

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ  
БУДІВНИЦТВА І АРХІТЕКТУРИ

**РОЗРАХУНОК СТАТИЧНО  
НЕВИЗНАЧУВАНИХ РАМ  
МЕТОДОМ СИЛ**

Методичні вказівки

до виконання розрахунково-графічної роботи  
для студентів спеціальності 192 «Будівництво та цивільна інженерія»  
освітньої програми «Промислове і цивільне будівництво»

Київ 2024

УДК 624.01/07

P64

Укладачі: Ю.В. Максим'юк, д-р техн. наук, професор;

В.П. Андрієвський, канд. техн. наук, доцент;

А.А. Козак, канд. техн. наук, доцент;

Рецензент: Г.М. Іванченко, д-р техн. наук, професор

Відповідальний за випуск: П.П. Лізунов, д-р техн. наук, професор

*Затверджено на засіданні кафедри будівельної механіки,  
протокол №2 від 20 вересня 2023 року.*

В авторській редакції.

**Розрахунок** статично невизначуваних рам методом сил:  
методичні вказівки до виконання розрахунково-графічної роботи  
P64 / уклад.: Ю.В. Максим'юк, В.П. Андрієвський, А.А. Козак. – Київ:  
КНУБА, 2024. – 44 с.

Методичні вказівки складаються з коротких теоретичних відомостей, в яких висвітлений теоретичний матеріал; прикладів виконання розрахунку статично невизначуваних систем методом сил з поетапними поясненнями і рисунками.

Призначено для студентів спеціальності 192 «Будівництво та цивільна інженерія» освітньої програми «Промислове і цивільне будівництво».

© КНУБА, 2024

## ЗМІСТ

Загальні положення .....	4
Короткі теоретичні відомості .....	5
Приклад 1. Розрахунок статично невизначуваної рами.....	18
Приклад 2. Розрахунок симетричної статично невизначуваної рами.....	38
Список літератури .....	44

## Загальні положення

Однією з фундаментальних дисциплін, які необхідні для якісної підготовки спеціалістів у будівельній галузі є будівельна механіка, оскільки вона вивчає методи розрахунків будівель і споруд на міцність, жорсткість і стійкість. Базуючись на отриманих раніше знаннях з вищої математики, фізики, теоретичної механіки та опору матеріалів, будівельна механіка знайомить студентів з основними підходами розрахунку конструкцій будівель і споруд на дію статичних навантажень і динамічних впливів.

Для розуміння принципів розрахунку будівельних конструкцій студентам необхідно прослухати курс лекцій, пройти курс практичних занять з будівельної механіки та виконати розрахунково-графічні роботи (РГР). Методичні вказівки «Розрахунок статично невизначуваних рам методом сил» розроблені для допомоги здобувачам при виконанні однойменної РГР, пояснення алгоритму та принципів розрахунку. Також допомогти студенту краще засвоїти матеріал може навчальна література [1-5] з будівельної механіки, яка висвітлює важливі аспекти розрахунку конструкцій.

Мета цих методичних вказівок – допомогти студентам у виконанні розрахунково-графічної роботи (РГР) «Розрахунок статично невизначуваної рами методом сил».

Завдання складається з статично невизначуваної рами для якої задані геометричні розміри та прикладене навантаження. Потрібно визначити ступінь статичної невизначуваності, вибрати розрахункову основну систему методу сил, записати системи канонічних рівнянь методу сил з поясненням фізичного змісту її складових. Накреслити рисунки одиничних і вантажного станів, виконати статичний розрахунок для кожного зі станів, визначити коефіцієнти і вільні члени системи канонічних рівнянь та перевірити їх значення, розв'язати систему канонічних рівнянь, перевірити розв'язок. Визначити дійсні зусилля. Побудувати епюри  $M$ ,  $N$ ,  $Q$ . Знайти опорні реакції за епюрами внутрішніх зусиль, перевірити рівновагу окремих вузлів і всієї конструкції.

Розрахунково-графічну роботу необхідно оформляти охайно на аркушах паперу формату А4. Титульний лист є першим аркушем роботи. В РГР після титульного листа вкладається видане завдання, після чого всі аркуші роботи скріпляються з лівого боку двома скобами.

## Короткі теоретичні відомості

Одним із класичних методів розрахунку статично невизначуваних систем є метод сил, який особливо широко використовується при розрахунку рам. Використовуючи цей метод статично невизначувана система, що розраховується, шляхом відкидання надлишкових в'язей замінюється статично визначуваною, яка може бути розрахована за допомогою рівнянь рівноваги. Така система і є основною системою методу сил.

### *Визначення ступеня статичної невизначеності*

Основною характеристикою статично невизначуваних систем є *ступінь статичної невизначуваності*, який характеризує кількість «зайвих» або надлишкових в'язей.

Ступінь статичної невизначуваності може бути обчислений за формулою Чебишова. Проте для практичних розрахунків існує зручніша формула:

$$n = 3k - m. \quad (1)$$

У цій формулі  $n$  – ступінь статичної невизначуваності плоскої стержневої системи,  $m$  – кількість простих шарнірів,  $k$  – число замкнених контурів в схемі, яке визначається кількістю ділянок, на які розподіляє площину розрахункова схема споруди.

Бувають випадки, коли формулою (1) скористатись важко або навіть неможливо. В таких випадках ступінь статичної невизначуваності схеми можна обчислити згідно формули Чебишова, виразивши

$$n = -\Gamma = -(3D + 2B - 3\Pi - 2Ш - C - 3).$$

У цій формулі  $\Gamma$  – ступінь геометричної змінюваності системи,  $D$  – кількість простих дисків, включаючи опорний диск,  $B$  – кількість вузлів в'язей,  $\Pi$  – кількість простих припайок,  $Ш$  – кількість простих шарнірів,  $C$  – кількість простих в'язей, 3 (три) – число ступенів вільності всієї плоскої розрахункової схеми як твердого тіла в її площині.

Розглянемо декілька задач визначення ступеня статичної невизначуваності плоскої стержневої системи.

*Задача 1.* Визначити ступінь статичної невизначуваності рами, приведеної на рис. 1,а.

Рама має три замкнуті контури  $K_1$ ,  $K_2$ , і  $K_3$  (рис. 1,б). Шарнірно-рухома опора  $D$  еквівалентна двом шарнірам ( $Ш_1$ ,  $Ш_2$ ), прості шарніри

$A$  ( $\text{Ш}_3$ ) та  $B$  ( $\text{Ш}_4$ ), шарнір  $C$  з'єднує три стержня та дорівнює двом простим шарнірам ( $\text{Ш}_5, \text{Ш}_6$ ). Отже, загальне число шарнірів  $m = 6$ .

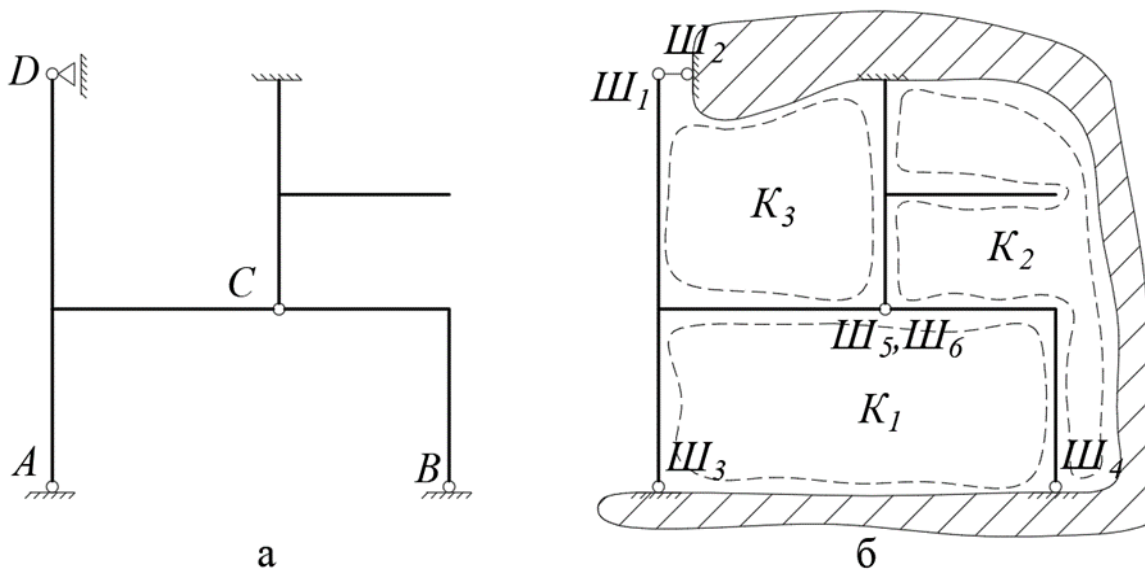


Рис. 1.

Ступінь статичної невизначуваності

$$n = 3k - m = 3 \cdot 3 - 6 = 3.$$

Рама тричі статично невизначувана.

Задача 2. Визначити ступінь статичної невизначуваності рами, приведеної на рис. 2,а.

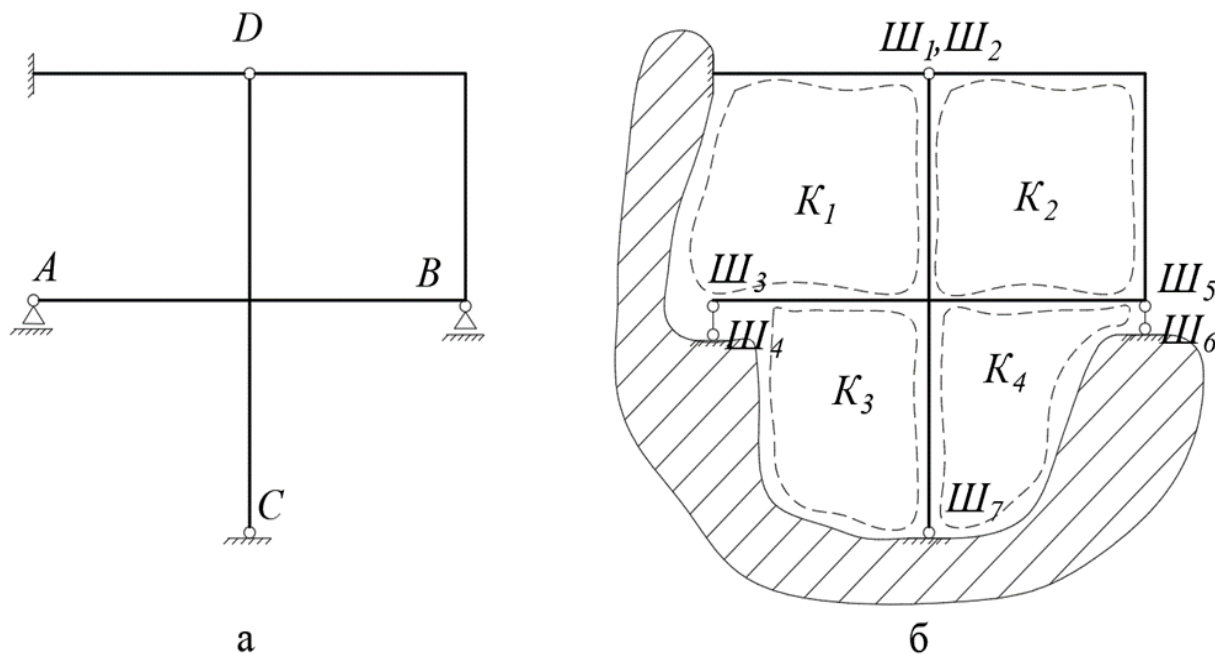


Рис. 2.

Рама має чотири замкнуті контури  $K_1, K_2, K_3$  і  $K_4$  (рис. 2,б). Загальне число простих шарнірів рами  $m = 7$  (шарнір  $D$  з'єднує три стержня та дорівнює двом простим шарнірам ( $Ш_1, Ш_2$ ), шарнірно-рухома опора  $A$  еквівалентна двом шарнірам ( $Ш_3, Ш_4$ ), шарнірно-рухома опора  $B$  - двом шарнірам ( $Ш_5, Ш_6$ ), простий шарнір  $C$  ( $Ш_7$ )).

Ступінь статичної невизначуваності

$$n = 3k - m = 3 \cdot 4 - 7 = 5.$$

Рама п'ять разів статично невизначувана.

*Вибір основної системи.*

Після встановлення ступеня статичної невизначуваності намічають можливі варіанти відкидання “зайвих” в'язей. Основна система методу сил виходить із заданої статично невизначеної системи шляхом видалення “зайвих” в'язей. Основною системою методу сил називають геометрично незмінювану і статично визначувану систему, яка одержана із заданої статично невизначуваної схеми відкиданням «зайвих» в'язей.

У статично невизначених рамах розрізняють абсолютно необхідні та умовно необхідні в'язі.

Абсолютно необхідними в'язями називають в'язі, відкидання принаймні однієї з яких перетворює задану статично невизначену раму на змінну. Відкидання цих в'язей при виборі основної системи неприпустимо.



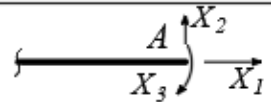
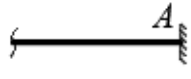
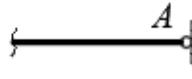
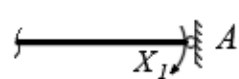
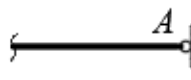
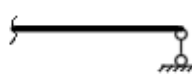
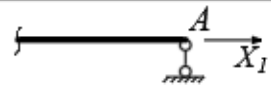
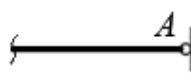

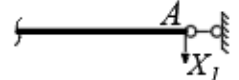
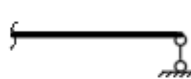
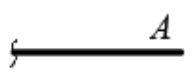
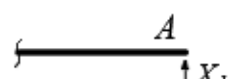
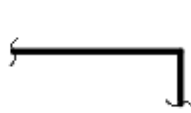
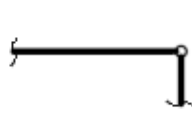
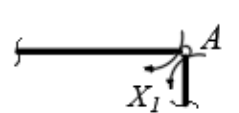
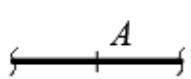
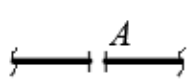
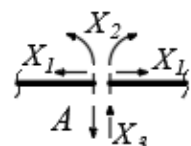
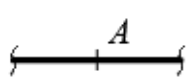
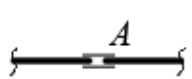
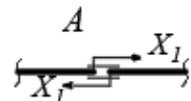
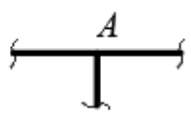
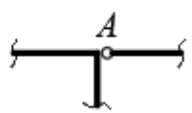
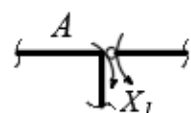
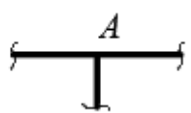
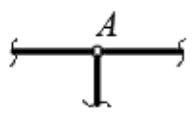
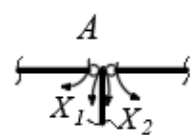
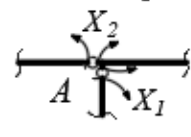
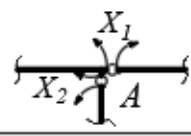
В'язі, видалення яких не перетворює задану раму в геометрично змінну, є умовно необхідними.

При визначенні основних систем допускається видаляти лише умовно необхідні в'язі.

Слід мати на увазі, що видалення одного стержня еквівалентне видаленню однієї кінематичної в'язі; постановка одного простого шарніра означає видалення однієї в'язі; постановка складного шарніра, еквівалентного “ $m$ ” простим шарнірам, означає видалення  $m$  в'язей, розріз стержня рами еквівалентний видаленню трьох в'язей.

В основній системі повинні виникати такі ж зусилля, як і в вихідній схемі. Тому до основної схеми замість видалених в'язей прикладаються зусилля, які виникали в них у вихідній схемі. Деякі приклади видалення в'язей та заміни їх зусиллями наведені в таблиці 1.

Таблиця 1

Вузли вихідної рами	Вузли основної системи, кількість відкинутих в'язей /C/	Зусилля, що замінюють видалені в'язі
	 $C=3$	
	 $C=1$	
	 $C=1$	
	 $C=1$	
	 $C=1$	
	 $C=1$	
	 $C=3$	
	 $C=1$	
	 $C=1$	
	 $C=2$	<p>або:</p>  <p>або:</p>  <p>або:</p> 



Розглянемо раму, показану на рис. 3,а. Вона тричі статично невизначена. В'язі в точках  $A$ ,  $B$  і  $C$  є абсолютно необхідними. На рис. 3,б показаний варіант основної системи отриманий введенням розрізу ригеля; на рис. 3,в – варіант основної системи, отриманий введенням трьох простих шарнірів.

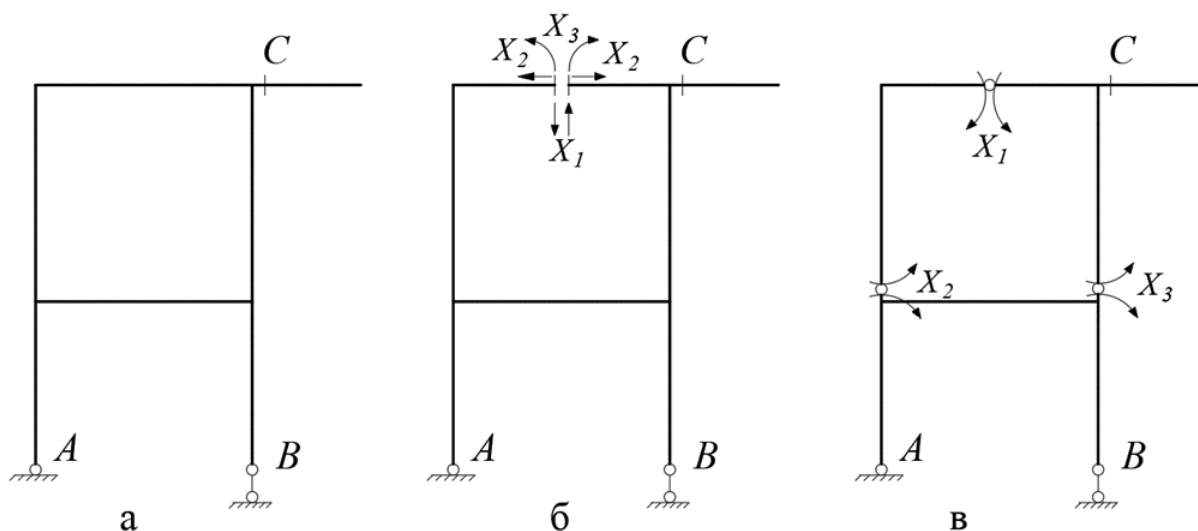


Рис. 3

Цей приклад показує, що для вихідної рами можна назначити декілька варіантів основних систем.

Кількість основних невідомих для конкретної вихідної рами є величиною постійною і не залежить від варіанту основної системи. Вона визначається тільки ступенем статичної невизначеності заданої рами. Разом з тим можна вибрати таку основну систему, в якій реалізація розрахунку призводить до значних спрощень. Зазначимо тут загальні вимоги, яким має задовольняти раціональна основна система:

а) Як правило, перевага віддається основним системам, отриманим із заданої рами шляхом постановки шарнірів. У такій основній системі епюри згинальних моментів мають простий вигляд та подальші обчислення значно спрощуються.

б) Із всіх можливих основних систем потрібно вибрати для розрахунку таку, в якій епюри згинальних моментів мають місцевий характер.

в) При розрахунку симетричних статично невизначених рам основні системи повинні бути по можливості симетричними.

Питання про вибір найбільш зручної основної системи вирішується з урахуванням порівняння можливих її варіантів. Слід розробити два-три

варіанти основної системи та вибрати той, по якому реалізація розрахунку очікується з меншою трудомісткістю.

*Задача 3.* Для статично невизначеної рами (рис. 4,а) вказати три можливих варіанти основних систем.

Ступінь статичної невизначуваності дорівнює

$$n = 3k - m = 3 \cdot 2 - 4 = 2.$$

Рама двічі статично невизначувана.

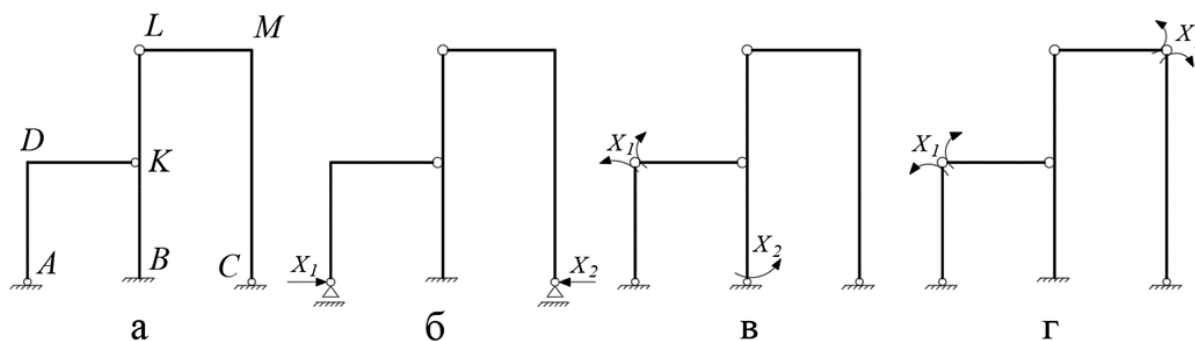


Рис.4

Якщо видалити горизонтальні в'язі в шарнірах  $A$  і  $C$ , що перешкоджають горизонтальним переміщенням цих точок, то основна система набуде вигляду, який показаний на рис. 4,б. Невідомі  $X_1, X_2$  у цьому випадку являють собою реакції в відкинутих горизонтальних в'язях. При виборі цієї основної системи ми відкинули зовнішні в'язі. Основна система на рис. 4,в отримана шляхом видалення як зовнішньої, так і внутрішньої в'язей. Можна також в якості основної системи прийняти систему, зображену на рис. 4,г, отриману шляхом видалення двох внутрішніх в'язей, що сприймають згинальні моменти в жорстких вузлах рами  $D$  і  $M$ . Невідомі  $X_1$  і  $X_2$  являють собою згинальні моменти по кінцях стержнів, що сходяться у вузлах  $D$  і  $M$ .

*Система канонічних рівнянь методу сил.*

Реакції відкинутих в'язей прикладаються до основної системи разом із заданими зовнішніми діями як сили, величини яких невідомі. У подальшому ці сили визначатимуться в першу чергу. Вони становлять *основні невідомі* задачі і позначаються символами  $X_1, X_2, \dots, X_n$ , де  $n$  – ступінь статичної невизначуваності задачі.



відкинутих «зайвих» в'язей, коефіцієнти – переміщення в основній системі в напрямі цих в'язей від дії одиничних основних невідомих. Коефіцієнти при невідомих називають *одиничними переміщеннями*, а вільні члени – *вантажними*.

Коефіцієнти системи канонічних рівнянь методу сил являють собою переміщення основної системи від дії основних невідомих. Для обчислення коефіцієнтів необхідно скористатися формулою Максвелла-Мора, яка для плоских систем має вигляд

$$\Delta_{ip} = \sum \int_l \frac{\bar{N}_i N_p}{EA} dx + \sum \int_l \frac{\bar{M}_i M_p}{EI} dx + \sum \int_l \frac{\eta \bar{Q}_i Q_p}{GA} dx.$$

Для різного типу розрахункових схем звичайно утримують лише деякі складові формули. Так, при розрахунку елементів, які переважно працюють на згин (балки, рами), утримується доданок, який залежить від згинальних моментів:

$$\delta_{ij} = \sum \int_l \frac{\bar{M}_i \bar{M}_j}{EI} dx, \quad \Delta_{ip} = \sum \int_l \frac{\bar{M}_i M_p}{EI} dx \quad (6)$$

Таким чином, для обчислення коефіцієнтів системи канонічних рівнянь необхідно визначити зусилля, які виникають у всіх елементах основної системи від дії зовнішнього навантаження, а також від дії кожного основного невідомого  $X_i=1$ .

У практичних розрахунках безпосереднє інтегрування замінюється чисельним з використанням *правила Верещагіна*, *формули Сімпсона-Корноухова*, формули прямокутників, трапецій тощо. Тому для подальшого розрахунку будуються епюри зусиль у статично визначуваній основній системі.

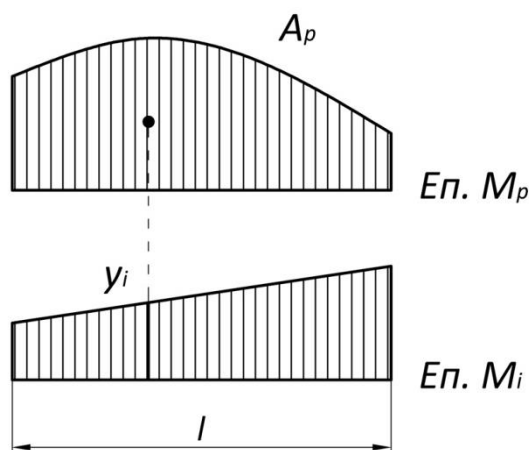


Рис. 5

За правилом Верещагіна для обчислення інтеграла Мора достатньо помножити площу епюри  $M_p$  на ординату епюри  $\bar{M}_i$  (рис.5), що береться під центром тяжіння епюри  $M_p$ :

$$\int_0^l \bar{M}_i M_p dx = A_p y_i.$$

При використанні правила Сімпсона-Корноухова для обчислення визначених інтегралів, інтервал інтегрування розкладається на дві ділянки (рис. 6), а формула має вигляд:

$$\int_0^l \bar{M}_i M_p dx = \frac{l}{6} (a_i a_p + 4c_i c_p + b_i b_p).$$

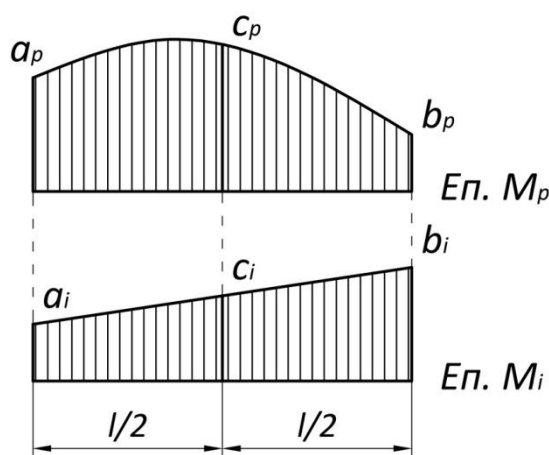


Рис. 6

При використанні формули Сімпсона-Корноухова необхідно, щоб обидві перемножувані епюри не мали зламів, розривів і точок перегину. В протилежному разі інтервал інтегрування треба розкласти на окремі підінтервали.

Розв'язок системи канонічних рівнянь (5) визначає величини основних невідомих, а саме – реакцій «зайвих» в'язей.

#### *Побудова дійсних епюр внутрішніх зусиль.*

Для визначення *дійсних зусиль* в елементах статично невизначуваної системи, що розраховується за методом сил існує два основних способи. Обидва з них ґрунтуються на тому, що епюри будуються не в заданій схемі, а в статично визначуваній основній системі, яка перебуває під дією заданих зовнішніх навантажень і реакцій відкинутих в'язей, які знайдено після розв'язання канонічних рівнянь.

Перший спосіб, який називають статичним, полягає в тому, що виконується звичайний статичний розрахунок основної системи від одночасної дії всіх сил включно з основними невідомими задачі. При цьому звичайними способами визначаються опорні реакції і будуються епюри зусиль або відшукуються їхні величини в характерних точках схеми.

Другий спосіб – це спосіб накладання. Він ґрунтується на принципі незалежності дій (принципі суперпозиції) і полягає в тому, що будь-яке зусилля, напруження або переміщення може бути одержано як сума цих величин від кожної дії окремо. На цій підставі можна записати

$$\begin{aligned} M_{\partial} &= \bar{M}_1 X_1 + \bar{M}_2 X_2 + \dots + \bar{M}_n X_n + M_p, \\ Q_{\partial} &= \bar{Q}_1 X_1 + \bar{Q}_2 X_2 + \dots + \bar{Q}_n X_n + Q_p, \\ N_{\partial} &= \bar{N}_1 X_1 + \bar{N}_2 X_2 + \dots + \bar{N}_n X_n + N_p. \end{aligned} \quad (7)$$

Під величинами  $\bar{M}_i$ ,  $\bar{Q}_i$ ,  $\bar{N}_i$  слід розуміти або зусилля в якомусь перерізі або епюри зусиль в основній системі, зумовлені дією одиничних основних невідомих.

У деяких випадках способом накладання епюр будується тільки дійсна епюра моментів. Епюру поперечних сил  $Q_{\partial}$  отримують по епюрі  $M_{\partial}$ , використовуючи диференційну залежність поперечних сил від згинальних моментів:

$$Q_{(x)} = \frac{dM_{(x)}}{dx}. \quad (8)$$

Поздовжні сили в стержнях рами визначаються в цьому випадку з умов рівноваги вузлів рами. До вузлів рами, що розглядаються, прикладаються діючі на них зовнішні навантаження, поперечні сили, що знайдені раніше та невідомі поздовжні зусилля. Потім складаються для цих вузлів рами рівняння рівноваги, з яких і визначаються поздовжні сили в стержнях рами. Рівновагу вузлів слід розглядати у такій послідовності, щоб у кожному вузлі було не більше двох невідомих поздовжніх сил.

Для перевірки правильності розрахунку будь-якої статично невизначуваної системи застосовують так звану *кінематичну перевірку*. Вона полягає в обчисленні переміщення, яке напевно дорівнює нулю. Такими переміщеннями у вихідній статично невизначуваній схемі є дійсні переміщення в напрямках існуючих в'язей

$$\Delta_{i\partial} = \sum \int_0^l \frac{\bar{M}_i M_{\partial}}{EI} dx = 0.$$

Таким чином, для перевірки правильності розрахунку статично невизначуваної системи достатньо в будь-якій основній системі методу сил визначити зусилля (наприклад, згинальний момент  $\bar{M}_i$ ) від дії будь-якого основного невідомого  $X_i=1$  і помножити їх за формулою Мора на дійсні зусилля (наприклад, згинальний момент  $M_0$ ). Якщо результат дорівнює нулю, то зусилля знайдено правильно.

Наприкінці розрахунків також варто виконати перевірку відповідності між епюрами  $M_0$  і  $Q_0$ , перевірити рівновагу всіх вирізаних вузлів системи і всієї рами в цілому. Величини і напрям опорних реакцій при цьому визначаються з дійних епюр.

#### *Спрощення при розрахунку симетричних рам.*

Розв'язання системи канонічних рівнянь методу сил (5) вимагає меншої затрати праці, коли більше число коефіцієнтів  $\delta_{ik}$  буде дорівнювати нулю. Коефіцієнти  $\delta_{ik}$ , обчислювані за формулою (6), будуть рівні нулю тоді, коли перемножуються симетричні та кососиметричні епюри одиничних згинальних моментів. А епюри згинальних моментів будуть симетричними (кососиметричними) в тому випадку, коли на симетричну раму діє симетричне (кососиметричне) навантаження. Так як навантаженням в одиничних станах є одиничні значення невідомих методу сил  $X_i$ , то для спрощення розрахунку симетричних статично невизначених рам мають виконуватися дві додаткових вимоги:

1. Основна система має бути симетричною.
2. Невідомі мають бути симетричними і кососиметричними.

Перша вимога задовольняється при виборі основної системи.

Друга вимога задовольняється в загальному випадку групуванням невідомих на симетричні та кососиметричні.

При цьому варто керуватися правилом: якщо видаляються дві симетрично розташовані в'язі, то замість них до основної системи варто прикласти два групових невідомих – симетричне і кососиметричне.

При виконанні вказаних вимог система “ $n$ ” канонічних рівнянь методу сил розпадається на дві незалежні системи алгебраїчних рівнянь. До однієї системи входять тільки симетричні, до другої – тільки кососиметричні невідомі. Хоча загальний порядок цих систем дорівнює “ $n$ ”, трудомісткість їх розв'язання різко знижується.

*Задача 4.* Для статично невизначеної рами (рис. 7,а) використати симетрію для спрощення розрахунку.

Ступінь статичної невизначуваності дорівнює

$$n = 3k - m = 3 \cdot 2 - 2 = 4.$$

Рама чотири рази статично невизначувана.

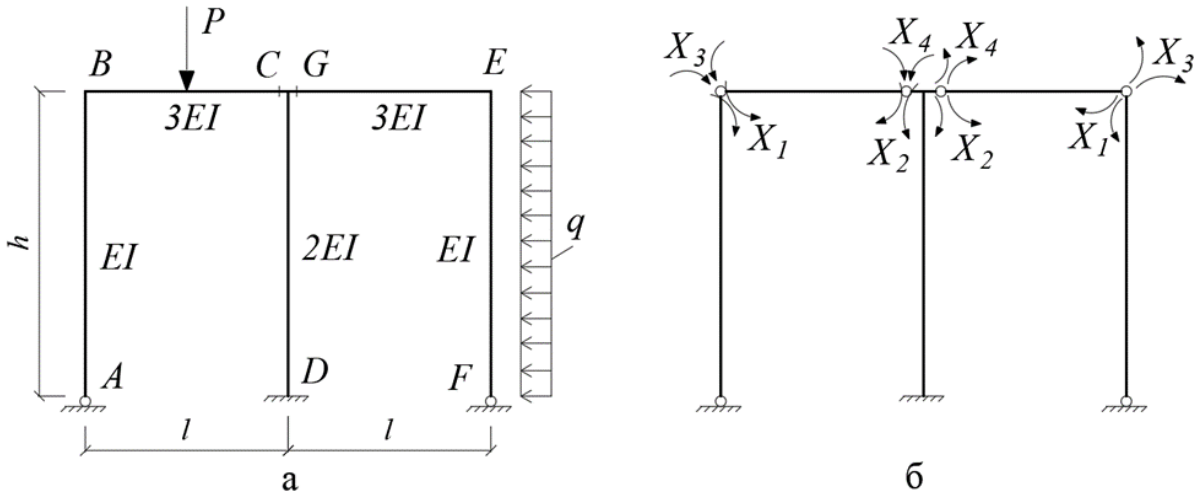


Рис. 7

Так як вихідна рама симетрична, то вибираємо симетричну основну систему (рис. 7,б).

Невідомі повинні бути симетричними і косиметричними. В симетричних точках  $B$  і  $E$  вводимо два простих шарніри, що еквівалентно прибиранню двох в'язей. Замість них до основної системи прикладаємо два невідомих зусилля – симетричну  $X_1$  і косиметричну  $X_3$ . Аналогічно в точках  $C$  і  $G$  вводимо прості шарніри та позначаємо невідомі  $X_2$  і  $X_4$ . Таким чином, кожним символом  $X_i$  позначена група зусиль, звідки і походить назва «групові невідомі».

Якщо зараз розглянути одиничні і вантажні стани основної системи, то виявиться, що епюри  $\bar{M}_1$  та  $\bar{M}_2$  будуть симетричні, епюри  $\bar{M}_3$  та  $\bar{M}_4$  – косиметричні, а епюра  $M_p$  – загального виду. Тоді коефіцієнти  $\delta_{13}$ ,  $\delta_{14}$ ,  $\delta_{23}$ ,  $\delta_{24}$ ,  $\delta_{31}$ ,  $\delta_{41}$ ,  $\delta_{32}$  і  $\delta_{42}$  рівні нулю, і система канонічних рівнянь методу сил буде мати вигляд:

$$\begin{aligned} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1p} &= 0; \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2p} &= 0; \\ \delta_{33}X_3 + \delta_{34}X_4 + \Delta_{3p} &= 0; \\ \delta_{43}X_3 + \delta_{44}X_4 + \Delta_{4p} &= 0. \end{aligned} \quad (9)$$

тобто вона розпадеться на дві незалежні системи рівнянь.



Подальше спрощення при розрахунку симетричних рам має місце, коли на раму діє симетричне (кососиметричне) зовнішнє навантаження. В такому випадку, якщо використовувати властивості симетричності основної системи і невідомих, кососиметричні (симетричні) невідомі рівні нулю.

Нехай, наприклад, на раму (рис. 7,а) діє симетричне навантаження (рис. 8). В такому випадку епюра  $M_P$  буде симетричною.

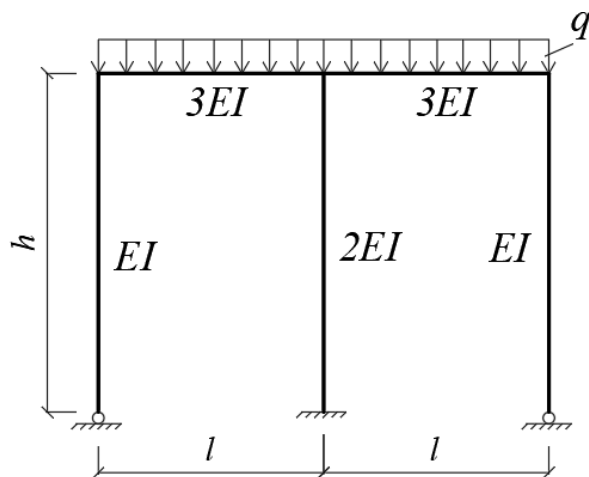


Рис.8

Використовуємо основну систему і невідомі, показані на рис. 7,б. Тоді система канонічних рівнянь буде мати вигляд (9), тільки вантажні члени  $\Delta_{3P}$  і  $\Delta_{4P}$  будуть рівними нулю, так як для їхнього обчислення необхідно помножити симетричну епюру  $M_P$  на кососиметричні епюри  $\bar{M}_3$  і  $\bar{M}_4$ .

У цьому випадку друга система рівнянь (9) стає однорідною

$$\begin{aligned} \delta_{33}X_3 + \delta_{34}X_4 &= 0; \\ \delta_{43}X_3 + \delta_{44}X_4 &= 0, \end{aligned}$$

і її розв'язання дає  $X_3 = 0$ ,  $X_4 = 0$ , тобто кососиметричні невідомі при діє симетричного навантаження виявились рівними нулю.

При розрахунку конкретних рам вводиться наскрізна нумерація всіх симетричних, а потім кососиметричних невідомих (або навпаки). Якщо зовнішні впливи, прикладені до вихідної рами, симетричні, то спочатку нумеруються симетричні, а потім кососиметричні невідомі. Якщо ж зовнішні впливи кососиметричні, то в першу чергу нумеруються кососиметричні невідомі.

## Приклад 1. Розрахунок статично невизначуваної рами

Розглянемо статично невизначувану раму (рис. 9).

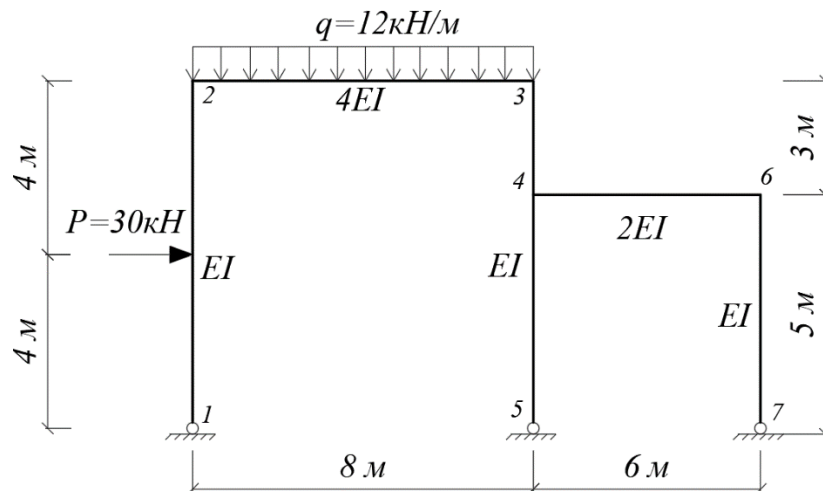


Рис. 9

### 1. Визначення ступеня статичної невизначуваності рами.

Ступінь статичної невизначуваності рами обчислимо за формулою (1)

$$n = 3k - u = 3 \cdot 2 - 3 = 3$$

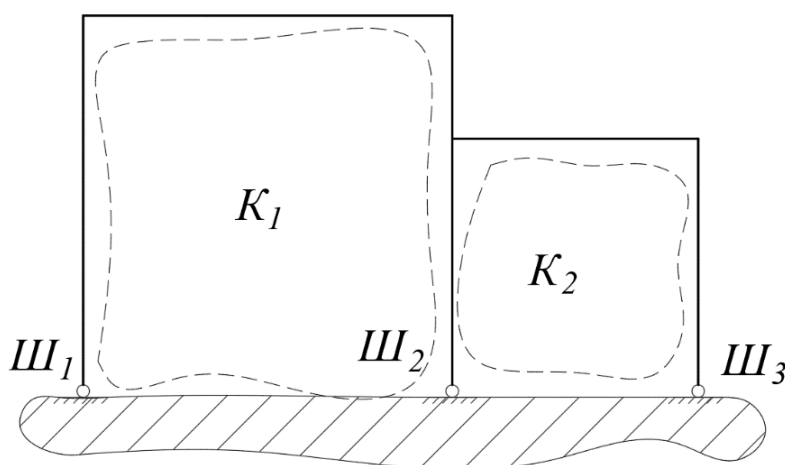


Рис. 10

Визначаємо, що вихідна рама є три рази статично невизначувана, оскільки має три «зайві» або надлишкові в'язі.

### 2. Вибір основної системи і основних невідомих.

Прибираючи три «заяві» в'язі, призначаємо основну систему методу сил для вихідної рами. Розглянемо три варіанти основних систем, що показані на рис. 11, а, б, в.

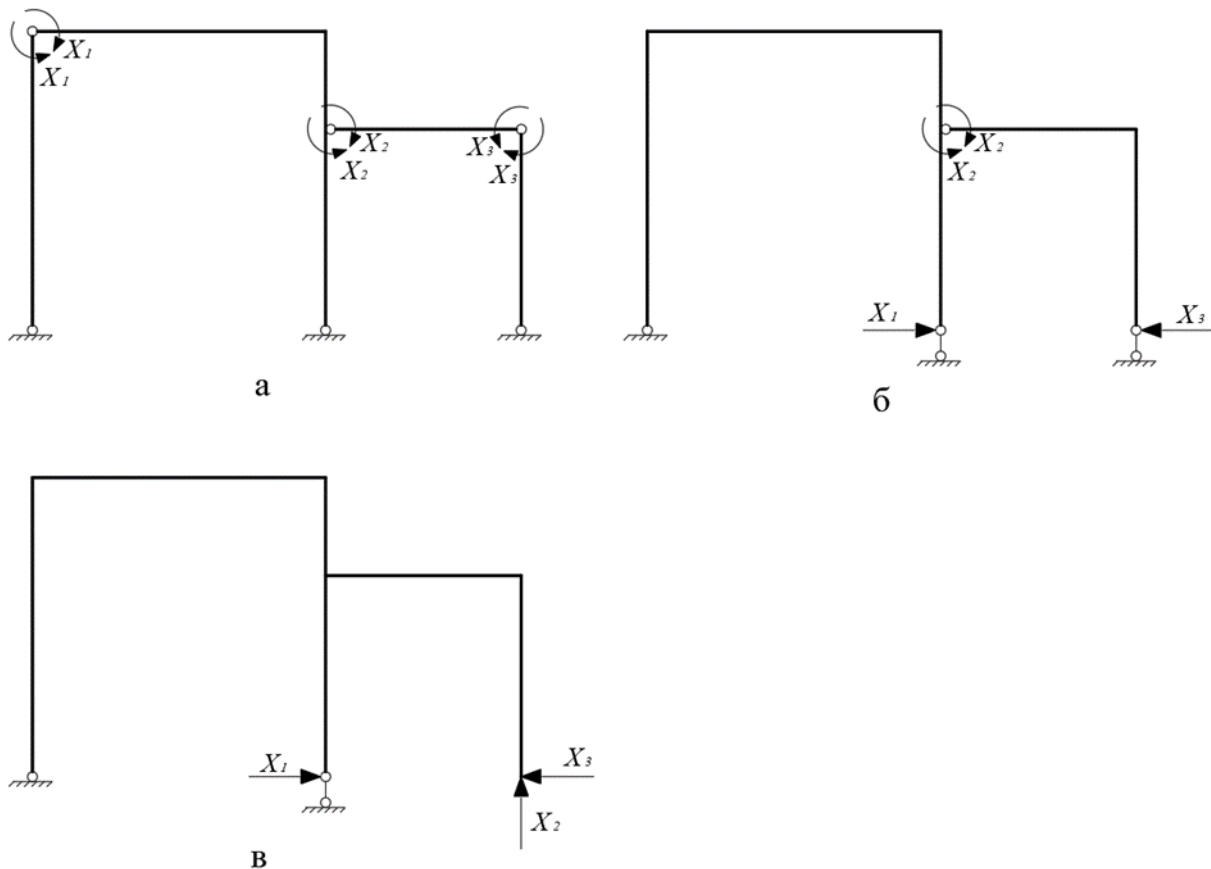


Рис. 11

В якості основної системи приймаємо варіант, що зображений на рис.11,а.

### 3. Система канонічних рівнянь методу сил.

Використовуючи загальну формулу (5), запишемо систему канонічних рівнянь методу сил

$$\begin{aligned} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{13}X_3 + \Delta_{1p} &= 0; \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{23}X_3 + \Delta_{2p} &= 0; \\ \delta_{31}X_1 + \delta_{32}X_2 + \delta_{33}X_3 + \Delta_{3p} &= 0. \end{aligned}$$

Для обчислення коефіцієнтів при невідомих  $\delta_{ik}$  ( $i, k = 1, 2, 3$ ) і вільних членів  $\Delta_{ip}$  ( $i=1, 2, 3$ ) будуються для основної системи рами епюри згинаючих моментів для першого (рис. 12), другого (рис. 16) і третього (рис. 20) одиничних станів та для вантажного стану (рис. 24).

### 4. Побудова епюр внутрішніх зусиль від дії одиничних навантажень.

4.1. Розрахунок рами від дії одиничного навантаження  $X_1=1$ .

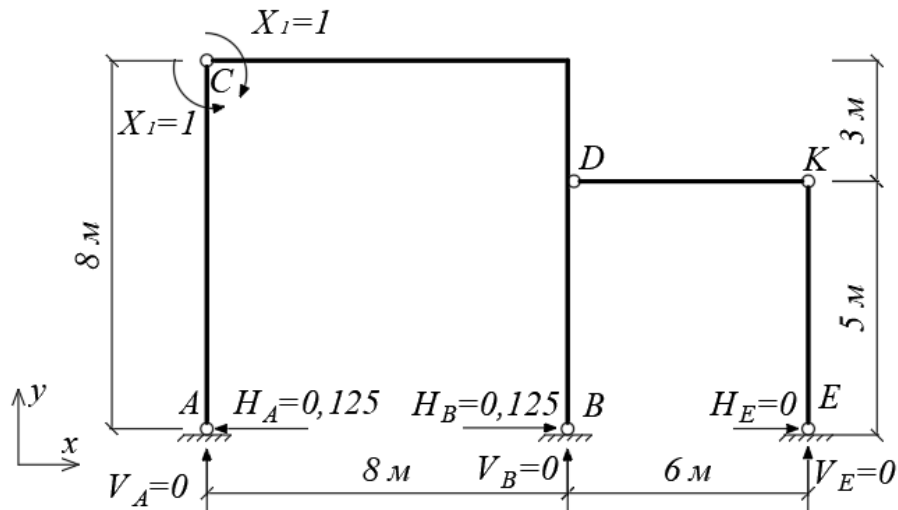


Рис. 12

Опорні реакції від дії  $X_1=1$  (рис. 12).

$$\sum M_K^{НИЖ} = 0 : H_E \cdot 5 = 0; H_E = 0.$$

$$\sum M_D^{ПРАВ} = 0 : V_E \cdot 6 = 0; V_E = 0.$$

$$\sum M_A = 0 : -V_B \cdot 8 - X_1 + X_1 = 0; V_B = 0.$$

$$\sum M_B = 0 : V_A \cdot 8 - X_1 + X_1 = 0; V_A = 0.$$

$$\sum M_C^{НИЖ} = 0 : H_A \cdot 8 - X_1 = 0; H_A = 1/8 = 0,125.$$

$$\sum M_C^{ПРАВ} = 0 : -H_B \cdot 8 + X_1 = 0; H_B = 1/8 = 0,125.$$

Перевірка:  $\sum F_x = 0 : 0,125 - 0,125 = 0$ .

Будуємо епюри згинальних моментів  $\bar{M}_1$ , поперечних  $\bar{Q}_1$  і поздовжніх сил  $\bar{N}_1$ .

Епюра згинальних моментів  $\bar{M}_1$  (рис. 13)

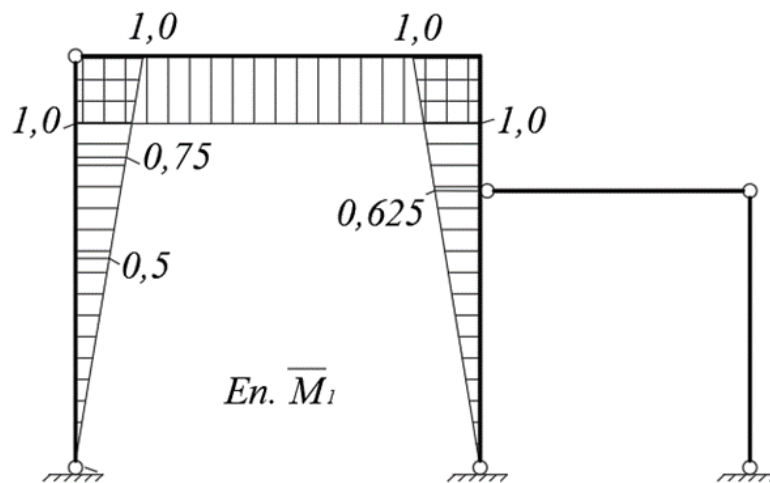


Рис. 13

Епюра поперечних сил  $\bar{Q}_1$  (рис. 14)

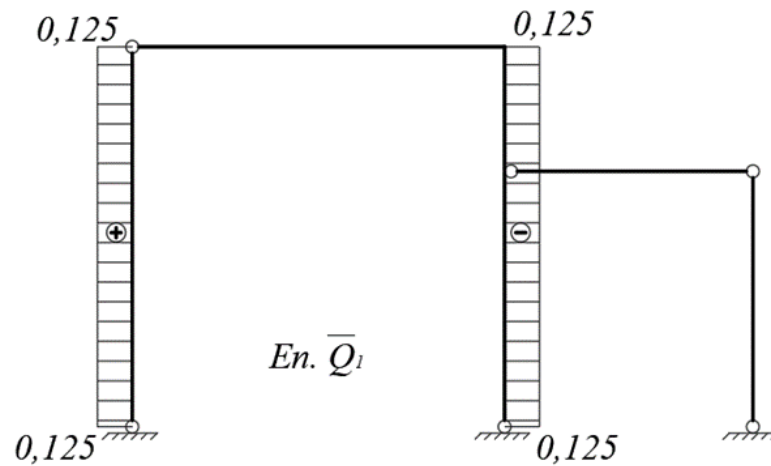


Рис. 14

Епюра поздовжніх сил  $\bar{N}_1$  (рис. 15)

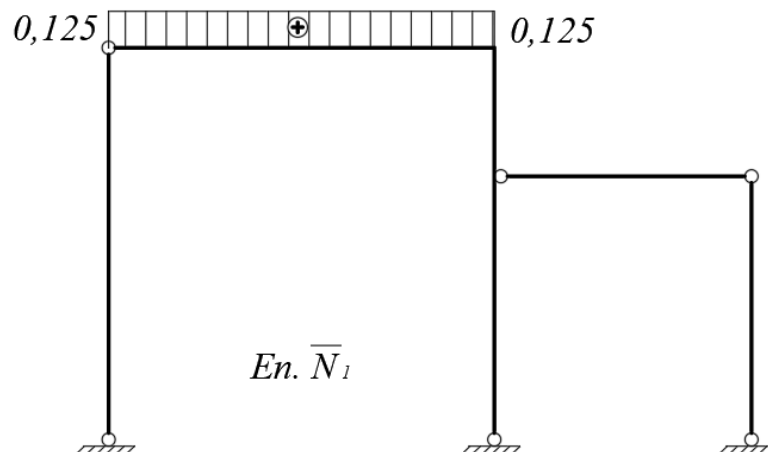


Рис. 15

4.2. Розрахунок рами від дії одиничного навантаження  $X_2=1$ .

Опорні реакції від дії  $X_2=1$  (рис. 16).

$$\sum M_k^{\text{ниж}} = 0: H_E \cdot 5 = 0; H_E = 0.$$

$$\sum M_D^{\text{прав}} = 0: V_E \cdot 6 - X_2 = 0; V_E = 0,167.$$

$$\sum M_A = 0: V_B \cdot 8 - X_2 + X_2 - V_E \cdot 14 = 0; V_B = 0,292.$$

$$\sum M_B = 0: V_A \cdot 8 - X_2 + X_2 - V_E \cdot 6 = 0; V_A = 0,125.$$

$$\sum M_c^{\text{ниж}} = 0: H_A \cdot 8 = 0; H_A = 0.$$

$$\sum F_x = 0: -H_A + H_B + H_E = 0; H_B = 0.$$

Перевірка:  $\sum F_y = 0: 0,125 - 0,292 + 0,167 = 0.$

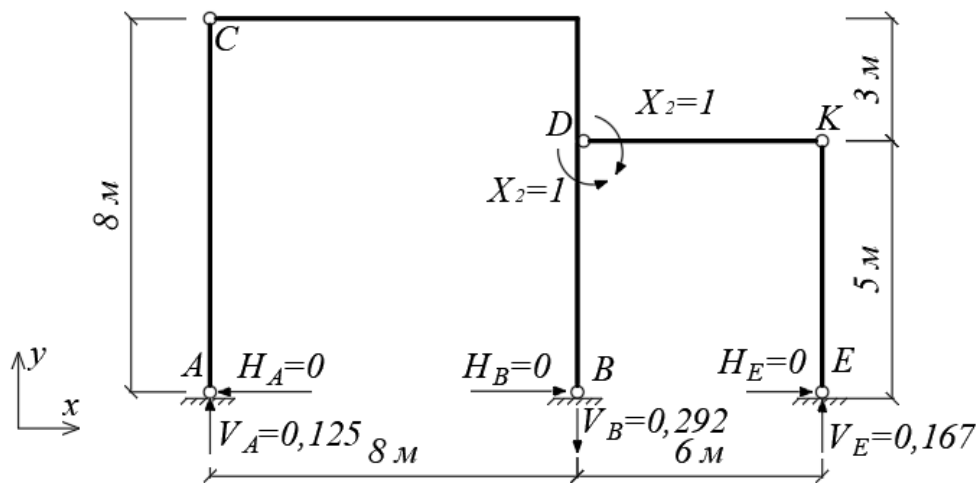


Рис. 16

Будуємо епюри згинальних моментів  $\bar{M}_2$ , поперечних  $\bar{Q}_2$  і поздовжніх сил  $\bar{N}_2$ .

Епюра згинальних моментів  $\bar{M}_2$  (рис. 17)

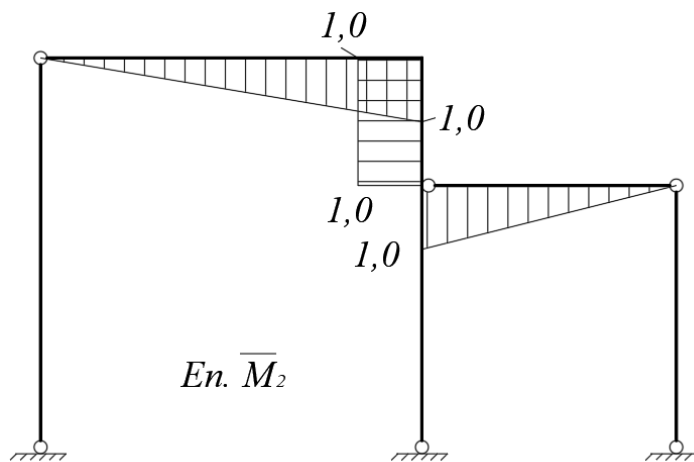


Рис. 17

Епюра поперечних сил  $\bar{Q}_2$  (рис. 18)

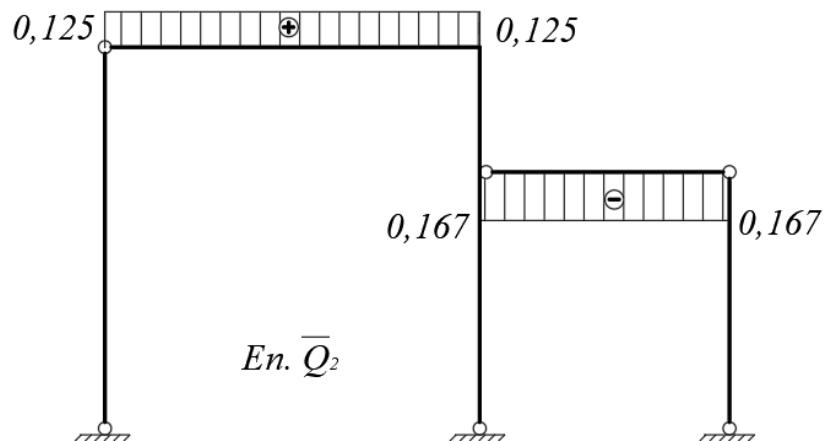


Рис. 18

Епюра поздовжніх сил  $\bar{N}_2$  (рис. 19)

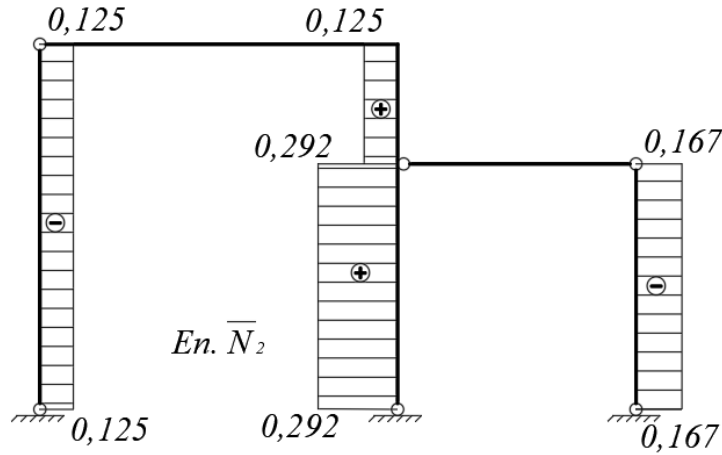


Рис. 19

4.3. Розрахунок рами від дії одиничного навантаження  $X_3=1$ .

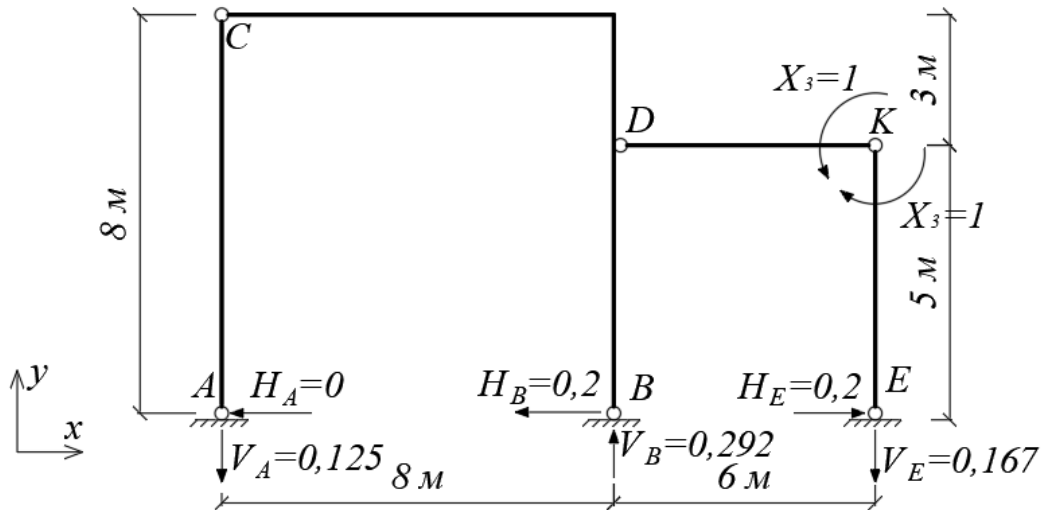


Рис. 20

Опорні реакції від дії  $X_3=1$  (рис. 20).

$$\sum M_K^{НИЖ} = 0: -H_E \cdot 5 + X_3 = 0; H_E = 0,2.$$

$$\sum M_D^{ПРАВ} = 0: V_E \cdot 6 - X_3 + X_3 - H_E \cdot 5 = 0; V_E = 0,167.$$

$$\sum M_A = 0: -V_B \cdot 8 - X_3 + X_3 + V_E \cdot 14 = 0; V_B = 0,292.$$

$$\sum M_B = 0: -V_A \cdot 8 - X_3 + X_3 + V_E \cdot 6 = 0; V_A = 0,125.$$

$$\sum M_C^{НИЖ} = 0: H_A \cdot 8 = 0; H_A = 0.$$

$$\sum F_x = 0: -H_A - H_B + H_E = 0; H_B = 0,2.$$

Перевірка:  $\sum F_y = 0: -0,125 + 0,292 - 0,167 = 0.$

Будуємо епюри згинальних моментів  $\bar{M}_3$ , поперечних  $\bar{Q}_3$  і поздовжніх сил  $\bar{N}_3$ .

Епюра згинальних моментів  $\bar{M}_3$  (рис. 21)

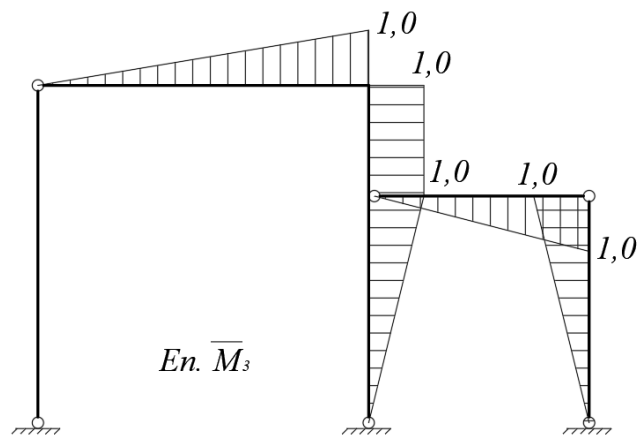


Рис. 21

Епюра поперечних сил  $\bar{Q}_3$  (рис. 22)

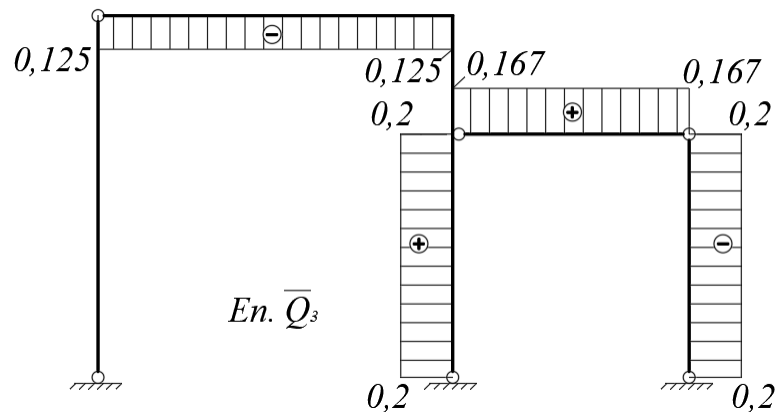


Рис. 22

Епюра поздовжніх сил  $\bar{N}_3$  (рис. 23)

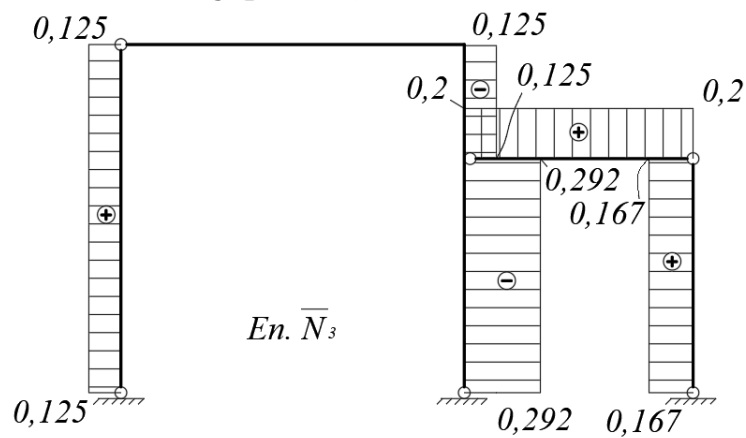


Рис. 23



5. Побудова епюри внутрішніх зусиль від дії заданих навантажень.

Розглянемо дію заданих зовнішніх навантажень на основну схему і побудуємо епюри  $M_p$ ,  $Q_p$ ,  $N_p$ .

5.1. Визначення опорних реакцій від дії зовнішніх навантажень (рис. 24).

$$\sum M_K^{НИЖ} = 0: H_E \cdot 5 = 0; H_E = 0.$$

$$\sum M_D^{ПРАВ} = 0: V_E \cdot 6 = 0; V_E = 0.$$

$$\sum M_A = 0: -V_B \cdot 8 + 30 \cdot 4 + 12 \cdot 8 \cdot 4 = 0; V_B = 63 \text{ кН.}$$

$$\sum M_B = 0: V_A \cdot 8 + 30 \cdot 4 - 12 \cdot 8 \cdot 4 = 0; V_A = 33 \text{ кН.}$$

$$\sum M_C^{НИЖ} = 0: H_A \cdot 8 - 30 \cdot 4 = 0; H_A = 15.$$

$$\sum F_x = 0: -H_A - H_B + 30 = 0; H_B = 15.$$

Перевірка:  $\sum F_y = 0: 33 - 12 \cdot 8 + 63 = 0.$

$$\begin{aligned} \sum M_D = 0: & 33 \cdot 8 + 15 \cdot 5 + 15 \cdot 5 - 30 \cdot 1 - 12 \cdot 8 \cdot 4 = \\ & = 414 - 414 = 0. \end{aligned}$$

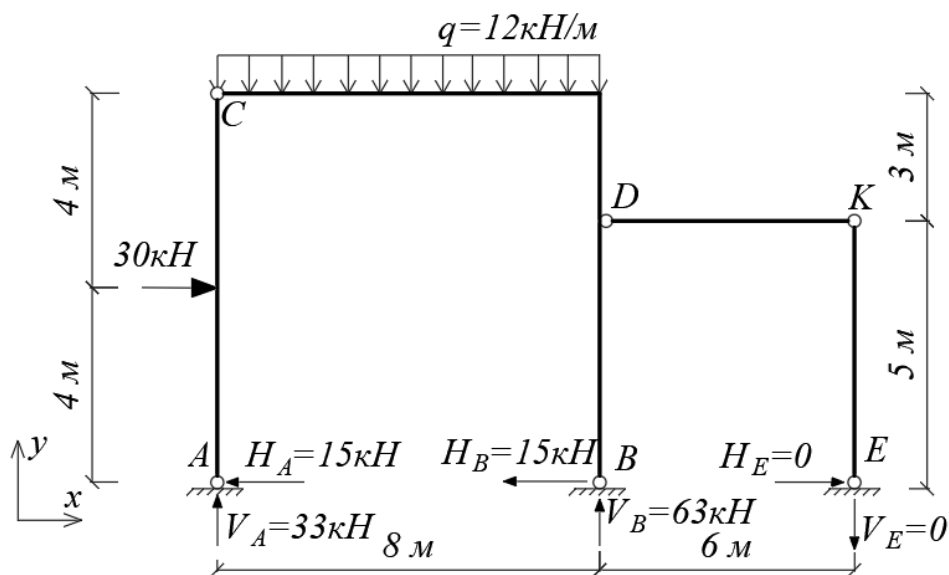


Рис. 24

Будуємо епюри згинальних моментів  $M_p$  поперечних  $Q_p$  і поздовжніх сил  $N_p$ .

*Епюра згинальних моментів  $M_p$  (рис. 25)*

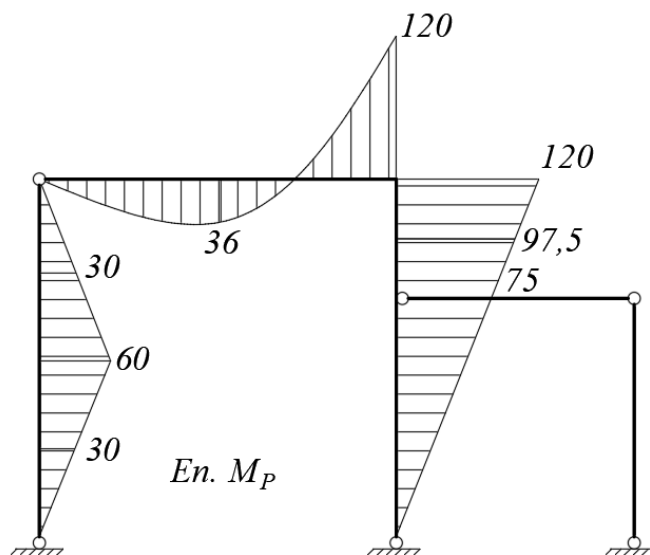


Рис. 25

Епюра поперечних сил  $Q_P$  (рис. 26)

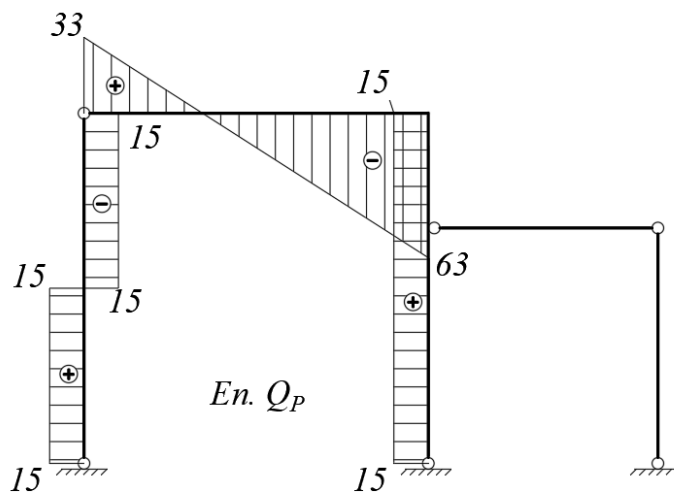


Рис. 26

Епюра поздовжніх сил  $N_P$  (рис. 27)

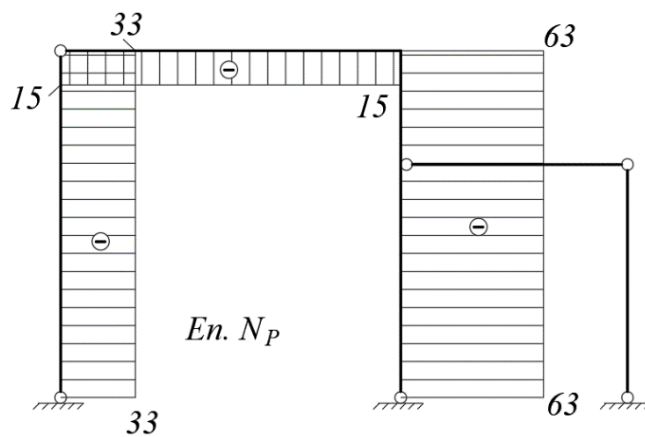


Рис. 27

6. Обчислення коефіцієнтів і вільних членів канонічних рівнянь.

Для визначення коефіцієнтів канонічних рівнянь  $\delta_{ik}$ ,  $\Delta_{ip}$  використаємо інтеграл Мора, для обчислення якого інтервал інтегрування розкладемо на ділянки, на кожній з яких, в залежності від вигляду епюри, застосуємо правило Верещагіна (рис. 5) або Сімпсона-Корноухова (рис. 6).

6.1. Коефіцієнт  $\delta_{11}$ .

Для визначення коефіцієнта  $\delta_{11}$  помножимо епюру  $\bar{M}_1$  (рис. 13) саму на себе, отримаємо

$$\delta_{11} = \sum \int_l \frac{\bar{M}_1 \bar{M}_1}{nEI} dx = \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 8 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{1}{4EI} \cdot 1 \cdot 8 \cdot 1 + \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 8 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{7.333}{EI}.$$

6.2. Коефіцієнт  $\delta_{12}$ , ( $\delta_{21} = \delta_{12}$ ).

Для визначення коефіцієнта  $\delta_{12}$  помножимо епюру  $\bar{M}_1$  (рис. 13) на епюру  $\bar{M}_2$  (рис. 17), отримаємо

$$\delta_{12} = \sum \int_l \frac{\bar{M}_1 \bar{M}_2}{nEI} dx = \frac{1}{4EI} \cdot 1 \cdot 8 \cdot 0.5 + \frac{1}{EI} \cdot 1 \cdot 3 \cdot 0.8125 = \frac{3.438}{EI}.$$
$$\delta_{21} = \delta_{12} = \frac{3.438}{EI}.$$

6.3. Коефіцієнт  $\delta_{13}$ , ( $\delta_{31} = \delta_{13}$ ).

Для визначення коефіцієнта  $\delta_{13}$  помножимо епюру  $\bar{M}_1$  (рис. 13) на епюру  $\bar{M}_3$  (рис. 21), отримаємо

$$\delta_{13} = \sum \int_l \frac{\bar{M}_1 \bar{M}_3}{nEI} dx = -\frac{1}{4EI} \cdot 1 \cdot 8 \cdot 0.5 - \frac{1}{EI} \cdot 1 \cdot 3 \cdot 0.8125 - \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 0.625 \cdot 5 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 = -\frac{4.480}{EI}.$$
$$\delta_{31} = \delta_{13} = -\frac{4.480}{EI}.$$

6.4. Коефіцієнт  $\delta_{22}$

Для визначення коефіцієнта  $\delta_{22}$  помножимо епюру  $\bar{M}_2$  (рис. 17) саму на себе, отримаємо

$$\delta_{22} = \sum \int_l \frac{\bar{M}_2 \bar{M}_2}{nEI} dx = \frac{1}{4EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 8 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{1}{EI} \cdot 1 \cdot 3 \cdot 1 +$$

$$+ \frac{1}{2EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{4.667}{EI}.$$

6.5. Коефіцієнт  $\delta_{23}$ , ( $\delta_{32}=\delta_{23}$ ).

Для визначення коефіцієнта  $\delta_{23}$  помножимо епюру  $\bar{M}_2$  (рис. 17) на епюру  $\bar{M}_3$  (рис. 21), отримаємо

$$\begin{aligned} \delta_{23} &= \sum \int_l \frac{\bar{M}_2 \bar{M}_3}{nEI} dx = -\frac{1}{4EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 8 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 - \frac{1}{EI} \cdot 1 \cdot 3 \cdot 1 + \\ &+ \frac{1}{2EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 6 \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 = -\frac{3.167}{EI}. \\ \delta_{32} &= \delta_{23} = -\frac{3.167}{EI}. \end{aligned}$$

6.6. Коефіцієнт  $\delta_{33}$

Для визначення коефіцієнта  $\delta_{33}$  помножимо епюру  $\bar{M}_3$  (рис. 21) саму на себе, отримаємо

$$\begin{aligned} \delta_{33} &= \sum \int_l \frac{\bar{M}_3 \bar{M}_3}{nEI} dx = \frac{1}{4EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 8 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{1}{EI} \cdot 1 \cdot 3 \cdot 1 + \\ &+ \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 5 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{1}{2EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 5 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{8.0}{EI}. \end{aligned}$$

6.7. Вільний член  $\Delta_{1P}$ .

Для визначення вільного члена  $\Delta_{1P}$  помножимо епюру  $\bar{M}_1$  (рис. 13) на епюру  $M_p$  (рис. 25), отримаємо

$$\begin{aligned} \Delta_{1P} &= \sum \int_l \frac{\bar{M}_1 M_p}{nEI} dx = \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 60 \cdot 8 \cdot 0.5 + \\ &+ \frac{8}{6 \cdot 4EI} \cdot (0 \cdot 0 + 4 \cdot 36 \cdot 1 - 120 \cdot 1) - \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 120 \cdot 8 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 = -\frac{192.0}{EI}. \end{aligned}$$

6.8. Вільний член  $\Delta_{2P}$ .

Для визначення вільного члена  $\Delta_{2P}$  помножимо епюру  $\bar{M}_2$  (рис. 17) на епюру  $M_p$  (рис. 25), отримаємо

$$\begin{aligned} \Delta_{2P} &= \sum \int_l \frac{\bar{M}_2 M_p}{nEI} dx = \frac{8}{6 \cdot 4EI} \cdot (0 \cdot 0 + 4 \cdot 36 \cdot 0.5 - 120 \cdot 1) - \\ &- \frac{1}{EI} \cdot 1 \cdot 3 \cdot 97.5 = -\frac{308.5}{EI}. \end{aligned}$$

6.9. Вільний член  $\Delta_{3P}$ .

Для визначення вільного члена  $\Delta_{3P}$  помножимо епюру  $\bar{M}_3$  (рис. 21) на епюру  $M_p$  (рис. 25), отримаємо

$$\Delta_{3p} = \sum \int_l \frac{\bar{M}_3 M_p}{nEI} dx = \frac{8}{6 \cdot 4EI} \cdot (0 \cdot 0 - 4 \cdot 36 \cdot 0.5 + 120 \cdot 1) +$$

$$+ \frac{1}{EI} \cdot 1 \cdot 3 \cdot 97.5 + \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 75 \cdot 5 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{433.5}{EI}.$$

6.10 Перевірка коефіцієнтів і вільних членів.

Для перевірки коефіцієнтів системи канонічних рівнянь будується сумарна еюра моментів  $\bar{M}_\Sigma = \bar{M}_1 + \bar{M}_2 + \bar{M}_3$  шляхом складання ординат еюр моментів в одиничних станах  $\bar{M}_1$  (рис. 13),  $\bar{M}_2$  (рис. 17) та  $\bar{M}_3$  (рис. 21) у відповідних точках (рис. 28).

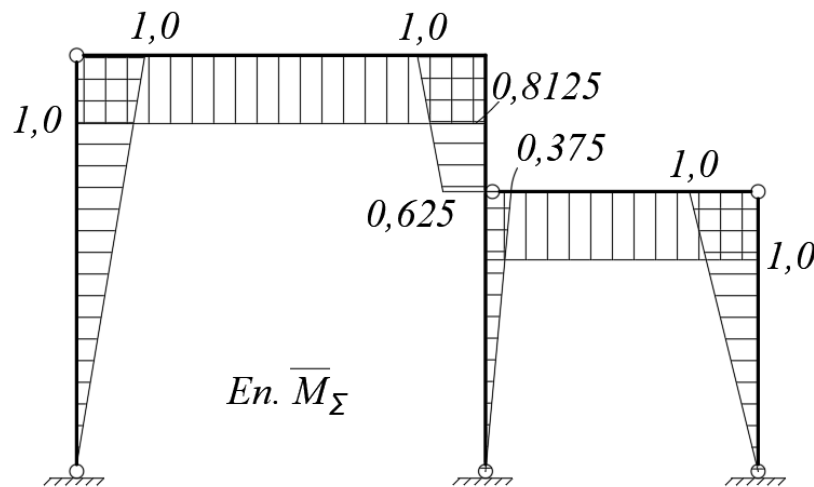


Рис. 28

Суть перевірки полягає в альтернативному обчисленні коефіцієнтів у відповідності з формулами

$$\delta_{1\Sigma} = \delta_{11} + \delta_{12} + \delta_{13}, \delta_{2\Sigma} = \delta_{21} + \delta_{22} + \delta_{23},$$

$$\delta_{3\Sigma} = \delta_{31} + \delta_{32} + \delta_{33}, \Delta_{\Sigma P} = \Delta_{1P} + \Delta_{2P} + \Delta_{3P}.$$

$$\delta_{1\Sigma} = \sum \int_l \frac{\bar{M}_1 \bar{M}_\Sigma}{nEI} dx = \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 8 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{1}{4EI} \cdot 1 \cdot 8 \cdot 1 +$$

$$+ \frac{3}{6EI} \cdot (1 \cdot 1 + 4 \cdot 0.8125 \cdot 0.8125 + 0.625 \cdot 0.625) -$$

$$- \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 0.625 \cdot 5 \cdot \frac{2}{3} \cdot 0.375 = \frac{6.292}{EI}.$$

$$\delta_{11} + \delta_{12} + \delta_{13} = \frac{7.333}{EI} + \frac{3.438}{EI} - \frac{4.480}{EI} = \frac{6.291}{EI}.$$

$$\delta_{2\Sigma} = \sum \int_l \frac{\bar{M}_2 \bar{M}_\Sigma}{nEI} dx = \frac{1}{4EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 8 \cdot 1 + \frac{1}{EI} \cdot 1 \cdot 3 \cdot 0.8125 +$$

$$+ \frac{1}{2EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 6 \cdot 1 = \frac{4.938}{EI}.$$

$$\delta_{21} + \delta_{22} + \delta_{23} = \frac{3.438}{EI} + \frac{4.667}{EI} - \frac{3.167}{EI} = \frac{4.938}{EI}.$$

$$\delta_{3\Sigma} = \sum \int_l \frac{\bar{M}_3 \bar{M}_\Sigma}{nEI} dx = -\frac{1}{4EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 8 \cdot 1 - \frac{1}{EI} \cdot 1 \cdot 3 \cdot 0.8125 +$$

$$+ \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 5 \cdot \frac{2}{3} \cdot 0.375 + \frac{1}{2EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 6 \cdot 1 + \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 5 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{0.354}{EI}.$$

$$\delta_{31} + \delta_{32} + \delta_{33} = -\frac{4.480}{EI} - \frac{3.167}{EI} + \frac{8.0}{EI} = \frac{0.353}{EI}.$$

$$\delta_{\Sigma P} = \sum \int_l \frac{\bar{M}_\Sigma M_P}{nEI} dx = \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 60 \cdot 8 \cdot 0.5 +$$

$$+ \frac{8}{6 \cdot 4EI} \cdot (0 \cdot 0 + 4 \cdot 36 \cdot 1 - 120 \cdot 1) -$$

$$- \frac{3}{6EI} \cdot (120 \cdot 1 + 4 \cdot 97.5 \cdot 0.8125 + 75 \cdot 0.625) +$$

$$+ \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 75 \cdot 5 \cdot \frac{2}{3} \cdot 0.375 = -\frac{67}{EI}.$$

$$\delta_{1P} + \delta_{2P} + \delta_{3P} = -\frac{192}{EI} - \frac{308.5}{EI} + \frac{433.5}{EI} = -\frac{67}{EI}.$$

### 7. Обчислення невідомих системи розв'язувальних рівнянь.

Запишемо систему розв'язувальних рівнянь з урахуванням знайдених коефіцієнтів і вільних членів:

$$\frac{7.333}{EI} X_1 + \frac{3.438}{EI} X_2 - \frac{4.480}{EI} X_3 - \frac{192}{EI} = 0;$$

$$\frac{3.438}{EI} X_1 + \frac{4.667}{EI} X_2 - \frac{3.167}{EI} X_3 - \frac{308.5}{EI} = 0;$$

$$-\frac{4.480}{EI} X_1 - \frac{3.167}{EI} X_2 + \frac{8.0}{EI} X_3 + \frac{433.5}{EI} = 0.$$

Помноживши ліву та праву частину рівнянь на  $EI$ , отримаємо

$$7.333X_1 + 3.438X_2 - 4.480X_3 - 192 = 0;$$

$$3.438X_1 + 4.667X_2 - 3.167X_3 - 308.5 = 0;$$

$$-3.167X_1 - 3.167X_2 + 8.0X_3 + 433.5 = 0.$$

Розв'язавши останню систему рівнянь отримаємо шукані значення невідомих задачі

$$X_1 = -29.2; \quad X_2 = 54.34; \quad X_3 = -49.02.$$

Для перевірки правильності рішення знайдені значення невідомих підставимо почергово в кожне рівняння.

Рівняння 1:

$$7.333 \cdot (-29.20) + 3.438 \cdot 54.34 - 4.480 \cdot (-49.02) - 192 = \\ = -214.2 + 186.7 + 219.5 - 192 = 406.2 - 406.2 = 0$$

Рівняння 2:

$$3.438 \cdot (-29.20) + 4.667 \cdot 54.34 - 3.167 \cdot (-49.02) - 308.5 = \\ = -100.3 + 253.5 + 155.2 - 308.5 = 408.7 - 408.8 = -0.1 \approx 0$$

Рівняння 3:

$$-4.480 \cdot (-29.20) - 3.167 \cdot 54.34 + 8.0 \cdot (-49.02) + 433.5 = \\ = 130.8 - 172.0 - 392.0 + 433.5 = 564.3 - 564.0 = 0.3 \approx 0$$

Похибка < 1%.

### 8. Побудова епюри дійсних згинаючих моментів.

Визначення дійсних зусиль в призначених характерних перерізах здійснюємо використовуючи вирази (7).

$$M_{\theta} = \bar{M}_1 X_1 + \bar{M}_2 X_2 + \bar{M}_3 X_3 + M_p = -29.2 \cdot \bar{M}_1 + 54.34 \cdot \bar{M}_2 - \\ -49.02 \cdot \bar{M}_3 + M_p$$

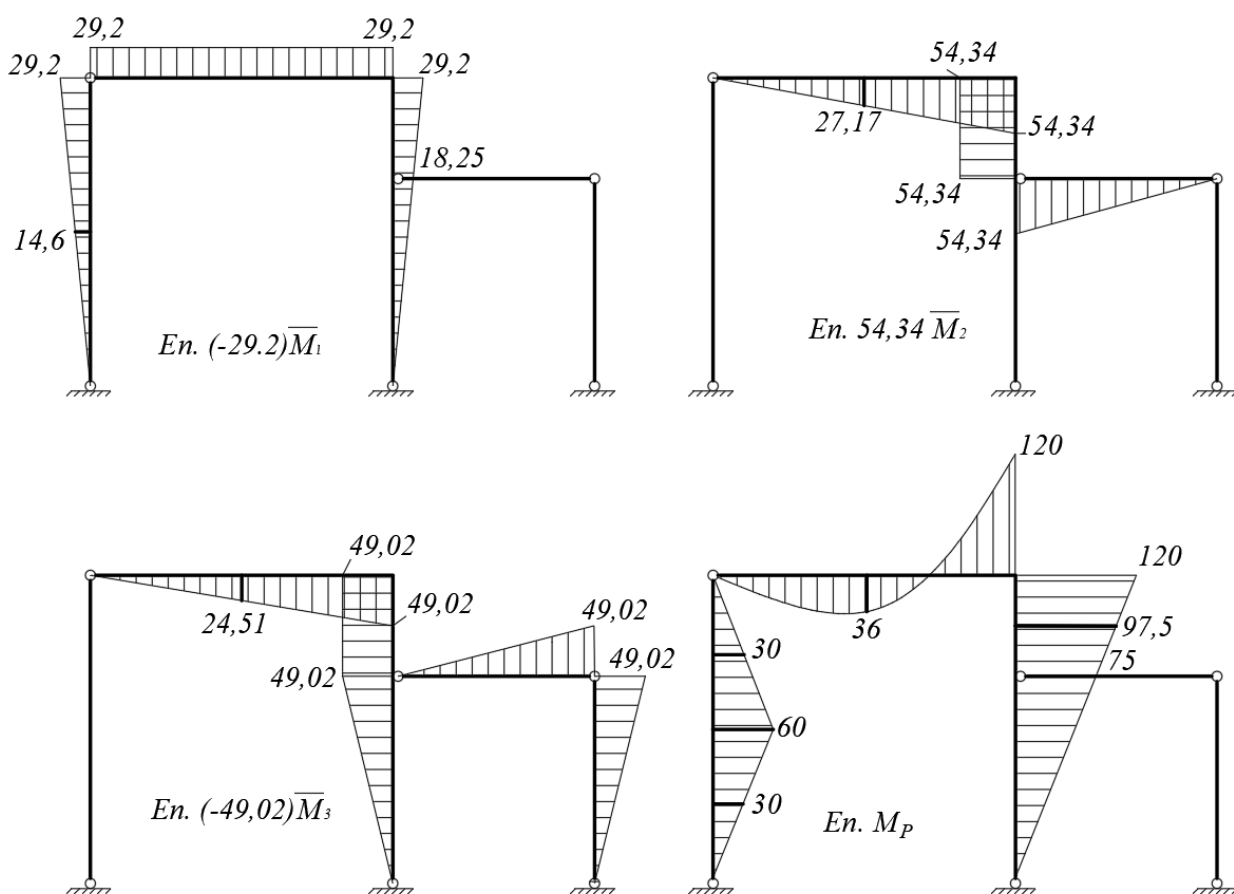


Рис. 29

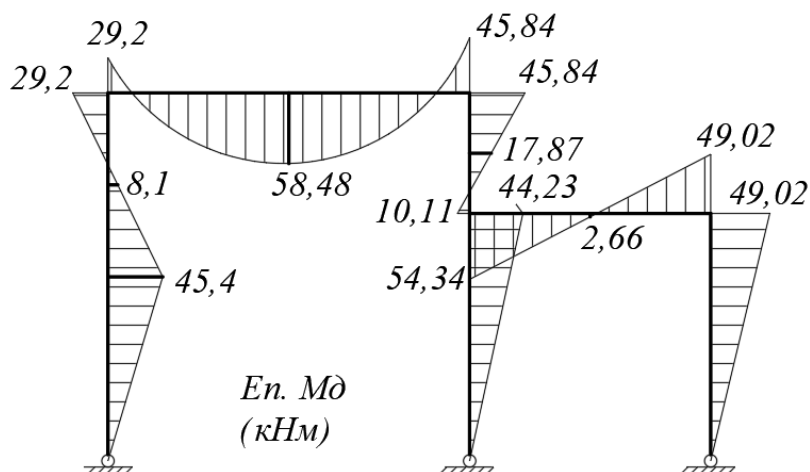


Рис. 30

Епюри дійсних зусиль будуються на схемі вихідної статично невизначеної рами.

Після побудови епюри  $M_d$  виконуються кінематична перевірка.

9. Кінематична перевірка розрахунку.

Для кінематичної перевірки здійснимо перемноження дійної епюри моментів  $M_d$  (рис. 30) та сумарної епюри одиничних моментів  $\bar{M}_\Sigma$  (рис.31), що побудована для третього варіанту основної схеми (рис.11,в.). Обчислення опорних реакцій опущено.

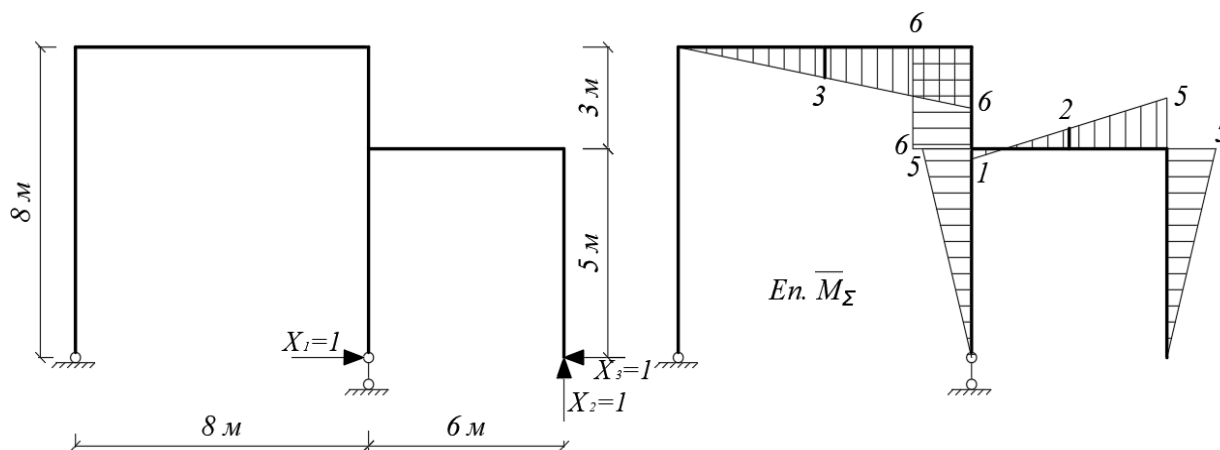


Рис. 31.

$$\Delta_{\Sigma d} = \sum \int_l \frac{\bar{M}_\Sigma M_d}{nEI} dx = \frac{8}{6 \cdot 4EI} \cdot (0 \cdot 29,2 + 4 \cdot 58,48 \cdot 3 - 45,84 \cdot 6) - \frac{1}{EI} \cdot 6 \cdot 3 \cdot 17,87 + \frac{6}{6 \cdot 2EI} \cdot (54,34 \cdot 1 - 4 \cdot 2,66 \cdot 2 + 49,02 \cdot 5) +$$



$$+ \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 5 \cdot \frac{2}{3} \cdot 49.02 - \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 5 \cdot \frac{2}{3} \cdot 44.23 = \frac{690,24}{EI} - \frac{689,82}{EI} = \frac{0,42}{EI}$$

Похибка:

$$\varepsilon = \frac{0,42 \cdot 100\%}{690,24} = 0,06\%$$

### 10. Побудова епюри дійсних поперечних сил

$$Q_0 = \bar{Q}_1 X_1 + \bar{Q}_2 X_2 + \bar{Q}_3 X_3 + Q_p = -29,2 \cdot \bar{Q}_1 + 54,34 \cdot \bar{Q}_2 - 49,02 \cdot \bar{Q}_3 + Q_p$$

За визначеними значеннями будемо епюру дійсних поперечних сил  $Q_0$  (рис. 33) шляхом додавання епюр (рис. 32)

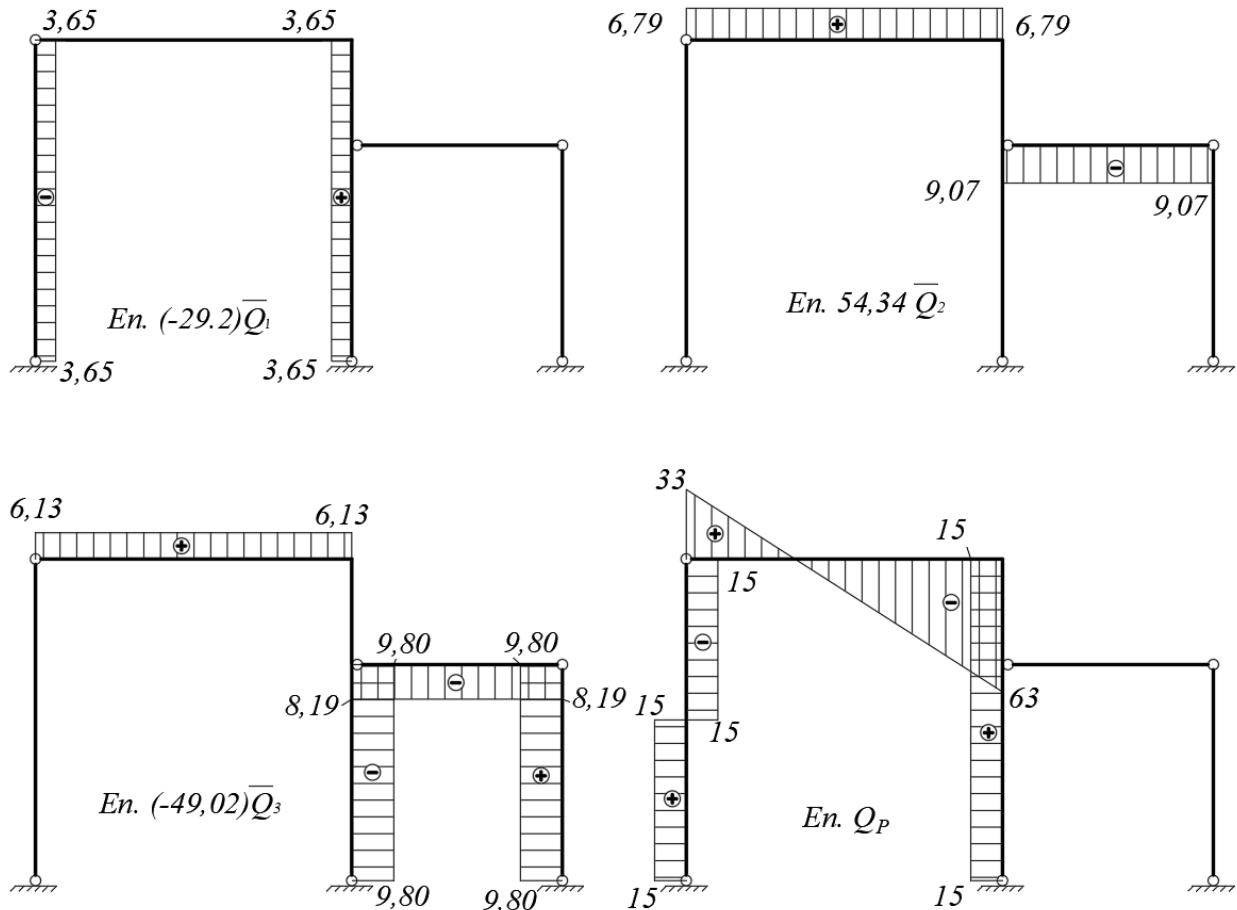


Рис. 32

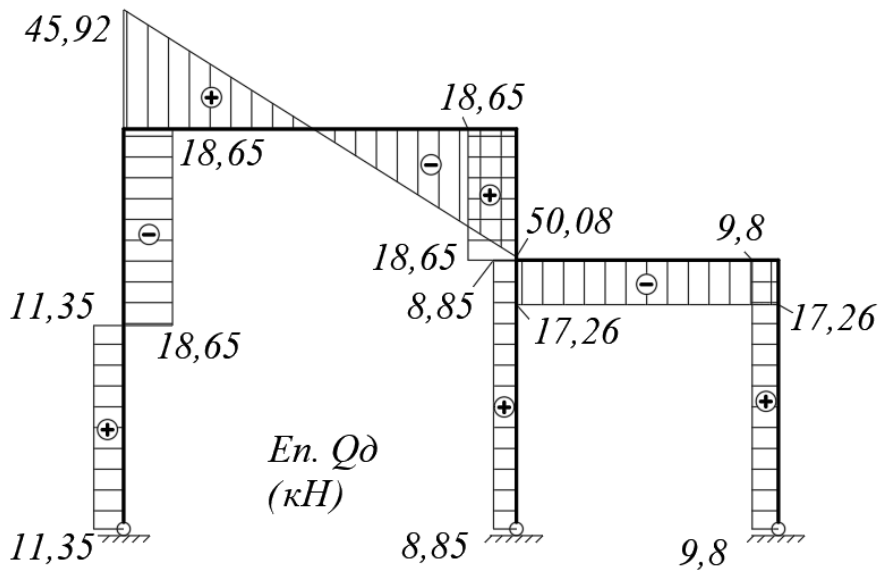


Рис. 33

11. Побудова епюри дійсних повздовжніх сил

$$N_0 = \bar{N}_1 X_1 + \bar{N}_2 X_2 + \bar{N}_3 X_3 + Q_p = -29.2 \cdot \bar{N}_1 + 54.34 \cdot \bar{N}_2 - 49.02 \cdot \bar{N}_3 + N_p$$

За визначеними значеннями будемо епюру дійсних повздовжніх сил  $N_0$  (рис. 35) шляхом додавання епюр (рис. 35)

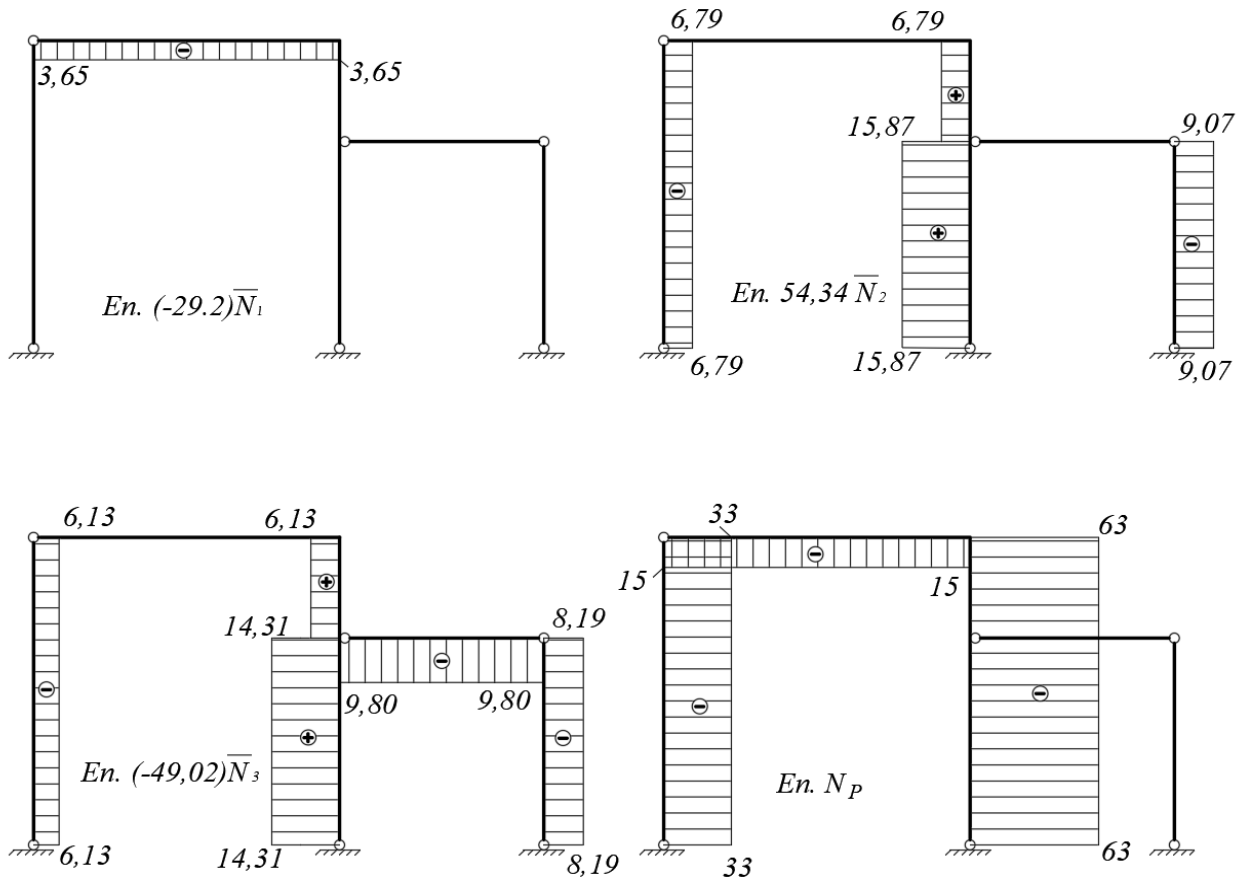


Рис. 34

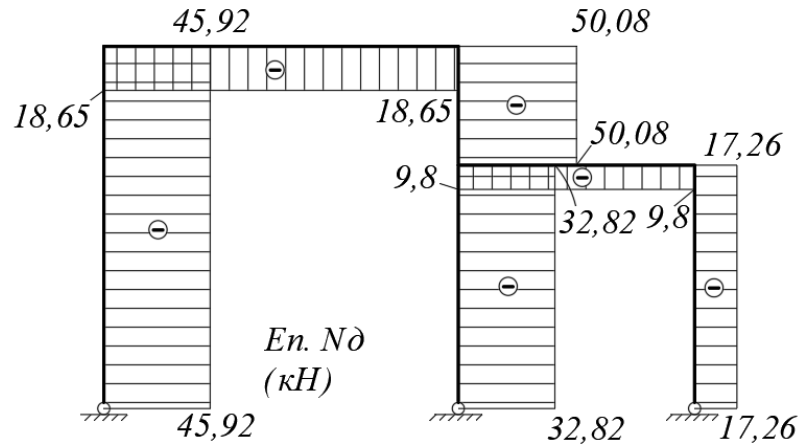
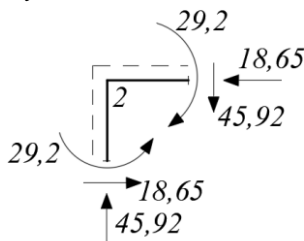


Рис. 35

12. Перевірки побудови дійсних епюр внутрішніх зусиль.

Здійснимо перевірку рівноваги вузлів рами. Виріжемо вузли 2, 3, 4, 6 та відповідно дійсним епюрам  $M_\delta$ ,  $Q_\delta$ ,  $N_\delta$  прикладемо до нього внутрішні зусилля.

Вузол 2

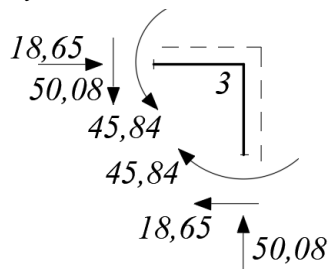


$$\sum M_2 = 0; 29.2 - 29.2 = 0,$$

$$\sum F_x = 0; 18.65 - 18.65 = 0,$$

$$\sum F_y = 0; 45.92 - 45.92 = 0.$$

Вузол 3

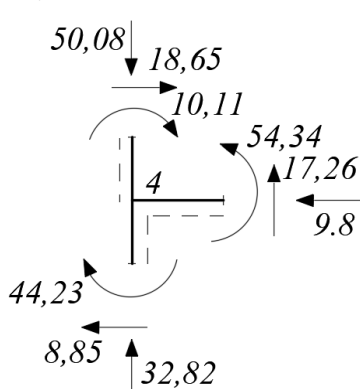


$$\sum M_3 = 0; 45.84 - 45.84 = 0,$$

$$\sum F_x = 0; 18.65 - 18.65 = 0,$$

$$\sum F_y = 0; 50.08 - 50.08 = 0.$$

Вузол 4

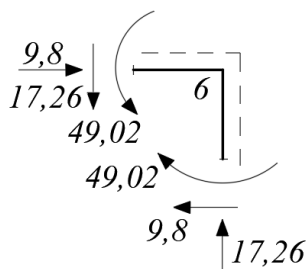


$$\sum M_4 = 0; 10.11 + 44.23 - 54.34 = 0,$$

$$\sum F_x = 0; 18.65 - 8.85 - 9.8 = 0,$$

$$\sum F_y = 0; 32.82 + 17.26 - 50.08 = 0.$$

Вузол 6



$$\sum M_6 = 0; 49.02 - 49.02 = 0,$$

$$\sum F_x = 0; 9.8 - 9.8 = 0,$$

$$\sum F_y = 0; 17.26 - 17.26 = 0.$$

Для ригеля 2-3 перевірку епюр виконаємо розглянувши його рівновагу (рис. 36), приклавши до нього зовнішнє навантаження  $q=12\text{кН/м}$ , згинальні моменти в перерізах лівого і правого кінців (відповідно значенням з епюри  $M_0$ ), а також дві поперечні сили  $Q_{2-3}$  та  $Q_{3-2}$ , які в результаті перевірки мають співпасти зі значеннями з дійсної епюри  $Q_0$  у відповідних перерізах.

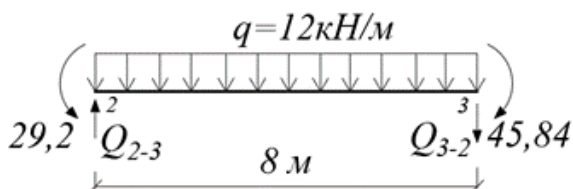


Рис. 36

$$\sum M_2 = 0: Q_{3-2} \cdot 8 + 12 \cdot 8 \cdot 4 - 29.2 + 45.84 = 0;$$

$$Q_{3-2} = 50,08 \text{ кН.}$$

$$\sum M_3 = 0: Q_{2-3} \cdot 8 - 12 \cdot 8 \cdot 4 - 29.2 + 45.84 = 0;$$

$$Q_{2-3} = 45.92 \text{ кН.}$$

Для елементів 1-2, 3-4, 4-5, 4-6, 6-7 перевірку епюр виконаємо використовуючи диференціальну залежність між епюрами поперечних сил  $Q_0$  та згинальних моментів  $M_0$ :

$$Q_{1-2} = \frac{0 + 45.4}{4} = 11.35 \text{ кН.}$$

$$Q_{2-1} = -\frac{29.2 + 45.4}{4} = -18.65 \text{ кН.}$$

$$Q_{3-4} = Q_{4-3} = \frac{45.84 + 10.11}{3} = 18.65 \text{ кН.}$$

$$Q_{4-5} = Q_{5-4} = \frac{0 + 44.23}{5} = 8.85 \text{ кН.}$$

$$Q_{4-6} = Q_{6-4} = -\frac{54.34 + 49.02}{6} = -17.26 \text{ кН.}$$

$$Q_{6-7} = Q_{7-6} = \frac{49.02}{5} = 9.8 \text{ кН.}$$

Знак поперечної сили “+”, якщо кут нахилу епюри моментів додатній (поворот від осі до епюри виконується за годинниковою стрілкою) і знак “-”, якщо кут нахилу від’ємний (поворот проти годинникової стрілки).

13. Перевірки загальної рівноваги рами.

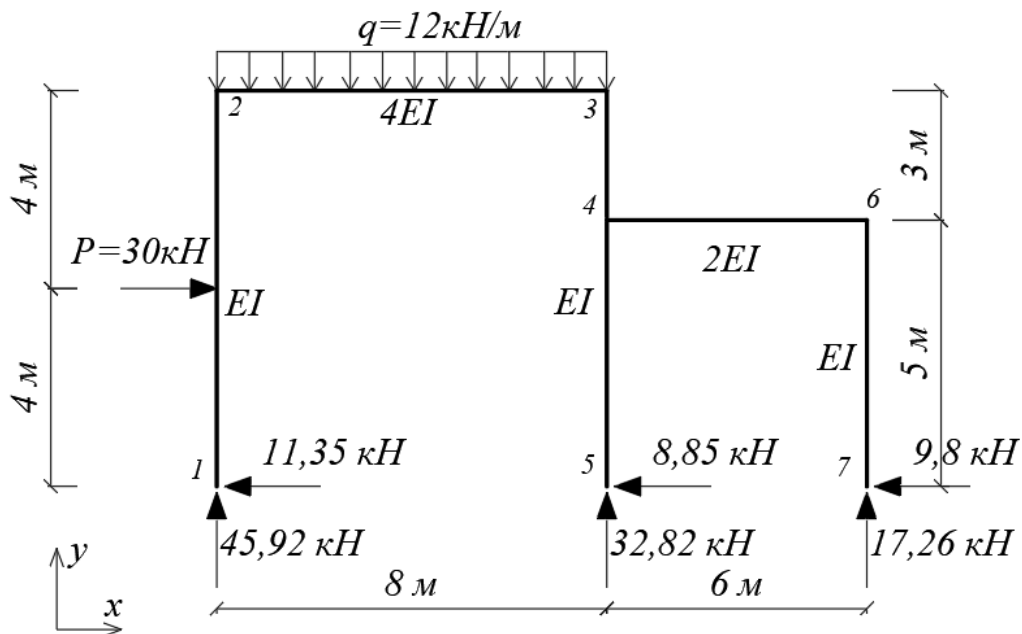


Рис. 37

$$\begin{aligned} \sum F_x &= 30 - 11.35 - 8.85 - 9.8 = 30 - 30 = 0, \\ \sum F_y &= -12 \cdot 8 + 45.92 + 32.85 + 17.26 = -96 + 96.03 = 0.03 \approx 0, \\ \sum M_1 &= 12 \cdot 8 \cdot 4 + 30 \cdot 4 - 32.82 \cdot 8 - 17.26 \cdot 14 = 504 - 504.2 = \\ &= -0.02 \approx 0. \end{aligned}$$

Приклад 1 виконаний в тій послідовності та в тому об'ємі, що обов'язкові для студентських розрахунково-графічних робіт.

Наступний приклад виконаний з деякими скороченнями, у них опущені деякі перевірки і деякі етапи розрахунку.

## Приклад 2. Розрахунок симетричної статично невизначуваної рами.

Визначаємо ступінь статичної невизначеності рами наведеної на рис. 38. Рама має три замкнені контури і чотири простих шарніра. Отже, вона п'ять разів статично невизначена. Використовуючи симетрію заданої рами, виберемо симетричну основну систему, розставивши п'ять симетрично розташованих відносно осі симетрії шарнірів і назначимо групові невідомі (рис. 38,б).

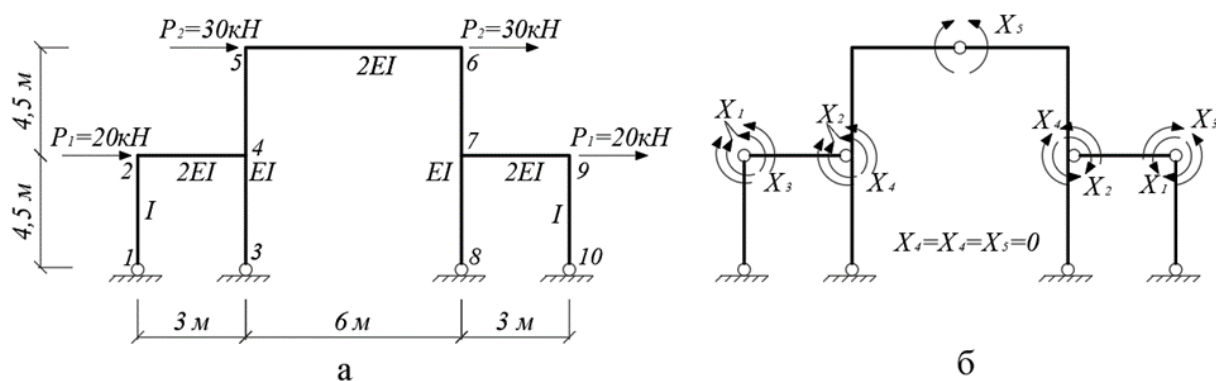


Рис. 38

При завантаженні рами косиметричним навантаженням симетричні невідомі ( $X_3, X_4, X_5$ ) тотожно рівні нулю та при розрахунку не розглядаються. Запишемо в загальному вигляді систему канонічних рівнянь для косиметричних невідомих  $X_1$  і  $X_2$ :

$$\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1p} = 0;$$

$$\delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2p} = 0.$$

Кожне з цих рівнянь виражає рівність нулю взаємного зламу складних перерізів у місці постановки шарнірів у напрямку відповідної групи невідомих.

Для прийнятої основної системи в одиничних і вантажному станах визначаємо опорні реакції та будуємо епюри згинальних моментів. Одиничні та вантажний стани і епюри моментів у цих станах приведені на рис. 39. Обчислення опорних реакції для одиничного і вантажного станів опущені.

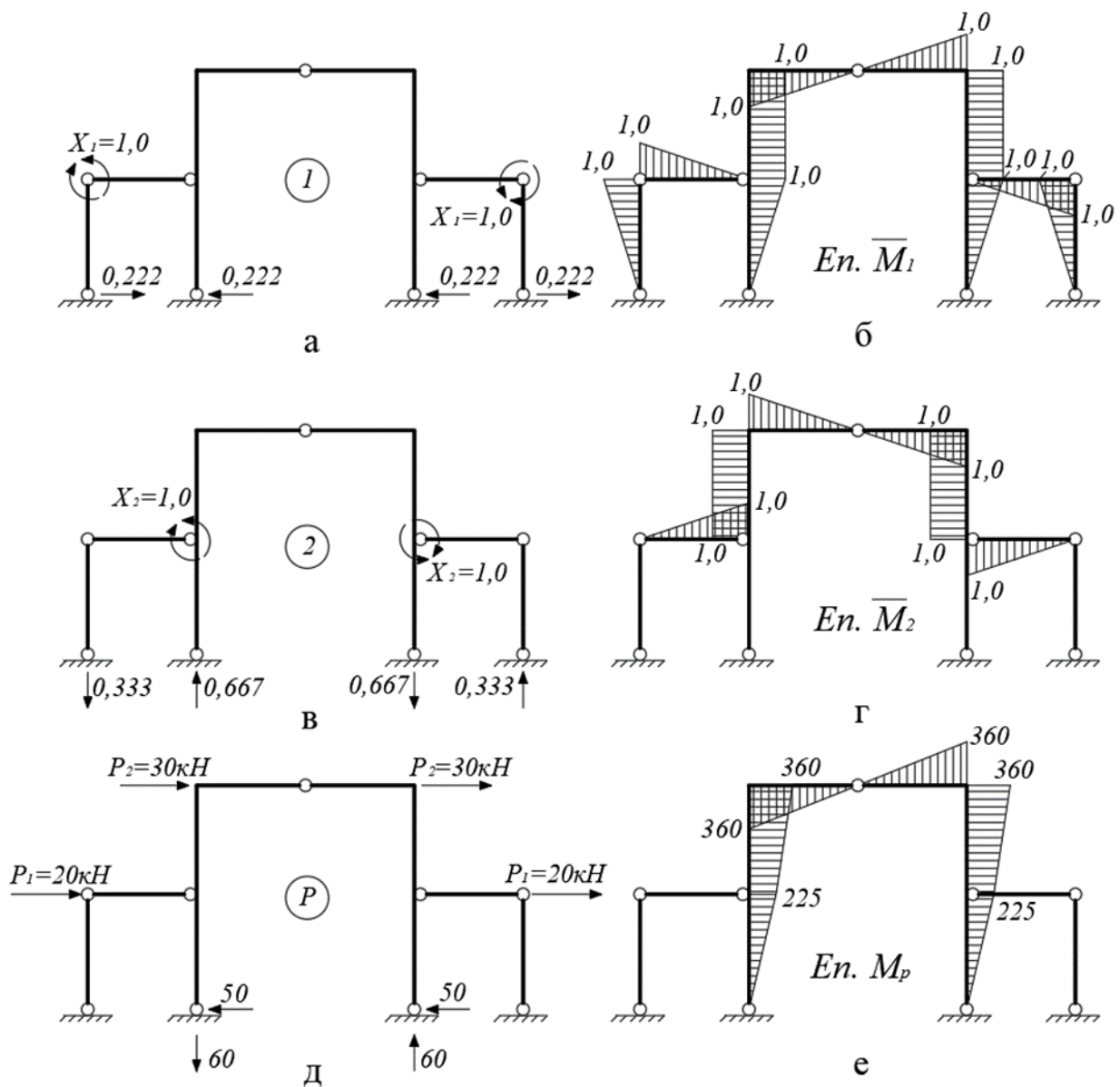


Рис. 39

Обчислюємо коефіцієнти при невідомих  $\delta_{ik}(i, k=1, 2)$  і вільні члени  $\Delta_{iP}$  ( $i=1, 2$ ) системи канонічних рівнянь (перевірки обчислень опущені):

$$\begin{aligned} \delta_{11} &= \sum \int \frac{\bar{M}_1 \bar{M}_1}{EI} dx = \\ &= 2 \left[ \frac{1}{EI} \cdot \frac{1 \cdot 4,5}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 \cdot 2 + \frac{1}{2EI} \cdot \frac{1 \cdot 3}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 \cdot 2 + \frac{1}{EI} \cdot 1 \cdot 4,5 \cdot 1 \right] = \frac{17}{EI}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta_{12} = \delta_{21} &= \sum \int \frac{\bar{M}_1 \bar{M}_2}{EI} dx = \\ &= 2 \left[ \frac{1}{2EI} \cdot \frac{1 \cdot 3}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 - \frac{1}{EI} \cdot 1 \cdot 4,5 \cdot 1 - \frac{1}{EI} \cdot \frac{1 \cdot 3}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 \right] = -\frac{9,5}{EI}, \end{aligned}$$

$$\delta_{22} = \sum \int \frac{\bar{M}_2 \bar{M}_2}{EI} dx = 2 \left[ \frac{1}{2EI} \cdot \frac{1 \cdot 3}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 \cdot 2 + \frac{1}{EI} \cdot 1 \cdot 4,5 \cdot 1 \right] = \frac{11}{EI},$$

$$\Delta_{1P} = \sum \int \frac{\bar{M}_1 M_P}{EI} dx =$$

$$= 2 \left[ \frac{1}{EI} \cdot \frac{225 \cdot 4,5}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{360 + 225}{2} \cdot 4,5 \cdot 1 + \frac{1}{2EI} \cdot \frac{360 \cdot 3}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 \right] =$$

$$= \frac{3667,5}{EI},$$

$$\Delta_{2P} = \sum \int \frac{\bar{M}_2 M_P}{EI} dx = 2 \left[ -\frac{1}{EI} \cdot \frac{360 + 225}{2} \cdot 4,5 \cdot 1 - \frac{1}{2EI} \cdot \frac{360 \cdot 3}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 \right] =$$

$$= -\frac{2992,5}{EI}.$$

Помноживши всі знайдені значення коефіцієнтів і вантажних членів на  $EI$  і підставивши їх у канонічні рівняння методу сил, отримаємо наступну систему рівнянь:

$$17 \cdot X_1 - 9,5 \cdot X_2 + 3667,5 = 0;$$

$$-9,5 \cdot X_1 + 11 \cdot X_2 - 2992,5 = 0.$$

Розв'язавши систему рівнянь отримуємо:  $X_1 = -123,149$  кНм;  
 $X_2 = 165,688$  кНм.

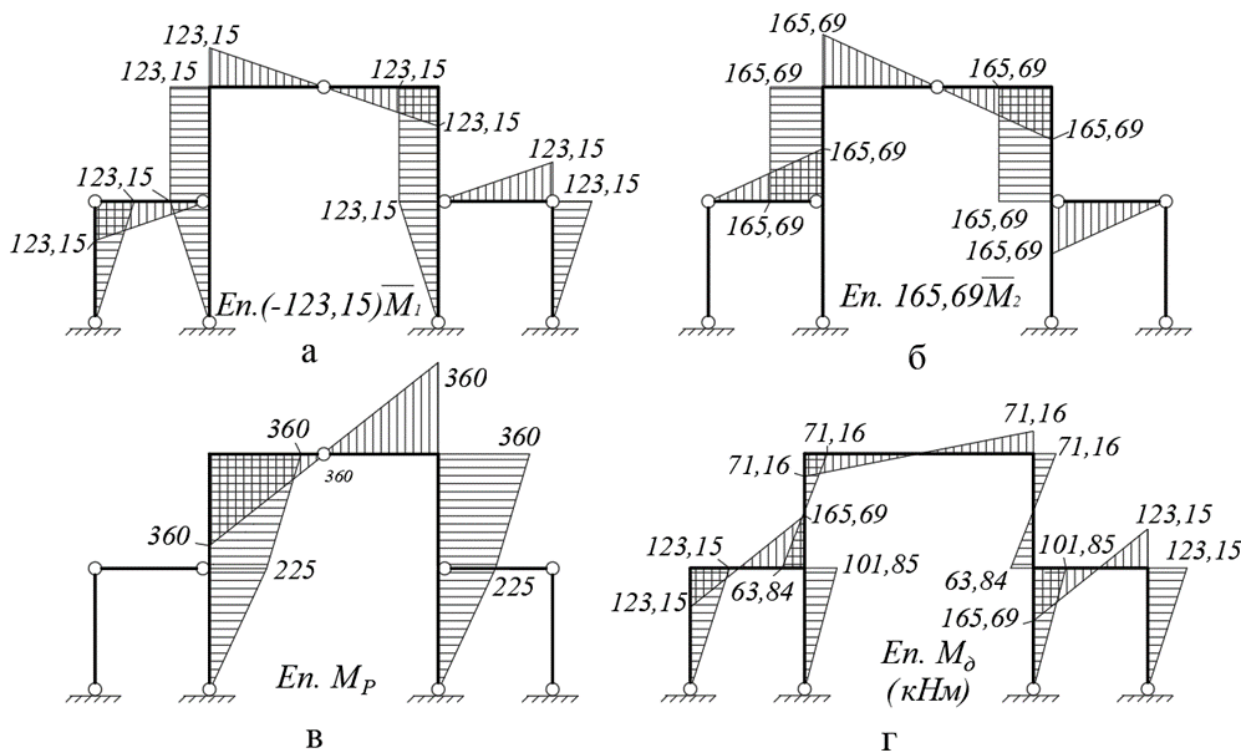


Рис. 40



Для отримання епюри дійсних моментів  $M_d$  (рис. 40,г) складемо алгебраїчно ординати епюри  $M_p$  (рис. 40,в) із відповідними ординатами епюри  $\bar{M}_1$ , помноженими на  $X_1 = -123,149$  кНм (рис. 40,а), і ординатами епюри  $\bar{M}_2$ , помноженими на  $X_2 = 165,688$  кНм (рис. 40,б).

Для побудови дійсної епюри  $Q_d$  можна визначити значення поперечних сил на окремих ділянках рами по епюрі  $M_d$ . Поперечні сили на окремих елементах рами будуть дорівнювати:

$$Q_{1-2} = Q_{2-1} = \frac{123,15}{4,5} = 27,37 \text{ кН,}$$

$$Q_{3-4} = Q_{4-3} = \frac{101,85}{4,5} = 22,63 \text{ кН,}$$

$$Q_{2-4} = Q_{4-2} = -\frac{165,69 + 123,15}{3} = -96,28 \text{ кН,}$$

$$Q_{4-5} = Q_{5-4} = \frac{71,16 + 63,84}{4,5} = 30 \text{ кН,}$$

$$Q_{5-6} = Q_{6-5} = -\frac{71,16 + 71,16}{6} = -23,72 \text{ кН.}$$

За отриманими значеннями будемо епюру поперечних сил  $Q_d$  (рис. 41). При кососиметричному навантаженні епюра  $Q_d$  осесиметрична.

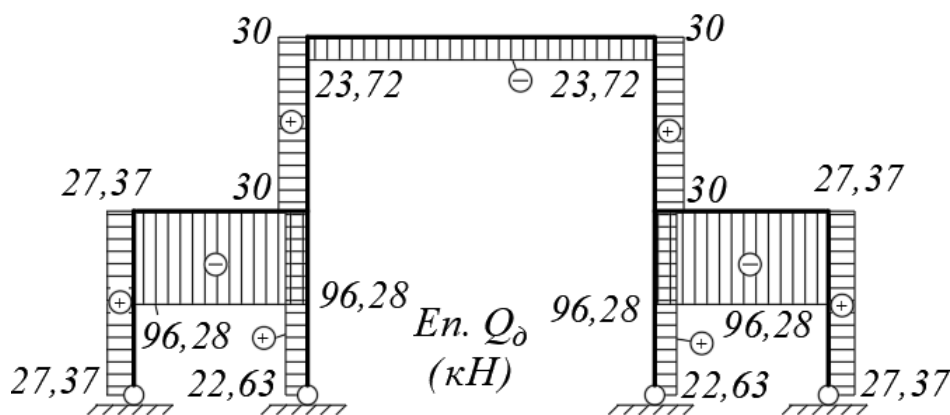
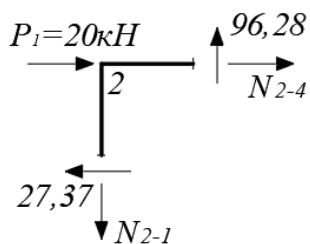


Рис. 41

Для побудови дійсної епюри  $N_d$  визначаємо значення поздовжніх сил у всіх елементах рами зліва від осі симетрії з умов рівноваги вузлів. Вирізаємо послідовно вузли 2, 5, 4 та розглядаємо їх рівновагу. Епюра  $N_d$  при кососиметричному навантаженні буде кососиметричною (рис. 42).

Вузол 2



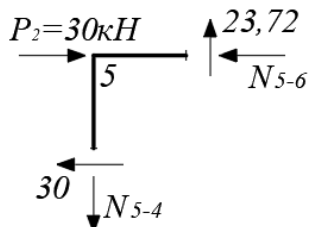
$$\sum F_x = 0; 20 - 27.37 + N_{2-4} = 0,$$

$$N_{2-4} = 7.37 \text{ кН.}$$

$$\sum F_y = 0; 96.28 - N_{1-2} = 0,$$

$$N_{1-2} = 96.28 \text{ кН.}$$

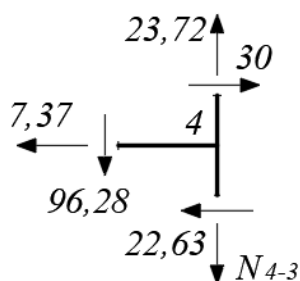
Вузол 5



$$\sum F_x = 0; 30 - 30 + N_{5-6} = 0, N_{5-6} = 0.$$

$$\sum F_y = 0; 23.72 - N_{5-4} = 0, N_{5-4} = 23.72 \text{ кН.}$$

Вузол 4



$$\sum F_x = 0; 30 - 22.63 - 7.37 = 0.$$

$$\sum F_y = 0; 23.72 - 96.28 - N_{4-3} = 0,$$

$$N_{4-3} = -72.56 \text{ кН.}$$

За отриманими значеннями будуємо епюру  $N_\delta$  (Рис. 42)

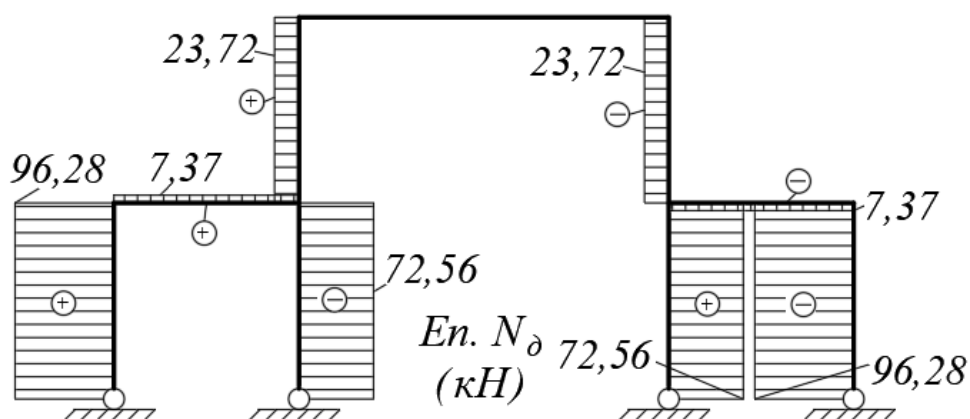


Рис. 42

За епюрами  $Q_\delta$  і  $N_\delta$  визначаємо опорні реакції та перевіряємо умови рівноваги усієї рами (рис. 43):

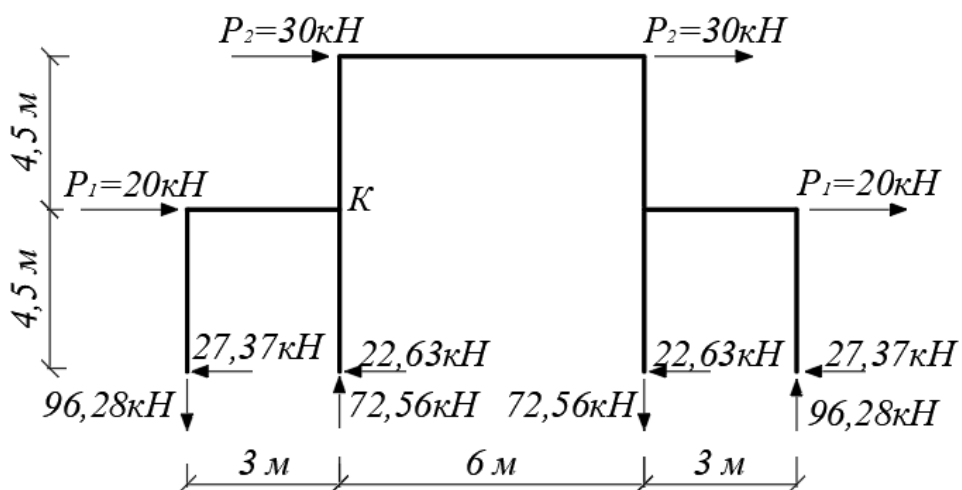


Рис. 43

$$\begin{aligned} \sum F_x &= 30 + 30 + 20 + 20 - 27.37 - 22.63 - 27.37 - 22.63 = 0, \\ \sum F_y &= -96.28 + 72.56 - 72.56 + 96.28 = 0, \\ \sum M_K &= 2 \cdot 30 \cdot 4.5 + 2 \cdot 22.63 \cdot 4.5 + 2 \cdot 27.37 \cdot 4.5 - 96.28 \cdot 3 - \\ &\quad - 96.28 \cdot 9 + 72.56 \cdot 6 = 1155.36 - 1155.36 = 0. \end{aligned}$$

## Список літератури

1. *Баженов В.А.* Будівельна механіка. Комп'ютерні технології і моделювання: підручник / В.А. Баженов, А.В. Перельмутер – Київ: ПАТ «ВІПОЛ», 2013. — 896 с.

2. *Баженов В.А.* Будівельна механіка. Комп'ютерний курс: підручник / В.А. Баженов, С.Я. Гранат, О.В. Шишов. – Київ: ПАТ «ВІПОЛ», 1999. – 584 с.

3. *Баженов В.А.* Будівельна механіка. Розрахункові вправи. Задачі. Комп'ютерне тестування. Навчальний посібник / В.А. Баженов, Г.М. Іванченко, О.В. Шишов, та ін. – Київ: Каравела, 2013. – 439 с.

4. *Баженов В.А.* Будівельна механіка. Розрахункові вправи. Задачі. Комп'ютерне тестування. Навчальний посібник / В.А. Баженов, Г.М. Іванченко, О.В. Шишов – Київ: Каравела, 2006. – 344 с.

5. *Лізунов П.П.* Будівельна механіка: конспект лекцій / П.П. Лізунов, В.О. Недін – Київ: КНУБА, 2022. – 172 с.

Навчально-методичне видання

**РОЗРАХУНОК СТАТИЧНО  
НЕВИЗНАЧУВАНИХ РАМ  
МЕТОДОМ СИЛ**

Методичні вказівки

до виконання розрахунково-графічної роботи для студентів спеціальності 192 «Будівництво та цивільна інженерія» освітньої програми «Промислове і цивільне будівництво»

Укладачі: **Максим'юк**Юрій Всеволодович  
**Андрієвський**Віктор Петрович  
**Козак** Андрій Анатолійович

Комп'ютерне верстання

Підписано до друку 2023. Формат 60x84<sub>1/16</sub>  
Ум. друк. арк. 2.5 . Обл.-вид. арк. .  
Електронний документ. Вид. №

Видавець і виготовлювач  
Київського національного університету будівництва і архітектури

Повітрофлотський проспект, 31, Київ, Україна, 03680  
Свідоцтво про внесення до Державного реєстру суб'єктів  
Видавничої справи ДК № 808 від 13.02.2002 р.