

Виберіть форму подання навчального матеріалу

✓ Докладне подання

[Скорочене подання](#)

12. Метод переміщень

Зміст глави

[12.1. Припущення методу переміщень](#)

[12.2. Основна система методу переміщень](#)

[12.3. Основні невідомі методу переміщень](#)

[12.4. Розв'язувальні рівняння методу переміщень](#)

[12.5. Епюри зусиль в основній системі методу переміщень](#)

[12.6. Статичний спосіб визначення коефіцієнтів і вільних членів системи канонічних рівнянь](#)

[12.7. Побудова канонічних рівнянь за допомогою варіаційного принципу Лагранжа](#)

[12.8. Визначення дійсних зусиль](#)

[12.9. Перевірки епюри дійсних згинальних моментів](#)

[12.10. Використання симетрії системи](#)

[12.10.1. Дія симетричного навантаження](#)

[12.10.2. Дія кососиметричного навантаження](#)

[12.10.3. Дія навантаження загального вигляду](#)

[12.10.4. Комбінований метод розрахунку](#)

[12.11. Приклади розрахунку рам за методом переміщень у канонічній формі](#)

[12.12. Розгорнута форма методу переміщень](#)

[12.12.1. Основна система і основні невідомі](#)

[12.12.2. Формули методу переміщень для зігнутих стержнів](#)

[12.12.3. Розв'язувальні рівняння розгорнутої форми методу переміщень](#)

[12.12.4. Побудова епюр дійсних зусиль](#)

[12.12.5. Використання симетрії рами](#)

[12.12.6. Приклад розрахунку статично невизначуваної рами за методом переміщень у розгорнутій формі](#)

[Запитання для самоперевірки](#)

Метод переміщень був розроблений і впроваджений у практику пізніше за метод сил. Утім він набув більшого поширення при “ручному” (без застосування комп’ютерних програм) розрахунку споруд, передусім завдяки простоті та меншій трудомісткості обчислень для значної кількості досліджуваних об’єктів..

Метод переміщень передбачає першочергове обчислення певного набору переміщень, знання яких дає змогу одержати зусилля і переміщення в інших перерізах конструкції. Це стає можливим тому, що напружено-деформований стан стержневого елемента цілком визначається прикладеним до нього навантаженням і переміщеннями перерізів, у яких цей елемент приєднується до інших частин споруди. Проте для статично невизначуваних елементів означену залежність необхідно визначити заздалегідь.

Очевидно, найпростіше визначити таку залежність для елементів, що становлять прямолінійні стержні. Для таких стержнів при будь-яких закріпленнях на кінцях зусилля і поперечні переміщення в усіх перерізах визначаються кутами повороту та взаємними поступальними переміщеннями їхніх кінців, а також зовнішнім навантаженням на стержні. Тому у методі переміщень як основний елемент обирають саме прямолінійний стержень постійної жорсткості. Такий підхід наближає метод переміщень до методу скінченних елементів у переміщеннях для стержневих систем (див. [главу 6](#)). Однак введення спрощуючих припущень значно зменшує кількість основних невідомих і робить метод переміщень придатним для “ручних” розрахунків на відміну від методу скінченних елементів, призначеного лише для розрахунку із застосуванням комп’ютерів.

Існують дві форми реалізації методу переміщень – канонічна і розгорнута. У цьому підрозділі буде спочатку викладено метод переміщень у канонічній формі, а потім – у розгорнутій. Приклади розрахунку рам виконуються як у канонічній формі, так і в розгорнутій.

12.1. Припущення методу переміщень

Метод переміщень ґрунтується на спрощувальних припущеннях, від яких залежить кількість основних невідомих методу.

1) Кут між стержнями, які збігаються у жорсткому вузлі, не змінюється після деформування споруди. Це означає, що при деформуванні кінці всіх стержнів, з'єднаних між собою припайками, повертаються на однаковий кут.

2) Для стержнів, що згинаються, деформаціями від поздовжніх і поперечних сил можна знехтувати.

3) Зближення кінців стержня, зумовлених його згином, не береться до уваги.

4) Довжина проекції стержня на його початковий напрям до і після деформації залишається незмінною.

5) Тангенси і синуси кутів нахилу стержнів, що виникають за рахунок деформацій системи, внаслідок малюнки дорівнюють самим кутам..

Ці припущення на перший погляд сприймаються як суперечливі, але всі вони ґрунтуються на тому, що в реальних стержневих системах переміщення від пружних деформацій дуже малі порівняно з розмірами споруди, а відтак їх вплив на зміну її розмірів можна не враховувати. Це є одним з керуючих принципів **розрахунку по недеформованій схемі**: пружні деформації враховуються лише при обчисленні зусиль, з їх впливом на геометрію системи можна не рахуватися

На рис.12.1 наведено схему деформації рами, відповідну до викладених припущень.

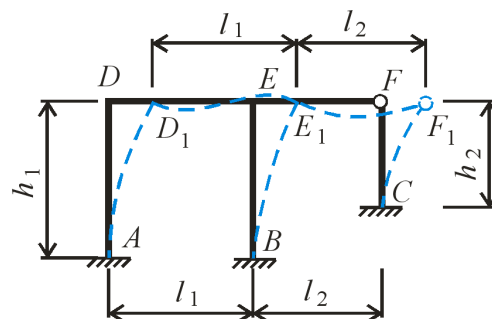


Рис.12.1

Кути між дотичними до стержнів, які з'єднуються у жорстких вузлах D і E , залишились прямими. Проекції деформованих стержнів AD_1 , BE_1 і CF_1 на вертикаль, а D_1E_1 і E_1F_1 на горизонталь, тобто на їхній початковий напрям, дорівнюють довжині відповідних стержнів. Слід звернути увагу на те, що вузли D , E і F після деформації споруди не мають вертикальних переміщень, а їхні горизонтальні переміщення однакові.

Зазначимо також, що за викладеними припущеннями в методі переміщень однопрогонові балки, зображені на рис.12.2,а,б,в,г, є еквівалентними до балок на рис.12.2,д,е,ж,з відповідно.

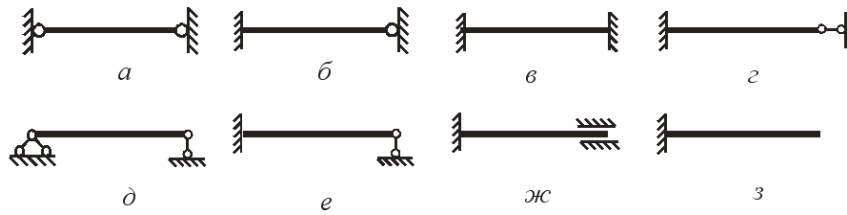


Рис.12.2

12.2. Основна система методу переміщень

Розрахунок статично невизначуваної системи полягає в тому, що замість неї розглядається така створена з неї система, розрахунок якої можна здійснити за допомогою вже відомих нам засобів. Така нова система називається основною системою методу.

Як вже зазначалось, основним елементом споруди зручно вважати однопрогонову балку з будь-якими опорами на кінцях, для якої заздалегідь можна визначити напружено-деформований стан залежно від зовнішнього навантаження і переміщень її опор.

Тому природно для одержання основної системи методу переміщень перетворити вихідну систему в набір однопрогонових балок постійної жорсткості з нерухомими опорами, які не дають змоги кінцям балок мати кутові та поступальні переміщення. Для цього необхідно усунути можливість переміщень усіх вузлів системи. Цієї мети досягають введенням у вузли системи додаткових з'єднань двох видів.

Розглянемо докладно ці додаткові з'єднання.

1. Для запобігання повороту всіх жорстких вузлів до них встановлюються так звані **рухомі**, або **“плаваючі”** затиснення. Це такі умовні в'язі, які не дозволяють вузлам повертатись, але не заважають їх поступальним переміщенням.

Нагадаємо, що стержнем будемо називати прямолінійний стержневий елемент постійної жорсткості, який **на кінцях** в той чи інший спосіб приєднується до стержневої системи, а жорсткими вузлами є місця з'єднання кінців стержнів за допомогою припаювання. Ламаний стержневий елемент розглядатиметься як сукупність стержнів, які з'єднуються між собою.

Отже до жорстких вузлів треба віднести місця, в яких:

- з'єднуються за допомогою припайки два або більше стержнів;
- змінюється під кутом напрям осі стержневого елемента;
- до стержневого елемента приєднується за допомогою прилеглого шарніра інший стержень або кілька стержнів;
- ступінчасто змінюється жорсткість стержневого елемента;

- приєднується шарніром стержень або інший вузол до жорсткого вузла будь-якого з перелічених типів.

На рис.12.3,е,ж,з,і,к наведено рухомі затиснення, встановлені до жорстких вузлів, зображених на рис.12.3,а,б,в,г,д відповідно.

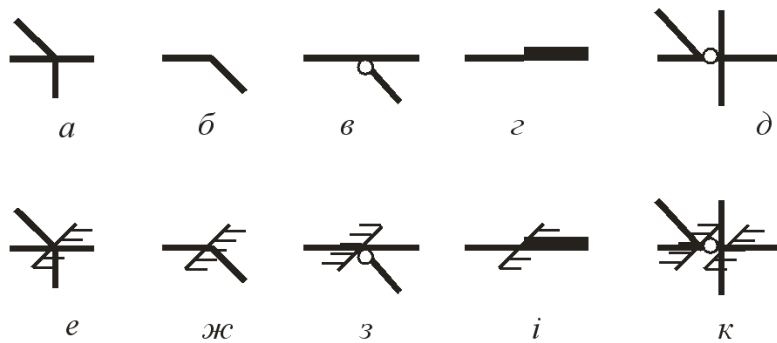


Рис.12.3

2. Можливі поступальні переміщення вузлів системи виключаються встановленням **додаткових опорних стержнів**. Кількість таких стержнів повинна бути мінімальною, але достатньою для забезпечення нерухомості всіх вузлів системи. Наприклад, як було вже показано, завдяки припущенням методу переміщень вузли *D*, *E* і *F* системи на [рис.12.1](#) після деформації споруди не мають вертикальних переміщень, а їхні горизонтальні переміщення однакові, тобто взаємно залежні. Тому для виключення всіх поступальних переміщень вузлів цієї системи досить встановити один додатковий горизонтальний опорний стержень, прикріплений до будь-якого із цих трьох вузлів.

Отже, додаткові опорні стержні потрібно встановлювати не до всіх вузлів системи, а лише до тих, що мають **незалежні поступальні переміщення**. Для визначення кількості незалежних поступальних переміщень системи та місць встановлення необхідних додаткових опорних стержнів доцільно скористатися її шарнірною схемою. **Шарнірна схема** утворюється введенням наскрізних шарнірів в усі жорсткі вузли вихідної системи, включно з опорними вузлами. Зауважимо, що при створенні шарнірної схеми статично визначувані фрагменти споруди, зокрема консолі можна відкидати.

Надалі здійснюють кінематичний аналіз одержаної шарнірної схеми і визначаються місця постановки додаткових опорних стержнів для перетворення її на геометрично незмінювану, причому доцільно одразу виконувати якісний (структурний) етап аналізу. Геометрична незмінюваність шарнірної схеми свідчить про те, що вихідна система не має незалежних поступальних переміщень. У такому разі при створенні основної системи методу переміщень, встановлювати додаткові опорні стержні не потрібно.

Якщо у процесі структурного аналізу шарнірної схеми виявляється можливість поступального переміщення якогось вузла, то необхідно ввести додатковий опорний стержень, який перешкоджає появі цього переміщення. Кількість таких додаткових опорних стержнів визначає кількість незалежних поступальних переміщень вузлів вихідної системи. При створенні основної системи методу переміщень необхідно встановлювати додаткові опорні стержні саме в цих місцях.

Розглянемо кілька прикладів визначення кількості та положення додаткових опорних стержнів.

Шарнірна схема системи (рис.12.4,а) зображена на рис. 12.4,б. Виконуємо її структурний аналіз.

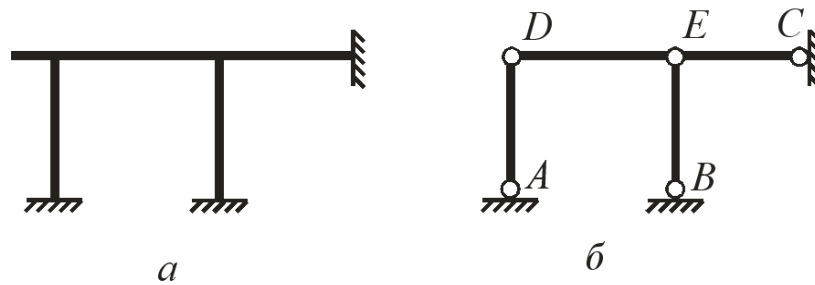


Рис.12.4

До нерухомих вузлів B і C приєднано вузол E за допомогою двох стержнів BE і CE , які не лежать на одній прямій. У свою чергу, до нерухомих вузлів A і E приєднано вузол D двома стержнями AD і DE , які не лежать на одній прямій. Отже, шарнірна схема є геометрично незмінюваною і вихідна система не потребує введення додаткових опорних стержнів.

Шарнірна схема (рис.12.5,б) системи (рис.12.5,а) має нерухомі вузли A , B і C . Вузли D , E і F приєднані до них вертикальними стержнями, тобто не можуть мати вертикальних переміщень. Але у горизонтальному напрямі вони з'єднуються тільки між собою, не маючи прикріплення до якогось нерухомого вузла. Отже, один із цих вузлів, наприклад вузол D , необхідно закріпити горизонтальним опорним стержнем. Тоді вузол D стає нерухомим, і вузол E приєднується до нього і вузла B , а потім вузол F – до E і C відповідно парами стержнів DE і BE та EF і CF , які не лежать на одній прямій кожна. Отже, вихідна система має одне незалежне поступальне переміщення.

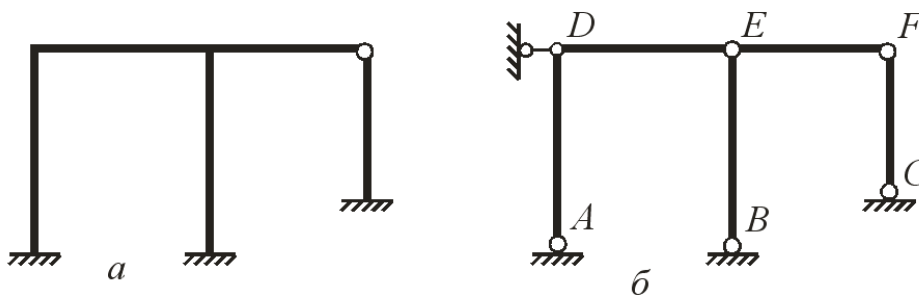


Рис.12.5

У шарнірній схемі (рис.12.6,б) системи (рис.12.6,а) вузол B приєднаний до нерухомого вузла A вертикальним стержнем AB , тобто не може мати вертикального переміщення, але в горизонтальному напрямі він приєднаний до вузла C , який разом з вузлом D не закріплений від горизонтальних переміщень. Тому у вузлі B (або у вузлі C чи D) слід встановити горизонтальний опорний стержень.

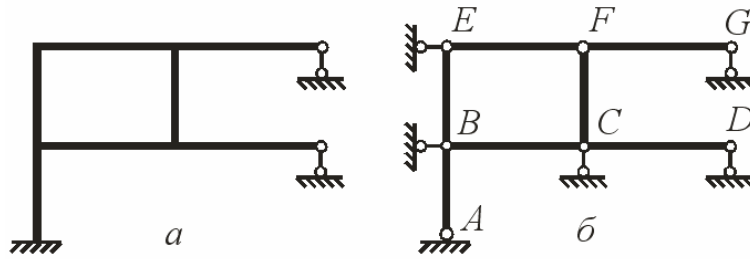


Рис.12.6

Вузол C прикріплений горизонтальним стержнем BC до нерухомого вже вузла B , але по вертикалі він може рухатись разом із вузлом F . Тому вузли C або F треба закріпити вертикальним опорним стержнем. Тоді й вузол D буде прикріплений двома стержнями, що не лежать на одній прямій – CD , до вузла C і вертикальним опорним стержнем до землі. Вузол E , прикріплений по вертикалі до вузла B стержнем BE , теж треба закріпити горизонтальним опорним стержнем, зважаючи на те, що вузли F і G теж можуть пересуватися по горизонталі. Тепер вузли F і G стають нерухомими, маючи приєднання до вже нерухомих вузлів парами стержнів, що не лежать на одній прямій. Отже, вихідна рама має три незалежні поступальні переміщення.

Розглянемо систему, зображену на рис.12.7,а. Її шарнірна схема (рис.12.7,б) має шість нерухомих вузлів: A, B, C, G, H і L .

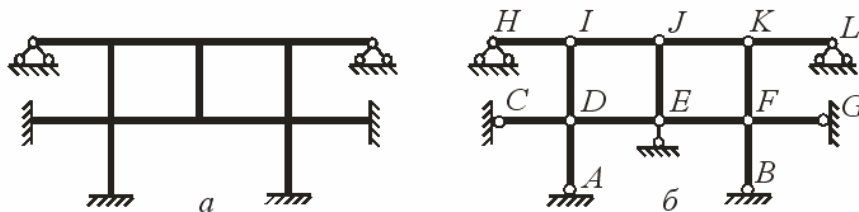


Рис.12.7

Вузли D і F приєднуються до нерухомих вузлів парами стержнів (CD і AD та BF і GF відповідно), кожна з яких не лежить на одній прямій. Отже, вони теж нерухомі. Розглядаючи далі вузол E , ми бачимо, що він приєднується до вузлів D і F двома стержнями DE і EF , які лежать на одній прямій. Отже, вузол E може мати вертикальне переміщення, якому не заважає прикріплення до вузла J , який теж не закріплений у цьому напрямі. Тому у вузлі E або J необхідно встановити

додатковий вертикальний опорний стержень. Незавжди побачити, що після цього інші вузли не можуть мати поступальних переміщень. Таким чином, вихідна система має одне незалежне поступальне переміщення.

Шарнірна схема (рис.12.8,б) системи (рис.12.8,а) має однакову кількість шарнірних вузлів і стержнів з попередньою шарнірною схемою (рис.12.7,б), тобто кількісний етап кінематичного аналізу цих двох схем збігається. Але внаслідок того, що в останньому випадку вузол *E* приєднується до вузлів *D* і *F* двома стержнями *DE* і *EF*, які не лежать на одній прямій, він є нерухомим. Отже, вихідна система не має незалежних поступальних переміщень.

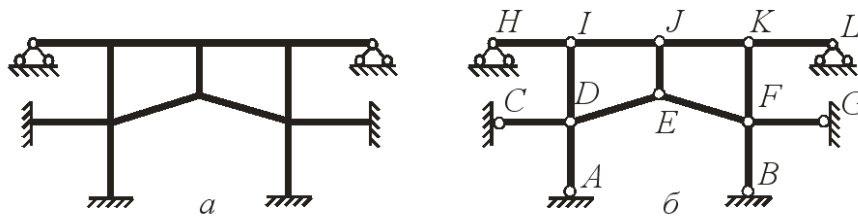


Рис.12.8

Ще раз нагадаємо, що для побудови основної системи методу переміщень необхідно встановити рухомі затиснення в усі жорсткі вузли та додаткові опорні стержні для виключення незалежних поступальних переміщень усіх вузлів. Основні системи методу переміщень для систем, зображених на рис.12.4 – 12.8, показані на рис.12.9,а, б, в, г, д.

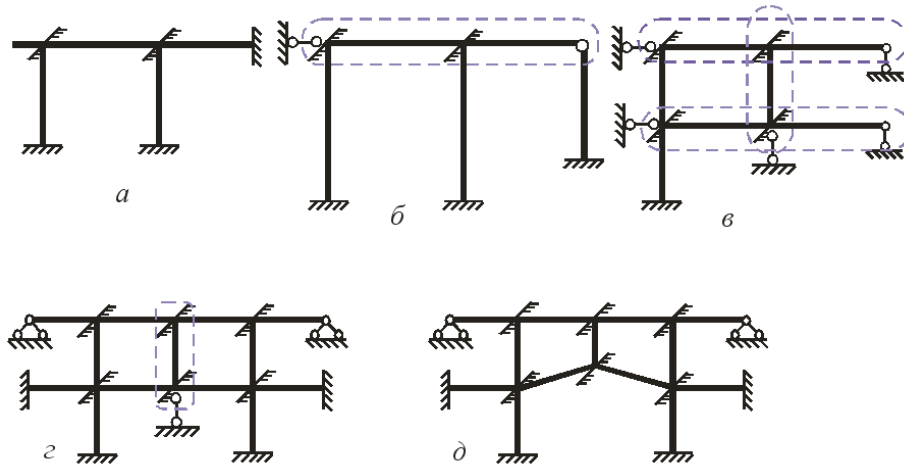


Рис.12.9

В основних системах вихідні конструкції перетворюються у набори однопрогонових балок з нерухомими опорами.

Між вихідною статично невизначуваною конструкцією та її основною системою існують дві суперечності:

- жорсткі вузли вихідної конструкції можуть мати кутові та всі вузли – поступальні переміщення, можливість яких в основній системі усуваються додатковими в'язями;
- у додаткових в'язях основної системи від навантаження виникають реактивні сили, яких немає у вихідній конструкції через відсутність цих в'язей.

Перша з цих суперечностей усувається введенням основних невідомих методу переміщень, друга – використовується для складання розв'язувальних рівнянь методу.

12.3. Основні невідомі методу переміщень

Як уже зазначалось, вузли вихідної системи при її навантаженні мають переміщення, виключені в'язями, накладеними при створенні основної системи. Саме ці переміщення обираються як основні невідомі методу переміщень.

Таким чином, **основними невідомими методу переміщень є кути повороту жорстких вузлів системи та незалежні поступальні переміщення її вузлів**. Ці невідомі при використанні канонічної форми методу переміщень позначаються літерами Z_i ($i = 1, 2, 3, \dots$).

Наприклад, основна система і основні невідомі методу переміщень для рами ([рис.12.5.а](#)) зображені на рис.12.10.

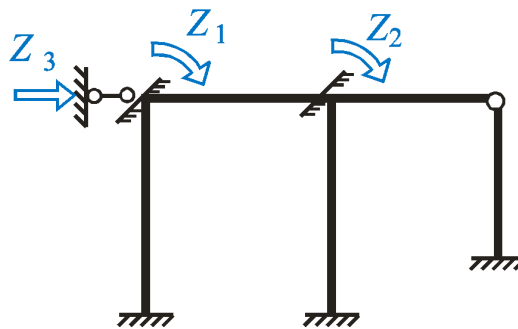


Рис.12.10

Для зручності обчислень доцільно спочатку нумерувати невідомі кутові переміщення, а потім – поступальні, хоча принципово це не має жодного значення.

Кількість основних невідомих методу переміщень називається **ступенем кінематичної невизначуваності системи**. Її можна визначити за формулою

$$k = k_{\varphi} + k_{\delta}, \quad (12.1)$$

де k_{φ} – кількість кутових переміщень жорстких вузлів системи, k_{δ} – кількість незалежних поступальних переміщень її вузлів.

Отже, для системи, зображеної на [рис.12.4,а](#), маємо ступінь кінематичної невизначуваності $k=2+0=2$, на [рис.12.5,а](#) – $k=2+1=3$, на [рис. 12.6,а](#) – $k=4+3=7$, на [рис.12.7,а](#) – $k=6+1=7$, на [рис.12.8,а](#) – $k=6+0=6$.

Таким чином, **ступінь кінематичної невизначуваності дорівнює мінімальній кількості додаткових в'язей, які повністю закріплюють вузли системи від можливих кутових і поступальних переміщень.**

12.4. Розв'язувальні рівняння методу переміщень

Для складання розв'язувальних рівнянь методу переміщень використовуємо другу суперечність між вихідною розрахунковою схемою та її основною системою. Вона полягає в тому, що в додаткових в'язях основної системи від навантаження виникають реактивні сили, яких немає у вихідній конструкції через відсутність цих в'язей. Отже, необхідно скласти математичні умови рівності нулю реакцій накладених в'язей.

Виведення розв'язувальних рівнянь методу переміщень виконаємо, використовуючи як приклад вже знайому нам тричі кінематично невизначувану систему ([рис.12.11,а](#)). Її основна система і невідомі методу переміщень зображені на [рис.12.11,б](#). Для усунення відмін у деформаціях надамо додатковим в'язям поки що невідомі дійсні переміщення вузлів і розглянемо окремі стани цієї основної системи, в кожному з яких на неї діє один чинник.

У стані 1 ([рис.12.11,в](#)) перший жорсткий вузол повертається разом із встановленим рухомим затисненням на кут, що дорівнює Z_1 , у стані 2 ([рис.12.11,г](#)) другий жорсткий вузол повертається разом з встановленим рухомим затисненням на кут Z_2 , у стані 3 ([рис.12.11,д](#)) вузли разом з встановленим опорним стержнем мають поступальне переміщення у його напрямі на величину Z_3 і, нарешті, у вантажному стані P на основну систему діє зовнішнє навантаження.

Як вже згадувалось, у кожному стані у всіх додаткових в'язях виникають реактивні сили. Введемо для цих реактивних сил позначення R_{ik} , перший індекс i якого відповідає номеру додаткової в'язі, де виникає ця реакція, тобто номеру невідомого переміщення, яке усувається цією в'яззю, а другий індекс k відповідає номеру стану, в якому виникає реакція. Ці реактивні сили зображені у відповідних станах основної системи на [рис.12.11,в](#) – [12.11,е](#).

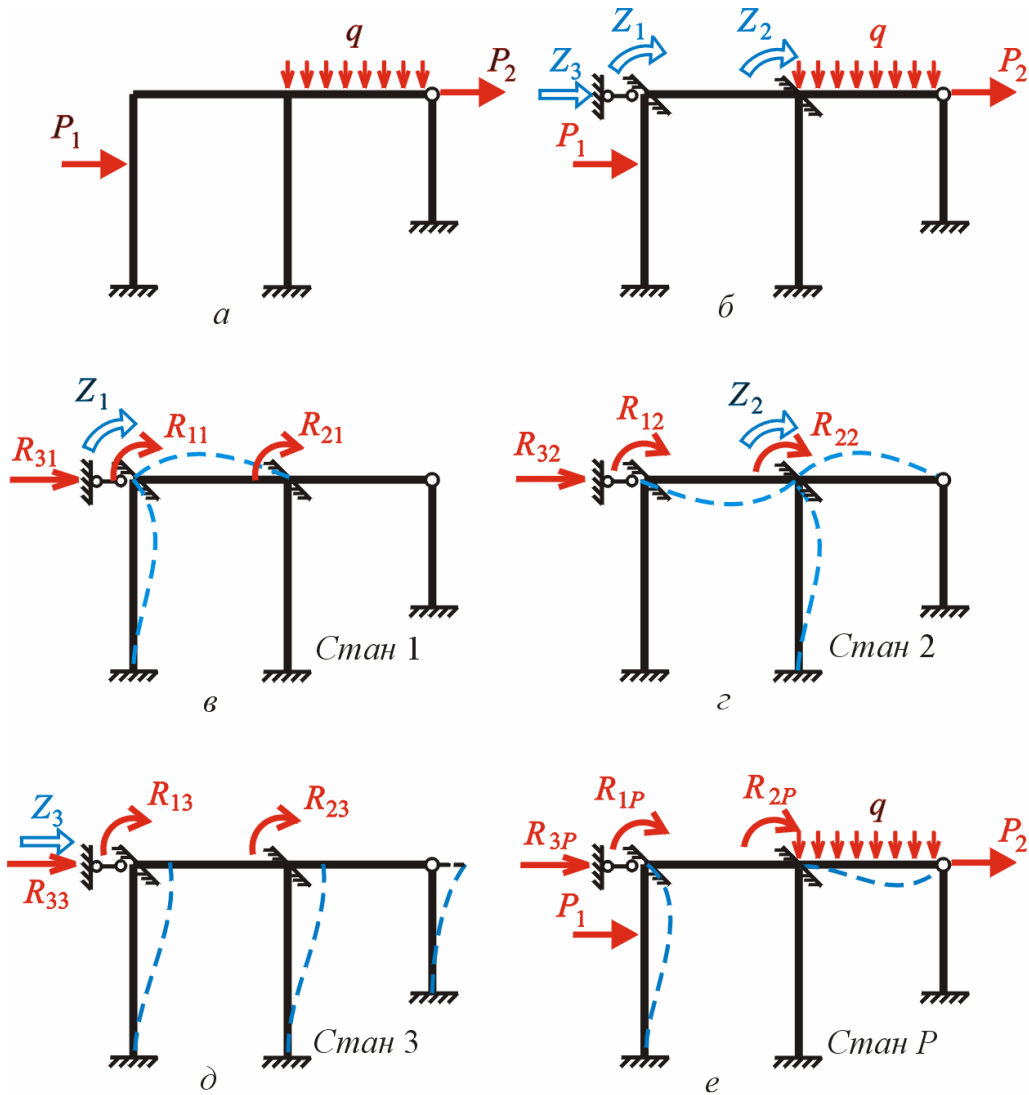


Рис.12.11

На підставі принципу суперпозиції сумарний реактивний момент у першому рухомому затисненні від усіх невідомих переміщень і зовнішнього навантаження дорівнює сумі відповідних реактивних моментів у всіх станах:

$$R_{1\Sigma} = R_{11} + R_{12} + R_{13} + R_{1P}. \tag{12.2}$$

Сумарний реактивний момент у другому рухомому затисненні від усіх невідомих переміщень і зовнішнього навантаження дорівнює сумі відповідних реактивних моментів у всіх станах:

$$R_{2\Sigma} = R_{21} + R_{22} + R_{23} + R_{2P}. \tag{12.3}$$

І нарешті, сумарна реакція в додатковому опорному стержні (третій додатковій в'язі) від усіх невідомих переміщень і зовнішнього навантаження дорівнює сумі реакцій у всіх станах:

$$R_{3\Sigma} = R_{31} + R_{32} + R_{33} + R_{3P}. \tag{12.4}$$

Але ж у вихідній системі ці додаткові в'язі відсутні. Тому для еквівалентності напружено-деформованих станів основної системи та вихідної системи необхідно, щоб сумарні реактивні сили у додаткових в'язях дорівнювали нулю:

$$R_{1\Sigma} = 0; \quad R_{2\Sigma} = 0; \quad R_{3\Sigma} = 0. \quad (12.5)$$

Реакції у додаткових в'язях від переміщення, що дорівнює одиниці (одичне переміщення), називають одичними. Введемо для них позначення r_{ik} . Тоді має місце співвідношення

$$R_{ik} = r_{ik} Z_k. \quad (12.6)$$

Перепишемо вирази (12.2 – 12.4), беручи до уваги формули (12.5) і (12.6):

$$\begin{aligned} r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + r_{13}Z_3 + R_{1P} &= 0; \\ r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + r_{23}Z_3 + R_{2P} &= 0; \\ r_{31}Z_1 + r_{32}Z_2 + r_{33}Z_3 + R_{3P} &= 0. \end{aligned} \quad (12.7)$$

Кількість отриманих рівнянь дорівнює кількості додаткових в'язей, тобто ступеню кінематичної невизначуваності системи, яка, у свою чергу, дорівнює кількості основних невідомих методу переміщень. Система рівнянь (12.7) є розв'язувальними рівняннями методу переміщень.

Фізичний зміст кожного із цих рівнянь полягає в тому, що сумарна реактивна сила у відповідній додатковій в'язі (реактивний момент у рухомому затисненні або реакція накладеного опорного стержня) основної системи методу переміщень від усіх невідомих переміщень і зовнішнього навантаження дорівнює нулю.

Система розв'язувальних рівнянь методу переміщень може бути записана в матричному вигляді як

$$\mathbf{r} \bar{\mathbf{Z}} + \bar{\mathbf{R}} = \bar{\mathbf{0}}, \quad (12.8)$$

де $\bar{\mathbf{Z}}^T = \{Z_1 \quad Z_2 \quad \dots \quad Z_n\}$ – вектор основних невідомих,

$\bar{\mathbf{R}}^T = \{R_{1P} \quad R_{2P} \quad \dots \quad R_{nP}\}$ – вектор вантажних реакцій,

\mathbf{r} – матриця коефіцієнтів системи розв'язувальних рівнянь (матриця жорсткості):

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \dots & r_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{n1} & r_{n2} & \dots & r_{nn} \end{bmatrix}. \quad (12.9)$$

Коефіцієнти r_{ii} (r_{11} , r_{22} , r_{33}), розташовані на головній діагоналі матриці коефіцієнтів системи рівнянь, називаються головними. Їхні величини суттєво додатні. Коефіцієнти r_{ik} (r_{12} , r_{21} , r_{13} , r_{31} тощо) називаються побічними. Згідно з теоремою про взаємність реакцій побічні коефіцієнти, які розташовані симетрично стосовно головної діагоналі, дорівнюють один одному ($r_{ik}=r_{ki}$). Розв'язувальні рівняння (12.7) називаються **системою канонічних рівнянь методу переміщень**.

Для визначення коефіцієнтів і вільних членів системи канонічних рівнянь необхідно мати епюри зусиль в основній системі методу переміщень в одиничних та вантажному станах.

12.5. Епюри зусиль в основній системі методу переміщень

Основна система методу переміщень становить набір однопрогонових балок, зображених на [рис.12.2](#). Балки на рис.12.2,д,з і еквівалентні до них за припущеннями методу переміщень балки на рис.12.2,а,г статично визначувані. Отже, епюри внутрішніх зусиль для таких елементів основної системи будуються за допомогою умов рівноваги.

Для побудови епюр зусиль у елементах, що становлять статично невизначувані балки, показані на рис.12.2,б,в або еквівалентні до них на рис.12.2,е,ж, необхідно заздалегідь визначити зусилля у таких балках від дії різних зовнішніх чинників. Ці розв'язки можна здобути в різні способи.

Для прикладу розглянемо використання методу сил для побудови епюри зусиль у статично невизначуваній балці постійної жорсткості з одним затисненням, а іншим шарнірно опертим кінцем від змушених переміщень опори.

1) Поворот затиснення на одиничний кут (рис.12.12,а).

Обираємо основну систему методу сил, замінюючи затиснення шарнірно нерухомою опорою (рис.12.12,б).

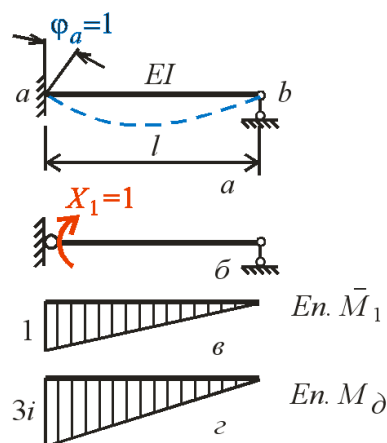


Рис.12.12

Основним невідомим буде реактивний момент X_1 у відкинутому затисненні, напрям якого збігається з кутом повороту. Виходячи з фізичного змісту, канонічне рівняння методу сил можна записати у вигляді

$$\delta_{11} X_1 = 1. \quad (12.10)$$

Будуємо одиничну епюру моментів \bar{M}_1 (рис.12.12,в) і обчислюємо коефіцієнт рівняння:

$$\delta_{11} = \sum_0^l \int \frac{\bar{M}_1^2}{EI} dx = \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot l \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{l}{3EI}.$$

Розв'язуючи (12.10), дістаємо

$$X_1 = \frac{3EI}{l}.$$

Введемо поняття **погонної жорсткості стержня**:

$$i_{ab} = \frac{(EI)_{ab}}{l_{ab}}. \quad (12.11)$$

Тоді, беручи до уваги відсутність вантажної епюри, маємо дійсну епюру згинальних моментів (рис.12.12,г), що визначається за формулою

$$M_{\partial} = \bar{M}_1 X_1.$$

2) Поступальне одиничне переміщення шарнірної опори (рис. 12.13,а).

У цьому випадку зручно обрати основну систему методу сил, відкинувши опору, що переміщується (рис. 12.13,б).

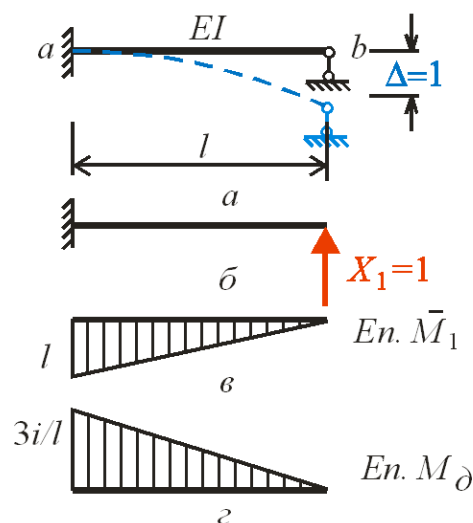


Рис.12.13

Основним невідомим буде вертикальна реакція відкинутої опори. Напрямок реакції береться протилежним напрямку переміщення. Виходячи з фізичного змісту, канонічне рівняння методу сил можна записати у вигляді

$$\delta_{11} X_1 = -1. \quad (12.12)$$

Будуємо одиничну епюру моментів \bar{M}_1 (рис.12.13,в) і обчислюємо коефіцієнт рівняння:

$$\delta_{11} = \sum \int_0^l \frac{\bar{M}_1^2}{EI} dx = \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot l \cdot \frac{2}{3} \cdot l = \frac{l^3}{3EI}.$$

Розв'язавши рівняння (12.12), маємо: $X_1 = -3EI/l^3$, що дає змогу, врахувавши формулу (12.11), дістати дійсну епюру згинальних моментів (рис.12.13,г).

Таким самим чином можна побудувати епюри згинальних моментів від будь-якого навантаження.

Для статично невизначуваної балки постійної жорсткості, затисненої на обох кінцях (рис.12.2,в,ж), побудова епюри потребує розв'язання системи двох канонічних рівнянь методу сил.

Результати розрахунків однопрогонових балок із різними граничними умовами при деяких діях наведено в [Додатку 2](#). Погонні жорсткості i_{ab} і довжини прогонів l_{ab} відповідно позначено через i та l . Тут містяться значення опорних (кінцевих) зусиль та епюри згинальних моментів для однопрогонових статично невизначуваних балок при різних діях.

Одиничні та вантажні епюри для основної системи методу переміщень являють собою сукупність епюр в окремих балках, що складають цю систему, від переміщень їх опор або від дії місцевого навантаження. Побудова цих епюр від одиничних значень невідомих кутів повороту вузлів, тобто опор балок, та зовнішнього навантаження не викликає ускладнень. У разі ж, коли необхідно побудувати епюру від невідомого поступального переміщення вузлів, спочатку потрібно з'ясувати, опори яких стержнів основної системи і на яку саме величину переміщуються при одиничному значенні відповідного невідомого. Це зручно виконати за допомогою **картини перекосів шарнірної схеми рами**.

Картину перекосів від одиничного значення невідомого поступального переміщення можна дістати, розглядаючи шарнірну схему з додатковими опорними стержнями, що були введені для перетворення її в геометрично незмінювану систему. Необхідно надати одиничне переміщення додатковому опорному стержню у напрямі невідомого і визначити відповідні переміщення всіх вузлів і нові положення стержнів. Якщо всі стержні, що отримують перекося, паралельні, картина перекосів буде утворюватися за допомогою простих міркувань.

Наприклад, для побудови картини перекосів шарнірної схеми, наведеної на рис.12.5,б, від невідомого поступального переміщення $Z_3=1$ (рис.12.10) потрібно перемістити у напрямку цього невідомого додатковий опорний стержень разом із вузлом D . Унаслідок незмінності довжини стержнів DE і EF вузли E і F матимуть таке саме переміщення, як і вузол D . За припущеннями методу переміщень відстань по вертикалі між вузлами A і D , B і E , C і F не змінюється. Тому вузли D , E і F не матимуть вертикальних переміщень. Отже, ми можемо одержати картину перекосів (рис.12.14). Це свідчить, що у відповідному одиничному стані взаємне переміщення кінців мають стержні AD , BE і CF і саме на цих стержнях буде епюра згинальних моментів.

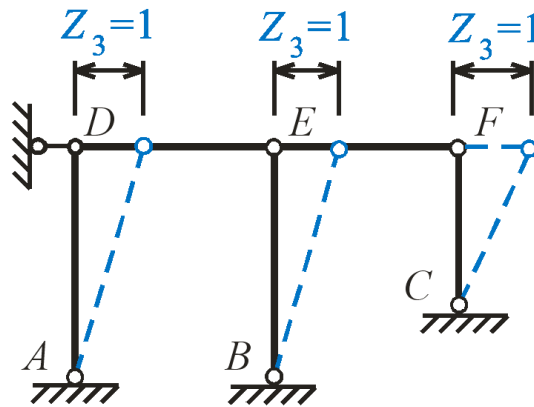


Рис.12.14

Для шарнірної схеми на рис.12.6,б необхідно побудувати картини перекосів від кожного з трьох невідомих поступальних переміщень (рис.12.9,в) $Z_5 = 1$, $Z_6 = 1$ і $Z_7 = 1$. Ці картини показані на рис.12.15,а,б,в.

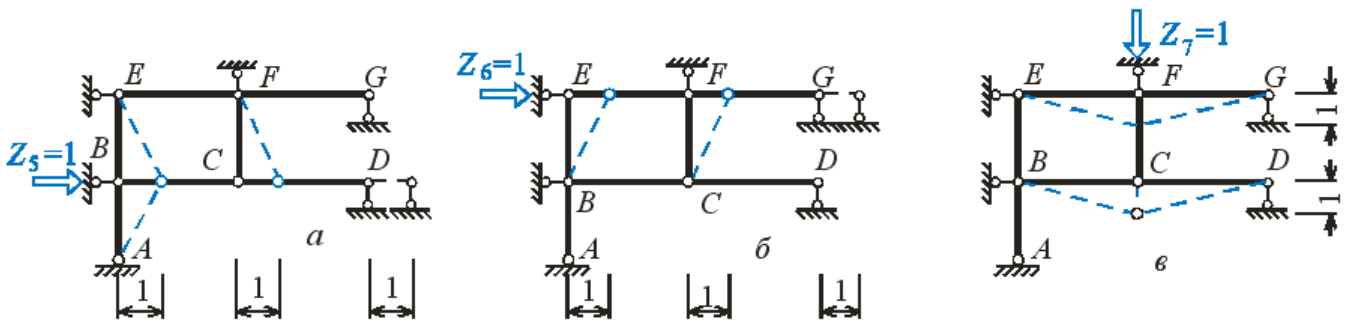


Рис.12.15

Для систем, перекози в яких одержують непаралельні між собою стержні, означена задача розв'язується за допомогою діаграми переміщень (діаграма Віллію). Цей спосіб далі розглядатиметься на окремому прикладі (див. п. 12.11.3).

На рис.12.16,в,г,д,е побудовані одиничні та вантажна епюри згинальних моментів в основній системі методу переміщень (рис. 12.16,б) рами, зображеної на рис.12.16,а.

12.6. Статичний спосіб визначення коефіцієнтів і вільних членів системи канонічних рівнянь

За статичним способом коефіцієнти і вільні члени системи канонічних рівнянь методу переміщень визначаються, виходячи з іншого фізичного змісту. Нагадаємо, що коефіцієнт або вільний член становить реактивне зусилля, що виникає у відповідній додатковій в'язі основної системи від одиничного значення невідомого переміщення або від зовнішнього навантаження. Додатні напрями реактивних зусиль збігаються з напрямками відповідних невідомих переміщень. Ці реактивні зусилля поділяються на два види, що відрізняються за технологією їхнього обчислення.

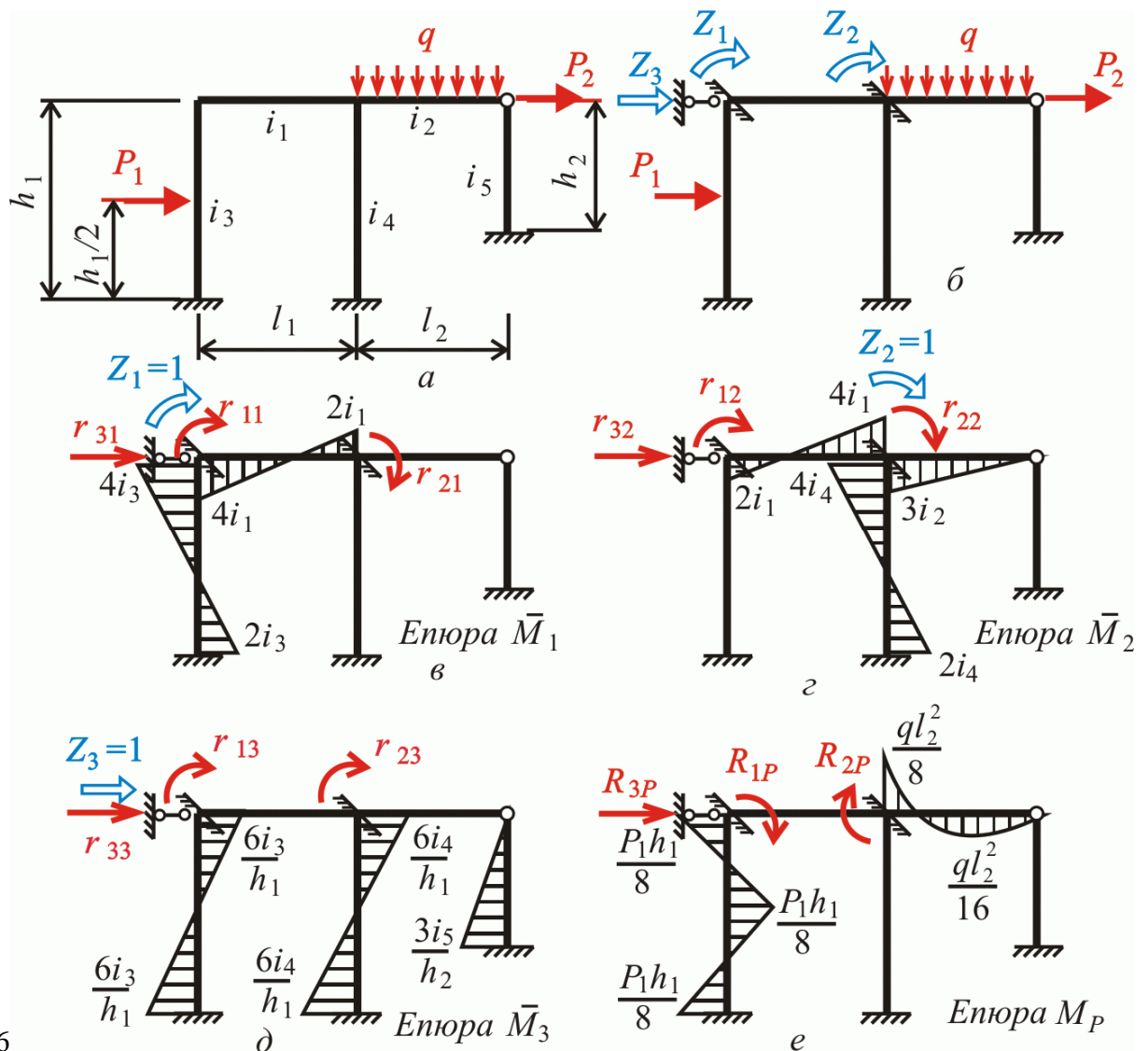


Рис.12.16

12.6.1. Реактивні моменти у введених рухомих затисненнях

Для визначення реактивного моменту необхідно виокремити вузол основної системи з відповідним рухомих затисненням. До вузла прикладається невідомий реактивний момент у

рухомому затисненні, а також згинальні моменти в перерізах стержнів, які одержують з епюри згинальних моментів відповідного одиничного або вантажного стану основної системи.

Так для рами на рис.12.16,а коефіцієнт r_{11} – це реактивний момент у рухомому затисненні, встановленому у вузлі D основної системи (рис.12.16,б), від одиничного кута повороту $Z_1=1$, тобто в першому одиничному стані. Для його визначення виокремимо вузол D і прикладаємо до нього реактивний момент і згинальні моменти у перерізах стержнів AD і DE , одержані з епюри згинальних моментів першого одиничного стану (рис.12.16,в). Складаємо рівняння рівноваги цього виокремленого вузла (рис.12.17,а):

$$\sum M_D = r_{11} - 4i_1 - 4i_3 = 0,$$

звідки одержуємо $r_{11} = 4i_1 + 4i_3$.

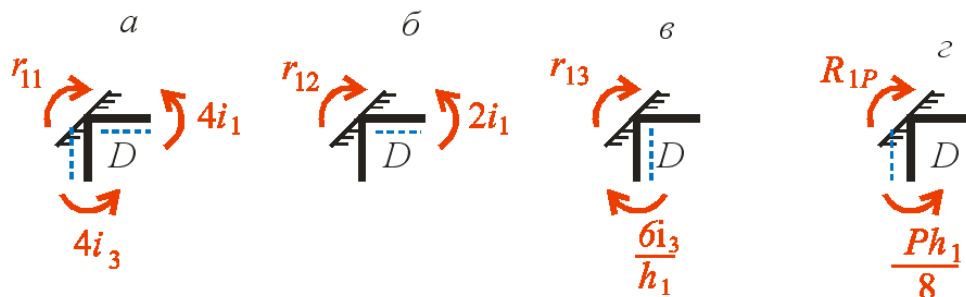


Рис.12.17

На схемах вузлів пунктиром позначено, з якого боку розташовано розтягнені волокна на стержнях. Це визначається по відповідним епюрам згинальних моментів (при побудові епюри відкладаються з боку розтягнених волокон) і допомагає правильно спрямувати кінцеві моменти.

Коефіцієнт r_{12} – це реактивний момент у рухомому затисненні, встановленому у вузлі D основної системи, від одиничного кута повороту $Z_2=1$, тобто в другому одиничному стані. Вирізаємо той самий вузол D (рис.12.17,б) і складаємо рівняння його рівноваги:

$$\sum M_D = r_{12} - 2i_1 = 0, \quad \text{звідки } r_{12} = 2i_1.$$

Коефіцієнт r_{13} – це реактивний момент у рухомому затисненні, встановленому у вузлі D основної системи, від одиничного поступального переміщення $Z_3=1$, тобто в третьому одиничному стані. Виокремлюємо той самий вузол D (рис.12.17,в) і складаємо рівняння його рівноваги:

$$\sum M_D = r_{13} + \frac{6i_3}{h_1} = 0 \quad \Rightarrow \quad r_{13} = -\frac{6i_3}{h_1}.$$

Вільний член R_{1P} – це реактивний момент у рухомому затисненні, встановленому у вузлі D основної системи, від зовнішнього навантаження, тобто у вантажному стані. Знову виокремлюємо вузол D (рис.12.17,г) і складаємо рівняння його рівноваги:

$$\sum M_D = R_{1P} - \frac{Ph_1}{8} = 0 \Rightarrow R_{1P} = \frac{Ph_1}{8}.$$

На рис.12.18 наведено вузол E , рівновагу якого слід розглянути для визначення коефіцієнтів і вільного члена другого рядка системи канонічних рівнянь, що являють собою реактивні моменти в рухомому затисненні, встановленому в цьому вузлі основної системи, від одиничних невідомих переміщень і зовнішнього навантаження.

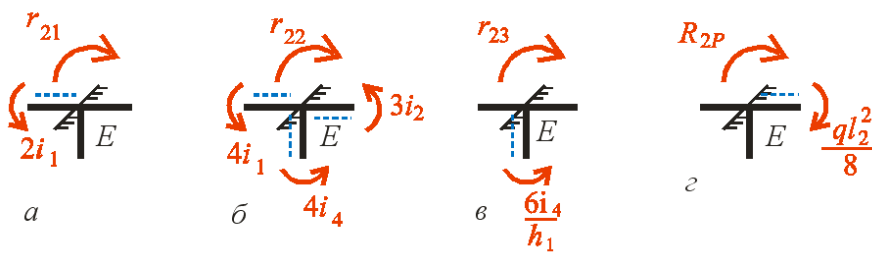


Рис.12.18

З рис.12.18,а маємо $\sum M_E = r_{21} - 2i_1 = 0$, отже, $r_{21} = 2i_1$.

З рис. 12.18,б: $\sum M_E = r_{22} - 4i_1 - 3i_2 - 4i_4 = 0$, $r_{22} = 4i_1 + 3i_2 + 4i_4$.

З рис.12.18,в: $\sum M_E = r_{23} + \frac{6i_4}{h_1} = 0$, $r_{23} = -\frac{6i_4}{h_1}$.

З рис.12.18,г: $\sum M_E = R_{2P} + \frac{ql_2^2}{8} = 0$, $R_{2P} = -\frac{ql_2^2}{8}$.

12.6.2. Реакції у додаткових опорних стержнях

До другого виду коефіцієнтів і вільних членів системи канонічних рівнянь методу переміщень належать такі, що за фізичним змістом є силовими реакціями у додаткових опорних стержнях, введених при створенні основної системи. Для обчислення їхньої величини за статичним способом необхідно розглянути умови рівноваги відокремленого фрагмента основної системи.

Для визначення положення перетину, що виокремлює потрібний фрагмент, зручно знову скористатися картиною перекосів шарнірної схеми. Він повинен проходити через додатковий стержень, в якому обчислюється реакція, а також через усі стержні основної системи, які зазнають перекося від невідомого поступального переміщення у напрямі цього додаткового стержня. Зауважимо, що стержень доцільно перерізати нескінченно близько до одного з його кінців.

Картина перекосів на [рис.12.14](#), наприклад, свідчить, що від невідомого поступального переміщення Z_3 зазнають перекосів стержні AD , BE і CF . Отже, перетин повинен проходити саме через ці три стержні і додатковий опорний стержень, прикріплений до вузла D . Цей перетин зображено на [рис.12.16,б](#). Рама на [рис.12.6,а](#) має три незалежні поступальні переміщення, картини перекосів від яких побудовані на [рис.12.15](#). Отже, для обчислення коефіцієнтів і вільних членів другого виду від основної системи цієї рами необхідно виокремити три різні фрагменти. Перетини для одержання цих фрагментів показані на [рис.12.9,в](#).

До відокремленого фрагмента слід прикласти всі сили, що діють на нього, в тому числі зусилля в перерізах. Поперечні сили в перерізах можна отримати з епюр згинальних моментів відповідного одиничного або вантажного стану, використовуючи диференціальну залежність Q від M . Шукана реакція у додатковому опорному стержні визначається з рівняння рівноваги у вигляді суми проєкцій на вісь. Цю вісь краще вибирати так, щоб на неї не проектувались невідомі поздовжні сили в перерізах.

Для прикладу обчислимо коефіцієнти і вільний член третього рядка системи канонічних рівнянь для розрахунку рами, зображеної на [рис.12.16,а](#).

Коефіцієнт r_{31} – це реакція в додатковому опорному стержні від одиничного кута повороту $Z_1=1$, тобто в першому одиничному стані. Для його визначення перетином, показаним на [рис.12.16,б](#), виокремлюємо фрагмент основної системи (рис.12.19,а).

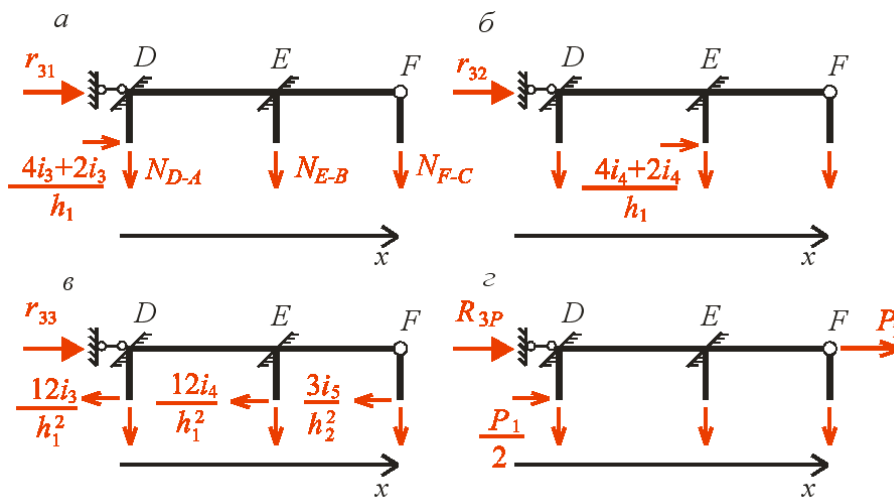


Рис.12.19

До цього фрагмента прикладаємо шукану реакцію перерізаного опорного стержня у напрямі, що збігається з напрямом невідомого переміщення Z_3 та поперечні й поздовжні сили у перерізах стержнів AD , BE і CE . Величини та напрямки поперечних сил визначаємо за диференціальною залежністю від епюри згинальних моментів першого одиничного стану \bar{M}_1 . Ця епюра на стержнях

BE і CE відсутня, звідки випливає, що поперечні сили на цих стержнях також нульові. На стержні AD величина поперечної сили дорівнює тангенсу нахилу до стержня дотичної до епюри \bar{M}_1 , тобто

$$\frac{4i_3 + 2i_3}{h_1} = \frac{6i_3}{h_1}, \text{ а її величина від'ємна, тому що епюра моментів відхиляється від напрямку стержня}$$

проти руху годинникової стрілки. Отже, прикладаємо поперечну силу у перерізі стержня таким чином, щоб вона поверталась навколо вузла D проти ходу годинникової стрілки. Величини поздовжніх сил та згинальних моментів не визначаємо через те, що вони не входять до необхідного рівняння рівноваги. Для визначення реакції r_{31} складаємо рівняння рівноваги фрагмента:

$$\Sigma F_x = \frac{6i_3}{h_1} + r_{31} = 0 \Rightarrow r_{31} = -\frac{6i_3}{h_1}.$$

Коефіцієнт r_{32} – це реакція в додатковому опорному стержні від одиничного кута повороту $Z_2=1$, тобто в другому одиничному стані.

Для його визначення вирізаємо той самий фрагмент основної системи і прикладаємо до нього поперечні сили другого одиничного стану (рис.12.19,б). Епюра моментів i , відповідно, поперечна сила є лише на одному перерізаному стержні BE .

Складаємо рівняння рівноваги:

$$\Sigma F_x = \frac{6i_4}{h_1} + r_{32} = 0 \Rightarrow r_{32} = -\frac{6i_4}{h_1}.$$

Коефіцієнт r_{33} – це реакція в додатковому опорному стержні від одиничного кута повороту $Z_3=1$, тобто в третьому одиничному стані.

Для його визначення вирізаємо той самий фрагмент основної системи і прикладаємо до нього сили третього одиничного стану (рис.12.19,в). Епюри моментів i , відповідно, поперечні сили є на трьох перерізаних стержнях AD , BE і CE . Складаємо рівняння рівноваги:

$$\Sigma F_x = -\frac{12i_3}{h_1^2} - \frac{12i_4}{h_1^2} - \frac{3i_5}{h_2^2} + r_{33} = 0 \Rightarrow r_{33} = \frac{12i_3}{h_1^2} + \frac{12i_4}{h_1^2} + \frac{3i_5}{h_2^2}.$$

Вільний член R_{3P} – це реакція в додатковому опорному стержні основної системи від зовнішнього навантаження, тобто у вантажному стані. Знов виокремлюємо той самий фрагмент основної системи і прикладаємо до нього всі сили вантажного стану (рис.12.19,г). Складаємо рівняння рівноваги

$$\Sigma F_x = \frac{P_1}{2} + P_2 + R_{3P} = 0 \Rightarrow R_{3P} = -\frac{P_1}{2} - P_2.$$

Підставимо визначені коефіцієнти та вільні члени в систему канонічних рівнянь:

$$\begin{aligned} 4(i_1 + i_3)Z_1 + 2i_1Z_2 - \frac{6}{h_1}i_3Z_3 + \frac{P_1h_1}{8} &= 0; \\ 2i_1Z_1 + (4(i_1 + i_4) + 3i_2)Z_2 - \frac{6}{h_1}i_4Z_3 - \frac{ql_2^2}{8} &= 0; \\ -\frac{6}{h_1}i_3Z_1 - \frac{6}{h_1}i_4Z_2 + \left(\frac{12(i_3 + i_4)}{h_1^2} + \frac{3i_5}{h_2^2}\right)Z_3 - \frac{P_1}{2} - P_2 &= 0. \end{aligned}$$

Ця система рівнянь на головній діагоналі має додатні коефіцієнти, побічні коефіцієнти є симетричними стосовно головної діагоналі. Це дає змогу частково перевірити обчислення коефіцієнтів системи рівнянь.

Розв'язавши систему канонічних рівнянь, знайдемо основні невідомі методу переміщень.

12.7. Побудова канонічних рівнянь за допомогою варіаційного принципу Лагранжа

Канонічні рівняння методу переміщень можна одержати на підставі варіаційного принципу Лагранжа. Справді, будь-яке переміщення Δ або зусилля, наприклад, згинальний момент M , в кінематично невизначуваній системі можуть бути представлені у вигляді лінійних комбінацій:

$$\Delta = \bar{\delta}_1 Z_1 + \bar{\delta}_2 Z_2 + \dots + \bar{\delta}_i Z_i + \dots + \bar{\delta}_n Z_n + \Delta_p, \quad (12.13)$$

$$M = \bar{M}_1 Z_1 + \bar{M}_2 Z_2 + \dots + \bar{M}_i Z_i + \dots + \bar{M}_n Z_n + M_p. \quad (12.14)$$

У цих співвідношеннях $\bar{\delta}_1, \bar{\delta}_2, \dots, \bar{\delta}_n$ – переміщення, а $\bar{M}_1, \bar{M}_2, \dots, \bar{M}_n$ – згинальні моменти в основній системі методу переміщень, зумовлені дією основних невідомих Z_1, Z_2, \dots, Z_n , які дорівнюють одиниці; Δ_p, M_p – відповідні переміщення і згинальний момент від зовнішнього навантаження.

Повна потенціальна енергія основної системи при урахуванні лише деформацій згину запишеться у вигляді

$$\Pi = U + A = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \int_0^{l_k} EI \kappa^2 dx - P \Delta, \quad (12.15)$$

де n – кількість стержнів, P і Δ – узагальнене зовнішнє навантаження і відповідне узагальнене переміщення. Умова стаціонарності повної потенціальної енергії:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial Z_i} = \sum_{k=1}^n \int_0^{l_k} EI \kappa \frac{\partial \kappa}{\partial Z_i} dx - P \frac{\partial \Delta}{\partial Z_i} = 0, \quad (i=1, 2, \dots, n). \quad (12.16)$$

Враховуючи те, що кривизна κ може бути виражена через згинальний момент

$$\kappa = \frac{M}{EI},$$

запишемо

$$\kappa = \frac{\bar{M}_1 Z_1 + \bar{M}_2 Z_2 + \dots + \bar{M}_i Z_i + \dots + \bar{M}_n Z_n + M_p}{EI}, \quad (12.17)$$

звідки

$$\frac{\partial \kappa}{\partial Z_i} = \frac{\bar{M}_i}{EI}. \quad (12.18)$$

Враховуючи також, що $\frac{\partial \Delta}{\partial Z_i} = \bar{\delta}_i$, з (12.16) одержимо:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial Z_i} = \sum_{k=1}^n \int_0^{l_k} \frac{(\bar{M}_1 Z_1 + \bar{M}_2 Z_2 + \dots + \bar{M}_n Z_n + M_p) \bar{M}_i}{EI} dx - P \bar{\delta}_i. \quad (12.19)$$

Після нескладних перетворень маємо:

$$\begin{aligned} & Z_1 \sum_{k=1}^n \int_0^{l_k} \frac{\bar{M}_1 \bar{M}_i}{EI} dx + Z_2 \sum_{k=1}^n \int_0^{l_k} \frac{\bar{M}_2 \bar{M}_i}{EI} dx + \dots + \\ & + Z_n \sum_{k=1}^n \int_0^{l_k} \frac{\bar{M}_n \bar{M}_i}{EI} dx + \sum_{k=1}^n \int_0^{l_k} \frac{M_p \bar{M}_i}{EI} dx - P \bar{\delta}_i = 0. \end{aligned} \quad (12.20)$$

Для з'ясування фізичного змісту коефіцієнтів при невідомих розглянемо раму (рис.12.20,а).

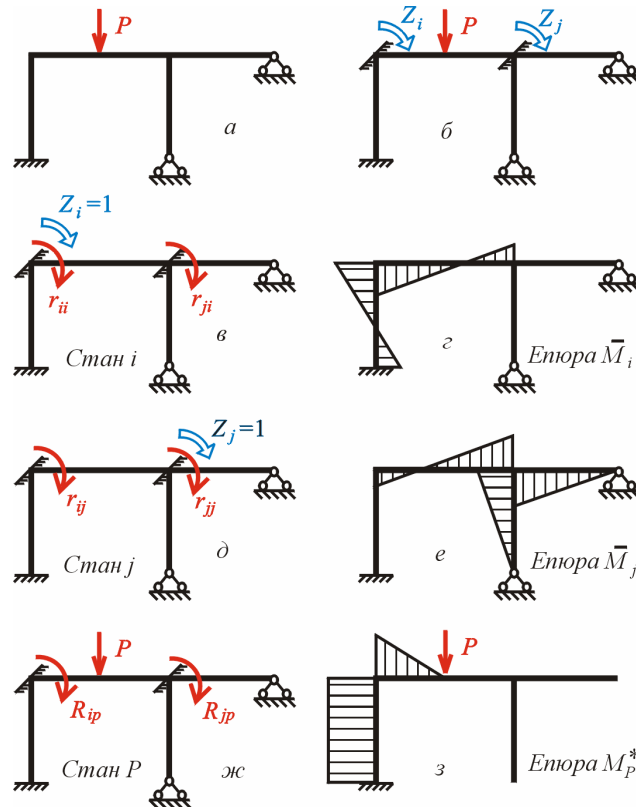


Рис.12.20

Основна система методу переміщень і основні невідомі наведені на рис.12.20,б. На рис.12.20,в і рис.12.20,г зображено допоміжний одиничний стан, зумовлений дією одиничного невідомого $Z_i = 1$ і відповідна епюра \bar{M}_i , побудована в основній системі, а на рис.12.20,д і рис.12.20,е – допоміжний одиничний стан від дії $Z_j = 1$ і одинична епюра \bar{M}_j .

На схемах допоміжних станів зображено узагальнені реакції додаткових в'язей. Як і раніше, всі реакції позначено символом r із двома індексами. Перший індекс відповідає номеру невідомого, в напрямі якого діє реакція, другий – номеру невідомого, який викликає цю реакцію. Отже, r_{ji} – реакція в'язі j від одиничного переміщення $Z_i = 1$.

Можлива робота сил стану i (рис.12.20,в) на переміщення стану j (рис.12.20,д) може бути виражена або через зовнішні сили:

$$A_{ij} = r_{ji} \cdot 1$$

або через внутрішні:

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^n \int_0^{l_k} \frac{\bar{M}_j \bar{M}_i}{EI} dx.$$

Оскільки ці роботи дорівнюють одна одній, можна записати, що

$$r_{ji} = \sum_{k=1}^n \int_0^{l_k} \frac{\bar{M}_j \bar{M}_i}{EI} dx. \quad (12.21)$$

Отже, коефіцієнти при невідомих у рівнянні (12.20) являють собою реакції в додаткових в'язях від одиничних переміщень цих в'язей.

Для з'ясування фізичного змісту вільного члена

$$\sum_{k=1}^n \int_0^{l_k} \frac{M_p \bar{M}_i}{EI} dx - P \delta_i$$

у рівнянні (12.20) розглянемо вантажний стан основної системи (рис.12.20,ж).

Застосуємо до станів i і p теорему про взаємність робіт:

$$A_{pi} = A_{ip}.$$

Робота A_{ip} зовнішніх сил стану i на переміщеннях стану p дорівнюватиме нулю, оскільки у вантажному стані додаткові в'язі не переміщуються. На цій підставі можна вважати, що й аналогічна робота внутрішніх сил дорівнюватиме нулю:

$$\sum_{k=1}^n \int_0^{l_k} \frac{M_p \bar{M}_i}{EI} dx = 0. \quad (12.22)$$

Робота A_{pi} зовнішніх сил стану p на переміщеннях стану i дорівнює роботі внутрішніх сил:

$$A_{pi} = P \delta_{pi} + R_{ip} \cdot 1 = \sum_{k=1}^n \int_0^{l_k} \frac{M_p \bar{M}_i}{EI} dx. \quad (12.23)$$

Порівнюючи рівняння (12.22) і (12.23) доходимо висновку, що

$$P \delta_{pi} + R_{ip} = 0 \Rightarrow R_{ip} = -P \delta_{pi} = -\Delta_{pi}. \quad (12.24)$$

Таким чином, вільний член рівняння (12.20)

$$\sum_{k=1}^n \int_0^{l_k} \frac{M_p \bar{M}_i}{EI} dx - P \delta_i = 0 + R_{ip} = R_{ip}$$

становить реакцію додаткової в'язі i від дії зовнішнього навантаження на основну систему. Отже, рівняння (12.20) може бути переписане в такий спосіб:

$$r_{1i}Z_1 + r_{i2}Z_2 + \dots + r_{in}Z_n + R_{ip} = 0 \quad (12.25)$$

Зрештою, вільний член R_{ip} можна виразити через внутрішні зусилля. Оскільки Δ_{pi} – це переміщення у напрямі зовнішнього навантаження у статично невизначуваній основній системі методу переміщень від $Z_i = 1$, для його визначення достатньо помножити одиничну епюру \bar{M}_i (рис.12.20,г) на вантажну епюру M_p^* , що побудована в будь-якій статично визначуваній системі, яка одержується з основної системи методу переміщень відкиданням “зайвих” в’язей або просто в основній системі методу сил для вихідної схеми, наприклад, в основній системі (рис.12.20,з). Отже, на підставі теореми взаємності реакцій і переміщень

$$R_{ip} = -\Delta_{pi} = -\sum_{k=1}^n \int_0^{l_k} \frac{M_p^* \bar{M}_i}{EI} dx. \quad (12.26)$$

При запису умов стаціонарності по кожному з n невідомих параметрів дістанемо систему n рівнянь:

$$\begin{aligned} r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + \dots + r_{1n}Z_n + R_{1p} &= 0; \\ r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + \dots + r_{2n}Z_n + R_{2p} &= 0; \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots & \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ r_{n1}Z_1 + r_{n2}Z_2 + \dots + r_{nn}Z_n + R_{np} &= 0. \end{aligned}$$

12.8. Визначення дійсних зусиль

Маючи значення основних невідомих Z_1, Z_2, \dots, Z_n методу переміщень, одержаних у результаті розв’язання системи канонічних рівнянь, можна визначити дійсні згинальні моменти за способом накладання:

$$M_\partial = \bar{M}_1 Z_1 + \bar{M}_2 Z_2 + \dots + \bar{M}_n Z_n + M_p, \quad (12.27)$$

де $\bar{M}_1, \bar{M}_2, \bar{M}_n$ – згинальні моменти або їхні епюри в одиничних станах основної системи; M_p – згинальні моменти або їх епюри у вантажному стані основної системи.

Поперечні сили або їхні епюри можна також одержати способом накладання, якщо побудувати епюри поперечних сил в одиничних і вантажному станах. Але простіше визначити дійсні поперечні сили, виходячи з їхньої диференціальної залежності від згинальних моментів:

$$Q_{\partial} = \frac{dM_{\partial}}{dx}. \quad (12.28)$$

Поздовжні сили визначають із рівноваги вузлів рами. З цією метою вирізаються вузли рами, до них прикладаються невідомі поздовжні та поперечні сили у перерізах стержнів, одержані з епюри Q_{∂} , а також зовнішні сили, що діють безпосередньо на вузол. Розв'язання рівнянь рівноваги уможливлє визначення невідомих N_{∂} . Послідовність вирізання вузлів має бути такою, щоб до кожного чергового вузла приєднувалось не більш ніж два стержні, поздовжні сили в яких ще не визначені.

12.9. Перевірки епюри дійсних згинальних моментів

Для визнання епюри дійсних згинальних моментів статично невизначуваної системи правильною необхідно виконати її перевірки – статичну і кінематичну.

Статична перевірка полягає в розгляді рівноваги вузлів системи. З цією метою необхідно вирізати кожний вузол та прикласти до нього моменти у перерізах прикріплених до вузла стержнів і зосереджені моменти зовнішнього навантаження. Величини та напрями моментів у перерізах стержнів беруть із епюри дійсних згинальних моментів, яка саме перевіряється. Рівняння рівноваги вузла у вигляді суми моментів повинні задовольнятися.

Кінематична перевірка полягає (див. [п.11.7](#)) у визначенні переміщення, яке завідомо дорівнює нулю, тобто переміщення у напрямку існуючих в'язей. Для обчислення такого переміщення у статично невизначуваній системі (див. [п.11.6](#)) необхідно відкинути зайві в'язі, перетворивши її у статично визначувану, тобто вибрати основну систему методу сил. Далі до цієї основної системи слід прикласти узагальнену реакцію X_i однієї з відкинутих в'язей (основне невідоме методу сил), надати їй одиничного значення та побудувати епюру \bar{M}_i . Перемноження цієї одиничної епюри на епюру дійсних моментів за формулою Мора

$$\Delta_{i\partial} = \sum \int_0^l \frac{\bar{M}_i M_{\partial}}{EI} dx$$

приведе до одержання переміщення у напрямі однієї із існуючих у вихідній статично невизначуваній системі в'язей. Природно, таке переміщення має дорівнювати нулю.

Перевірку дійсної епюри моментів можна вважати достатньою, якщо задовольняються перевірки всіх завідомо нульових переміщень для обраної основної системи методу сил у напрямках існуючих в'язей. Ці обчислення можна замінити перемноженням дійсної епюри

згинальних моментів на сумарну одиничну епюру \bar{M}_Σ . Зрозуміло, що результат також має дорівнювати нулю.

12.10. Використання симетрії системи

Використання симетрії геометричної схеми призводить до суттєвого зменшення трудомісткості розрахунку за методом переміщень. Розглянемо використання симетрії системи при різних її навантаженнях.

12.10.1. Дія симетричного навантаження

Призначаючи основні невідомі методу переміщень для симетричної системи під дією симетричного навантаження, треба виходити з того, що система може мати при цьому тільки симетричні деформації. Всі переміщення, які призводять до кососиметричних деформацій системи завідомо дорівнюють нулю. Здебільшого для виконання зазначеної умови необхідно призначити групі невідомі переміщення.

Наприклад, для рами на рис.12.21,а, яка має вертикальну вісь симетрії та симетрично завантажена, основна система методу переміщень зображена на рис.12.21,б. Деформація рами буде симетричною, якщо кути повороту симетрично розташованих вузлів C і E та F і H дорівнюватимуть одне одному і матимуть протилежні напрями. Тому доцільно об'єднати означені пари кутів повороту у відповідні групі невідомі Z_1 і Z_2 . Наявність кутів повороту вузлів D і G , які розташовані на осі симетрії, призводить до кососиметричної деформації рами. Тому кути повороту цих вузлів напевно дорівнюють нулю і обирати їх як невідомі немає потреби.

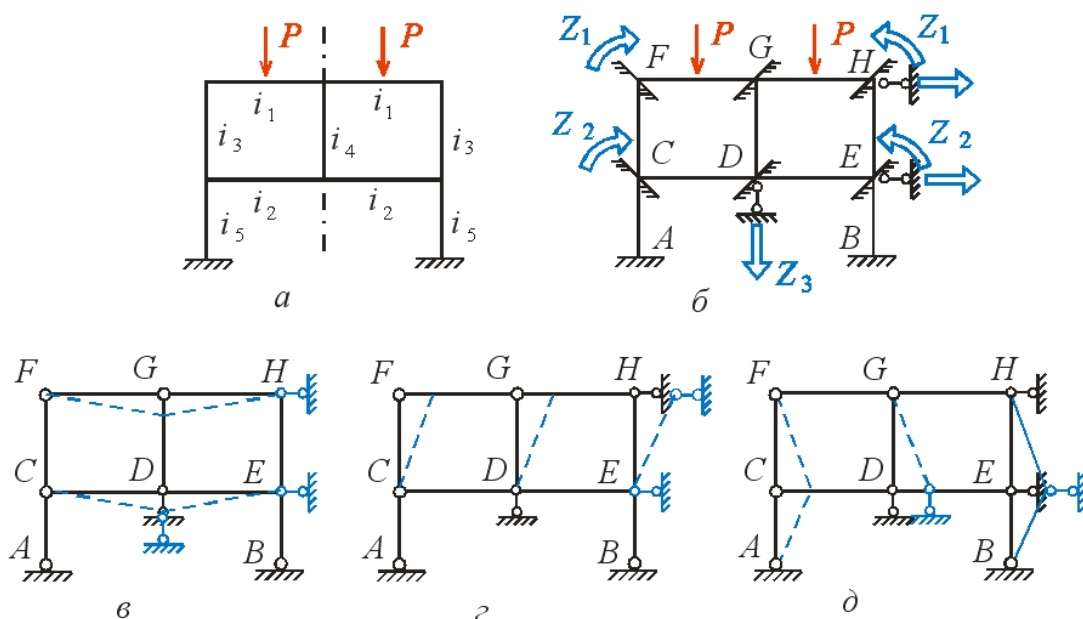


Рис.12.21

Для визначення невідомих поступальних переміщень треба розглянути відповідні картини перекосів шарнірної схеми рами. Картина перекосів на рис.12.21,в дозволяє дійти висновку, що вертикальне переміщення вузлів D і G призводить до симетричної деформації рами. Отже необхідно призначити невідоме поступальне переміщення Z_3 . Картини перекосів на рис.12.21,г,д показують, що горизонтальні переміщення вузлів C , D і E або F , G і H спричинюють несиметричне (кососиметричне) деформування рами. Отже, ці горизонтальні переміщення дорівнюють нулю і відповідно до складу невідомих не включаються.

У наведеному прикладі коефіцієнти першого рядка системи рівнянь являють собою суми реактивних моментів у симетричних вузлах F і H в одиничних або вантажному станах. Завдяки рівності реактивних моментів у симетричних рухомих затисненнях в цих вузлах для обчислення коефіцієнтів і вільних членів розглядається тільки один із вузлів, до якого прикладається половина реактивного моменту (рис. 12.22,а,б). У такий самий спосіб обчислюються також коефіцієнти і вільні члени другого рядка системи рівнянь (рис.12.22,в,г), які являють собою суми реактивних моментів в одиничних або вантажному станах в симетричних вузлах C і E .

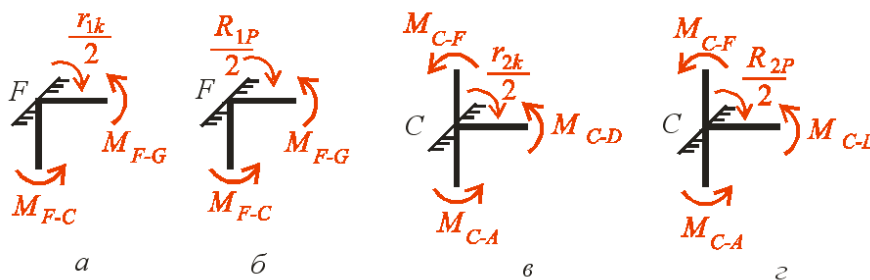


Рис.12.22

12.10.2. Дія кососиметричного навантаження

Під дією кососиметричного навантаження симетрична система може мати тільки кососиметричні деформації. Всі переміщення, які призводять до симетричних деформацій системи напевно дорівнюють нулю.

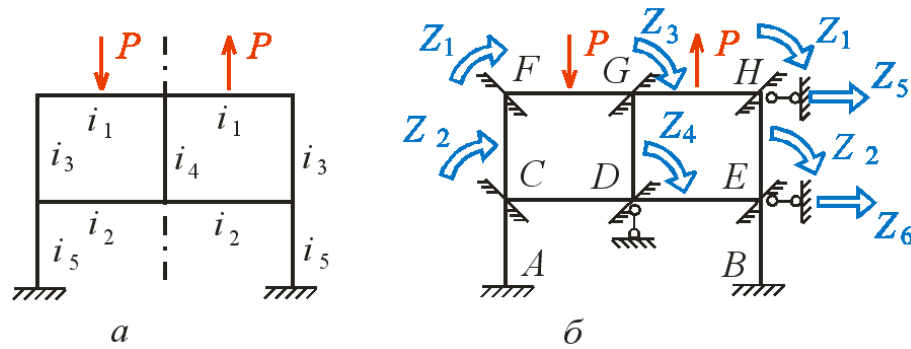


Рис.12.23

Наприклад, для рами на рис.12.23,а, яка має вертикальну вісь симетрії та завантажена кососиметрично, основна система методу переміщень зображена на рис.12.23,б. Деформація рами буде кососиметричною, якщо кути повороту вузлів C і E та F і H дорівнюватимуть один одному і матимуть однакові напрями. Тому треба призначити відповідні групові невідомі Z_1 і Z_2 . Наявність кутів повороту вузлів D і G призводить до кососиметричної деформації, а відтак розглядаємо їх як невідомі Z_3 і Z_4 .

Як уже зазначалось, картина перекосів на [рис.12.21,в](#) дозволяє дійти висновку, що вертикальне переміщення вузлів D і G призводить до симетричної деформації рами. Отже, вертикальне поступальне переміщення цих вузлів напевно дорівнює нулю. Картини перекосів на [рис.12.21,г,д](#) доводять, що горизонтальні переміщення вузлів C, D і E або F, G і H викликають кососиметричне деформування рами. Отже, ці горизонтальні переміщення необхідно розглядати як невідомі Z_5 і Z_6 .

У цьому прикладі коефіцієнти першого та другого рядків системи канонічних рівнянь обчислюються так само, як і при симетричному навантаженні ([рис.12.22,а,б,в,г](#)). Для визначення інших коефіцієнтів і вільних членів, які є реакціями додаткових в'язей, що не мають групових невідомих, необхідно виокремити тільки один вузол або фрагмент і прикладати шукану реакцію в додатковій в'язі повністю (див., наприклад, [рис.12.24,а,б](#))

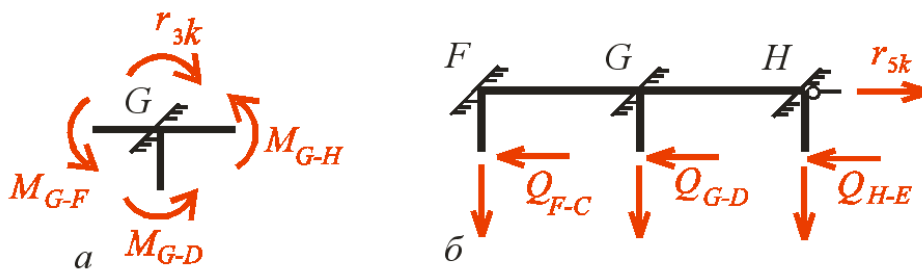


Рис.12.24

12.10.3. Дія навантаження загального вигляду

Якщо на симетричну систему діє навантаження загального вигляду, доцільно розкласти його на симетричне і кососиметричне (див. [п.11.8](#)) і здійснити два окремих розрахунки від дії кожного з цих складових навантажень. Остаточні дійсні зусилля одержуються як сума дійсних зусиль від симетричної і кососиметричної складових вихідного навантаження:

$$\begin{aligned}M_{\delta} &= M_{\delta}^{сим} + M_{\delta}^{КС}; \\Q_{\delta} &= Q_{\delta}^{сим} + Q_{\delta}^{КС}; \\N_{\delta} &= N_{\delta}^{сим} + N_{\delta}^{КС}.\end{aligned}\tag{12.29}$$

12.10.4. Комбінований метод розрахунку

Комбінований метод може бути застосований для розрахунку симетричних рам, на які діють навантаження загального вигляду. Як зазначалось у попередньому підрозділі, в цьому випадку треба виконати два окремих розрахунки від дії симетричної і кососиметричної складових вихідного навантаження.

При кожному із цих складових навантажень треба з'ясувати кількість відмінних від нуля основних невідомих за методом сил і за методом переміщень. Для деяких рам при симетричному навантаженні необхідно обчислювати менше основних невідомих методу переміщень, а при кососиметричному навантаженні – менше основних невідомих методу сил.

У такому випадку краще виконати два окремих розрахунки рами, застосовуючи для кожного з навантажень метод, який потребує обчислення меншої кількості основних невідомих, тобто є менш трудомістким.

Остаточні дійсні зусилля одержуються як сума дійсних зусиль від симетричної і кососиметричної складових вихідного навантаження, одержаних різними методами ([ф-ла 12.29](#)).

Розглянемо, наприклад, симетричну раму під дією навантаження загального вигляду (рис.12.25,а).

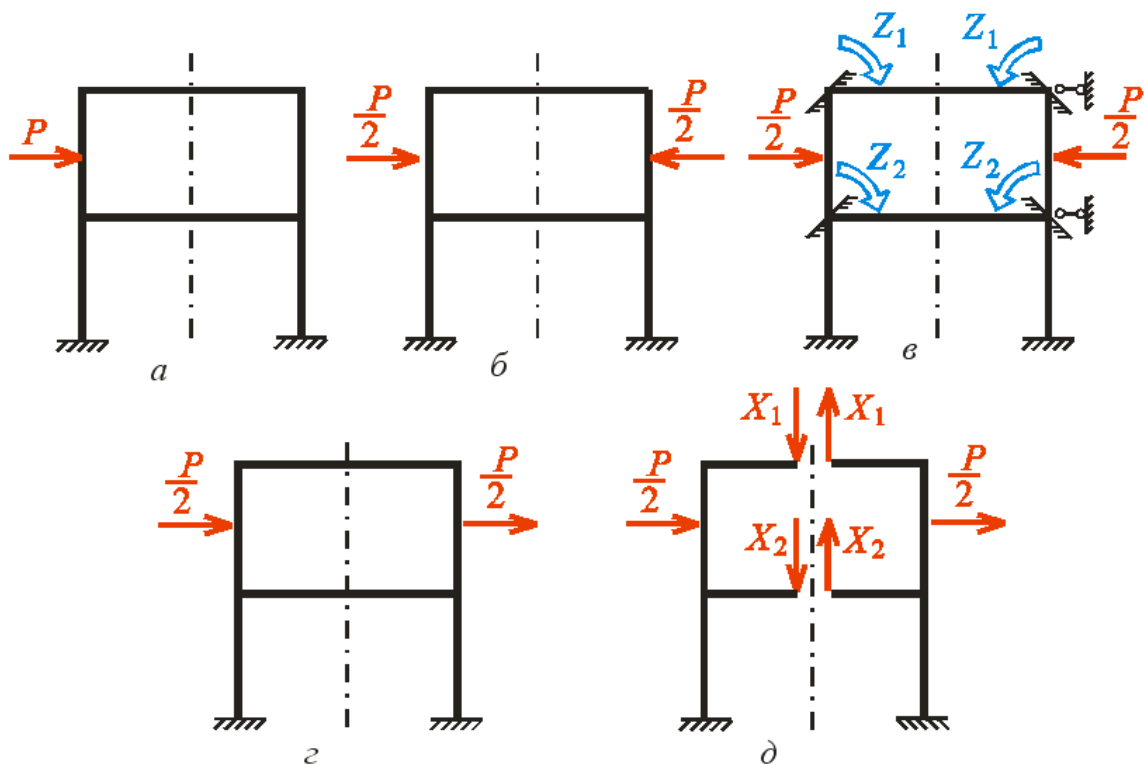


Рис.12.25

Легко впевнитись, що ця рама шість разів кінематично і шість разів статично невизначувана, тобто при розрахунку за методом сил матимемо 6 основних невідомих $X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6$, які можуть бути розкладені на симетричні і косиметричні складові. Та сама рама при розрахунку за методом переміщень матиме також 6 основних невідомих $Z_1, Z_2, Z_3, Z_4, Z_5, Z_6$, які, в свою чергу, можуть бути розкладені на симетричні і косиметричні складові.

Розкладаємо зовнішнє навантаження на симетричну та косиметричну складові (рис.12.25,б,г). Неважко впевнитись, що при симетричній складовій навантаження і основній системі методу переміщень необхідно обчислити тільки два невідомих групових переміщення, відмінні від нуля (рис.12.25,в), інші чотири переміщення дорівнюють нулю. При косиметричній складовій навантаження відмінні від нуля лише два невідомі методу сил (рис.12.25,д).

Тому найменш трудомістким є розрахунок рами за комбінованим методом, коли на дію симетричного навантаження розрахунок виконується за допомогою методу переміщень, а на дію косиметричного навантаження – методом сил.

12.11. Приклади розрахунку рам за методом переміщень у канонічній формі

Далі наведемо розрахунок рами загального вигляду, складання канонічних рівнянь методу переміщень для симетричної рами під дією симетричного навантаження та складання канонічних рівнянь для рами, що має непаралельні стояки.

12.11.1. Розрахунок статично невизначуваної рами (рис.12.26)

Визначаємо ступінь кінематичної невизначуваності рами. Вона має два жорсткі вузли – вузол 1 і вузол 2.

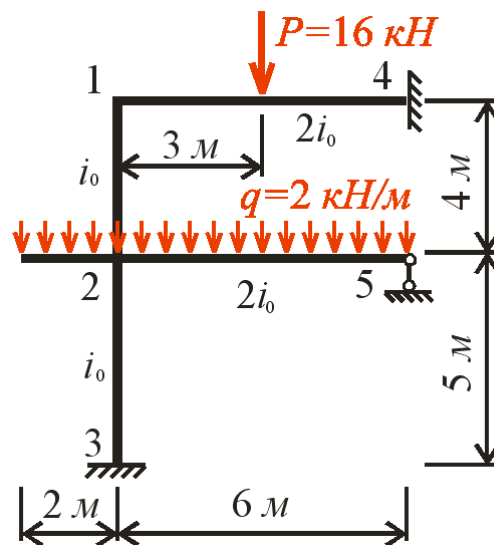


Рис.12.26

Для визначення кількості незалежних поступальних переміщень створюємо шарнірну схему рами (рис.12.27,а). Для перетворення її на геометрично незмінювану достатньо закріпити ригель 2-5 від горизонтальних переміщень.

Цього можна досягти введенням додаткового горизонтального опорного стержня, прикріпленого до вузла 2 або 5. Таким чином, рама має одне незалежне поступальне переміщення. Отже, ступінь її кінематичної невизначуваності

$$k = k_{\varphi} + k_{\delta} = 2 + 1 = 3.$$

Створюємо для рами, що розглядається, основну систему методу переміщень. До жорстких вузлів 1 і 2 встановлюємо рухомі затиснення. Вузол 5 закріплюємо додатковим опорним стержнем, що виключає горизонтальне переміщення ригеля.

Переміщення, виключені встановленими в'язями, беремо як основні невідомі. Це Z_1 і Z_2 – кути повороту жорстких вузлів 1 і 2, та Z_3 – незалежне поступальне переміщення. Основна система і основні невідомі методу переміщень зображені на рис.12.27,б.

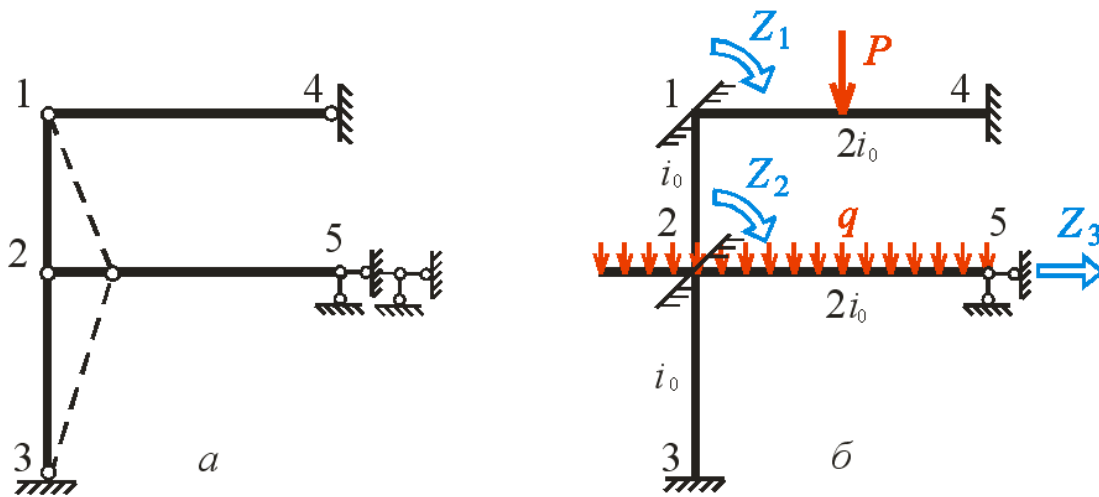


Рис.12.27

Для визначення основних невідомих необхідно скласти та розв'язати систему канонічних рівнянь:

$$r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + r_{13}Z_3 + R_{1P} = 0;$$

$$r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + r_{23}Z_3 + R_{2P} = 0;$$

$$r_{31}Z_1 + r_{32}Z_2 + r_{33}Z_3 + R_{3P} = 0.$$

Будуємо епюри згинальних моментів в основній системі в одиничних і вантажному станах (рис.12.28) за допомогою таблиць епюр внутрішніх зусиль в однопрогонових балках, наведених в Додатку 2.

Одинична епюра \bar{M}_1 (рис.12.28,а) будується від одиничного кута повороту $Z_1=1$ рухомого затиснення у вузлі 1. Одинична епюра \bar{M}_2 (рис.12.28,б) – від одиничного кута повороту $Z_2=1$ рухомого затиснення у вузлі 2. І, нарешті, одинична епюра \bar{M}_3 (рис.12.28,в) – від одиничного поступального переміщення додаткового опорного стержня $Z_3=1$. Щоб з'ясувати, які саме стержні основної системи згинаються від цього переміщення, використовуємо картину перекосу шарнірної схеми (рис.12.27,а). Перекосу зазнають стержні 1-2 і 2-3, отже, ці стержні згинаються у третьому одиничному стані і саме в них виникають згинальні моменти.

Вантажна епюра M_P (рис.12.28,г) виникає лише в тих стержнях, які несуть поперечне зовнішнє навантаження.

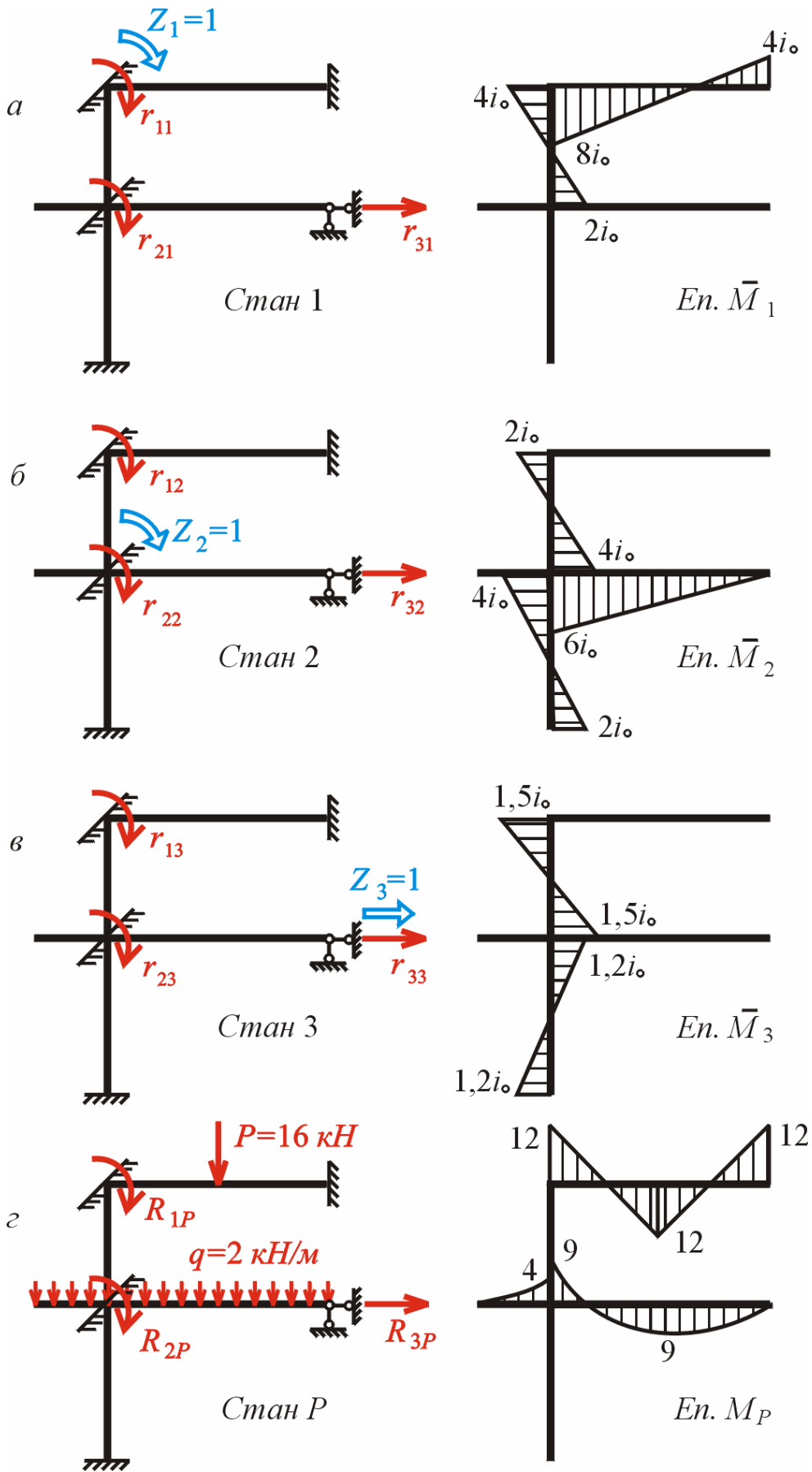
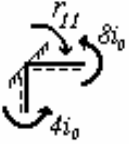


Рис.12.28

Визначаємо коефіцієнти і вільні члени системи канонічних рівнянь статичним способом, тобто виходячи з їхнього фізичного змісту.

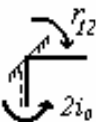
Перший рядок системи рівнянь обчислюємо як реактивний момент у рухомому затисненні у вузлі 1 основної системи:

- у стані 1 (еп. \bar{M}_1)



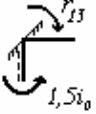
$$\sum M_1 = r_{11} - 8i_0 - 4i_0,$$

$$r_{11} = 12i_0;$$
- у стані 2 (еп. \bar{M}_2)



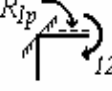
$$\sum M_1 = r_{12} - 2i_0 = 0,$$

$$r_{12} = 2i_0;$$
- у стані 3 (еп. \bar{M}_3)



$$\sum M_1 = r_{13} - 1,5i_0 = 0,$$

$$r_{13} = 1,5i_0;$$
- у вантажному стані (еп. M_p)



$$\sum M_1 = R_{1p} + 12 = 0,$$

$$R_{1p} = -12.$$

Другий рядок системи рівнянь обчислюємо як реактивний момент у рухомому затисненні у вузлі 2 основної системи:

- у стані 1 (еп. \bar{M}_1)



$$\sum M_2 = r_{21} - 2i_0 = 0,$$

$$r_{21} = 2i_0;$$
- у стані 2 (еп. \bar{M}_2)




$$\sum M_2 = r_{22} - 6i_0 - 4i_0 - 4i_0 = 0,$$

$$r_{22} = 14i_0;$$
- у стані 3 (еп. \bar{M}_3)



$$\sum M_2 = r_{23} + 1,5i_0 - 1,2i_0 = 0,$$

$$r_{23} = 0,3i_0;$$
- у вантажному стані (еп. M_p)

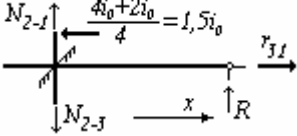


$$\sum M_2 = R_{2p} - 4 + 9 = 0,$$

$$R_{2p} = 5.$$

Третій рядок системи рівнянь обчислюємо як реакцію додаткового опорного стержня основної системи. З цією метою виокремлюємо фрагмент основної системи, перетинаючи цей стержень і стержні 1-2 і 2-3, що зазнають перекосу в третьому одиничному стані (див. картину перекосів шарнірної схеми на [рис.12.27,а](#)) і розглядаємо умови його рівноваги:

- у стані 1 (еп. \bar{M}_1)



$$\sum F_x = r_{31} - 1,5i_0 = 0,$$

$$r_{31} = 1,5i_0.$$

Нагадаємо, що поперечні сили в перерізах стержнях обчислюються за відповідною епюрою згинальних моментів. Так, на стержні 1-2 поперечна сила $Q_{1-2} = -\frac{4i_0 + 2i_0}{4}$, причому від'ємність зумовлена поворотом від стержня до епюри згинальних моментів проти напрямку руху годинникової стрілки. На стержні 2-3 поперечна сила $Q_{2-3} = 0$ унаслідок відсутності на ньому згинальних моментів.

- У стані 2 (еп. \bar{M}_2)

$$\sum F_x = r_{32} - 1,5i_0 + 1,2i_0 = 0,$$

$$r_{32} = 0,3i_0;$$

- у стані 3 (еп. \bar{M}_3)

$$\sum F_x = r_{33} - 0,75i_0 - 0,48i_0 = 0,$$

$$r_{33} = 1,28i_0;$$

- у вантажному стані 3 (еп. M_p)

$$\sum F_x = R_{3p} = 0,$$

$$R_{3p} = 0.$$

Підставляємо коефіцієнти і вільні члени в систему канонічних рівнянь:

$$12i_0Z_1 + 2i_0Z_2 + 1,5i_0Z_3 - 12 = 0;$$

$$2i_0Z_1 + 14i_0Z_2 + 0,3i_0Z_3 - 5 = 0;$$

$$1,5i_0Z_1 + 0,3i_0Z_2 + 1,23i_0Z_3 + 0 = 0.$$

Коефіцієнти системи рівнянь симетричні стосовно головної діагоналі, яка вміщує лише додатні величини.

Розв'язавши систему канонічних рівнянь, дістанемо значення основних невідомих:

$$i_0Z_1 = 1,1437; \quad i_0Z_2 = 0,2248; \quad i_0Z_3 = -1,4496.$$

Правильність розв'язання системи рівнянь перевіряємо, підставляючи значення невідомих в сумарне рівняння:

$$15,5 i_0Z_1 + 16,3 i_0Z_2 + 3,03 i_0Z_3 - 17 = 0,$$

$$15,5 \cdot 1,1437 + 16,3 \cdot 0,2248 - 3,03 \cdot 1,4496 - 17 =$$

$$= 21,3915 - 21,3923 = -0,0008 \approx 0.$$

Відносна похибка розв'язання, %:

$$\varepsilon = \frac{0,0008}{21,3915} \cdot 100 = 0,004 \%$$

Епюру дійсних згинальних моментів будуюмо за способом накладання:

$$M_{\partial} = \bar{M}_1 Z_1 + \bar{M}_2 Z_2 + \dots + \bar{M}_n Z_n + M_p.$$

Парціальні епюри $\bar{M}_1 Z_1$, $\bar{M}_2 Z_2$, $\bar{M}_3 Z_3$ наведені на рис.12.29. Для їхнього одержання одиничні епюри згинальних моментів, які побудовано в основній системі методу переміщень (рис.12.28.а,б,в), домножуються на величини відповідних основних невідомих. Зверніть увагу на те, який вигляд має парціальна епюра в разі від'ємної величини невідомого ($\bar{M}_3 Z_3$).

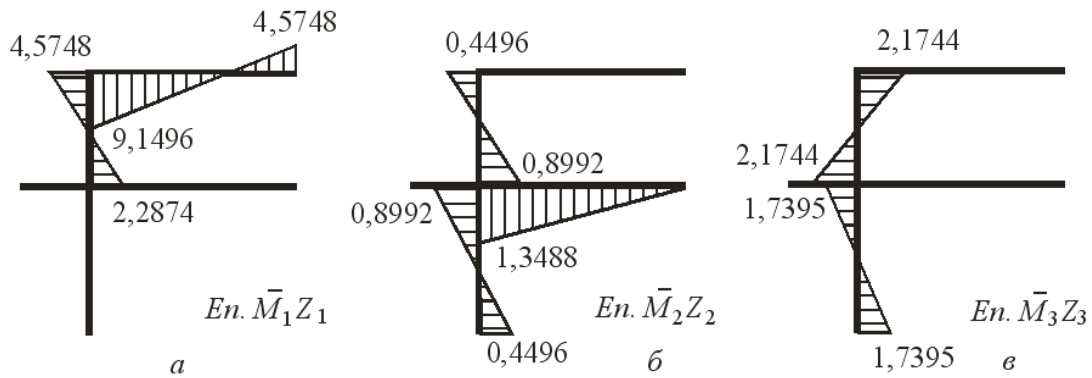


Рис.12.29

Остаточна епюра M_{∂} , одержана як сума парціальних і вантажної M_p епюр, побудована на рис.12.30.

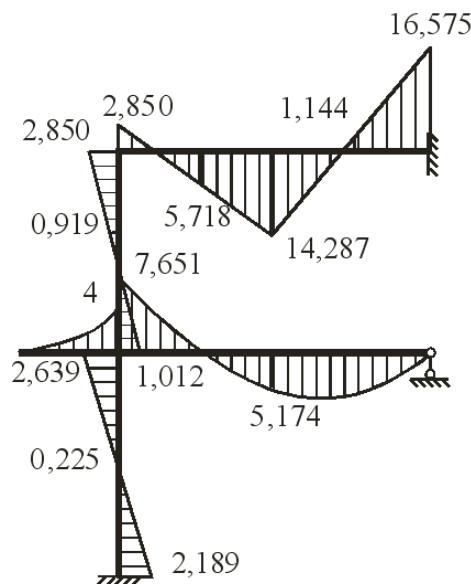
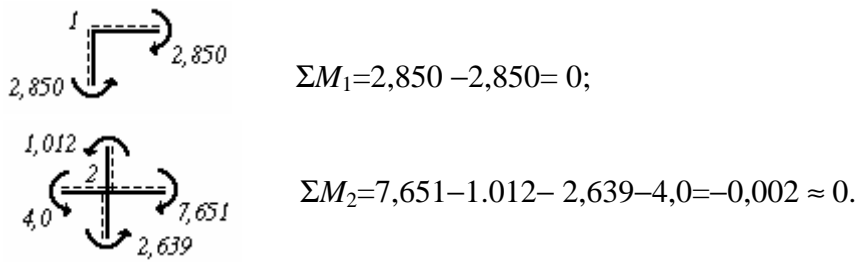


Рис.12.30

Для виконання статичної перевірки епюри M_0 розглядаємо умови рівноваги вузлів 1 і 2:



Для виконання кінематичної перевірки епюри M_0 вибираємо основну систему методу сил для вихідної статично невизначуваної рами, відкидаючи зайві в'язі (рис.12.31,а), і прикладаємо до неї лише дві з чотирьох реакцій відкинутих в'язей, надаючи їм одиничних значень. Ці дві сили ми вибираємо таким чином, щоб сумарна епюра згинальних моментів \bar{M}_s (рис.12.31,б) від їхньої дії заповнювала всі стержні рами.

Визначаємо згинні жорсткості стержнів рами

$$(EI)_{ab} = i_{ab} \cdot l_{ab}$$

і запишемо їхні величини на схемі (рис.12.31,а).

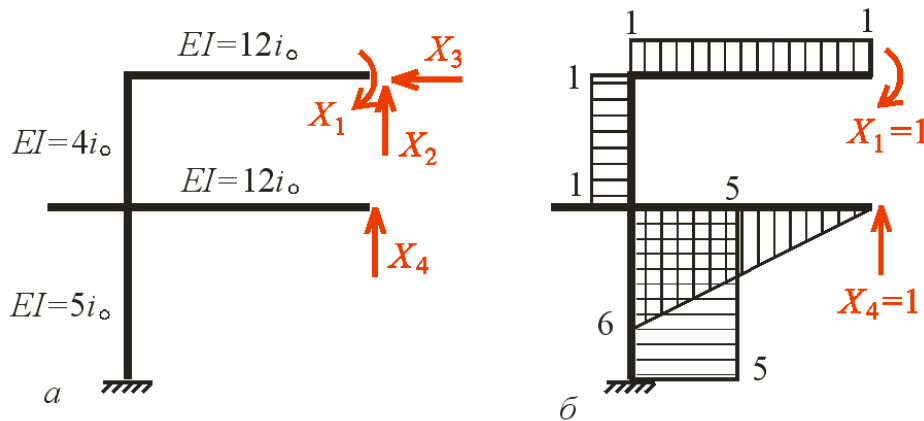


Рис.12.31

Обчислюємо сумарне переміщення у напрямі двох відкинутих в'язей:

$$\Delta_{S_0} = \sum \int_0^l \frac{\bar{M}_s M_0}{EI} dx = -\frac{1}{5i_0} \cdot 5 \cdot 5 \cdot 0,225 + \frac{6}{6 \cdot 12i_0} (-7,651 \cdot 6 + 4 \cdot 3 \cdot 5,174 + 0) +$$

$$+ \frac{1}{4i_0} \cdot 4 \cdot 1 \cdot 0,919 - \frac{1}{12i_0} \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5,718 + \frac{1}{12i_0} \cdot 1 \cdot 3 \cdot 1,414 = -\frac{1,125}{i_0} + \frac{1,3485}{i_0} + \frac{0,919}{i_0} -$$

$$-\frac{1,4295}{i_0} + \frac{0,286}{i_0} = \frac{2,5535}{i_0} - \frac{2,5545}{i_0} = -\frac{0,0010}{i_0}.$$

Відносна похибка, %:

$$\varepsilon = \frac{0,0010}{2,5535} \cdot 100 = 0,039 \%$$

Визначаємо поперечні сили, використовуючи диференціальну залежність Q_δ від M_δ :

$$Q_{1-4} = \frac{2,850 + 14,284}{3} = 5,713 \text{ кН},$$

$$Q_{4-1} = -\frac{14,284 + 16,575}{3} = -10,287 \text{ кН},$$

$$Q_{1-2} = Q_{2-1} = -\frac{2,850 + 1,012}{4} = -0,966 \text{ кН},$$

$$Q_{2-3} = Q_{3-2} = -\frac{2,639 + 2,189}{4} = -0,966 \text{ кН},$$

$$Q_{2-5} = \frac{7,651}{6} + \frac{2 \cdot 6}{2} = 7,275 \text{ кН},$$

$$Q_{5-2} = \frac{7,651}{6} - \frac{2 \cdot 6}{2} = -4,725 \text{ кН}.$$

Епюра Q_δ побудована на рис.12.32,а.

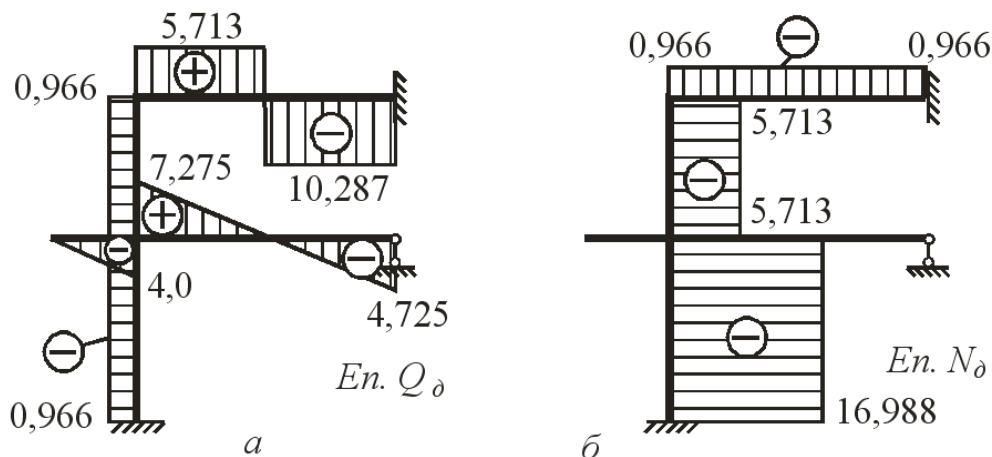
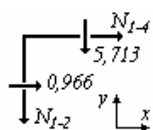


Рис.12.32

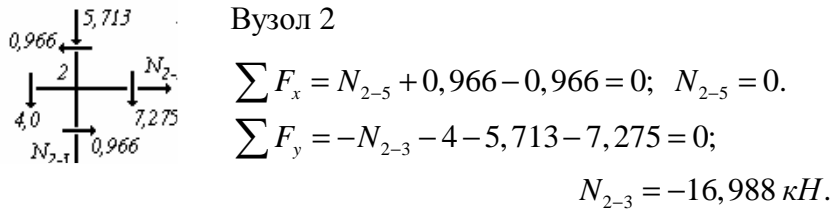
Визначаємо поздовжні сили з умов рівноваги вузлів рами:



Вузол 1

$$\sum F_x = N_{1-4} + 0,966 = 0; \quad N_{1-4} = -0,966 \text{ кН}.$$

$$\sum F_y = -N_{1-2} - 5,713 = 0; \quad N_{1-2} = -5,713 \text{ кН}.$$



Епюра N_δ побудована на рис.12.32,б.

Для виконання перевірки рівноваги всієї рами відкидаємо опори та прикладаємо зовнішні навантаження і зусилля у перерізах, одержані з епюр M_δ , Q_δ і N_δ (рис.12.33). Перевіряємо, чи задовольняються рівняння рівноваги:

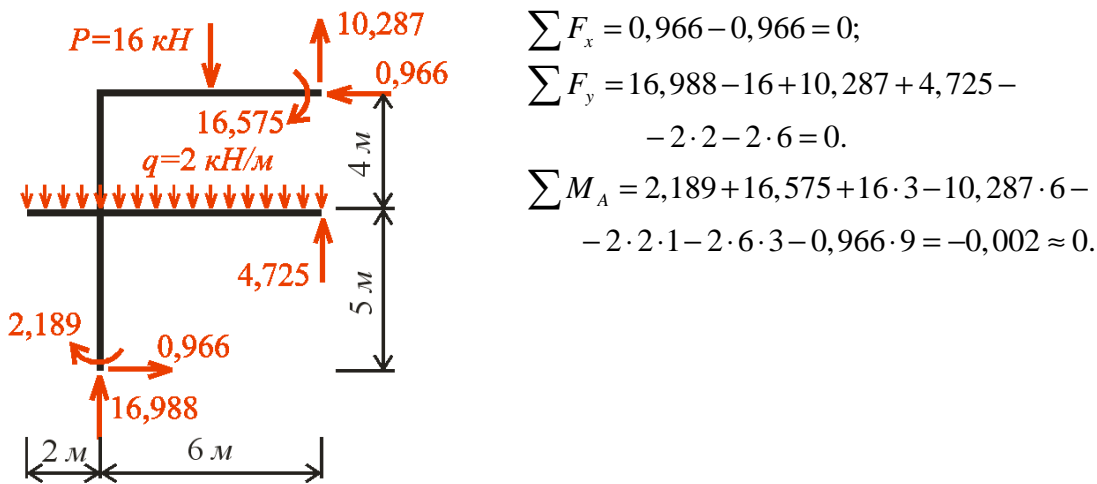


Рис.12.33

12.11.2. Складання системи канонічних рівнянь для симетрично навантаженої рами (рис.12.34)

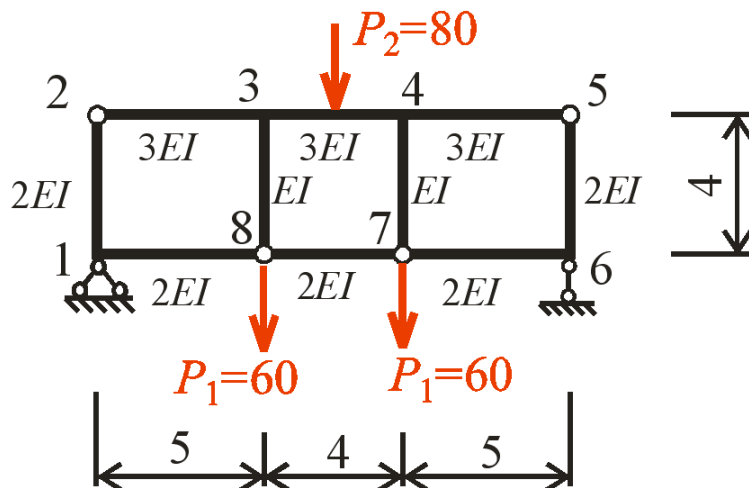


Рис.12.34

Визначаємо ступінь кінематичної невизначуваності рами. Вона має чотири жорсткі вузли – 1, 3, 4 і 6. Для визначення кількості незалежних поступальних переміщень, створюємо шарнірну схему рами (рис.12.35,а). Для перетворення її на геометрично незмінювану систему слід закріпити

ригелі 2-3, 3-4 і 4-5 від горизонтальних переміщень та стояки 3-8 і 4-7 – від вертикальних переміщень. Цього можна досягти введенням додаткового горизонтального опорного стержня, прикріпленого до вузлів 2 або 5 і двох вертикальних опорних стержнів, прикріплених до вузлів 3 або 8 і 4 або 7. Таким чином, рама має три незалежні поступальні переміщення.

Отже, ступінь її кінематичної невизначуваності

$$k = k_{\varphi} + k_{\delta} = 4 + 3 = 7.$$

Створюємо для рами, що розглядається, основну систему методу переміщень. До жорстких вузлів 1, 3, 4 і 6 встановлюємо рухомі затиснення. Вузол 2 закріплюємо горизонтальним опорним стержнем, а вузли 3 і 4 – вертикальними опорними стержнями, які виключають незалежні поступальні переміщення вузлів рами. Основна система методу переміщень зображена на рис.12.35,б.

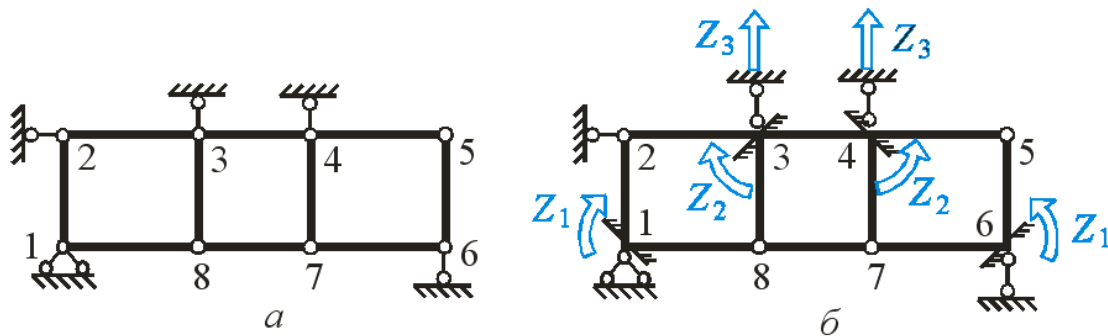


Рис.12.35

Переміщення, які усуваються встановленими в'язями, є основними невідомими методу переміщень. Але призначаючи невідомі, які мають бути визначені, звертаємо увагу на симетрію геометричної схеми рами та навантаження. Як зазначалося, в такому випадку рама може мати лише переміщення, що викликають її симетричне деформування. Отже, кути повороту жорстких вузлів 1 і 6 мають бути рівними і протилежними; приймаємо їх як групове невідоме Z_1 . Аналогічне групове невідоме Z_2 – рівні і протилежні кути повороту жорстких вузлів 2 і 5. Розглядаючи картину перекосів шарнірної схеми від горизонтального переміщення у напрямі додаткового горизонтального опорного стержня (рис.12.36,а), помічаємо, що таке переміщення порушує симетрію деформування рами. Отже, воно напевно дорівнює нулю. Разом з тим вертикальні переміщення у напрямі додаткових вертикальних опорних стержнів можуть бути лише рівними і мати однакові напрямки. У цьому випадку деформування рами буде симетричним (див. картину перекосів на

рис.12.36,б). Тому приймаємо групове невідоме Z_3 – сумісні вертикальні поступальні переміщення вузлів 3 і 4. Основні невідомі зображені на рис.12.35,б).

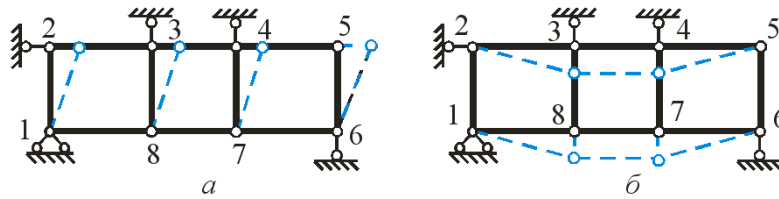


Рис.12.36

Таким чином, завдяки використанню симетрії для розв'язання сім разів кінематично невизначуваної рами необхідно скласти та розв'язати лише три канонічні рівняння методу переміщень:

$$r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + r_{13}Z_3 + R_{1P} = 0;$$

$$r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + r_{23}Z_3 + R_{2P} = 0;$$

$$r_{31}Z_1 + r_{32}Z_2 + r_{33}Z_3 + R_{3P} = 0.$$

Будуємо епюри згинальних моментів в основній системі в одиничних і вантажному станах (рис.12.37), обчисливши спочатку погонні жорсткості стержнів рами:

$$i_{1-2} = \frac{2EI}{4} = 0,5EI = i_0; \quad i_{3-8} = \frac{EI}{4} = 0,25EI = 0,5i_0;$$

$$i_{2-3} = \frac{3EI}{5} = 0,6EI = 1,2i_0; \quad i_{1-8} = \frac{2EI}{5} = 0,4EI = 0,8i_0;$$

$$i_{3-4} = \frac{3EI}{4} = 0,75EI = 1,5i_0.$$

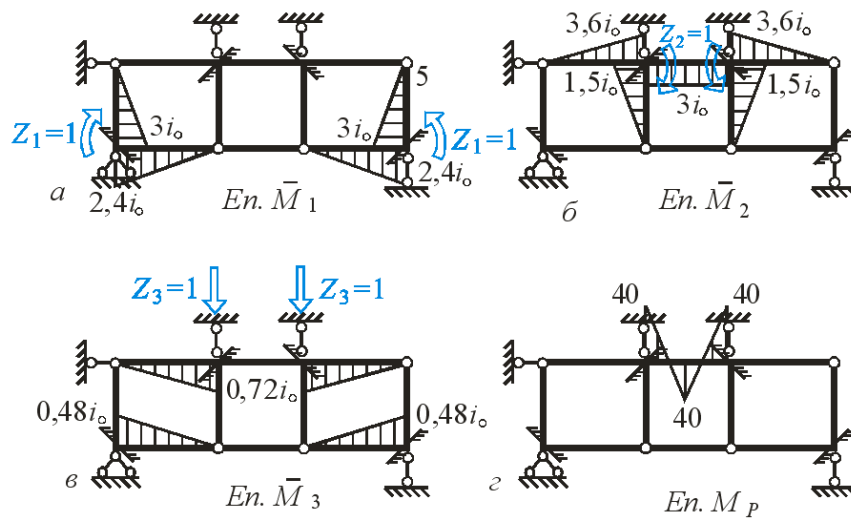


Рис.12.37

Визначаємо коефіцієнти і вільні члени системи канонічних рівнянь статичним способом, тобто виходячи з їхнього фізичного змісту.

Перший рядок системи рівнянь обчислюємо як суму реактивних моментів у рухомих затисненнях у вузлах 1 і 6 основної системи. Виходячи із симетрії навантажень, розглядаємо рівновагу вузла 1, прикладаючи до нього реактивний момент, що становить половину шуканого коефіцієнта або вільного члена.

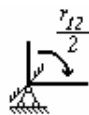
- У стані 1 (еп. \bar{M}_1)



$$\sum M_1 = \frac{r_{11}}{2} - 3 i_0 - 2,4 i_0 = 0,$$

$$r_{11} = 10,8 i_0;$$

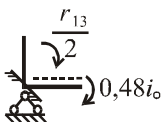
- у стані 2 (еп. \bar{M}_2)



$$\sum M_1 = \frac{r_{12}}{2} = 0,$$

$$r_{12} = 0.$$

- у стані 3 (еп. \bar{M}_3)



$$\sum M_1 = \frac{r_{13}}{2} + 0,48 i_0 = 0,$$

$$r_{13} = -0,96 i_0;$$

- у вантажному стані (еп. M_p)

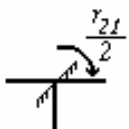


$$\sum M_1 = \frac{R_{1p}}{2} = 0,$$

$$R_{1p} = 0;$$

Другий рядок системи рівнянь обчислюємо як суму реактивних моментів у рухомих затисненнях у вузлах 3 і 4 основної системи, розглядаючи, як і в попередньому випадку, лише один із вузлів.

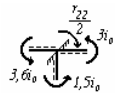
- У стані 1 (еп. \bar{M}_1)



$$\sum M_3 = \frac{r_{21}}{2} = 0,$$

$$r_{21} = 0;$$

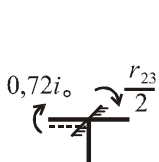
- у стані 2 (еп. \bar{M}_2)



$$\sum M_3 = \frac{r_{22}}{2} - 3,6 i_0 - 1,5 i_0 - 3 i_0 = 0,$$

$$r_{22} = 16,2 i_0;$$

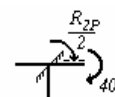
- у стані 3 (еп. \bar{M}_3)



$$\sum M_3 = \frac{r_{23}}{2} + 0,72 i_0 = 0,$$

$$r_{23} = -1,44 i_0;$$

- у вантажному стані (еп. M_p)

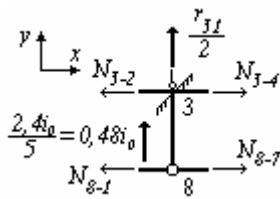


$$\sum M_3 = \frac{R_{2p}}{2} + 40 = 0,$$

$$R_{2p} = -80.$$

Третій рядок системи рівнянь обчислюємо як суму реакцій додаткових вертикальних опорних стержнів основної системи. З цією метою виокремимо фрагмент основної системи, перетинаючи один з цих стержнів та стержні 1-8 і 2-3, що зазнають перекосу в третьому одиничному стані (див. картину перекосів шарнірної схеми на [рис.12.36.6](#)) та стержні 3-4 і 7-8. Розглядаємо умови рівноваги цього фрагмента:

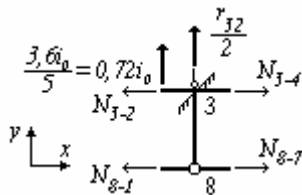
- у стані 1 (еп. \bar{M}_1)



$$\sum F_y = \frac{r_{31}}{2} + 0,48 i_0 = 0,$$

$$r_{31} = -0,96 i_0;$$

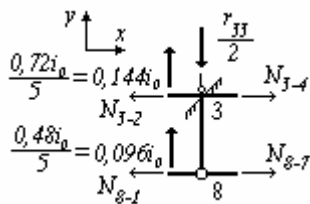
- у стані 2 (еп. \bar{M}_2)



$$\sum F_y = \frac{r_{32}}{2} + 0,72 i_0 = 0,$$

$$r_{32} = -1,44 i_0;$$

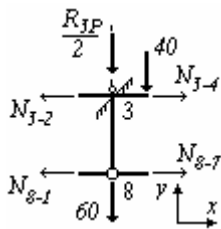
- у стані 3 (еп. \bar{M}_3)



$$\sum F_y = -\frac{r_{33}}{2} + 0,144 i_0 + 0,096 i_0 = 0,$$

$$r_{33} = 0,48 i_0.$$

- у вантажному стані (еп. M_p)



$$\sum F_y = -\frac{R_{3p}}{2} - 40 - 60 = 0,$$

$$R_{3p} = -200.$$

Підставляємо коефіцієнти і вільні члени в систему канонічних рівнянь:

$$\begin{aligned} 10,8i_0Z_1 - 0,96i_0Z_3 &= 0; \\ +16,2i_0Z_2 - 1,44i_0Z_3 - 80 &= 0; \\ -0,96i_0Z_1 - 1,44i_0Z_2 + 0,48i_0Z_3 - 200 &= 0. \end{aligned}$$

Коефіцієнти системи рівнянь симетричні стосовно головної діагоналі, яка містить лише додатні величини.

12.11.3. Складання системи канонічних рівнянь для рами з непаралельними стійками (рис.12.38)

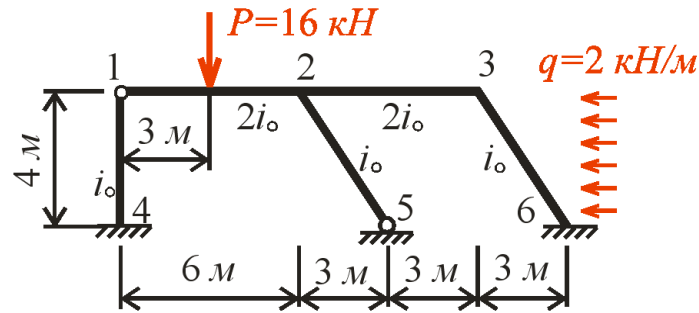


Рис.12.38

Визначаємо ступінь кінематичної невизначуваності рами. Вона має два жорсткі вузли – 2 і 3. Для визначення кількості незалежних поступальних переміщень створюємо шарнірну схему рами (рис.12.39,а).

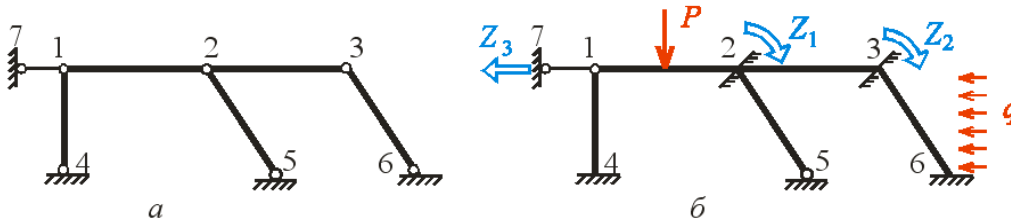


Рис.12.39

Для перетворення її на геометрично незмінювану систему треба ввести один додатковий опорний стержень, що перешкоджає горизонтальному переміщенню вузла 1. Справді, в цьому випадку вузол 1 прикріплений двома стержнями до нерухомих вузлів 4 і 7, вузол 2 – до вузлів 1 і 5, вузол 3 – до вузлів 2 і 6.

Отже, ступінь кінематичної невизначуваності рами

$$k = k_{\varphi} + k_{\delta} = 2 + 1 = 3.$$

На жорсткі вузли 2 і 3 накладаємо рухомі затиснення. Вузол 1 закріплюємо горизонтальним опорним стержнем. Одержуємо основну систему методу переміщень (рис.12.39,б) для рами, що розглядається.

Переміщення, виключені встановленими в'язями, є основними невідомими методу переміщень. Позначимо їх на рис.12.39,б.

Для розв'язання цієї рами необхідно скласти та розв'язати три канонічних рівняння методу переміщень:

$$r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + r_{13}Z_3 + R_{1P} = 0;$$

$$r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + r_{23}Z_3 + R_{2P} = 0;$$

$$r_{31}Z_1 + r_{32}Z_2 + r_{33}Z_3 + R_{3P} = 0.$$

Для визначення коефіцієнтів і вільних членів цієї системи рівнянь необхідно побудувати епюри згинальних моментів в основній системі в одиничних і вантажному станах. Побудова цих епюр від невідомих кутів повороту вузлів, до яких встановлені рухомі затиснення, та зовнішнього навантаження не викликає жодних ускладнень. Проте для побудови епюри від одиничного поступального переміщення в напрямі додаткового опорного стержня необхідно виконати підготовчу роботу. Вона пов'язана з тим, що, завдяки непаралельності стержнів, які зазнають перекосів при горизонтальному переміщенні вузла 1, відповідні переміщення вузлів 2 і 3 неочевидні. Їх можна визначити за допомогою побудови скороченої діаграми переміщень (діаграми Вілію), що бере до уваги лише повороти стержнів, які не мають поздовжніх деформацій. У зв'язку з малими кутів повороту дуга кола, за якою повертається один кінець стержня щодо іншого, замінюється відрізком прямої, перпендикулярної до стержня.

На рис.12.40 наведено побудову діаграми переміщень вузлів шарнірної схеми рами, які виникають внаслідок горизонтального переміщення вузла 1.

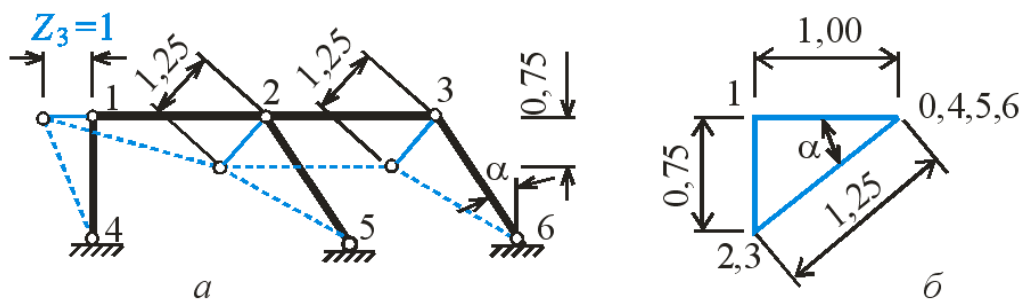


Рис.12.40

У довільній точці креслення розміщуємо полюс O , якому відповідає початкове положення всіх вузлів шарнірної схеми. Для напевно нерухомих вузлів 4, 5 і 6 це положення буде остаточним. Нехай вузол 1 переміщується стосовно початкового положення ліворуч по горизонталі на величину, що дорівнює 1. Тоді в довільно вибраному масштабі відкладаємо одиничне переміщення ліворуч від полюса O . Одержана точка відповідає вузлу 1 на діаграмі переміщень. Положення вузла 2 при цьому буде визначатись поворотом стержня 1-2 навколо вузла 1 і стержня 5-2 навколо вузла 5. На діаграмі переміщень точка, відповідна вузлу 2, буде розміщуватись на перетині проведеного з точки 1 перпендикуляра до напрямку стержня 1-2, що відображає його поворот стосовно вузла 1, з

проведеним з точки 5 (O) перпендикуляром до напрямку стержня 5-2, що відображає його поворот стосовно вузла 5.

Переміщення вузла 3 зумовлено поворотом стержня 2-3 навколо вузла 2 і стержня 6-3 навколо вузла 6. Тому точка на діаграмі, відповідна до вузла 3, розташована на перетині проведеного з точки 2 перпендикуляра до напрямку стержня 2-3 з проведеним з точки 6 перпендикуляром до напрямку стержня 6-3.

Таким чином, точки 3 і 2 на діаграмі збігаються. Величини відрізків 1-2, 2-5 та інші на діаграмі можна визначити з геометричних міркувань або вимірити у масштабі.

Діаграма переміщень дає змогу побудувати картину перекосів рами від незалежного поступального переміщення $Z_3=1$ (рис.12.40,а). Справді, вузли 2 і 3 перемістились стосовно початкового положення на величину, що дорівнює $0,75Z_3$, а по нормалі до стержнів 2-5 і 3-6 – на величину $1,25Z_3$.

Будуючи епюру згинальних моментів у третьому одиничному стані (від $Z_3=1$), беремо до уваги, що, за свідченням діаграми переміщень, перекосів зазнають чотири стержні, причому у стержні 1-4 одна опора пересувається стосовно іншої перпендикулярно до стержня на величину 1, у стержні 1-2 – на величину 0,75 і у стержнях 2-5 і 3-6 – на величину 1,25.

Епюри згинальних моментів в основній системі в одиничних і вантажному станах наведені на рис.12.41.

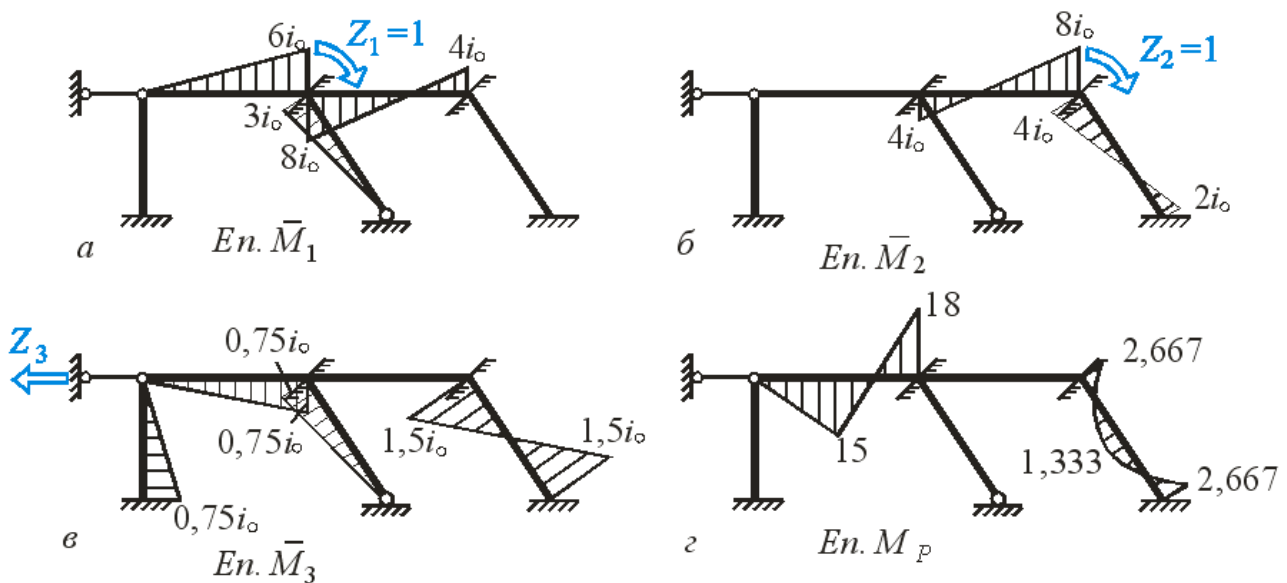
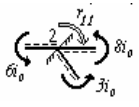


Рис.12.41

Коефіцієнти і вільні члени першого і другого рядків системи канонічних рівнянь визначаємо як реактивні моменти у рухомих затисненнях у вузлах 2 і 3 основної системи відповідно:

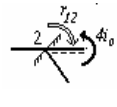
- у стані 1 (еп. \bar{M}_1)



$$\sum M_2 = r_{11} - 6i_0 - 3i_0 - 8i_0 = 0,$$

$$r_{11} = 17i_0;$$


- у стані 2 (еп. \bar{M}_2)



$$\sum M_2 = r_{12} - 4i_0 = 0,$$

$$r_{12} = 4i_0;$$

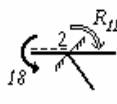
- у стані 3 (еп. \bar{M}_3)



$$\sum M_2 = r_{13} - 0,75i_0 + 0,75i_0 = 0,$$

$$r_{13} = 0;$$

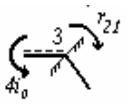
- у вантажному стані (еп. M_p)



$$\sum M_2 = R_{1p} - 18 = 0,$$

$$R_{1p} = 18;$$


- у стані 1 (еп. \bar{M}_1)



$$\sum M_3 = r_{21} - 4i_0 = 0,$$

$$r_{21} = 4i_0;$$

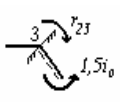
- у стані 2 (еп. \bar{M}_2)



$$\sum M_3 = r_{22} - 8i_0 - 4i_0 = 0,$$

$$r_{22} = 12i_0;$$

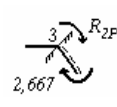
- у стані 3 (еп. \bar{M}_3)



$$\sum M_3 = r_{23} - 1,5i_0 = 0,$$

$$r_{23} = 1,5i_0;$$

- у вантажному стані (еп. M_p)

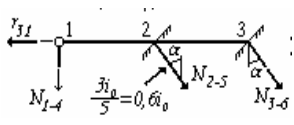


$$\sum M_3 = R_{2p} + 2,667 = 0,$$

$$R_{2p} = -2,667.$$

Коефіцієнт r_{31} третього канонічного рівняння за фізичним змістом являє собою реакцію в додатковому опорному стержні, встановленому при створенні основної системи, від одиничного значення невідомого кута повороту $Z_1=1$. Для його визначення необхідно виокремити фрагмент рами і скористуватись рівнянням його рівноваги. Але у рамі, що розглядається, мають перекося непаралельні стержні. Означені стержні неможливо перетнути одним замкненим перерізом. Тому перерізаємо всі стояки і складаємо рівняння рівноваги відокремленої верхньої частини рами:

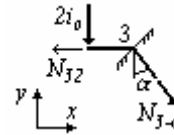
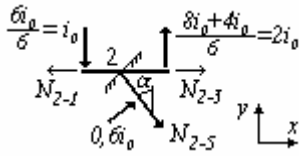
- у стані 1 (еп. \bar{M}_1)



$$\sum F_x = -r_{31} + 0,6i_0 \cos \alpha + N_{2-5} \sin \alpha + N_{5-6} \sin \alpha = 0,$$

$$r_{31} = 0,6i_0 \cos \alpha + N_{2-5} \sin \alpha + N_{5-6} \sin \alpha.$$

Як бачимо, вираз для визначення шуканого коефіцієнта вміщує величини поздовжніх сил у двох похилих стержнях. Ці поздовжні сили не можна обчислити безпосередньо із побудованої епюри згинальних моментів одиничного стану. Але їх можна виразити через поперечні сили у стержнях, що приєднуються до тих самих вузлів. Для цього потрібно вирізати вузли і розв'язати належним чином складені рівняння їхньої рівноваги.



$$\sum F_y = 2i_0 - i_0 - N_{2-5} \cos \alpha + 0, 6i_0 \sin \alpha = 0, \quad \sum F_y = -N_{3-6} \cos \alpha - 2i_0 = 0,$$

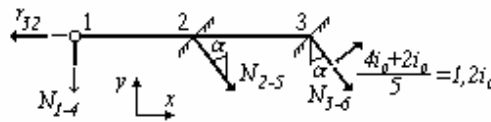
$$N_{2-5} = 0, 6i_0 \operatorname{tg} \alpha + \frac{i_0}{\cos \alpha}; \quad N_{3-6} = -\frac{2i_0}{\cos \alpha}.$$

Підстановка N_{2-5} і N_{3-4} дає змогу дістати значення коефіцієнта:

$$r_{31} = 0, 6i_0 \cos \alpha + (0, 6i_0 \operatorname{tg} \alpha + \frac{i_0}{\cos \alpha}) \sin \alpha - \frac{2i_0}{\cos \alpha} \sin \alpha = 0.$$

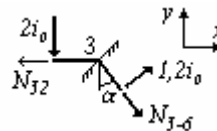
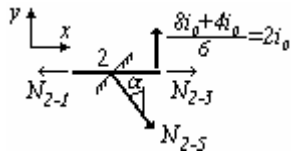
Використовуємо той самий шлях для визначення інших коефіцієнтів і вільного члена третього рядка системи канонічних рівнянь, беручи до уваги те, що вони мають аналогічний фізичний зміст:

- у стані 2
(еп. \bar{M}_2)



$$\sum F_x = -r_{32} + N_{2-5} \sin \alpha + N_{3-4} \sin \alpha + 1, 2i_0 \cos \alpha = 0,$$

$$r_{32} = N_{2-5} \sin \alpha + N_{3-4} \sin \alpha + 0, 96i_0;$$

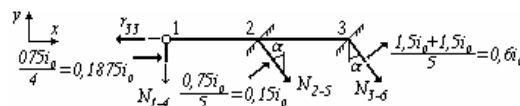


$$\sum F_y = -N_{2-5} \cos \alpha + 2i_0 = 0, \quad \sum F_y = -N_{3-6} \cos \alpha - 2i_0 + 1, 2i_0 \sin \alpha = 0,$$

$$N_{2-5} = \frac{2i_0}{\cos \alpha}, \quad N_{3-6} = -\frac{2i_0}{\cos \alpha + 1, 2i_0} \operatorname{tg} \alpha,$$

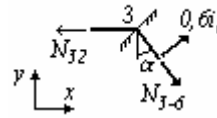
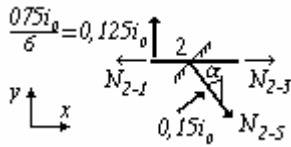
$$r_{32} = 2i_0 \operatorname{tg} \alpha - 2i_0 \operatorname{tg} \alpha + 1, 2i_0 \operatorname{tg} \alpha \sin \alpha = 1, 5i_0;$$

- у стані 3 (еп. \bar{M}_3)



$$F_x = -r_{33} + 0, 1875i_0 + 0, 15i_0 \cos \alpha + N_{2-5} \sin \alpha + 0, 6i_0 \cos \alpha + N_{3-6} \sin \alpha = 0$$

$$r_{33} = N_{2-5} \sin \alpha + N_{3-6} \sin \alpha + 0, 7875i_0;$$

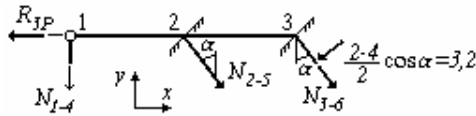


$$\sum F_y = -N_{2-5} \cos \alpha + 0,15i_0 \sin \alpha + 0,125i_0 = 0 \quad \sum F_y = -N_{3-6} \cos \alpha + 0,6i_0 \sin \alpha = 0,$$

$$N_{2-5} = \frac{0,215i_0}{\cos \alpha}, \quad N_{3-6} = 0,6i_0 \operatorname{tg} \alpha,$$

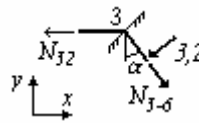
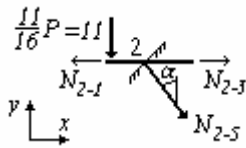
$$r_{33} = 0,7875i_0 + 0,215i_0 \operatorname{tg} \alpha + 0,6i_0 \operatorname{tg} \alpha \sin \alpha = 1,21875i_0;$$

- у вантажному стані
(еп. M_p)



$$\sum F_x = -R_{3p} - 3,2 \cos \alpha + N_{2-5} \sin \alpha + N_{3-6} \sin \alpha = 0,$$

$$R_{3p} = N_{2-5} \sin \alpha + N_{3-6} \sin \alpha - 3,2 \operatorname{tg} \alpha;$$



$$\sum F_y = -N_{2-5} \cos \alpha - 11 = 0, \quad \sum F_y = -N_{3-6} \cos \alpha - 3,2 \sin \alpha = 0,$$

$$N_{2-5} = -\frac{11}{\cos \alpha}, \quad N_{3-6} = -3,2 \operatorname{tg} \alpha,$$

$$R_{3p} = -11 \operatorname{tg} \alpha - 3,2 \operatorname{tg} \alpha \sin \alpha - 3,2 \cos \alpha = -12,25.$$

Підставляємо коефіцієнти і вільні члени в систему канонічних рівнянь:

$$\begin{aligned} 17i_0 Z_1 + 4i_0 Z_2 + 18 &= 0; \\ 4i_0 Z_1 + 12i_0 Z_2 + 1,5i_0 Z_3 - 2,667 &= 0; \\ +1,5i_0 Z_2 + 1,21875i_0 Z_3 - 12,25 &= 0. \end{aligned}$$

Коефіцієнти системи рівнянь симетричні стосовно головної діагоналі, яка містить лише додатні величини.

12.12. Розгорнута форма методу переміщень

Розрахунок статично невизначуваних рам за методом переміщень у розгорнутій формі відрізняється від реалізації канонічної форми методу суто технологічно. Відмінність полягає в іншому позначенні основних невідомих методу і в тому, що для складання системи розв'язувальних рівнянь методу і побудови епюр дійсних зусиль немає потреби будувати одиничні та вантажну епюри згинальних моментів в основній системі. Для цього використовуються формули для моментів і поперечних сил на кінцях однопрогонових статично невизначуваних балок від можливих переміщень кінців та від зовнішніх дій.

При наявності достатнього досвіду використання для розрахунку статично невизначуваних рам розгорнутої форми методу переміщень дещо скорочує витрати часу, порівняно з канонічною формою. Зручним є також використання розгорнутої форми для розрахунку стійкості рам за методом переміщень (див. [Гл. 19](#)).

12.12.1. Основна система і основні невідомі

Основна система методу переміщень при використанні розгорнутої форми створюється так само, як і в канонічній формі (див. [п.12.2](#)). Нагадаємо, що з цією метою до всіх жорстких вузлів вихідної рами встановлюються рухомі затиснення, які виключають можливість повороту цих вузлів. Можливі незалежні поступальні переміщення вузлів системи виключаються встановленням додаткових опорних стержнів, кількість і розташування яких визначається за допомогою шарнірної схеми рами. Як вже зазначалось, вихідна рама таким чином перетворюється в набір простих однопрогонових балок постійної жорсткості з нерухомими опорами.

За основні невідомі методу переміщень розглядаються переміщення вузлів, виключені встановленими в основній системі додатковими закріпленнями. На відміну від канонічної форми в розгорнутій вони мають інші позначення. Невідомі кути повороту жорстких вузлів позначаються як φ_i , де i – номер відповідного вузла. Невідомі поступальні переміщення вузлів позначаються Δ_j , де j – порядковий номер переміщення. Природно, що всі вузли рами мають бути пронумеровані, причому зручно, але не обов'язково, нумерувати першими ті вузли, кути повороту яких невідомі.

На рис.12.42 наведено основну систему методу переміщень і основні невідомі для рами, зображеної на [рис.12.5.а](#).

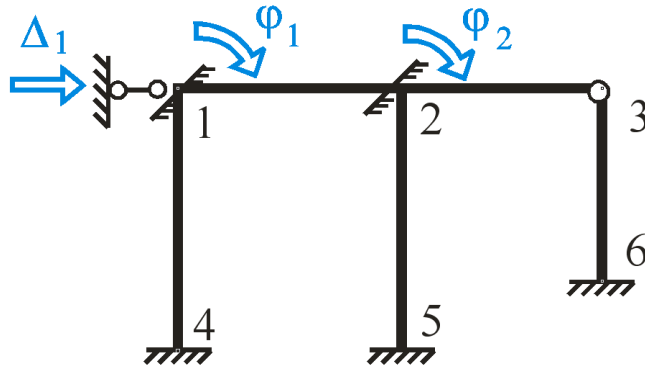


Рис.12.42

12.12.2. Формули методу переміщень для зігнутих стержнів

Нагадаємо, що основна система методу переміщень являє собою систему однопрогонових балок. Для складання розв'язувальних рівнянь методу переміщень при використанні розгорнутої форми методу необхідно мати формули залежності згинальних моментів і поперечних сил на їхніх кінцях від переміщень її опор і місцевого навантаження.

Можливі види балок зображені на [рис.12.2](#). Балки на рис. 12.2,д,з та еквівалентні до них за припущеннями методу переміщень балки на рис.12.2,а,г статично визначаються. Тому їхні зусилля не залежать від переміщень опор, а їхня залежність від місцевого навантаження легко визначається засобами опору матеріалів.

Отже, необхідно отримати зазначені формули тільки для стержня, що має на кінцях жорстке закріплення (рис.12.2,в,ж), і стержня, один кінець якої закріплений жорстко, а другий приєднується за допомогою шарніра (рис.12.2,б,е). Ці формули можуть бути одержані за допомогою різних способів: за формулами методу початкових параметрів, на підставі методу сил тощо. Скористаємось співвідношеннями методу скінченних елементів.

Стержень постійної жорсткості з затисненнями на кінцях

Розглянемо стержень ab (рис.12.43,а), жорстко прикріплений на кінцях a і b до вузлів рами або до землі. На рис.12.43,б зображений цей стержень, відокремлений від системи. Дія відкинutoї частини споруди або землі замінюється згинальними моментами M_{ab} і M_{ba} та поперечними силами Q_{ab} і Q_{ba} на кінцях стержня. Додатні напрямки згинальних моментів збігаються з рухом годинникової стрілки. Додатні поперечні сили повертають стержень у напрямі руху годинникової стрілки.

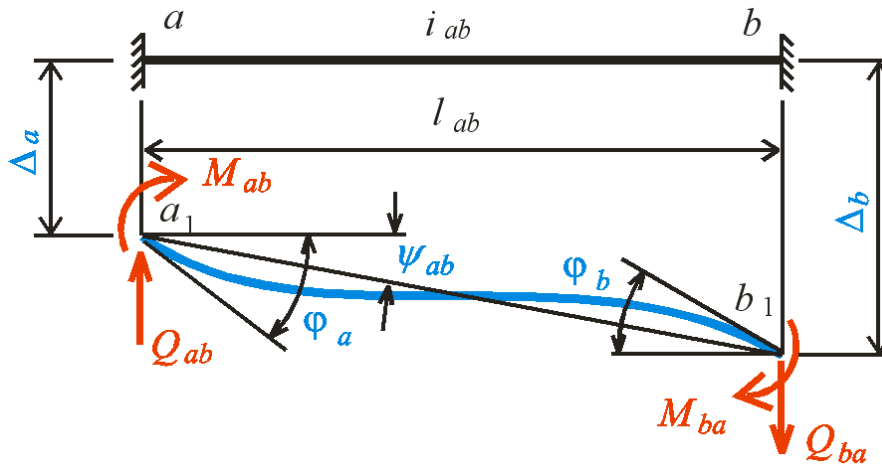


Рис.12.43

У результаті деформації рами, що зумовлені зовнішніми діями, кінці балки дістають переміщення Δ_a і Δ_b , перпендикулярні до ab . Переміщення кінців у напрямку ab не беремо до уваги відповідно до основних припущень методу переміщень.

Як зазначалось у п.6.4, кінцеві реакції стержня пов'язані з його кінцевими переміщеннями співвідношенням

$$\vec{r}'_e = \mathbf{k}'_e \vec{\delta}'_e. \quad (12.30)$$

Тут \vec{r}'_e – вектор кінцевих реакцій стержня, який з урахуванням правила знаків можна записати у вигляді:

$$\vec{r}'_e{}^T = \{-N_{ab} \quad Q_{ab} \quad M_{ab} \quad N_{ba} \quad -Q_{ba} \quad M_{ba}\}_e;$$

\mathbf{k}'_e – матриця жорсткості стержня із затисненнями на обох кінцях у локальній системі координат (див.п.6.5.1); $\vec{\delta}'_e$ – вектор кінцевих переміщень стержня, який з урахуванням правила знаків можна записати у вигляді

$$\vec{\delta}'_e{}^T = \{\delta_1 \quad -\Delta_a \quad \varphi_a \quad \delta_4 \quad -\Delta_b \quad \varphi_b\}_e.$$

Скориставшись співвідношенням (12.30), дістанемо:

$$\begin{aligned} Q_{ab} &= -\frac{12i_{ab}}{l_{ab}^2} \Delta_a - \frac{6i_{ab}}{l_{ab}} \varphi_a + \frac{12i_{ab}}{l_{ab}^2} \Delta_b - \frac{6i_{ab}}{l_{ab}} \varphi_b; \\ M_{ab} &= \frac{6i_{ab}}{l_{ab}} \Delta_a + 4i_{ab} \varphi_a - \frac{6i_{ab}}{l_{ab}} \Delta_b + 2i_{ab} \varphi_b; \end{aligned} \quad (12.31)$$

$$-Q_{ba} = \frac{12i_{ab}}{l_{ab}^2} \Delta_a + \frac{6i_{ab}}{l_{ab}} \varphi_a - \frac{12i_{ab}}{l_{ab}^2} \Delta_b + \frac{6i_{ab}}{l_{ab}} \varphi_b;$$

$$M_{ba} = \frac{6i_{ab}}{l_{ab}} \Delta_a + 2i_{ab} \varphi_a - \frac{6i_{ab}}{l_{ab}} \Delta_b + 4i_{ab} \varphi_b.$$

Введемо поняття кута перекоосу стержня ψ_{ab} , який за мализною визначається співвідношенням

$$\psi_{ab} \approx \text{tg} \psi_{ab} = \frac{\Delta_b - \Delta_a}{l_{ab}} \quad (12.32)$$

і вважається додатним, якщо поворот відбувається за напрямом руху годинникової стрілки.

Після деяких перетворень (12.31) з урахуванням (12.32) одержуємо формули залежності згинальних моментів і поперечних сил на затиснених кінцях стержня від переміщень його кінців:

$$M_{ab} = 2i_{ab}(2\varphi_a + \varphi_b - 3\psi_{ab});$$

$$M_{ba} = 2i_{ab}(\varphi_a + 2\varphi_b - 3\psi_{ab});$$

$$Q_{ab} = -\frac{6i_{ab}}{l_{ab}}(\varphi_a + \varphi_b - 2\psi_{ab}); \quad (12.33)$$

$$Q_{ba} = -\frac{6i_{ab}}{l_{ab}}(\varphi_a + \varphi_b - 2\psi_{ab}).$$

Для врахування впливу на кінцеві зусилля місцевих поперечних навантажень введемо до формул (12.33) додатки, величини яких можна одержати за допомогою таблиці [Додатку 2](#). Тоді формули для визначення згинальних моментів і поперечних сил на затиснених кінцях стержня матимуть такий остаточний вигляд:

$$M_{ab} = 2i_{ab}(2\varphi_a + \varphi_b - 3\psi_{ab}) + M'_{ab};$$

$$M_{ba} = 2i_{ab}(\varphi_a + 2\varphi_b - 3\psi_{ab}) + M'_{ba};$$

$$Q_{ab} = -\frac{6i_{ab}}{l_{ab}}(\varphi_a + \varphi_b - 2\psi_{ab}) + Q'_{ab}; \quad (12.34)$$

$$Q_{ba} = -\frac{6i_{ab}}{l_{ab}}(\varphi_a + \varphi_b - 2\psi_{ab}) + Q'_{ba}.$$

Стержень постійної жорсткості з затисненням на початку і шарніром на кінці

Розглянемо стержень ab (рис.12.44,а), жорстко прикріплений на початку a і шарнірно прикріплений на кінці b до вузлів рами або до землі. На рис.12.44,б показано цей стержень, відокремлений від системи. Дія відкинутої частини споруди або землі замінюється згинальними моментом M_{ab} на початку та поперечними силами Q_{ab} і Q_{ba} на початку і на кінці стержня. Додатні напрями згинальних моментів збігаються з рухом годинникової стрілки. Додатні поперечні сили повертають стержень у напрямі руху годинникової стрілки.

Внаслідок деформації рами від дії навантажень кінці стержня отримують переміщення Δ_a і Δ_b , перпендикулярні до ab . Переміщення кінців у напрямку ab не беремо до уваги відповідно до основних припущень методу переміщень.

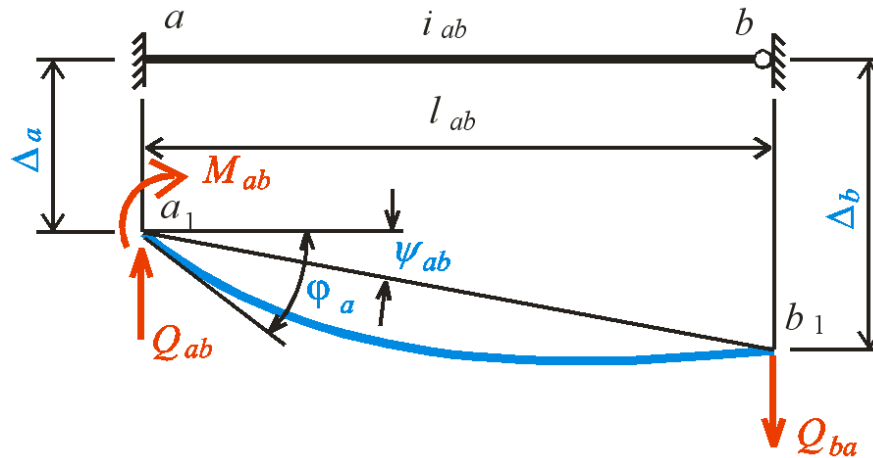


Рис.12.44

У цьому випадку у співвідношенні (12.30) вектор кінцевих реакцій стержня з урахуванням правила знаків записується так:

$$\bar{\mathbf{r}}_e'^T = \{-N_{ab} \quad Q_{ab} \quad M_{ab} \quad N_{ba} \quad -Q_{ba} \quad 0\}_e;$$

\mathbf{k}'_e – матриця жорсткості стержня із затисненням на початку і шарніром на кінці в локальній системі координат (див.п.6.5.2); вектор кінцевих переміщень стержня з урахуванням правила знаків записується у вигляді:

$$\bar{\boldsymbol{\delta}}_e'^T = \{\delta_1 \quad -\Delta_a \quad \varphi_a \quad \delta_4 \quad -\Delta_b \quad \delta_6\}_e.$$

Скориставшись співвідношенням (12.30), дістанемо:

$$Q_{ab} = -\frac{3i_{ab}}{l_{ab}^2} \Delta_a - \frac{3i_{ab}}{l_{ab}} \varphi_a + \frac{3i_{ab}}{l_{ab}^2} \Delta_b;$$

$$\begin{aligned}
 M_{ab} &= \frac{3i_{ab}}{l_{ab}} \Delta_a + 3i_{ab} \varphi_a - \frac{3i_{ab}}{l_{ab}} \Delta_b; \\
 -Q_{ba} &= \frac{3i_{ab}}{l_{ab}^2} \Delta_a + \frac{3i_{ab}}{l_{ab}} \varphi_a - \frac{3i_{ab}}{l_{ab}^2} \Delta_b.
 \end{aligned}
 \tag{12.35}$$

Після деяких перетворень (12.35) з урахуванням (12.32) отримуємо формули залежності згинальних моментів і поперечних сил на кінцях стержня від переміщень його кінців:

$$\begin{aligned}
 M_{ab} &= 3i_{ab} (\varphi_a - \psi_{ab}); \\
 Q_{ab} &= -\frac{3i_{ab}}{l_{ab}} (\varphi_a - \psi_{ab}); \\
 Q_{ba} &= -\frac{3i_{ab}}{l_{ab}} (\varphi_a - \psi_{ab}).
 \end{aligned}
 \tag{12.36}$$

Для врахування впливу на кінцеві зусилля місцевих поперечних навантажень введемо до формул (12.36) додатки, значення яких можна дістати з таблиць [Додатку 2](#).

Тоді формули для визначення згинальних моментів і поперечних сил на затисненому началі і шарнірному кінці стержня набудуть такого вигляду:

$$\begin{aligned}
 M_{ab} &= 3i_{ab} (\varphi_a - \psi_{ab}) + M''_{ab}; \\
 Q_{ab} &= -\frac{3i_{ab}}{l_{ab}} (\varphi_a - \psi_{ab}) + Q''_{ab}; \\
 Q_{ba} &= -\frac{3i_{ab}}{l_{ab}} (\varphi_a - \psi_{ab}) + Q''_{ba}.
 \end{aligned}
 \tag{12.37}$$

12.12.3. Розв'язувальні рівняння розгорнутої форми методу переміщень

Розв'язувальні рівняння методу переміщень при використанні розгорнутої форми складаються безпосередньо з умови відсутності реактивних зусиль у додаткових в'язях, встановлених при створенні основної системи.

Як вже відомо, додаткові в'язі встановлюються двох видів – рухомі затиснення і додаткові опорні стержні. Відповідно розв'язувальні рівняння можна поділити також на два види. Їх інколи називають основними та додатковими рівняннями. Зазначимо, що обидва види рівнянь цілком рівнозначні, і ці не досить вдалі назви існують лише для того, щоб розрізнити їх одне від одного. Разом з тим зручніше складати спочатку основні рівняння, а потім – додаткові.

Основні рівняння розгорнутої форми методу переміщень складаються з умов відсутності реактивних моментів у введених при створенні основної системи рухомих затисненнях.

Для їхнього складання необхідно виокремити вузол основної системи, до якого введене рухоме затиснення. До вузла прикладається реактивний момент рухомого затиснення, а також кінцеві згинальні моменти у перерізах стержнів. Позначення цих моментів мають два індекси, перший з яких відповідає номеру самого вузла, а другий – номеру вузла, в якому закінчується стержень.

Правило знаків для кінцевих згинальних моментів і поперечних сил пов'язано із напрямком руху годинникової стрілки: додатні кінцеві моменти намагаються повернути стержень за годинниковою стрілкою, а вузол – навпаки; додатні поперечні сили повертають і стержень, і вузол за годинниковою стрілкою. Додатні напрями кінцевих моментів і поперечних сил зображено на рис.12.45.

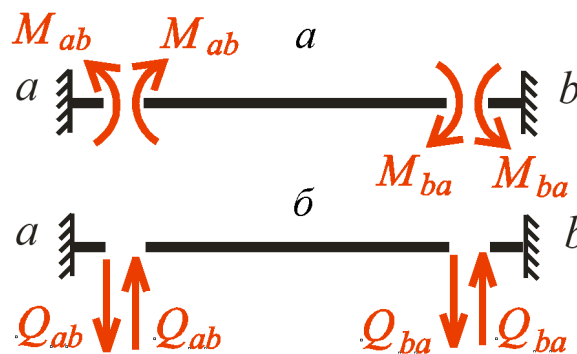


Рис.12.45

З рівняння рівноваги вузла визначається реактивний момент у рухомому затисненні основної системи. Через відсутність рухомого затиснення у вихідній рамі, до якої повинна бути еквівалентною основна система, означений реактивний момент слід прирівняти нулю.

Візьмемо для прикладу ту саму раму, яка вже розглядалась у канонічній формі методу переміщень. Схема рами, її основна система і основні невідомі ще раз наведені на рис.12.46.

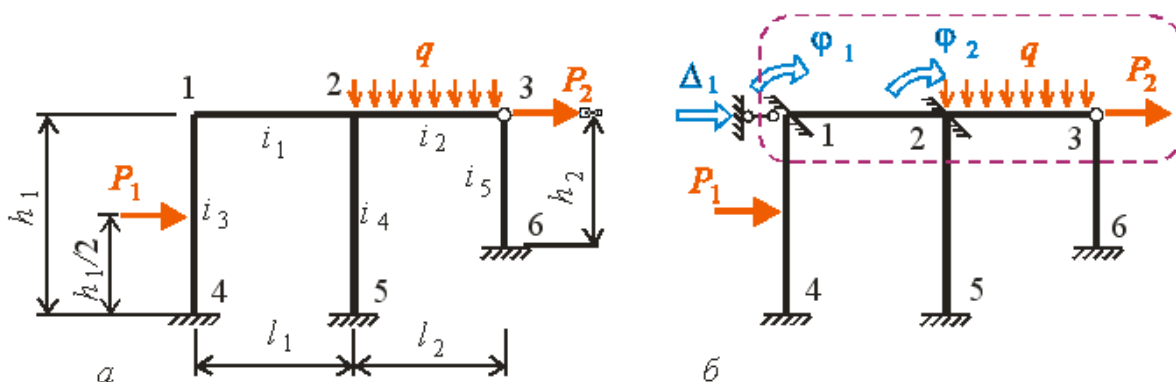
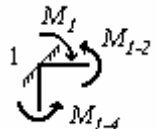


Рис.12.46

Перше основне розв'язувальне рівняння складається з умови дорівнювання нулю реактивного моменту у першому додатковому рухомому затисненні. Для його визначення виокремлюємо перший вузол, в якому встановлено рухоме затиснення, і складаємо рівняння його рівноваги:

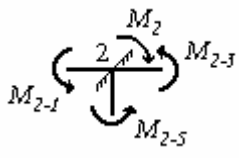


звідки $M_1 = M_{1-2} + M_{1-4}$; але $M_1 = 0$;
отже, маємо:

$$\sum M_1 = 0; \quad M_1 - M_{1-2} - M_{1-4} = 0;$$

$$M_{1-2} + M_{1-4} = 0. \quad (12.38)$$

Друге основне розв'язувальне рівняння складається з умови дорівнювання нулю реактивного моменту у другому додатковому рухомому затисненні. Для його визначення виокремлюємо другий вузол, в якому встановлено рухоме затиснення, і складаємо рівняння його рівноваги:



звідки $M_2 = M_{2-1} + M_{2-3} + M_{2-5}$;
але $M_2 = 0$; отже, маємо:

$$\sum M_2 = 0; \quad M_2 - M_{2-1} - M_{2-3} - M_{2-5} = 0;$$

$$M_{2-1} + M_{2-3} + M_{2-5} = 0. \quad (12.39)$$

Додаткові рівняння розгорнутої форми методу переміщень складаються з умов відсутності реакцій у додаткових опорних стержнях, встановлених при створенні основної системи.

Для їхнього складання необхідно відокремити фрагмент основної системи і розглянути умови його рівноваги. Для визначення положення перетину, що відокремлює потрібний фрагмент, зручно скористатися картиною перекосів шарнірної схеми. Він повинен проходити через додатковий стержень, в якому обчислюється реакція, а також через всі стержні основної системи, які зазнають перекосів від невідомого поступального переміщення у напрямі цього додаткового стержня. Зауважимо, що стержень краще перерізати нескінченно близько до одного з його кінців.

До відокремленого фрагмента потрібно прикласти всі сили, що діють на нього, в тому числі зовнішні навантаження та зусилля в перерізах. Невідому реакцію в опорному стержні треба прикладати у напрямі, що збігається з напрямом невідомого переміщення, поперечні сили у перерізах стержнів – у додатних напрямках, тобто так, щоб вони намагались повернути стержень у напрямі руху годинникової стрілки.

Для рами, яку ми розглядаємо, картина перекосів шарнірної схеми наведена на рис.12.47.

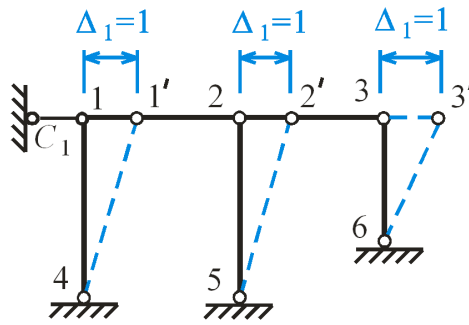


Рис.12.47

Отже переріз має проходити через додатковий опорний стержень C_1 , прикріплений до вузла 1, і через стержні 1-4, 2-5 і 3-6, що мають перекося внаслідок невідомого переміщення Δ . Цей переріз показаний на рис. 12.46,б.

Розглянемо умови рівноваги цього фрагмента. Запишемо рівняння рівноваги:

$$\sum F_x = 0; R - Q_{1-4} - Q_{2-5} - Q_{3-6} + P_2 = 0;$$

звідки $R = Q_{1-4} + Q_{2-5} + Q_{3-6} - P_2;$

але $R = 0;$ отже, маємо:

$$- Q_{1-4} - Q_{2-5} - Q_{3-6} = 0. \tag{12.40}$$

Таким чином, одержані три розв’язувальні рівняння методу переміщень у загальному вигляді.

Для їхнього розкриття необхідно виразити згинальні моменти і поперечні сили, що входять до цих рівнянь, за формулами (12.34) або (12.37) відповідно до умов закріплення кінців стержня в основній системі. Додатки в цих формулах, які враховують місцеві поперечні навантаження на стержнях, визначаються за формулами таблиць Додатку 2.

Попередньо на основі картини перекося шарнірної схеми рами слід визначити залежність кутів перекося всіх стержнів рами від невідомих поступальних переміщень.

Для прикладу, що розглядається, на підставі рис.12.46 з урахуванням правила знаків маємо:

$$\psi_{1-4} = \psi_{2-5} = +\frac{\Delta}{h_1}; \quad \psi_{3-6} = +\frac{\Delta}{h_2}; \quad \psi_{1-2} = \psi_{2-3} = 0.$$

Розкриваємо рівняння (12.38). В основній системі стержні 1-2 і 1-4 мають затиснення на обох кінцях. Відтак скористаємось формулами (12.34).

$$M_{1-2} = 2i_{1-2}(2\varphi_1 + \varphi_2 - 3\psi_{1-2}) + M'_{1-2}.$$

Враховуючи, що $i_{1-2}=i_1$, $\psi_{1-2}=0$ і стержень 1-2 не має місцевого поперечного навантаження, дістанемо:

$$M_{1-2} = 4i_1\varphi_1 + 2i_1\varphi_2.$$

Для стержня 1-4 застосуємо формулу:

$$M_{1-4} = 2i_{1-4}(2\varphi_1 + \varphi_4 - 3\psi_{1-4}) + M'_{1-4}.$$

Беручи до уваги, що $i_{1-4}=i_3$, до стержня 1-4 прикладена зосереджена сила і вузол 4 жорстко прикріплений до “землі”, тобто $\varphi_4 = 0$, маємо:

$$M_{1-4} = 2i_3 \left(2\varphi_1 + 0 - 3\frac{\Delta}{h_1} \right) + \frac{P_1 h_1}{8} = 4i_3\varphi_1 - \frac{6}{h_1}i_3\Delta + \frac{P_1 h_1}{8}.$$

Підставивши ці величини у формулу (12.38), здобуємо перше розв’язувальне рівняння

$$4(i_1 + i_3)\varphi_1 + 2i_1\varphi_2 - \frac{6}{h_1}i_3\Delta + \frac{P_1 h_1}{8} = 0. \quad (12.41)$$

Розкриваємо рівняння (12.39). Для стержнів 2-1 і 2-5, затиснутих по кінцях, використовуємо формули (12.34), для стержня 2-3, один кінець якого затиснутий, а другий шарнірний, – формули (12.37):

$$M_{2-1} = 2i_{1-2}(2\varphi_2 + \varphi_1 - 3\psi_{1-2}) + M'_{2-1} = 2i_1(2\varphi_2 + \varphi_1 - 0) + 0 = 4i_1\varphi_2 + 2i_1\varphi_1;$$

$$M_{2-3} = 3i_{2-3}(\varphi_2 - \psi_{2-3}) + M''_{2-3} = 3i_2(\varphi_2 - 0) - \frac{ql_2^2}{8} = 3i_2\varphi_2 - \frac{ql_2^2}{8};$$

$$M_{2-5} = 2i_{2-5}(2\varphi_2 + \varphi_5 - 3\psi_{2-5}) + M'_{2-5} = 2i_4 \left(2\varphi_2 + 0 - 3\frac{\Delta}{h_1} \right) + 0 = 4i_4\varphi_2 - \frac{6}{h_1}i_4\Delta;$$

Підставивши ці величини у формулу (12.39), здобудемо друге розв’язувальне рівняння

$$2i_1\varphi_1 + (4(i_1 + i_4) + 3i_2)\varphi_2 - \frac{6}{h_1}i_4\Delta - \frac{ql_2^2}{8} = 0. \quad (12.42)$$

Розкриваємо рівняння (12.40). Для стержнів 1-4 і 2-5, затиснутих по кінцях, використовуємо формули (12.34), для стержня 3-6, один кінець якого затиснутий, а другий шарнірний, – формули (12.37):

$$Q_{1-4} = -\frac{6i_{1-4}}{l_{1-4}}(\varphi_1 + \varphi_4 - 2\psi_{1-4}) + Q'_{1-4} = -\frac{6i_3}{h_1}\left(\varphi_1 + 0 - 2\frac{\Delta}{h_1}\right) - \frac{P_1}{2} = -\frac{6i_3}{h_1}\varphi_1 + \frac{12i_3}{h_1^2}\Delta - \frac{P_1}{2};$$

$$Q_{2-5} = -\frac{6i_{2-5}}{l_{2-5}}(\varphi_2 + \varphi_5 - 2\psi_{2-5}) + Q'_{2-5} = -\frac{6i_4}{h_1}\left(\varphi_2 + 0 - 2\frac{\Delta}{h_1}\right) + 0 = -\frac{6i_4}{h_1}\varphi_2 + \frac{12i_4}{h_1^2}\Delta;$$

$$Q_{3-6} = -\frac{3i_{3-6}}{l_{3-6}}(\varphi_6 - \psi_{3-6}) + Q''_{3-6} = -\frac{3i_5}{h_2}\left(0 - \frac{\Delta}{h_2}\right) + 0 = \frac{3i_5}{h_2^2}\Delta.$$

Підставивши ці величини у формулу (12.40), здобудемо третє розв'язувальне рівняння

$$-\frac{6}{h_1}i_3\varphi_1 - \frac{6}{h_1}i_4\varphi_2 + \left(\frac{12(i_3 + i_4)}{h_1^2} + \frac{3i_5}{h_2^2}\right)\Delta - \frac{P_1}{2} - P_2 = 0. \quad (12.43)$$

Запишемо рівняння (12.41) – (12.43) у вигляді системи рівнянь:

$$\begin{aligned} 4(i_1+i_3)\varphi_1 & \quad +2i_1\varphi_2 & \quad -\frac{6}{h_1}i_3\Delta & \quad +\frac{P_1h_1}{8} = 0; \\ 2i_1\varphi_1 + (4(i_1+i_4)+3i_2)\varphi_2 & & \quad -\frac{6}{h_1}i_4\Delta & \quad -\frac{ql_2^2}{8} = 0; \\ -\frac{6}{h_1}i_3\varphi_1 & \quad -\frac{6}{h_1}i_4\varphi_2 + \left(\frac{12(i_3+i_4)}{h_1^2} + \frac{3i_5}{h_2^2}\right)\Delta & \quad -\frac{P_1}{2} - P_2 = 0. \end{aligned}$$

Наведена система рівнянь на головній діагоналі має додатні коефіцієнти, побічні коефіцієнти симетричні стосовно головної діагоналі. Це дає змогу частково перевірити обчислення коефіцієнтів системи рівнянь.

Звертаємо увагу на те, що означена система рівнянь цілком збігається з розв'язувальною системою рівнянь, одержаною в [п.12.6.2](#) для тієї самої рами при використанні канонічної форми методу переміщень.

12.12.4. Побудова епюр дійсних зусиль

Після одержання основних невідомих методу переміщень, які визначаються з системи розв'язувальних рівнянь, можна обчислити значення кінцевих моментів і поперечних сил в усіх стержнях рами. Для цього необхідно скористатись формулами (12.34) або (12.37) залежно від способів закріплення кінців стержнів.

Відклавши на схемі рами отримані величини кінцевих моментів та з'єднавши їх у межах кожного стержня відрізками прямої, можна дістати епюру кінцевих моментів. Нагадаємо, що кінцеві моменти слід відкладати з боку розтягнутих волокон з урахуванням правила знаків.

На стержнях рами, які не мають місцевого поперечного навантаження, остаточно еюра згинальних моментів збігається з епюрою кінцевих моментів. Для завантажених стержнів слід побудувати епюри згинальних моментів як для простих однопрогонових статично визначуваних балок і відкласти їх від епюри кінцевих моментів.

Епюру дійсних поперечних сил також можна побудувати за допомогою епюри кінцевих поперечних сил, скоригованої на стержнях, які мають місцеві поперечні навантаження. Але можна одержати цю епюру, як було показано в п.12.8, використавши диференціальну залежність поперечних сил Q_0 від згинальних моментів M_0 .

Еюра дійсних поздовжніх сил будується з умов рівноваги вузлів рами (див.п.12.8).

12.12.5. Використання симетрії рами

Використання симетрії рами в розгорнутій формі методу переміщень, так само, як і в канонічній формі, приводить до істотного зменшення трудомісткості розрахунків.

При дії симетричного навантаження необхідно обрати основні невідомі методу таким чином, щоб вони відповідали лише симетричному деформуванню рами. Ця вимога виконується, якщо вважати невідомі кути повороту вузлів рами, які розташовані на осі симетрії, рівними нулю. Кути повороту жорстких вузлів рами, розташованих симетрично, повинні бути рівними за величиною та мати протилежний напрям, тобто мати протилежні знаки. Невідомі поступальні переміщення повинні також призводити до симетричного деформування.

На рис.12.48,б наведено основну систему та основні невідомі розгорнутої форми методу переміщень для рами, зображеної на рис.12.48,а, яка має симетричне навантаження.

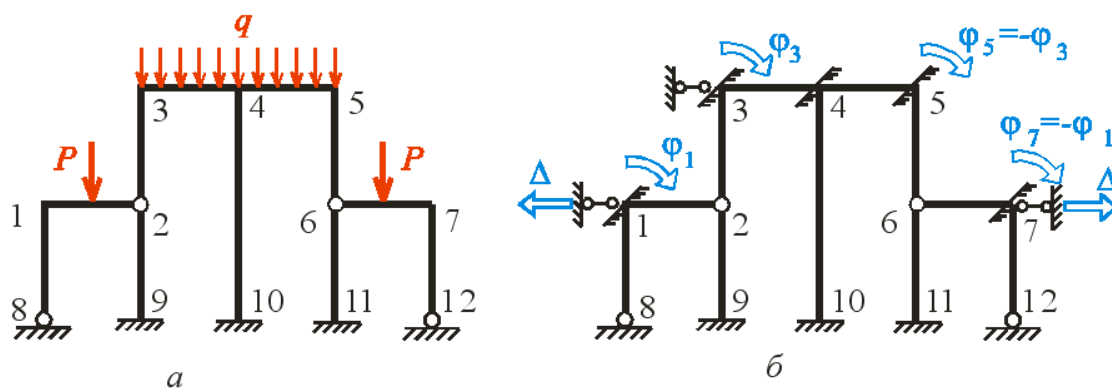


Рис.12.48

При дії кососиметричного навантаження необхідно призначити основні невідомі методу таким чином, щоб вони відповідали лише кососиметричному деформуванню рами. Ця вимога додержується, якщо невідомі кути повороту жорстких вузлів рами, розташованих симетрично, рівні за величиною та мають один і той самий напрям, тобто однакові за знаком.

Невідомі поступальні переміщення також мають призводити до косиметричного деформування.

На рис.12.49,б наведено основну систему та основні невідомі розгорнутої форми методу переміщень для рами, зображеної на рис.12.49,а, яка має косиметричне навантаження.

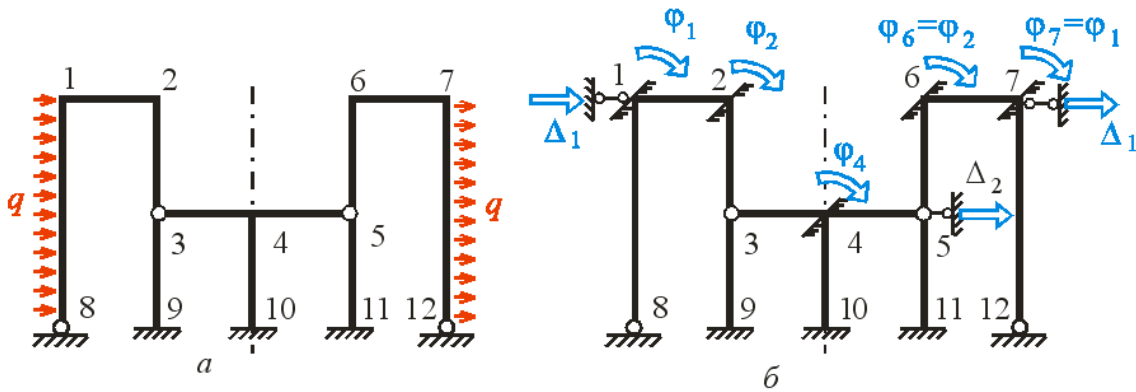


Рис.12.49

Якщо на симетричну систему діє **навантаження загального вигляду**, доцільно розкласти його на симетричне і косиметричне (див. розд.11.8) і здійснити два окремі розрахунки від дії кожного з цих складових навантажень. Остаточні дійсні зусилля одержуються як сума дійсних зусиль від симетричної і косиметричної складових вихідного навантаження (див. ф-ли 12.29).

12.12.6. Приклад розрахунку статично невизначуваної рами за методом переміщень у розгорнутій формі

Схема рами і навантаження наведено на рис.12.50.

Створимо для цієї рами основну систему методу переміщень. З цією метою необхідно ввести рухомі затиснення до жорстких вузлів 1 і 2, що унеможливить їхні повороти.

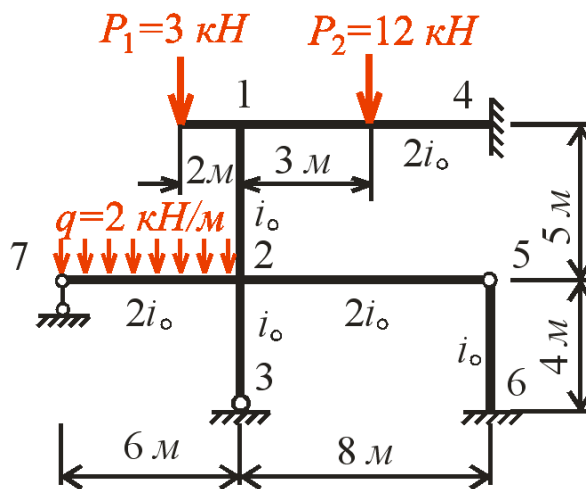


Рис.12.50

Для з'ясування кількості додаткових опорних стержнів, які потрібно встановити для виключення поступальних переміщень вузлів рами, побудуємо її шарнірну схему (рис.12.51,а). Для того щоб ця шарнірна схема перетворилась на геометрично незмінювану систему, досить встановити один додатковий горизонтальний опорний стержень, прикріплений до вузла 7. Справді, у цьому випадку вузли 3,6, 4 і 5 прикріплені нерухомо до “землі”. Вузол 2 прикріплюється до нерухомих вузлів стержнями 2-3 і 2-7, що не лежать на одній прямій. У свою чергу вузол 5 приєднується до вузла 2 і “землі”, а вузол 1 – до вузлів 2 і 4 парами стержнів, що не лежать на прямій. Зазначимо, що ті самі результати можна отримати, встановивши додатковий горизонтальний опорний стержень у вузлі 5 або 2.

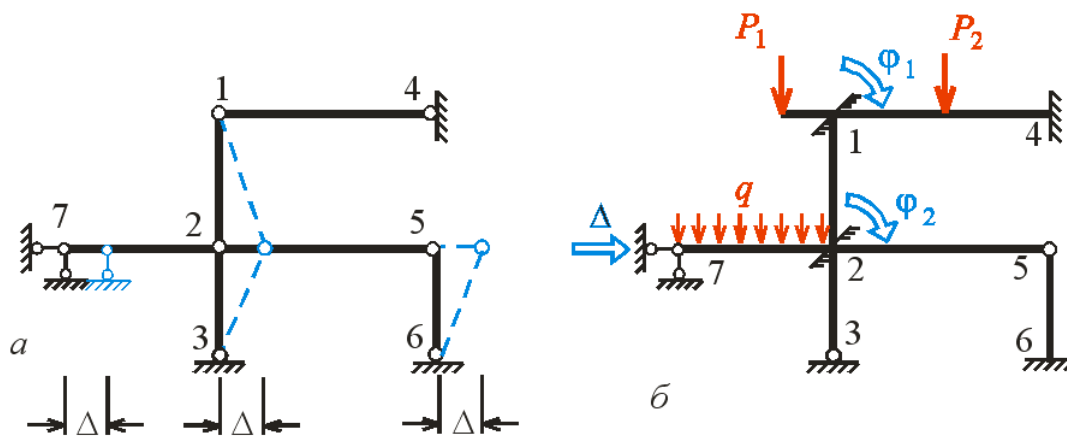


Рис.12.51

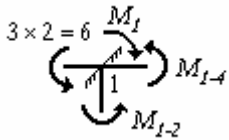
Основна система методу переміщень зображена на рис.12.51,б, де також показано основні невідомі методу переміщень: кути повороту Φ_1 вузла 1 і Φ_2 вузла 2 та незалежне поступальне переміщення Δ .

Виходячи з показаної на рис.12.51,а картини перекосів шарнірної схеми, виразимо кути перекосів усіх стержнів рами через невідоме поступальне переміщення:

$$\psi_{1-2} = -\frac{\Delta}{5}; \quad \psi_{2-3} = \psi_{5-6} = \frac{\Delta}{4}; \quad \psi_{1-4} = \psi_{2-7} = \psi_{2-5} = 0.$$

Складаємо розв'язувальні рівняння.

Перше рівняння складається з умови відсутності реактивного моменту в рухомому затисненні, встановленому у вузлі 1:



$$\Sigma M_1 = 0; \quad M_1 - M_{1-4} - M_{1-2} - 6 = 0;$$

$$M_1 = M_{1-4} + M_{1-2} + 6;$$

але $M_1 = 0$; тому

$$M_{1-4} + M_{1-2} + 6 = 0.$$

Розкриваємо це рівняння, використовуючи формули (12.34) і дані [Додатку 2](#):

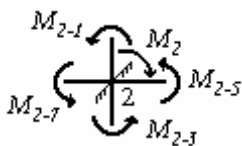
$$\begin{aligned} M_{1-4} &= 2i_{1-4}(2\varphi_1 + \varphi_4 - 3\psi_{1-4}) + M'_{1-4} = \\ &= 2 \cdot 2i_0(2\varphi_1 + 0 - 3 \cdot 0) - \frac{P_2 \cdot 8}{8} = 8i_0\varphi_1 - 12; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{1-2} &= 2i_{1-2}(2\varphi_1 + \varphi_2 - 3\psi_{1-2}) + M'_{1-2} = \\ &= 2i_0(2\varphi_1 + \varphi_2 - 3(-\frac{\Delta}{5})) + 0 = 4i_0\varphi_1 + 2i_0\varphi_2 + 1, 2i_0\Delta; \end{aligned}$$

Підставивши ці вирази, одержимо перше рівняння:

$$12i_0\varphi_1 + 2i_0\varphi_2 + 1, 2i_0\Delta - 6 = 0.$$

Друге розв'язувальне рівняння складається з умови відсутності реактивного моменту в рухомому затисненні, встановленому у вузлі 2:



$$\Sigma M_2 = 0; \quad M_2 - M_{2-1} - M_{2-5} - M_{2-3} - M_{2-7} = 0;$$

$$M_2 = M_{2-1} + M_{2-5} + M_{2-3} + M_{2-7} = 0;$$

але $M_2 = 0$; тому маємо

$$M_{2-1} + M_{2-5} + M_{2-3} + M_{2-7} = 0;$$

Розкриваємо це рівняння, використовуючи формули (12.34) для стержня 1-2, формули (12.37) для інших стержнів і дані [Додатку 2](#):

$$M_{2-1} = 2i_{1-2}(2\varphi_2 + \varphi_1 - 3\psi_{1-2}) + M'_{2-1} = 2i_0(2\varphi_2 + \varphi_1 - 3(-\frac{\Delta}{5})) + 0 = 4i_0\varphi_2 + 2i_0\varphi_1 + 1, 2i_0\Delta;$$

$$M_{2-5} = 3i_{2-5}(\varphi_2 - \psi_{2-5}) + M''_{2-1} = 3 \cdot 2i_0(\varphi_2 - 0) + 0 = 6i_0\varphi_2;$$

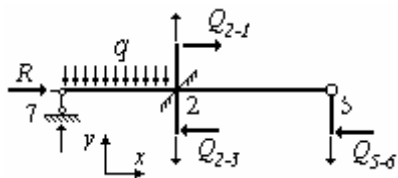
$$M_{2-3} = 3i_{2-3}(\varphi_2 - \psi_{2-3}) + M''_{2-3} = 3i_0(\varphi_2 - \frac{\Delta}{4}) + 0 = 3i_0\varphi_2 - 0, 75i_0\Delta;$$

$$M_{2-7} = 3i_{2-7}(\varphi_2 - \psi_{2-7}) + M''_{2-7} = 3 \cdot 2i_0(\varphi_2 - 0) + \frac{q \cdot 6^2}{8} = 6i_0\varphi_2 + 9.$$

Підставивши ці вирази, дістанемо друге рівняння:

$$2i_0\varphi_1 + 19i_0\varphi_2 + 0, 45i_0\Delta + 9 = 0.$$

Третє розв'язувальне рівняння складається з умови відсутності реакції в додатковому опорному стержні. Для його складання відокремлюємо фрагмент основної системи замкненим перерізом, який перетинає додатковий опорний стержень і стержні 1-2, 2-3 і 5-6, які зазнають перекосів внаслідок невідомого поступального переміщення Δ (рис.12.51.а). Складаємо рівняння рівноваги цього фрагмента:



$$\sum F_x = 0; \quad R + Q_{2-1} - Q_{2-3} - Q_{5-6} = 0;$$

$$R = Q_{2-3} + Q_{5-6} - Q_{2-1};$$

але $R = 0$; зрештою маємо

$$Q_{2-3} + Q_{5-6} - Q_{2-1} = 0;$$

Розкриваємо це рівняння, використовуючи формули (12.34) для стержня 1-2, формули (12.37) для інших стержнів:

$$Q_{2-3} = -\frac{3i_{2-3}}{l_{2-3}}(\varphi_2 - \psi_{2-3}) + Q_{2-3} = -\frac{3i_0}{4}\left(\varphi_2 - \frac{\Delta}{4}\right) + 0 = -0,75i_0\varphi_2 + 0,1875i_0\Delta;$$

$$Q_{5-6} = -\frac{3i_{5-6}}{l_{5-6}}(\varphi_2 - \psi_{5-6}) + Q'_{5-6} = -\frac{3i_0}{4}\left(0 - \frac{\Delta}{4}\right) + 0 = 0,1875i_0\Delta;$$

$$Q_{2-1} = -\frac{6i_{2-1}}{l_{2-1}}(\varphi_2 + \varphi_1 - 2\psi_{1-2}) + Q'_{2-1} = -\frac{6i_0}{5}\left(\varphi_2 + \varphi_1 - 2\left(-\frac{\Delta}{5}\right)\right) + 0 = -1,2i_0\varphi_2 - 1,2i_0\varphi_1 - 0,48i_0\Delta.$$

Підставивши ці вирази в третє рівняння, дістанемо:

$$1,2i_0\varphi_1 + 0,45i_0\varphi_2 + 0,855i_0\Delta = 0.$$

Отже, маємо систему трьох розв'язувальних рівнянь:

$$12i_0\varphi_1 + 2i_0\varphi_2 + 1,2i_0\Delta - 6 = 0;$$

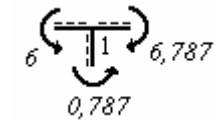
$$2i_0\varphi_1 + 19i_0\varphi_2 + 0,45i_0\Delta + 9 = 0;$$

$$1,2i_0\varphi_1 + 0,45i_0\varphi_2 + 0,855i_0\Delta = 0.$$

Розв'язавши цю систему рівнянь, отримаємо:

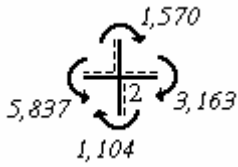
$$i_0\varphi_1 = 0,6516; \quad i_0\varphi_2 = -0,5272; \quad i_0\Delta = -0,6370.$$

Підставляючи значення основних невідомих до складених вище виразів, визначаємо величини кінцевих моментів на всіх стержнях рами:



$$M_{1-4} = 8i_0\varphi_1 - 12 = 8 \cdot 0,6516 - 12 = -6,787;$$

$$M_{1-2} = 4i_0\varphi_1 + 2i_0\varphi_2 + 1,2i_0\Delta = 4 \cdot 0,6516 - 2 \cdot 0,5272 - 1,2 \cdot 0,6370 = 0,787;$$

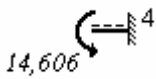


$$M_{2-1} = 4i_0\varphi_2 + i_0\varphi_1 + 1,2i_0\Delta = -4 \cdot 0,5272 + 2 \cdot 0,6516 - 1,2 \cdot 0,6370 = -1,570;$$

$$M_{2-5} = 6i_0\varphi_2 = -6 \cdot 0,5272 = -3,163;$$

$$M_{2-3} = 3i_0\varphi_2 - 0,75i_0\Delta = -3 \cdot 0,5272 + 0,75 \cdot 0,6370 = -1,104;$$

$$M_{2-7} = 6i_0\varphi_2 + 9 = -6 \cdot 0,5272 = 5,837.$$



$$M_{4-1} = 2i_{1-4}(2\varphi_4 + \varphi_1 - 3\psi_{1-4}) + M'_{4-1} = 2 \cdot 2i_0(2 \cdot 0 + \varphi_1 - 3 \cdot 0) + \frac{P_2 \cdot 8}{8} = 4i_0\varphi_1 + 12 = 4 \cdot 0,6516 + 12 = 14,606;$$



$$M_{6-5} = 3i_{5-6}(\varphi_6 - \psi_{5-6}) + M''_{6-5} = 3i_0\left(0 - \frac{\Delta}{4}\right) + 0 = -0,75i_0\Delta = 0,75 \cdot 0,6370 = 0,478.$$

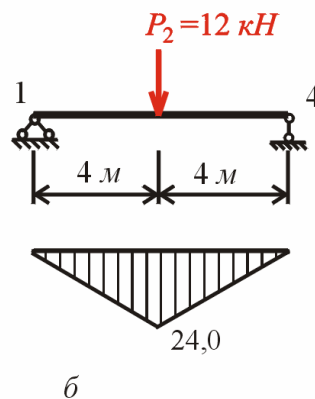
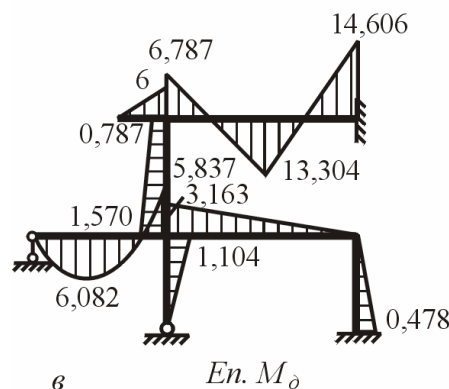
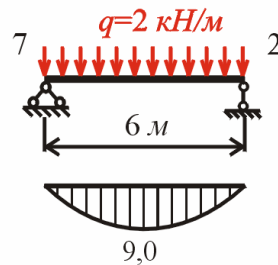
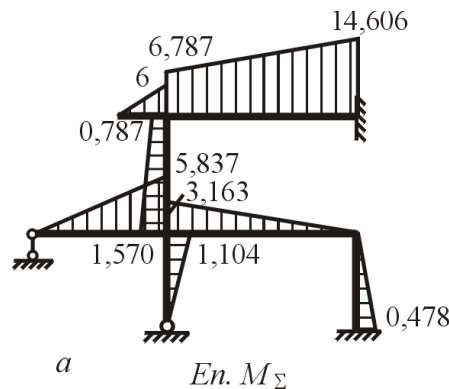


Рис.12.52

Будуємо епюру кінцевих моментів (рис.12.52,а), відкладаючи обчислені величини з боку розтягнутих волокон. На стержнях 1-4 і 2-7, які мають місцеві поперечні навантаження, від епюри

кінцевих моментів відкладаємо епюри, побудовані для цих стержнів як для статично визначуваних балок на двох опорах (рис.12.52,б). Таким чином одержуємо остаточну епюру дійсних згинальних моментів M_δ (рис.12.52,в).

Для виконання кінематичної перевірки дійсної епюри згинальних моментів M_δ обираємо для вихідної рами основну систему методу сил. Для цього перетворюємо її у статично визначувану раму, відкинувши "зайві" в'язі (рис.12.53,а). В цій основній системі будуємо сумарну одиничну епюру згинальних моментів M_Σ (рис.12.53,б) від дії кількох невідомих методу сил, величинам яких надані одиничні значення. Невідомі, яким надані одиничні значення, обрані таким чином, щоб епюра M_Σ поширювалась на всі стержні рами.

Для визначення переміщення необхідно попередньо виразити жорсткості всіх стержнів рами через їхні задані погонні жорсткості, виходячи зі співвідношення

$$(EI)_{ab} = i_{ab} \cdot l_{ab}.$$

Ці жорсткості стержнів показані на рис.12.53,а.

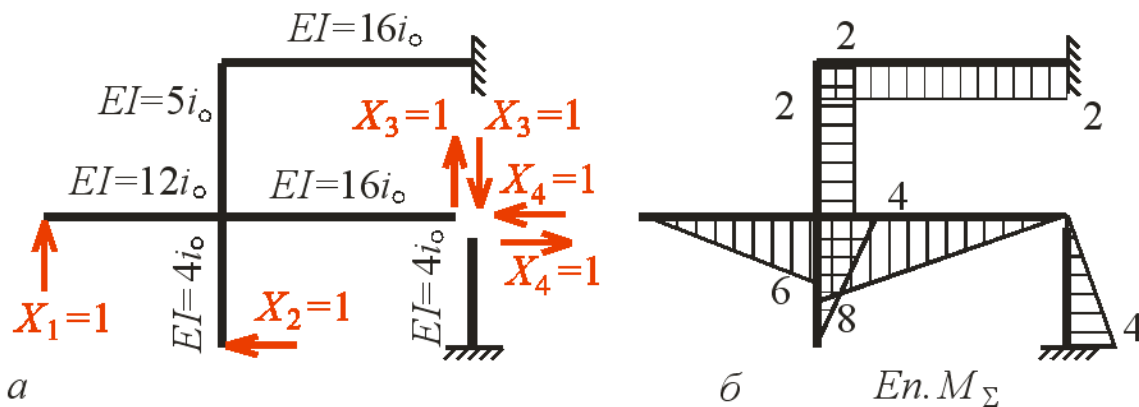


Рис.12.53

Обчислюємо сумарне переміщення:

$$\begin{aligned} \Delta_{\Sigma\delta} &= \sum_l \int \frac{M_\Sigma M_\delta}{EI} dx = \frac{6}{6 \cdot 12i_0} (4 \cdot 3 \cdot 6,082 - 6 \cdot 5,837) + \frac{1}{4i_0} \cdot \frac{4 \cdot 4}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1,104 - \\ &- \frac{1}{16i_0} \cdot \frac{8 \cdot 8}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 3,163 + \frac{1}{4i_0} \cdot \frac{4 \cdot 4}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,478 - \frac{1}{5i_0} \cdot 5 \cdot 2 \cdot \frac{1,570 + 0,787}{2} + \\ &+ \frac{1}{16i_0} \cdot 4 \cdot 2 \cdot \frac{13,304 - 6,787}{2} - \frac{1}{16i_0} \cdot 4 \cdot 2 \cdot \frac{14,606 - 13,304}{2} = \\ &= 6,9023/i_0 - 6,9008/i_0 = 0,0015/i_0. \end{aligned}$$

$$\text{Відносна похибка, \%: } \varepsilon = \frac{0,0015}{6,9008} \cdot 100 = 0,0217.$$

Обчислюємо величини кінцевих поперечних сил за формулами (12.34) або (12.37) залежно від закріплень кінців стержнів в основній системі.

$$Q_{2-3} = -0,75i_0\varphi_2 + 0,1875i_0\Delta = 0,75 \cdot 0,5272 - 0,1875 \cdot 0,6370 = 0,276;$$

$$Q_{5-6} = 0,1875i_0\Delta = -0,1875 \cdot 0,6370 = -0,119;$$

$$Q_{2-1} = -1,2i_0\varphi_2 - 1,2i_0\varphi_1 - 0,48i_0\Delta = 1,2 \cdot 0,5272 - 1,2 \cdot 0,6516 + 0,48 \cdot 0,6370 = 0,157;$$

$$Q_{1-4} = -\frac{6i_{1-4}}{l_{1-4}}(\varphi_1 + \varphi_4 - 2\psi_{1-4}) + Q'_{1-4} = -\frac{12i_0}{8}(\varphi_1 + 0 - 2 \cdot 0) + \frac{12}{2} = -1,5 \cdot 0,6516 + 6 = 5,023;$$

$$Q_{4-1} = -\frac{6i_{1-4}}{l_{1-4}}(\varphi_4 + \varphi_1 - 2\psi_{1-4}) + Q'_{4-1} = -\frac{12i_0}{8}(0 + \varphi_1 - 2 \cdot 0) - \frac{12}{2} = -1,5 \cdot 0,6516 - 6 = -6,977;$$

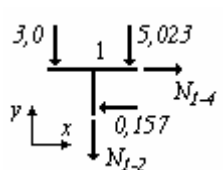
$$Q_{2-7} = -\frac{3i_{2-7}}{l_{2-7}}(\varphi_2 - \psi_{2-7}) + Q''_{2-7} = -\frac{6i_0}{6}(\varphi_2 - 0) - \frac{5}{8}ql = 0,5272 - 7,5 = -6,973;$$

$$Q_{7-2} = -\frac{3i_{2-7}}{l_{2-7}}(\varphi_2 - \psi_{2-7}) + Q''_{7-2} = -\frac{6i_0}{6}(\varphi_2 - 0) + \frac{3}{8}ql = 0,5272 + 4,5 = 5,027;$$

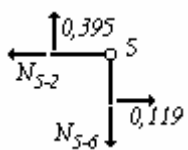
$$Q_{2-5} = -\frac{3i_{2-5}}{l_{2-5}}(\varphi_2 - \psi_{2-5}) + Q''_{2-5} = -\frac{6i_0}{8}(\varphi_2 - 0) + 0 = 0,75 \cdot 0,5272 = 0,395.$$

Епюра поперечних сил Q_D побудована на рис.12.54,а.

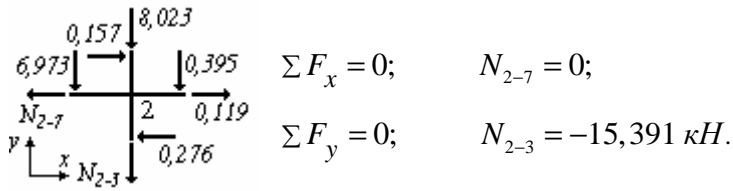
Поздовжні сили визначаємо, аналізуючи умови рівноваги вузлів рами. З цією метою прикладаємо до вузлів поперечні сили з урахуванням правила знаків (додатні поперечні сили намагаються повернути вузол у напрямі руху годинникової стрілки) та невідомі поздовжні сили у додатних напрямках (від вузла).



$$\begin{aligned} \Sigma F_x = 0; & \quad N_{1-4} = 0,157 \text{ кН}; \\ \Sigma F_x = 0; & \quad N_{1-4} = 0,157 \text{ кН}; \\ \Sigma F_x = 0; & \quad N_{5-2} = 0,119 \text{ кН}; \\ \Sigma F_y = 0; & \quad N_{1-2} = -8,023 \text{ кН}; \end{aligned}$$



$$\Sigma F_y = 0; \quad N_{5-6} = 0,395 \text{ кН};$$



Епюра поздовжніх сил N_δ побудована на рис.12.54,б.

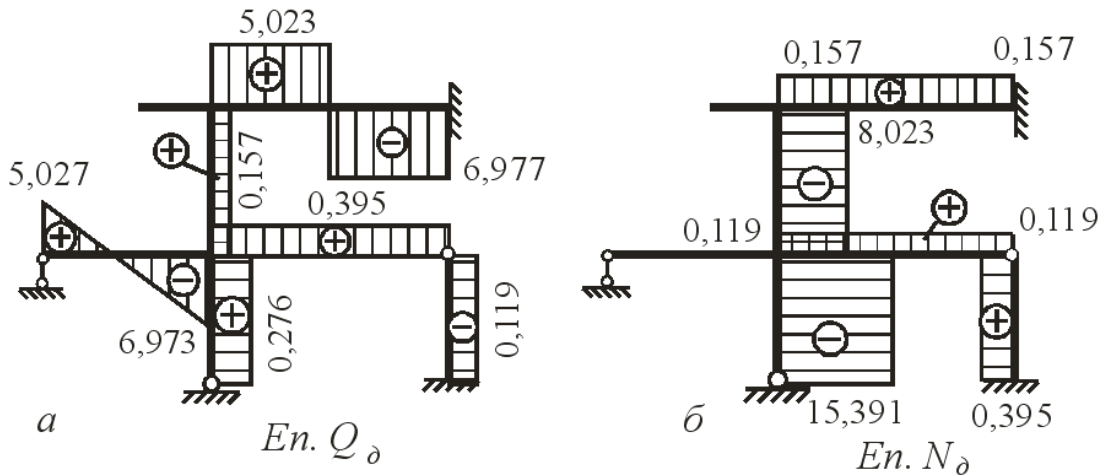


Рис.12.54

Для перевірки рівноваги рами відкидаємо опори і в місцях перерізів прикладаємо величини M_δ , Q_δ і N_δ , одержані з побудованих епюр (рис.12.55).

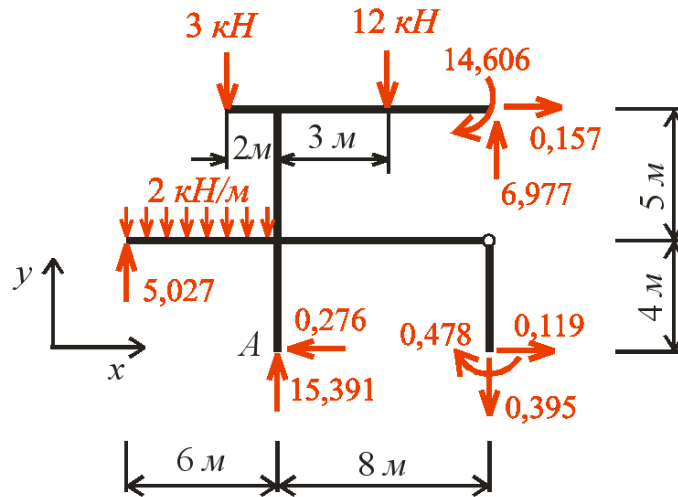


Рис.12.55

Перевіряємо, чи задовольняються рівняння рівноваги:

$$\Sigma F_x = 0,157 + 0,119 - 0,276 = 0;$$

$$\Sigma F_y = 5,027 + 15,391 - 0,395 + 6,977 - 3 - 12 - 2 \cdot 6 = 0,003 \approx -3 - 12 - 2 \cdot 6 = 0,003 \approx 0$$

$$\Sigma M_A = 5,027 \cdot 6 - 2 \cdot 6 \cdot 3 - 3 \cdot 2 + 12 \cdot 4 + 14,606 - 6,977 \cdot 8 + 0,157 \cdot 9 + 0,478 + 0,395 \cdot 8 = 0,003 \approx 0.$$