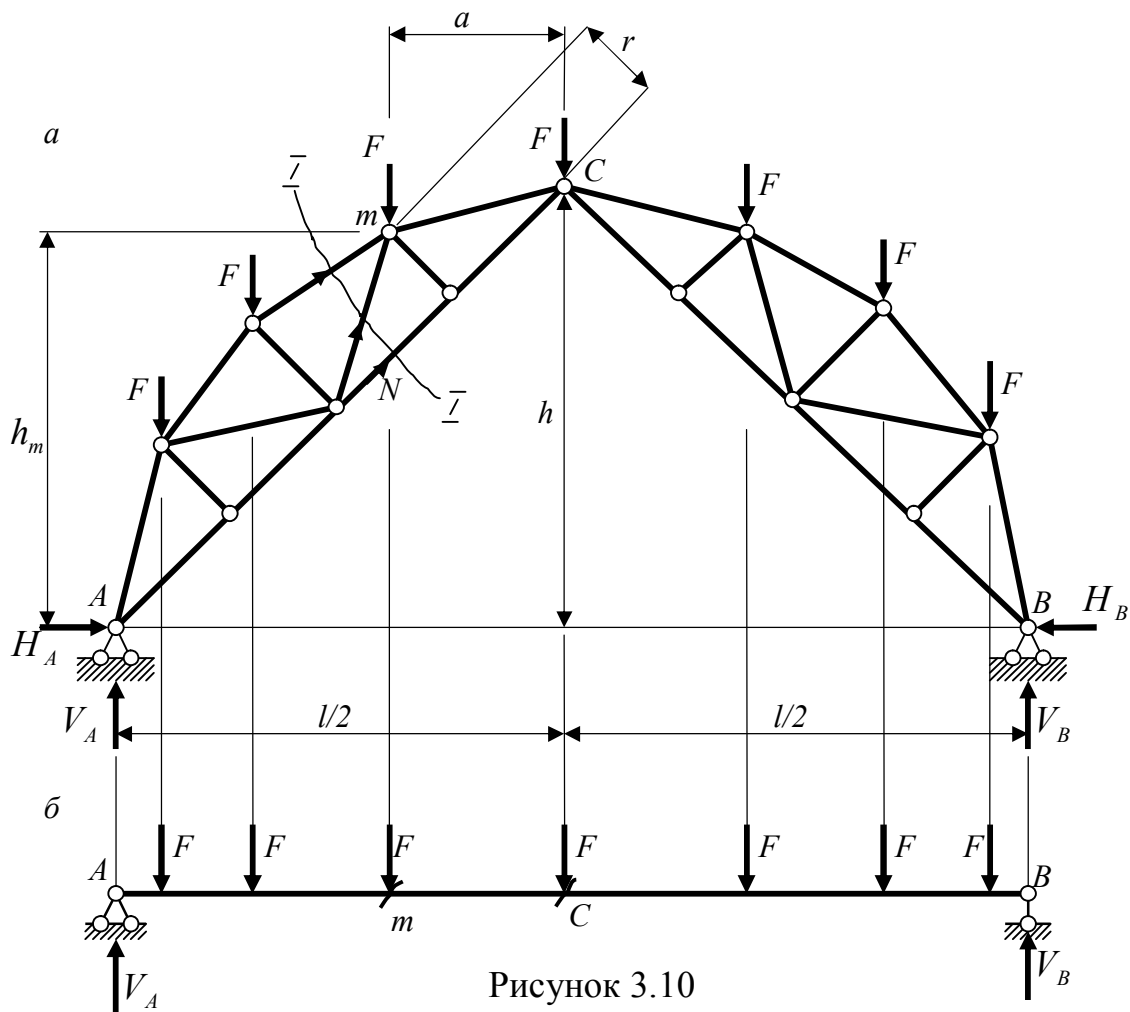


Рисунок 3.10

Зусилля в стержнях визначають так само, як у звичайній фермі (див. гл. 2), способами вирізання вузлів, моментної точки та ін. Наприклад, для

обчислення зусилля N (рис. 3.10, *a*) проведемо переріз I–I і знайдемо моментну точку m .

Застосувавши далі умову рівноваги $\sum M_{m,лів} = 0$ або $\sum M_{m,прав} = 0$, знайдемо зусилля N . Це зусилля можна виразити через балочний момент і розпір: $N = M_m^o / r - H \cdot h_m / r$.

3.5.4 Комбіновані та висячі системи

Комбінованими називають системи, у яких об'єднані різні за видом роботи конструкції. В основному в таких системах поєднуються елементи, які працюють на згин та розтяг (розтяг-стиск). Завдяки наявності розтягнутих елементів згинальні розвантажуються, і витрата матеріалу зменшується. Прикладами комбінованих систем є арка із затяжкою (рис. 3.3, *a*, *б*, *в*), балка з шпренгелем (рис. 3.11 *a*), ланцюг із балкою жорсткості (рис. 3.11, *б*).

Розрахунок комбінованих систем після обчислення опорних реакцій починають з визначення зусиль у стиснуто-розтягнутих елементах. Так, в арці з ламаною затяжкою (рис. 3.12, *a*) опорні реакції V_A та V_B знаходять з умов $\sum M_A = 0$ і $\sum M_B = 0$. Далі, провівши переріз I–I через шарнір C , знаходять зусилля N_3 в середньому елементі затяжки. Для визначення зусиль в інших елементах затяжки й у підвісках вирізають вузли E (рис. 3.12, *б*) і D (рис. 3.12, *в*).

При цьому суми проєкцій сил у вузлах затяжки на горизонтальну вісь дають таке співвідношення:

$$N_3 = N_2 \cos \alpha_2 = N_1 \cos \alpha_1 = \dots = H, \quad (3.17)$$

звідки виходить, що горизонтальні проєкції зусиль в усіх елементах затяжки однакові. Ці проєкції відіграють таку саму роль, що й розпір у звичайній арці, тому позначаються H . Як випливає з (3.17), при симетричному обрисі затяжки зусилля в її елементах симетричні.

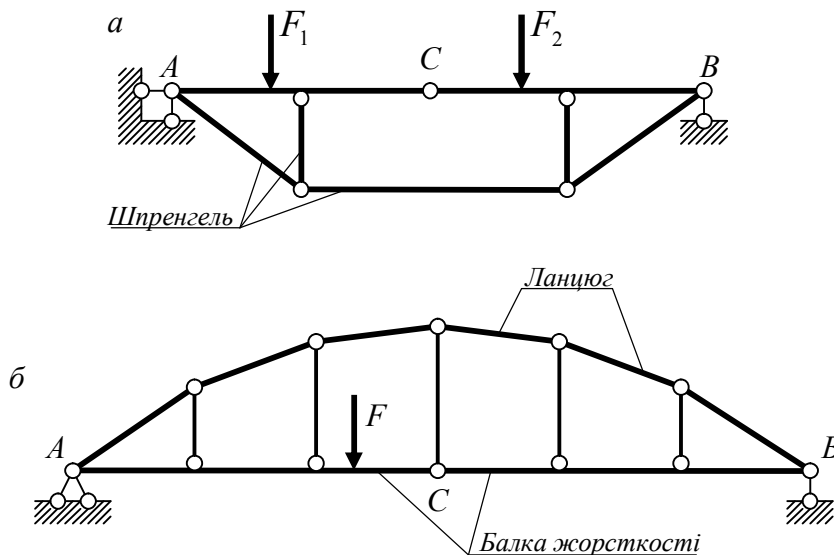


Рисунок 3.11

Після обчислення зусиль в елементах затяжки й у підвісках, відтинаючи затяжку, розраховують арку на дію вертикальних сил N_4 , N_5 , F і вертикальних

складових V_1 зусилля N_1 . При цьому роль розпору відіграє горизонтальна складова H зусилля N_1 .

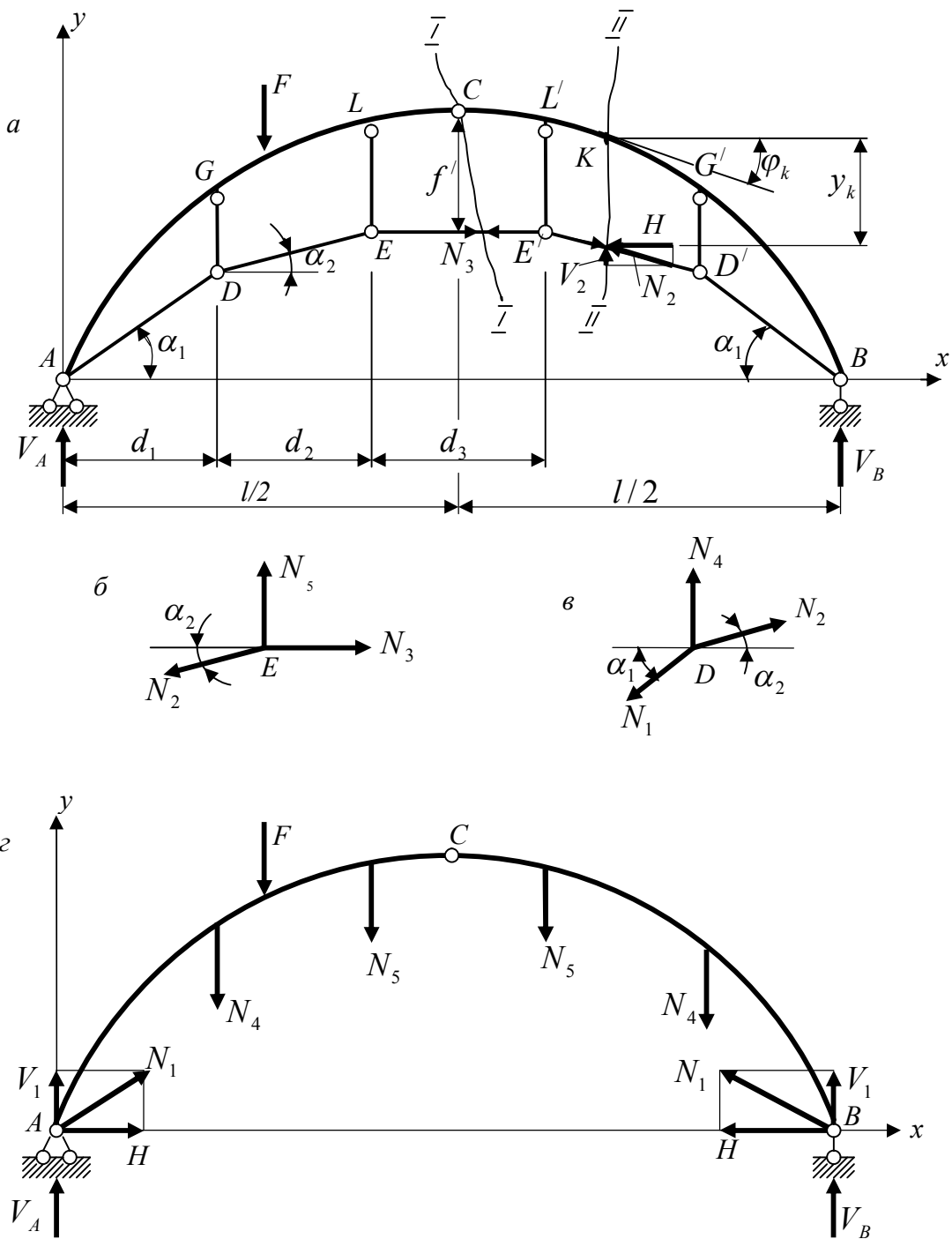


Рисунок 3.12

Після підстановки $V_2 = H \operatorname{tg} \alpha_2$ й простих перетворень одержимо:

$$\begin{aligned}
 M_K &= M_K^o - H y_K; \\
 Q_K &= Q_K^o \cos \varphi_K - H(\sin \varphi_K + \operatorname{tg} \alpha_2 \cos \varphi_K); \\
 N_K &= -Q_K^o \sin \varphi_K - H(\cos \varphi_K - \operatorname{tg} \alpha_2 \sin \varphi_K).
 \end{aligned}
 \tag{3.18}$$

Висячі системи (рис. 3.13) є специфічними комбінованими системами, у яких роль основної несучої конструкції відіграють ланцюг або трос, а підвішені до них балка або ферма забезпечують жорсткість споруди.

При обчисленні зусиль у висячій системі розрізають трос над опорами балки і обчислюють сумарні реакції $V_A + V'_A$ і $V_B + V'_B$, що являють собою балочні реакції. Подальший розрахунок виконують аналогічно розрахунку комбінованої системи.

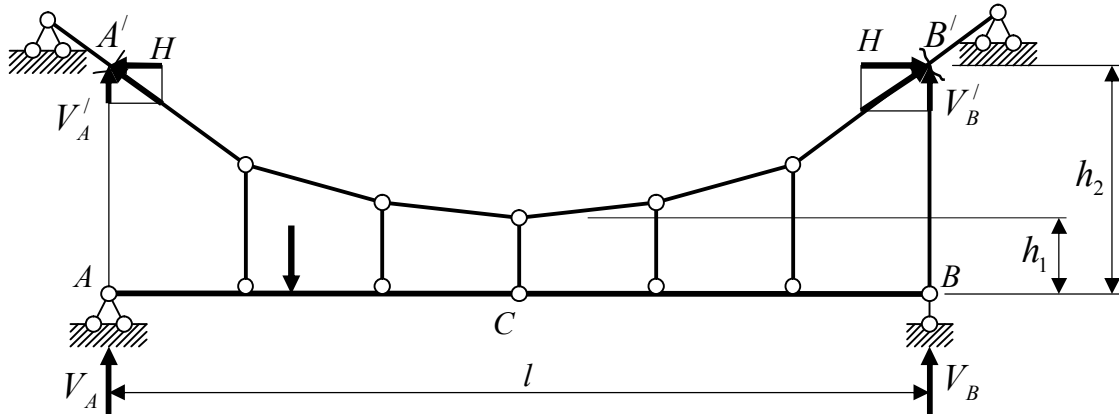


Рисунок 3.13

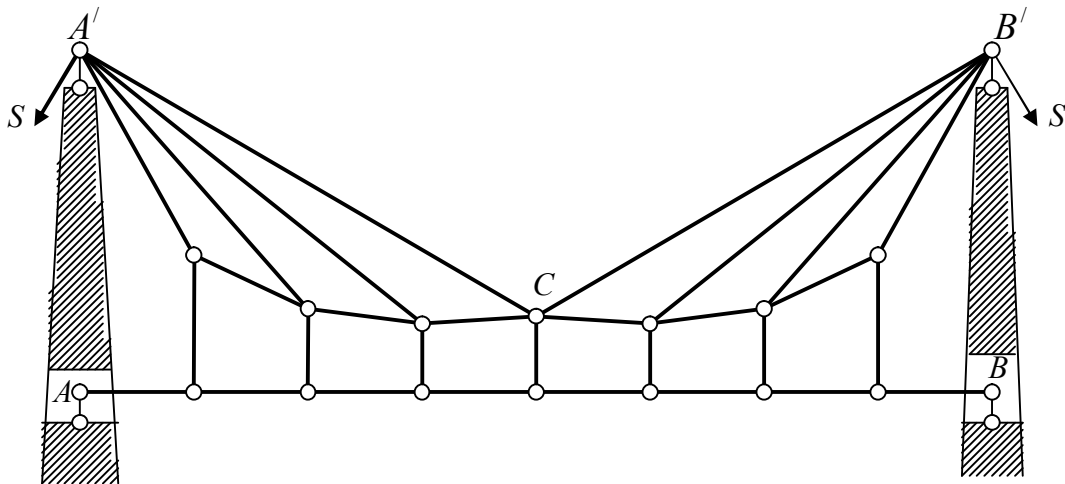


Рисунок 3.14

Різновидом висячих систем є вантові системи. Зокрема, на рисунку 3.14 наведено вантову ферму. У вантових системах похилі тяги (ванти) і підвіски зазвичай виконують у вигляді гнучких тросів. Конструкція проектується так, щоб при дії постійного і тимчасового навантажень в вантах і елементах підвісок з'являються лише розтягуючі напруження і з'являється можливість застосування у вантах високоміцних матеріалів, що знижує масу конструкції.

Запитання для самоконтролю

1. Які системи називають розпірними?
2. Як класифікують арки за ступенем статичної невизначуваності?

3. Назвіть основні елементи тришарнірної арки.
4. Наведіть типи тришарнірних арок залежно від обрису осі, наявності затяжки, розташування п'ят.
5. Які рівняння рівноваги використовуються для визначення опорних реакцій арки?
6. Як залежить розпір при дії вертикального навантаження від стріли підйому арки?
7. Як записується вираз згинаючого моменту в перерізі арки від вертикального навантаження?
8. Наведіть вирази для визначення поперечної й поздовжньої сил у перерізі арки при вертикальному навантаженні.
9. Чим відрізняються зусилля в арці від балкових зусиль?
10. Чому арка є економічнішою системою, ніж балка?
11. Як залежать згинаючі моменти при дії вертикального навантаження від стріли підйому?
12. Чим відрізняється характер епюри внутрішніх зусиль в арці від балкових епюр?
13. У чому полягають особливості розрахунку арки із затяжкою?
14. У чому полягає особливість роботи частин арки, розташованих нижче підвищеної затяжки?
15. У чому полягають особливості обчислення опорних реакцій і внутрішніх зусиль у тришарнірних арках при дії довільно спрямованого навантаження?
16. Що таке аркова ферма?
17. Як визначають опорні реакції в арковій фермі?
18. Як визначають внутрішні зусилля в арковій фермі?
19. Що називається комбінованою системою? Наведіть приклади комбінованих систем.
20. Що виконує роль розпору в арці з ламаною затяжкою?
21. Що таке висяча система?
22. Що являє собою вантова система?

4 ОСНОВНІ ЕНЕРГЕТИЧНІ ТЕОРЕМИ ДЛЯ ПРУЖНИХ СИСТЕМ. ВИЗНАЧЕННЯ ПЕРЕМІЩЕНЬ МЕТОДОМ МОРА

Розрахунок статично невизначуваних систем, а також усіх систем на жорсткість пов'язаний з необхідністю обчислення переміщень. Найбільш загальними методами визначення переміщень у пружних системах є енергетичні, засновані на дослідженні потенціальної енергії системи. Одним із методів, що застосовується для визначення переміщень у лінійно деформованих системах, є розглянутий у цьому розділі *метод Мора*.

Виведення формул для визначення переміщень за методом Мора можна зробити на основі принципу можливих переміщень. Цей принцип є універсальним законом механіки. Він, зокрема, використовується при доведенні основних енергетичних теорем для пружних систем.

Нагадаємо формулювання *принципу можливих переміщень*: якщо система знаходиться в рівновазі, сума робіт усіх її зовнішніх і внутрішніх сил на будь-яких можливих переміщеннях дорівнює нулю.

Якщо роботу зовнішніх сил позначити W , а роботу внутрішніх сил – U , то принцип можливих переміщень можна записати так:

$$W + U = 0. \quad (4.1)$$

Нагадаємо, що можливим переміщенням є довільне нескінченно мале переміщення, якому не заважають накладені на систему в'язі. Можливі переміщення відраховуються від стану рівноваги системи. При цьому через їх мализну передбачається, що умови рівноваги системи не порушуються, тобто зусилля не змінюються.

Розглянемо спочатку визначення роботи зовнішніх і внутрішніх сил і деякі теореми для пружних систем.

4.1 Робота зовнішніх сил. Узагальнені сили та узагальнені переміщення

Як відомо, робота обчислюється як добуток постійного за величиною силового фактора на переміщення в напрямку цього фактора. Наприклад, робота сили F дорівнює добутку цієї сили на шлях, пройдений у напрямку сили, робота моменту (пари сил) – добутку моменту на кут повороту в напрямку цього моменту та ін. Для загальності міркувань у будівельній механіці застосовують поняття узагальненої сили та узагальненого переміщення.

Узагальненою силою можна назвати будь-яку силу або групу сил (пару сил, розподілене навантаження, дві сили, що розтягують чи стискають стержень та інші комбінації навантаження), що прикладені до системи.

Узагальненим переміщенням називають таке переміщення, на якому відповідна узагальнена сила виконує роботу, тобто це множник при узагальненій силі у виразі її роботи.

Окремі види узагальнених сил та відповідних узагальнених переміщень наведені на рисунку 4.1.

Так, якщо точка C , у якій прикладена зосереджена сила F , зміщується на Δ_C у положення C' (рис. 4.1, *a*), узагальненим переміщенням, що відповідає цій силі, є складова Δ повного переміщення, а робота сили дорівнює $F \Delta$.

При дії двох однакових спрямованих назустріч сил вздовж прямої CD (рис. 4.1, *б*) узагальненою силою будуть ці дві сили F , а узагальненим переміщенням – скорочення відстані між точками C та D : $\Delta = \Delta_C + \Delta_D$.

Зосереджений момент M , прикладений до стержня CD (рис. 4.1, *в*) також може розглядатися як узагальнена сила. Узагальненим переміщенням у цьому випадку буде поворот стержня θ .

Аналогічно можна показати, що узагальненій силі у вигляді двох однакових протилежно спрямованих моментів (рис. 4.1, *г*) відповідає зміна кута у шарнірі C між стержнями CD та CB $\theta_{BC} + \theta_{CD}$.

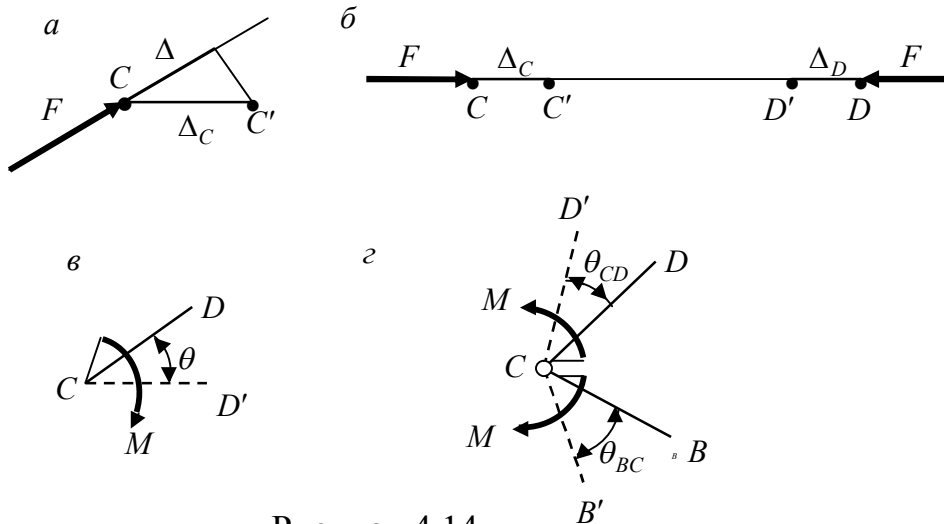


Рисунок 4.14

Зазвичай узагальнену силу позначають F з порядковим індексом, а узагальнене переміщення - Δ з двома індексами, перший з яких указує точку і напрямок переміщення (переважно цей індекс відповідає індексу узагальненої сили, що діє в напрямку даного переміщення); другий індекс указує причину, що викликала це переміщення (індекс узагальненої сили, температурний вплив, зміщення опор та ін.).

При розв'язанні низки задач зручно замість дійсних навантажень вводити одиничні сили або моменти. Переміщення від цих навантажень позначають δ з тими самими індексами, що і переміщення від довільних за величиною навантажень.

Як і раніше, розглядатимемо тільки лінійно деформовані системи, тобто системи, для яких залежність між переміщеннями і навантаженнями має лінійний характер. Для таких систем справедливими є такі співвідношення:

$$\Delta_{ik} = \delta_{ik} \cdot F_k; \quad (4.2)$$

$$\Delta_{if} = \delta_{i1} \cdot F_1 + \delta_{i2} \cdot F_2 + \delta_{i3} \cdot F_3 + \dots \quad (4.3)$$

Тут Δ_{ik} – переміщення в напрямку i -ї узагальненої сили від дії узагальненої сили F_k , а δ_{ik} – переміщення в напрямку тієї самої узагальненої сили F_i від дії узагальненої сили $F_k = 1$.

Роботу зовнішніх (внутрішніх) сил на можливих переміщеннях називають *можливою роботою* зовнішніх (внутрішніх) сил. Для лінійно деформованих систем при обчисленні робіт у (4.1) замість нескінченно малих можливих переміщень можуть розглядатися малі скінченні переміщення. Зокрема, через довільність можливих переміщень ними можуть бути переміщення, викликані будь-якою силою чи групою сил.

Розглянемо деяку пружну систему (рис. 4.2), завантажену статично прикладеною силою F_i . Статичний характер завантаження передбачає повільне зростання значення сили від нуля так, що прискорення точок системи малі і силами інерції можна знехтувати.

У процесі завантаження система деформується, і точка прикладання сили F_i переміщується в напрямку сили на величину Δ_{ii} . Залежність між силою і переміщенням при статичному завантаженні на графіку виражається прямою лінією (рис. 4.3). Приросту dF сили відповідає приріст переміщення $d(\Delta)$. При цьому виконується робота $dW = (F + dF) d(\Delta)$. Розкриваючи дужки та нехтуючи нескінченно малою величиною другого порядку малізми, одержимо: $dW = F d(\Delta)$. Після інтегрування маємо:

$$W_{ii} = \int_0^{\Delta_{ii}} F d(\Delta) = \frac{1}{2} F_i \cdot \Delta_{ii} \quad (4.4)$$

Отже, робота, яка виконується силою, відповідає площі заштрихованої частини графіка (рис. 4.3) і називається *дійсною роботою сили* F_i .

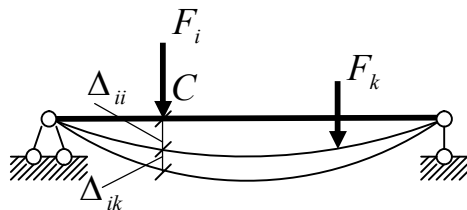


Рисунок 4.2

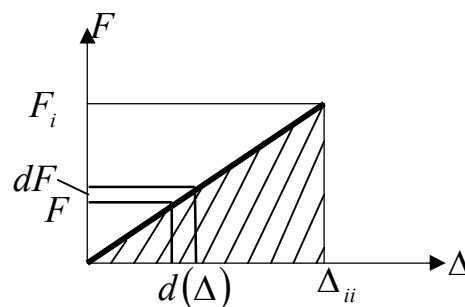


Рисунок 4.3

Якщо тепер до системи (рис. 4.2) прикласти додаткову силу F_k , точка прикладання сили F_i одержить додаткове переміщення Δ_{ik} . Сила F_i при цьому залишається незмінною і виконує роботу:

$$W_{ik} = F_i \cdot \Delta_{ik} \quad (4.5)$$

Переміщення Δ_{ik} може розглядатися як можливе переміщення точки S . Тоді робота W_{ik} буде називатися *можливою роботою сили F_i* .

Порівнявши вирази (4.4) та (4.5), бачимо, що дійсна робота сили відрізняється від можливої роботи коефіцієнтом $1/2$.

4.2 Робота внутрішніх сил

Для визначення робіт внутрішніх сил розглянемо ту саму балку (рис. 4.2). У зв'язку з тим, що система передбачається лінійно деформованою, для визначення в ній зусиль і переміщень можна скористатися принципом незалежності дії сил. Для цього розглянемо два стани балки (рис. 4.4): у одному з них (i -му) діє сила F_i , а в другому (k -му) – сила F_k . Виділимо в балці на відстані x від лівої опори елемент з довжиною dx . У i -му стані на гранях елемента діють внутрішні зусилля M_i та Q_i (рис. 4.5, а), у k -му; M_k та Q_k (рис. 4.5, б). Ці зусилля в межах елемента можна вважати постійними.

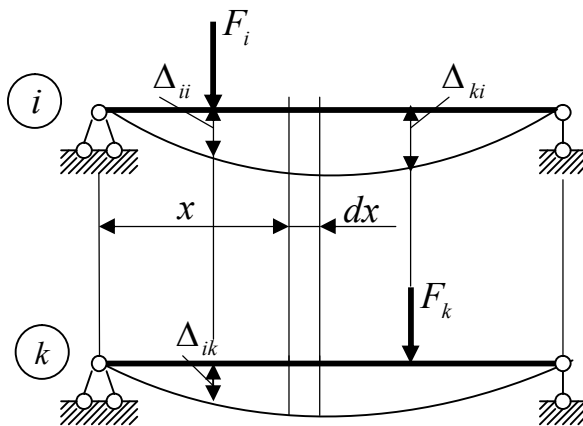


Рисунок 4.4

Дія зусиль M_k у k -му стані викликає викривлення осі елемента так, що кривина осі дорівнює χ_k , а кут між його гранями становить $\chi_k dx$ (рис. 4.5, в). Поперечні сили Q_k викликають зсув (рис. 4.5, г) так, що величина взаємного зміщення граней становить $\gamma_k dx$.

Тепер неважко записати можливу роботу внутрішніх сил елемента i -го стану на

переміщеннях k -го стану:

$$dU_{ik} = -M_i \cdot \chi_k dx - Q_i \cdot \gamma_k dx. \quad (4.6)$$

Знак «мінус» пояснюється тим, що зусилля M_i та Q_i є зовнішніми відносно елемента, а внутрішні зусилля спрямовані назустріч їм, тобто в сторону, зворотну переміщенням $\chi_k dx$ та $\gamma_k dx$. Деформації χ_k – кривина осі й γ_k – кут зсуву визначаються за відомими з опору матеріалів формулами:

$$\chi_k = \frac{1}{\rho} = \frac{M_k}{EI}, \quad \gamma_k = \mu \frac{Q_k}{GA}, \quad (4.7)$$

де $\mu = A \int_{(A)} \left(\frac{S_z}{I_z b} \right)^2 dA$ – коефіцієнт, що враховує нерівномірність розподілу дотичних напружень у перерізі і залежить від форми поперечного перерізу.

Підставляючи вирази для χ_k та γ_k в (4.6), проінтегруємо обидві частини рівняння за довжиною балки. Внаслідок одержимо можливу роботу внутрішніх сил стану «i» на переміщеннях стану «k»:

$$U_{ik} = -\int_{(l)} \frac{M_i M_k}{E I} dx - \int_{(l)} \mu \frac{Q_i Q_k}{G A} dx. \quad (4.8)$$

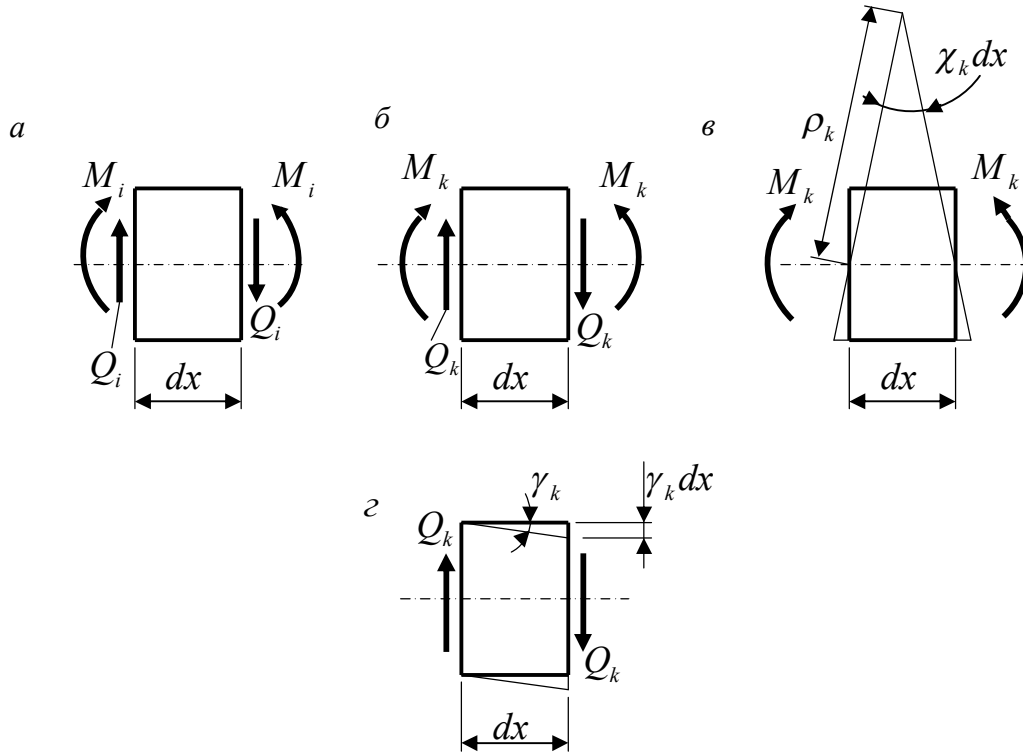


Рисунок 4.5

У загальному випадку деформації плоскої системи в рівняння (4.8) додається робота поздовжніх сил N_i . При цьому слід урахувати, що осі системи можуть мати переломи й розгалуження, а функції внутрішніх зусиль – розриви. Тому, замінивши змінну x змінною s , що перебігає обрис осей системи, розіб'ємо інтеграл на суму інтегралів. Тоді остаточно можливу роботу внутрішніх сил запишемо так:

$$U_{ik} = -\sum \int_{(l)} \frac{M_i M_k}{E I} ds - \sum \int_{(l)} \mu \frac{Q_i Q_k}{G A} ds - \sum \int_{(l)} \frac{N_i N_k}{E A} ds. \quad (4.9)$$

За аналогією з (4.9) можна записати дійсну роботу внутрішніх сил першого стану U_{ii} , враховуючи, що деформації в цьому випадку визначаються зусиллями M_i , Q_i , N_i і лінійно зростають зі збільшенням навантаження:

$$U_{ii} = -\frac{1}{2} \sum \int_{(l)} \frac{M_i^2 ds}{E I} - \frac{1}{2} \sum \int_{(l)} \mu \frac{Q_i^2 ds}{G A} - \frac{1}{2} \sum \int_{(l)} \frac{N_i^2 ds}{E A}. \quad (4.10)$$

У подальшому позначку (l) біля інтегралів, що означає інтегрування вздовж кожного відрізка системи, іноді відкидатимемо.

4.3 Потенціальна енергія деформації. Теорема Лагранжа та Кастіліано

Робота внутрішніх сил, яка буде виконана при розвантаженні системи, є потенціальною енергією деформації системи.

Отже, $U = -U_{ii}$ тобто:

$$U = \frac{1}{2} \sum \int_{(i)} \frac{M^2 ds}{EI} + \frac{1}{2} \sum \int_{(i)} \frac{Q^2 ds}{GA} + \frac{1}{2} \sum \int_{(i)} \frac{N^2 ds}{EA}. \quad (4.11)$$

З іншого боку, енергія деформації системи дорівнює роботі прикладених до неї зовнішніх сил, виконаній при статичному завантаженні системи:

$$U = W_{ii}. \quad (4.12)$$

Для випадку завантаження системи двома силами (F_1 і F_2) вираз (4.12) запишемо так:

$$U = (F_1 \cdot \Delta_1 + F_2 \cdot \Delta_2) / 2$$

або, з урахуванням (4.2)

$$U = (F_1^2 \cdot \delta_{11} + F_1 \cdot F_2 \cdot \delta_{12} + F_1 \cdot F_2 \cdot \delta_{21} + F_2^2 \cdot \delta_{22}) / 2.$$

У загальному випадку дії n сил відповідно одержуємо:

$$\left. \begin{aligned} \Delta_1 &= F_1 \cdot \delta_{11} + F_2 \cdot \delta_{12} + \dots + F_n \cdot \delta_{1n}; \\ \Delta_2 &= F_1 \cdot \delta_{21} + F_2 \cdot \delta_{22} + \dots + F_n \cdot \delta_{2n}; \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \Delta_n &= F_1 \cdot \delta_{n1} + F_2 \cdot \delta_{n2} + \dots + F_n \cdot \delta_{nn}; \end{aligned} \right\} \quad (4.13)$$

$$\begin{aligned} U &= (F_1 \cdot \Delta_1 + F_2 \cdot \Delta_2 + \dots + F_n \cdot \Delta_n) / 2 = \\ &= (F_1^2 \cdot \delta_{11} + F_1 \cdot F_2 \cdot \delta_{12} + \dots + F_1 \cdot F_n \cdot \delta_{1n} + \\ &+ F_2 \cdot F_1 \cdot \delta_{21} + F_2^2 \cdot \delta_{22} + \dots + F_2 \cdot F_n \cdot \delta_{2n} + \dots + \\ &+ F_n \cdot F_1 \cdot \delta_{n1} + F_n \cdot F_2 \cdot \delta_{n2} + \dots + F_n^2 \cdot \delta_{nn}) / 2. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Величина δ_{ik} в (4.14) являє собою переміщення уздовж i -ї сили від дії k -ї сили і характеризує піддатливість системи до деформацій.

Поняття піддатливості тісно пов'язане з поняттям жорсткості. З рівняння (4.2), відкинувши індекси, запишемо:

$$F = \frac{1}{\delta} \cdot \Delta = \delta^{-1} \cdot \Delta. \quad (4.15)$$

Якщо δ – переміщення від одиничної сили, то зворотна йому величина

$$r = \delta^{-1}, \quad (4.16)$$

як випливає з (56), являє собою силу, що викликає одиничне переміщення. Дійсно, при завантаженні, наприклад, стержня (рис. 4.6, *a*) поздовжньою силою $F = 1$ його вільний кінець зміститься на величину $\delta = l / (EA)$, що характеризує

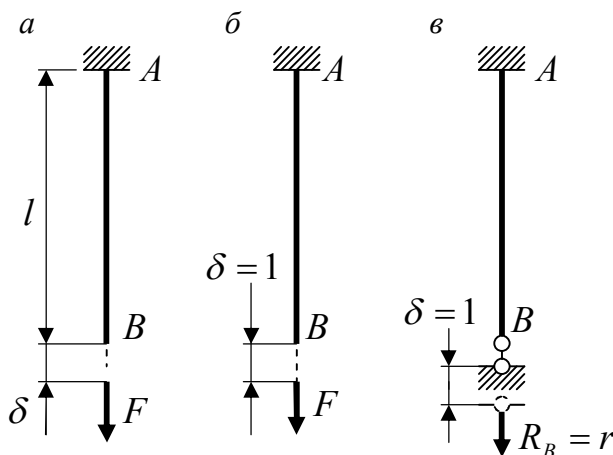


Рисунок 4.6

піддатливість стержня. Якщо вимагати, щоб це переміщення дорівнювало одиниці (рис. 4.6, б), то відповідна сила, очевидно, має бути в δ раз меншою – $F = 1/\delta$, тобто $F = r = EA/l$. Ця величина характеризує опір стержня деформаціям і називається *погоною жорсткістю*.

Рівності (4.16) відповідає зворотна рівність

$$\delta = r^{-1}. \tag{4.17}$$

Для визначення механічної суті співвідношень (4.16) та (4.17) накладемо на стержень у точці B в'язь (рис. 69, в). При зміщенні цієї в'язі на величину $\delta = 1$ в ній з'явиться реакція, що дорівнює r . Тому реакцію опори від її одиничного зміщення називають *погонною жорсткістю*, а величина, зворотна цій реакції, є *піддатливістю* системи з відкинutoю відповідною в'яззю.

У загальному випадку r_{ik} - це значення сили F_i , що викликає в напрямку сили F_k переміщення, яке дорівнює одиниці, інакше – це реакція в i -й в'язі, викликана переміщенням k -ї в'язі на одиницю.

Поняття жорсткості системи дозволяє записати вираз потенціальної енергії (4.14) в іншій формі. Дійсно, подавши (4.15) для випадку дії n сил, отримаємо:

$$\begin{aligned} F_1 &= r_{11} \cdot \Delta_1 + r_{12} \cdot \Delta_2 + \dots + r_{1n} \cdot \Delta_n, \\ F_2 &= r_{21} \cdot \Delta_1 + r_{22} \cdot \Delta_2 + \dots + r_{2n} \cdot \Delta_n, \\ &\dots \dots \dots \\ F_n &= r_{n1} \cdot \Delta_1 + r_{n2} \cdot \Delta_2 + \dots + r_{nn} \cdot \Delta_n, \end{aligned} \tag{4.18}$$

підставимо одержані співвідношення в рівняння потенціальної енергії деформації, вираженої через роботу зовнішніх сил:

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} (F_1 \cdot \Delta_1 + F_2 \cdot \Delta_2 + \dots + F_n \cdot \Delta_n) = \\ &= \frac{1}{2} (r_{11} \cdot \Delta_1^2 + r_{12} \cdot \Delta_1 \cdot \Delta_2 + \dots + r_{1n} \cdot \Delta_1 \cdot \Delta_n + \\ &+ r_{21} \cdot \Delta_1 \cdot \Delta_2 + r_{22} \cdot \Delta_2^2 + \dots + r_{2n} \cdot \Delta_2 \cdot \Delta_n + \dots \\ &+ r_{n1} \cdot \Delta_1 \cdot \Delta_n + r_{n2} \cdot \Delta_2 \cdot \Delta_n + \dots + r_{nn} \cdot \Delta_n^2). \end{aligned} \tag{4.19}$$

Аналіз виразів (4.11), (4.14) та (4.19) дозволяє зробити такі висновки:

1. Потенціальна енергія деформації додатна тому, що у вирази (4.14) входять квадрати внутрішніх зусиль.
2. Потенціальна енергія деформації є однорідною функцією другої степені зусиль або переміщень.
3. До потенціальної енергії не можна застосувати принцип незалежності дії сил. Інакше кажучи, потенціальна енергія деформації, викликана групою сил, не дорівнює сумі потенціальних енергій, викликаних кожною із сил окремо.
4. Значення потенціальної енергії деформації пружної системи не залежить від послідовності завантаження, а визначається вихідним і кінцевим станами пружної системи.

З виразу (4.14) випливає:

$$\frac{\partial U}{\partial F_i} = \delta_{i1} F_1 + \delta_{i2} F_2 + \dots + \delta_{in} F_n.$$

Аналогічно з (4.19) одержимо:

$$\frac{\partial U}{\partial \Delta_i} = r_{i1} \Delta_1 + r_{i2} \Delta_2 + \dots + r_{in} \Delta_n.$$

Ураховуючи (4.13) та (4.18), останні рівності запишемо так:

$$\frac{\partial U}{\partial F_i} = \Delta_i, \quad (4.20)$$

$$\frac{\partial U}{\partial \Delta_i} = F_i \quad (4.21)$$

Залежність (4.20) є виразом **теорему Кастіліано**: для системи, що знаходиться в рівновазі, похідна від потенціальної енергії деформації за узагальненою силою дорівнює відповідному узагальненому переміщенню.

Аналогічно залежність (4.21) відображає **теорему Лагранжа**: для системи, що знаходиться в рівновазі, похідна від потенціальної енергії деформації за переміщенням дорівнює відповідній узагальненій силі.

Теорема Кастіліано може використовуватись для визначення переміщень, але викладений далі метод Мора для пружних систем надає простіші обчислення.

4.4 Теорема про взаємність

Розглянемо знову два стани пружної системи (рис. 4.4). Переміщення k -го стану є можливими переміщеннями для сил i -го стану цієї системи. Тоді на основі принципу можливих переміщень з урахуванням у загальному випадку поздовжніх сил одержуємо:

$$\begin{aligned} W_{ik} &= F_i \cdot \Delta_{ik} = -U_{ik} = \\ &= \sum \int_{(l)} \frac{M_i M_k dx}{EI} + \sum \int_{(l)} \mu \frac{Q_i Q_k dx}{GA} + \sum \int_{(l)} \frac{N_i N_k dx}{EA}. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Інакше, переміщення i -го стану також можуть розглядатися як можливі переміщення для сил k -го стану. Тоді:

$$\begin{aligned} W_{ki} &= F_k \cdot \Delta_{ki} = -U_{ki} = \\ &= \sum \int_{(l)} \frac{M_k M_i dx}{EI} + \sum \int_{(l)} \mu \frac{Q_k Q_i dx}{GA} + \sum \int_{(l)} \frac{N_k N_i dx}{EA} \end{aligned} \quad (4.23)$$

Праві частини виразів (4.22) та (4.23) відрізняються тільки порядком запису співмножників – внутрішніх зусиль, отже,

$$U_{ik} = U_{ki}, \quad W_{ik} = W_{ki}. \quad (4.24)$$

Ці рівності відображають **теорему про взаємність робіт (теорему Бетті)**, що може бути сформульована так: *робота зовнішніх (внутрішніх) сил i -го стану системи на переміщеннях (деформаціях) k -го*

стану дорівнює роботі зовнішніх (внутрішніх) сил k -го стану тієї самої системи на переміщеннях (деформаціях) i -го стану.

З теореми про взаємність робіт випливає кілька окремих теорем. Розглянемо два стани пружної системи, у кожному з яких діють однакові узагальнені сили $F_i = F_k = F$. Застосовуючи до цих двох станів системи теорему про взаємність робіт, одержимо рівність $F \cdot \Delta_{ik} = F \cdot \Delta_{ki}$, звідки маємо:

$$\Delta_{ik} = \Delta_{ki}. \quad (4.25)$$

Якщо узагальнені сили дорівнюють одиниці ($F_i = F_k = 1$), остання рівність набуває вигляду:

$$\delta_{ik} = \delta_{ki}, \quad (4.26)$$

що виражає **теорему про взаємність переміщень (теорему Максвелла)**: переміщення в напрямку i -ї узагальненої сили, викликане дією k -ї одиничної узагальненої сили, дорівнює переміщенню тієї самої системи в напрямку k -ї узагальненої сили, викликаному дією i -ї одиничної узагальненої сили.

Розглянемо тепер два стани пружної системи (рис. 4.7), в одному з яких задано одиничне переміщення i -ї, а у другому – k -ї в'язі. При цьому в інших в'язях статично невизначуваної системи з'являються реакції, що відповідно дорівнюють: в k -й в'язі i -го стану – r_{ki} , в i -й в'язі k -го стану – r_{ik} . Ці реакції є зовнішніми силами і виконують роботу $W_{ik} = r_{ki} \cdot \Delta_k$, $W_{ki} = r_{ik} \cdot \Delta_i$. У напрямку решти реакцій переміщення відсутні, тому їх робота дорівнює нулю. На основі теореми про взаємність робіт одержуємо $r_{ki} \cdot \Delta_k = r_{ik} \cdot \Delta_i$ або

$$r_{ik} = r_{ki}. \quad (4.27)$$

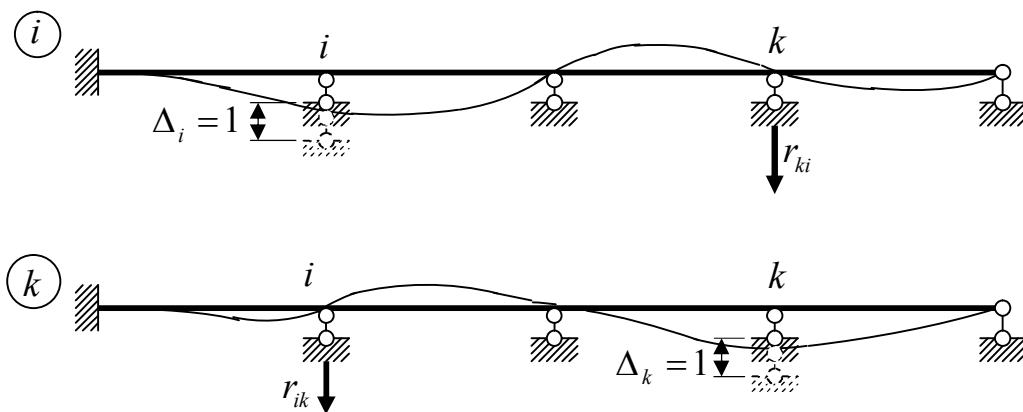


Рисунок 4.7

Таким чином, *реакція в i -й в'язі, викликана одиничним переміщенням k -ї в'язі, дорівнює реакції k -ї в'язі тієї самої системи, викликаній одиничним переміщенням i -ї в'язі (теорема про взаємність реакцій, або перша теорема Релєя)*.

Нарешті, третій, окремий, випадок теореми про взаємність робіт одержуємо при порівнянні двох станів системи, коли в одному з них прикладена одинична сила $F_i = 1$, а в іншому задано одиничне зміщення k -ї в'язі (рис. 4.8).

У зв'язку з тим, що в i -му стані в'язі залишаються нерухомими, робота зовнішніх сил стану k дорівнює нулю: $W_{ki} = 0$. Тоді повинна бути нульовою і робота W_{ik} :

$$W_{ik} = F_i \cdot \delta'_{ik} + r'_{ki} \cdot \Delta_k = 0,$$

звідки

$$\delta'_{ik} = -r'_{ki}. \quad (4.28)$$

Ця рівність є виразом **теорема про взаємність реакцій і переміщень (другої теореми Релєя)**: *переміщення в напрямку i -ї узагальненої сили, викликане одиничним зміщенням k -ї в'язі, дорівнює за величиною і протилежне за знаком реакції в k -ї в'язі тієї самої системи, викликаній i -ю одиничною узагальненою силою.*

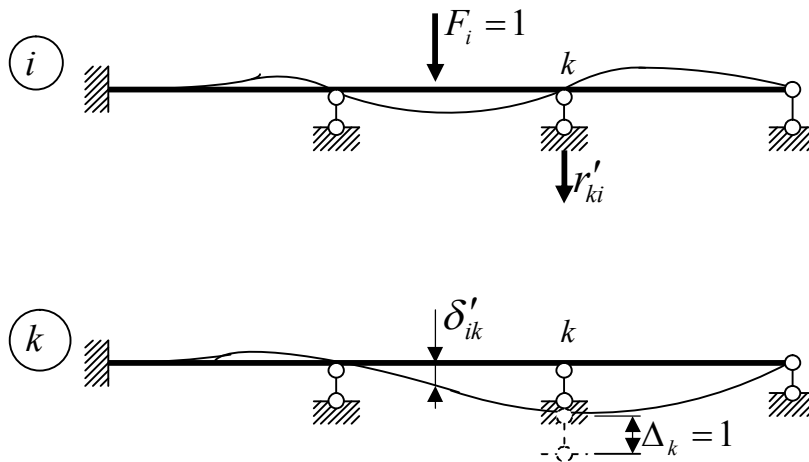


Рисунок 4.8

Теорема про взаємність знаходить широке застосування в розрахунках статично невизначуваних систем, а також використовуються для побудови ліній впливу зусиль і переміщень.

Приклад практичного використання теореми про взаємність переміщень наведений у [4]. Визначення прогинів Δ_{1C} , Δ_{2C} , Δ_{3C} точок 1, 2, 3 від сили F , що діє у перерізі C (рис. 4.9, а), простіше замінити визначенням переміщень Δ_{C1} , Δ_{C2} , Δ_{C3} точки C від сили F , розташованої відповідно у т.т. 1 (рис. 4.9, б), 2 (рис. 4.9, в), 3 (рис. 4.9, г).

4.5 Обчислення переміщень за методом Мора

Нехай треба визначити переміщення Δ_i деякої точки споруди від дії заданого навантаження (рис. 4.10, а). Розглянемо два стани цієї споруди: перший – дійсний стан при дії заданого навантаження (рис. 4.10, а), другий –

допоміжний або одиничний стан, у якому за напрямком шуканого переміщення прикладена одинична узагальнена сила (рис. 4.10, б).

Робота одиничної сили на переміщеннях заданого стану $W_{fi} = 1 \cdot \Delta_i$ за теоремою Бетті дорівнює роботі W_{fi} заданих сил на переміщеннях одиничного стану. Беручи до уваги, що $W_{fi} = -U_{fi}$, одержуємо на підставі (4.9):

$$\Delta_i = \sum_{(l)} \int \frac{M \bar{M}_i ds}{EI} + \sum_{(l)} \int \mu \frac{Q \bar{Q}_i ds}{GA} + \sum_{(l)} \int \frac{N \bar{N}_i ds}{EA}, \quad (4.29)$$

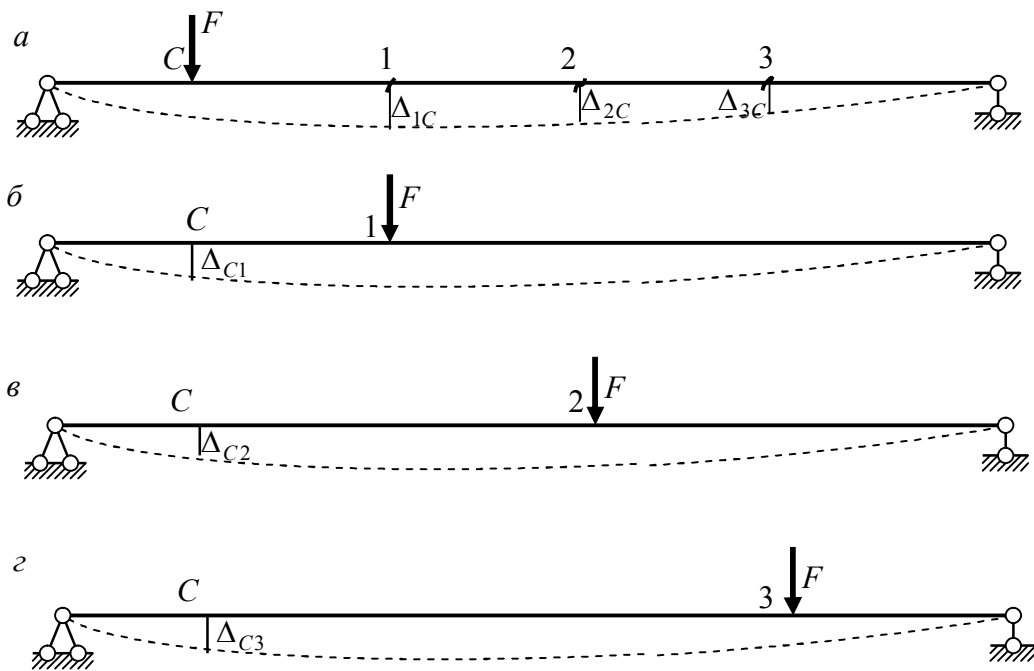


Рисунок 4.9

де M, Q, N – зусилля від заданого навантаження; $\bar{M}_i, \bar{Q}_i, \bar{N}_i$ – зусилля від одиничної сили у допоміжному стані.

Формулу (4.29) називають *формулою Мора*. За її допомогою можна визначити переміщення від навантаження в плоскій системі. Для цього необхідно:

- 1) визначають зусилля M, Q, N від заданого навантаження;
- 2) за напрямком шуканого переміщення прикладають одиничну узагальнену силу;
- 3) знаходять зусилля $\bar{M}_i, \bar{Q}_i, \bar{N}_i$ від одиничної сили;
- 4) вирази зусиль підставляють у праву частину (4.29) та інтегруванням уздовж осей усіх елементів системи визначають шукане переміщення.

Обчислення переміщень за допомогою формули (4.29) називають *методом Мора*.

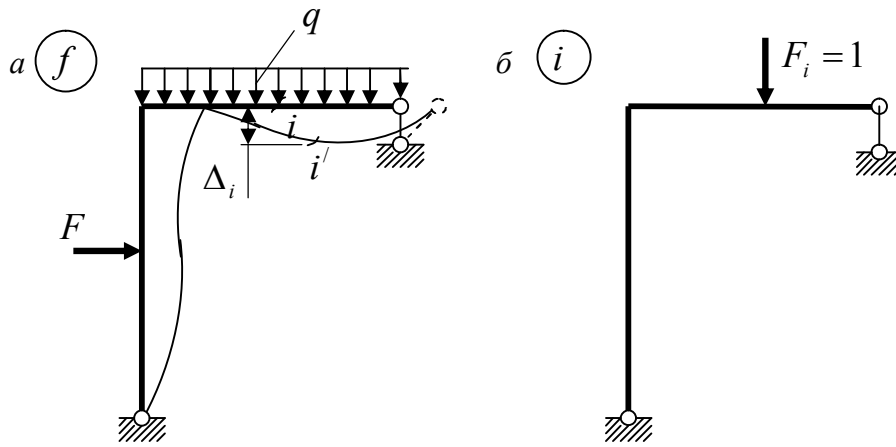


Рисунок 4.10

В окремих випадках формула Мора набуває простішого вигляду. Так, при розрахунку ферм, у стержнях яких виникають лише поздовжні зусилля, перші два інтеграли дорівнюють нулю. Тоді, розбивши інтеграл, що залишився, на суму інтегралів для окремих стержнів, одержуємо:

$$\Delta_i = \sum_{k=1}^n \int \left(\frac{N \bar{N}_i ds}{E A} \right)_k$$

або, беручи до уваги постійність зусиль і жорсткостей у межах кожного стержня,

$$\Delta_i = \sum_{k=1}^n \left(\frac{N \bar{N}_i l}{E A} \right)_k. \quad (4.30)$$

Тут сума поширюється на всі стержні ферми, n – число стержнів.

При розрахунку систем із переважним згином – балок і рам – вплив поперечних і поздовжніх деформацій на переміщення точок незначний. Тому для таких систем ураховують лише перший інтеграл виразу (4.29), тобто

$$\Delta_i = \sum_{(l)} \int \frac{M \bar{M}_i ds}{EI}. \quad (4.31)$$

Якщо розбити систему на відрізки постійної жорсткості, маємо:

$$\Delta_i = \sum_{j=1}^n \left(\frac{1}{EI} \int M \bar{M}_i ds \right)_j. \quad (4.32)$$

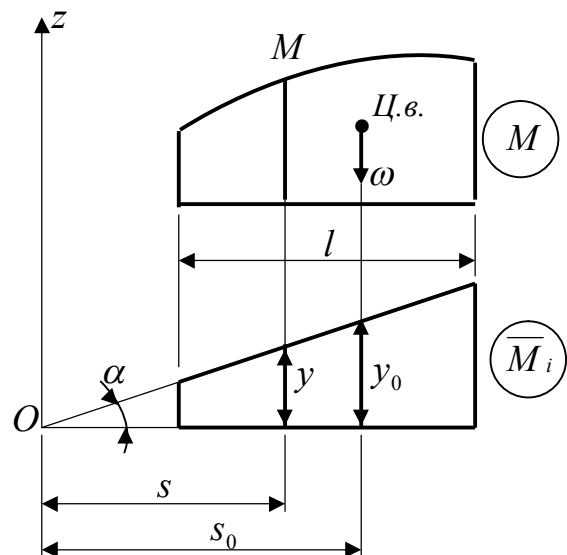


Рисунок 4.11

Інтеграл $\int_0^l M \bar{M}_i ds$ у (4.32) називають *інтегралом Мора*. У деяких випадках обчислення цього інтегралу можна спростити. Наприклад, якщо на відрізку прямого стержня постійної жорсткості одна з епюр згинаючих моментів (зазвичай одинична) прямолінійна (рис. 4.11), інтеграл можна обчислити за *правилом Верещагіна*.

Для цього продовжимо лінійну епюру \bar{M}_i до перерізу з віссю i в цій точці (т. O) виберемо початок координат. На відстані s від початку координат ординати криволінійної і лінійної епюр відповідно дорівнюють M і y . Виразимо y через кут нахилу α лінійної епюри: $y = s \cdot \operatorname{tg} \alpha$ і підставимо в інтеграл. Тоді $\int_0^l M \bar{M}_i ds = \int_0^l M \cdot s \cdot \operatorname{tg} \alpha ds$ або, виносячи $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{const}$, одержимо:

$$\int_0^l M \bar{M}_i ds = \operatorname{tg} \alpha \int_0^l M \cdot s ds \quad (4.33)$$

Інтеграл у правій частині виразу (4.33) являє собою статичний момент S_z епюри M відносно осі z , що проходить через початок координат. Якщо відома площа ω епюри M і координата s_0 її центру ваги, то статичний момент можна одержати інакше: $S_z = \int_0^l M \cdot s ds = \omega \cdot y_0$.

Підставляючи цю рівність в (4.33), одержимо $\int_0^l M \bar{M}_i ds = \operatorname{tg} \alpha \cdot \omega \cdot s_0$. Але $s_0 \cdot \operatorname{tg} \alpha = y_0$, де y_0 – ордината лінійної епюри \bar{M}_i під центром ваги епюри M . Тоді остаточно отримуємо таку рівність:

$$\int_0^l M \bar{M}_i ds = \omega \cdot y_0. \quad (4.34)$$

Отже, *інтеграл $\int_0^l M \bar{M}_i ds$ дорівнює добутку площі ω криволінійної епюри на розташовану під її центром ваги ординату y_0 прямолінійної епюри*.

Таке обчислення інтеграла називають *перемноженням епюр за правилом Верещагіна*. Результат перемноження додатний, якщо обидві перемножені епюри M і \bar{M}_i розташовані з одного боку від осі (одного знаку), і від'ємні – при розташуванні епюр по різні боки від осі.

Правило Верещагіна зручно застосовувати в тих випадках, коли площа і положення центру ваги криволінійної епюри знаходяться досить просто. Як правило, це раціонально робити тоді, коли епюра, на якій береться площа, відповідає одній із наведених на рисунку 4.12, а друга – лінійна.

Зауважимо, що всі нелінійні епюри на рисунку 4.12 відповідають рівномірно розподіленому навантаженню $q = \operatorname{const}$. Увігнутий параболічний трикутник (рис. 4.12, *в*) та опуклий параболічний трикутник (рис. 4.12, *з*) повинні мати вершини в точках A , позначених на рисунку. Це можна

перевірити за значенням ординати h . Вона повинна дорівнювати $\frac{ql^2}{2}$. У загальному випадку раціональніше скористатися формулою Сімпсона для чисельного інтегрування. Відповідно до цієї формули визначений інтеграл від функції $\varphi(s)$ на відрізку $0 \leq s \leq l$ можна наближено знайти таким чином:

$$\int_0^l \varphi(s) ds \approx \frac{l}{6} \left[\varphi(0) + 4\varphi\left(\frac{l}{2}\right) + \varphi(l) \right].$$

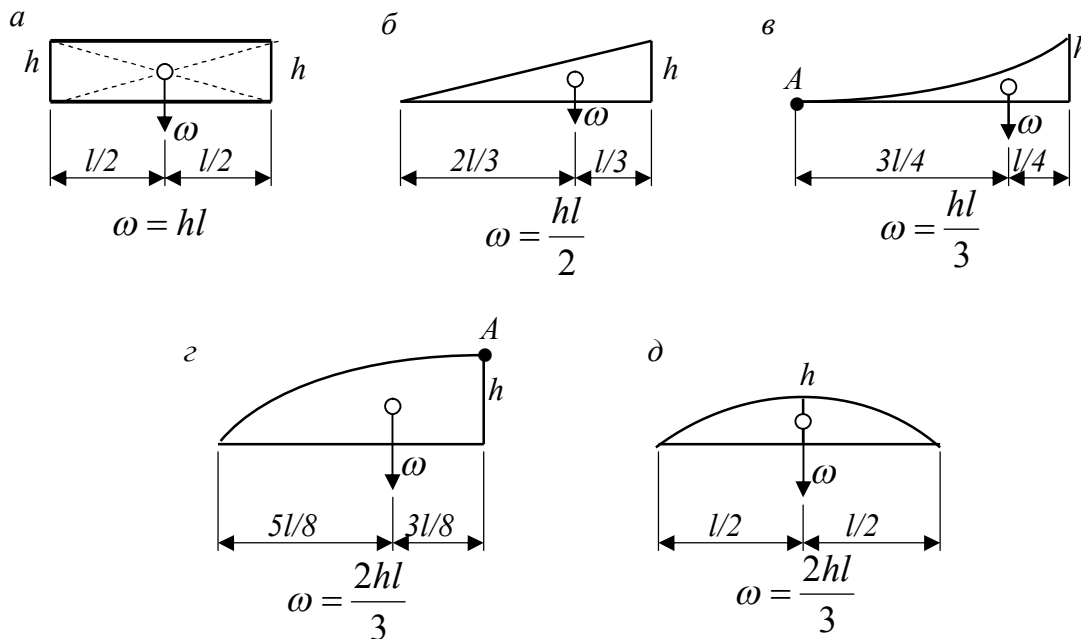


Рисунок 4.12

Ця формула ґрунтується на заміні підінтегральної функції квадратною параболою, тому у випадку, якщо функція $\varphi(s)$ – це дійсно квадратна парабола, вираз дає точний результат.

Застосовуючи формулу Сімпсона для перемноження двох еюр на відрізку прямого стержня постійної жорсткості (рис. 4.13), одержуємо:

$$\int_0^l M \bar{M}_i ds = \frac{l}{6} (M_{лів} \bar{M}_{лів} + 4M_{сер} \bar{M}_{сер} + M_{пр} \bar{M}_{пр}) \quad (4.35)$$

Тут індекси *лів*, *сер* і *пр* означають лівий, правий кінці та середину відрізка з довжиною l .

Як свідчить аналіз, формула (4.35) для задач обчислення переміщень є точною й у випадку, коли підінтегральна функція $M \bar{M}_i$ на відрізку від 0 до l є кубічною параболою, тобто містить вантажні моменти,

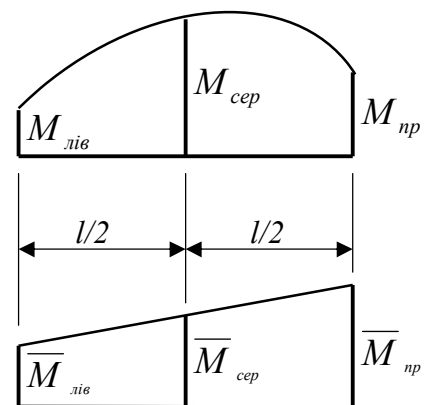


Рисунок 4.13

описані за квадратною параболою (при $q = const$) та лінійно змінні одиничні моменти. Отже, формула Сімпсона дає точний результат для переважної більшості епюр, що зустрічається в практичних розрахунках.

В інших випадках застосування формули Сімпсона потребує розбивання епюр на відрізки досить малої довжини.

4.6 Переміщення від осідання опор

При переміщеннях (осіданнях) опор статично визначувана споруда (рис. 4.14, а) переходить у нове положення так, що його елементи не деформуються і, відповідно, у такій системі відсутні зусилля.

Переміщення перерізів статично визначуваної системи можна визначити геометрично. Наприклад, вертикальне переміщення перерізу K рами (рис. 4.14, а) від зміщень c_1, c_2, c_3 затиснення з урахуванням їхньої мализни становить:

$$\Delta_K = c_1 + l \cdot \operatorname{tg} c_3 \approx c_1 + l \cdot c_3.$$

У складніших випадках для визначення переміщень можна застосувати статичний метод, що ґрунтується на теоремі про взаємність робіт. Покажемо його на прикладі визначення того самого переміщення Δ_K . Прикладемо у напрямку шуканого переміщення одиничну узагальнену силу $F_k = 1$ (рис. 4.14, б).

Визначивши реакції $\bar{R}_1, \bar{R}_2, \bar{R}_3$, врахуємо, що в заданому стані сили відсутні. Отже, $W_{kc} = W_{ck} = 0$ або $F_k \Delta_k - \bar{R}_1 c_1 - \bar{R}_2 c_2 - \bar{R}_3 c_3 = 0$, звідки

$$\Delta_k = \sum \bar{R}_i c_i. \quad (4.36)$$

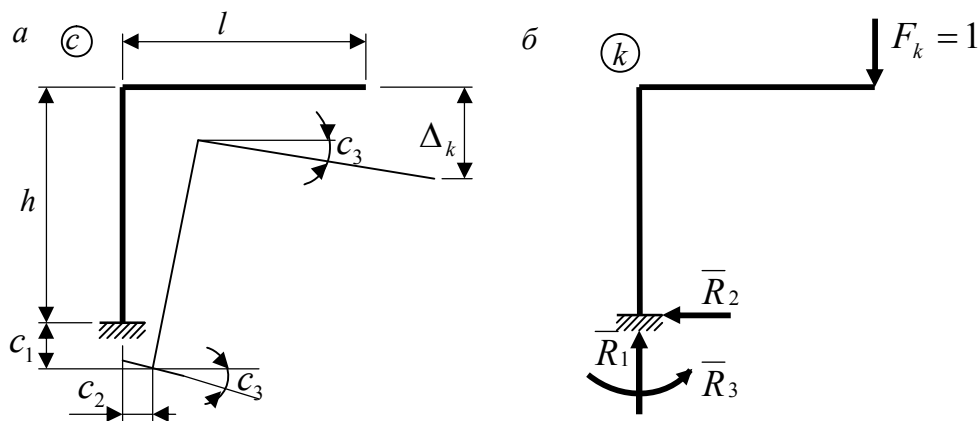


Рисунок 4.14

Отже, для визначення переміщення від осідання опор необхідно визначити реакції опор від одиничної узагальненої сили, прикладеної у напрямку шуканого переміщення, і взяти суму добутків цих реакцій \bar{R}_i на відповідні переміщення опор у їхньому напрямку. Знак кожного із цих добутків додатний, якщо реакція та переміщення опори спрямовані у протилежні сторони.

4.7 Переміщення від температурного впливу

Будемо вважати, що переріз елементів (рис. 4.15, *a*) має вертикальну вісь симетрії, і температура за висотою перерізу змінюється лінійно так, що зміна температури нижнього волокна становить t_1 , а верхнього – t_2 (рис. 4.15, *б*). У цьому випадку зсуви відсутні. Виділивши елемент стержня завдовжки dx , одержимо його деформацію як наведено на рисунку 4,15, *в*.

Позначимо стан системи, у якому прикладена сила $F_i = 1$, індексом i , а стан, в якому задана дія температури, – індексом t . На підставі принципу можливих переміщень маємо:

$$W_{it} = -U_{it},$$

де $W_{it} = 1 \cdot \Delta_{it} = \Delta_{it}$, $U_{it} = -\int_{(l)} \bar{M}_i d\varphi - \int_{(l)} \bar{N}_i \varepsilon dx$.

За рисунком 4.15, *в* визначаємо взаємний кут повороту граней елемента завдовжки dx : $d\varphi = \frac{\alpha t_1 dx - \alpha t_2 dx}{h} = \frac{\alpha(t_1 - t_2)}{h} dx$ та подовження волокна на рівні його нейтральної осі – $\varepsilon dx = \alpha t_0 dx$, де $t_0 = \frac{t_1 |y_2| + t_2 |y_1|}{h}$ – зміна температури нейтрального шару елемента (для перерізу, що має горизонтальну вісь симетрії $t_0 = \frac{t_1 + t_2}{2}$).

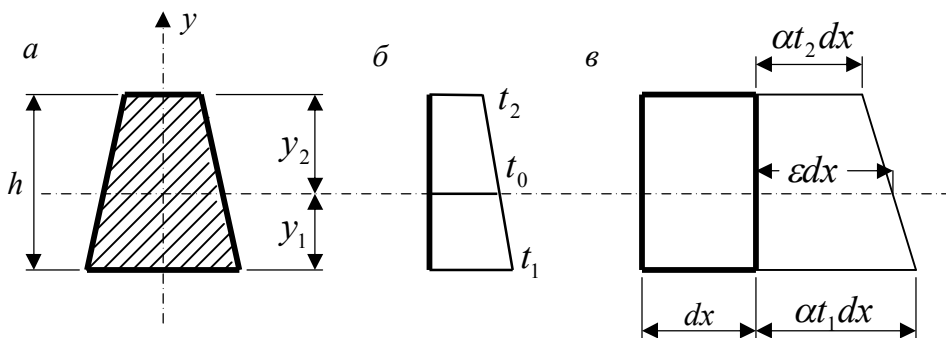


Рисунок 4.15

Отже, для визначення переміщення від температурної дії маємо:

$$\Delta_{it} = \int_{(l)} \alpha \frac{t_1 - t_2}{h} \bar{M}_i dx + \int_{(l)} \alpha t_0 \bar{N}_i dx. \quad (4.37)$$

Якщо систему розбити на ділянки, в межах кожної з яких α , h , t_1 та t_2 не змінюються, ця формула набуває такого вигляду:

$$\Delta_{it} = \sum \alpha \frac{t_1 - t_2}{h} \omega_{\bar{M}_i} + \sum \alpha t_0 \omega_{\bar{N}_i}, \quad (4.38)$$

де $\omega_{\bar{M}_i}$ та $\omega_{\bar{N}_i}$ – площі, відповідно, одиничної епюри моментів та одиничної епюри поздовжніх сил на кожній ділянці, взяті з урахуванням їхніх знаків.

Зауважимо, що для балок та рам другим доданком у (4.37) та (4.38) можна знехтувати і, навпаки, для ферм дійсними будуть лише другі доданки

Запитання для самоконтролю

1. Для яких цілей необхідно обчислювати переміщення?
2. Як формулюється принцип можливих переміщень для пружних систем?
3. Що таке можливе переміщення?
4. Що таке узагальнена сила?
5. Що таке узагальнене переміщення?
6. Як залежать переміщення від навантаження в лінійно деформованих системах?
7. Що розуміється під статичним прикладанням навантаження?
8. Як визначається дійсна робота зовнішніх сил?
9. У чому різниця між дійсною і можливою роботою?
10. Як визначається можлива робота внутрішніх сил?
11. Чим пояснюється наявність знаку «мінус» у виразі можливої роботи внутрішніх сил?
12. Як одержати дійсну роботу внутрішніх сил?
13. Як визначається потенціальна енергія деформації системи?
14. Як формулюється теорема Бетті про взаємність робіт?
15. Як формулюється теорема Максвела про взаємність переміщень?
16. Як формулюється теорема про взаємність реакцій?
17. Як формулюється теорема про взаємність переміщень та реакцій?
18. Як записується формула Мора?
19. Які два стани системи необхідно розглядати при визначенні переміщень за методом Мора?
20. Наведіть послідовність обчислення переміщень за методом Мора.
21. Як обирається допоміжний стан при визначенні переміщень за методом Мора?
22. Якого вигляду набуває формула Мора для ферм і для систем з переважаючим згином?
23. Які прийоми застосовуються для обчислення інтеграла Мора?
24. При виконанні яких умов можна застосовувати правило Верещагіна? Формулу Сімпсона?
25. На основі якого принципу одержують вирази для визначення переміщень від осідання опор та від температурних дій?
26. Як визначаються переміщення від осідання опор?
27. Як визначаються переміщення від температурних дій?

5 СТАТИЧНО НЕВИЗНАЧУВАНІ СИСТЕМИ. МЕТОД СИЛ ТА МЕТОД ПЕРЕМІЩЕНЬ

Статично невизначуваними називають системи, зусилля в яких неможливо обчислити за допомогою одних лише рівнянь рівноваги. Це пояснюється наявністю у статично невизначуваній системі зайвих в'язей, тобто в'язей понад мінімальну їх кількість, необхідну для геометричної незмінюваності системи. Так в рамі, наведеній на рисунку 5.1, *a* для забезпечення геометричної незмінюваності достатньо мати три опорні в'язі, наприклад такі, що відповідають затисненню в точці *A*, отже, дві інші в'язі в точці *B* зайві.

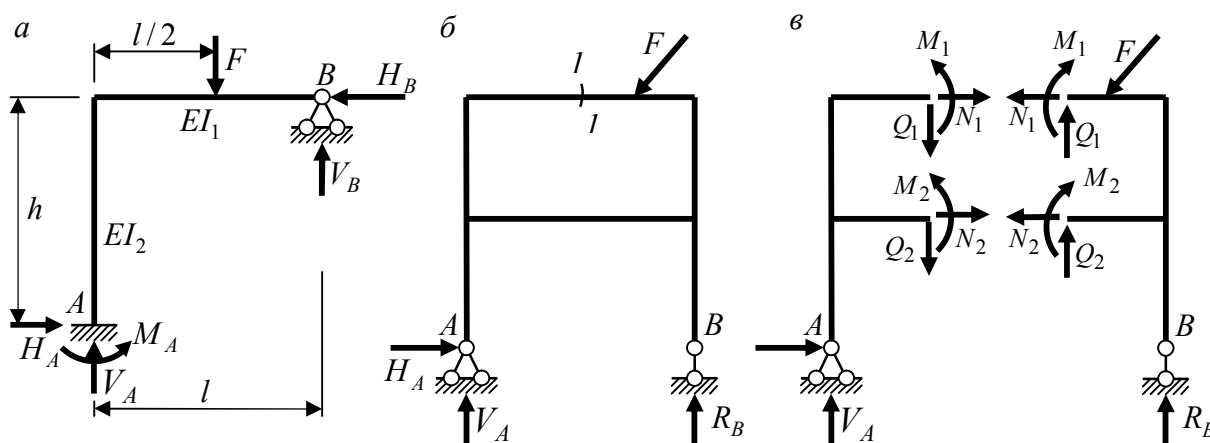


Рисунок 5.1

Для забезпечення геометричної незмінюваності можна використати й інші опорні в'язі, наприклад, нерухому шарнірну опору в точці *B* та одну з в'язей в точці *A*. Тоді зайвими будуть дві інші опорні в'язі в точці *A*. Слід зазначити, що поняття «зайві в'язі» не слід розуміти буквально. Наявність цих в'язей робить систему більш жорсткою і в багатьох випадках дозволяє одержати більш раціональний розподіл зусиль.

Кількість зайвих в'язей n , що визначає *ступінь статичної невизначуваності системи*, можна виразити через кількість ступенів вільності системи

$$n = -W. \quad (5.1)$$

Так, для рами, показаної на рисунку 5.1, *a*, за формулою Чебишова:

$$W = 3D - 2Ш - C_o = 3 \cdot 1 - 2 \cdot 0 - 5 = -2 \text{ або } n = 2.$$

Для розглянутої рами характерним є те, що після визначення опорних реакцій усі внутрішні зусилля можна знайти з рівнянь статки. Таку система називають *зовнішньо статично невизначуваною*. На відміну від неї в рамі на рисунку 5.1, *б* три опорні реакції можна визначити з рівнянь рівноваги. Але при визначенні внутрішніх зусиль, наприклад, в перерізі I-I, доводиться розрізати замкнутий контур ще в одному місці (рис. 5.1, *в*). Отже, маємо статично невизначувану задачу, оскільки шість зусиль (рис. 5.1, *в*) не можна знайти з трьох умов рівноваги. Така система називається *внутрішньо статично невизначуваною*.

У більшості випадків статично невизначувані системи містять як зовнішні, так і внутрішні зайві в'язі.

Як видно з розглянутого прикладу (рис. 5.1, б), замкнутий контур без шарнірів містить три зайві в'язі (за кількістю недостатніх умов рівноваги). Формула Чебишова, що не враховує наявності жорстких з'єднань стержнів і, відповідно, рівняння (5.1) не дозволяють виявити такі зайві в'язі у замкнутих контурах рам. Тому для визначення ступеня статичної невизначуваності рам зазвичай застосовують таку формулу:

$$n = 3K - III + C_o - 3, \quad (5.2)$$

де III і C_o означають, як і у формулі Чебишова, відповідно число простих шарнірів і кількість опорних в'язей, а K – кількість замкнутих контурів, що утворюються стержнями рами.

Для ферм, через відсутність жорстких з'єднань стержнів, співвідношення (5.1) завжди справедливе. Тому, беручи до уваги вираз для кількості ступенів вільності у фермах, одержуємо більш зручну залежність:

$$n = C + C_o - 2Y. \quad (5.3)$$

Як зазначалося раніше, для визначення зусиль у статично невизначуваній системі одних лише рівнянь статичної недостатності. Додаткові рівняння складають на основі дослідження переміщень точок системи.

Отже, сукупність рівнянь для розрахунку статично невизначуваної системи містить ряд невідомих зусиль і переміщень. У лінійно деформованих системах між зусиллями і переміщеннями існує однозначна відповідність, тому будь-яке зусилля легко виразити через переміщення, і навпаки. Залежно від того, які величини (сили, переміщення або частина сил і частина переміщень) приймаються за основні невідомі, виділяють три основні класичні методи розрахунку статично невизначуваних систем: *метод сил, метод переміщень, змішаний метод*.

5.1 Основи метода сил

5.1.1 Розрахунок статично невизначуваних рам методом сил

Метод сил є універсальним методом розрахунку статично невизначуваних систем. Його суть і основні етапи розрахунку покажемо на прикладі рами, що наведена на рисунку 5.1, а. Розрахунок починаємо з визначення ступеня статичної невизначуваності.

Замкнуті контури й шарніри в заданій рамі відсутні, отже за (5.2) одержуємо:

$$n = 3 \cdot 0 - 0 + 5 - 3 = 2.$$

Зазначимо, що далі будемо заздалегідь вважати системи геометрично незмінюваними, інакше необхідно додатково перевіряти їх геометричну структуру. Отже, розглядувана рама є двічі статично невизначуваною, тобто має дві зайві в'язі, для визначення зусиль в яких необхідно скласти два додаткові рівняння – *рівняння сумісності деформацій*. Ці рівняння одержують, аналізуючи так звану *основну систему*.

Основною системою методу сил називають таку геометрично незмінювану й статично визначувану систему, яку одержують із заданої системи усуненням зайвих в'язей і заміною їх зусиллями. Ці зусилля у відкинутих зайвих в'язях є основними невідомими методу сил, їх називають зайвими невідомими і позначають

X_1, X_2, \dots, X_n . Власне, ці сили діяли і в заданій системі як реакції у її внутрішніх або зовнішніх в'язях. Тепер же відносно основної системи сили X_1, X_2, \dots, X_n стали зовнішніми активними силами. Ці сили можуть набувати будь-яких значень, у тому числі таких, що відповідають дійсним значенням зусиль у зайвих в'язях.

Як уже відзначалося, зайвими можуть бути різні в'язі, тому вибір основної системи можна зробити по-різному. Наприклад, для рами (рис. 5.1, *a*), на рисунку 5.2, *a...в* наведено різні варіанти основної системи. Усі ці основні системи одержані усуненням опорних в'язей. Пізніше розглянемо й інші варіанти основної системи, що добуваються усуненням внутрішніх в'язей.

З усіх можливих варіантів необхідно обрати одну основну систему. При цьому раціонально взяти таку, в якій зусилля визначаються якомога простіше. З цих міркувань виберемо для розрахунку основну систему, зображену на рисунку 5.2, *a*. У подальшому розрахунок заданої рами замінимо розрахунком основної системи.

Для того, щоб така заміна була еквівалентною, необхідно і достатньо, щоб в основній системі переміщення уздовж відкинутих в'язей (інакше, в напрямку зайвих невідомих) були відсутні.

Для визначення цих переміщень розкладаємо все навантаження в основній системі на окремо діючі зайві невідомі й задане навантаження (рис. 5.2, *г...е*). Тоді переміщення у напрямку зайвого невідомого X_i дорівнюватиме сумі переміщень: Δ_{i1} – від сили X_i (рис. 5.2, *г*), Δ_{i2} – від сили X_2 (рис. 5.2, *д*), Δ_{if} – від заданого навантаження (рис. 5.2, *е*).

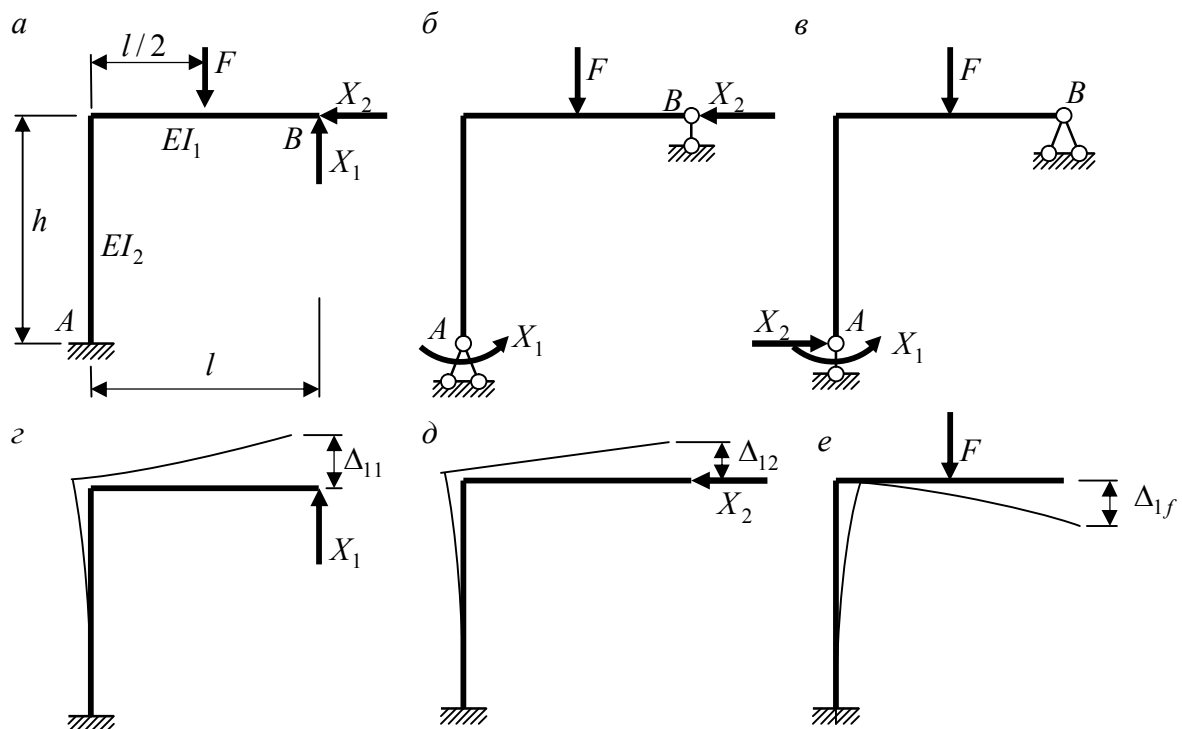


Рисунок 5.2

За умовою еквівалентності основної і заданої систем це переміщення повинно бути нульовим:

$$\Delta_{11} + \Delta_{12} + \Delta_{1f} = 0. \quad (5.4)$$

Аналогічно для переміщення в напрямку X_2 запишемо таке рівняння:

$$\Delta_{21} + \Delta_{22} + \Delta_{2f} = 0. \quad (5.5)$$

Для того, щоб записати рівняння (5.4) та (5.5) у явному вигляді через зайві невідомі, виразимо кожне з переміщень Δ_{ik} як добуток одиничного переміщення δ_{1k} (в тому самому напрямку, тільки від $\bar{X}_k = 1$) на величину відповідного невідомого X_k :

$$\begin{aligned} \Delta_{11} &= \delta_{11} \cdot X_1, & \Delta_{12} &= \delta_{12} \cdot X_2, \\ \Delta_{21} &= \delta_{21} \cdot X_1, & \Delta_{22} &= \delta_{22} \cdot X_2. \end{aligned}$$

Тепер рівняння (5.4), (5.5) набувають такого вигляду:

$$\begin{aligned} \delta_{11} \cdot X_1 + \delta_{12} \cdot X_2 + \Delta_{1f} &= 0; \\ \delta_{21} \cdot X_1 + \delta_{22} \cdot X_2 + \Delta_{2f} &= 0. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Ці рівняння відображають умови сумісності деформацій (відсутність переміщень у напрямку зайвих в'язей) і називаються *канонічними рівняннями методу сил*.

Отже, для визначення двох невідомих сил X_1 та X_2 ми одержали два рівняння (5.6).

Одиничні ($\delta_{11}, \delta_{12}, \delta_{21}, \delta_{22}$) і вантажні (Δ_{1f}, Δ_{2f}) переміщення можна визначити за допомогою методу Мора. Оскільки рама є системою з переважним згином, у формулі Мора достатньо урахувати тільки згинаючі моменти. Тому спочатку побудуємо в основній системі епюри згинаючих моментів від кожного одиничного зайвого невідомого і від заданого навантаження (рис. 5.3, *a...в*), тобто від тих впливів, від яких необхідно знайти переміщення.

Застосовуючи правило Верещагіна, обчислюємо для розглядуваної рами:

$$\begin{aligned} \delta_{11} &= \sum \frac{1}{EI} \int \bar{M}_1 \bar{M}_1 ds = \frac{1}{EI_1} \frac{l \cdot l}{2} \frac{2}{3} l + \frac{1}{EI_2} l h l = \frac{l^3}{3EI_1} + \frac{l^2 h}{EI_2}; \\ \delta_{12} &= \sum \frac{1}{EI} \int \bar{M}_1 \bar{M}_2 ds = \frac{1}{EI_2} \frac{h \cdot h}{2} l = \frac{h^2 l}{2EI_2}; \\ \delta_{22} &= \sum \frac{1}{EI} \int \bar{M}_2 \bar{M}_2 ds = \frac{1}{EI_2} \frac{h \cdot h}{2} \frac{2}{3} h = \frac{h^3}{3EI_2}; \\ \Delta_{1f} &= \sum \frac{1}{EI} \int \bar{M}_1 M_f ds = -\frac{1}{EI_1} \frac{(F l / 2) \cdot l / 2}{2} \left(\frac{2}{3} l + \frac{1}{3} \cdot \frac{l}{2} \right) - \\ &\quad - \frac{1}{EI_2} \frac{F l}{2} h l = -\frac{5 F l^3}{48 EI_1} - \frac{F l^2 h}{2 EI_2}; \\ \Delta_{2f} &= \sum \frac{1}{EI} \int \bar{M}_2 M_f ds = -\frac{1}{EI_2} \frac{F l}{2} h \frac{h}{2} = -\frac{F l h^2}{4 EI_2}. \end{aligned}$$

Зазначимо, що переміщення δ_{21} не обчислювалося тому, що за теоремою про взаємність переміщень $\delta_{21} = \delta_{12}$.

Після підстановки переміщень у канонічні рівняння маємо таку систему рівнянь:

$$\left(\frac{l^3}{3EI_1} + \frac{l^2h}{EI_2}\right)X_1 + \frac{h^2l}{2EI_2}X_2 - \frac{5Fl^3}{48EI_1} - \frac{Fl^2h}{2EI_2} = 0;$$

$$\frac{h^2l}{2EI_2}X_1 + \frac{h^3}{3EI_2}X_2 - \frac{Flh^2}{4EI_2} = 0.$$

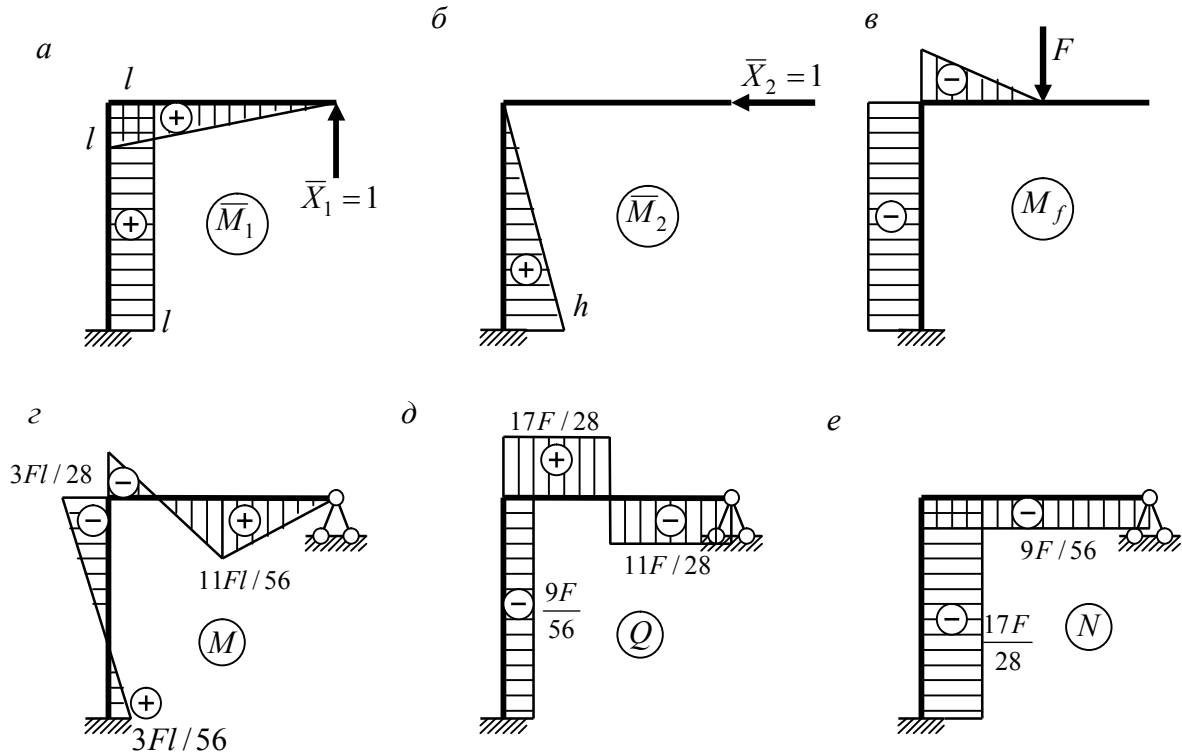


Рисунок 5.3

Перетворимо її, помноживши кожне рівняння на EI_1 :

$$\left(\frac{l^3}{3} + l^2h \frac{EI_1}{EI_2}\right)X_1 + \frac{h^2l}{2} \frac{EI_1}{EI_2}X_2 - \frac{5Fl^3}{48} - \frac{Fl^2h}{2} \frac{EI_1}{EI_2} = 0;$$

$$\frac{h^2l}{2} \frac{EI_1}{EI_2}X_1 + \frac{h^3}{3} \frac{EI_1}{EI_2}X_2 - \frac{Flh^2}{4} \frac{EI_1}{EI_2} = 0.$$

Як бачимо, у цих рівняннях замість абсолютних значень жорсткості елементів присутні лише їх відношення. Звідси випливає, що зусилля у статично невизначуваній системі не залежать від абсолютних значень жорсткостей її елементів, а залежать тільки від співвідношень цих жорсткостей.

Задамо в нашому прикладі $EI_1/EI_2 = 1$ та $h = l$. Після підстановки цих співвідношень і нескладних перетворень приходимо до такої системи рівнянь:

$$\frac{4}{3}X_1 + \frac{1}{2}X_2 - \frac{29F}{48} = 0;$$

$$\frac{1}{2}X_1 + \frac{1}{3}X_2 - \frac{F}{4} = 0.$$

Розв'язуючи цю систему будь-яким відомим способом, знаходимо значення зайвих невідомих:

$$X_1 = \frac{11}{28} F; \quad X_2 = \frac{9}{56} F.$$

Переходячи до визначення остаточної зусиль у заданій рамі, зазначимо, що, оскільки при одержаних зусиллях X_1 і X_2 канонічні рівняння задовольняються, основна система дійсно еквівалентна заданій. Розглядаючи основну систему (рис. 5.2, *a*) при відомих значеннях сил X_1 та X_2 , легко визначити внутрішні зусилля і побудувати епюри M , Q і N (рис. 5.3, *г...е*).

На основі розглянутого прикладу можна дати таку послідовність розрахунку статично невизначених систем методом сил:

1. Знайти ступінь статичної невизначуваності.
2. Обрати основну систему.
3. Записати канонічні рівняння.
4. Визначити внутрішні зусилля в основній системі від дії одиничних невідомих та заданого навантаження.
5. Визначити коефіцієнти й вільні члени канонічних рівнянь.
6. Розв'язати систему рівнянь і визначити зайві невідомі.
7. Визначити остаточної зусилля у заданій системі.

Розберемо докладніше етапи розрахунку статично невизначуваної системи методом сил на прикладі розрахунку рам.

Вибір основної системи. Як відзначалося раніше основна система обирається відкиданням зайвих в'язей. Раніше було показано, що зайвими можуть бути як зовнішні, так і внутрішні в'язі системи. Розглянемо можливі способи усунення зайвих в'язей.

1. *Відкидання опорних в'язей* здійснюється повним усуненням деяких опор або заміною їх опорами з меншою кількістю в'язей. Реакції, що діють в напрямку відкинутих в'язей, будуть зайвими невідомими. Відкидаючи ті чи інші в'язі в рамі (рис. 5.1, *a*), були одержані різні варіанти її основної системи (рис. 5.2, *a...в*).

2. *Постановка шарніра у проміжному перерізі стержня* дозволяє в кожному такому випадку усунути одну в'язь, що відповідає згинаючому моменту. Цей момент і буде зайвим невідомим. Для рами, зображеної на рисунку 5.4, *a*, при виборі основної системи необхідно поставити три шарніри (ступінь статичної невизначуваності $n = 3$). Розміщення цих шарнірів повинно задовольняти вимогам геометричної незмінюваності основної системи, отже вони не можуть бути розташовані на одній прямій (рис. 5.4, *б*).

3. *Розрізання стержня* у загальному випадку усуває три в'язі, що відповідають внутрішнім зусиллям M , Q і N . Приклад такого розрізання для рами (рис. 5.4, *a*) наведено на рисунку 5.4, *в*. В окремому випадку *розрізання стержня по шарніру* звільняє дві в'язі (рис. 5.4, *г*), а *розрізання ідеального стержня* – одну в'язь (рис. 5.4, *д, е*). Нагадаємо, що ідеальним називають прямий ненавантажений стержень з шарнірами на кінцях.

Серед в'язей статично невизначуваної системи розрізняють *абсолютно необхідні* й *умовно необхідні*. До абсолютно необхідних відносять в'язі, при усуненні яких система стає геометрично змінюваною. Прикладом такої в'язі може бути вертикальний опорний стержень у рамі, зображений на рисунку 5.5, *а*. Дійсно, усунувши його, одержимо миттєво змінювану систему (рис. 5.5, *б*). Для абсолютно необхідних в'язей характерною є статична визначуваність зусиль у них. Так, у наведеному прикладі (рис. 5.5, *а*) реакція V_B у вертикальному опорному стержні може бути знайдена з умови рівноваги $\sum M_A = 0$.

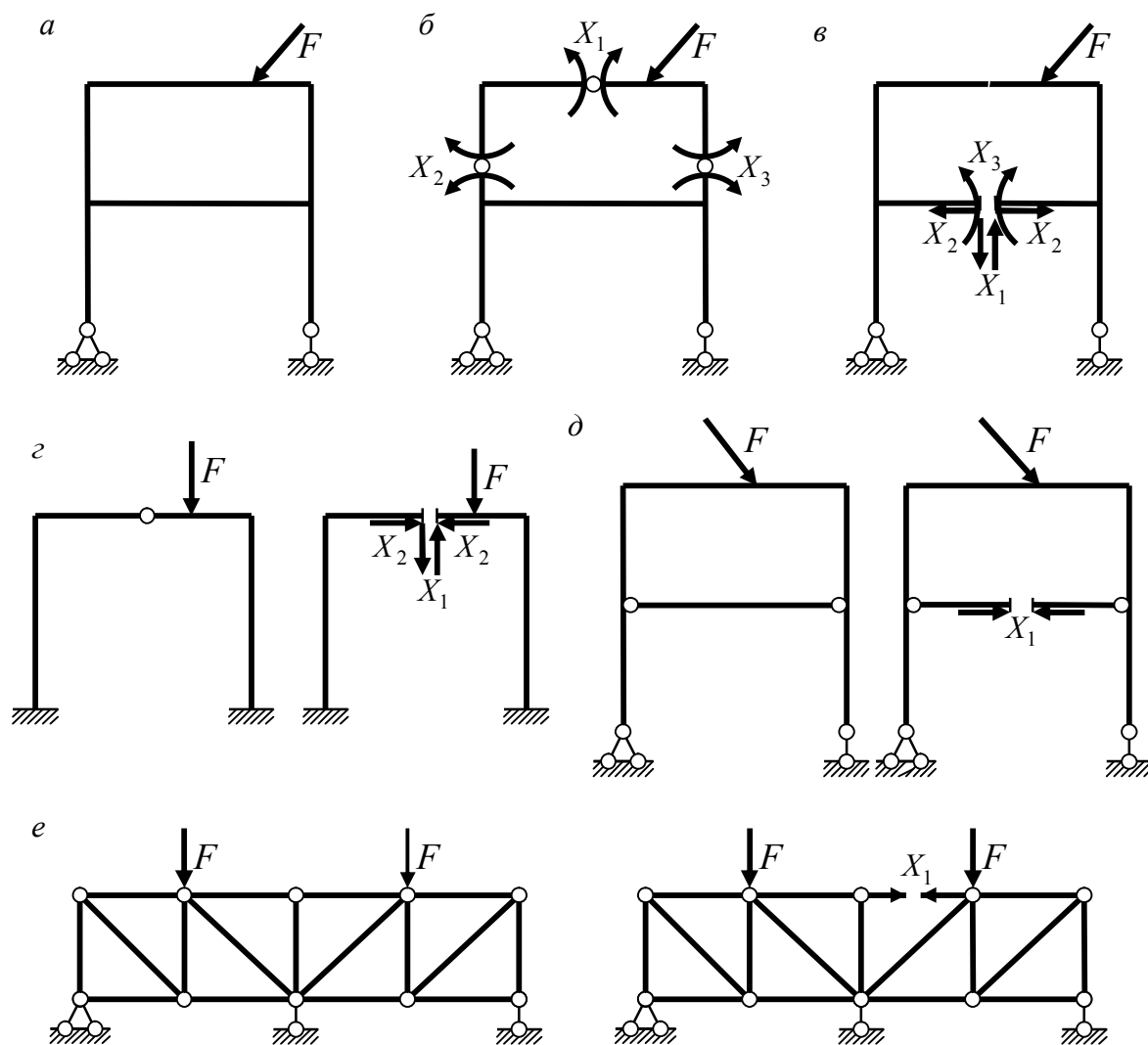


Рисунок 5.4

Виходячи з наведених міркувань, *при виборі основної системи неможна відкидати абсолютно необхідні в'язі*.

В'язі, при усуненні яких система залишається геометрично незмінюваною, називають *умовно необхідними*. У наведеній на рисунку 5.5, *а* рамі однією з таких в'язей буде горизонтальний опорний стержень. Система з відкинутим горизонтальним опорним стержнем може бути основною системою методу сил (рис. 5.5, *в*).

З розглянутих прикладів можна зробити висновок, що кількість варіантів основної системи може бути нескінченно великою. Для розрахунку обирають один з них, звичайно найбільш простий з огляду на визначення зусиль.

Канонічні рівняння. Кількість канонічних рівнянь відповідає кількості зайвих невідомих. Ці рівняння записують за простими правилами: перші індекси одиничних переміщень відповідають порядковому номеру рівняння, а другі – номеру невідомого, біля якого це переміщення стоїть як коефіцієнт. Для n раз статично невизначуваної системи канонічні рівняння запишемо так:

$$\begin{aligned} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \dots + \delta_{1k}X_k + \dots + \delta_{1n}X_n + \Delta_{1f} &= 0; \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \dots + \delta_{2k}X_k + \dots + \delta_{2n}X_n + \Delta_{2f} &= 0; \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots & \\ \delta_{i1}X_1 + \delta_{i2}X_2 + \dots + \delta_{ik}X_k + \dots + \delta_{in}X_n + \Delta_{if} &= 0; \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots & \\ \delta_{n1}X_1 + \delta_{n2}X_2 + \dots + \delta_{nk}X_k + \dots + \delta_{nn}X_n + \Delta_{nf} &= 0. \end{aligned} \tag{5.7}$$

Нагадаємо, що канонічні рівняння за фізичною суттю є кінематичними і відображають умови сумісності деформацій. Ліва частина i -го рівняння є переміщенням в основній системі в напрямку невідомого X_i .

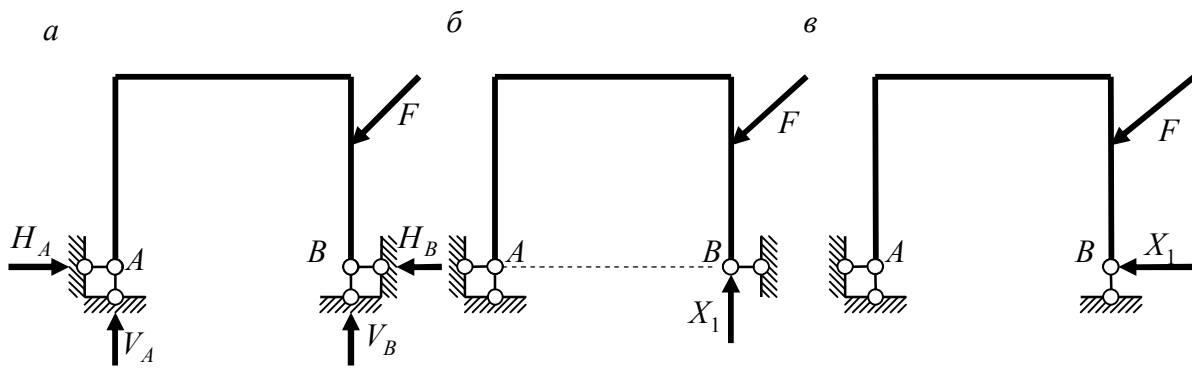


Рисунок 5.5

Визначення коефіцієнтів і вільних членів канонічних рівнянь.

Коефіцієнт δ_{ik} канонічного рівняння є переміщенням в напрямку i -ї відкинутої в'язі (i -го зайвого невідомого) від дії зайвого невідомого $X_k = 1$.

Ці одиничні переміщення можна визначити за допомогою методу Мора:

$$\delta_{ik} = \sum \int \frac{\bar{M}_i \bar{M}_k ds}{EI} + \sum \int \frac{\bar{N}_i \bar{N}_k ds}{EA} + \sum \int \mu \frac{\bar{Q}_i \bar{Q}_k ds}{GA}, \tag{5.8}$$

де $\bar{M}_i, \bar{N}_i, \bar{Q}_i$ та $\bar{M}_k, \bar{N}_k, \bar{Q}_k$ - зусилля в основній системі відповідно від зайвих невідомих $X_i = 1$ та $X_k = 1$

Для систем з переважним згином (балки, рами), у формулі (5.8) зазвичай зберігаємо тільки перший доданок:

$$\delta_{ik} = \sum \int \frac{\bar{M}_i \bar{M}_k ds}{EI}$$

або

$$\delta_{ik} = \sum \frac{1}{EI} \int \bar{M}_i \bar{M}_k ds \quad (5.9)$$

Одиничні переміщення, розташовані на головній діагоналі матриці коефіцієнтів канонічних рівнянь, називають головними переміщеннями, решту – побічними. Як випливає з (5.9), головні переміщення завжди додатні. Дійсно, при $k = i$ маємо:

$$\delta_{ii} = \sum \frac{1}{EI} \int \bar{M}_i^2 ds > 0.$$

Усі побічні переміщення задовольняють умові взаємності $\delta_{ik} = \delta_{ki}$.

Аналогічно знаходять вільні члени канонічних рівнянь – *вантажні переміщення*. За формулою Мора для систем з переважним згином маємо:

$$\Delta_{if} = \sum \frac{1}{EI} \int \bar{M}_i M_f ds, \quad (5.10)$$

де M_f – згинаючі моменти в основній системі від дії заданого навантаження.

Як завжди при обчисленні переміщень за формулами (5.9) та (5.10), можна користуватися правилом Верещагіна і формулою Сімпсона.

Побудова остаточних епюр внутрішніх зусиль у заданій системі. Оскільки при знайдених значеннях зайвих невідомих умови сумісності деформацій задовольняються, розрахунок основної системи дозволяє одержати шукані зусилля та переміщення заданої системи. Для цього зручно скористатися принципом незалежності дії сил. Тоді для згинаючих моментів одержимо

$$M = M_1 + M_2 + \dots + M_n + M_f$$

або, беручи до уваги, що $M_1 = \bar{M}_1 X_1$, $M_2 = \bar{M}_2 X_2, \dots$, $M_n = \bar{M}_n X_n$, приходимо до такого виразу:

$$M = \bar{M}_1 X_1 + \bar{M}_2 X_2 + \dots + \bar{M}_n X_n + M_f = \sum_{i=1}^n \bar{M}_i X_i + M_f. \quad (5.11)$$

Аналогічно можна визначити поперечні та поздовжні сили:

$$Q = \bar{Q}_1 X_1 + \bar{Q}_2 X_2 + \dots + \bar{Q}_n X_n + Q_f = \sum_{i=1}^n \bar{Q}_i X_i + Q_f; \quad (5.12)$$

$$N = \bar{N}_1 X_1 + \bar{N}_2 X_2 + \dots + \bar{N}_n X_n + N_f = \sum_{i=1}^n \bar{N}_i X_i + N_f.$$

При побудові епюр M , Q , N в рамках звичайно діють у такій послідовності. Спочатку будують епюри згинаючих моментів $\bar{M}_i X_i$, а потім підсумовуванням за формулою (5.11) знаходять остаточну епюру M . Епюри $\bar{M}_i X_i$ повторюють обриси відповідних епюр \bar{M}_i і відрізняються від них лише величинами ординат. Тому епюри $\bar{M}_i X_i$ звичайно називають *виправленими*.

Далі на кожній ділянці рами визначають поперечні сили через згинаючі моменти $Q_{\text{ліва}}^{\text{права}} = \frac{M_r + M_l}{l} \pm \frac{ql}{2}$ і будують епюру Q .

Нарешті, для визначення поздовжніх сил розглядають рівновагу вузлів рами під дією заданих вузлових навантажень, а також поперечних та поздовжніх сил.

5.1.2 Перевірка правильності обчислень. Переміщення у статично невизначуваних системах

При виконанні розрахунків вручну бажано перевіряти проміжні та кінцеві результати.

Суть перевірок, як і раніше, покажемо на прикладі рами. Для цього спочатку побудуємо сумарну одиничну епюру згинаючих моментів:

$$\bar{M}_s = \bar{M}_1 + \bar{M}_2 + \dots + \bar{M}_n = \sum_{i=1}^n \bar{M}_i.$$

Як видно з наведеної формули, сумарна одинична епора \bar{M}_s відповідає одночасній дії одиничних зайвих невідомих в основній системі.

Перевірка одиничних переміщень. Помноживши сумарну одиничну епюру на епюру \bar{M}_i , одержимо:

$$\begin{aligned} \int \frac{\bar{M}_i \bar{M}_s}{EI} ds &= \int \frac{1}{EI} \bar{M}_i (\bar{M}_1 + \bar{M}_2 + \dots + \bar{M}_n) ds = \\ &= \int \frac{1}{EI} \bar{M}_i \bar{M}_1 ds + \int \frac{1}{EI} \bar{M}_i \bar{M}_2 ds + \dots + \int \frac{1}{EI} \bar{M}_i \bar{M}_n ds = \\ &= \delta_{i1} + \delta_{i2} + \dots + \delta_{in}. \end{aligned}$$

Отже, результат помноження сумарної одиничної епюри на i -ту одиничну дає переміщення в напрямку i -ї в'язі від спільної дії одиничних зайвих невідомих. Це переміщення дорівнює сумі коефіцієнтів i -го канонічного рівняння:

$$\delta_{is} = \int \frac{1}{EI} \bar{M}_i \bar{M}_s ds = \sum_{i=1}^n \delta_{ik}. \quad (5.13)$$

Ця перевірка називається *порядковою*. Вона повинна бути виконана для кожного канонічного рівняння, тобто для $i=1, 2, \dots, n$. Замість n порядкових перевірок можна виконати одну – *універсальну перевірку*, що полягає в помноженні сумарної одиничної епюри самої на себе та перевірці умови

$$\delta_{ss} = \int \frac{\bar{M}_s \bar{M}_s}{EI} ds = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \delta_{ik}. \quad (5.14)$$

При перевірці одиничних переміщень раціонально діяти в такій послідовності. В першу чергу виконати універсальну перевірку. Якщо вона задовольняється, переміщення знайдені правильно, якщо ні – треба виконати порядкові перевірки, що дають можливість уточнити, в якому саме переміщенні є помилка.

Перевірка вантажних переміщень виконується помноженням сумарної одиничної епюри на вантажну епюру згинаючих моментів:

$$\begin{aligned} \int \frac{\bar{M}_s M_f}{EI} ds &= \int \frac{M_f}{EI} (\bar{M}_1 + \bar{M}_2 + \dots + \bar{M}_n) ds = \\ &= \int \frac{\bar{M}_1 M_f}{EI} ds + \int \frac{\bar{M}_2 M_f}{EI} ds + \dots + \int \frac{\bar{M}_n M_f}{EI} ds = \Delta_{1f} + \Delta_{2f} + \dots + \Delta_{nf}. \end{aligned}$$

Отже, маємо:

$$\Delta_{sf} = \int \frac{\bar{M}_s M_f}{EI} ds = \sum_{i=1}^n \Delta_{if}. \quad (5.15)$$

Перевірка остаточної епюри згинаючих моментів виконується двох видів: *статична і кінематична*. У статичній перевірці вирізають вузли і записують умови їх рівноваги під дією вузлових зосереджених моментів та згинаючих моментів на кінцях стержнів. Ця перевірка є допоміжною і задовольняється автоматично, якщо епюри згинаючих моментів в основній системі побудовані правильно і виконується кінематична перевірка.

Основною перевіркою в методі сил є кінематична. Вона може бути *порядковою або універсальною*.

У *порядковій перевірці* кожна одинична епюра моментів помножується на остаточно епюру M . Тоді, наприклад, для i -го помноження маємо:

$$\begin{aligned} \int \frac{\bar{M}_i M}{EI} ds &= \int \frac{\bar{M}_i}{EI} (\bar{M}_1 X_1 + \bar{M}_2 X_2 + \dots + \bar{M}_n X_n + M_{f1}) ds = \\ &= \int \frac{\bar{M}_i \bar{M}_1}{EI} X_1 ds + \int \frac{\bar{M}_i \bar{M}_2}{EI} X_2 ds + \dots + \int \frac{\bar{M}_i \bar{M}_n}{EI} X_n ds + \int \frac{\bar{M}_i M_f}{EI} ds = \\ &= \delta_{i1} X_1 + \delta_{i2} X_2 + \dots + \delta_{in} X_n + \Delta_{if} = 0. \end{aligned}$$

Отже, *результат перемноження кожної з одиничних епюр на остаточно епюру згинаючих моментів повинен дорівнювати нулю*:

$$\Delta_i = \int \frac{\bar{M}_i M}{EI} ds = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (5.16)$$

Підсумовуючи відповідні частини рівнянь (5.16), одержимо вираз, що служить для *універсальної кінематичної перевірки епюри M* :

$$\Delta_s = \int \frac{\bar{M}_s M}{EI} ds = 0. \quad (5.17)$$

Для **обчислення переміщення у статично невизначуваній системі** можна скористатися еквівалентністю заданої та основної систем. Дійсно, якщо умови сумісності деформацій (канонічні рівняння) задовольняються, переміщення в основній системі відповідають переміщенням заданої системи. Тоді, побудувавши в основній системі епюру згинаючих моментів \bar{M} від одиничної узагальненої сили, що прикладена в напрямку шуканого переміщення, знаходимо за формулою Мора

$$\Delta = \int \frac{\bar{M} M}{EI} ds, \quad (5.18)$$

де M – згинаючі моменти від заданого навантаження, знайдені в заданій статично невизначуваній системі.

Слід зауважити, що епюра \bar{M} може бути побудована в будь-якій статично визначуваній основній системі, не обов'язково в тій, що використовувалась для розрахунку на задане навантаження.

Запитання для самоконтролю

1. Яка система є статично невизначуваною?
2. Як ступінь статичної невизначуваності пов'язаний з кількістю ступенів вільності?

3. Чому дорівнює ступінь статичної невизначуваності замкнутого безшарнірного контуру?
4. Як визначити ступінь статичної невизначуваності рами, виходячи з поняття про замкнутий контур?
5. Які системи відносять до внутрішньо статично невизначуваних?
6. Назвіть три основні класичні методи розрахунку статично невизначуваних систем.
7. Що приймають за невідомі методу сил?
8. Дайте визначення основної системи методу сил.
9. У чому різниця між абсолютно необхідними та умовно необхідними в'язями?
10. Чи можуть абсолютно необхідні в'язі бути зайвими?
11. Наведіть можливі способи відкидання в'язей при виборі основної системи.
12. Що являють собою канонічні рівняння методу сил?
13. Що являють собою коефіцієнти та вільні члени канонічних рівнянь методу сил?
14. Який метод зазвичай застосовують для визначення коефіцієнтів і вільних членів канонічних рівнянь?
15. Наведіть властивості головних та побічних коефіцієнтів канонічних рівнянь.
16. Як зусилля у статично невизначуваній системі при дії навантаження залежать від жорсткостей елементів системи?
17. Як можна знайти зусилля у заданій системі після визначення зайвих невідомих?
18. Як перевірити правильність обчислення коефіцієнтів і вільних членів канонічних рівнянь?
19. Як перевірити правильність розрахунку статично невизначуваної системи?
20. Як визначаються переміщення у статично невизначуваній рамі?

5.2 Метод переміщень

5.2.1. Припущення. Кількість невідомих методу переміщень

Розраховуючи раму методом сил, після визначення зайвих невідомих ми могли визначити всі інші зусилля і будь-яке переміщення точок рами. Можна уявити собі й іншу постановку задачі: визначивши будь-яким чином деякі переміщення, знайти відповідні зусилля. Саме так ставиться задача розрахунку статично невизначуваної системи методом переміщень.

Метод переміщень є таким самим універсальним методом, як і метод сил, і

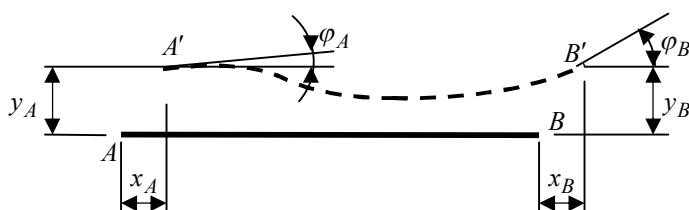


Рисунок 5.6

може бути застосований для розрахунку різних споруд. Однак найбільшого поширення він набув для розрахунку статично невизначуваних рам, що складаються з прямих стержнів постійної жорсткості. При цьому приймаються такі

припущення:

- поздовжніми і поперечними деформаціями стержнів при визначенні переміщень нехтують;
- зміни відстаней між кінцями стержнів за рахунок викривлення їх осей не беруть до уваги.

Щоб визначити зусилля в окремому стержні і переміщення усіх його точок, досить знати кутові й лінійні зміщення його кінців (рис. 5.6) – $x_A, x_B, y_A, y_B, \varphi_A, \varphi_B$.

У стержневих системах не обов'язково окремо задавати переміщення кінців кожного стержня. При жорсткому з'єднанні стержнів у вузлі, що має місце у рамах, досить знати поворот кінця будь-якого з цих стержнів, тобто поворот вузла. При шарнірному з'єднанні повороти усіх стержнів у вузлів різні, однак величини цих поворотів є надлишковими даними для визначення зусиль у таких стержнях.

Аналогічно зменшується і число лінійних зміщень. Наприклад, у рамі (рис. 5.7, а) для визначення напружено-деформованого стану досить задати кутові переміщення вузлів 1 і 2 – Z_1 і Z_2 та загальне для усіх вузлів горизонтальне зміщення – Z_3 . Ці переміщення зазвичай приймаються за невідомі методу переміщень. Отже, загальне число усіх кутових та незалежних лінійних зміщень

вузлів рами є числом невідомих методу:

$$n = n_y + n_x. \quad (5.19)$$

Число кутових зміщень n_y або ступінь кутової рухомості вузлів рами відповідає кількості жорстких вузлів (у нашому прикладі – 2). При визначенні числа лінійних зміщень n_x або ступеня лінійної рухомості беремо до уваги, що відповідно до прийнятих припущень при деформаціях рами відстань між кінцями стержнів не змінюються. У такому випадку при визначенні кількості лінійних зміщень жорсткі з'єднання у вузлах рами можна замінити шарнірними. Тоді рама перетворюється на шарнірно-стержневу систему (рис. 5.7, б) і кількість лінійних переміщень n_x можна визначити як мінімальну кількість додаткових опорних стержнів, яка необхідна для усунення переміщень цієї шарнірно-

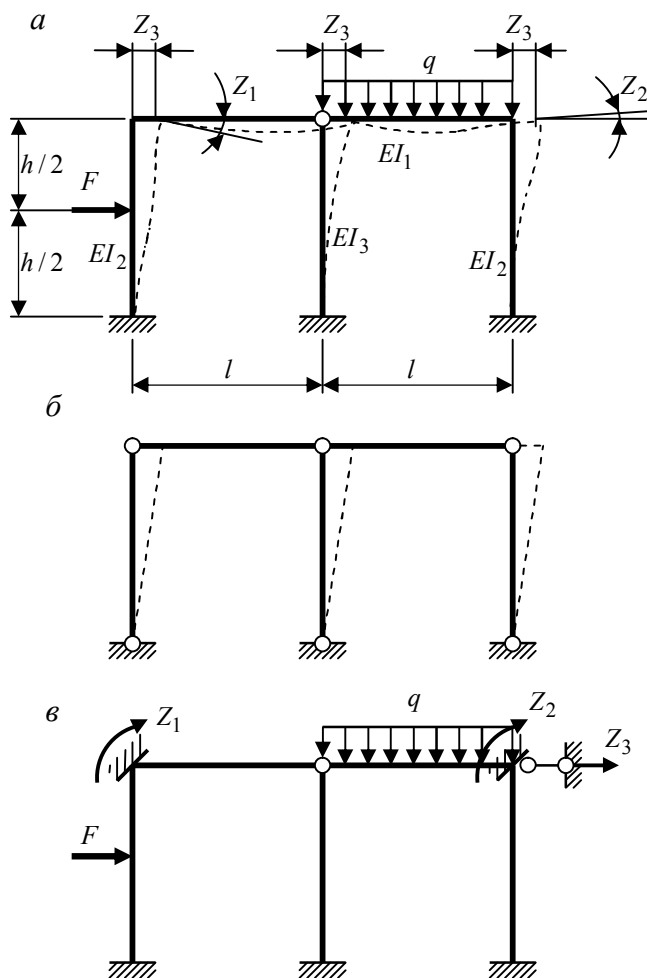


Рисунок 5.7

стержневої схеми рами.

Раму, у якій лінійні зміщення вузлів відсутні, називають *рамою з незміщуваними вузлами*.

Оскільки для розрахунку рами слід знати вузлові й лінійні зміщення її вузлів, число цих невідомих методу переміщень називають *ступенем кінематичної невизначуваності* рами. Це означає, що рама, в якій кутові та лінійні зміщення вузлів відсутні або відомі, є кінематично визначуваною.

5.2.2. Суть методу

Поставимо в рамі (рис. 5.7, а) в'язі у напрямку можливих переміщень її вузлів. У напрямку поворотів вузлів поставимо додаткові затиснення (рис. 5.7, в). Кожне з цих затиснень фіксує тільки поворот відповідного вузла, не перешкоджаючи лінійним зміщенням, тому їх називають *плаваючими затисненнями*. У напрямку лінійних зміщень вузлів поставимо додаткові опорні стержні. У розглянутому прикладі необхідно поставити один такий стержень (рис. 5.7, в).

Введеним в'язям можна надати будь-які переміщення, у тому числі і такі, які відповідають переміщенням заданої рами. Оскільки заданим зміщенням вузлів відповідають конкретні зусилля, одержана система є *кінематично визначуваною*. Отже, переміщуючи добавлені в'язі, можна задати в одержаній системі різні розподіли зусиль, у тому числі й такі, що відповідають заданій системі.

Одержана таким чином система приймається за основну систему методу переміщень. Отже, *основною системою методу переміщень є кінематично визначувана система, одержана із заданої введенням додаткових в'язей у напрямку можливих зміщень вузлів*.

Переміщення додаткових в'язей, тобто переміщення вузлів, позначаються Z_1, Z_2, \dots і є основними невідомими методу переміщень. Стрілками на основній системі показують прийняті додатні напрямки переміщень (рис. 5.7, в). Серед невідомих можуть бути переміщення двох типів:

- 1) кути повороту жорстких вузлів (Z_1 та Z_2 у розглянутому прикладі), інакше – кутові невідомі;
- 2) лінійні зміщення вузлів (Z_3 у розглянутому прикладі), інакше – лінійні невідомі.

Завдяки введенню додаткових в'язей основна система розчленовується на окремі стержні. Ці стержні мають постійну жорсткість, їх опорні закріплення завжди можуть бути тільки двох типів – затиснення або шарнір, тому їх неважко розрахувати як звичайні балки на різні прості впливи застосувавши, наприклад, метод сил.

Нагадаємо, що на величину згинаючих моментів зовсім не впливають поздовжні закріплення балки. Тому не має значення, яке затиснення є в кінці балки: повне чи плаваюче. Аналогічно не має різниці між рухомим та нерухомим шарнірним опиранням. Взагалі в основній системі методу переміщень можуть зустрітися балки чотирьох типів, показаних на рисунку 5.8. Балка з двома шарнірними кінцями, як і консольна, є статично визначуваною, їх розрахунок не викликає утруднень.

Рисунок 5.8

Результати розрахунків двох інших типів балок постійного перерізу на різні впливи наведено у таблиці 5.1.

Користуючись цією таблицею, легко побудувати епюри згинаючих моментів в основній системі та визначити в ній зусилля, що нас цікавлять. Для розглянутого прикладу рами (рис. 5.7, а) на рис. 5.9, а побудовано епюри \bar{M}_1 , \bar{M}_2 , \bar{M}_3 від дії одиничних зміщень в'язей та епюра M_f від дії заданого навантаження.

Для полегшення користування таблицею 5.1 при побудові епюр від зміщення в'язей зручно попередньо показати деформовану вісь рами. Для розглянутої рами (рис. 5.7, а) вона наведена штриховими лініями на епюрах \bar{M}_1 , \bar{M}_2 , \bar{M}_3 (рис. 5.9, а). Проаналізуємо тепер різницю між основною та заданою системами. Сумісність деформацій окремих перерізів та елементів рами в основній системі методу переміщень не порушена, оскільки усі в'язі заданої системи зберігаються. Але через введення додаткових в'язей з'являються додаткові сили – реакції у в'язях, які порушують умови рівноваги системи. Ці реакції зникнуть в основній системі тільки в тому випадку, коли переміщення вузлів (доданих в'язей) відповідатимуть переміщенням у заданій системі.

Позначивши реакції у добавлених в'язях R_1, R_2, R_3 , одержимо умови еквівалентності основної та заданої систем:

$$R_1 = 0; R_2 = 0; R_3 = 0. \quad (5.20)$$

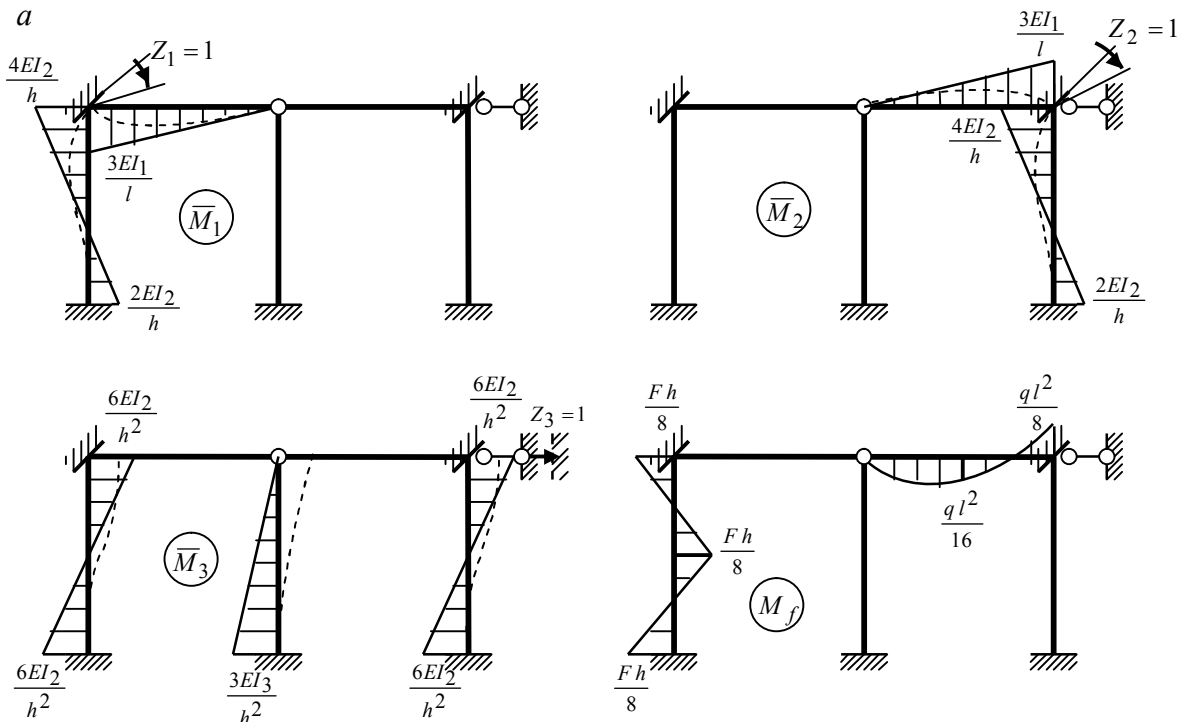


Рисунок 5.9

Для того, щоб одержати рівняння (5.18) у канонічній формі, так само, як і в методі сил, використаємо принцип суперпозиції. Отже, виділяючи в основній системі окремо дію зміщення вузлів, окремо задане навантаження, одержимо:

$$R_i = R_{i1} + R_{i2} + R_{i3} + R'_{id}$$

і далі:

$$\left. \begin{aligned} r_{11} Z_1 + r_{12} Z_2 + r_{13} Z_3 + R_{1f} &= 0; \\ r_{21} Z_1 + r_{22} Z_2 + r_{23} Z_3 + R_{2f} &= 0; \\ r_{31} Z_1 + r_{32} Z_2 + r_{33} Z_3 + R_{3f} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.21)$$

Нагадаємо, що $R_{ik} = r_{ik} Z_k$, де r_{ij} - реакція в i -й в'язі від зміщення k -ї в'язі на одиницю, інакше – одинична реакція.

Ці рівняння називаються *канонічними рівняннями методу переміщень*. Вони є статичними рівняннями і виражають умови рівноваги: i -е рівняння відображає умову рівності нулю реакції в i -й добавленій в'язі основної системи. Коефіцієнтами і вільними членами канонічних рівнянь є реакціями у додаткових в'язях основної системи: r_{ik} - реакція в i -й в'язі від одиничного зміщення k -ї в'язі або *одинична реакція*; R_{if} - реакція в i - й в'язі від заданого навантаження або *вантажна реакція*.

Одиничні й вантажні реакції визначимо з умов рівноваги. Зокрема, реактивні моменти в плаваючих затисненнях (коефіцієнти та вільні члени перших двох канонічних рівнянь у нашому прикладі) знаходимо з умов рівноваги відповідних вузлів (рис. 5.10, *a*), тобто з умови рівності гулю суми моментів, що діють у вузлі:

$$\begin{aligned} r_{11} &= \frac{3EI_1}{l} + \frac{4EI_2}{h}; \quad r_{12} = 0; \quad r_{13} = -\frac{6EI_2}{h^2}; \quad R_{1f} = -\frac{Fh}{8}; \\ r_{21} &= 0; \quad r_{22} = \frac{3EI_1}{l} + \frac{4EI_2}{h}; \quad r_{23} = -\frac{6EI_2}{h^2}; \quad R_{2f} = \frac{ql^2}{8}. \end{aligned}$$

Зазвичай реакції у доданих в'язях спрямовують у бік відповідних зміщень цих в'язей. У цьому випадку головні коефіцієнти канонічних рівнянь – головні реакції завжди будуть додатними.

Для визначення реактивних сил в опорному стержні виріжемо ригель. Розглядаючи рівновагу останнього (рис. 5.10, *б*), беремо до уваги, що поздовжні сили у розрізаних стояках не дадуть проєкцій на вісь опорного стержня. Тому в перерізах стояків достатньо показати лише поперечні сили. Останні можна знайти через реакції балок з таблиці 5.1 або за епюрою згинаючих моментів за виразами, що застосовувались при розрахунку рам:

$$Q_{\text{прав}}^{\text{лів}} = \frac{M_{\text{прав}} - M_{\text{лів}}}{l} \pm \frac{ql}{2} \quad (5.22)$$

Рівняння рівноваги ригелів з рисунку 5.10, *б*, тобто умови рівності нулю сум проєкцій сил, що діють на вирізаний стержень, па вісь цього стержня, дають:

$$r_{31} = -\frac{6EI_2}{h^2}; \quad r_{32} = \frac{6EI_2}{h^2}; \quad r_{33} = \frac{24EI_2}{h^3} + \frac{3EI_3}{h^3}; \quad R_{3f} = -\frac{F}{2}.$$

Звертаємо увагу на те, що при визначенні одиничних реакцій не використовувалась теорема про взаємність. В методі переміщень більш зручно використати її для перевірки. У нашому прикладі дійсно маємо:

$$r_{12} = r_{21}, \quad r_{13} = r_{31}, \quad r_{23} = r_{32}.$$

Підставивши знайдені реакції в канонічні рівняння, вирішуємо систему рівнянь (5.22). Для розглянутої рами, приймаючи $EI_1 = EI_2 = EI_3 = EI$, $F = \frac{ql}{2}$,

$$r_{11} = \frac{7EI}{l}; \quad r_{12} = r_{21} = 0; \quad r_{13} = -\frac{6EI}{l^2}; \quad R_{1f} = \frac{ql^2}{16}; \quad r_{22} = \frac{7EI}{l};$$

$h = l$, одержуємо:

$$r_{23} = r_{32} = -\frac{6EI}{l^2}; \quad R_{2f} = \frac{ql^2}{8}; \quad r_{33} = \frac{27EI}{l^2}; \quad R_{3f} = -\frac{ql}{4}$$

і далі:

$$\begin{aligned} \frac{7EI}{l} Z_1 - \frac{6EI}{l^2} Z_2 + \frac{ql^2}{16} &= 0; \\ \frac{7EI}{l} Z_2 - \frac{6EI}{l^2} Z_3 + \frac{ql^2}{8} &= 0; \\ -\frac{6EI}{l^2} Z_1 - \frac{6EI}{l^2} Z_2 + \frac{27EI}{l^2} Z_3 - \frac{ql}{4} &= 0. \end{aligned}$$

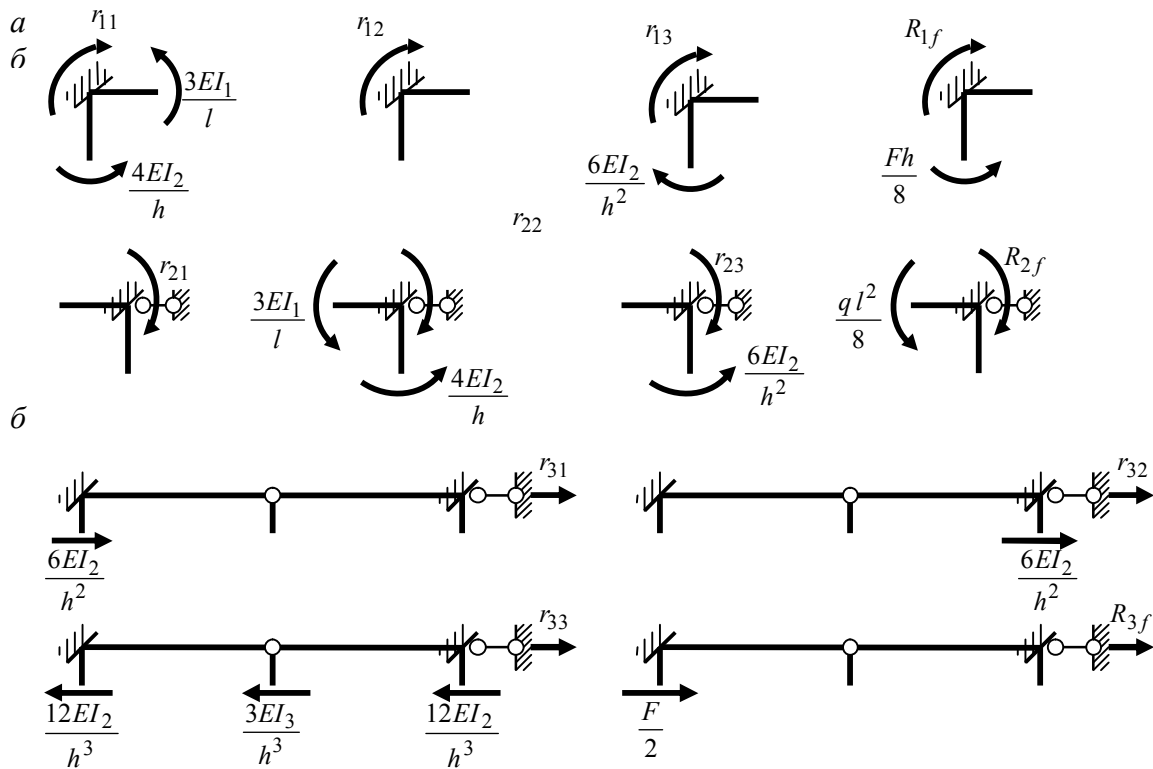


Рисунок 5.10

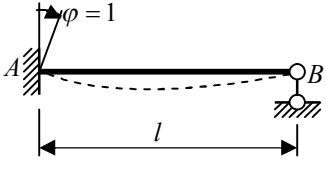
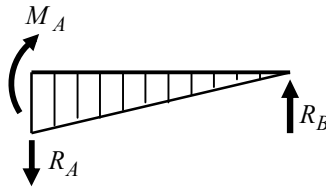
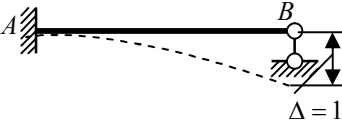
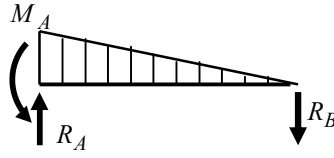
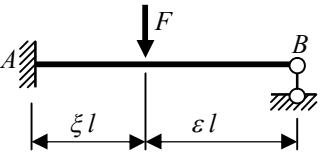
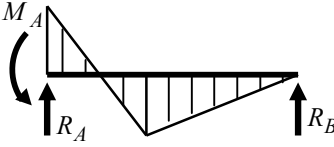
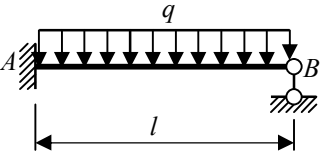
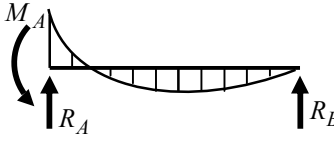
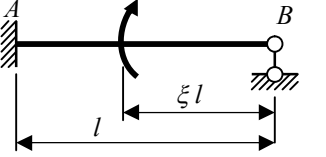
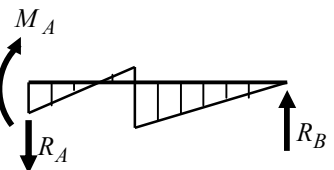
Звідси маємо:

$$Z_1 = -0,00435 \frac{ql^3}{EI}; \quad Z_2 = -0,01328 \frac{ql^3}{EI}; \quad Z_3 = 0,00534 \frac{ql^4}{EI}.$$

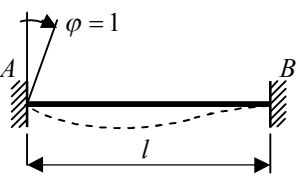
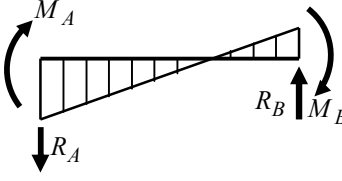
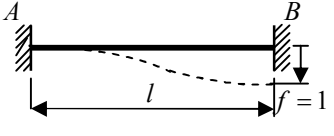
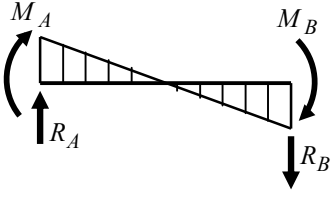
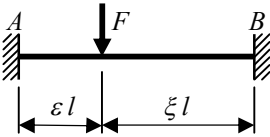
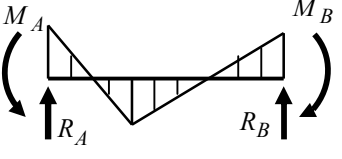
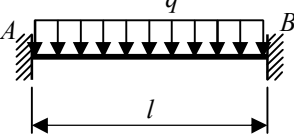
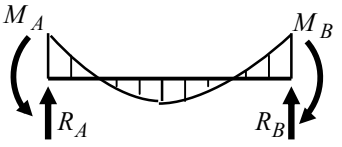
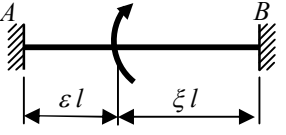
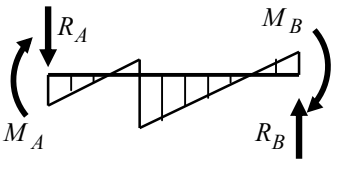
Тепер побудову результуючої епюри згинаючих моментів можна виконати так само, як і в методі сил, з використанням виправлених епюр $M_1 = \bar{M}_1 Z_1$, $M_2 = \bar{M}_2 Z_2$ та $M_3 = \bar{M}_3 Z_3$. Одержуємо: $M = M_f + M_1 + M_2 + M_3$ або в загальному випадку

$$M = M_f + \sum_{i=1}^n M_i = M_f + \sum_{i=1}^n \bar{M}_i Z_i. \quad (5.23)$$

Таблиця 5.1

№ з/п	Схема балки та вплив на неї	Епюра згинаючих моментів та реакції	Формули для визначення реакцій
1	2	3	4
1			$M_A = \frac{3EI}{l}$ $R_A = R_B = \frac{3EI}{l^2}$
2			$M_A = \frac{3EI}{l^2}$ $R_A = R_B = \frac{3EI}{l^3}$
3			$M_A = \frac{Fl}{2} \xi(1 - \xi^2)$ $R_A = \frac{F}{2} \xi(3 - \xi^2)$ $R_B = \frac{F}{2} \epsilon^2(1 - \epsilon)$
4			$M_A = \frac{ql^2}{8}$ $R_A = \frac{5ql}{8}$ $R_B = \frac{3ql}{8}$
5			$M_A = \frac{M}{2} (1 - 3\xi^2)$ <p>(при $\xi^2 > \frac{1}{3}$ момент M_A змінює напрямок на протилежний)</p>

Продовження таблиці 5.1

1	2	3	4
6			$M_A = 2M_B = \frac{4EI}{l}$ $R_A = R_B = \frac{6EI}{l^2}$
7			$M_A = M_B = \frac{6EI}{l^2}$ $R_A = R_B = \frac{12EI}{l^3}$
8			$M_A = F l \varepsilon \xi^2$ $M_B = F l \varepsilon^2 \xi$ $R_A = F \xi^2 (1 + 2\varepsilon)$ $R_B = F \varepsilon^2 (1 + 2\xi)$
9			$M_A = M_B = \frac{q l^2}{12}$ $R_A = R_B = \frac{q l}{2}$
10			$M_A = M \xi (2 - 3\xi)$ $M_B = M \varepsilon (2 - 3\varepsilon)$ $R_A = R_B = \frac{M}{l} 6 \varepsilon \xi$

Виправлені (M_1, M_2, M_3) та остаточно (M) епюри показано на рисунку 5.11 без множника ql^2 .

Для перевірки правильності обчислень можна, як і в методі сил, застосувати статичну й кінематичну перевірки. Але оскільки основна система методу переміщень кінематично визначувана, кінематична перевірка є допоміжною і виконується завжди при правильних епюрах згинаючих моментів в основній системі та при виконаній статичній перевірці.

Основною перевіркою в методі переміщень є перевірка рівноваги вузлів та інших частин рами. Кількість перевірених умов рівноваги в усіх випадках мусить бути не меншою числа невідомих методу переміщень. Простіше усього перевіряти рівновагу тих частин рами, які розглядалися при обчисленні коефіцієнтів та вільних

членів канонічних рівнянь. Ці перевірки для нашого прикладу проілюстровані на рисунку 5.12. Побудову остаточних епюр Q і N виконують, як у методі сил.

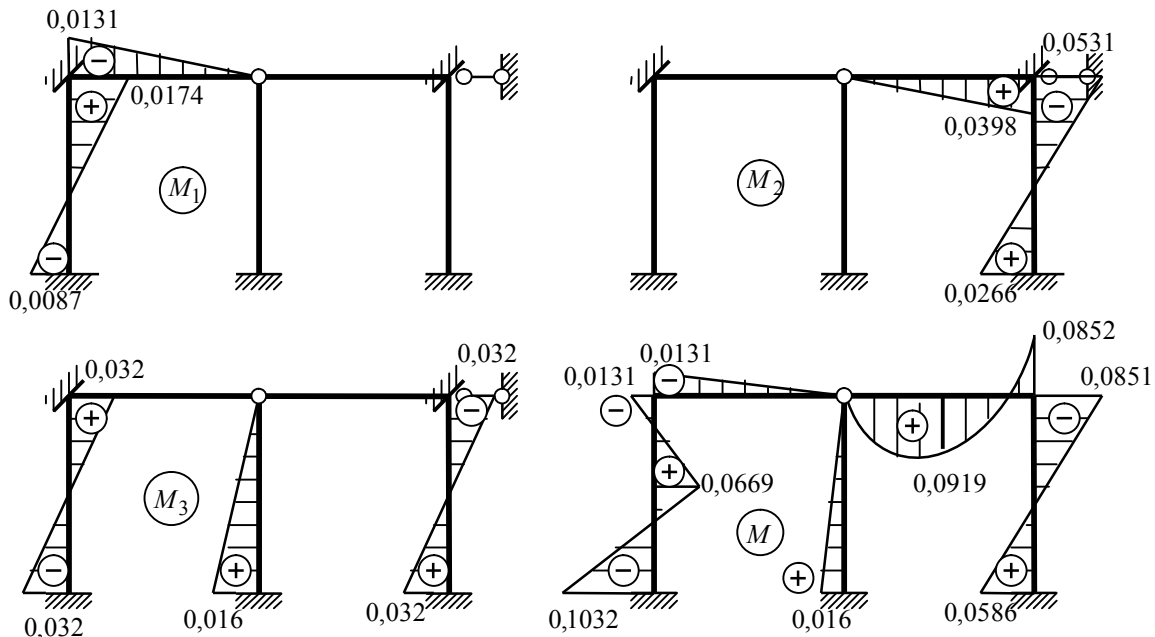


Рисунок 5.11

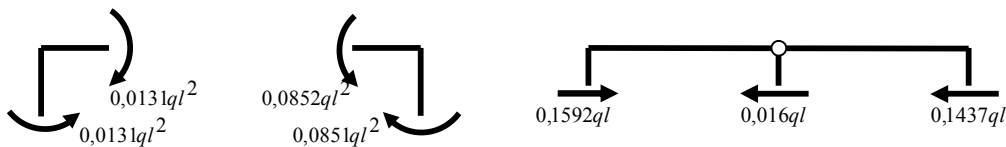


Рисунок 5.12

Запитання для самоконтролю

1. Які припущення приймаються при розрахунку методом переміщень?
2. Що береться за невідомі методу переміщень?
3. Як визначається ступінь кінематичної невизначуваності системи?
4. Як у методі переміщень відбувається перехід до основної системи?
5. Яке затиснення називається плаваючим?
6. Чому основна система методу переміщень є кінематично визначуваною?
7. На які елементи поділяється споруда в основній системі?
8. Як будують епюри згинаючих моментів в основній системі?
9. Як зазвичай спрямовують реакції у доданих в'язях основної системи?
10. Які умови виражають канонічні рівняння методу переміщень?
11. Яка механічна суть величин r_{ik} і R_{if} ?
12. Які властивості мають коефіцієнти канонічних рівнянь?
13. Як після визначення невідомих будують епюри внутрішніх зусиль для заданої системи?
14. Як перевіряють правильність розв'язання методом переміщень?

6 РОЗРАХУНОК ПЛОСКИХ СТЕРЖНЕВИХ СИСТЕМ МЕТОДОМ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ (МСЕ)

6.1 Загальні поняття

Класичні методи розрахунку споруд орієнтовані на виконання розрахунків вручну. Цим пояснюється введення різноманітних спрощуючих гіпотез, розробка різних методів, що дозволяють окремо розв'язувати статичні та кінематичні рівняння статично невизначуваних задач тощо. Широке розповсюдження обчислювальної техніки дозволило застосовувати універсальні методи розрахунку, коли головне значення має формалізація розрахунків, а кількість обчислень відходить на другий план. Одним із таких методів є метод скінченних елементів (МСЕ). Його перевагою є можливість відмови від деяких спрощуючих припущень, формалізація розрахунків та застосування матричних операцій. Останнє дає можливість стисло записати алгебраїчні операції з великими масивами чисел.

Основна ідея МСЕ полягає в тому, що континуальна за суттю конструкція подається як набір окремих її частин, що називаються *скінченними елементами* (СЕ). Ці елементи пов'язані між собою в скінченній кількості точок, що називаються *вузлами*.

В якості скінченного елемента береться малий елемент заданої розрахункової схеми, напружено-деформований стан якого відповідає напружено-деформованому стану всієї системи.

6.2 Види скінченних елементів. Ступені вільності

Розглянемо деякі скінченні елементи на прикладах.

1. У *рамі*, наведеній на рисунку 6.1, *a*, зусилля й переміщення є функціями координат, що визначають положення перерізу вздовж осей стержнів. Розіб'ємо стержні рами на деяку кількість скінченних елементів з довжиною l , зусилля та переміщення будемо визначати тільки у вузлах (точках з'єднання елементів). Через ці вузлові величини можна потім визначити параметри напружено-деформованого стану для будь-якого перерізу в межах СЕ. Зрозуміло, чим меншими будуть скінченні елементи, тим ближче застосована дискретна схема буде до дійсної континуальної системи.

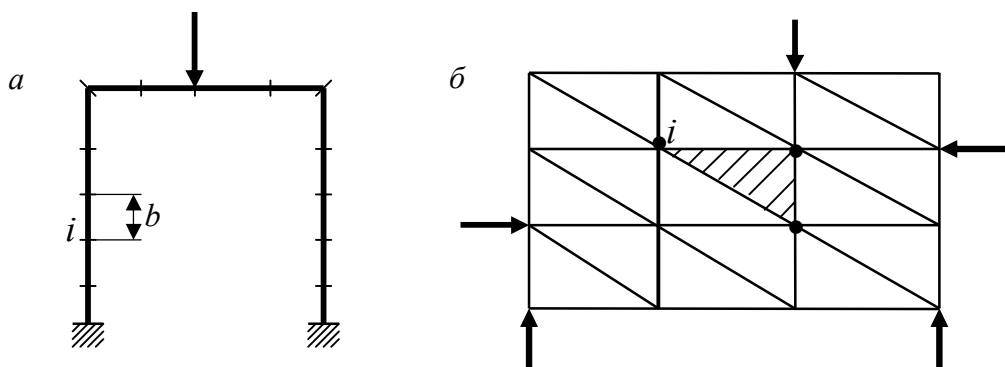


Рисунок 6.1

2. Тонка пластинка, що зазнає плоского напруженого стану (рис. 6.1, б), є континуальною системою – переміщення її точок v та u є функціями координат x та y , які не мають розривів. Розбиваючи пластинку, наприклад, на трикутні елементи, одержуємо СЕ для плоскої задачі. Нехтуючи переміщеннями вдовж

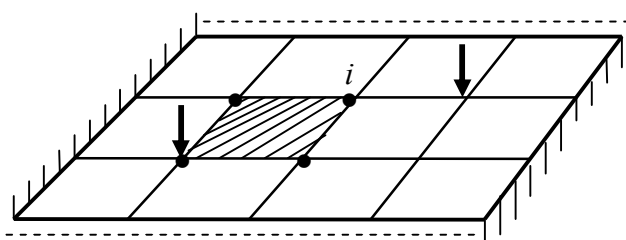


Рисунок 6.2

ліній контакту скінченних елементів, можна вважати суттєвими тільки переміщення u_i та v_i у вузлах СЕ.

3. Для зігнутої пластинки (рис. 6.2), що розраховується за технічною теорією, напружено-деформований стан визначається прогинами точок її серединної поверхні $w(x, y)$ та кутами повороту θ_x та θ_y нормалей до серединної поверхні відносно осей x та y . Розбиваючи серединну поверхню пластинки на прямокутні скінченні елементи, необхідно враховувати прогини вузлів та відповідні кути повороту. Аналогічні елементи іншої конфігурації можуть бути використані для розрахунку оболонки.

4. Неважко побачити, що переміщення вузлів *ферми* повністю визначають напружено-деформований стан кожного стержня ферми.

Отже, форма скінченних елементів може бути різною для різних розрахункових схем.

Кількість узагальнених переміщень вузлів скінченного елемента, які беруть до уваги, в його розрахунковій схемі становить ступінь вільності скінченного елемента.

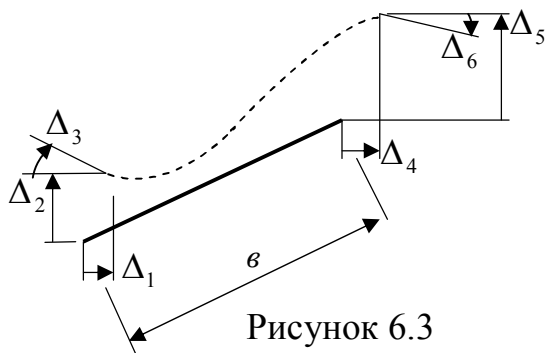


Рисунок 6.3

На рисунку 6.3 наведено окремий скінченний елемент рами. Напружено-деформований стан цього елемента цілком визначається переміщеннями $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4, \Delta_5, \Delta_6$ його кінців, отже, він має шість ступенів вільності.

Як видно з рисунку 6.1, б, трикутний скінченний елемент тонкої пластинки, що зазнає плоского

напруженого стану, має 6 ступенів вільності, оскільки кожен з трьох його вузів може зазнавати двох незалежних переміщень.

Напружено-деформований стан чотирикутного елемента тонкої зігнутої пластинки (рис. 6.2) визначається дванадцятьма ступенями вільності – прогинами кожного вузла та кутами повороту нормалей до серединної поверхні у вузлах.

Далі будемо розглядати тільки стержневі системи – балки, рами, ферми й, відповідно, стержневі скінченні елементи.

6.3 Кінематичні характеристики вузлів рами

У стержневих системах у якості вузлів зручно брати точки з'єднання стержнів, точки прикладання зосереджених сил та моментів, місця стрибкоподібної зміни жорсткості або інтенсивності розподіленого навантаження. Скінченними елементами в цьому випадку є стержні, що з'єднують сусідні вузли.

Вузли нумеруються в довільному порядку. На рисунку 6.4, а наведено нумерацію вузлів рами.

Для визначення взаємного розташування вузлів та їх статичних і кінематичних характеристик введемо деяку систему координат x, y , яку далі називатимемо загальною або глобальною.

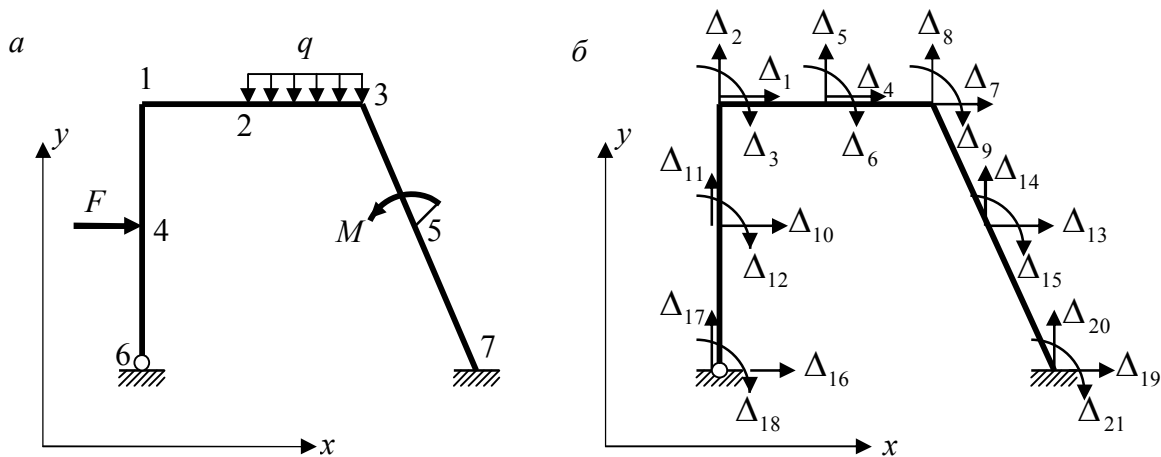


Рисунок 6.4

Переміщення жорсткого вузла є загальними для всіх стержнів, що з'єднуються в цьому вузлі, тому кожен такий вузол має три ступеня вільності. Ці ступені вільності відповідають двом лінійним та одному кутовому переміщенням. Переміщення вузлів розглянутої рами в системі координат x, y наведені на рисунку 6.4, б. Додатні лінійні зміщення спрямовані убік

відповідних координатних осей, додатні кутові зміщення – за напрямком руху годинникової стрілки.

Зазначимо, що наявність в'язей, наприклад, опорних, виключає можливість відповідних переміщень. У розглянутому прикладі у вузлах 6 та 7 знаходяться відповідно шарнірно-нерухома та затискаюча нерухома опори, отже, $\Delta_{16} = \Delta_{17} = \Delta_{19} = \Delta_{20} = \Delta_{21} = 0$. Крім того, оскільки шарнірний вузол 6 являє собою точку, що, як відомо, не має розмірів, поворот Δ_{18} відсутній.

Зміщення $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_{15}$ є основними невідомими задачі, їх можна записати у вигляді вектора

$$\vec{\Delta} = \begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \vdots \\ \Delta_{15} \end{bmatrix}, \quad (6.1)$$

який називають *вектором вузлових зміщень рами*.

6.4 Статичні характеристики вузлів рами. Рівняння рівноваги

На кожний із вузлів рами діють зовнішні сили та внутрішні зусилля, що передаються на вузол внаслідок деформації стержнів, які з'єднуються в цьому вузлі.

Зовнішні сили, що діють на вузол, будемо показувати у вигляді зосереджених сил та моментів, прикладених у напрямку відповідних переміщень вузлів (рис. 6.5).

Величини сил визначаються схемою завантаження рами. При цьому навантаження, розташовані на скінченних елементах, необхідно звести до сил, які прикладаються до вузлів. Для прикладу наведемо визначення вузлових сил від рівномірно розподіленого навантаження для стержня (рис. 6.6, а) із двома жорсткими кінцями. Ці сили можна визначити з розрахунку балки із двома затисненнями на кінцях (рис. 6.6, б).

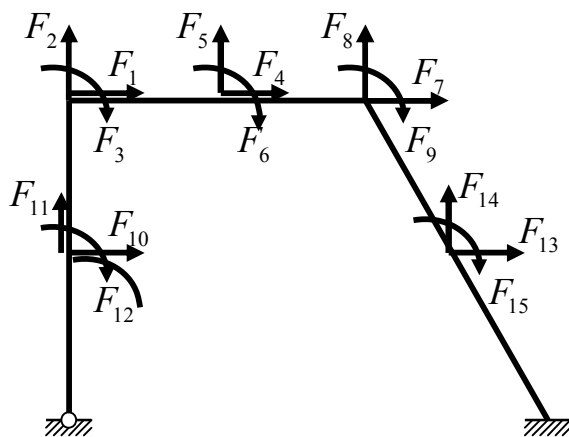


Рисунок 6.5

Застосуємо метод початкових параметрів:

$$EIy_x = EIy_0 + EI\theta_0 x + M_0 \frac{x^2}{2} + Q_0 \frac{x^3}{6} - q \frac{x^4}{24};$$

$$EI\theta_x = EI\theta_0 + M_0 x + Q_0 \frac{x^2}{2} - q \frac{x^3}{6}.$$

Умови на початку координат у т. А дають:

$$x = 0, \quad \theta = 0, \quad \text{звідки } EI\theta_0 = 0; \quad y_0 = 0,$$

звідки $EIy_0 = 0$; $M_0 = M_A$ та $Q_0 = R_A$.

Умови відсутності прогину та кута повороту на кінці балки при $x = l$ приводять до двох рівнянь відносно M_A та R_A :

$$M_A \frac{l^2}{2} + R_A \frac{l^3}{6} - q \frac{l^4}{24} = 0,$$

$$M_A l + R_A \frac{l^2}{2} - q \frac{l^3}{6} = 0,$$

звідки одержимо: $M_A = -\frac{ql^2}{12}$; $R_A = \frac{ql}{2}$.

З умов симетрії балки маємо: $M_B = M_A = -\frac{ql^2}{12}$; $R_B = R_A = \frac{ql}{2}$.

Відсікаючи лівий та правий кінці стержня (рис. 6.6, в), одержуємо сили та моменти, що діють на лівий та правий вузли на кінцях стержня:

$$F_{\text{лів}} = F_{\text{прав}} = \frac{ql}{2}; M_{\text{лів}} = \frac{ql^2}{12}; M_{\text{прав}} = \frac{ql^2}{12}.$$

Зауважимо, що на рисунку 6.6,в наведені дійсні напрямки сил та моментів за їх дією на кінці.

Отже, для рами (рис. 6.4, а) маємо:

$$F_1 = F_2 = F_3 = F_4 = 0; F_5 = -\frac{ql^{2-3}}{2}; F_6 = \frac{ql^{2-3}}{12}; F_7 = 0; F_8 = -\frac{ql^{2-3}}{2};$$

$$F_9 = -\frac{ql^{2-3}}{12}; F_{10} = F; F_{11} = F_{12} = 0; F_{13} = F_{14} = 0; F_{15} = -M.$$

Ці сили можна записати у вигляді вектора вузлових сил:

$$\vec{F} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_{15} \end{bmatrix}. \quad (6.2)$$

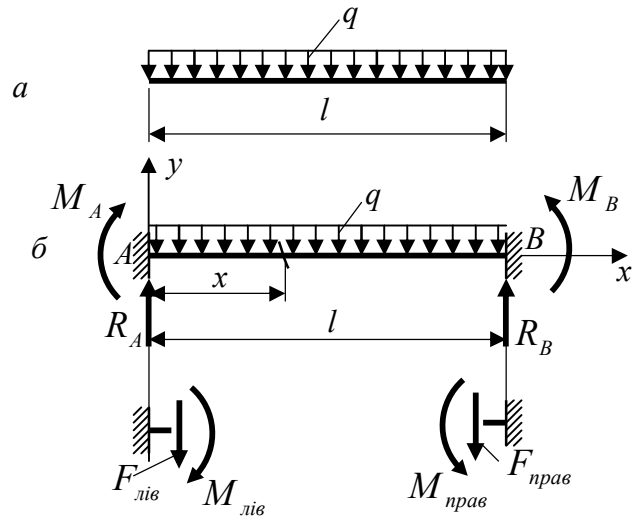


Рисунок 6.6

При зміщеннях вузлів рами на кінцях стержнів – СЕ з’являються реактивні сили, що діють на вузли. Повні реакції від усіх стержнів, які з’єднуються у вузлі, будемо подавати у вигляді складових R_i уздовж переміщень Δ_i . Напрямок цих складових – реакцій R_i будемо подавати відповідно до їхньої дії на вузол з боку стержня, тобто назустріч вузловим силам F_i (рис. 6.7).

Для лінійно-деформованої системи реакції R_i можна записати так:

$$R_i = K_{i1}\Delta_1 + K_{i2}\Delta_2 + \dots + K_{ij}\Delta_j + \dots + K_{in}\Delta_n, \quad i=1,2,\dots,n. \quad (6.3)$$

Механічну суть коефіцієнта K_{ij} можна визначити, якщо задати переміщення $\Delta_j = 1$, а інші переміщення вузлів нульовими. У цьому випадку $R_i = r_{ij} = K_{ij}$, тобто K_{ij} – це реакція в напрямку i -го зміщення, викликана зміщенням $\Delta_j = 1$.

Сукупність усіх реакцій системи подамо у вигляді вектора:

$$\vec{R} = \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_{15} \end{bmatrix}. \quad (6.4)$$

Тоді співвідношення (6.3) можна записати в матричній формі так:

$$\vec{R} = \vec{K} \cdot \vec{\Delta}. \quad (6.5)$$

У цьому випадку $\vec{K} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \dots & K_{1n} \\ K_{21} & K_{22} & \dots & K_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{n1} & K_{n2} & \dots & K_{nn} \end{bmatrix}$ (6.6)

матриця реакцій від одиничних зміщень вузлів і називається *матрицею жорсткості системи*.

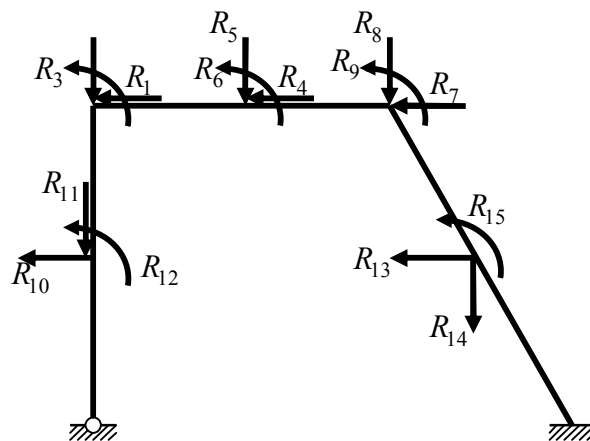


Рисунок 6.7

Зазначимо, що, оскільки елементами матриці жорсткості є одиничні реакції, для них має місце взаємність, тобто

$$K_{ij} = r_{ij} = r_{ji} = K_{ji}.$$

На кожен вузол рами діють у протилежних напрямках зовнішні сили F_i та реакції стержнів R_i . Оскільки рама знаходиться в рівновазі, кожен її вузол теж урівноважений, тобто

$$R_i = F_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

або в матричній формі

$$\vec{R} - \vec{F} = \vec{0}, \quad (6.7)$$

де $\vec{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ – нульовий вектор.

З урахуванням (6.5) співвідношення (6.7) набуває такого виду:

$$\vec{K} \cdot \vec{\Delta} - \vec{F} = \vec{0}. \quad (6.8)$$

Матричне рівняння (6.8) дає можливість визначити переміщення вузлів від заданого навантаження, якщо відомі елементи матриці жорсткості системи.

6.5 Матриця жорсткості стержня рами в локальній системі координат

Для окремого стержня рами (рис. 6.8, а) уведемо систему координат $x'y'$ так, що її початок знаходиться на кінці стержня, що відповідає вузлу з меншим номером. Цю точку назвемо початком стержня. Вісь x' спрямуємо вздовж стержня у бік його кінця, а вісь y' – перпендикулярно осі стержня так, щоб прямий кут був відкладений від осі x' проти годинникової стрілки. Цю систему координат називають *локальною*.

Переміщення кінців стержня δ_i у локальній системі координат нумеруємо так, як показано на рисунку 6.8, а. Аналогічно нумеруємо реакції r'_i у локальній системі координат (рис. 6.8, б). При цьому зауважимо, що напрямки цих реакцій відповідає їхній дії від вузла на стержень.

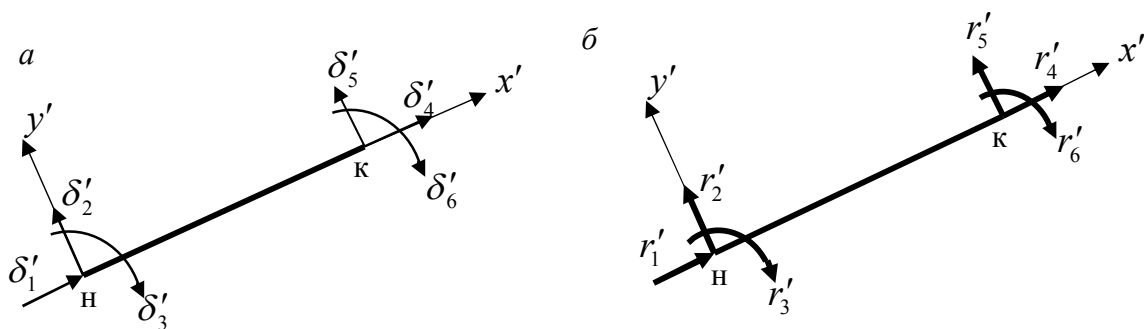


Рисунок 6.8

Вектор реакцій елемента

$$\vec{r}'_e = \begin{bmatrix} r'_1 \\ r'_2 \\ \vdots \\ r'_6 \end{bmatrix}_e$$

та вектор переміщень його кінців пов'язані між собою співвідношенням

$$\vec{r}'_e = \vec{K}'_e \cdot \vec{\delta}'_e, \quad (6.9)$$

де

$$\vec{K}'_e = \begin{bmatrix} K'_{11} & K'_{12} & \cdots & K'_{16} \\ K'_{21} & K'_{22} & \cdots & K'_{26} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K'_{61} & K'_{62} & \cdots & K'_{66} \end{bmatrix}_e \quad (6.10)$$

– матриця жорсткості елемента у локальній системі координат. Нагадаємо, що елемент K'_{ij} цієї матриці є реакцією r'_{ij} стержня в i -му напрямку, викликаною переміщенням $\delta'_j = 1$.

Елементи матриці \vec{K}'_e залежать від умов на кінцях стержня. Визначення деяких із цих реакцій покажемо далі на прикладі стержня з обома жорсткими кінцями. Для зручності будемо розглядати стержень горизонтальним.

На рисунку 6.9, а наведено стан стержня при зміщенні $\delta'_1 = 1$. Таке зміщення викликає стиск стержня. Поздовжню силу визначимо з формули Гука:

$$\Delta l = \frac{Nl}{EA} = -1.$$

Отже,

$$N = -\frac{EA}{l}, \quad r'_{11} = \frac{EA}{l},$$

$$r'_{41} = -\frac{EA}{l}, \quad r'_{21} = r'_{31} = r'_{51} = r'_{61} = 0.$$

Реакції від зміщення $\delta'_2 = 1$ (рис. 6.9, б) знайдемо за допомогою методу початкових параметрів. З урахуванням того, що на початку координат

$$\theta_0 = 0; y_0 = 1; M_0 = r'_{32}; Q_0 = r'_{22}, \text{ маємо:}$$

$$EI y_x = EI + r'_{32} \frac{x^2}{2} + r'_{22} \frac{x^3}{6};$$

$$EI \theta_x = r'_{32} x + r'_{22} \frac{x^2}{2}.$$

З умов на правому кінці стержня $x = l; y_x = 0; \theta_x = 0$ одержимо:

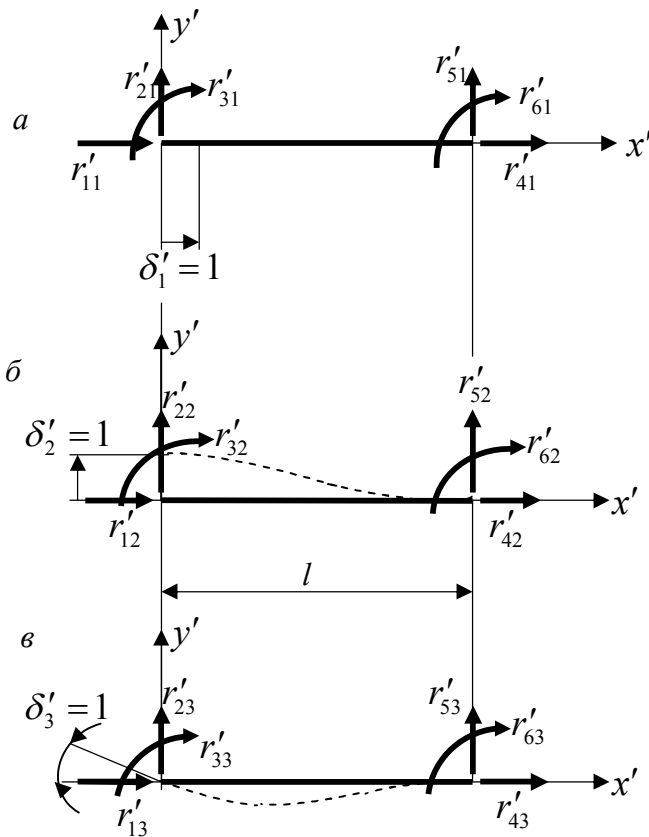


Рисунок 6.9

$$r'_{22} = \frac{12EI}{l^3}; r'_{32} = -\frac{6EI}{l^2}$$

Далі з рівноваги стержня знаходимо

$$r'_{52} = -\frac{12EI}{l^3}; r'_{62} = -\frac{6EI}{l^2}.$$

Оскільки розтяг – стиск при переміщенні δ'_2 відсутні, $r'_{12} = r'_{42} = 0$.

Реакції при зміщеннях $\delta'_4 = 1, \delta'_5 = 1$ та $\delta'_6 = 1$ неважко визначити з умов симетрії.

Так само одержимо реакції від зміщення $\delta'_3 = 1$:

$$r'_{13} = r'_{43} = 0; r'_{23} = -\frac{6EI}{l^2}; r'_{33} = \frac{4EI}{l}; r'_{53} = \frac{6EI}{l^2}; r'_{63} = \frac{2EI}{l}.$$

Отже, матриця жорсткості для такого стержня має такий вигляд:

$$\vec{K}'_e = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} & 0 & -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & 0 & \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix}_e.$$

Аналогічно можна одержати матрицю жорсткості для стержня із шарніром на початку й затисненням на кінці:

$$\vec{K}'_e = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3EI}{l^3} & 0 & 0 & -\frac{3EI}{l^3} & -\frac{3EI}{l^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3EI}{l^3} & 0 & 0 & \frac{3EI}{l^3} & \frac{3EI}{l^2} \\ 0 & -\frac{3EI}{l^2} & 0 & 0 & \frac{3EI}{l^2} & \frac{3EI}{l} \end{bmatrix}_e.$$

При необхідності можна записати також матрицю жорсткості для стержня із шарніром на правому кінці. Слід зазначити, що матриця жорсткості для

стержня із шарніром у наведеному вигляді не може застосовуватись для розрахунку окремого стержня, оскільки визначник її дорівнює нулю.

6.6 Матриця жорсткості стержня рами у загальній системі координат

Переміщення вузлів рами $\vec{\Delta}$ записані у загальній – *глобальній системі координат*, отже, для її розрахунку необхідно матрицю жорсткості стержня також записувати у цій системі координат, а від переміщень та реакцій вузлів рами уміти переходити до переміщень та реакцій на кінцях стержня у локальній системі координат.

Для зв'язку між переміщеннями та реакціями стержня в локальній та глобальній (рис. 6.10) системі координат використовується *матриця перетворення координат* \vec{T}_e .

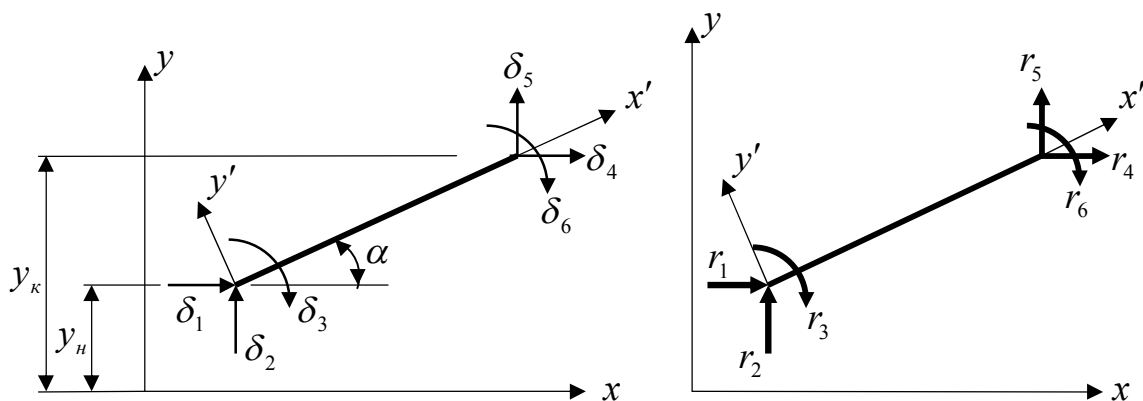


Рисунок 6.10

Для стержня рами ця матриця має такий вигляд:

$$\vec{T}_e = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_e \quad (6.11)$$

Тригонометричні функції кута α можна виразити через координати початку та кінця стержня у глобальній системі координат (рис. 6.10):

$$\sin\alpha = \frac{y_k - y_n}{l}; \cos\alpha = \frac{x_k - x_y}{l};$$

$$l = \sqrt{(x_k - x_n)^2 + (y_k - y_n)^2}.$$

За допомогою матриці \vec{T}_e можна записати

$$\begin{aligned}\vec{\delta}'_e &= \vec{T}_e \cdot \vec{\delta}_e; \\ \vec{r}'_e &= \vec{T}_e \cdot \vec{r}_e,\end{aligned}\quad (6.12)$$

У глобальній системі координат вектори реакцій та переміщень елемента пов'язані між собою співвідношенням, аналогічним (6.9):

$$\vec{r}_e = \vec{K}_e \cdot \vec{\delta}_e, \quad (6.13)$$

де \vec{K}_e – матриця жорсткості елемента в глобальній системі координат. Вона пов'язана з матрицею \vec{K}'_e в локальній системі координат:

$$\vec{K}_e = \vec{T}_e^T \vec{K}'_e \vec{T}_e. \quad (6.14)$$

Індекс «Т» у матриці означає її транспонування, тобто заміну в ній стовпчиків рядками та навпаки.

Для стержня із двома жорсткими кінцями елементи матриці \vec{K}_e будуть такими:

$$\begin{aligned}K_{11} &= K_{44} = -K_{14} = -K_{41} = \frac{EA}{l} \cos^2 \alpha + \frac{12EI}{l^3} \sin^2 \alpha; \\ K_{22} &= K_{55} = -K_{25} = -K_{52} = \frac{EA}{l} \sin^2 \alpha + \frac{12EI}{l^3} \cos^2 \alpha; \\ K_{33} &= K_{66} = \frac{4EI}{l}; \\ K_{12} &= K_{21} = K_{45} = K_{54} - K_{15} = -K_{51} = -K_{24} = -K_{42} = \left(\frac{EA}{l} - \frac{12EI}{l^3}\right) \sin \alpha \cos \alpha; \\ K_{13} &= K_{31} = K_{16} = K_{61} = -K_{46} = -K_{64} = -K_{34} = -K_{43} = \frac{6EI}{l^2} \sin \alpha; \\ K_{35} &= K_{53} = K_{56} = K_{65} = -K_{23} = -K_{32} = -K_{26} = -K_{62} = \frac{6EI}{l^2} \cos \alpha;\end{aligned}\quad (6.15)$$

Для стержня з затисненням на початку і шарніром на кінці:

$$\vec{K}_e = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} \cos^2 \alpha + \frac{3EI}{l^3} \sin^2 \alpha & \left(\frac{EA}{l} - \frac{3EI}{l^3}\right) \sin \alpha \cos \alpha & \frac{3EI}{l^2} \sin \alpha & -\frac{EA}{l} \cos^2 \alpha - \frac{3EI}{l^3} \sin^2 \alpha & -\left(\frac{EA}{l} - \frac{3EI}{l^3}\right) \sin \alpha \cos \alpha & 0 \\ \left(\frac{EA}{l} - \frac{3EI}{l^3}\right) \sin \alpha \cos \alpha & \frac{EA}{l} \sin^2 \alpha + \frac{3EI}{l^3} \cos^2 \alpha & -\frac{3EI}{l^2} \cos \alpha & -\left(\frac{EA}{l} - \frac{EI}{l^3}\right) \sin \alpha \cos \alpha & -\frac{EA}{l} \sin^2 \alpha - \frac{3EI}{l^3} \cos^2 \alpha & 0 \\ \frac{3EI}{l^2} \sin \alpha & -\frac{3EI}{l^2} \cos \alpha & \frac{3EI}{l} & -\frac{3EI}{l^2} \sin \alpha & \frac{3EI}{l^2} \cos \alpha & 0 \\ -\frac{EA}{l} \cos^2 \alpha - \frac{3EI}{l^3} \sin^2 \alpha & -\left(\frac{EA}{l} - \frac{3EI}{l^3}\right) \sin \alpha \cos \alpha & -\frac{3EI}{l^2} \sin \alpha & \frac{EA}{l} \cos^2 \alpha + \frac{3EI}{l^3} \sin^2 \alpha & \left(\frac{EA}{l} - \frac{3EI}{l^3}\right) \sin \alpha \cos \alpha & 0 \\ -\left(\frac{EA}{l} - \frac{3EI}{l^3}\right) \sin \alpha \cos \alpha & -\frac{EA}{l} \sin^2 \alpha - \frac{3EI}{l^3} \cos^2 \alpha & \frac{3EI}{l^2} \cos \alpha & \left(\frac{EA}{l} - \frac{3EI}{l^3}\right) \sin \alpha \cos \alpha & \frac{EA}{l} \sin^2 \alpha + \frac{3EI}{l^3} \cos^2 \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (6.16)$$

Для стержня з шарніром на початку і затисненням на кінці:

$$\bar{K}_e = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} \cos^2 \alpha + \frac{3EI}{l^3} \sin^2 \alpha & \left(\frac{EA}{l} - \frac{3EI}{l^3} \right) \sin \alpha \cos \alpha & 0 & -\frac{EA}{l} \cos^2 \alpha - \frac{3EI}{l^3} \sin^2 \alpha & -\left(\frac{EA}{l} - \frac{3EI}{l^3} \right) \sin \alpha \cos \alpha & \frac{3EI}{l^2} \sin \alpha \\ \left(\frac{EA}{l} - \frac{3EI}{l^3} \right) \sin \alpha \cos \alpha & \frac{EA}{l} \sin^2 \alpha + \frac{3EI}{l^3} \cos^2 \alpha & 0 & -\left(\frac{EA}{l} - \frac{3EI}{l^3} \right) \sin \alpha \cos \alpha & -\frac{EA}{l} \sin^2 \alpha - \frac{3EI}{l^3} \cos^2 \alpha & -\frac{3EI}{l^2} \cos \alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EA}{l} \cos^2 \alpha - \frac{3EI}{l^3} \sin^2 \alpha & -\left(\frac{EA}{l} - \frac{3EI}{l^3} \right) \sin \alpha \cos \alpha & 0 & \frac{EA}{l} \cos^2 \alpha + \frac{3EI}{l^3} \sin^2 \alpha & -\left(\frac{EA}{l} - \frac{3EI}{l^3} \right) \sin \alpha \cos \alpha & -\frac{3EI}{l^2} \sin \alpha \\ -\left(\frac{EA}{l} - \frac{3EI}{l^3} \right) \sin \alpha \cos \alpha & -\frac{EA}{l} \sin^2 \alpha - \frac{3EI}{l^3} \cos^2 \alpha & 0 & \left(\frac{EA}{l} - \frac{3EI}{l^3} \right) \sin \alpha \cos \alpha & \frac{EA}{l} \sin^2 \alpha + \frac{3EI}{l^3} \cos^2 \alpha & \frac{3EI}{l^2} \cos \alpha \\ \frac{3EI}{l^2} \sin \alpha & -\frac{3EI}{l^2} \cos \alpha & 0 & -\frac{3EI}{l^2} \sin \alpha & \frac{3EI}{l^2} \cos \alpha & \frac{3EI}{l} \end{bmatrix}. \quad (6.17)$$

6.7 Матриця жорсткості елемента ферми

Стержні ферм з'єднані у вузлах шарнірами, тому при вузловому навантаженні вони зазнають тільки розтягу-стиску. У такому разі, на відміну від рам, для стержня ферми необхідно враховувати тільки лінійні переміщення вузлів та відповідні реакції. Ці переміщення та реакції для окремого стержня в глобальній системі координат наведені на рисунку 6.11.

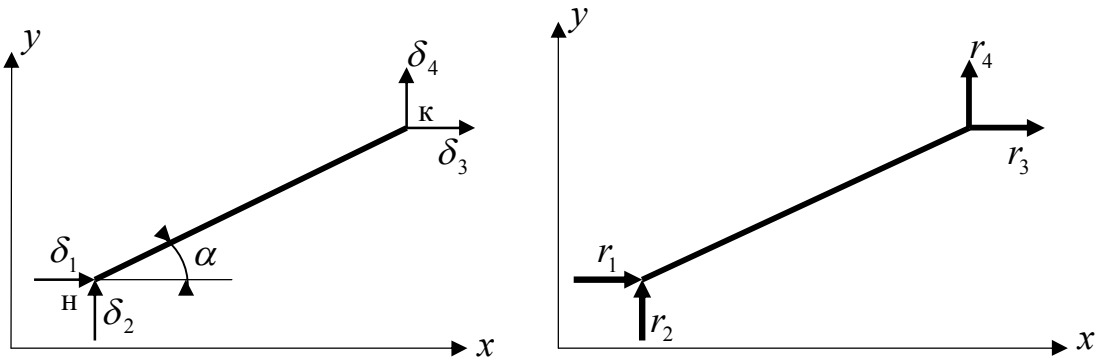


Рисунок 6.11

Значення елементів матриці жорсткості для стержня ферми можна одержати з відповідних значень для стержня рами. Для цього необхідно виключити в останніх величини, що враховують згин стержня, та змінити індекси. Таким чином, отримуємо матрицю:

$$\bar{K}_e = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} \cos^2 \alpha & \frac{EA}{l} \sin \alpha \cos \alpha & -\frac{EA}{l} \cos^2 \alpha & -\frac{EA}{l} \sin \alpha \cos \alpha \\ \frac{EA}{l} \sin \alpha \cos \alpha & \frac{EA}{l} \sin^2 \alpha & -\frac{EA}{l} \sin \alpha \cos \alpha & -\frac{EA}{l} \sin^2 \alpha \\ -\frac{EA}{l} \cos^2 \alpha & -\frac{EA}{l} \sin \alpha \cos \alpha & \frac{EA}{l} \cos^2 \alpha & \frac{EA}{l} \sin \alpha \cos \alpha \\ -\frac{EA}{l} \sin \alpha \cos \alpha & -\frac{EA}{l} \sin^2 \alpha & \frac{EA}{l} \sin \alpha \cos \alpha & \frac{EA}{l} \sin^2 \alpha \end{bmatrix}. \quad (6.18)$$

6.8 Матриця жорсткості всієї системи

Довільний елемент K_{ij} матриці жорсткості (6.6) системи є реакцією в напрямку зміщення Δ_i , викликану зміщенням вузла $\Delta_j = 1$. Отже, елементами, наприклад, дев'ятого стовпчика матриці жорсткості рами (рис. 6.4, а) будуть реакції від зміщення $\Delta_9 = 1$. На рисунку 6.12, а наведені ці вузлові реакції. Відзначимо, що оскільки всі переміщення, крім Δ_9 , передбачаються нульовими, деформуватися при цьому будуть лише стержні 2–3 та 3–5.

Переміщення $\Delta_9 = 1$ одночасно є переміщенням $\delta_6^{2-3} = 1$ кінця стержня 2–3 та переміщенням $\delta_3^{3-5} = 1$ початку стержня 3–5 (рис. 6.12, б). Реакції стержнів у вузлах підсумовуються, визначаючи таким чином вузлові реакції – елементи загальної матриці жорсткості системи. Ураховуючи, що при переміщенні Δ_9 стержні 1–2, 1–4, 4–6 та 5–7 не деформуються, реакції цих стержнів дорівнюють нулю. Отже, одержуємо такі значення елементів 9-го стовпчика загальної матриці жорсткості рами:

$$\begin{aligned} K_{4,9} &= K_{1,6}^{2-3}; K_{5,9} = K_{2,6}^{2-3}; K_{6,9} = K_{3,6}^{2-3}; \\ K_{7,9} &= K_{4,6}^{2-3} + K_{1,3}^{3-5}; K_{8,9} = K_{5,6}^{2-3} + K_{2,3}^{3-5}; K_{9,9} = K_{6,6}^{2-3} + K_{3,3}^{3-5}; \\ K_{13,9} &= K_{4,3}^{3-5}; K_{14,9} = K_{5,3}^{3-5}; K_{15,9} = K_{6,3}^{3-5}; \\ K_{1,9} &= K_{2,9} = K_{3,9} = K_{10,9} = K_{11,9} = K_{12,9} = 0. \end{aligned}$$

6.9 Визначення зусиль у стержнях рами

Розв'язок рівняння (6.8) дає вектор переміщень вузлів рами:

$$\bar{\Delta} = \bar{K}^{-1} \cdot \bar{F}. \quad (6.19)$$

Елементи вектора переміщень одночасно є елементами вектора переміщень кінців відповідних стержнів рами в глобальній системі координат.

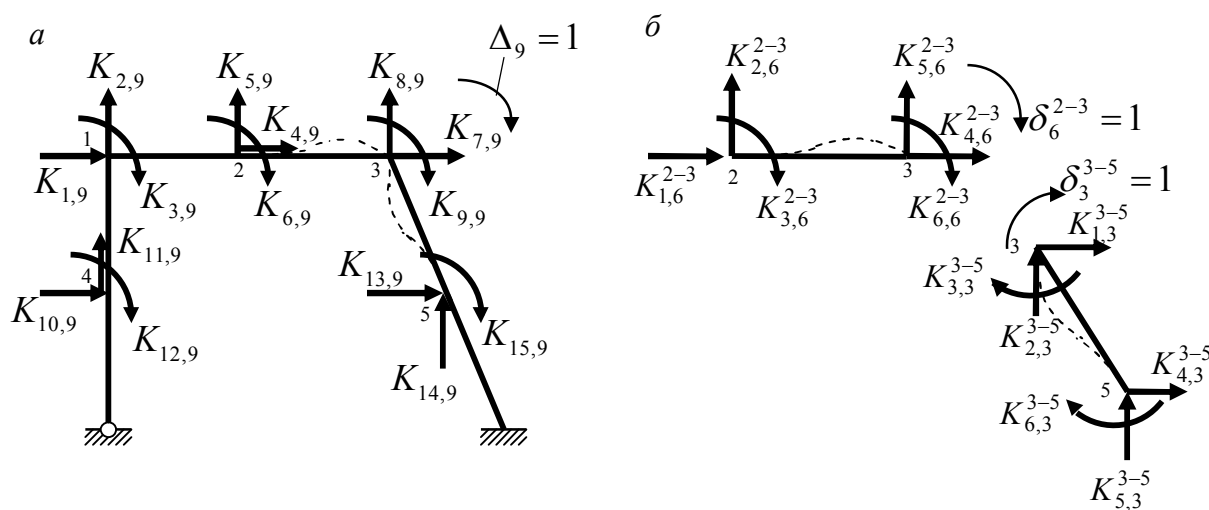


Рисунок 6.12

Наприклад, для стержня 2–3 рами (рис. 6.4, а) одержуємо:

$$\bar{\delta}_{2-3} = \begin{bmatrix} \Delta_4 \\ \Delta_5 \\ \Delta_6 \\ \Delta_7 \\ \Delta_8 \\ \Delta_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \\ \delta_5 \\ \delta_6 \end{bmatrix}_{2-3}.$$

На рисунку 6.13 наведені додатні напрямки зусиль на кінцях елемента. Величини цих зусиль складають вектор

$$\bar{S}_e = \begin{bmatrix} -N_n \\ Q_n \\ M_n \\ N_k \\ -Q_k \\ -M_k \end{bmatrix}.$$

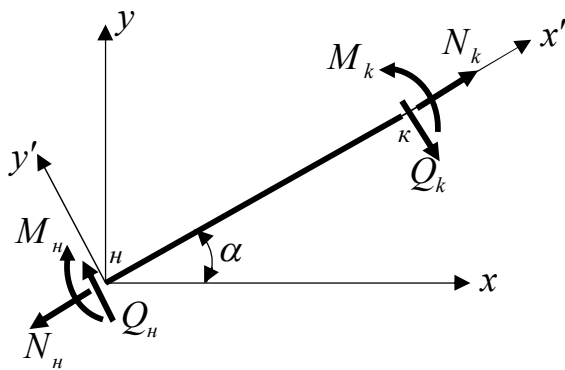


Рисунок 6.13

Зусилля на кінцях стержня визначаються через переміщення кінців стержня та навантаження на стержні:

$$\bar{S}_e = \bar{h}_e \cdot \bar{\delta}_e + \bar{q}_e' \quad (6.20)$$

У цьому виразі:

\bar{h}_e – матриця, що перетворює переміщення кінців елемента в глобальній системі координат у зусилля, що діють на початку та кінці стержня від цих переміщень;

\bar{q}_e' – вектор реакцій на кінцях стержня від навантаження на стержні в локальній системі координат.

Для стержня з жорсткими кінцями матриця \bar{h}_e має такий вигляд:

$$\bar{h}_e = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} \cos \alpha & \frac{EA}{l} \sin \alpha & 0 & -\frac{EA}{l} \cos \alpha & -\frac{EA}{l} \sin \alpha & 0 \\ -\frac{12EI}{l^3} \sin \alpha & \frac{12EI}{l^3} \cos \alpha & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{12EI}{l^3} \sin \alpha & -\frac{12EI}{l^3} \cos \alpha & \frac{6EI}{l^2} \\ \frac{6EI}{l^2} \sin \alpha & -\frac{6EI}{l^2} \cos \alpha & \frac{4EI}{l} & -\frac{6EI}{l^2} \sin \alpha & \frac{6EI}{l^2} \cos \alpha & \frac{2EI}{l} \\ -\frac{EA}{l} \cos \alpha & -\frac{EA}{l} \sin \alpha & 0 & \frac{EA}{l} \cos \alpha & \frac{EA}{l} \sin \alpha & 0 \\ \frac{12EI}{l^3} \sin \alpha & -\frac{12EI}{l^3} \cos \alpha & \frac{6EI}{l^2} & -\frac{12EI}{l^3} \sin \alpha & \frac{12EI}{l^3} \cos \alpha & \frac{6EI}{l^2} \\ \frac{6EI}{l^2} \sin \alpha & -\frac{6EI}{l^2} \cos \alpha & \frac{2EI}{l} & -\frac{6EI}{l^2} \sin \alpha & \frac{6EI}{l^2} \cos \alpha & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix}. \quad (6.21)$$

Для стержня з затисненням на початку та шарніром на кінці:

$$\bar{h}_e = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} \cos \alpha & \frac{EA}{l} \sin \alpha & 0 & -\frac{EA}{l} \cos \alpha & -\frac{EA}{l} \cos \alpha & 0 \\ -\frac{3EI}{l^3} \sin \alpha & \frac{3EI}{l^3} \cos \alpha & -\frac{3EI}{l^2} & \frac{3EI}{l^3} \sin \alpha & -\frac{3EI}{l^3} \cos \alpha & 0 \\ \frac{3EI}{l^2} \sin \alpha & -\frac{3EI}{l^2} \cos \alpha & \frac{3EI}{l} & -\frac{3EI}{l^2} \sin \alpha & \frac{3EI}{l^2} \cos \alpha & 0 \\ -\frac{EA}{l} \cos \alpha & -\frac{EA}{l} \sin \alpha & 0 & \frac{EA}{l} \cos \alpha & \frac{EA}{l} \sin \alpha & 0 \\ \frac{3EI}{l^3} \sin \alpha & -\frac{3EI}{l^3} \cos \alpha & \frac{3EI}{l^2} & -\frac{3EI}{l^3} \sin \alpha & \frac{3EI}{l^3} \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (6.22)$$

Для стержня з шарніром на початку і затисненням на кінці:

$$\bar{h}_e = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} \cos \alpha & \frac{EA}{l} \sin \alpha & 0 & -\frac{EA}{l} \cos \alpha & -\frac{EA}{l} \sin \alpha & 0 \\ -\frac{3EI}{l^3} \sin \alpha & \frac{3EI}{l^3} \cos \alpha & 0 & \frac{3EI}{l^3} \sin \alpha & -\frac{3EI}{l^3} \cos \alpha & -\frac{3EI}{l^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EA}{l} \cos \alpha & -\frac{EA}{l} \sin \alpha & 0 & \frac{EA}{l} \cos \alpha & \frac{EA}{l} \sin \alpha & 0 \\ \frac{3EI}{l^3} \sin \alpha & -\frac{3EI}{l^3} \cos \alpha & 0 & -\frac{3EI}{l^3} \sin \alpha & \frac{3EI}{l^3} \cos \alpha & \frac{3EI}{l^2} \\ \frac{3EI}{l^2} \sin \alpha & -\frac{3EI}{l^2} \cos \alpha & 0 & -\frac{3EI}{l^2} \sin \alpha & \frac{3EI}{l^2} \cos \alpha & \frac{3EI}{l} \end{bmatrix}. \quad (6.23)$$

Вектори реакцій \bar{q}_e' від рівномірно розподіленого навантаження, прикладеного в межах стержня відповідно з обома жорсткими кінцями, з затисненням на початку і шарніром на кінці та з шарніром на початку і затисненням на кінці мають такий вигляд:

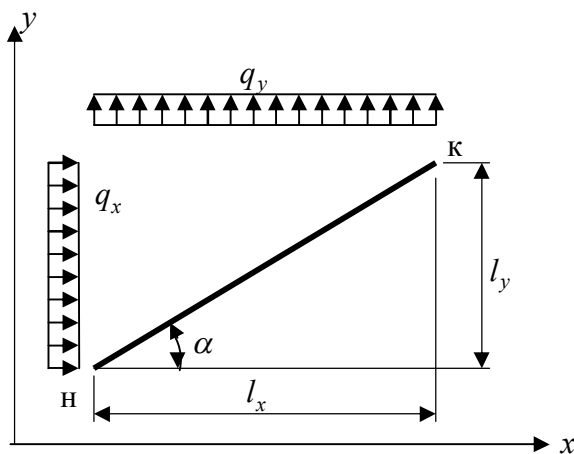


Рисунок 6.14

$$\bar{q}_e' = \begin{bmatrix} -\frac{q_x l_y}{2} \cos \alpha - \frac{q_y l_x}{2} \sin \alpha \\ \frac{q_x l_y}{2} \sin \alpha - \frac{q_y l_x}{2} \cos \alpha \\ -\frac{q_x l_y^2}{12} + \frac{q_y l_x^2}{12} \\ -\frac{q_x l_y}{2} \cos \alpha - \frac{q_y l_x}{2} \sin \alpha \\ \frac{q_x l_y}{2} \sin \alpha - \frac{q_y l_x}{2} \cos \alpha \\ \frac{q_x l_y^2}{12} - \frac{q_y l_x^2}{12} \end{bmatrix};$$

$$\bar{q}_e' = \begin{bmatrix} -\frac{5q_x l_y}{8} \cos \alpha - \frac{5q_y l_x}{8} \sin \alpha \\ \frac{5q_x l_y}{8} \sin \alpha - \frac{5q_y l_x}{8} \cos \alpha \\ -\frac{q_x l_y^2}{8} + \frac{q_y l_x^2}{8} \\ -\frac{3q_x l_y}{8} \cos \alpha - \frac{3q_y l_x}{8} \sin \alpha \\ -\frac{3q_x l_y}{8} \sin \alpha - \frac{3q_y l_x}{8} \cos \alpha \\ 0 \end{bmatrix};$$

(6.24)

$$\bar{q}_e' = \begin{bmatrix} -\frac{3q_x l_y}{8} \cos \alpha - \frac{3q_y l_x}{8} \sin \alpha \\ \frac{3q_x l_y}{8} \sin \alpha - \frac{3q_y l_x}{8} \cos \alpha \\ 0 \\ -\frac{5q_x l_y}{8} \cos \alpha - \frac{5q_y l_x}{8} \sin \alpha \\ \frac{5q_x l_y}{8} \sin \alpha - \frac{5q_y l_x}{8} \cos \alpha \\ \frac{q_x l_y^2}{8} - \frac{q_y l_x^2}{8} \end{bmatrix} \dots (6.25)$$

Складові навантаження q_x та q_y та складові довжини стержня l_x та l_y беруть відповідно до рисунку 6.14.

При відсутності навантаження на стержні вектор \bar{q}_e' буде нульовим.

6.10 Визначення зусиль у стержнях ферми

Після визначення переміщень вузлів, як і для рами, для кожного стержня ферми можна записати вектор переміщень його кінців у глобальній системі координат:

$$\vec{\delta}_e = \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \end{bmatrix}.$$

Вектор зусиль на кінцях стержня ферми можна записати відповідно до рисунка 6.15.

$$\vec{S}_e = \begin{bmatrix} -N_n \\ 0 \\ N_k \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Вираз для зусиль у стержні ферми має вигляд:

$$\vec{S}_e = \vec{h}_e \cdot \vec{\delta}_e. \quad (6.26)$$

Матриця перетворення переміщень у глобальній системі координат до зусиль у стержні ферми має такий вигляд:

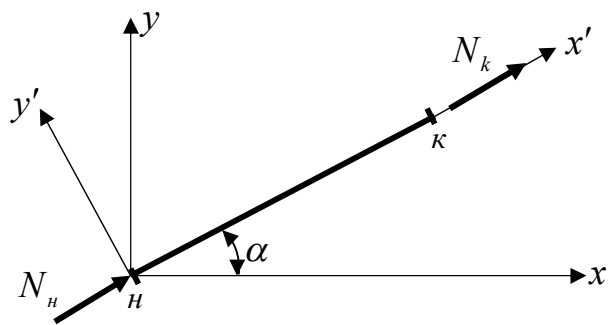


Рисунок 6.15

$$\vec{h}_e = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} \cos \alpha & \frac{EA}{l} \sin \alpha & -\frac{EA}{l} \cos \alpha & -\frac{EA}{l} \sin \alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EA}{l} \cos \alpha & -\frac{EA}{l} \sin \alpha & \frac{EA}{l} \cos \alpha & \frac{EA}{l} \sin \alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (6.27)$$

Зауважимо, що у межах стержня ферми зусилля не змінюється, тобто $N_n = N_k$.

6.11 Приклад розрахунку ферми МСЕ

Розрахуємо ферму, наведену на рисунку 6.16, за умови однакової жорсткості EA усіх її стержнів.

Пронумеруємо вузли як показано на рисунку 6.16 і покажемо переміщення вузлів (рис. 6.17).

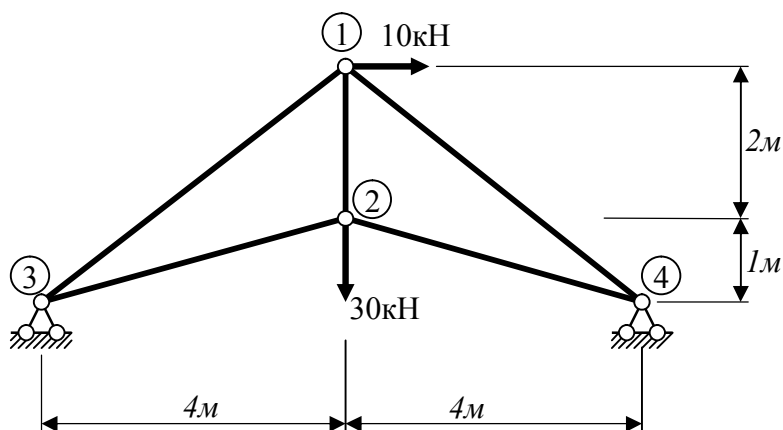


Рисунок 6.16

Враховуючи, що переміщення $\Delta_5 = \Delta_6 = \Delta_7 = \Delta_8 = 0$, складемо вектор вузлових переміщень та відповідний вектор вузлових сил:

$$\bar{\Delta} = \begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \Delta_3 \\ \Delta_4 \end{bmatrix}; \quad F = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \\ -30 \end{bmatrix}.$$

Далі формуємо матриці жорсткості окремих елементів ферми. Стержень 1–3 (рис. 6.18, а).

$$\Delta_x = 0 - 4 = -4\text{ м}; \quad \Delta_y = 0 - 3 = -3\text{ м}; \quad l = \sqrt{(-4)^2 + (-3)^2} = 5\text{ м};$$

$$\sin \alpha = \frac{-3}{5} = -0,6; \quad \cos \alpha = \frac{-4}{5} = -0,8.$$

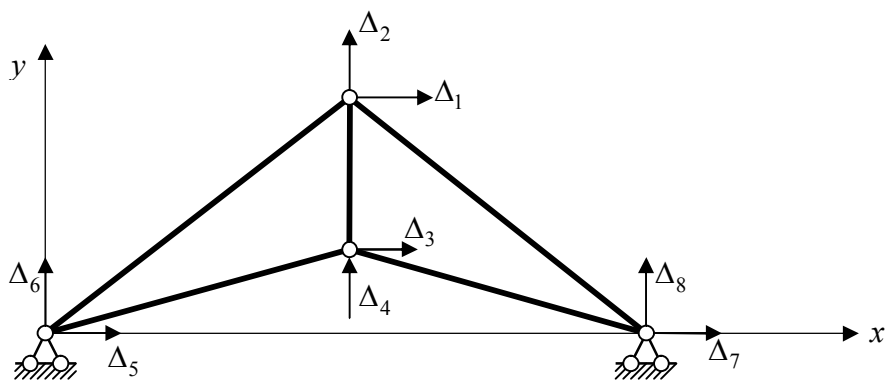


Рисунок 6.17

Зусилля у статично невизначуваній системі не залежать від абсолютного значення жорсткості елементів. Отже, за умови постійної жорсткості прийемо для зручності $EA = 1$, за (6.18) одержимо:

$$\bar{K}_{1-3} = \begin{bmatrix} 0,128 & 0,096 & -0,128 & -0,096 \\ 0,096 & 0,072 & -0,096 & -0,072 \\ -0,128 & -0,096 & 0,128 & 0,096 \\ -0,096 & -0,072 & 0,096 & 0,072 \end{bmatrix}.$$

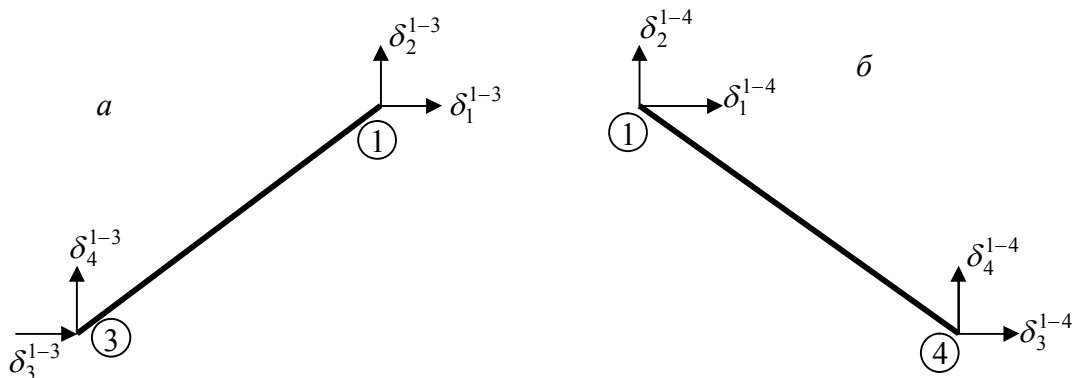


Рисунок 6.18

Стержень 1–4 (рис. 6.18, б).

$$\Delta_x = 8 - 4 = 4\text{ м}; \Delta_y = 0 - 3 = -3\text{ м}; l = \sqrt{(4)^2 + (-3)^2} = 5\text{ м};$$

$$\sin \alpha = \frac{-3}{5} = -0,6; \cos \alpha = \frac{4}{5} = 0,8.$$

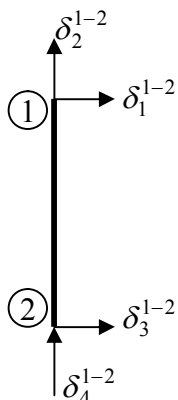
$$\bar{K}_{1-4} = \begin{bmatrix} 0,128 & -0,096 & -0,128 & 0,096 \\ -0,096 & 0,072 & 0,096 & -0,072 \\ -0,128 & 0,096 & 0,128 & -0,096 \\ 0,096 & -0,072 & -0,096 & 0,072 \end{bmatrix}.$$

Стержень 1–2 (рис. 6.19).

$$\Delta_x = 4 - 4 = 0; \Delta_y = 1 - 3 = -2\text{ м};$$

$$l = \sqrt{0 + (-2)^2} = 2\text{ м};$$

$$\sin \alpha = \frac{-2}{2} = -1; \cos \alpha = \frac{0}{2} = 0.$$



$$\bar{K}_{1-2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 & -0,5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0,5 & 0 & 0,5 \end{bmatrix}.$$

Рисунок 6.19

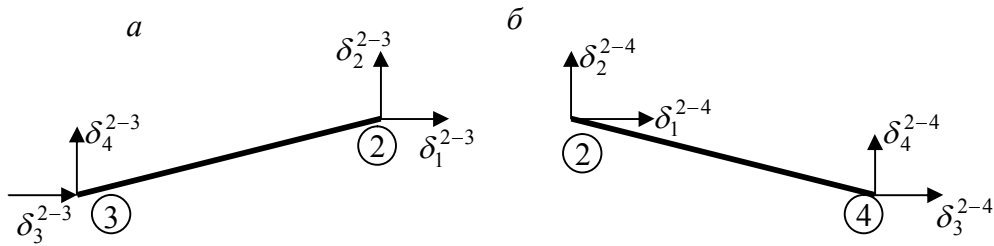


Рисунок 6.20

Стержень 2–3 (рис. 6.20, а).

$$\Delta_x = 0 - 4 = -4\text{м}; \Delta_y = 0 - 1 = -1\text{м}; l = \sqrt{(-4)^2 + (-1)^2} = 4,123\text{м};$$

$$\sin \alpha = \frac{-1}{4,123} = -0,2425; \cos \alpha = \frac{-4}{4,123} = -0,9701.$$

$$\vec{K}_{2-3} = \begin{bmatrix} 0,2286 & 0,05706 & -0,2286 & -0,05706 \\ 0,05706 & 0,01426 & -0,05706 & -0,01426 \\ -0,2286 & -0,05706 & 0,2286 & 0,05706 \\ -0,05706 & -0,01426 & 0,05706 & 0,01426 \end{bmatrix}.$$

Стержень 2–4 (рис. 6.20, б).

$$\Delta_x = 8 - 4 = 4\text{м}; \Delta_y = 0 - 1 = -1\text{м}; l = \sqrt{4^2 + (-1)^2} = 4,123\text{м};$$

$$\sin \alpha = \frac{-1}{4,123} = -0,2425; \cos \alpha = \frac{4}{4,123} = 0,9701;$$

$$\vec{K}_{2-4} = \begin{bmatrix} 0,2286 & -0,05706 & -0,2286 & 0,05706 \\ -0,05706 & 0,01426 & 0,05706 & -0,01426 \\ -0,2286 & 0,05706 & 0,2286 & -0,05706 \\ 0,05706 & -0,01426 & -0,05706 & 0,01426 \end{bmatrix}.$$

Далі обчислюємо елементи матриці жорсткості ферми:

$$K_{11} = K_{11}^{1-3} + K_{11}^{1-4} + K_{11}^{1-2} = 0,128 + 0,128 + 0 = 0,256;$$

$$K_{12} = K_{21} = K_{12}^{1-3} + K_{12}^{1-4} + K_{12}^{1-2} = 0,096 - 0,096 + 0 = 0;$$

$$K_{13} = K_{31} = K_{13}^{1-2} = 0; K_{14} = K_{41} = K_{14}^{1-2} = 0;$$

$$K_{22} = K_{22}^{1-3} + K_{22}^{1-4} + K_{22}^{1-2} = 0,072 + 0,072 + 0,5 = 0,644;$$

$$K_{23} = K_{32} = K_{23}^{1-2} = 0; K_{24} = K_{42} = K_{24}^{1-2} = -0,5;$$

$$K_{33} = K_{33}^{1-2} + K_{11}^{2-3} + K_{11}^{2-4} = 0 + 0,2286 + 0,2286 = 0,4572;$$

$$K_{34} = K_{43} = K_{34}^{1-2} + K_{12}^{2-3} + K_{12}^{2-4} = 0 + 0,05706 - 0,05706 = 0;$$

$$K_{44} = K_{44}^{1-2} + K_{22}^{2-3} + K_{22}^{2-4} = 0,5 + 0,01426 + 0,01426 = 0,52852.$$

Отже, матриця жорсткості ферми має такий вигляд:

$$\vec{K} = \begin{bmatrix} 0,256 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,644 & 0 & -0,5 \\ 0 & 0 & 0,4572 & 0 \\ 0 & -0,5 & 0 & 0,52852 \end{bmatrix}.$$

Розв'язуючи рівняння рівноваги вузлів, одержимо:

$$\vec{\Delta} = \vec{K}^{-1} \cdot \vec{F} = \begin{bmatrix} 39,06 \\ -165,99 \\ 0 \\ -213,80 \end{bmatrix}.$$

Матриці перетворення переміщень вузлів у зусилля складаємо за (6.27):

$$\vec{h}_{1-3} = \begin{bmatrix} -0,16 & -0,12 & 0,16 & 0,12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,16 & 0,12 & -0,16 & -0,12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \vec{h}_{1-4} = \begin{bmatrix} 0,16 & -0,12 & -0,16 & 0,12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,16 & 0,12 & 0,16 & -0,12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$\vec{h}_{1-2} = \begin{bmatrix} 0 & -0,5 & 0 & 0,5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 & -0,5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \vec{h}_{2-3} = \begin{bmatrix} -0,2353 & -0,05706 & 0,2353 & 0,05706 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,2353 & 0,05706 & -0,2353 & -0,05706 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$\vec{h}_{2-4} = \begin{bmatrix} 0,2353 & -0,05706 & -0,2353 & 0,05706 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,2353 & 0,05706 & 0,2353 & -0,05706 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Формуючи вектори переміщень вузлів для кожного елемента, обчислюємо за (6.20) зусилля:

$$\vec{\delta}_{1-3} = \begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \Delta_5 \\ \Delta_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 39,06 \\ -165,99 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \vec{S}_{1-3} = \vec{h}_{1-3} \cdot \vec{\delta}_{1-3} = \begin{bmatrix} 13,58 \\ 0 \\ -13,58 \\ 0 \end{bmatrix};$$

$$\vec{\delta}_{1-4} = \begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \Delta_7 \\ \Delta_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 39,06 \\ -165,99 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \vec{S}_{1-4} = \vec{h}_{1-4} \cdot \vec{\delta}_{1-4} = \begin{bmatrix} 26,17 \\ 0 \\ -26,17 \\ 0 \end{bmatrix};$$

$$\vec{\delta}_{1-2} = \begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \Delta_3 \\ \Delta_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 39,06 \\ -165,99 \\ 0 \\ -213,8 \end{bmatrix}; \quad \vec{S}_{1-2} = \vec{h}_{1-2} \cdot \vec{\delta}_{1-2} = \begin{bmatrix} -23,91 \\ 0 \\ 23,91 \\ 0 \end{bmatrix};$$

$$\bar{\delta}_{2-3} = \begin{bmatrix} \Delta_3 \\ \Delta_4 \\ \Delta_5 \\ \Delta_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -213,8 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \bar{S}_{2-3} \bar{h}_{2-3} \cdot \bar{\delta}_{2-3} = \begin{bmatrix} 12,2 \\ 0 \\ -12,2 \\ 0 \end{bmatrix};$$

$$\bar{\delta}_{2-4} = \begin{bmatrix} \Delta_3 \\ \Delta_4 \\ \Delta_7 \\ \Delta_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -213,8 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \bar{S}_{2-4} \bar{h}_{2-4} \cdot \bar{\delta}_{2-4} = \begin{bmatrix} 12,2 \\ 0 \\ -12,2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Отже, зусилля у стержнях ферми від заданого навантаження такі:

$$N_{1-3} = -13,58 \text{кН}; N_{1-4} = -26,17 \text{кН}; N_{1-2} = 23,91 \text{кН}; N_{2-3} = N_{2-4} = -12,2 \text{кН}.$$

Запитання для самоконтролю

1. У чому суть методу скінченних елементів?
2. Які переваги МСЕ перед класичними методами?
3. Що називають скінченним елементом?
4. Наведіть приклади скінченних елементів.
5. Як визначається кількість ступенів вільності скінченного елемента?
6. Скільки ступенів вільності має СЕ рами? Ферми? Трикутного елемента тонкої зігнутої пластинки? Трикутного елемента плоскої задачі теорії пружності?
7. Що приймають у якості вузлів рами?
8. Які величини приймають у якості кінематичних характеристик вузлів рами?
9. Що є статичними характеристиками вузлів рами? Як вони визначаються?
10. Яка матриця називається матрицею жорсткості?
11. Які величини є елементами матриці жорсткості? Яку властивість мають елементи матриці жорсткості?
12. Наведіть рівняння рівноваги вузлів у матричній формі.
13. Яку систему координат називають локальною? Глобальною?
14. Який зв'язок існує між векторами реакцій на кінцях елемента і переміщеннями?
15. Який розмір має матриця жорсткості елемента рами? Ферми?
16. Як пов'язані між собою вектори переміщень у локальній та глобальній системах координат?
17. Для чого слугує матриця перетворення координат?
18. Як пов'язані між собою матриці жорсткості в локальній та глобальній системах координат?
19. Як складається матриця жорсткості системи?
20. Як визначається вектор переміщень вузлів системи?
21. Як визначаються зусилля на кінцях стержня рами після визначення переміщень?
22. Як визначаються зусилля в стержнях ферми через переміщення його кінців?

7 ЗАГАЛЬНІ РІВНЯННЯ БУДІВЕЛЬНОЇ МЕХАНІКИ

Основними рівняннями, що визначають напружено-деформований стан стержневих систем, розрахунок якої виконується за недеформованою схемою, є рівняння рівноваги (статичні), геометричні рівняння (кінематичні) та рівняння закону Гука (фізичні).

7.1 Статичні рівняння

Стержневу систему можна розглядати як систему з певною кількістю вузлів, на які діють задані сили і моменти. У випадку, коли сили прикладені поза вузлами, вони завжди можуть бути приведеними до вузлів за допомогою вантажних епюр метода переміщень. В цьому разі рівняння рівноваги вузлів можна подати в матричній формі

$$\vec{A}\vec{S} = \vec{F}, \quad (7.1)$$

де \vec{A} – матриця рівноваги вузлів, \vec{S} – вектор внутрішніх зусиль, \vec{F} – вектор зовнішніх сил, що прикладені до вузлів.

У загальному випадку матриця \vec{A} прямокутна розміром $m \times n$, де: m – число рядків, тобто рівнянь рівноваги; n – число стовпців, тобто внутрішніх зусиль. За параметрами матриці \vec{A} можна зробити певні висновки щодо властивостей стержневої системи.

Якщо кількість рядків матриці \vec{A} більша за кількість її стовпців – $m > n$, тобто число рівнянь рівноваги більше числа внутрішніх зусиль, стержнева система є *геометрично змінюваною*.

Якщо кількість рядків матриці \vec{A} дорівнює кількості її стовпців – $m = n$, тобто матриця є квадратною, а її визначник не дорівнює нулю, стержнева система є *геометрично незмінюваною і статично визначуваною*. В іншому випадку (при $\det A = 0$) система *геометрично змінювана*.

Якщо кількість рядків матриці \vec{A} менша за кількість її стовпців – $m < n$ (число рівнянь рівноваги менше числа внутрішніх зусиль), можливі такі варіанти: якщо ранг матриці менше числа рядків, система буде *геометрично змінюваною*, якщо дорівнює числу рядків – *геометрично незмінюваною і (m-n) раз статично невизначуваною*. В останньому випадку це означає наявність хоча би однієї геометрично незмінюваної і статично визначуваної основної системи, що утворюється відкиданням у заданій системі зайвих в'язей.

7.2 Кінематичні рівняння

Стержні системи, з'єднані у вузлах до деформації, мусять залишатись з'єднаними і після деформації. Геометричні рівняння, що зв'язують переміщення вузлів з деформаціями стержнів, виражають умову *сумісності деформацій і переміщень* стержневої системи. В матричній формі їх можна подати у вигляді:

$$\vec{\varepsilon} = \vec{A}_1 \vec{\Delta}, \quad (7.2)$$

де \vec{A}_1 – матриця, що зв’язує переміщення і деформації, $\vec{\varepsilon}$ – вектор деформацій стержнів, $\vec{\Delta}$ – вектор переміщень вузлів.

Для визначення матриці A_1 скористаємось принципом можливих переміщень, згідно з яким сума робіт усіх зовнішніх і внутрішніх сил системи на можливих переміщеннях дорівнює нулю

$$W + U = 0.$$

Нагадаємо, що у якості можливих розглядають будь-які нескінченно малі (для лінійно-деформованих систем - малі скінченні) переміщення, які не суперечать в’язям системи. Зокрема за можливі можна взяти малі скінченні дійсні переміщення системи $\vec{\Delta}$. Зовнішні сили, що прикладені до вузлів, здійснюють роботу на переміщеннях вузлів

$$W = \vec{F}^T \cdot \vec{\Delta}. \quad (7.3)$$

Внутрішні зусилля здійснюють роботу на деформаціях стержнів

$$U = -\vec{S}^T \cdot \vec{\varepsilon}, \quad (7.4)$$

що є від’ємною, тому що внутрішні зусилля перешкоджають деформаціям. Тоді зп принципом можливих переміщень маємо:

$$\vec{F}^T \cdot \vec{\Delta} - \vec{S}^T \cdot \vec{\varepsilon} = 0 \quad (7.5)$$

Підставляючи вирази для \vec{F}^T і $\vec{\varepsilon}$ з рівнянь (7.1), (7.2) у рівняння (7.5), отримаємо

$$(\vec{A}\vec{S})^T \vec{\Delta} - \vec{S}^T \vec{A}_1 \vec{\Delta} = 0,$$

або

$$\vec{S}^T \vec{A}^T \vec{\Delta} - \vec{S}^T \vec{A}_1 \vec{\Delta} = 0.$$

Порівнюючи ліву і праву частину останнього рівняння, маємо

$$\vec{A}_1 = \vec{A}^T. \quad (7.6)$$

Отже, матриця геометричних рівнянь дорівнює транспонованій матриці рівнянь рівноваги, що виражає статико-геометричну аналогію. Це дозволяє для дослідження стержневих систем склавши більш прості рівняння статички, на основі матриці рівнянь рівноваги визначити матрицю геометричних рівнянь, отримання яких є більш складною задачею.

Таким чином, з урахуванням (7.6) геометричне рівняння (7.2) можна записати у такому вигляді:

$$\vec{\varepsilon} = \vec{A}^T \vec{\Delta}. \quad (7.7)$$

Отриманий результат проілюструємо на прикладі системи, наведеної на рисунку 7.1,а.

В стержнях ферми ABC при вузловому навантаженні F_x , F_y виникають тільки поздовжні сили. Рівняння рівноваги вузла B (рис. 7.1, б) матимуть вигляд

$$\begin{aligned} -N_1 - N_2 \cos \alpha + F_x &= 0, \\ -N_2 \sin \alpha + F_y &= 0. \end{aligned}$$

або, якщо задане навантаження перенести у праву частину

$$\begin{aligned} N_1 + N_2 \cos \alpha &= F_x; \\ N_2 \sin \alpha &= F_y. \end{aligned} \quad (7.8)$$

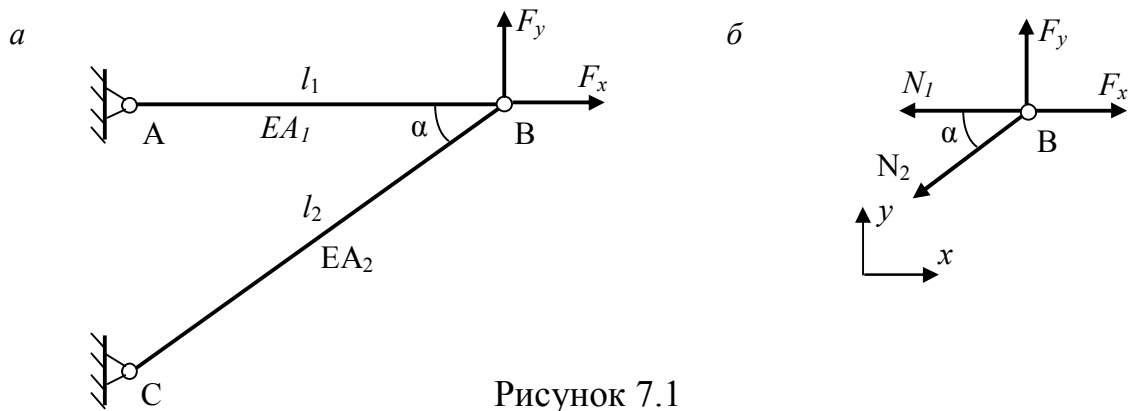


Рисунок 7.1

Рівняння (7.8) можна записати у матричній формі (7.1)

$$A\vec{S} = \vec{F},$$

де $\vec{A} = \begin{bmatrix} 1 & \cos \alpha \\ 0 & \sin \alpha \end{bmatrix}$ – матриця рівнянь рівноваги,

$\vec{S} = \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{bmatrix}$ – вектор внутрішніх зусиль,

$\vec{F} = \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \end{bmatrix}$ – вектор зовнішніх сил.

Встановимо залежність між деформаціями стержнів і переміщенням вузла В. При деформації стержнів вузол В отримає горизонтальне Δ_x (рис. 7.2, а) і вертикальне Δ_y (рис. 7.2, б) переміщення.

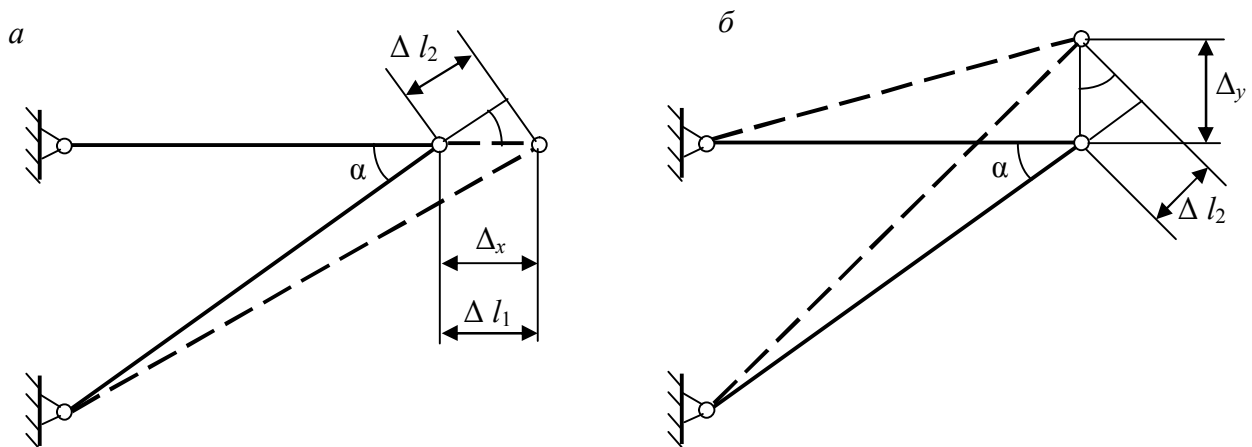


Рисунок. 7.2

Візьмемо до уваги, що подовження стержнів Δl_1 і Δl_2 малі у порівнянні з довжинами l_1 , і l_2 , тому їх можна вимірювати відрізками, що перпендикулярні первісним положенням стержням. Отже, маємо для стержнів наступні подовження:

$$\begin{aligned}\Delta l_1 &= 1 \cdot \Delta_x + 0 \cdot \Delta_y, \\ \Delta l_2 &= \cos \alpha \cdot \Delta_x + \sin \alpha \cdot \Delta_y,\end{aligned}\tag{7.9}$$

або в матричній формі (7.7)

$$\vec{\varepsilon} = \vec{A}^T \vec{\Delta},$$

де $\vec{A}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \cos \alpha & \sin \alpha \end{bmatrix}$ – матриця геометричних рівнянь, що дійсно дорівнює транспонованій матриці рівнянь рівноваги,

$\vec{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \Delta l_1 \\ \Delta l_2 \end{bmatrix}$ – вектор деформацій стержнів,

$\vec{\Delta} = \begin{bmatrix} \Delta_x \\ \Delta_y \end{bmatrix}$ – вектор переміщень вузла.

Існує певний зв'язок між векторами навантажень \vec{F} і переміщень $\vec{\Delta}$, а також між векторами внутрішніх зусиль \vec{S} і деформацій $\vec{\varepsilon}$. Вони мають однакову кількість компонентів і їх скалярний добуток складає роботу (формули (7.3), (7.4)). Такі вектори називають *подвійними*.

Можна відзначити два правила:

- 1) якщо певний рядок рівнянь статки означає суму проекцій зовнішніх і внутрішніх сил на деяку вісь, то в геометричних рівняннях компонент вектора переміщень буде означати переміщення в напрямку цієї осі;
- 2) якщо зусилля S_j входить у рівняння статки в j -му стовпці матриці \vec{A} , то у j -му рядку геометричних рівнянь будемо мати компонент деформації ε_j , що відповідає зусиллю S_j .

Ці правила можна узагальнити *правилом подвійності* обох систем рівнянь: умовам однієї системи відповідають змінні іншої системи і навпаки.

7.3 Фізичні рівняння

Фізичні рівняння встановлюють зв'язок між деформаціями і зусиллями і записуються на основі закону Гука. В лінійно-деформованих системах ці рівняння є лінійними і можуть бути подані в матричній формі:

$$\vec{\varepsilon} = \vec{B} \vec{S},\tag{7.10}$$

де $\vec{B} = \begin{bmatrix} \vec{b}_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \vec{b}_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \vec{b}_n \end{bmatrix}$ – квазидіагональна матриця податливості стержневої

системи n – число стержнів; \vec{b}_j – матриця податливості j -го стержня.

Наприклад, у разі роботи стержня довжини l_j на розтяг–стиск і згин, що має три ступеня вільності, матриця податливості має такий вигляд:

$$\vec{b}_j = \begin{bmatrix} \frac{l_j}{(EA)_j} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{l_j}{3(EI)_j} & -\frac{l_j}{6(EI)_j} \\ 0 & -\frac{l_j}{6(EI)_j} & \frac{l_j}{3(EI)_j} \end{bmatrix}.$$

Кожний елемент матриці \vec{B} є деформацією елемента від дії одиничного зусилля.

7.4 Постановка задач будівельної механіки

Повна система рівнянь будівельної механіки, що описує математичну модель стержневої системи, складається з трьох груп залежностей: статичних (7.1), геометричних (7.7) і фізичних (7.10)

$$\begin{aligned} \vec{A}\vec{S} &= \vec{F}, \\ \vec{\varepsilon} &= \vec{A}^T\vec{\Delta}, \\ \vec{\varepsilon} &= \vec{B}\vec{S}. \end{aligned} \quad (7.11)$$

В цій системі $(2n+m)$ рівнянь невідомими є n -мірні вектори зусиль \vec{S} і деформацій $\vec{\varepsilon}$ і m -мірний вектор переміщень $\vec{\Delta}$. Таким чином, для заданого навантаження \vec{F} можна отримати єдиний розподіл зусиль, деформацій і переміщень.

Число невідомих можна скоротити, якщо одні рівняння системи (7.11) виразити через інші. В залежності від прийнятих невідомих отримують рівняння методу переміщень (невідомі – переміщення $\vec{\Delta}$), методу сил (невідомі – зусилля \vec{S}) або змішаного методу (невідомі – зусилля \vec{S} і переміщення $\vec{\Delta}$).

Запитання для самоконтролю

21. Які рівняння називають статичними?
22. Який вигляд мають статичні рівняння в матричній формі?
23. Які властивості стержневої системи можна встановити по матриці рівноваги вузлів?
24. Який фізичний смисл виражають геометричні рівняння?
25. Який вигляд мають геометричні рівняння в матричній формі?
26. Як пов'язані матриці геометричних і статичних рівнянь?
27. У чому полягає правило подвійності?
28. Між якими характеристиками встановлюють зв'язок фізичні рівняння?
29. З яких груп складається повна система рівнянь будівельної механіки?

8 ОСНОВИ ДИНАМІКИ СТЕРЖНЕВИХ СИСТЕМ

8.1 Основні поняття динаміки

Динаміка споруд займається дослідженням поведінки споруд при динамічних впливах та розробкою методів їх розрахунку на ці впливи.

У реальній споруді динамічні навантаження діють разом зі статичними. Однак на підставі принципу суперпозиції, що діє для лінійно деформованих систем, урахування статичних навантажень може бути виконано окремо. У зв'язку з цим тут розглядається розрахунок тільки на динамічні впливи при відсутності статичних навантажень.

При використанні принципу Даламбера сила інерції розглядається як зовнішнє навантаження, що прикладене до мас.

8.1.1 Динамічні впливи

Динамічні впливи можуть бути силовими та кінематичними і приводять до збудження коливань мас споруди. Динамічні впливи являють собою змінні за величиною чи спрямуванням навантаження – *збуджуючі навантаження*

Нерухомі періодичні навантаження – це навантаження, що змінюють безперервно періодично за часом свою величину та напрямок. Вони виникають в основному при наявності неврівноважених частин механічного обладнання. Так, при рівномірному обертанні ротора, центр мас m якого розташований з ексцентриситетом ρ (рис. 8.1), виникає відцентрова сила $F = m\rho\theta^2$ (θ – кутова швидкість обертання).

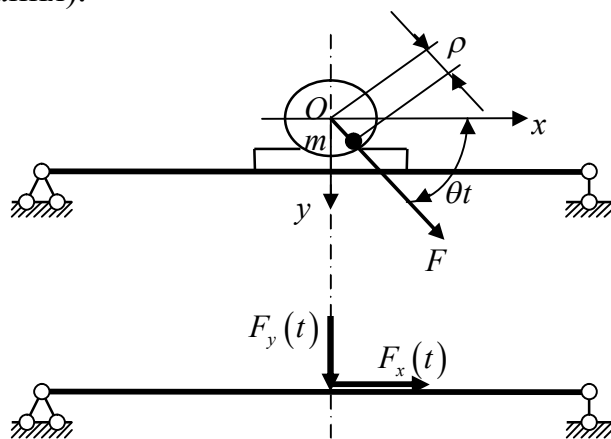


Рисунок 8.1

Складові цієї сили $F_y(t) = F \sin \theta t$, $F_x(t) = F \cos \theta t$ є гармонічними – змінюються за законом синуса.

Інший вид періодичного навантаження – навантаження, пов'язані з роботою машин з кривошипно-шатунними механізмами. Графік змінення такого навантаження наведений на рисунку 8.2.

Імпульсні навантаження викликаються одно – або багаторазовою дією у фіксованому місці (падіння тіла, удар льодин, ударна хвиля вибуху тощо).

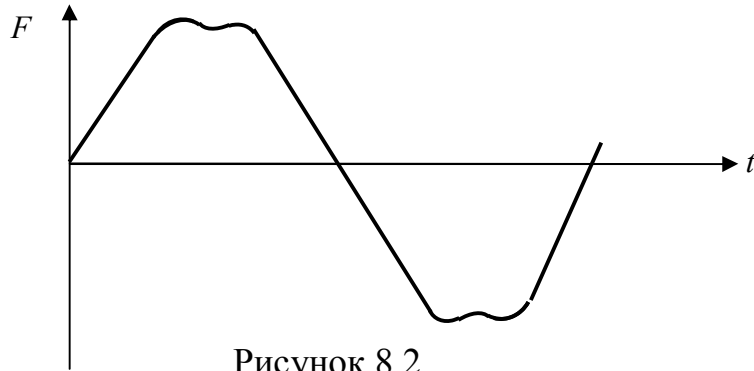


Рисунок 8.2

Рухоме навантаження змінює своє розташування на споруді. При цьому з'являються і періодичні впливи за рахунок нерівностей проїжджої частини, і ударні (потяг на стиках рейок).

Сейсмічний вплив є кінематичним і визначається зсувами основи в результаті землетрусу. Закон такого впливу складний і пов'язаний зі зміною прискорень основи (рис. 8.3). Тут \ddot{v} – прискорення основи.

Вітрове навантаження викликається поривами вітру, які повторюються з часом. Таке навантаження може учинити значні впливи на висотні та багатопрогонові споруди.

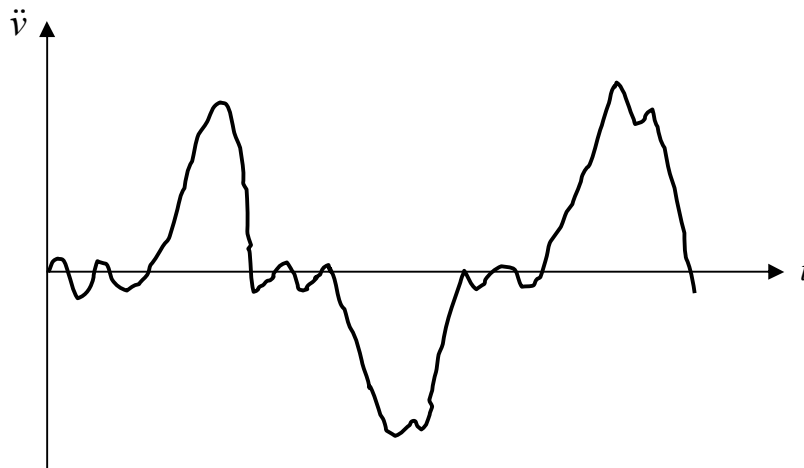


Рисунок 8.3

8.1.2 Сили, що супроводжують коливання

При коливанні споруди з'являються сили, які зазвичай враховують в динамічних розрахунках.

Сили інерції за Даламбером пропорційні масі тіла та другій похідній переміщення – прискоренню. Зазвичай сила інерції спрямовується у бік переміщення і береться зі знаком мінус:

$$I = -m \frac{d^2v}{dt^2} = -m\ddot{v}. \quad (8.1)$$

Точки над змінною, як зазвичай, означають похідну за часом.

Відновлювальні сили прагнуть повернути тіло у висхідне положення при його відхиленні від положення рівноваги.

Ці сили зазвичай пропорційні переміщенню.

$$F_c = c \cdot v \quad (8.2)$$

і спрямовані у бік, зворотній переміщенню.

де c – жорсткість споруди – сила, що виникає при одиничному переміщенні маси.

Жорсткість – є величина, зворотна піддатливості споруди:

$$c = \frac{1}{\delta_{11}}, \quad (8.3)$$

де δ_{11} – переміщення маси, яке викликається дією одиничної сили – податливість.

Дисипативні сили опору виникають через наявність внутрішнього тертя, тертя у шарнірах, опору середовища. Сили тертя є постійними, а сили опору середовища пропорційні швидкості:

$$F_d = k \cdot \dot{v}. \quad (8.4)$$

де k – коефіцієнт опору – сила, яка діє при швидкості $\dot{v} = 1$.

Дисипативні сили спрямовані у бік, зворотній переміщенню (швидкості).

8.1.3 Методи динаміки споруд

Для розрахунку на динамічні впливи застосовують три метода: статичний, енергетичний і кінематичний.

Статичний метод ґрунтується на використанні принципу Даламбера. У відповідності до цього принципу, якщо в системі крім заданого навантаження прикласти усі сили, які супроводжують коливання, до неї можна застосувати умови рівноваги. Цей метод широко застосовується у простих задачах динаміки.

Енергетичний метод ґрунтується на принципі збереження енергії:

$$T + U = const,$$

де T – кінетична енергія, U – потенціальна енергія системи.

Принцип стаціонарності приводить до рівнянь Лагранжа другого роду:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{v}} \right) - \frac{\partial (T - U)}{\partial v} = 0,$$

де v – узагальнена координата (узагальнене переміщення), яка визначає положення маси у процесі коливань.

Кінематичний метод ґрунтується на використанні принципу можливих переміщень та принципу Даламбера. Він застосовується, як і при статичному розрахунку, з урахуванням усіх сил, що супроводжують коливання.

8.1.4 Ступені вільності динамічної системи

У кінематичному аналізі споруд і у розрахунках на стійкість ступені вільності визначаються виходячи з можливості переміщень усіх точок системи. У динаміці числом ступенів вільності вважають кількість незалежних переміщень мас системи. Так, стержень з розподіленою масою (рис. 8.4, а)

має $W = \infty$, оскільки кожна його точка має масу, а кількість цих точок нескінченна.

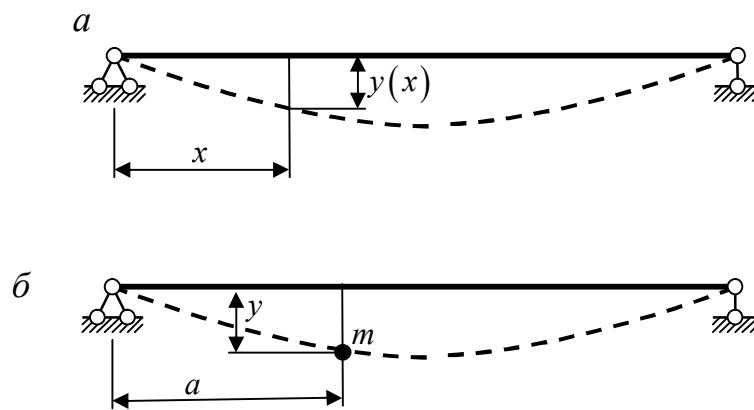


Рисунок 8.4

Якщо масою стержня порівняно з масою m , зосередженою в одній точці, можна знехтувати і не враховувати поздовжні деформації (рис. 8.4, б), положення маси m буде визначатися лише її вертикальним переміщенням y . Отже у такому разі $W = 1$.

У загальному випадку система з однією такою – *точковою масою* на площині (рис. 8.5, а) має два ступеня вільності.

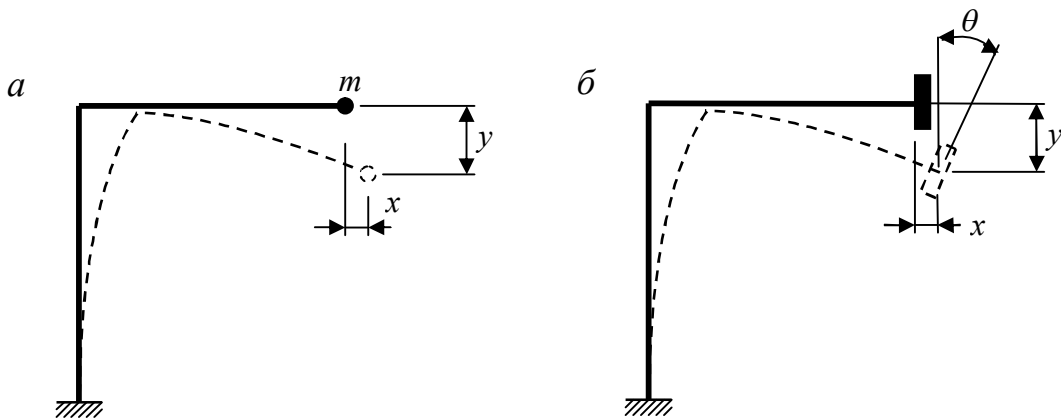


Рисунок 8.5

Якщо поворотами маси неможна нехтувати, система з однією такою *зосередженою масою* (рис. 8.5, б) у загальному випадку має три ступеня вільності: два лінійних зміщення та поворот.

Запитання для самоконтролю

1. Назвіть види динамічних впливів.
2. Яке навантаження називається гармонічним?
3. Які сили з'являються при коливаннях? Наведіть їх вирази через узагальнені переміщення.
4. Які методи застосовують при розрахунку на динамічні впливи? На чому ґрунтується кожен з цих методів?
5. Що розуміють під числом ступенів вільності в динаміці? Наведіть приклади визначення W .

8.2 Вільні коливання систем з одним ступенем вільності

8.2.1 Диференціальне рівняння руху

Розглянемо невагому балку з однією точковою масою m (рис. 8.6, а). До балки прикладена збуджуюча сила $F(t)$ і діє сила ваги mg (g – прискорення вільного падіння). Сила ваги постійна, розрахунок на її дію не викликає складності, тому далі будемо розглядати лише дію збуджуючого навантаження.

У довільному стані переміщення маси від висхідного положення рівноваги становить v . При цьому на масу діють: сила інерції I , сила пружного опору балки F_c і сила опору середовища F_d (рис. 8.6, б).

Використовуючи принцип Даламбера, запишемо умову рівноваги:

$$\Sigma y = 0; \quad F(t) + I - F_c - F_d = 0.$$

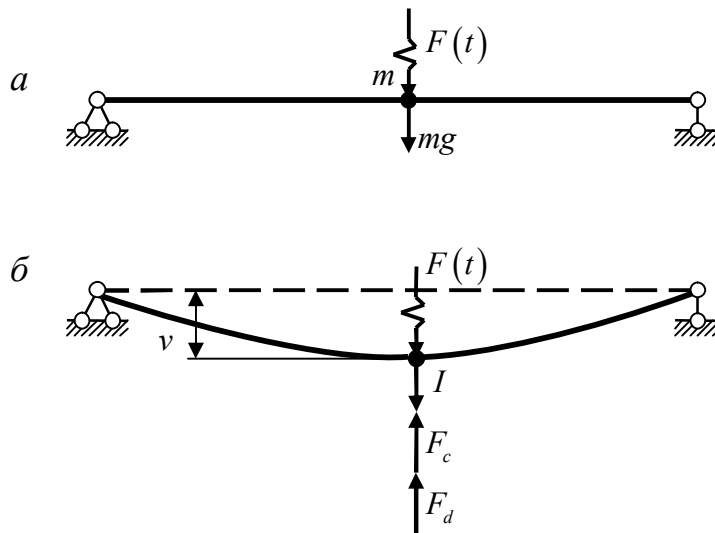


Рисунок 8.6

Виразуємо сили через переміщення за допомогою (8.1), (8.2), (8.4), перетворимо це рівняння:

$$m\ddot{v} + cv + kv = F(t).$$

В одержаному рівнянні виокремимо другу похідну переміщення діленням усіх доданків на m :

$$\ddot{v} + \frac{c}{m}v + \frac{k}{m}\dot{v} = \frac{F(t)}{m}. \quad (8.5)$$

Диференціальне рівняння (8.5) руху системи з одним ступенем вільності одержано для випадку, коли усі сили, що супроводжують коливання, прикладені безпосередньо до маси. В інших випадках рівняння можуть відрізнятися лише постійними коефіцієнтами та позначенням переміщення. Для загальності міркувань далі будемо користуватися поняттям *узагальненого переміщення*, або *узагальненої координати*, яку позначаємо v .

8.2.2 Вільні коливання без опору

Розглянемо консервативну систему (нагадаємо, для неї $F_d = 0$). Відхилимо систему з положення рівноваги і відпустимо. Тоді при її коливаннях $F(t) = 0$. Такі коливання, що відбуваються при відсутності збуджуючого навантаження, називаються *вільними* або *власними коливаннями*.

Рівняння руху (8.5) для вільних коливань набуває такого вигляду:

$$\ddot{v} + \frac{c}{m}v = 0.$$

Вводячи позначення

$$\omega^2 = \frac{c}{m}, \quad (8.6)$$

приходимо до стандартного лінійного однорідного диференціального рівняння другого порядку:

$$\ddot{v} + \omega^2 v = 0. \quad (8.7)$$

Розв'язок цього рівняння

$$v = A_1 \cos \omega t + A_2 \sin \omega t$$

перетворимо, вводячи замість A_1 і A_2 нові сталі A та λ так, що

$$A_1 = A \sin \lambda, \quad A_2 = A \cos \lambda.$$

Тоді після елементарних перетворень одержимо:

$$v = A \sin(\omega t + \lambda). \quad (8.8)$$

Отже, коливання маси відбувається за синусоїдою (рис. 8.7) і називаються *гармонічним*. Найбільше переміщення $v_{\max} = A$ називається *амплітудою* коливань, а величина λ , що визначає положення маси в момент початку коливань – *початковою фазою* коливань.

Розглянемо початкові умови. При $t = 0$ $v = v_0$ і $\dot{v} = \dot{v}_0$ з урахуванням (8.8) одержуємо

$$\begin{aligned} v_0 &= A \sin \lambda, \\ \dot{v}_0 &= A \omega \cos \lambda. \end{aligned} \quad (8.9)$$

Поділивши перше рівняння (8.9) на друге, знайдемо початкову фазу коливань:

$$\lambda = \arctg \frac{\omega v_0}{\dot{v}_0}. \quad (8.10)$$

Далі, поділивши попередньо доданки другого рівняння (8.9) на ω , зведемо в квадрат обидві частини першого та другого рівнянь та підсумуємо їх:

$$v_0^2 + \left(\frac{\dot{v}_0}{\omega} \right)^2 = A^2 \sin^2 \lambda + A^2 \cos^2 \lambda.$$

Звідси знаходимо амплітуду коливань:

$$A = \sqrt{v_0^2 + \left(\frac{\dot{v}_0}{\omega} \right)^2}. \quad (8.11)$$

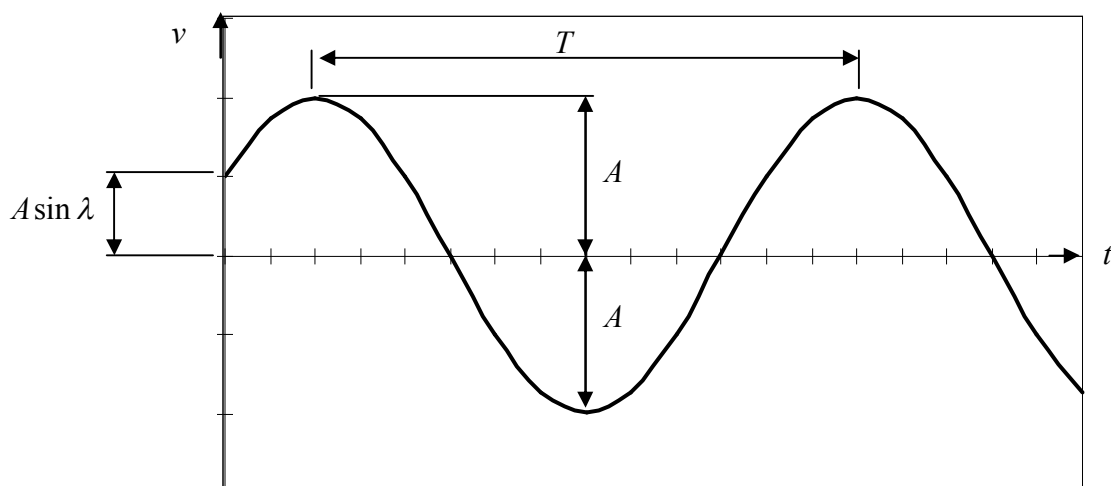


Рисунок 8.7

Період коливань T – це час, за який здійснюється один повний цикл коливань. При зміні часу на величину T значення $\sin(\omega t + \lambda)$ повторюється, тобто $\omega t + \lambda + 2\pi = \omega(t + T) + \lambda$.

Звідси знаходимо

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad (8.12)$$

та

$$\omega = \frac{2\pi}{T}. \quad (8.13)$$

Отже, ω являє собою кількість циклів коливань, які здійснюються за 2π секунд, і називається *коловою частотою вільних коливань*. Колова частота вимірюється в рад/с або с^{-1} . У техніці часто застосовують іншу величину:

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{T}, \quad (8.14)$$

яку називають *технічною частотою*. Вона являє собою число циклів коливань, що відбуваються в секунду, та вимірюється у герцах (Гц).

За позначенням (8.6) з урахуванням (8.3) знаходимо

$$\omega = \sqrt{\frac{c}{m}} = \sqrt{\frac{1}{m\delta_{11}}}. \quad (8.15)$$

Замінімо масу через силу ваги G :

$$m = \frac{G}{g}.$$

Враховуючи, що добуток сили G на одиничне переміщення

$$G\delta_{11} = v_{\text{ст}}$$

являє собою переміщення, викликане статичною дією маси – статичне переміщення, одержуємо

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{G\delta_{11}}} = \sqrt{\frac{g}{v_{\text{ст}}}}. \quad (8.16)$$

Аналізуючи (8.16), приходимо до таких висновків:

- частота ω і період T вільних коливань не залежать від початкових умов, тому ω називають також *власною частотою*;
- частота зменшується при зростанні маси і при зменшенні жорсткості системи.

Диференціюючи вираз (8.7) за часом, знаходимо швидкість

$$\dot{v} = A\omega \cos(\omega t + \lambda). \quad (8.17)$$

Звідси випливає, що швидкість також змінюється за гармонічним законом, але опереджає зміну переміщення на величину $\pi/2$, тобто на чверть періоду.

Диференціюючи (8.17) ще раз, одержимо прискорення

$$\ddot{v} = -A\omega^2 \sin(\omega t + \lambda). \quad (8.18)$$

Отже, прискорення також змінюється за гармонічним законом у протифазі зі зміщенням.

8.2.3 Вільні коливання з опором

В реальних умовах коливання завжди відбуваються при наявності сил опору F_d . Будемо вважати, що ці сили пропорційні швидкості \dot{v} (8.2).

Тоді рівняння вільних коливань системи з одним ступенем вільності набуває такого вигляду:

$$\ddot{v} + \frac{c}{m} \dot{v} + \frac{k}{m} v = 0. \quad (8.19)$$

Вводячи позначення $\omega = \sqrt{\frac{c}{m}}$, а також $n = \frac{k}{2m}$,

приходимо до рівняння

$$\ddot{v} + 2n\dot{v} + \omega^2 v = 0. \quad (8.20)$$

На практиці, як правило, має місце співвідношення $n < \omega$. У цьому випадку розв'язок рівняння (8.20) має такий вид:

$$v = e^{-nt} (A_1 \cos \omega_1 t + A_2 \sin \omega_1 t), \quad (8.21)$$

де
$$\omega_1 = \sqrt{\omega^2 - n^2}. \quad (8.22)$$

Вираз (8.21) можна записати в іншій формі:

$$v = A e^{-nt} \sin(\omega_1 t + \lambda), \quad (8.23)$$

де A і λ виражаються через A_1 і A_2 так:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}, \quad \lambda = \arctg \frac{A_1}{A_2}.$$

Графік коливань (8.23) наведений на рисунку 8.8. Штрихові лінії показують закон зміни амплітуд коливань $v = \pm A e^{-nt}$.

Як видно з рисунку 8.8 та залежності (8.23), коливання є згасаючими, тобто їх амплітуда з часом спрямовується до нуля. Амплітудні значення переміщень досягаються при цьому через рівні проміжки часу T_1 . Тому такі коливання називають умовно періодичними, приймаючи період $T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1}$. Число

коливань, які здійснюються за 2π секунд $\omega_1 = \frac{2\pi}{T_1}$, як і при гармонічних коливаннях, називають коловою частотою згасаючих коливань.

Знайдемо відношення двох послідовно досягнутих амплітуд A_i і A_{i+1} , які відповідають моментам часу t_i і t_{i+1} :

$$\frac{A_i}{A_{i+1}} = \frac{Ae^{-nt_i} \sin(\omega_1 t_i + \lambda)}{Ae^{-nt_{i+1}} \sin(\omega_1 t_{i+1} + \lambda)} = e^{nT_1}. \quad (8.24)$$

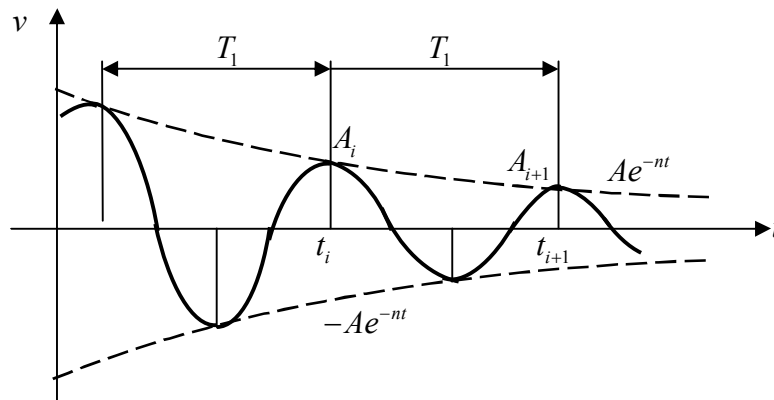


Рисунок 8.8

Це співвідношення характеризує швидкість згасання коливань і називається *декрементом (згасання) коливань*. На практиці частіше застосовують натуральний логарифм відношення амплітуд

$$\delta = \ln\left(\frac{A_i}{A_{i+1}}\right) = nT_1 = \frac{2\pi n}{\omega_1}, \quad (8.25)$$

який називається *логарифмічним декрементом коливань*.

Як впливає з (8.22) та (8.25), навіть значний опір мало впливає на частоту коливань. Наприклад, при $\delta = 2,06$ амплітуда за один цикл зменшується у 7,85 разів, а частота ω_1 менше власної частоти ω лише на 5%. У зв'язку з цим в практичних розрахунках з опором зазвичай приймають $\omega_1 \approx \omega$.

Запитання для самоконтролю

1. Як одержують диференціальне рівняння руху?
2. Що таке вільні або власні коливання?

3. Чому вільні коливання без опору називають гармонічними?
4. Що таке амплітуда та початкова фаза коливань?
5. Що називається періодом коливань?
6. Що таке колова частота вільних коливань або власна частота?
7. Що таке технічна частота?
8. Як залежить власна частота від маси та жорсткості системи?
9. Чому вільні коливання з опором називають умовно періодичними?
10. Що таке декремент коливань? Логарифмічний декремент?
11. Як впливає урахування сил опору на зміну власної частоти?

8.3 Вільні коливання систем зі скінченним числом ступенів вільності

Розглянемо систему з двома ступенями вільності (рис. 8.9, а) при відсутності дисипативних сил опору і збуджуючого навантаження. Сили інерції, які супроводжують ці – вільні коливання системи, «викликають» переміщення мас.

Для визначення переміщень скористаємося принципом суперпозиції (рис. 8.9, б):

$$\begin{aligned} v_1 &= v_{11} + v_{12}, \\ v_2 &= v_{21} + v_{22}. \end{aligned} \quad (8.26)$$

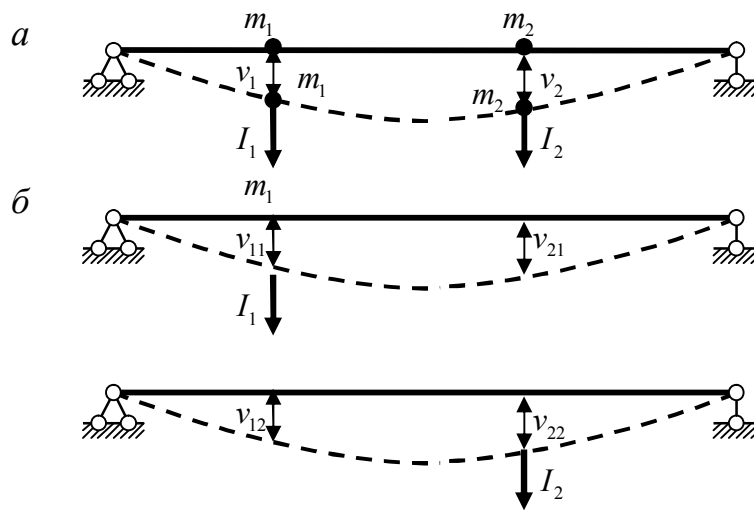


Рисунок 8.9

Виразивши складові переміщень через переміщення від одиничних сил

$$\begin{aligned} v_{11} &= \delta_{11} \cdot I_1, & v_{12} &= \delta_{12} I_2, \\ v_{21} &= \delta_{21} \cdot I_1, & v_{22} &= \delta_{22} I_2, \end{aligned}$$

та враховуючи вираз (8.1) для сили інерції, одержимо

$$\begin{aligned} v_1 &= -\delta_{11} m_1 \ddot{v}_1 - \delta_{12} m_2 \ddot{v}_2, \\ v_2 &= -\delta_{21} m_1 \ddot{v}_1 - \delta_{22} m_2 \ddot{v}_2. \end{aligned}$$

У загальному випадку для системи з n невідомими

$$\begin{aligned} v_1 &= -\delta_{11} m_1 \ddot{v}_1 - \delta_{12} m_2 \ddot{v}_2 - \dots - \delta_{1n} m_n \ddot{v}_n, \\ v_2 &= -\delta_{21} m_1 \ddot{v}_1 - \delta_{22} m_2 \ddot{v}_2 - \dots - \delta_{2n} m_n \ddot{v}_n, \end{aligned} \quad (8.27)$$

$$\dots\dots\dots$$

$$v_n = -\delta_{n1}m_1\ddot{v}_1 - \delta_{n2}m_2\ddot{v}_2 - \dots - \delta_{nn}m_n\ddot{v}_n.$$

При розв'язанні цієї системи будемо вважати, що усі маси коливаються з однією частотою при одній початковій фазі, але з різними амплітудами:

$$v_i = A_i \cdot \sin(\omega t + \lambda), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (8.28)$$

$$\ddot{v}_i = -A_i \omega^2 \cdot \sin(\omega t + \lambda), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (8.29)$$

При підстановці (8.28), (8.29) в систему диференціальних рівнянь (8.27) усі члени цих рівнянь містять множник $\sin(\omega t + \lambda)$, на який їх можна скоротити.

Поділивши після цього усі члени рівнянь на ω^2 та зводячи подібні, приходимо до системи лінійних однорідних рівнянь:

$$\begin{aligned} (m_1\delta_{11} - \frac{1}{\omega^2})A_1 + m_2\delta_{12}A_2 + \dots + m_n\delta_{1n}A_n &= 0, \\ m_1\delta_{21}A_1 + (m_2\delta_{22} - \frac{1}{\omega^2})A_2 + \dots + m_n\delta_{2n}A_n &= 0, \\ \dots\dots\dots \\ m_1\delta_{n1}A_1 + m_2\delta_{n2}A_2 + \dots + (m_n\delta_{nn} - \frac{1}{\omega^2})A_n &= 0. \end{aligned} \quad (8.30)$$

Оскільки $A_i \neq 0$, розв'язок одержаної системи знаходимо з умови рівності нулю визначника системи рівнянь (8.30):

$$\begin{vmatrix} (m_1\delta_{11} - \frac{1}{\omega^2}) & m_2\delta_{12} & \dots m_n\delta_{1n} \\ m_1\delta_{21} & (m_2\delta_{22} - \frac{1}{\omega^2}) & \dots m_n\delta_{2n} \\ \dots\dots\dots \\ m_1\delta_{n1} & m_2\delta_{n2} & \dots (m_n\delta_{nn} - \frac{1}{\omega^2}) \end{vmatrix} = 0. \quad (8.31)$$

Розкриваючи визначник, одержимо *рівняння частот* або *вікове рівняння*. Воно є рівнянням степені n відносно $\frac{1}{\omega^2}$. Усі n коренів рівняння – дійсні додатні числа, кожному з яких відповідає своє значення частоти. Кількість частот дорівнює числу ступенів вільності системи.

Частотам дають числовий індекс у порядку зростання:

$$\omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_i < \dots < \omega_n. \quad (8.32)$$

Цей ряд частот (8.32) називають *спектром частот*. Найменша з них – ω_1 називається *основною* або *частотою основного тону коливань*. Інші частоти називають *гармоніками*.

Для кожної частоти ω_j можна записати розв'язок диференціальних рівнянь (8.27) у такому вигляді

$$v_{ij} = A_{ij} \sin(\omega_j t + \lambda_j), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (8.33)$$

Ці рівняння визначають j -е головне коливання системи з частотою ω_j і початковою фазою λ_j . Отже, якщо система здійснює одне з головних коливань, усі маси рухаються з однією частотою і початковою фазою. Такі коливання у балці супроводжуються так званими стоячими хвилями, які визначають її конфігурацію.

Розв'язок (8.33), що відповідає власним частотам, є частинним рішенням. Оскільки рівняння лінійні, загальний розв'язок можна одержати застосовуючи принцип суперпозиції:

$$\begin{aligned} v_1 &= A_{11} \sin(\omega_1 t + \lambda_1) + A_{12} \sin(\omega_2 t + \lambda_2) + \dots + A_{1n} \sin(\omega_n t + \lambda_n), \\ v_2 &= A_{21} \sin(\omega_1 t + \lambda_1) + A_{22} \sin(\omega_2 t + \lambda_2) + \dots + A_{2n} \sin(\omega_n t + \lambda_n), \\ &\dots \end{aligned}$$

Головні коливання можна одержати лише за спеціально підібраних початкових умов, а у загальному випадку коливання являють собою комбінацію головних коливань і мають складний характер.

Відповідно до (8.33) відношення переміщень при головних коливаннях в процесі руху залишаються постійним і дорівнюють відношенню амплітуд. Це відношення амплітуд для j -ї власної частоти

$$A_{1j} : A_{2j} : \dots : A_{nj} \quad (8.34)$$

називають j -ю власною формою. Поділивши цей ряд на амплітуду першого переміщення, одержимо інший вигляд j -ї власної форми:

$$\mu_{1j} : \mu_{2j} : \dots : \mu_{nj}, \quad (8.35)$$

де

$$\mu_{ij} = \frac{A_{ij}}{A_{1j}} \quad (8.36)$$

– коефіцієнти j -ї власної форми коливань. Відзначимо, що $\mu_{1j} = 1$.

За аналогією з частотами перша форма коливань, що відповідає основній частоті, називається *основною*.

Покажемо важливу властивість власних форм – їх ортогональність. Сили інерції, що відповідають переміщенням мас, визначається виразом (8.1) і для j -го головного коливання будуть такими:

$$I_{ij} = -m_i \ddot{v}_{ij} = m_i A_{ij} \omega_j^2 \sin(\omega_j t + \lambda_j), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (8.37)$$

Аналогічно для k -го головного коливання

$$I_{ik} = -m_i \ddot{v}_{ik} = m_i A_{ik} \omega_k^2 \sin(\omega_k t + \lambda_k), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (8.38)$$

Під дією сил інерції та сил пружності система при головних коливаннях кожного моменту часу знаходиться «у рівновазі». Тому переміщення v_{ij} та v_{ik} можна розглядати як статичні переміщення від сил інерції, відповідно I_{ij} та I_{ik} . Тоді, застосовуючи теорему про взаємність робіт Бетті, можна записати

$$\sum_{i=1}^n I_{ij} v_{ik} = \sum_{i=1}^n I_{ik} v_{ij}$$

або після підстановки (8.37) і (8.38) та скорочення на тригонометричні функції:

$$\omega_j^2 \sum_{i=1}^n m_i A_{ij} A_{ik} = \omega_k^2 \sum_{i=1}^n m_i A_{ij} A_{ik}.$$

Звідси одержимо $(\omega_j^2 - \omega_k^2) \sum_{i=1}^n m_i A_{ij} A_{ik} = 0$.

Якщо власні частоти різняться, $(\omega_j^2 - \omega_k^2) \neq 0$, отже

$$\sum_{i=1}^n m_i A_{ij} A_{ik} = 0. \quad (8.39)$$

Одержане співвідношення виражає властивість ортогональності власних форм, які відповідають двом різним частотам.

У розгорнутому вигляді воно буде таким:

$$m_1 A_{1j} A_{1k} + m_2 A_{2j} A_{2k} + \dots + m_n A_{nj} A_{nk} = 0. \quad (8.40)$$

Якщо усі члени цього рівняння поділити на добуток $A_{1j} A_{1k}$, одержимо умову ортогональності в іншому вигляді:

$$m_1 + m_2 \mu_{2j} \mu_{2k} + m_3 \mu_{3j} \mu_{3k} + \dots + m_n \mu_{nj} \mu_{nk} = 0. \quad (8.41)$$

Запитання для самоконтролю

1. Як одержують рівняння частот?
2. Скільки розв'язків має рівняння частот?
3. Що таке спектр частот?
4. Що таке основна частота або частота основного тону?
5. Що таке головне коливання? При яких умовах його можна одержати?
6. Що таке власна форма коливань?
7. Яка форма коливань називається основною?
8. Яку властивість мають власні форми коливань?

8.4 Вимушені коливання систем з одним ступенем вільності

Вимушеними називаються коливання, що відбуваються під дією збуджуючої сили.

8.4.1 Рівняння руху. Частинні випадки збуджуючого навантаження

При відсутності опору рівняння (8.5) для випадку вимушених коливань приймає такий вид:

$$\ddot{v} + \frac{c}{m} v = \frac{F(t)}{m}$$

або з урахуванням позначення (8.6)

$$\ddot{v} + \omega^2 v = \frac{F(t)}{m}. \quad (8.42)$$

Розв'язок цього рівняння складається із загального розв'язку однорідного рівняння (8.7) та частинного розв'язку неоднорідного рівняння:

$$v = A_1 \cos \omega t + A_2 \sin \omega t + V(t). \quad (8.43)$$

Знайдемо розв'язок для деяких частинних випадків навантаження, причому для простоти як і раніше будемо вважати, що збуджуюча сила $F(t)$ прикладена до маси.

Розглянемо дію сили $F(t)$, *рант*ово прикладеної до маси і потім такою, що залишається постійною (рис. 8.9, а). Графік цього навантаження наведений на рисунку 8.9, б.

В якості частинного розв'язку візьмемо статичний прогин маси

$$V(t) = v_{cm} = \delta_{11} F.$$

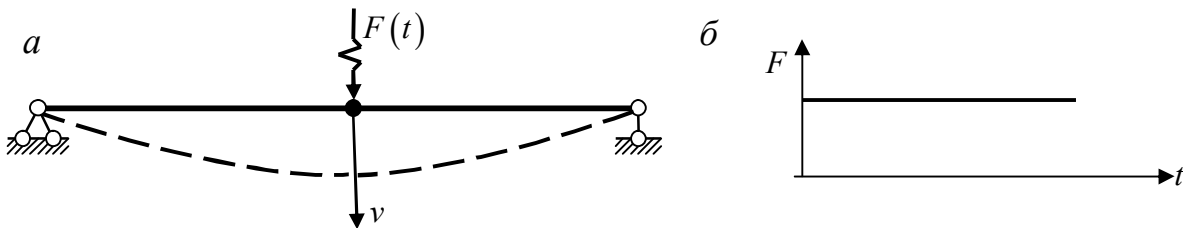


Рисунок 8.9

Дійсно, рівняння (8.42) при $v = v_{cm}$ задовольняється:

$$\ddot{v}_{cm} + \omega^2 v_{cm} = \frac{F}{m}.$$

Тут $v_{cm} = \delta_{11} F$, $\ddot{v}_{cm} = 0$, $\omega^2 = \frac{1}{m\delta_{11}}$.

Оскільки до прикладання навантаження система знаходилась у нерухомості, початкові умови будуть такими:

при $t = 0$ $v = 0$, $\dot{v} = 0$.

З першої умови знаходимо $A_1 = -v_{ct}$.

Записуючи похідну розв'язку (8.43): $\dot{v} = -A_1 \omega \sin \omega t + A_2 \omega \cos \omega t$, з другої початкової умови одержуємо $A_2 = 0$.

Отже, розв'язок (8.43) для цього випадку навантаження набуває такого вигляду:

$$v = -v_{ct} \cos \omega t + v_{ct} = v_{cm} (1 - \cos \omega t). \quad (8.44)$$

Графік цієї залежності наведено на рисунку 8.10. З нього видно, що коливання відбуваються за гармонічним законом навколо положення статичної рівноваги, а їхня амплітуда становить $v_{max} = 2v_{cm}$.

Розглянемо випадок дії *імпульсного* (ударного) навантаження (рис. 8.11).

Форма імпульсу (закон зміни сили $F(t)$) може бути різним, величина

$$S = \int_{-\Delta t}^0 F(t) dt \quad (8.45)$$

називається *імпульсом сили*. Тут з урахуванням мализни Δt для зручності вважається, що відрахування часу починається після закінчення дії імпульсу.

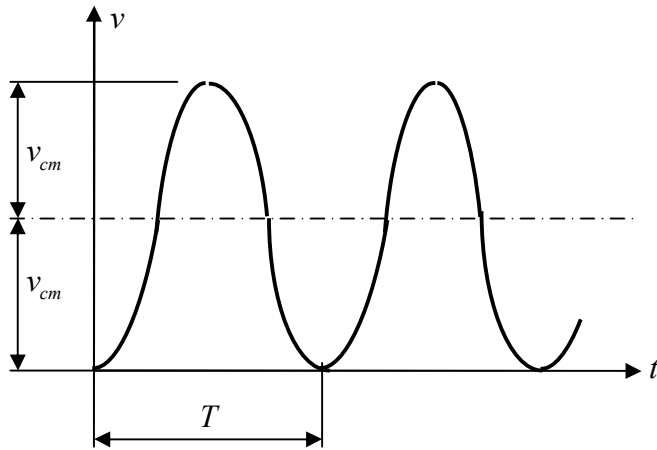


Рисунок 8.10

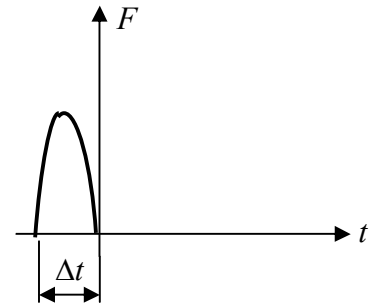


Рисунок 8.11

Відповідно до теореми про зміну кількості руху

$$m \cdot \Delta \dot{v} = S. \quad (8.46)$$

Після дії імпульсу збуджуюче навантаження відсутнє і система здійснює вільні коливання, що відповідають співвідношенням (8.8). До удару швидкість маси дорівнювала нулю: $\dot{v}_0 = 0$, отже, приріст швидкості $\Delta \dot{v} = \dot{v}_0$, тобто дорівнює швидкості після удару. За час удару переміщення маси практично не змінилось і $v_0 = 0$.

Тоді з (8.46) випливає $\dot{v}_0 = \frac{S}{m}$, з (8.10) $\lambda = 0$, а з (8.11) $A = \frac{\dot{v}_0}{\omega} = \frac{S}{m\omega}$.

Отже, відповідно до (8.41), рух системи, викликаний дією імпульсу, замальовується таким виразом:

$$v = \frac{S}{m\omega} \sin \omega t. \quad (8.47)$$

Ще раз відзначимо, що навантаження можна вважати імпульсним лише у тому випадку, коли час дії навантаження Δt малий порівняно з періодом власних коливань.

8.4.2 Вимушені коливання при дії періодичного збуджуючого навантаження

Розглянемо випадок дії збуджуючої сили, яка змінюється за гармонічним законом

$$F(t) = F \sin \theta t.$$

При відсутності опору диференціальне рівняння коливань набуває такого вигляду:

$$\ddot{v} + \omega^2 v = \frac{F}{m} \sin \theta t. \quad (8.48)$$

Загальний розв'язок однорідного рівняння відповідає вільним коливанням

$$v_1 = A_1 \cos \omega t + A_2 \sin \omega t, \quad (8.49)$$

а частинний розв'язок неоднорідного рівняння (8.48) будемо шукати у такому вигляді:

$$v_2 = C \sin \theta t. \quad (8.50)$$

Підставляючи v_2 відповідно до (8.50) та його похідну $\dot{v}_2 = -C\theta^2 \sin \theta t$ в (8.48), одержимо:

$$-C\theta^2 \sin \theta t + \omega^2 C \sin \theta t = \frac{F}{m} \sin \theta t.$$

Звідси

$$C = \frac{F}{m(\omega^2 - \theta^2)} = \frac{F}{m\omega^2 \left[1 - \left(\frac{\theta}{\omega} \right)^2 \right]}$$

або, з урахуванням $\omega^2 = \frac{1}{m\delta_{11}}$ та $v_{cm} = F\delta_{11}$, маємо

$$C = \frac{Fm\delta_{11}}{m \left[1 - \left(\frac{\theta}{\omega} \right)^2 \right]} = \frac{v_{cr}}{1 - \left(\frac{\theta}{\omega} \right)^2}.$$

Тепер можна записати загальний розв'язок рівняння (8.48):

$$v = v_1 + v_2 = A_1 \cos \omega t + A_2 \sin \omega t + \frac{v_{cr}}{1 - \left(\frac{\theta}{\omega} \right)^2} \sin \theta t. \quad (8.51)$$

Отже, вимушені коливання на відміну від вільних не є гармонічними.

Якщо у початковий момент часу при $t = 0$ $v_0 = 0$ і $\dot{v}_0 = 0$, тоді з першої умови випливає $A_1 = 0$.

Записуючи похідну переміщення (швидкість):

$$\dot{v} = -A_1 \omega \sin \omega t + A_2 \omega \cos \omega t + \frac{v_{cr}}{1 - \left(\frac{\theta}{\omega} \right)^2} \theta \cos \theta t, \quad (8.52)$$

з другої умови знаходимо

$$A_2 = -v_{cr} \frac{\theta}{\omega} \frac{1}{1 - \left(\frac{\theta}{\omega} \right)^2}. \quad (8.53)$$

Тепер вираз для переміщення (8.51) набуває такого вигляду:

$$v = \frac{v_{cm}}{1 - \left(\frac{\theta}{\omega} \right)^2} \left(\sin \theta t - \frac{\theta}{\omega} \sin \omega t \right). \quad (8.54)$$

Отже, вимушені коливання відбуваються накладанням коливань з частотою збуджуючого навантаження θ на коливання з власною частотою ω (рис. 8.12).

Другий доданок у дужках (8.54) являє собою вільні коливання. Оскільки в реальних умовах завжди присутні сили опору, вільні коливання є згасаючими. Тому для практичних цілей їх можна не враховувати і приймати такими, що відповідають наступній залежності:

$$v = \frac{v_{cm}}{1 - \left(\frac{\theta}{\omega}\right)^2} \sin \theta t. \quad (8.55)$$

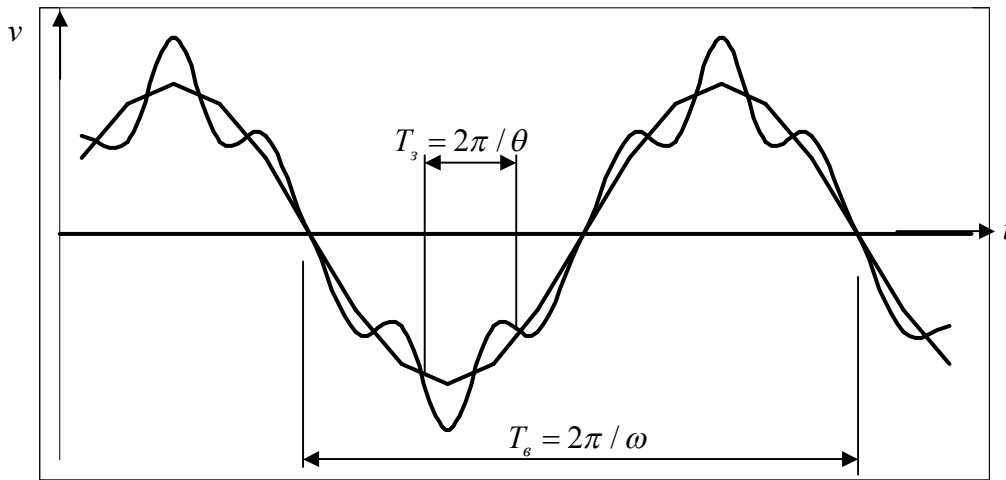


Рисунок 8.12

Амплітуда таких коливань буде такою:

$$v_{max} = \frac{v_{cm}}{1 - \left(\frac{\theta}{\omega}\right)^2}. \quad (8.56)$$

При $\frac{\theta}{\omega} \rightarrow 1$ $v_{max} \rightarrow \infty$. Таке явище, коли при збігу частоти збуджуючого навантаження з частотою власних коливань амплітуда зростає до нескінченності, називається *резонансом*.

8.4.3 Зусилля від динамічних впливів. Динамічний коефіцієнт

Головною метою динамічного розрахунку є визначення зусиль, які виникають при коливаннях системи. Один із способів такого розрахунку, що ґрунтується на використанні принципу незалежності дії впливів, полягає в наступному: після визначення прискорення маси \ddot{v} знаходять сили інерції; далі найбільші зусилля від динамічного навантаження одержують як суму зусиль від статичної дії амплітудного значення збуджуючого навантаження та від дії амплітудної сили інерції. Наприклад, для згинаючих моментів одержимо:

$$M_d = M_{ст} + \overline{M} I, \quad (8.57)$$

де \overline{M} – моменти від одиничної сили, прикладеної до маси.

Для визначення повних зусиль до зусиль від динамічної дії необхідно додати зусилля від сили ваги маси.

Оцінка динамічної дії може бути виконана за допомогою *динамічного коефіцієнта* (коефіцієнта динамічності) μ . Цей коефіцієнт являє собою відношення максимального значення величини при динамічному впливі до

значення цієї величини при статичній дії відповідного збуджуючого навантаження.

Зазначимо, що величина динамічного коефіцієнту у загальному випадку буде різною при визначенні його для переміщень, згинаючих моментів та інших факторів. Однаковим значення μ буде лише у тому випадку, коли збуджуюче навантаження прикладене безпосередньо до маси. Зокрема, для розглянутих вище випадків дії навантаження одержимо: *при раптово прикладеній силі* (див. п. 8.4.1)

$$\mu = \frac{v_{max}}{v_{ст}} = 2, \quad (8.58)$$

при дії гармонічної сили (див. п. 3.4.2)

$$\mu = \frac{v_{max}}{v_{ст}} = \frac{1}{1 - \left(\frac{\theta}{\omega}\right)^2}. \quad (8.59)$$

В останньому випадку при наближенні до резонансу μ зростає до нескінченності, а потім, при віддаленні від нього при $\frac{\theta}{\omega} > 1$ зменшується (рис. 8.13).

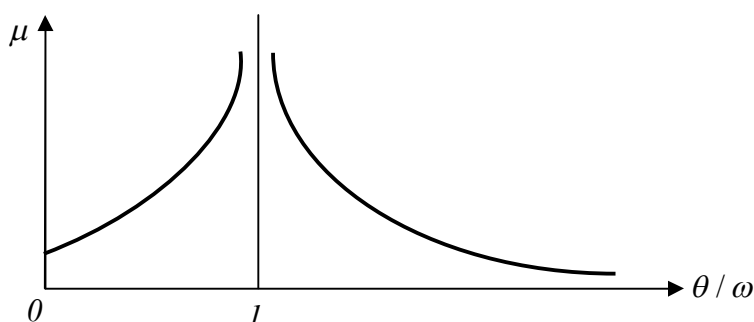


Рисунок 8.13

Зазначимо, що за умови врахування сил опору динамічний коефіцієнт при $\frac{\theta}{\omega} = 1$ має скінченне значення. Але навіть при значному опорі при віддаленні $\frac{\theta}{\omega}$ від одиниці величина μ наближається до значення (8.59), яке відповідає відсутності опору. У зв'язку з цим в практичних розрахунках, як правило, для визначення динамічного коефіцієнта при дії гармонічного навантаження користуються виразом (8.59).

Запитання для самоконтролю

1. Що таке вимушені коливання?
2. Який вид має диференціальне рівняння вимушених коливань?
3. Що називається імпульсом сили?

4. Які коливання здійснює система після закінчення дії імпульсу?
5. Яке навантаження називається гармонічним?
6. Який характер мають вимушені коливання при дії гармонічного навантаження?
7. Що таке резонанс? Чому в конструкціях неможна допускати появлення резонансу?
8. Що являє собою динамічний коефіцієнт? Наведіть приклади його значення.

8.5 Вимушені коливання систем зі скінченим числом ступенів вільності

8.5.1 Коливання при дії гармонічного навантаження

При дослідженні вільних коливань системи без опору одержані вирази (8.27) для переміщень мас у такому вигляді:

$$v_i(t) = -\sum_{k=1}^n m_k \delta_{ik} \ddot{v}_k(t), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

При дії на систему збуджуючих навантажень $F_j(t)$, $j = 1, 2, \dots, m$ до переміщень при наявності лише інерційних сил (праві частини рівнянь (8.27)) додаються переміщення від зовнішнього навантаження $\Delta_{if}(t)$. Переносячи переміщення від сил інерції в ліву частину, одержуємо

$$v_i(t) + \sum_{k=1}^n m_k \delta_{ik} \ddot{v}_k(t) = \Delta_{if}(t), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (8.60)$$

Розглянемо випадок, коли збуджуючі навантаження змінюються за гармонічним законом $F_j(t) = F_j \sin \theta t$. Вважаючи, що частота коливань θ усіх сил однакова, маємо:

$$\Delta_{if}(t) = \sum_{j=1}^m \delta_{ij} F_j(t) = \sum_{j=1}^m \delta_{ij} F_j \sin \theta t$$

або

$$\Delta_{if}(t) = \Delta_{if} \sin \theta t, \quad (8.61)$$

де Δ_{if} – переміщення вздовж i -го напрямку, викликане статичною дією усіх збуджуючих навантажень.

Розв'язок неоднорідних диференціальних рівнянь (8.60) можна одержати як суму загального розв'язку однорідних рівнянь та частинного розв'язку неоднорідних рівнянь:

$$v_i(t) = v_{i1}(t) + v_{i2}(t).$$

Однорідні рівняння – це рівняння, які відображають вільні коливання системи. Оскільки при коливаннях завжди присутні непружні сили опору, вільні коливання є швидко згасаючими. У зв'язку з цим загальний розв'язок неоднорідного рівняння можна замінити його частинним розв'язком:

$$v_i(t) = v_i(t).$$

Будемо шукати цей розв'язок у такому вигляді:

$$v_i(t) = v_i \sin \theta t, \quad (8.62)$$

$$\delta_{ii}^* = \delta_{ii} - \frac{1}{m_i \theta^2}. \quad (8.67)$$

Розв'язок рівнянь (8.66) дає значення I_i амплітуд інерційних сил. Після їх визначення величини найбільших динамічних зусиль неважко знайти, використовуючи принцип суперпозиції. Зокрема, для згинаючих моментів дійсне співвідношення:

$$M_\partial = \bar{M}_1 I_1 + \bar{M}_2 I_2 + \dots + \bar{M}_n I_n + M_f, \quad (8.68)$$

де \bar{M}_i – згинаючі моменти від одиничних сил F_i , прикладених до мас; M_f – згинаючий момент від статичної дії збуджуючого навантаження.

Для того, щоб одержати повні значення зусиль, необхідно до знайдених найбільших динамічних зусиль необхідно додати зусилля від сил ваги.

8.5.2 Загальний випадок дії збуджуючого навантаження. Розкладання за формами вільних коливань

У загальному випадку дії збуджуючого навантаження для знаходження частинного розв'язку може бути застосований *метод розкладання за власними формами коливань*. Він використовується тоді, коли відомі власні частоти і форми вільних коливань.

Подамо вектор узагальнених координат $v(t)$ у вигляді лінійної комбінації власних векторів $\bar{\mu}_k$:

$$\dot{\bar{n}}(t) \varphi_k(t) \bar{m}_k$$

або в розгорнутому вигляді

$$v_i(t) = \varphi_1(t) \mu_{i1} + \varphi_2(t) \mu_{i2} + \dots + \varphi_n(t) \mu_{in}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (8.69)$$

Тут $\varphi_i(t)$ – деякі функції, що підлягають визначенню функції часу;

$$\bar{\mu}_k = \begin{pmatrix} 1 \\ \mu_{2k} \\ \mu_{3k} \\ \vdots \\ \mu_{nk} \end{pmatrix} \text{ – вектор } k\text{-ї власної форми коливань (8.35).}$$

Функції $\varphi_k(t)$ визначають положення мас у будь-який момент часу, тому їх можна розглядати як нові узагальнені координати, що називаються *головними*. Якщо усі ці координати, крім однієї, наприклад $\varphi_k(t)$, дорівнюють нулю, одержимо k -у власну форму. Дійсно,

$$v_i(t) = \varphi_k(t) \mu_{ik}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

і $v_1 : v_2 : \dots : v_n = \mu_{1k} : \mu_{2k} : \dots : \mu_{nk}$.

Отже, за (8.69), рух системи подається у вигляді лінійної комбінації головних переміщень.

Підставляючи $v_i(t)$ з (8.69) у рівняння (8.60) одержуємо

$$\sum_{j=1}^n \varphi_j(t) \mu_{ij} + \sum_{k=1}^n m_k \delta_{ik} \sum_{j=1}^n \ddot{\varphi}_j(t) \mu_{kj} = \Delta_{if}(t), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

або

$$\sum_{j=1}^n [\sum_{k=1}^n m_k \delta_{ik} \ddot{\varphi}_j(t) \mu_{kj} + \varphi_j(t) \mu_{kj}] = \Delta_{if}(t), \quad i=1,2,\dots,n. \quad (8.70)$$

Останнє співвідношення можна записати в матричній формі:

$$\sum_{j=1}^n [\ddot{\varphi}_j(t) \mathbf{C} \boldsymbol{\mu}_j + \varphi_j(t) \mathbf{E} \boldsymbol{\mu}_j] = \mathbf{A}(t), \quad (8.71)$$

де:

$$\mathbf{C} = \begin{vmatrix} m_1 \delta_{11} & m_2 \delta_{12} & \dots & m_n \delta_{1n} \\ m_1 \delta_{21} & m_2 \delta_{22} & \dots & m_n \delta_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ m_1 \delta_{n1} & m_2 \delta_{n2} & \dots & m_n \delta_{nn} \end{vmatrix},$$

$$\mathbf{D}(t) = \begin{vmatrix} \Delta_{1f}(t) \\ \Delta_{2f}(t) \\ \dots \\ \Delta_{nf}(t) \end{vmatrix} - \text{вектор переміщень мас від збуджуючого навантаження},$$

$$\mathbf{E} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} - \text{одинична матриця розміром } n \times n.$$

Як випливає з (8.30), для кожної j -ї власної форми коливань дійсне співвідношення

$$\dot{m}_j = \omega_j^2 \mathbf{C} \dot{m}_j. \quad (8.72)$$

Тоді (8.71) набуває такого вигляду:

$$\sum_{j=1}^n [\ddot{\varphi}_j(t) + \omega_j^2 \varphi_j(t)] \mathbf{C} \dot{m}_j = \mathbf{D}(t) \dot{M}$$

або
$$\sum_{j=1}^n [\ddot{\varphi}_j(t) + \omega_j^2 \varphi_j(t)] \frac{1}{\omega_j^2} \dot{m}_j = \mathbf{D}(t). \quad (8.73)$$

Помножимо обидві частини (8.73) скалярно на $\dot{M}^T \mathbf{m}_k$ (\dot{M} – діагональна матриця мас, елементами головної діагоналі якої є маси, а інші – нулі) і врахуємо, що внаслідок ортогональності форм власних коливань в лівій частині усі складові з різними індексами j і k обернуться на нуль. Тоді приходимо до такої системи рівнянь:

$$\ddot{\varphi}_j(t) + \omega_j^2 \varphi_j(t) = \omega_j^2 b_j(t), \quad i=1,2,\dots,n, \quad (8.74)$$

де
$$b_j(t) = \frac{\Delta_{1f}(t) m_1 \mu_{1j} + \Delta_{2f}(t) m_2 \mu_{2j} + \dots + \Delta_{nf}(t) m_n \mu_{nj}}{m_1 \mu_{1j}^2 + m_2 \mu_{2j}^2 + \dots + m_n \mu_{nj}^2}. \quad (8.75)$$

Після визначення з рівнянь (8.74) головних координат $\varphi_j(t)$ знаходимо сили інерції

$$I_j(t) = -m_j \sum_{k=1}^n \ddot{\varphi}_j(t) \mu_{jk}$$

і, далі, зусилля в системі.

Запитання для самоконтролю

1. Як змінюється вирази для переміщень мас при дії збуджуючого навантаження порівняно з виразами для вільних коливань?
2. Як показати, що для систем зі скінченним числом ступенів вільності резонанс настає при збігу частоти збуджуючого навантаження з будь-якою з власних частот системи?
3. Якого вигляду набувають рівняння відносно амплітуд інерційних сил при періодичному навантаженні?
4. Як визначаються зусилля від динамічного впливу?
5. Який вид має вектор узагальнених переміщень в методі розкладання за власними формами коливань?

8.6 Вільні поперечні коливання прямих стержнів (балок)

Розглянемо прямолінійний однорідний стержень сталого поперечного перерізу.

Основні допущення:

- 1) у недеформованому стані вісь стержня прямолінійна;
- 2) поперечні переміщення при коливаннях малі і відбуваються перпендикулярно до осі стержня;
- 3) справедлива гіпотеза плоских перерізів: прямий елемент стержня, перпендикулярний до його осі до деформації, залишається прямим і перпендикулярним до вигнутої осі стержня після деформації і його довжина не змінюється.

8.6.1 Диференціальне рівняння руху елемента стержня і його розв'язання

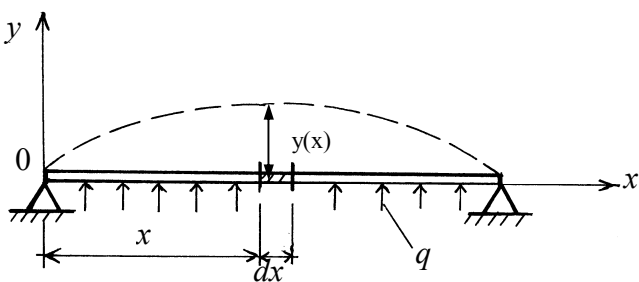


Рисунок 8.14

Розглянемо елемент стержня нескінченно малої довжини dx , положення якого на осі стержня визначається координатою x (рис. 8.14). Диференціальне рівняння зігнутої осі стержня має такий вигляд:

$$EI \frac{d^2 y(x)}{dx^2} = M, \quad (8.76)$$

де E – модуль пружності; I – момент інерції поперечного перерізу стержня щодо нейтральної осі (z); M – згинаючий момент у поперечному перерізі

стержня; $y(x)$ – прогин стержня (переміщення точки осі стержня з координатою x у напрямку осі Oy).

Застосовуючи співвідношення між згинаючим моментом і інтенсивністю розподіленого навантаження q

$$\frac{d^2 M}{dx^2} = q$$

і підставляючи в нього вираз (8.75), одержимо для однорідного стержня сталого поперечного перерізу ($EI = \text{const}$):

$$EI \frac{d^4 y}{dx^4} = q. \quad (8.77)$$

При поперечних коливаннях стержня прогин буде уже функцією двох змінних:

$$y = y(x, t).$$

Застосуємо для елемента стержня довжиною dx принцип Даламбера, узявши в якості розподіленого навантаження розподілені сили інерції:

$$q = -\rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}, \quad (8.78)$$

де ρ – щільність матеріалу стержня; A – площа його поперечного перерізу.

Підставляючи (8.78) у (8.77) і вводячи позначення

$$a^2 = \frac{EI}{\rho A}, \quad (8.79)$$

одержимо диференціальне рівняння вільних поперечних коливань елемента стержня:

$$a^2 \cdot \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0. \quad (8.80)$$

Відповідно до методу Фур'є, шукаємо розв'язок диференціального рівняння (8.80) у вигляді добутку функцій, кожна з яких залежить тільки від однієї змінної:

$$y(x, t) = Y(x) \cdot T(t). \quad (8.81)$$

Підставляючи (8.81) у (8.80), позначаючи похідні

$$Y^{IV} = \frac{d^4 Y(x)}{dx^4}, \quad \ddot{T} = \frac{d^2 T(t)}{dt^2}$$

і розділяючи змінні, маємо:

$$\frac{\ddot{T}}{T} = -a^2 \frac{Y^{IV}}{Y}. \quad (8.82)$$

Оскільки ліва частина (8.81) залежить тільки від часу t , а права – від координати x , рівність можлива тільки в тому випадку, коли ліва і права

частини (8.82) дорівнюють константі. Позначивши цю константу ω^2 (можна довести, що константа є від'ємною), (8.82) можна записати у такому вигляді:

$$\frac{\ddot{T}}{T} = -a^2 \frac{Y^{IV}}{Y} = -\omega^2,$$

що еквівалентно двом звичайним диференціальним рівнянням:

$$\ddot{T} + \omega^2 T = 0, \quad (8.83)$$

$$Y^{IV} - k^4 Y = 0, \quad (8.84)$$

де
$$k^4 = \frac{\omega^2}{a^2}. \quad (8.85)$$

Розв'язок диференціального рівняння (8.83), як відомо, має такий вигляд:

$$T(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t. \quad (8.86)$$

Рівнянню (8.84) задовольняють функції $\cos kx$, $\sin kx$, $ch kx$, $sh kx$,

де $ch kx = \frac{e^{kx} + e^{-kx}}{2}$ – гіперболічний косинус; $sh kx = \frac{e^{kx} - e^{-kx}}{2}$ –

гіперболічний синус, які мають властивість: $ch^2 kx - sh^2 kx = 1$.

Загальний розв'язок рівняння (8.83) буде лінійною комбінацією цих функцій, яку зручніше записати у вигляді:

$$Y(x) = C_1 (\cos kx + ch kx) + C_2 (\cos kx - ch kx) + C_3 (\sin kx + sh kx) + C_4 (\sin kx - sh kx). \quad (8.87)$$

У рівняннях (8.86) і (8.87) коефіцієнти A, B, C_1, C_2, C_3, C_4 – сталі інтегрування.

Як видно з рівняння (8.86), параметр ω є **власною частотою** поперечних коливань стержня, а функція $Y(x)$ у рівнянні (8.87), що залежить від координати x і визначає розподіл амплітуд переміщень точок осі стержня – **власною формою** поперечних коливань стержня.

Власну форму $Y(x)$ потрібно визначити так, щоб задовольнити умовам закріплення на кінцях стержня. Ці умови називаються **граничними умовами**. Для кожного кінця стержня (при $x = 0$ і $x = l$, де l – довжина стержня) складають по дві умови, усього їх буде чотири. Після підстановки функції (8.86) і її похідних у граничні умови вийде однорідна система чотирьох рівнянь щодо сталих C_1, C_2, C_3, C_4 . Умовою існування ненульового розв'язка для C_1, C_2, C_3, C_4 буде рівність нулю визначника цієї системи, що буде залежати тільки від параметра ω :

$$\Delta(\omega) = 0. \quad (8.88)$$

Рівняння (8.88) називається **частотним**. Коренями цього рівняння і будуть власні частоти ω_n , причому їх число нескінченне: $n = 1, 2, \dots, \infty$.

Із системи рівнянь відносно C_1, C_2, C_3, C_4 можна всі сталі виразити через деяку одну (наприклад, через C_3) і записати вираз для власної форми $Y_n(x)$, що відповідає власній частоті ω_n .

Загальний розв'язок диференціального рівняння (8.80) виходить як лінійна комбінація розв'язків виду (8.81) усієї множини n частот ω_n :

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} Y_n(x) \cdot T_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty} Y_n(x) \cdot (A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t), \quad (8.89)$$

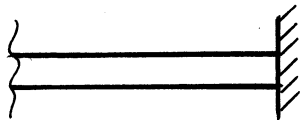
де сталі A_n, B_n (у які відносять і сталу C_k , що залишилась) визначаються з початкових умов $y(x, 0)$ і $\dot{y}(x, 0)$.

Рівняння (8.89) є *рівнянням вільних поперечних коливань стержня*.

8.6.2 Граничні умови

Розглянемо кілька можливих випадків закріплення одного з кінців стержня (який має координату $x = 0$ або $x = l$).

1. Затиснений кінець.



На такому кінці дорівнюють нулю прогин y і кут поворота перерізу стержня θ :

$$\begin{cases} y = 0, \\ \theta = 0. \end{cases} \quad (8.90)$$

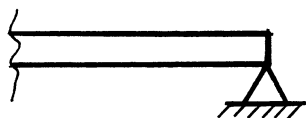
Враховуючи, що $y = T(t) \cdot Y(x)$, $\theta = \frac{\partial y}{\partial x} = T(t) \cdot Y'(x)$, а функція $T(t)$

у загальному випадку не дорівнює 0 для будь-якого значення координати x , рівняння (8.90) можна записати у такому вигляді:

$$\begin{cases} Y = 0, \\ Y' = 0. \end{cases} \quad (8.91)$$

Рівняння (8.90) виражають *граничні умови на защемленому кінці стержня*.

2. Шарнірно (вільно) опертий кінець.



У цьому випадку на кінці стержня дорівнюють нулю прогин y і згинаючий момент M :

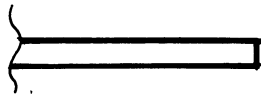
$$\begin{cases} y = 0, \\ M = 0. \end{cases} \quad (8.92)$$

Оскільки $M = EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = EI \cdot T(t) \cdot Y''(x)$, рівняння (8.92) можна записати у такому вигляді:

$$\begin{cases} Y = 0, \\ Y'' = 0. \end{cases} \quad (8.93)$$

Рівняння (8.93) виражають *граничні умови на шарнірно обертому кінці стержня*.

3. Вільний кінець.



На вільному кінці дорівнюють нулю згинальний момент M^I поперечна сила Q :

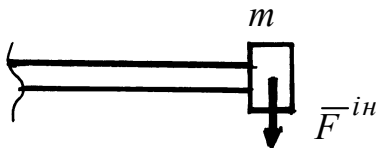
$$\begin{cases} M = 0, \\ Q = 0. \end{cases} \quad (8.94)$$

Оскільки $Q = \frac{\partial M}{\partial x} = EI \cdot T(t) \cdot Y'''(x)$, рівняння (8.94) приймуть такого вигляду:

$$\begin{cases} Y'' = 0, \\ Y''' = 0. \end{cases} \quad (8.95)$$

Рівняння (8.95) виражають *граничні умови на вільному кінці стержня*.

4. На кінці стержня точковий вантаж маси m .



У цьому випадку дорівнює нулю згинальний момент M , а поперечна сила Q дорівнює силі інерції вантажу:

$$\begin{cases} M = 0, \\ Q = F^{in}. \end{cases} \quad (8.96)$$

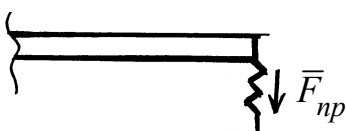
Оскільки $F^{in} = m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = mY(x)\ddot{T}(t) = -mY(x)\omega^2 T(t)$, рівняння (8.97)

запишуться у вигляді

$$\begin{cases} Y'' = 0, \\ EIY''' = -m\omega^2 Y. \end{cases} \quad (8.98)$$

Рівняння (8.97) виражають *граничні умови для правого кінця стержня з розташованої на ньому зосередженою масою* (при розташуванні маси на лівому кінці в другому рівнянні зміниться знак: $EIY''' = m\omega^2 Y$).

5. Пружно обертий кінець стержня.



На пружно обертому кінці стержня дорівнює нулю згинаючий момент M , а поперечна сила Q дорівнює реакції опори (силі пружності F_{np}):

$$\begin{cases} M = 0, \\ Q = F_{np}. \end{cases} \quad (8.98)$$

Тому що $F_{np} = c \cdot y = c \cdot T(t) \cdot Y(x)$, рівняння (8.98) приймуть вигляд

$$\begin{cases} Y'' = 0, \\ EJY''' = cY. \end{cases} \quad (8.99)$$

Рівняння (8.99) виражають *граничні умови на пружно обертому правому кінці стержня* (при розташуванні пружної в'язі на лівому кінці в другому рівнянні зміниться знак: $EIY''' = -cY$).

Запитання для самоконтролю

1. Які закони використовуються для отримання диференціального рівняння вільних поперечних коливань стержня?
2. Яким методом розшукується розв'язок диференціального рівняння вільних поперечних коливань стержня?
3. Як формується частотне рівняння поперечних коливань стержня?
4. Як складається загальний розв'язок диференціального рівняння вільних поперечних коливань стержня?
5. Що називають граничними умовами і якими рівняннями виражаються ці умови для защемленого кінця при поперечних коливаннях стержня?
6. Як визначають власні форми поперечних коливань стержня?
7. Що називають вузловою точкою у власних формах поперечних коливань стержня?

8.7 Кінематичне збудження коливань. Розрахунок на сейсмічні впливи

Колівання споруди можуть бути викликані не лише навантаженням, що змінюється за часом, а й переміщеннями основи. Прикладами можуть бути коливання, викликані рухом земної кори при землетрусах, коливання підресорених частин автомобілів при пересуванні нерівною дорогою та ін.

Розглянемо коливання будівлі (рис. 8.15, а) при землетрусі. Оскільки вертикальна жорсткість будівлі зазвичай суттєво більше горизонтальної, будемо розглядати поведінку будови при горизонтальному переміщенні основи $v_0(t)$. Маса перекриттів значно перевищує масу стін, тому в якості розрахункової схеми приймемо невагому консоль з точковими масами, розташованими в рівні перекриттів та покрівлі (рис. 8.15, б). Жорсткість консолі EI приймемо еквівалентною горизонтальній жорсткості будівлі.

Колівання мас відбуваються при відсутності збуджуючого навантаження і можуть бути відображені рівняннями, аналогічними (8.27). Подамо їх у такому вигляді:

$$v_i(t) + \sum_{k=1}^n m_i \delta_{ik} \ddot{v}_{ks}(t) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (8.100)$$

де $v_{ks}(t) = v_0(t) + v_k(t)$ (8.101)

– повне переміщення k -ї маси, яке визначається як сума переміщення основи v_0 та прогину консолі v_k (рис. 8.15, в).

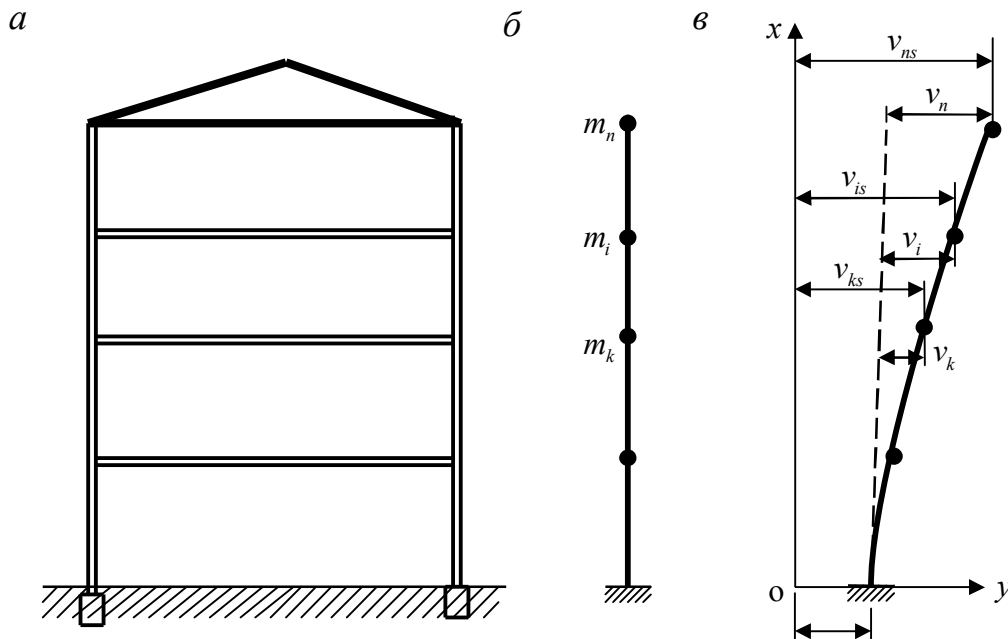


Рисунок 8.15

Підставляючи переміщення (8.101) у (8.100), одержимо:

$$v_i(t) + \sum_{k=1}^n m_i \delta_{ik} [\ddot{v}_0(t) + \ddot{v}_k(t)] = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

або
$$v_i(t) + \sum_{k=1}^n m_i \delta_{ik} \ddot{v}_k(t) + \ddot{v}_0(t) \sum_{k=1}^n m_i \delta_{ik} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (8.102)$$

Останній доданок тут можна розглядати як деяке переміщення:

$$\Delta_{i0}(t) = \ddot{v}_0(t) \sum_{k=1}^n m_i \delta_{ik}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (8.103)$$

Тепер рівняння (8.100) набувають вигляду, аналогічного (8.60):

$$v_i(t) + \sum_{k=1}^n m_i \delta_{ik} \ddot{v}_k(t) + \Delta_{i0}(t) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (8.104)$$

і можуть бути розв'язані, наприклад, методом розкладання за власними формами коливань.

Запитання для самоконтролю

1. Як враховується кінематичне збудження у диференціальному рівнянні руху?
2. Яку розрахункову схему будівлі приймають при розрахунку на сейсмічні впливи?
3. Які співвідношення використовують для одержання рівнянь переміщень мас при сейсмічних впливах?

9 СТІЙКІСТЬ СТЕРЖНЕВИХ СИСТЕМ

9.1 Основні поняття

9.1.1 Визначення

Стійкість – це здатність споруди та усіх її частин зберігати своє початкове положення та деформований стан при діючих навантаженнях.

Втрата стійкості пов'язана з переходом системи від стійкої до нестійкої рівноваги. Поняття стійкої та нестійкої рівноваги пояснимо на прикладі кульки, розташованої на криволінійній поверхні (рис. 9.1). Якщо відхилити кульку від положення 1 у нижній точці увігнутої частини поверхні, а потім відпустити, вона здійснить затухаючі коливання, і зрештою повернеться у початкове

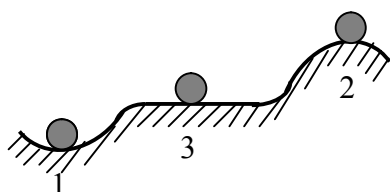


Рисунок 9.1

положення. Таке положення кульки ілюструє стан стійкої рівноваги. При відхиленні кульки від положення 2 у верхній точці опуклої частини поверхні вона скотиться донизу і не повернеться у початкове положення. Такий стан – це стан нестійкої рівноваги. І нарешті, положення 3 на горизонтальній частині поверхні відповідає стану байдужої рівноваги.

Спрощено визначення стійкої рівноваги можна сформулювати так: *стан рівноваги можна вважати стійким, якщо при достатньо малих збудженнях відхилення системи впродовж усього часу руху залишаються малими, причому зменшуючи збудження, можна зробити ці відхилення скільки завгодно малими.*

Розрізняють *стійкість положення* та *стійкість форми рівноваги* у деформованому стані. Втрата стійкості *положення* пов'язана з порушенням умов рівноваги зовнішніх сил (перекидання баштового крану, перекидання або зсув підпірної стінки).

Втрата стійкості *форми рівноваги* у деформованому стані є наслідком порушення рівноваги між внутрішніми та зовнішніми силами. При цьому стається перерозподіл внутрішніх зусиль і рівновага оновлюється лише у новому деформованому стані. У цьому курсі будемо розглядати лише стійкість форми рівноваги.

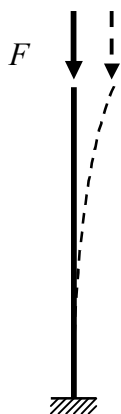


Рисунок 9.2

Розглянемо поведінку прямого стержня стиснутого осьовою силою F (рис. 9.2). При усіх значеннях цієї сили, менших деякого, стержень буде зберігати висхідну прямолінійну форму. Якщо при цьому його дещо відхилити від вертикального положення і відпустити, він, здійснивши обмежену кількість коливань навколо висхідного положення, повернеться до первісної прямолінійної форми. Отже, висхідна

прямолінійна форма є стійкою.

Зі зростанням сили стержень випрямляється усе повільніше і, нарешті, при деякому її значенні, він не повернеться до висхідного стану, а зупиниться у відхиленому положенні або буде відхилятися усе далі, отже висхідна прямолінійна форма стержня стає нестійкою.

Теоретично висхідна прямолінійна форма залишається можливою (вона не суперечить умовам рівноваги), але поряд з нею з'являється нова – викривлена дійсна форма рівноваги.

Найбільша сила (навантаження), до якої висхідна форма рівноваги є стійкою, називається критичною силою (навантаженням). Це визначення зазвичай називають визначенням знизу. Крім нього існує інше визначення – визначення зверху: *критичною називається найменша сила (навантаження), до якої крім висхідної існує хоча би ще одна форма рівноваги, що відрізняється від висхідної.*

Визначення критичної сили є основною метою розрахунків на стійкість.

Перехід стержня у нове положення пов'язаний з виникненням нескінченно малих переміщень, тому нова форма рівноваги називається *суміжною*. Така втрата стійкості називається втратою стійкості «у малому». На відміну від цієї локальної втрати стійкості існує втрата стійкості «у великому», коли втрачає стійкість система в цілому. Така втрата стійкості, як правило, супроводжується достатньо великими переміщеннями. Наприклад, в системі на рисунку 9.3 при досягненні силою критичного значення втрата стійкості відбувається різким переходом системи (так зване «процокування») у нижнє положення.

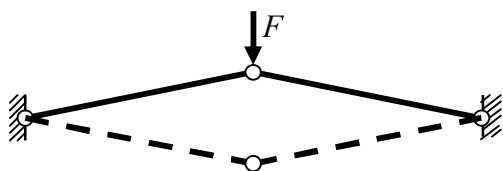


Рисунок 9.3

Відзначимо, що система стійка «у великому», стійка і «у малому». Зворотне твердження не завжди вірне.

У нашому курсі будемо розглядати лише стійкість «у малому».

Перехід стиснутого стержня при втраті стійкості у нове положення пов'язаний з появою деформацій згину.

Залежно від того, який новий вид деформації з'являється при втраті стійкості, розрізняють згинальну, крутильну, згинально-крутильну та інші форми втрати стійкості. Так у тонкій полосі (рис. 9.4, а), що зазнає плоского згину у вертикальній площині, при втраті стійкості з'являється кручення та згин у горизонтальній площині. Кільце, що завантажене радіальним розподіленим навантаженням (рис. 9.4, б) зазнає деформацій стиску. При втраті стійкості колова форма кільця порушується, отже додатково до стиску з'являється згин.

Теоретично перехід системи у нове положення можливий лише якщо примусово вивести його з висхідного стану. Насправді це відбувається довільно через так звані початкові недосконалості (неточність форми та розмірів тіла, неоднорідність властивостей матеріалу, відхилення у прикладанні навантаження). У нашому курсі ці початкові недосконалості вважаються малими, такими, що не позначаються на величині критичної сили.

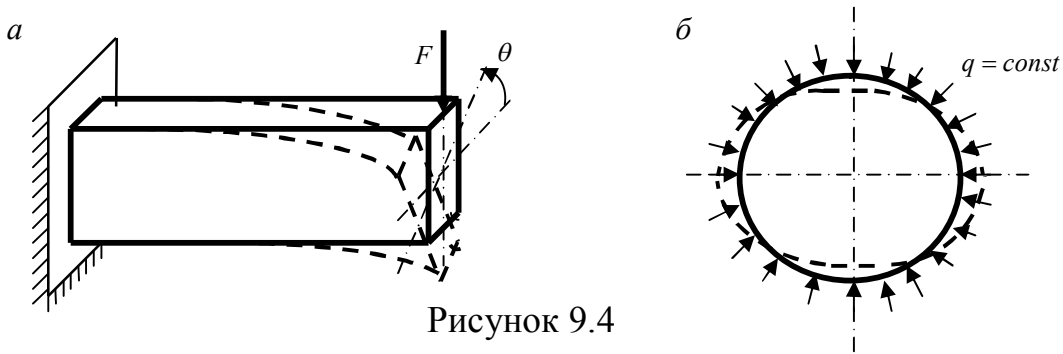


Рисунок 9.4

9.1.2 Ступені вільності

Кількість ступенів вільності W у розрахунках на стійкість – це кількість незалежних параметрів, які визначають положення системи у суміжному стані.

Пружний стержень на рисунку 9.5, а при втраті стійкості згинається так, що точка його осі на відстані x одержує переміщення y . Кількість таких точок на осі стержня нескінченна, отже $W = \infty$. Наявність пружної опори (рис. 9.5, б) надає точкам додаткові переміщення за рахунок її осідання $y = y_{cm} + y_{on}$, і так само у цьому випадку $W = \infty$. Отже, якщо система має у своєму складі хоча би один пружний стержень, число її ступенів вільності дорівнює нескінченності.

Якщо переміщення від осідання опор суттєво більші, ніж переміщення від згину стержня, останніми можна знехтувати. У цьому випадку (рис. 9.5, в) переміщення усіх точок визначаються одним параметром (величиною осідання), отже $W = 1$.

Система абсолютно жорстких стержнів з двома пружними опорами (рис. 9.5, г) має $W = 2$. Дійсно, суміжний стан визначається двома параметрами v_1, v_2 .

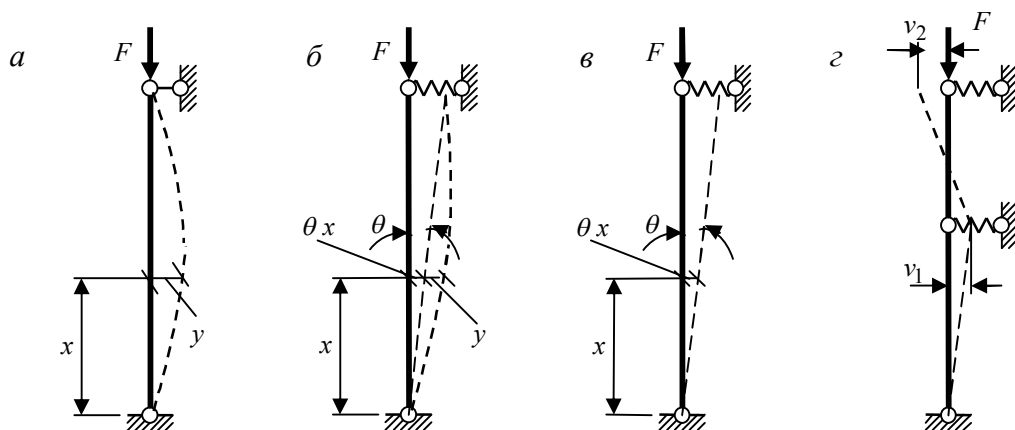


Рисунок 9.5

Запитання для самоконтролю

1. Назвіть види рівноваги.

2. Дайте визначення стійкості.
3. Які розрізняють види стійкості?
4. Що таке суміжна форма рівноваги?
5. Що таке критична сила?
6. Яка основна мета розрахунків на стійкість?
7. Що таке стійкість «у малому» і «у великому»?
8. Яка різниця у визначенні числа ступенів вільності у розрахунках на стійкість та при проведенні кінематичного аналізу?

9.2 Методи розрахунку на стійкість

Розрізняють три основні методи розрахунку на стійкість: динамічний, енергетичний та статичний. Крім них існують також ряд наближених методів визначення критичної сили.

9.2.1 Динамічний метод

Динамічний метод ґрунтується на вивченні коливань системи, виведеної з висхідного положення при подальшій відсутності збуджуючого фактору. У цьому випадку система здійснює вільні коливання. При навантаженні, меншому критичного, коливання будуть затухаючими і система повернеться згодом у висхідне положення. Навпаки, наявність зростання амплітуди вільних коливань системи свідчить про перехід системи через критичний стан. Навантаження, що відповідає такому переходу є критичним. Динамічний метод є найбільш загальним. Він може бути застосований для розрахунку як консервативних, так і неконсервативних систем. Але через складність розрахунків цей метод не має широкого застосування для вирішення практичних задач стійкості. Нагадаємо, що консервативні – це системи, у яких відсутнє розсіювання енергії. При розрахунках будівельних конструкцій зазвичай вважають їх консервативними. Прикладом неконсервативної системи може бути така, у якій необхідно враховувати тертя в шарнірах.

9.2.2 Енергетичний метод

Цей метод ґрунтується на використанні енергетичного критерію стійкості, що визначається теоремами Лагранжа – Дирихле і Ляпунова. Наведемо ці теореми у спрощеному формулюванні.

Теорема Лагранжа – Дирихле. Якщо у стані рівноваги консервативної системи її потенціальна енергія мінімальна порівняно з потенціальною енергією суміжних станів, цей стан стійкий.

Теорема Ляпунова. Якщо потенціальна енергія консервативної системи у стані рівноваги не мінімальна порівняно з потенціальною енергією суміжних станів, цей стан нестійкий.

Відповідно до теореми Лагранжа – Дирихле для пружної системи, що знаходиться у стані стійкої рівноваги, варіація повної потенціальної енергії повинна задовольняти умовам

$$\delta U_{повн} = 0: \delta^2 U_{повн} > 0.$$

Ці умови можна спростити, якщо за початок відліку потенціальної енергії узяти її значення у висхідному стані. Тоді, вважаючи початкові недосконалості малими так, що $U_{0\text{ повн}} = 0$, одержуємо приріст потенціальної енергії при переході у суміжний стан таким:

$$\Delta U_{повн} = U_{повн} - U_{0\text{ повн}} = U_{повн}.$$

З урахуванням того, що повна потенціальна енергія виражається сумою робіт внутрішніх U та зовнішніх W сил при переході з суміжного у висхідний стан, одержуємо енергетичний критерій стійкості у вигляді принципу можливих переміщень:

$$U_{повн} = W + U = 0. \quad (9.1)$$

Застосування енергетичного методу розглянемо на прикладі абсолютно жорсткого прямого стиснутого стержня пружно затиснутого на одному кінці (рис. 9.6, а). Жорсткість пружного затиснення, тобто момент, який викликає повороті опорного перерізу на кут $\theta = 1$, позначимо c .

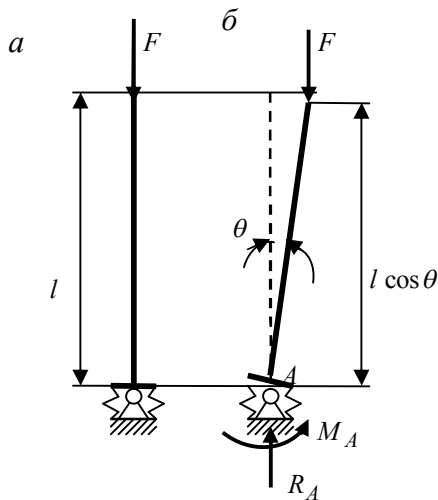


Рисунок 9.6

Втрата стійкості стержня відбувається переходом його у суміжне прямолінійне положення, що визначається кутом повороту θ (рис. 9.6, б), отже система має ступінь вільності $W = 1$. При переході з суміжного стану у висхідний сила F , переміщуючись доверху, здійснює від'ємну роботу, яка становить $W = -Fl(1 - \cos\theta)$. Реактивний момент у пружному затисненні пропорційний куту повороту $M_A = c\theta$ і здійснює роботу

$$U = \frac{1}{2} M_A \theta = \frac{c\theta^2}{2}.$$

Отже, умова (9.1) у цій задачі має такий вигляд:

$$-Fl(1 - \cos\theta) + \frac{c\theta^2}{2} = 0. \quad (9.2)$$

Ураховуючи, що вища степінь нескінченно малого кута θ у цьому виразі дорівнює двом, розкладаємо $\cos\theta$ у степеневий ряд і утримуємо у цьому розкладанні величини до другого порядку мализни. Тоді маємо:

$$\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \dots \approx 1 - \frac{\theta^2}{2},$$

і (9.2) набуває такого вигляду:

$$-Fl\left(1 - 1 + \frac{\theta^2}{2}\right) + \frac{c\theta^2}{2} = -Fl\frac{\theta^2}{2} + \frac{c\theta^2}{2} = 0.$$

Одержане рівняння стійкості дає такий розв'язок: $F_{кр} = \frac{c}{l}$.

9.2.3 Статичний метод

При втраті стійкості система переходить у новий – суміжний стан рівноваги. *Статичний метод або метод Ейлера* полягає у застосуванні умов рівноваги до суміжного стану.

Розглянемо систему двох абсолютно жорстких прямих стиснутих стержнів на пружних опорах (рис. 9.7, а).

Втрата стійкості стає можливою через осідання пружних опор (рис. 9.7, б). Положення усіх точок системи у суміжному стані повністю визначається двома параметрами, наприклад величинами v_1, v_2 переміщень опорних точок системи. Отже, ця система має два ступеня вільності.

При втраті стійкості пружні опори деформуються і в них виникають реакції пропорційні величинам осідання:

$$R_1 = c v_1; \quad R_2 = c v_2.$$

Коефіцієнтами пропорційності у цих виразах є жорсткість c пружних опор, тобто сила, яка викликає осідання опори на одиницю.

Запишемо рівняння рівноваги системи у суміжному стані:

$$\begin{aligned} \sum y = 0; \quad R_A - R_1 + R_2 &= 0; \\ \sum x = 0; \quad V_A - F &= 0; \\ \sum M_A = 0; \quad R_1 l - R_2 (l + l) + F v_2 &= 0. \end{aligned}$$

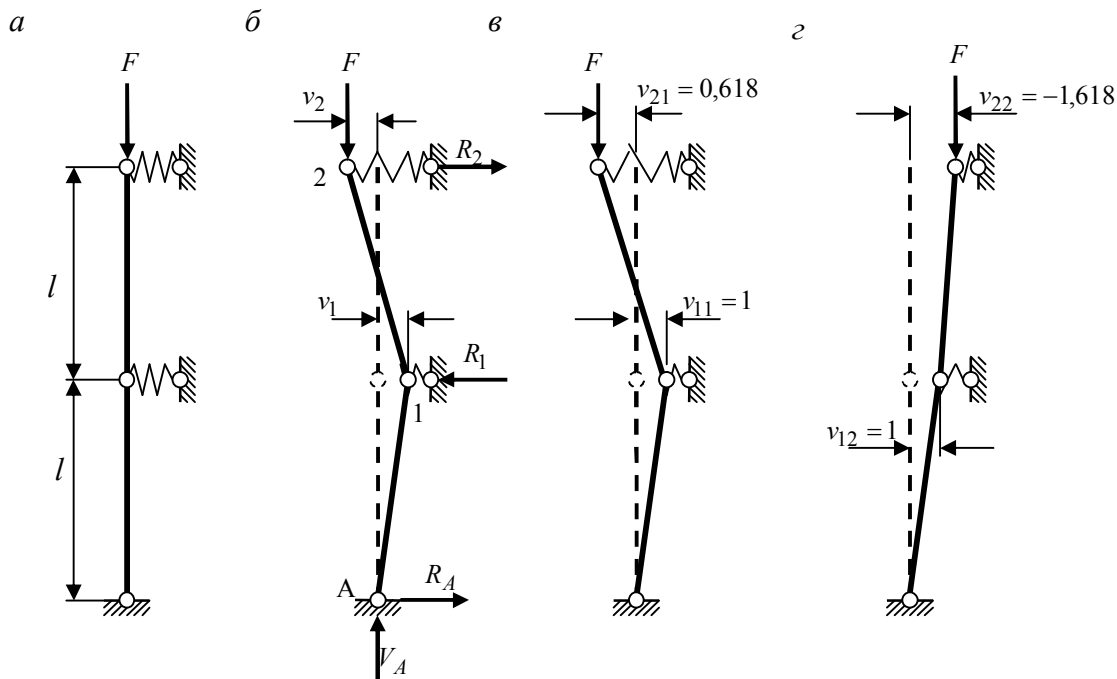


Рисунок 9.7

Одержані три рівняння рівноваги системи містять чотири невідомі реакції, тому додатково складаємо рівняння, що виражає умову відсутності згинаючого моменту у шарнірі 1 для суміжного стану:

$$\sum_{\text{верхи}} M_1 = 0; \quad -R_2 l + F(v_1 + v_2) = 0.$$

Розглядаємо окремо це рівняння разом з третім рівнянням рівноваги системи. Після підстановки в них реакцій, виражених через переміщення опорних точок, одержимо після елементарних перетворень таку систему лінійних однорідні алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{aligned} clv_1 + (F - 2cl)v_2 &= 0; \\ Fv_1 + (F - cl)v_2 &= 0. \end{aligned} \quad (9.3)$$

Оскільки $v_1 \neq 0, v_2 \neq 0$, розв'язок системи одержуємо з умови рівності нулю її визначника:

$$\begin{vmatrix} cl & (F - 2cl) \\ F & (F - cl) \end{vmatrix} = 0.$$

Розкриваючи визначник, одержуємо рівняння стійкості розглянутої стержневої системи, яке являє собою квадратичне рівняння відносно навантаження:

або
$$F^2 - 3clF + c^2 l^2 = 0.$$

Розв'язок рівняння дає два кореня – дві критичні сили:

$$F = \frac{3cl}{2} \mp \sqrt{\left(\frac{3cl}{2}\right)^2 - c^2 l^2} = \begin{cases} 0,382cl; \\ 2,618cl. \end{cases} \quad (9.4)$$

Як впливає з (9.3), абсолютні значення переміщень залишаються невизначеними і можна знайти лише їх співвідношення. Так, з першого рівняння (9.3) маємо:

$$\frac{v_2}{v_1} = -\frac{cl}{F - 2cl}, \quad (9.5)$$

з другого:
$$\frac{v_2}{v_1} = -\frac{F}{F - cl}. \quad (9.6)$$

Проаналізуємо ці співвідношення при одержаних значеннях сили. Підставляючи перший корінь (9.4) у (9.5), одержимо:

$$\frac{v_{21}}{v_{11}} = -\frac{cl}{0,382cl - 2cl} = 0,618.$$

Отже, якщо прийняти $v_{11} = 1$, друга опорна точка системи переміститься на величину $v_{21} = 0,618$ і система набуває вигляду, показаного на рисунку 9.7, в. Ця форма системи, що відповідає першому кореню рівняння стійкості, називається *першою формою втрати стійкості*. Неважко упевнитись, що (9.6) дає таке саме значення співвідношення переміщень опорних точок.

Підставивши другий корінь (9.4) у (9.5) або (9.6), одержимо:

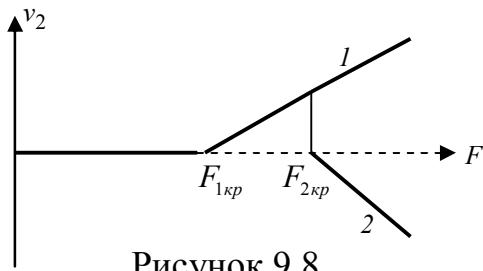


Рисунок 9.8

$$\frac{v_{22}}{v_{12}} = -\frac{cl}{2,618cl - 2cl} = -1,618.$$

Вид системи, що відповідає другому кореню рівняння стійкості, або друга форма втрати стійкості наведена на рисунку 9.7, з.

Залежність між навантаженням та переміщенням v_2 при додатних

зміщеннях v_1 схематично наведена на рисунку 9.8. Кореням рівняння стійкості $F_{1кр} = 0,618cl$; $F_{2кр} = 2,618cl$ відповідають точки розгалуження (біфуркації) форм рівноваги системи. Відповідні часто ці значення сил називають біфуркаційними.

При $F < F_{1кр}$ стійкою формою рівноваги є висхідна прямолінійна форма. При $F > F_{1кр}$ з'являється суміжна форма при $v_2 > 0$ (лінія 1 на рис. 9.8), а при $F > F_{2кр}$ - друга суміжна форма рівноваги з $v_2 < 0$ (лінія 2 на рис. 9.8). Висхідна прямолінійна форма стає нестійкою і можлива лише теоретично або при додатковому закріпленні стержня від переміщень. Те саме можна сказати і про другу форму, оскільки вона не може здійснитися після втрати стійкості за першою формою. Теоретично можливими залишаються перша та висхідна форми рівноваги. Отже при $F > F_{2кр}$ теоретично можливі дві форми втрати стійкості.

Відзначимо, що кількість форм втрати стійкості і, відповідно, кількість біфуркаційних сил дорівнює кількості ступенів вільності системи, зокрема при $W = \infty$ вона нескінченна.

Зважаючи на проведений аналіз можна зробити висновок, що критичною силою системи є найменша з біфуркаційних сил. У розглянутому прикладі маємо:

$$F_{кр} = \min(F_{1кр}; F_{2кр}) = F_{1кр} = 0,382cl.$$

Запитання для самоконтролю

1. На чому ґрунтується динамічний метод розрахунку на стійкість?
2. Що є енергетичним критерієм стійкості?
3. Як одержують енергетичний критерій стійкості у вигляді принципу можливих переміщень?
4. Що являє собою жорсткість пружної опори?
5. У чому суть методу Ейлера розрахунків на стійкість?
6. Який зв'язок між кількістю ступенів вільності, кількістю біфуркаційних сил та кількістю форм втрати стійкості?
7. Як співвідносяться між собою критична сила системи та біфуркаційні сили?

9.3 Стійкість прямого стиснутого стержня

9.3.1 Стійкість прямого стиснутого стержня з шарнірним закріпленням кінців.

Формула Ейлера

Розглянемо прямий стиснутий стержень постійної жорсткості (рис. 9.9, *a*). нагадаємо, що такий стержень має нескінченну кількість ступенів вільності.

Застосовуючи статичний метод, визначаємо, що горизонтальні реакції відсутні, а вертикальна дорівнює стискаючій силі. Далі застосовуємо рівняння рівноваги нескінченно малого елемента стержня, відоме з опору матеріалів як наближене диференціальне рівняння зігнутої осі стержня:

$$EI y'' = M .$$

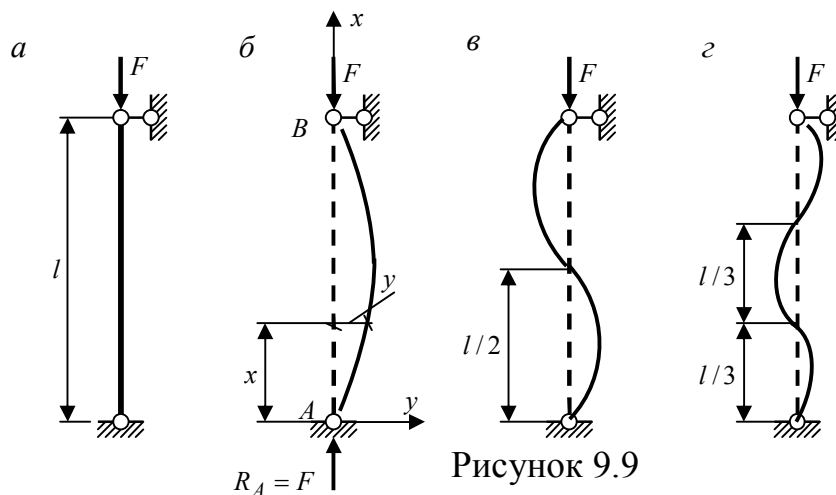


Рисунок 9.9

Згинаючий момент у перерізі стержня в суміжному стані $M = -F y$. Отже, диференціальне рівняння набуває такого вигляду:

$$EI y'' + F y = 0. \quad (9.7)$$

Поділивши члени рівняння на EI , введемо позначення

$$n^2 = \frac{F}{EI}. \quad (9.8)$$

Тепер рівняння (9.7) набуває стандартного вигляду однорідного лінійного диференціального рівняння другого порядку:

$$y'' + n^2 y = 0. \quad (9.9)$$

Розв'язок цього рівняння має такий вигляд:

$$y = C_1 \sin nx + C_2 \cos nx. \quad (9.10)$$

Запишемо граничні умови:

1) при $x = 0$ $y = 0$; 2) при $x = l$ $y = 0$.

З першої умови одержимо $C_2 = 0$, отже стержень втрачає стійкість згинаючись за синусоїдою. $y = C_1 \sin nx$.

З другої умови $C_1 \sin nl = 0$. Звідси, оскільки $C_1 \neq 0$, одержуємо рівняння стійкості

$\sin nl = 0$.

Розв'язок цього рівняння дає нескінченний ряд:

$$nl = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \dots, k\pi; \quad k = 1, 2, 3, \dots, \infty. \quad (9.11)$$

Нульовий розв'язок відкидаємо як таке, що відповідає висхідному стану. Тоді беремо перший ненульовий розв'язок $n_1 l = \pi$. Тепер з (9.8) одержуємо

$$\sqrt{\frac{F_{1кр}}{EI}} \cdot l = \pi \text{ і, далі: } F_{1кр} = \frac{\pi^2 EI}{l^2}.$$

Підставимо $n_1 = \frac{\pi}{l}$ у (9.10). З урахуванням $C_2 = 0$ одержимо функцію прогинів стержня при втраті стійкості за першою формою:

$$y_1 = C_1 \sin \frac{\pi x}{l}.$$

Отже, першій формі втрати стійкості стержня відповідає згинання за однією половиною хвилі синусоїди (рис. 9.9, б).

Другому кореню (9.11) рівняння стійкості відповідають такі співвідношення:

$$n_2 = \frac{2\pi}{l}; \quad F_{2кр} = \frac{4\pi^2 EI}{l^2}; \quad y_2 = C_1 \sin \frac{2\pi x}{l}.$$

Останнє співвідношення окреслює другу форму втрати стійкості за двома півхвилями синусоїди (рис. 9.9, в).

Продовжимо аналіз для третього розв'язку (9.11):

$$n_3 = \frac{3\pi}{l}; \quad F_{3кр} = \frac{9\pi^2 EI}{l^2}; \quad y_3 = C_1 \sin \frac{3\pi x}{l}.$$

Відповідна форма втрати стійкості наведено на рисунку 9.9, г і містить три півхвилі синусоїди.

Отже, для розрахунку системи з нескінченним числом ступенів вільності необхідно скласти диференціальні рівняння. Розв'язок задачі дає нескінченну кількість критичних (біфуркаційних) сил і відповідних форм втрати стійкості.

Як впливає з визначення критичною силою системи є найменша з біфуркаційних сил:

$$F_{кр} = \frac{\pi^2 EI}{l^2}. \quad (9.12)$$

Ця формула носить ім'я *Ейлера*.

Зауважимо, що як і в прикладі, розглянутому в п. 9.2.3, вищі форми втрати стійкості можливі лише в тому випадку, якщо на систему накласти додаткові в'язі. *Оскільки постановка додаткових в'язей приводить до збільшення жорсткості системи, це також приводить і до збільшення критичної сили.*

При визначенні критичної сили було використане наближене диференціальне рівняння зігнутої осі стержня. Це рівняння достатньо задовільно описує поведінку стержня до критичного навантаження. У випадках значної гнучкості стержня матеріал при втраті стійкості продовжує знаходитись

в межах пружної стадії роботи. В такому разі у суміжному стані він знаходиться у рівновазі і може знадобитись вивчення закритичного стану. Це можна зробити лише застосовуючи точне рівняння зігнутої осі:

$$\frac{EI}{\rho} = M .$$

9.3.2 Критична сила для прямого стиснутого стержня при різних закріпленнях кінців

Формулу Ейлера (9.12) можна поширити на інші варіанти закріплення кінців стержня. Для цього звернемо увагу на те, що форми втрати стійкості шарнірно закріпленого стержня (рис. 9.9) різняться одна від одної кількістю півхвиль синусоїди, що укладаються при згині за довжиною стержня. Кожна частина стержня l_c , на якій міститься одна півхвиля синусоїди поводить себе так само, як окремий шарнірно закріплений стержень довжиною l_c . Наприклад, при другій формі втрати стійкості маємо:

$$l_c = 0,5l, \text{ отже } F_{2кр} = \frac{\pi^2 Ei}{(0,5l)^2} = \frac{4\pi^2 Ei}{l^2} .$$

Відповідно до цього можна записати формулу для критичної сили при різних закріпленнях його кінців. Позначивши через μ частку довжини стержня, на якій при втраті стійкості міститься одна півхвиля синусоїди застосуємо формулу Ейлера:

$$F_{кр} = \frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2} . \quad (9.13)$$

Коефіцієнт μ називають *коефіцієнтом зведення довжини*. Його значення для різних випадків закріплення стержня наведені на рисунку 9.10.

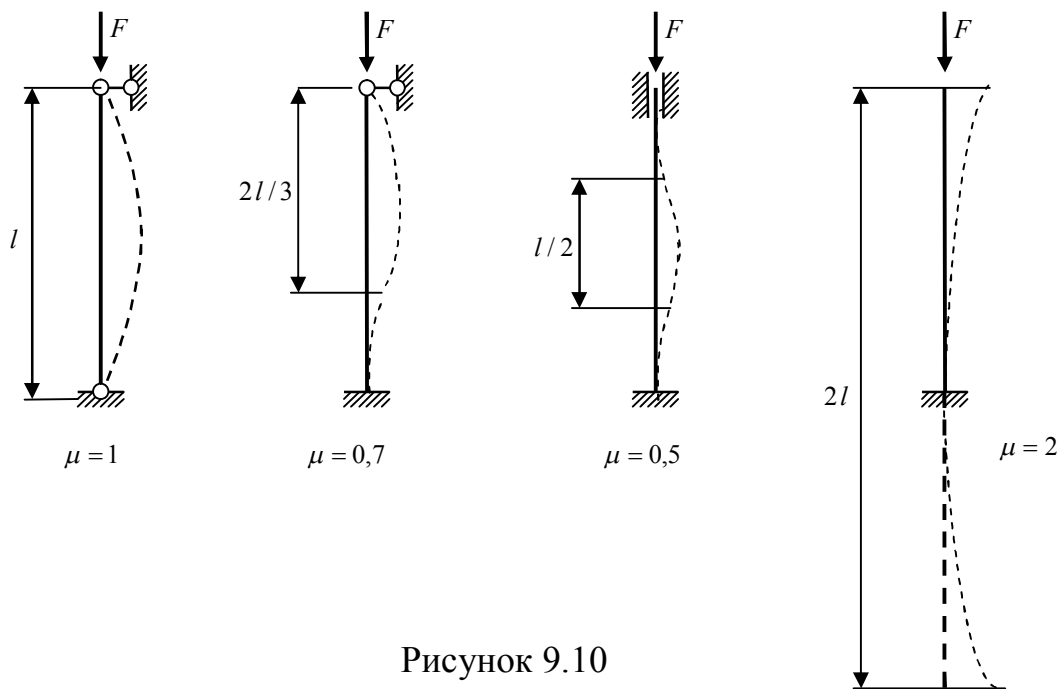


Рисунок 9.10

9.3.3 Критичні напруження. Стійкість за межею пружності

Критичне напруження відповідає критичному навантаженню. З урахуванням (9.13) маємо:

$$\sigma_{кр} = \frac{F_{кр}}{A} = \frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2 A}. \quad (9.14)$$

Нагадаємо, що вираз (9.13) був одержаний з припущенням пружної роботи матеріалу, тому напруження (9.14) не повинні перевищувати межі пропорційності:

$$\sigma_{кр} \leq \sigma_{пц}. \quad (9.15)$$

Введемо позначення *гнучкості стержня*:

$$\lambda = \sqrt{\frac{(\mu l)^2 A}{I}} = \frac{\mu l}{i}, \quad (9.16)$$

де $i = \sqrt{\frac{I}{A}}$ – радіус інерції перерізу.

Після підстановки (9.14) в (9.15) з урахуванням (9.16) одержимо:

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \leq \sigma_{пц},$$

звідки граничне значення гнучкості, до якого матеріал до втрати стійкості працює в пружній стадії буде таким:

$$\lambda_{зр} = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_{пц}}}. \quad (9.17)$$

Зокрема для сталі марки Ст.3 $\sigma_{пц} = 300 \text{ МПа}$ і $\lambda_{зр} \approx 100$.

При $\lambda < \lambda_{зр}$ втрата стійкості супроводжується появою пластичних деформацій і формула Ейлера (9.13) не може бути застосована.

Зауважимо, що межа пропорційності матеріалу дуже близька до межі пружності, тому зазвичай їх вважають співпадаючими і кажуть про стійкість за межею пружності.

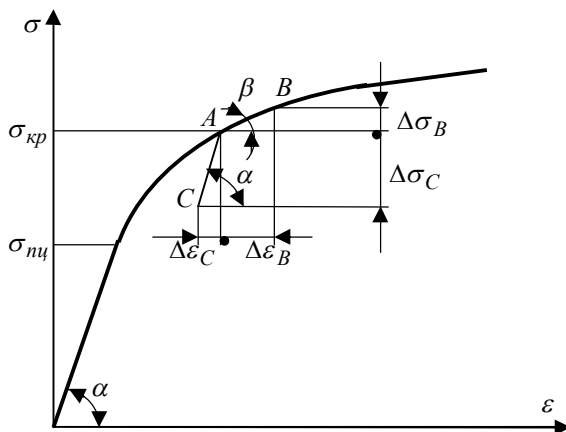


Рисунок 9.11

Задача стійкості за межею пружності ускладнюється тим, що у цьому випадку матеріал зазнає пластичних деформацій і система перестає бути консервативною. Для таких систем не можна застосовувати статичний метод, а при застосуванні динамічного методу виникають значні математичні складності. Через це критичне навантаження і за межею пружності часто визначають статичним методом 3

застосуванням деякого – дотичного модуля пружності. Можливість такого розрахунку підтверджуються випробуваннями.

Розглянемо діаграму напружень при стисканні матеріалу (рис. 9.11). Припустимо, що втрата стійкості відбувається при напруженнях, які відповідають точці А на діаграмі. При переході в суміжний стан стержень викривляється, одна частина перерізу зазнає додаткового стиску (напруження відповідають точці В діаграми), інша розвантажується (точка С діаграми). Через мализну додаткових деформацій ділянку АВ діаграми можна вважати лінійною, отже залежність між додатковими напруженнями і деформаціями можна записати так:

$$\Delta\sigma_B = E_k \Delta\varepsilon_B, \quad (9.18)$$

де $E_k = \operatorname{tg} \beta$ - дотичний модуль, який дорівнює тангенсу кута нахилу кривої $\sigma(\varepsilon)$ у точці А.

Для частини перерізу, що розвантажується, дійсний закон Гука:

$$\Delta\sigma_C = E \Delta\varepsilon_C \quad (9.19)$$

Для визначення критичної сили за межами пружності Шенлі запропонував у формулі Ейлера при визначенні критичної сили за межею пружності застосовувати дотичний модуль:

$$F_{кр} = \frac{\pi^2 E_k I}{(\mu l)^2}. \quad (9.20)$$

Для спрощеного обчислення критичних напружень за межею пружності Ясинський запропонував емпіричну формулу:

$$\sigma_{кр} = a - v \lambda. \quad (9.21)$$

Коефіцієнти a та v експериментально, наприклад, для сталі Ст.3 $a = 310$; $v = 1,14$.

Якщо критичні напруження, визначені за (9.21), перевищують межу текучості σ_m , стержень втратить міцність раніше, ніж стійкість.

Для сталі Ст.3 залежність між критичною силою і гнучкістю відображається графіком, наведеним на рисунку 9.12.

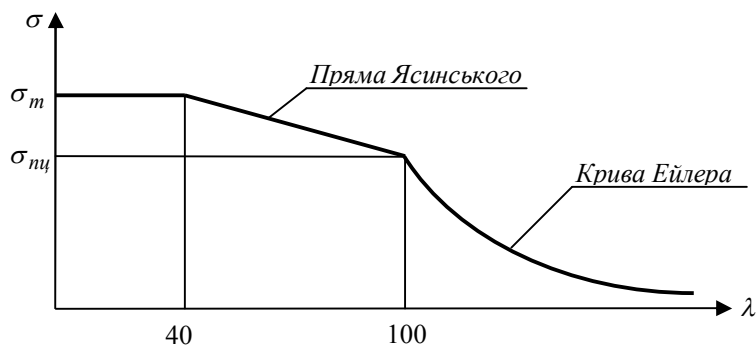


Рисунок 9.12

9.3.4 Розрахунок стержнів на стиск з урахуванням стійкості

В інженерній практиці розрахунок стержнів на стиск поєднують з розрахунком на стійкість. Для цього значення допустимого напруження приймають зменшеним, вводячи коефіцієнт φ :

$$\sigma = \frac{N}{A} \leq \varphi [\sigma]. \quad (9.22)$$

Коефіцієнт φ називають *коефіцієнтом поздовжнього згину*. Він залежить від матеріалу та гнучкості стержня. Його значення для сталі Ст.3 такі:

λ	100	110	120	130	140	150	160	170	180	190	200
φ	0,60	0,52	0,45	0,40	0,36	0,32	0,29	0,26	0,23	0,21	0,19

При застосуванні (9.22) для підбору перерізу стержня спочатку задаються деяким значенням $0 < \varphi_0 < 1$ і знаходять потрібну площу перерізу $A = \frac{N}{\varphi[\sigma]}$.

Далі для прийнятого перерізу обчислюють гнучкість і знаходять нове значення коефіцієнту. Розрахунок продовжують до виконання умови (9.22) при черговому значенні φ .

9.3.5 Метод початкових параметрів

Для стержня постійної жорсткості при незмінній за довжиною поздовжньою силою розв'язок диференціального рівняння можна одержати у вигляді методу початкових параметрів.

Розглянемо ділянку такого стержня довжиною l жорсткістю $EI = const$ з поздовжньою стискаючою силою N (рис. 9.13).

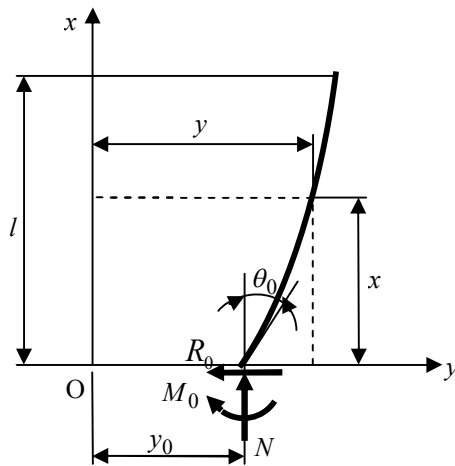


Рисунок 9.13

Систему координат обираємо з початком на нижньому кінці стержня у недеформованому стані, вісь x спрямована вздовж недеформованої осі стержня, вісь y – праворуч. У суміжному викривленому стані на початку координат діють згинаючий момент M_0 , поздовжня сила N та умовна (перпендикулярна до осі стержня у недеформованому стані) поперечна сила R_0 . Прогин та кут повороту перерізу на початку координат становлять відповідно y_0

та θ_0 . Величини M_0, R_0, y_0, θ_0 називають *початковими параметрами*.

Згинаючий момент у довільному перерізі на відстані x від початку в суміжному стані $M = -M_0 - R_0 x - N(y - y_0)$

і диференціальне рівняння пружної лінії запишеться так:

$$EI y'' = -M_0 - R_0 x - N(y - y_0). \quad (9.23)$$

Розв'язок цього лінійного неоднорідного рівняння другого порядку з урахуванням граничних умов приводить до таких залежностей:

$$y = y_0 + \theta_0 \frac{\sin nx}{n} + \frac{M_0}{N} (\cos nx - 1) + \frac{R_0}{N} \left(\frac{\sin nx}{n} - x \right). \quad (9.24)$$

$$\theta = y' = \theta_0 \cos nx - \frac{M_0}{N} n \sin nx + \frac{R_0}{N} (\cos nx - 1); \quad (9.25)$$

$$M = EI y'' = -EI \theta_0 n \sin nx - M_0 \cos nx - R_0 \frac{\sin nx}{n}. \quad (9.26)$$

Метод можна застосувати для розрахунку стержнів, що складаються з кількох ділянок. Для цього при переході через точки стрибкоподібної зміни кута повороту $\Delta\theta$, згинаючого моменту ΔM та поперечної сили ΔR необхідно ввести відповідні доданки. Рівняння (9.24), (9.25), (9.26) набувають такого вигляду:

$$y = y_0 + \theta_0 \frac{\sin nx}{n} + \frac{M_0}{N} (\cos nx - 1) + \frac{R_0}{N} \left(\frac{\sin nx}{n} - x \right) + \Delta\theta \frac{\sin nx_\theta}{n} + \frac{\Delta M}{N} (\cos nx_M - 1) + \frac{\Delta R}{N} \left(\frac{\sin nx_R}{n} - x_R \right); \quad (9.27)$$

$$\theta = \theta_0 \cos nx - \frac{M_0}{N} n \sin nx + \frac{R_0}{N} (\cos nx - 1) + \Delta\theta \cos nx_\theta - \frac{\Delta M}{N} n \sin nx_M + \frac{\Delta R}{N} (\cos nx_R - 1); \quad (9.28)$$

$$M = -EI \theta_0 n \sin nx - M_0 \cos nx - R_0 \frac{\sin nx}{n} - EI \Delta\theta n \sin nx_\theta - \Delta M \cos nx_M - \Delta R \frac{\sin nx_R}{n}. \quad (9.29)$$

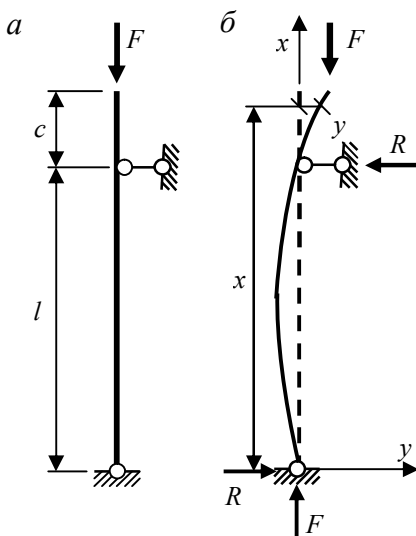


Рисунок 9.14

У наведених виразах x_θ, x_m, x_R - координати перерізу відраховані від початку координат до точок розміщення стрибків відповідно кута повороту, моменту та умовної поперечної сили.

Для прикладу розглянемо стержень, наведений на рисунку 9.14, а. Форма втрати стійкості та реакції опор показані на рисунку 9.14, б.

На початку стержня при $x=0$ маємо: $y = y_0 = 0; M = M_0 = 0; R_0 = -R$.

Поздовжня сила в перерізах $N = F$.

Отже, для довільного перерізу при $x > l$ рівняння прогинів та згинаючих моментів мають такий вигляд:

$$y = \theta_0 \frac{\sin nx}{n} - \frac{R}{F} \left(\frac{\sin nx}{n} - x \right) + \frac{R}{F} \left(\frac{\sin n(x-l)}{n} - (x-l) \right);$$

$$M = -EI\theta_0 n \sin nx + R \frac{\sin nx}{n} - R \frac{\sin n(x-l)}{n}.$$

Оскільки у цих рівняннях маємо два невідомих (θ_0 та R), необхідно використати дві граничні умови. Такими є умова відсутності прогинів на опорі при $x=l$ та умова відсутності згинаючого моменту на кінці стержня при $x=l+c$.

Ці умови дають такі рівняння:

$$\theta_0 \frac{\sin nl}{n} - \frac{R}{F} \left(\frac{\sin nl}{n} - l \right) = 0;$$

$$-EI\theta_0 n \sin n(l+c) + R \left(\frac{\sin n(l+c)}{n} - \frac{\sin nc}{n} \right).$$

Визначник одержаної системи лінійних однорідних алгебраїчних рівнянь повинен дорівнювати нулю:

$$\begin{vmatrix} \frac{\sin nl}{n} & -\frac{1}{F} \left(\frac{\sin nl}{n} - l \right) \\ -EI n \sin n(l+c) & \left(\frac{\sin n(l+c)}{n} - \frac{\sin nc}{n} \right) \end{vmatrix} = 0.$$

Розкриваючи визначник замінимо $F = n^2 EI$. У результаті одержимо рівняння стійкості:

$$\frac{\sin nl}{n} \left(\frac{\sin n(l+c)}{n} - \frac{\sin nc}{n} \right) - \sin n(l+c) \frac{1}{n} \left(\frac{\sin nl}{n} - nl \right) = 0$$

або
$$\sin nl \cdot (\sin n(l+c) - \sin nc) = \sin n(l+c) \cdot (\sin nl - nl).$$

Наприклад, при $c = 0,25l$ одержимо рівняння

$$\sin nl \left(\sin \frac{5nl}{4} - \sin \frac{nl}{4} \right) = \sin \frac{5nl}{4} (\sin nl - nl),$$

перший ненульовий корінь якого становить $nl = 1,754$ і $F_{кр} = 3,08 \frac{EI}{l^2}$ знайдено шляхом підбору.

9.3.6 Деформаційний розрахунок стержнів

Розглянемо стержень, на який одночасно діють поздовжні та поперечні сили (рис. 9.15). Зазвичай моментами поздовжньої сили $F \cdot y$ відносно центру ваги зігнутого стержня нехтують і вважають, що ця сила призводить лише до центрального стиску стержня. При великих поздовжніх силах нехтування впливу поздовжньої сили на величину згинаючих моментів може призвести до значних похибок. Деформацію, що є результатом сумісної дії поздовжніх та поперечних сил, називають *поздовжньо-поперечним згином*.

Для розглянутого стержня згинаючі моменти у деформованому стані визначаються так:

$$M = -M^0 - F y, \quad (9.30)$$

де M^0 – згинаючий момент від поперечного навантаження або балочний момент.

З урахуванням (9.30) рівняння (9.7) набуває такого вигляду:

$$EI y'' + F y = -M^0. \quad (9.31)$$

Виконуючи звичайні перетворення, з урахуванням позначення $n^2 = \frac{F}{EI}$, одержимо таке рівняння

$$y'' + n^2 y = -\frac{M_0}{EI}. \quad (9.32)$$

Загальний розв'язок цього рівняння має такий вигляд:

$$y = C_1 \sin nx + C_2 \cos nx - \frac{M_0}{n^2 EI}. \quad (9.33)$$

З урахуванням граничних умов для стержня з обома шарнірно закріпленими кінцями маємо:

$$y = -\frac{M_0}{n^2 EI} \left(1 - \cos nx - \frac{1 - \cos nl}{\sin nl} \sin nx \right). \quad (9.34)$$

Як бачимо, прогин нелінійно залежить від параметра n , а отже і від сили F . Звідси випливає, що принцип незалежності для поперечного та поздовжнього навантаження при поздовжньо-поперечному згині недійсний.

Відзначимо, що прогин залежить лінійно від M_0 , отже при фіксованій поздовжній силі для поперечних навантажень виконується принцип незалежності.

Слід пам'ятати, що рівняння (9.34) одержане у припущенні, що напруження не перевищують межі пропорційності, а прогини малі. При відмові від цих припущень задача приводить до фізично і геометрично нелінійних диференціальних рівнянь, що значно ускладнює їх розв'язання.

Запитання для самоконтролю

1. Як виглядає рівняння рівноваги нескінченно малого елемента зігнутого стержня?
2. Наведіть формулу Ейлера для стержня з шарнірними кінцями.
3. Як окреслена вісь стиснутого стержня при втраті стійкості?
4. Чому дорівнюють кількості критичних (біфуркаційних) сил, форм втрати стійкості та ступенів вільності для пружного стиснутого стержня?
5. Що таке коефіцієнт зведення довжини стиснутого стержня? Як його визначають та які значення він має?

6. Наведіть формулу Ейлера для стиснутого стержня при різних закріпленнях його кінців.
7. Для чого застосовується формула Ясинського?
8. Як в інженерній практиці виконується розрахунок стиснутих стержнів з урахуванням стійкості?
9. Як визначається гнучкість стержня?
10. У чому суть методу початкових параметрів?
11. Що таке поздовжньо-поперечний згин?
12. Чи можна застосувати принцип незалежності при розрахунку на поздовжньо-поперечний згин?

9.4 Стійкість рам

При розрахунку рам на стійкість зазвичай виходять з таких припущень:

- навантаження прикладається тільки у вузлах рами; якщо навантаження розташоване у межах стержнів, воно розподіляється у вузли;
- усі сили змінюються пропорційно одному параметру;
- поздовжніми та поперечними деформаціями при визначенні переміщень нехтують;
- зближення кінців стержнів за рахунок викривлення осі не враховують;
- втрата стійкості відбувається в межах пружної стадії роботи матеріалу;
- зусилля у стержнях рами до самої втрати стійкості відповідають зусиллям висхідного стану;
- поперечні сили вважають діючими перпендикулярно до осі стержня у висхідному стані.

Звісно, ці припущення не дають можливості точного аналізу стійкості рами, але для практичних задач визначення критичних навантажень можуть бути застосовані.

Розрахунок рам на стійкість виконується статичним методом із застосуванням методу сил або методу переміщень. Зазначимо, що, крім цього, можна застосувати розрахунок за деформованою схемою шляхом послідовних наближень.

9.4.1 Розрахунок рам на стійкість методом переміщень

Основна система при розрахунку на стійкість обирається так само, як і при звичайному статичному розрахунку. З урахуванням наведених припущень у висхідному стані стійкої рівноваги навантаження викликає лише стискання деяких стержнів. Виходячи з цього реакції у доданих в'язях основної системи від заданого навантаження відсутні: $R_{sf} = 0$. Отже, канонічні рівняння утворюють систему однорідних алгебраїчних рівнянь відносно переміщень доданих в'язей:

$$\begin{aligned}
r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + \dots + r_{1k}Z_k + \dots + r_{1n}Z_n &= 0; \\
r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + \dots + r_{2k}Z_k + \dots + r_{2n}Z_n &= 0; \\
r_{i1}Z_1 + r_{i2}Z_2 + \dots + r_{ik}Z_k + \dots + r_{in}Z_n &= 0; \\
r_{n1}Z_1 + r_{n2}Z_2 + \dots + r_{nk}Z_k + \dots + r_{nn}Z_n &= 0.
\end{aligned}
\tag{9.35}$$

Оскільки при втраті стійкості $Z_k \neq 0$, розв'язок системи відповідає рівності нулю визначника цієї системи рівнянь:

$$D = \begin{vmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1k} & \dots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \dots & r_{2k} & \dots & r_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{i1} & r_{i2} & \dots & r_{ik} & \dots & r_{ik} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{n1} & r_{n2} & \dots & r_{nk} & \dots & r_{nn} \end{vmatrix} = 0.
\tag{9.36}$$

При побудуванні епюр згинаючих моментів в основній системі від зміщення доданих в'язей слід мати на увазі, що навантаження не відкидається і деякі стержні зазнають поздовжнього згину. Згинаючі моменти у таких стержнях змінюються нелінійно за довжиною і їх значення містять множники – деякі функції параметрів ν стійкості стержнів:

$$\nu = nl = l\sqrt{N/EI}.$$

Побудування цих епюр можна виконати, наприклад, методом початкових параметрів. Результати таких розрахунків наведені у таблиці 9.1. При відсутності стискуючих сил згинаючі моменти у стержнях лінійні і будуть такі самі, як і при звичайному статичному розрахунку.

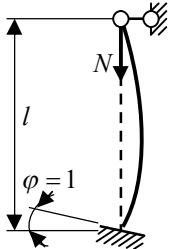
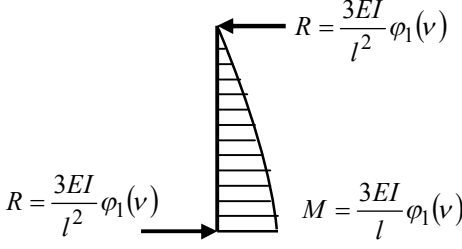
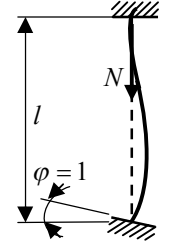
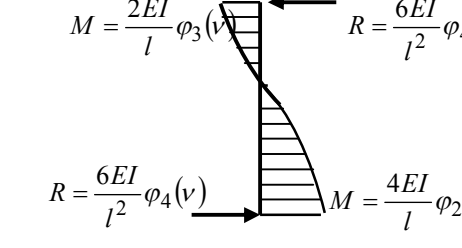
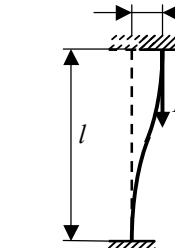
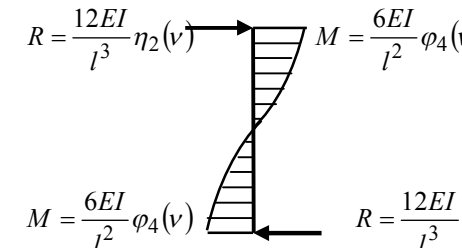
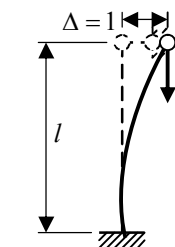
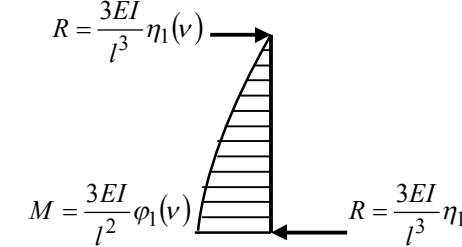
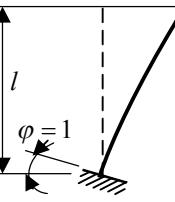
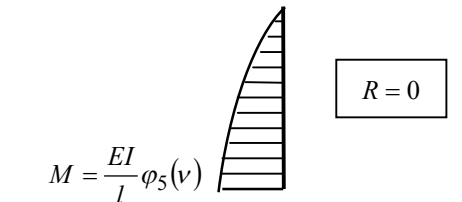
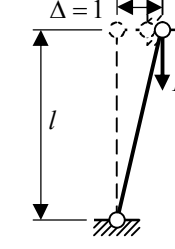
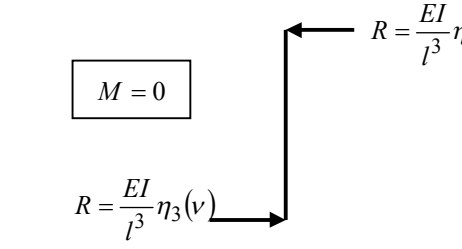
Значення функцій параметрів стійкості обчислюються за формулами:

$$\begin{aligned}
\varphi_1(\nu) &= \frac{\nu^2 \operatorname{tg} \nu}{3(\operatorname{tg} \nu - \nu)}; & \varphi_2(\nu) &= \frac{\nu(\operatorname{tg} \nu - \nu)}{8\operatorname{tg} \nu(\operatorname{tg}(\nu/2) - \nu/2)}; \\
\varphi_3(\nu) &= \frac{\nu(\nu - \sin \nu)}{4\sin \nu(\operatorname{tg}(\nu/2) - \nu/2)}; & \varphi_4(\nu) &= \varphi_1\left(\frac{\nu}{2}\right); \\
\varphi_5(\nu) &= \nu \operatorname{tg} \nu; & \eta_1(\nu) &= \frac{\nu^3}{3(\operatorname{tg} \nu - \nu)}; \\
\eta_2(\eta) &= \eta_1(\nu/2); \eta_3(\nu) &= \nu^2.
\end{aligned}$$

Коефіцієнти канонічних рівнянь, як і у розрахунках на міцність, визначаються з умов рівноваги вузлів або частин рами.

Рівняння стійкості одержують розкриваючи визначник (9.36). Розв'язок цього рівняння дає n значень параметра стійкості. Через найменше з цих значень далі визначається критична сила: $F_{\text{кр}} = \frac{\nu_{\text{min}}^2 EI}{l^2}$.

Таблиця 9.1

№ з/п	Вид стержня та дія на нього	Епюра моментів та реакції
1		 $R = \frac{3EI}{l^2} \varphi_1(v)$ $M = \frac{3EI}{l} \varphi_1(v)$
2		 $M = \frac{2EI}{l} \varphi_3(v)$ $R = \frac{6EI}{l^2} \varphi_4(v)$ $R = \frac{6EI}{l^2} \varphi_4(v)$ $M = \frac{4EI}{l} \varphi_2(v)$
3		 $R = \frac{12EI}{l^3} \eta_2(v)$ $M = \frac{6EI}{l^2} \varphi_4(v)$ $M = \frac{6EI}{l^2} \varphi_4(v)$ $R = \frac{12EI}{l^3} \eta_2(v)$
4		 $R = \frac{3EI}{l^3} \eta_1(v)$ $M = \frac{3EI}{l^2} \varphi_1(v)$ $R = \frac{3EI}{l^3} \eta_1(v)$
5		 $R = 0$ $M = \frac{EI}{l} \varphi_5(v)$
6		 $M = 0$ $R = \frac{EI}{l^3} \eta_3(v)$ $R = \frac{EI}{l^3} \eta_3(v)$

9.4.2 Поняття про розрахунок рам на стійкість методом сил

Розрахунок рам на стійкість методом сил виконується у такій самій послідовності, як і звичайний статичний розрахунок. При виборі основної системи з'являються деякі особливості. Так, необхідно обирати таку основну систему, у якій згинаючі моменти від заданого навантаження відсутні. Наприклад, для рами, наведеної на рисунку 9.18, *а*, необхідно обрати основну систему, за рисунком 9.18, *б*, а не ту, яка зображена на рисунку 9.18, *в*. Як і у методі переміщень, канонічні рівняння є однорідними – без вільних членів:

$$\begin{aligned} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \dots + \delta_{1k}X_k + \dots + \delta_{1n}X_n &= 0; \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \dots + \delta_{2k}X_k + \dots + \delta_{2n}X_n &= 0; \\ \dots & \dots \dots \dots \\ \delta_{i1}X_1 + \delta_{i2}X_2 + \dots + \delta_{ik}X_k + \dots + \delta_{in}X_n &= 0; \\ \dots & \dots \dots \dots \\ \delta_{n1}X_1 + \delta_{n2}X_2 + \dots + \delta_{nk}X_k + \dots + \delta_{nn}X_n &= 0. \end{aligned}$$

Одиничні переміщення δ_{ik} повинні визначатися з урахуванням заданого вузлового навантаження. У зв'язку з цим в основній системі повинні бути побудовані епюри моментів M_i від зайвих невідомих $X_i = 1$ з урахуванням навантаження та епюри моментів \bar{M}_i лише від дії одиничних невідомих. Епюри M_i на стиснутих стержнях криволінійні, а епюри \bar{M}_i на усіх стержнях лінійні.

При обчисленні переміщень за формулою Мора $\delta_{ik} = \sum \frac{1}{EI} \int \bar{M}_i M_k dx$ перемноження епюр у межах стиснуто-зігнутих стержнів обчислюються за допомогою функцій параметрів стійкості залежно від вигляду епюр, що перемножуються. Правила цих обчислень наведені, наприклад у [4].

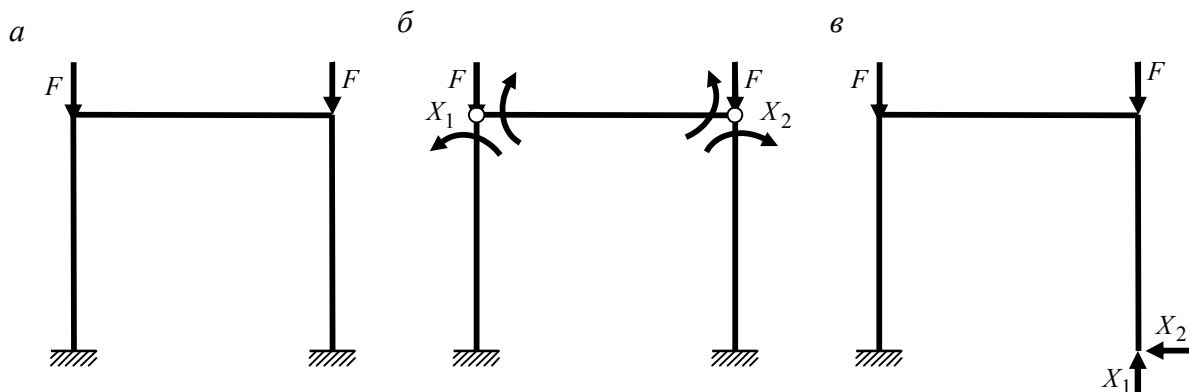


Рисунок 9.18

Як і у методі переміщень, критичне навантаження визначають з умови рівності нулю визначника системи канонічних рівнянь:

$$D = \begin{vmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \cdots & \delta_{1k} & \cdots & \delta_{1n} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \cdots & \delta_{2k} & \cdots & \delta_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \delta_{i1} & \delta_{i2} & \cdots & \delta_{ik} & \cdots & \delta_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \delta_{n1} & \delta_{n2} & \cdots & \delta_{nk} & \cdots & \delta_{nn} \end{vmatrix} = 0. \quad (9.37)$$

Метод сил у розрахунках на стійкість, як правило, менш зручний, ніж метод переміщень, через достатньо громіздке обчислення переміщень δ_{ik} .

Запитання для самоконтролю

1. Які припущення приймають при розрахунку рам на стійкість?
2. Яка особливість канонічних рівнянь у методі сил та у методі переміщень?
3. Як визначаються параметри стійкості стержнів рами?
4. Який характер мають епюри згинаючих моментів в основній системі методу переміщень на відміну від епюр при звичайному статичному розрахунку?
5. Як отримують рівняння стійкості рами?
6. Як у виразах моментів та реакцій стержнів у основній системі методу переміщень враховується наявність стискувальної сили?
7. Як визначають коефіцієнти канонічних рівнянь методу переміщень?
8. Як визначають критичну силу після визначення критичного параметру?
9. Які особливості вибору основної системи методу сил при розрахунку на стійкість?

9.5 Стійкість колових арок

9.5.1 Диференціальне рівняння згину кривого бруса

Кількість ступенів вільності арки як пружного стержня $W = \infty$, отже при застосуванні статичного методу потрібно використовувати диференціальні рівняння рівноваги.

Розглядаємо стійкість арок, окреслених за дугою кола, які знаходяться під дією рівномірно розподіленої вздовж дуги радіального стискувального навантаження. У висхідному стані такі арки зазнають лише стиску. Моментами, що виникають за рахунок обтискання, нехтують. При втраті стійкості арка переходить до суміжного стану, у якому додатково до стиску виникає згин. Поздовжніми деформаціями арки, як і при розрахунку рам, нехтуємо.

Зміна кривини осі арки $1/r_1 - 1/r$ при переході до суміжного стану пропорційна згинаючому моменту:

$$1/r_1 - 1/r = M / (EI) \quad (9.38)$$

де r та r_1 - радіуси кривини осі арки відповідно у висхідному та суміжному стані. Жорсткість перерізу EI будемо вважати незмінною. Згинаючий момент M вважається додатним, якщо він зменшує початкову кривину осі.

Виділимо елемент mn кривого бруса (рис. 9.19,а) довжиною $ds = r d\theta$ і розглянемо його поведінку при переході у суміжний стан $m'n'$.

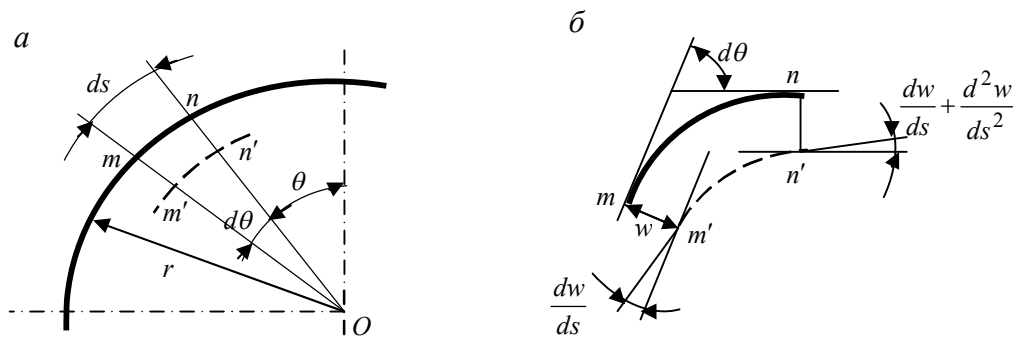


Рисунок 9.19

При цьому грані елемента зазнають поворотів та лінійних зміщень вздовж радіуса та вздовж дотичної (рис. 9.19, б). Переміщення вздовж дотичної не спричиняють згину. Радіальне переміщення w вважаємо додатним, якщо воно спрямовано до центра кривини. Внаслідок деформації переріз у т. m'

повернеться на кут $\frac{dw}{ds}$, а у т. n' - на кут $\frac{dw}{ds} + \frac{d}{ds}\left(\frac{dw}{ds}\right)ds = \frac{dw}{ds} + \frac{d^2w}{ds^2}ds$.

Отже, кут між цими перерізами зміниться на величину $\frac{d^2w}{ds^2}ds$.

Початкова кривина осі становить

$$\frac{1}{r} = \frac{d\theta}{ds}, \quad (9.39)$$

а після втрати стійкості

$$\frac{1}{r_1} = \left(d\theta + \frac{d^2w}{ds^2}ds \right) / ds_1, \quad (9.40)$$

де ds_1 – довжина осі елемента у суміжному стані.

Оскільки деформації малі, сектори mOn та $m'On'$ на рисунку 9.19, а можна вважати подібними. Отже маємо $\frac{ds}{r} = \frac{ds_1}{r-w}$, звідси $ds_1 = \left(1 - \frac{w}{r}\right)ds$.

Підставляючи ds_1 у (9.40), одержимо:

$$\frac{1}{r_1} = \left(\frac{d\theta}{ds} + \frac{d^2w}{ds^2} \right) / \left(1 - \frac{w}{r}\right). \quad (9.41)$$

З урахуванням (9.39) та (9.41) зміна кривини осі елемента буде такою:

$$\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r} = \left(\frac{d\theta}{ds} + \frac{d^2w}{ds^2} \right) / \left(1 - \frac{w}{r}\right) - \frac{d\theta}{ds} = \left(\frac{d^2w}{ds^2} + \frac{w}{r^2} \right) \frac{r}{r-w}.$$

Нехтуючи у знаменнику величиною переміщення w порівняно з радіусом r , одержимо:

$$\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r} = \frac{d^2w}{ds^2} + \frac{w}{r^2}. \quad (9.42)$$

Підставляючи (9.42) у (9.38), одержимо диференціальне рівняння згину кривого бруса, окресленого за дугою кола:

$$\frac{d^2 w}{ds^2} + \frac{w}{r^2} = \frac{M}{EI}$$

або, переходячи до полярних координат

$$\frac{dw}{ds} = \frac{dw}{d\theta} \frac{d\theta}{ds}; \quad \frac{d^2 w}{ds^2} = \frac{d}{ds} \left(\frac{dw}{ds} \right) = \frac{d^2 w}{d\theta^2} \left(\frac{d\theta}{ds} \right)^2 = \frac{1}{r^2} \frac{d^2 w}{d\theta^2},$$

одержимо співвідношення

$$\frac{d^2 w}{d\theta^2} + w = -\frac{M r^2}{EI}, \quad (9.43)$$

що є диференціальним рівнянням згину кривого бруса при втраті стійкості.

9.5.2 Стійкість двохарнірної арки

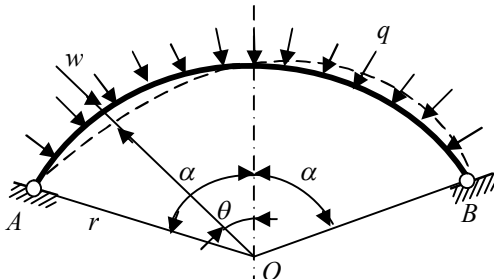


Рисунок 9.20

У висхідному стані при дії рівномірно розподіленого радіального навантаження q перерізи арки зазнають осьового стиску силою $N = q r$. Як показують дослідження, втрата стійкості відбувається за кососиметричною формою (штрихова лінія на рисунку 9.20). При цьому у перерізах арки виникають згинаючі

моменти $M = N w = q r w$.

З урахуванням цього диференціальне рівняння (9.43) набуває такого вигляду:

$$\frac{d^2 w}{d\theta^2} + n^2 w = 0, \quad (9.44)$$

де $n^2 = 1 + \frac{q r^3}{EI}$. (9.45)

Записуючи розв'язок цього рівняння: $w = C_1 \cos n\theta + C_2 \sin n\theta$, використаємо граничні умови:

$$\text{при } \theta = 0 \quad w = 0, \quad \text{при } \theta = \alpha \quad w = 0.$$

З першої умови одержимо $C_1 = 0$, а друга приводить до співвідношення

$$C_2 \sin n\alpha = 0.$$

Маючи на увазі, що $C_2 \neq 0$, одержимо нескінченну кількість розв'язків: $\sin n\alpha = 0$, тобто $n\alpha = 0, \pi, 2\pi, \dots$. Відкидаючи нульовий розв'язок, який відповідає висхідній формі рівноваги, беремо найменший корінь - $n\alpha = \pi$. Тепер з (9.45) одержимо:

$$\frac{\pi^2}{\alpha^2} = 1 + \frac{qr^3}{EI},$$

звідки знаходимо критичне навантаження:

$$q_{kp} = \frac{EI}{r^3} \left(\frac{\pi^2}{\alpha^2} - 1 \right). \quad (9.46)$$

Зокрема для арки, окресленої за півколом ($\alpha = \pi/2$), маємо:

$$q_{kp} = 3EI/r^3. \quad (9.47)$$

9.5.3 Стійкість безшарнірної арки

Безшарнірна арка (рис. 9.21, а), як і двошарнірна, втрачає стійкість за кососиметричною формою. На відміну від двошарнірної, у опорних перерізах безшарнірної арки виникають моменти M_0 . Тоді безшарнірну арку можна розглядати як двошарнірну, завантажену додатково до розподіленого навантаження ще й моментами M_0 на опорах (рис. 9.21, б). Еюра згинаючих моментів від цих опорних моментів наведена на рисунку 9.21, в.

Отже, додатково до моменту від навантаження q у перерізі суміжного стану на відстані $r \sin \theta$ від осі симетрії діє згинаючий момент $M_0 \frac{\sin \theta}{\sin \alpha}$, а повний згинаючий момент буде таким:

$$M = qrw - M_0 \frac{\sin \theta}{\sin \alpha}$$

Тепер диференціальне рівняння (9.46) набуває такого вигляду:

$$\frac{d^2 w}{d\theta^2} + n^2 w = C \sin \theta, \quad (9.48)$$

$$\text{де } n^2 = 1 + \frac{qr^3}{EI}; \quad C = \frac{M_0 r^2}{EI \sin \alpha}.$$

Розв'язок цього рівняння має такий вигляд:

$$w = C_1 \cos n\theta + C_2 \sin n\theta + \frac{C \sin \theta}{n^2 - 1}.$$

Для визначення коефіцієнтів C_1, C_2, C запишемо граничні умови:

при $\theta = 0$ $w = 0$; для $\theta = \alpha$ $w = 0$;

при $\theta = \alpha$ $\frac{dw}{d\theta} = 0$.

З першої умови одержимо $C_1 = 0$, а з другого та третього випливає:

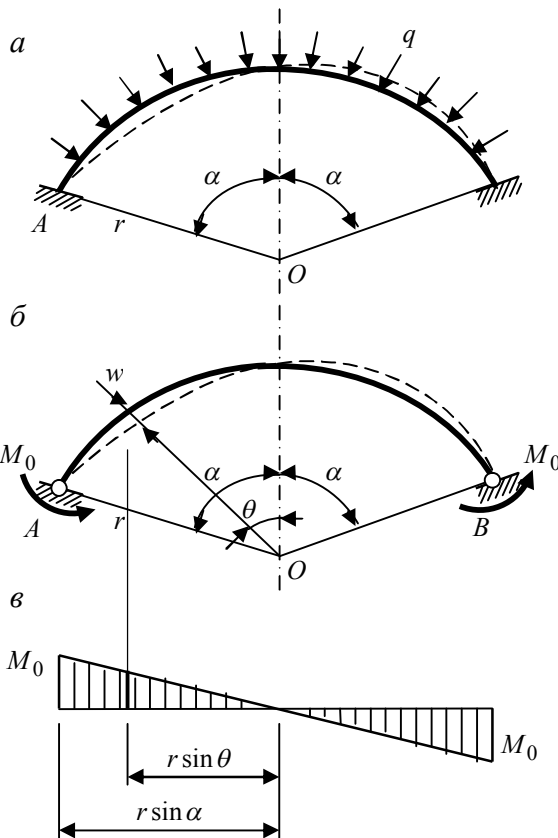


Рисунок 9.21

$$C_2 \sin n\alpha + \frac{C}{n^2 - 1} \sin \alpha = 0;$$

$$C_2 n \cos n\alpha + \frac{C}{n^2 - 1} \cos \alpha = 0.$$

Оскільки $C_2 \neq 0, C \neq 0$, прирівнюємо до нуля визначник одержаних рівнянь:

$$\begin{vmatrix} \sin n\alpha & \frac{\sin \alpha}{n^2 - 1} \\ n \cos n\alpha & \frac{\cos \alpha}{n^2 - 1} \end{vmatrix} = 0.$$

Розкриваючи визначник, з урахуванням $n^2 \neq 1$, приходимо до рівняння:

$$n \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} n\alpha = 1. \quad (9.49)$$

Розв'язання цього рівняння стійкості дає значення параметру n і, далі, за позначенням для n критичне навантаження $q_{кр}$.

Наприклад, для арки з $\alpha = 1$ рад. $n \approx 4,56$.

$$\text{Тоді } 4,56^2 = 1 + \frac{qr^3}{EI} \text{ і } q_{кр} = 19,8 \frac{qr^3}{EI}.$$

9.5.4 Стійкість тришарнірної арки

Для тришарнірної арки (рис. 9.22) необхідно розглядати як симетричну, так і кососиметричну форми втрати стійкості.

При кососиметричній втраті стійкості згин здійснюється так само, як у двошарнірній арці. Тому відповідне критичне навантаження може бути обчислено за формулою (9.46).

При симетричній формі втрати стійкості рівняння стійкості набуває такого вигляду:

$$4\eta_1(u) = \eta_1(\alpha). \quad (9.50)$$

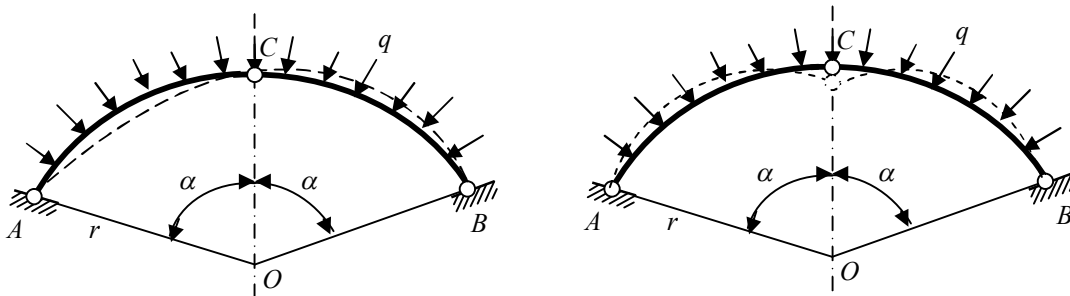


Рисунок 9.22

Тут $\eta_1(u) = \frac{u^3}{3 \operatorname{tg}(u) - u}$ – функція, що використовується у розрахунках рам на стійкість.

Після визначення кореня u рівняння (9.50) критичне навантаження для симетричної форми втрати стійкості обчислюється так:

$$q_{кр} = \frac{EI}{r^3} \frac{4u^2 - \alpha^2}{\alpha^2}. \quad (9.51)$$

Остаточное критическое нагружение для трехшарнирной арки меньше из полученных по (9.46) и (9.51).

9.6 Примеры расчета на устойчивость прямых стержней

Пример 9.6.1. Определить критическую силу для консольного стержня длиной 3 м, изготовленного из двутавра № 20.

Решение. Исходя из предположения, что стержень теряет устойчивость в упругой стадии работы материала, воспользуемся формулой Эйлера:

$$F_{кр}^E = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{(\mu l)^2} = \frac{\pi^2 \cdot 2 \cdot 10^8 \cdot 115 \cdot 10^{-8}}{(2 \cdot 3)^2} = 63,0 \text{ кН},$$

где $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа} = 2 \cdot 10^8 \text{ кПа}$ – модуль упругости стали;
 $I_{\min} = 115 \text{ см}^4 = 115 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4$ – минимальный момент инерции сечения двутавра № 20;
 $\mu = 2$ – коэффициент приведения длины для консольного стержня (см. теоретический материал, п. 9.3.3, рис. 9.10).

Проверяем величину критических напряжений:

$$\sigma_{кр} = \frac{F_{кр}}{A} = \frac{63,0}{26,5} = 2,38 \text{ кН / см}^2 = 23,8 \text{ МПа},$$

где $A = 26,5 \text{ см}^2$ – площадь сечения двутавра № 20.

Поскольку критические напряжения не превышают предела пропорциональности стали $\sigma_{тц} = 260 \text{ МПа}$, стержень действительно теряет устойчивость в упругой стадии работы и $F_{кр} = 63 \text{ кН}$.

Пример 9.6.2 Определить критическую силу стержня постоянного сечения, приведенного на рисунке 9.23, а.

Решение. При одинаковых прогонах стержня деформированная схема является синусоидой с нулевыми точками на опорах, отсюда каждый прогон при потере устойчивости работает как отдельный стержень с шарнирными закреплениями концов (рис. 9.23, б).

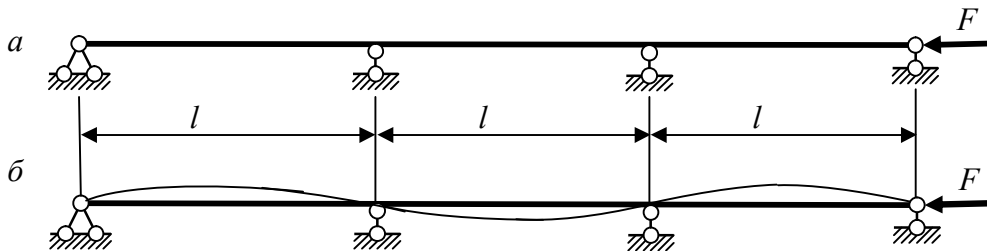


Рисунок 9.23

Отсюда, критическую силу всего стержня можно вычислить по формуле Эйлера, как для отдельного стержня длиной l с коэффициентом приведения длины

$$\mu=1: F_{кр} = \frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2} = \frac{\pi^2 EI}{l^2}$$

Приклад 9.6.3. Визначити критичне навантаження у системі, наведеній на рисунку 9.24, а.

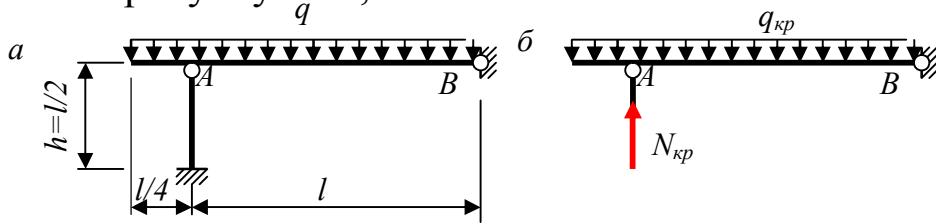


Рисунок 9.24

Розв'язання. Система являє собою балку AB , яка у т. A має шарнірну нерухому опору, а у т. B шарнірно зв'язана з пружним стержнем. Оскільки зближення кінців стержня при згині нехтують, балка зазнає лише згину, а пружний стержень – центрального стиску як стержень з одним жорстким, а іншим шарнірним кінцями. У такому випадку для вертикального стержня маємо:

$$N_{кр} = \frac{\pi^2 EI}{(\mu h)^2} = \frac{\pi^2 EI}{(0.7l/2)^2} = 25.63 \frac{EI}{l^2}.$$

Розрізавши опорний стержень, розглядаємо рівновагу балки AB під дією критичної сили $N_{кр}$ та відповідно критичного навантаження (рис 9.24, б):

$$\sum M_A = 0; N_{кр} l - q_{кр} \frac{3l}{4} \frac{3l}{8} = 0,$$

звідки $q_{кр} = \frac{32}{9l} \cdot 25.63 \frac{EI}{l^2} = 91.1 \frac{EI}{l^3}.$

Запитання для самоконтролю

1. Який напружений стан має місце у кільцях та, арках окреслених за дугою кола під дією радіального стискуючого навантаження?
2. Який вигляд має диференціальне рівняння згину кривого бруса?
3. За якою формою втрачає стійкість двохарнірна арка? Інші арки?

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Баженов В. А. Будівельна механіка. Комп'ютерні технології ; за заг. ред. д-ра техн. наук проф. В. А. Баженова / В. А. Баженов, А. В. Перельмутер, О. В. Шишов. – Київ: Каравела, 2009. – 696 с.
2. Шутенко Л. М. Механіка споруд / Л. М. Шутенко, В. П. Пустовойтов, М. А. Засядько, Харків : ХДАМГ, 2001. – 234 с.
3. Шутенко Л. Н. Строительная механика: Краткий курс / Раздел 1: Статически определимые системы / Л. Н. Шутенко, В. П. Пустовойтов, Н. А. Засядько. – Харьков: ХГАГХ, 2003. – 90 с.
4. Строительная механика ; под ред. Ю. И. Бутенко. – Київ: Вища школа, 1989. – 479 с.
5. Строительная механика. Стержневые системы: учебник для вузов ; под ред. А. Ф. Смирнова / А. Ф. Смирнов, А. В. Александров, Б. Я. Лащеников, Н. Н. Шапошников. – М. : Стройиздат, 1981. – 512с.
6. Баженов В. А. Будівельна механіка. Розрахункові вправи. Задачі. Комп'ютерне тестування: навч. посібник / В. А. Баженов. – Київ: Каравела, 2010.
7. Чихладзе Э. Д. Строительная механика: учебник для студентов высших учебных заведений / Э. Д. Чихладзе. – Харьков: УкрГАЗТ, 2004. – 305 с.
8. Сопротивление материалов ; под общей ред. акад. АН УССР Г. С. Писаренко. – Київ: Вища школа, 1973. – 672 с.

Навчальне видання

ШПАЧУК Володимир Петрович

ЗАСЯДЬКО Микола Андрійович

РУБАНЕНКО Олександр Ігоревич

ЧУПРИНІН Олександр Олексійович

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

БУДІВЕЛЬНА МЕХАНІКА

*(для студентів 3 курсу денної форми навчання
галузі знань 19 – Архітектура та будівництво)*

Відповідальний за випуск *А. О. Гарбуз*

За авторською редакцією

Комп'ютерне верстання *Є. Г. Панова*

План 2019, поз. 81Л

Підп. до друку 08.06.2020. Формат 60×84/16.

Друк на ризографі. Ум. друк. арк. 10,3.

Тираж 50 пр. Зам. №

Видавець і виготовлювач:

Харківський національний університет
міського господарства імені О. М. Бекетова,
вул. Маршала Бажанова, 17, Харків, 61002

Електронна адреса: rectorat@kname.edu.ua

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи:

ДК № 5328 від 11.04.2017.