

Виберіть форму подання навчального матеріалу

✓ [Докладне подання](#)

[Скорочене подання](#)

11. Метод сил

Зміст глави

- [11.1. Ступінь статичної невизначуваності](#)
 - [11.2. Основна система і основні невідомі методу сил](#)
 - [11.3. Система розв'язувальних рівнянь методу сил](#)
 - [11.4. Обчислення коефіцієнтів системи канонічних рівнянь](#)
 - [11.5. Перевірка коефіцієнтів канонічних рівнянь](#)
 - [11.6. Визначення дійсних зусиль](#)
 - [11.7. Обчислення переміщень у статично невизначуваних системах](#)
 - [11.8. Кінематична перевірка розрахунку](#)
 - [11.9. Приклад розрахунку статично невизначуваної рами методом сил](#)
 - [11.10. Використання симетрії](#)
 - [11.10.1. Симетрія розрахункової схеми і навантаження](#)
 - [11.10.2. Навантаження загального вигляду](#)
 - [11.10.3. Симетричне навантаження](#)
 - [11.10.4. Кососиметричне навантаження](#)
 - [11.10.5. Групові невідомі](#)
 - [11.11. Розрахунок статично невизначуваних ферм](#)
 - [11.12. Приклад розрахунку статично невизначуваної ферми](#)
 - [11.13. Розрахунок нерозрізних балок](#)
 - [11.13.1. Рівняння трьох моментів](#)
 - [11.13.2. Метод моментних фокусів](#)
 - [11.13.3. Побудова огинаючих епюр](#)
 - [11.14. Особливості розрахунку статично невизначуваних комбінованих систем](#)
- [Запитання для самоперевірки](#)

11.1. Ступінь статичної невизначуваності

Основною характеристикою статично невизначуваних систем є ступінь статичної невизначуваності, який характеризує кількість надлишкових, або “зайвих” (з точки зору кінематичного аналізу) в’язей

Так, рама, зображена на рис.11.1,а, має дві жорстко затиснені опори і, отже, шість невідомих опорних реакцій. З іншого боку, рама являє собою один диск, для якого на площині можна скласти три рівняння рівноваги. Таким чином, для визначення опорних реакцій не вистачає трьох рівнянь. Різниця між кількістю невідомих статичних характеристик і кількістю рівнянь рівноваги характеризує **ступінь статичної невизначуваності** стержневої системи. Тому така рама становить тричі статично невизначувану систему.

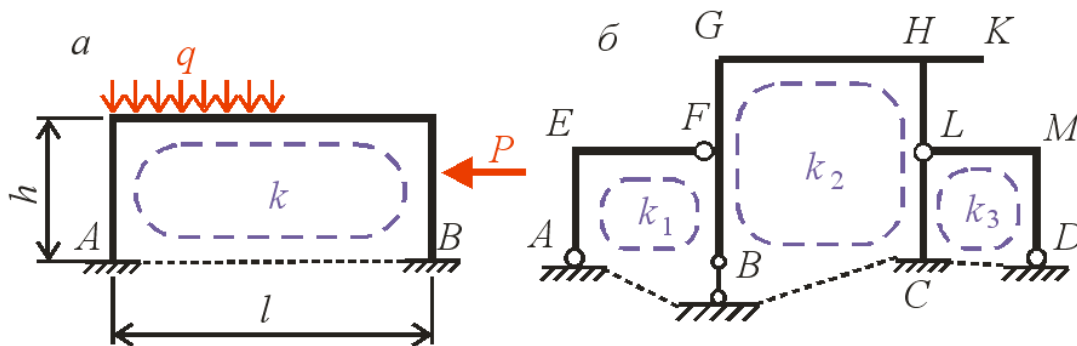


Рис.11.1

Рама містить одне “зайве” затиснення, ліве або праве, і в цьому “зайвому” затисненні виникають три “зайві” опорні реакції. Тому кажуть, що така рама має три “зайві” кінематичні в’язі або просто – три “зайві” в’язі.

Ступінь статичної невизначуваності може бути обчислений за формулою Чебишова. Проте для практичних розрахунків існує зручніша формула:

$$n = 3k - u. \quad (11.1)$$

У цій формулі n – ступінь статичної невизначуваності плоскої стержневої системи, k – число замкнених контурів у схемі, яке визначається кількістю ділянок, на які розподіляє площину розрахункова схема споруд, u – кількість простих шарнірів, які входять до замкнених контурів.

Так, рама на рис.11.1,а має лише один замкнений контур і не містить шарнірів. Отже

$$n = 3 \cdot 1 - 0 = 3.$$

Складніша рама показана на рис.11.1,б. Вона має три замкнені контури, які зображено штриховими лініями, і сім простих шарнірів: у шарнірно-нерухомих опорах A і D та у вузлі F – по

одному, в шарнірно-рухомій опорі B – два прості шарніри. Також двом простим шарнірам є еквівалентним складний шарнір у вузлі L . Отже, $n = 3 \cdot 3 - 7 = 2$, тобто рама містить дві “зайві” в’язі і є двічі статично невизначуваною.

Бувають випадки, коли формулою (11.1) скористатись важко або навіть неможливо. Так представлена на рис.11.2,а рама, містить стержні EH та FG , які не з’єднуються між собою в точці перетину, а лише перехрещуються. Внаслідок відсутності з’єднання виникає утруднення при визначенні кількості замкнених контурів.

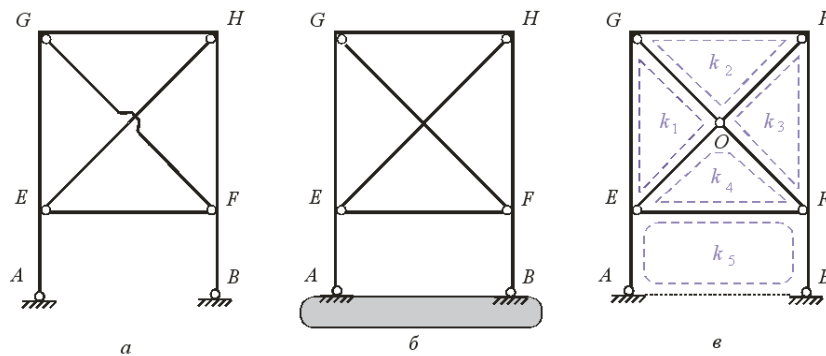


Рис.11.2

Ступень статичної невизначуваності означеної схеми можна обчислити згідно з формулою (2.4). Дійсно, можна трактувати розрахункову схему як сукупність двох дисків: ламаного стержня $AGHB$ і диска-основи (рис.11.2,б). Диски з’єднані між собою трьома кінематичними в’язями (стержні EF , EH і FG), а також двома простими шарнірами A і B . Припайки та вузли в’язей відсутні. Тобто $D=2$, $B=0$, $\Pi=0$, $\mathcal{I}=2$ та $C=3$. Отже

$$n = -(3 \cdot 2 + 0 - 0 - 2 \cdot 2 - 3 - 3) = 4.$$

Можна застосувати й такий прийом. У точку перехрещення кінематичних в’язей умовно вводиться шарнір (точка O на рис.11.2,в). Це дозволяє визначити кількість замкнених контурів ($k = 5$) і кількість простих шарнірів. У цьому випадку $u=11$ (по одному шарніру в точках A, B, G, H ; по два простих шарніри в точках E і F , а також потрійний шарнір в точці O). Таким чином за формулою (11.1) маємо:

$$n = 3k - u = 3 \cdot 5 - 11 = 4.$$

11.2. Основна система і основні невідомі методу сил

Основною системою методу сил називають геометрично незмінювану і статично визначувану систему, яка одержана із заданої статично невизначуваної схеми відкиданням “зайвих” в’язей

Реакції відкинутих в’язей прикладаються до основної системи разом із заданими зовнішніми діями, як сили, величини яких невідомі. У подальшому ці сили визначатимуться в першу чергу. Вони становлять основні невідомі задачі і позначаються символами X_1, X_2, \dots, X_n , де n – ступінь статичної невизначуваності задачі. Так, на [рис.11.3](#) зображено кілька основних систем рами ([рис.11.1,а](#)), які одержано відкиданням тих чи інших “зайвих” в’язей. В усіх випадках утворені основні системи геометрично незмінювані і нерухомі.

Можна навести кілька найпоширеніших способів відкидання “зайвих” в’язей:

1. Відкидання опорних в’язей. При цьому до основної системи прикладаються реакції відкинутих в’язей (рис.11.3,а,б,г).
2. Введення шарніра еквівалентне відкиданню однієї в’язі. При цьому з обох боків від шарніра прикладаються зосереджені моменти невідомої величини, які дорівнюють один одному, але спрямовані в протилежних напрямках (рис.11.3,в,е).
3. Розріз стержня, який має на обох кінцях жорсткі вузли, є еквівалентним відкиданню трьох в’язей. При цьому в місці розрізу прикладаються поздовжні, поперечні сили, а також зосереджені моменти, величини яких невідомі (рис.11.3,д).

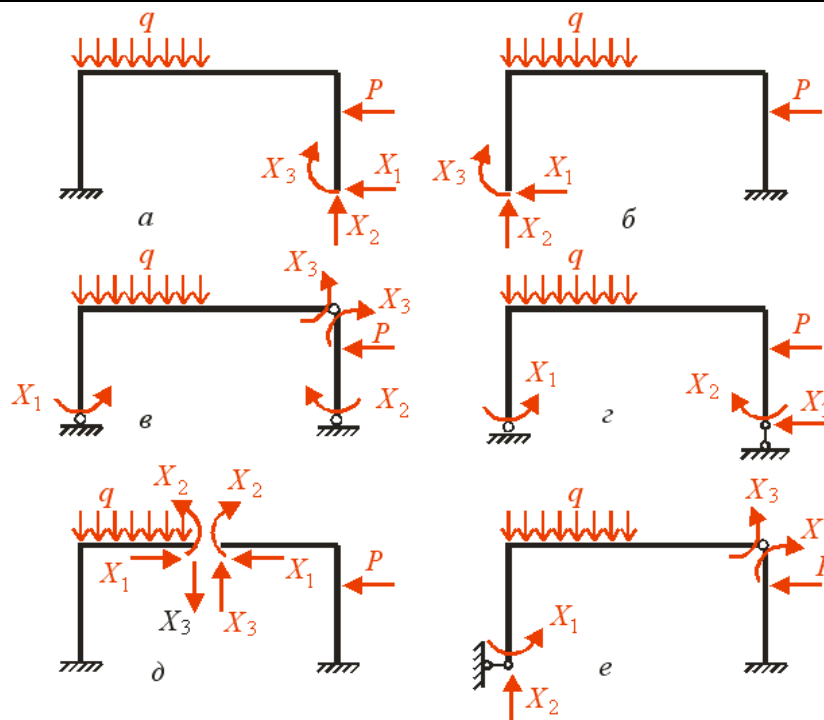


Рис.11.3

11.3. Система розв'язувальних рівнянь методу сил

Завдяки переходу від розрахункової схеми до основної системи розрахунок статично невизначуваної схеми замінюється на розрахунок її статично визначуваної основної системи. Деформації і, отже, зусилля, які виникають у цих двох схемах, будуть різними.

Для усунення розбіжності в деформуванні цих двох схем на основну систему слід накласти додаткові умови, які зроблять неможливими переміщення в напрямі відкинутих “зайвих” в'язей. Ці умови можуть бути одержані безпосередньо із розгляду деформацій основної системи від заданих зовнішніх дій та від дії основних невідомих.

Повне переміщення основної системи в напрямі “зайвої” в'язі i може бути представлене як сума переміщень окремо від дії кожного зайвого невідомого і зовнішнього навантаження. Так, для двічі статично невизначуваної рами (рис. 11.4,а), основна система якої показана на рис. 11.4,б

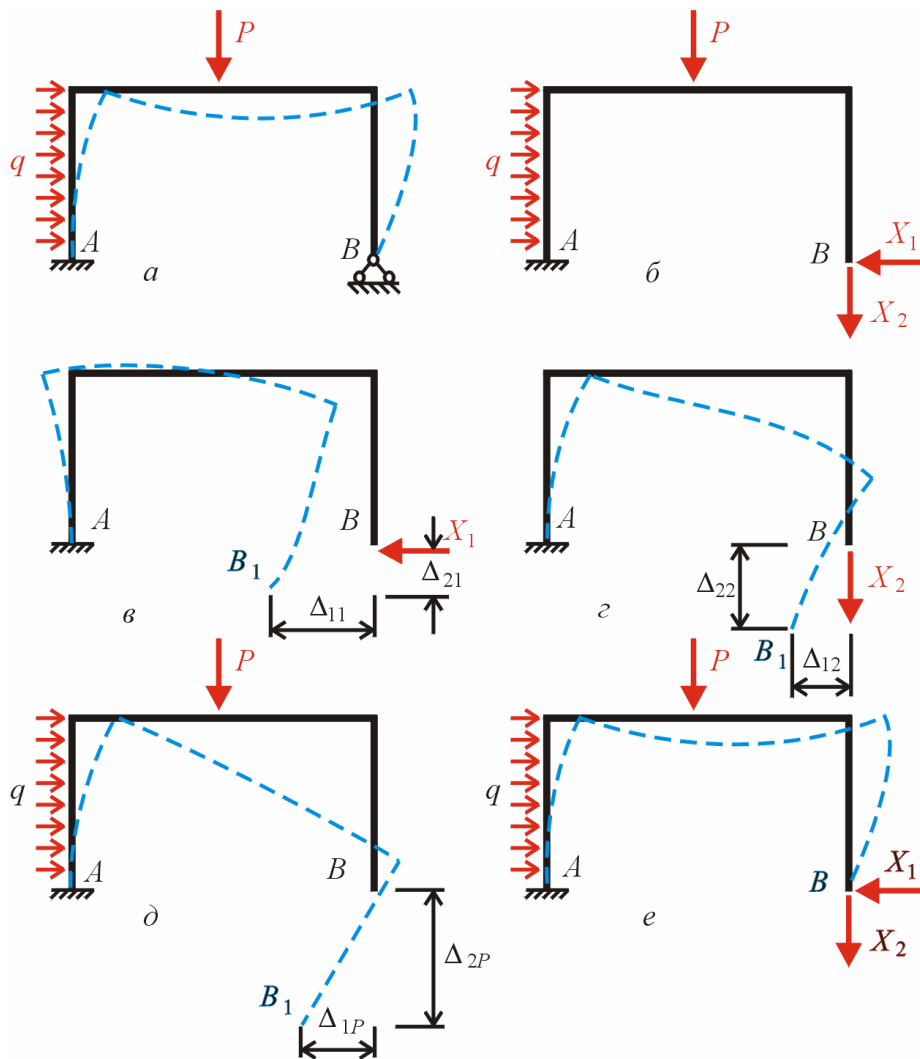


Рис.11.4

$$\Delta_{1\Sigma} = \Delta_{11} + \Delta_{12} + \Delta_{1P};$$

$$\Delta_{2\Sigma} = \Delta_{21} + \Delta_{22} + \Delta_{2P},$$

де Δ_{ik} – переміщення в стані k основної системи в напрямі основного невідомого X_i . Кожне з переміщень, зумовлене дією зайвого невідомого (рис.11.4,в,г), може бути представлено як добуток переміщення від дії цього невідомого, яке умовно приймається за одиницю, на його дійсну невідому величину:

$$\Delta_{11} = \delta_{11}X_1, \quad \Delta_{12} = \delta_{12}X_2, \quad \Delta_{21} = \delta_{21}X_1, \quad \Delta_{22} = \delta_{22}X_2,$$

де δ_{ik} – аналогічні переміщення від дії зайвих одиничних невідомих. Величини Δ_{iP} характеризують переміщення основної системи в напрямі основного невідомого X_i у вантажному стані (рис.11.4,д).

Враховуючи, що дійсні переміщення заданої рами в напрямках “зайвих” в’язей відсутні (рис.11.4,е), тобто $\Delta_{1\Sigma} = \Delta_{2\Sigma} = 0$, зрештою можемо записати:

$$\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1P} = 0;$$

$$\delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2P} = 0.$$

Для n разів статично невизначуваної системи повне переміщення в напрямі відкинutoї “зайвої” в’язі i може бути записане аналогічно:

$$\Delta_{i\Sigma} = \Delta_{i1} + \Delta_{i2} + \dots + \Delta_{ii} + \dots + \Delta_{in} + \Delta_{iP} = 0, \quad (11.2)$$

але

$$\Delta_{i1} = \delta_{i1}X_1, \quad \Delta_{i2} = \delta_{i2}X_2, \dots, \Delta_{ii} = \delta_{ii}X_i, \dots, \Delta_{in} = \delta_{in}X_n. \quad (11.3)$$

Підставивши (11.3) у (11.2), дістанемо рівняння

$$\delta_{i1}X_1 + \delta_{i2}X_2 + \dots + \delta_{ii}X_i + \dots + \delta_{in}X_n + \Delta_{iP} = 0. \quad (11.4)$$

Записавши рівняння (11.4) послідовно для кожної відкинutoї в’язі, доходимо системи рівнянь відносно основних невідомих задачі:

$$\begin{aligned} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \dots + \delta_{1n}X_n + \Delta_{1P} &= 0; \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \dots + \delta_{2n}X_n + \Delta_{2P} &= 0; \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots & \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ \delta_{n1}X_1 + \delta_{n2}X_2 + \dots + \delta_{nn}X_n + \Delta_{nP} &= 0. \end{aligned} \quad (11.5)$$

Система лінійних алгебраїчних рівнянь (11.5) є математичною умовою відсутності переміщень в основній системі в напрямках відкинутих “зайвих” в’язей. При виконанні цих умов деформований і, отже, й напружений стан статично визначуваної основної системи буде еквівалентним напружено-деформованому стану вихідної статично невизначуваної системи.

Рівняння (11.5) не залежать від вигляду, навантаження, обраної основної системи, чи від характеру основних невідомих. Вони мають стандартний (канонічний) вигляд:

- кількість рівнянь i , отже, кількість невідомих у кожному рівнянні, дорівнює ступеню статичної невизначуваності n ;
- коефіцієнт δ_{ij} при кожному невідомому має два індекси: перший індекс i відповідає номеру рядка, другий індекс j – номеру стовпця (номеру невідомого);
- у кожному рівнянні є вільний член Δ_{ip} , перший індекс якого відповідає номеру рівняння;
- коефіцієнти δ_{ii} , розташовані на головній діагоналі системи рівнянь, суттєво додатні (їх називають головними коефіцієнтами);
- побічні коефіцієнти відповідно до теореми Максвелла ($\delta_{ij}=\delta_{ji}$) симетричні відносно головної діагоналі системи рівнянь

Система рівнянь (11.5) називається **системою канонічних рівнянь методу сил**. Невідомі системи канонічних рівнянь становлять сили – реакції відкинутих “зайвих” в’язей, коефіцієнти – переміщення в основній системі в напрямі цих в’язей від дії одиничних основних невідомих. Коефіцієнти при невідомих називають **одиничними** переміщеннями, а вільні члени – **вантажними**.

Згідно з означеними правилами можна записувати систему рівнянь методу сил формально. Так, для рами (рис.11.1), яка має три “зайві” в’язі, система канонічних рівнянь методу сил матиме вигляд:

$$\begin{aligned} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{13}X_3 + \Delta_{1p} &= 0; \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{23}X_3 + \Delta_{2p} &= 0; \\ \delta_{31}X_1 + \delta_{32}X_2 + \delta_{33}X_3 + \Delta_{3p} &= 0. \end{aligned} \quad (11.6)$$

Необхідно враховувати те, що конкретний фізичний зміст рівнянь змінюється залежно від вибору основної системи і призначення основних невідомих. Так, якщо перше рівняння з (11.6) для основної системи (рис.11.3.а) виражає відсутність горизонтального переміщення перерізу B , то для другої основної системи (рис.11.3.б) – рівність нулю вертикального переміщення перерізу A , а для основної системи (рис.11.3.в) – рівність нулю кута повороту на опорі B .

Система канонічних рівнянь методу сил може бути записана в матричному вигляді:

$$\mathbf{B} \vec{\mathbf{X}} + \vec{\mathbf{\Delta}} = \vec{\mathbf{0}}, \quad (11.7)$$

де $\vec{\mathbf{X}}^T = \{X_1 \quad X_2 \quad \dots \quad X_n\}$ – вектор основних невідомих,

$\vec{\mathbf{\Delta}}^T = \{\Delta_{1P} \quad \Delta_{2P} \quad \dots \quad \Delta_{nP}\}$ – вектор вантажних переміщень,

\mathbf{B} – матриця податливості основної системи в напрямках відкинутих в'язей:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \dots & \delta_{1n} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \dots & \delta_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \delta_{n1} & \delta_{n2} & \dots & \delta_{nn} \end{bmatrix} \quad (11.8)$$

Нагадаємо властивості елементів матриці податливості:

- головні коефіцієнти – додатні числа: $\delta_{ii} > 0$;
- побічні коефіцієнти є симетричними відносно головної діагоналі, тобто $\delta_{ij} = \delta_{ji}$.

Для визначення системи канонічних рівнянь методу сил можна скористатись іншим підходом, що базується на теоремі Кастільяно (5.12), точніше на окремому її випадку, згідно з яким частинні похідні від потенціальної енергії деформації по реакціям "зайвих" в'язей системи дорівнюють нулю (теорема Менабреа).

Потенціальна енергія деформацій при урахуванні тільки згинальних моментів виражається співвідношенням

$$U = \sum \int_0^l \frac{M^2}{2EI} dx. \quad (11.9)$$

Керуючись принципом незалежності дій, згинальний момент у довільному перерізі будь-якого стержня основної системи n раз статично невизначуваної розрахункової схеми може бути виражений через прикладені сили:

$$M = \bar{M}_1 X_1 + \bar{M}_2 X_2 + \dots + \bar{M}_i X_i + \dots + \bar{M}_n X_n + M_p, \quad (11.10)$$

де $\bar{M}_i = \bar{M}_i(x)$, $M_p = M_p(x)$ – функції координати x перерізу стержня, які виражають згинальні моменти в основній системі, що зумовлені дією основних невідомих $X_i = 1$ ($i = 1, 2, \dots, n$) і заданого зовнішнього навантаження відповідно.

Необхідною умовою екстремуму функціонала потенціальної енергії є рівність нулю її першого диференціала, що еквівалентно рівності нулю всіх її перших похідних по незалежним параметрах навантаження X_1, X_2, \dots, X_n . Інакше кажучи, повинна мати місце рівність

$$\frac{\partial U}{\partial X_i} = \frac{\partial}{\partial X_i} \sum \int_0^l \frac{M^2}{2EI} dx = 0. \quad (11.11)$$

Як відомо, похідну можна внести під знак інтеграла:

$$\frac{\partial U}{\partial X_i} = \sum \int_0^l \frac{\partial}{\partial X_i} \left(\frac{M^2}{2EI} \right) dx = 0.$$

Виконаємо диференціювання, вважаючи жорсткості стержнів EI постійними:

$$\frac{\partial U}{\partial X_i} = \sum \int_0^l \frac{M}{EI} \cdot \frac{\partial M}{\partial X_i} dx = 0. \quad (11.12)$$

Похідна від згинального моменту (11.10) має вигляд

$$\frac{\partial M}{\partial X_i} = \frac{\partial}{\partial X_i} (\bar{M}_1 X_1 + \bar{M}_2 X_2 + \dots + \bar{M}_i X_i + \dots + \bar{M}_n X_n + M_p) = \bar{M}_i.$$

Підставивши похідну до (11.12), одержимо

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial X_i} = & X_1 \sum \int_0^l \frac{\bar{M}_i \bar{M}_1}{EI} dx + X_2 \sum \int_0^l \frac{\bar{M}_i \bar{M}_2}{EI} dx + \dots + \\ & + X_n \sum \int_0^l \frac{\bar{M}_i \bar{M}_n}{EI} dx + \sum \int_0^l \frac{\bar{M}_i M_p}{EI} dx = 0. \end{aligned}$$

Беручи до уваги те, що вирази при невідомих i вільний член являють собою переміщення, запишемо

$$\delta_{i1} X_1 + \delta_{i2} X_2 + \dots + \delta_{in} X_n + \Delta_{ip} = 0,$$

тобто одержимо результат, що є аналогічним (11.4). Означене рівняння виражає умову нерозривності деформації в напрямі “зайвої” відкинутої в’язі. Диференціюючи потенціальну енергію U почергово по кожному параметру X_i ($i = 1, 2, \dots, n$), одержимо систему канонічних рівнянь (11.5).

11.4. Обчислення коефіцієнтів системи канонічних рівнянь

Коефіцієнти системи канонічних рівнянь методу сил (елементи матриці податливості основної системи) являють собою переміщення основної системи від дії основних невідомих, які покладають за одиницю. Для обчислення необхідно скористатися формулою Максвелла–Мора, яка для плоских систем має вигляд

$$\Delta_{ip} = \sum \int_l \frac{\bar{N}_i N_p}{EA} dx + \sum \int_l \frac{\bar{M}_i M_p}{EI} dx + \sum \int_l \frac{\eta \bar{Q}_i Q_p}{GA} dx.$$

Для різного типу розрахункових схем звичайно утримують лише деякі складові формули. Так, при розрахунку елементів, які переважно працюють на згин (балки, рами), утримується доданок, який залежить від згинальних моментів:

$$\delta_{ij} = \sum \int_l \frac{\bar{M}_i \bar{M}_j}{EI} dx, \quad \Delta_{ip} = \sum \int_l \frac{\bar{M}_i M_p}{EI} dx. \quad (11.13)$$

Для ферм ураховують лише поздовжні сили:

$$\delta_{ij} = \sum \int_l \frac{\bar{N}_i \bar{N}_j}{EA} dx, \quad \Delta_{ip} = \sum \int_l \frac{\bar{N}_i N_p}{EA} dx. \quad (11.14)$$

Для арок

$$\delta_{ij} = \sum \int_l \frac{\bar{N}_i \bar{N}_j}{EA} dx + \sum \int_l \frac{\bar{M}_i \bar{M}_j}{EI} dx, \quad (11.15)$$

$$\Delta_{ip} = \sum \int_l \frac{\bar{N}_i N_p}{EA} dx + \sum \int_l \frac{\bar{M}_i M_p}{EI} dx.$$

Таким чином, для обчислення коефіцієнтів системи канонічних рівнянь необхідно визначити зусилля, які виникають у всіх елементах основної системи від дії зовнішнього навантаження, а також від дії кожного основного невідомого $X_i = 1$.

У практичних розрахунках безпосереднє інтегрування замінюється чисельним з використанням правила Верещагіна, формули Сімсона – Корноухова, формули прямокутників, трапецій тощо. Тому для подальшого розрахунку будуються епюри зусиль у статично визначуваній основній системі. Так, для рами, зображеної на [рис.11.1.а](#), при використанні основної системи ([рис.11.3.а](#)) побудовано епюри \bar{M}_1 , \bar{M}_2 , \bar{M}_3 від дії одиничних основних невідомих і епюра M_p від дії зовнішнього навантаження ([рис.11.5](#)), після чого за формулами ([11.13](#)) можна обчислити коефіцієнти канонічних рівнянь ([11.6](#)).

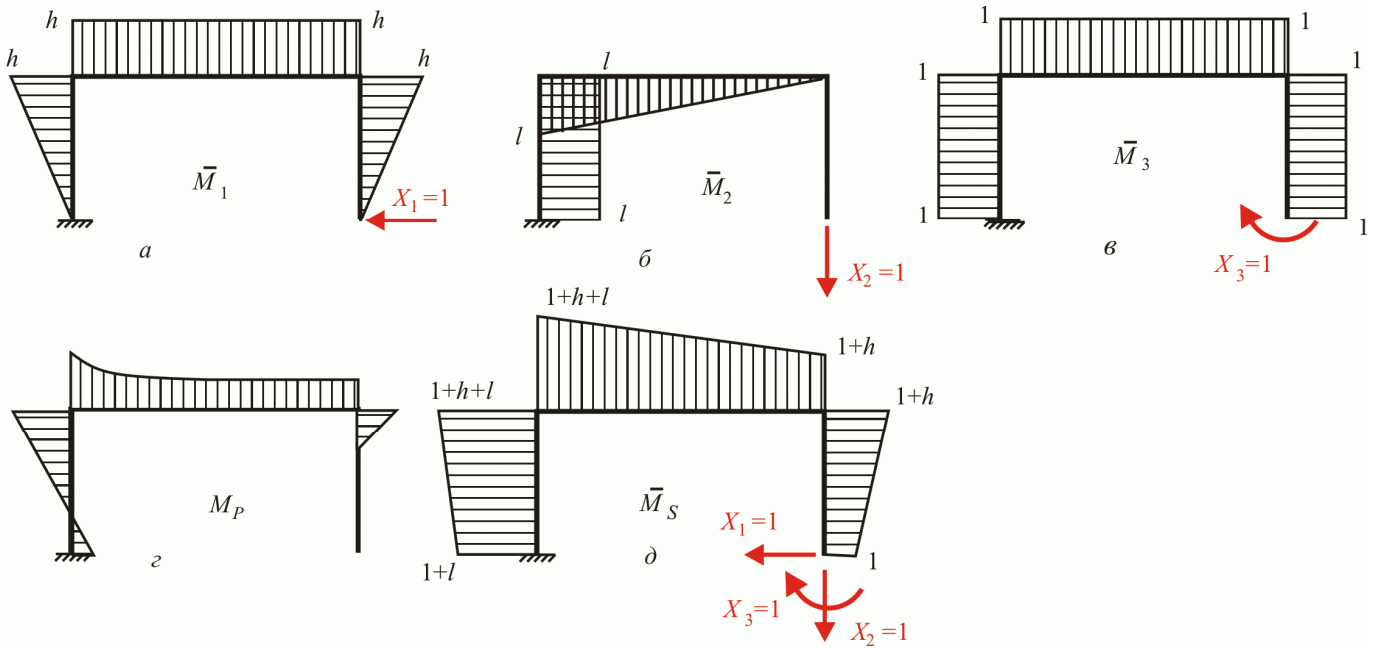


Рис.11.5

Розв’язок системи рівнянь визначає величини основних невідомих – реакцій “зайвих” в’язей.

11.5. Перевірка коефіцієнтів канонічних рівнянь

Правильність остаточних результатів розрахунку залежить від того, наскільки правильно обчислено коефіцієнти системи розв’язувальних рівнянь. Похибки у коефіцієнтах зумовлюють хибні або неточні результати розв’язання канонічних рівнянь, тобто помилки у величинах реакцій відкинутих в’язей і, внаслідок цього, неправильні зусилля у вихідній статично невизначуваній системі. Причому на результати найбільше впливають похибки в головних коефіцієнтах δ_{ii} , розташованих на головній діагоналі матриці податливості (11.8), і у меншій мірі – похибки у побічних та вантажних коефіцієнтах.

Перевірки базуються на, так званій, сумарній одиничній епюрі згинальних моментів, яка являє собою епюру згинальних моментів \bar{M}_S , побудовану в основній системі від одночасної дії всіх основних невідомих, які вважаються такими, що дорівнюють одиниці. Так для основної системи, представленої на рис.11.4,б, сумарна одинична епюра показана на рис.11.5,д.

Зазначена епюра може бути побудована способом накладення епюр, який базується на принципі незалежності дії сил:

$$\bar{M}_S = \bar{M}_1 + \bar{M}_2 + \bar{M}_3.$$

Для n разів статично невизначуваної системи

$$\bar{M}_S = \bar{M}_1 + \bar{M}_2 + \dots + \bar{M}_n. \tag{11.16}$$

Помножимо за формулою Мора сумарну одиничну епюру згинальних моментів \bar{M}_S на будь-яку одиничну епюру \bar{M}_i :

$$\delta_{iS} = \sum_0^l \int \frac{\bar{M}_i \bar{M}_S}{EI} dx = \sum_0^l \int \frac{\bar{M}_i (\bar{M}_1 + \bar{M}_2 + \dots + \bar{M}_n)}{EI} dx.$$

Звідси можна записати:

$$\delta_{iS} = \sum_0^l \int \frac{\bar{M}_i \bar{M}_S}{EI} dx = \sum_0^l \int \frac{\bar{M}_i \bar{M}_1}{EI} dx + \sum_0^l \int \frac{\bar{M}_i \bar{M}_2}{EI} dx + \dots + \sum_0^l \int \frac{\bar{M}_i \bar{M}_n}{EI} dx$$

або

$$\delta_{iS} = \sum_0^l \int \frac{\bar{M}_i \bar{M}_S}{EI} dx = \delta_{i1} + \delta_{i2} + \dots + \delta_{in} = \sum_{j=1}^n \delta_{ij}. \quad (11.17)$$

Таким чином для перевірки обчислень достатньо за формулою Мора помножити будь-яку одиничну епюру \bar{M}_i на сумарну одиничну епюру \bar{M}_S і результат порівняти з сумою коефіцієнтів рядка i [матриці податливості](#). Така перевірка називається рядковою. Її необхідно виконати для кожного рядка матриці податливості.

У той самий спосіб можна показати, що множення епюри \bar{M}_S саму на себе повинна дорівнювати сумі всіх елементів матриці податливості:

$$\delta_{SS} = \sum_0^l \int \frac{\bar{M}_S \bar{M}_S}{EI} dx = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \delta_{ij}. \quad (11.18)$$

Тобто замість множення кожної одиничної епюри можна помножити саму на себе сумарну одиничну епюру \bar{M}_S і порівняти результат із сумою всіх елементів матриці податливості. Така перевірка називається універсальною.

Аналогічно перевіряються вантажні переміщення:

$$\Delta_{SP} = \sum_0^l \int \frac{\bar{M}_S \bar{M}_P}{EI} dx = \sum_{i=1}^n \Delta_{iP}. \quad (11.19)$$

Отже, для перевірки необхідно перемножити сумарну одиничну епюру \bar{M}_S на вантажну епюру M_P і порівняти результат із сумою всіх вантажних переміщень.

11.6. Визначення дійсних зусиль

Існує два основні способи визначення дійсних зусиль в елементах статично невизначуваної системи, що розраховується за методом сил. Обидва способи ґрунтуються на тому, що епюри фактично будуються не в заданій схемі, а в статично визначуваній основній системі, яка перебуває під дією заданих зовнішніх навантажень і реакцій відкинутих в'язей, які знайдено після розв'язання канонічних рівнянь.

Перший спосіб, який називають **статичним**, полягає в тому, що виконується звичайний статичний розрахунок основної системи від одночасної дії всіх сил, включно з основними невідомими задачами. При цьому звичайними способами визначаються опорні реакції і будуються епюри зусиль, або відшукуються їхні величини в характерних точках схеми.

Другий спосіб – це спосіб **накладання**. Він ґрунтується на принципі незалежності дій (принцип суперпозиції) і полягає в тому, що будь-яке зусилля, напруження або переміщення може бути одержане як сума цих величин від кожної дії окремо. На цій підставі можна записати

$$\begin{aligned} M_{\partial} &= \bar{M}_1 X_1 + \bar{M}_2 X_2 + \dots + \bar{M}_n X_n + M_p; \\ Q_{\partial} &= \bar{Q}_1 X_1 + \bar{Q}_2 X_2 + \dots + \bar{Q}_n X_n + Q_p; \\ N_{\partial} &= \bar{N}_1 X_1 + \bar{N}_2 X_2 + \dots + \bar{N}_n X_n + N_p. \end{aligned} \quad (11.20)$$

Під величинами $\bar{M}_i, \bar{Q}_i, \bar{N}_i$ слід розуміти або зусилля в якомусь перерізі або епюри зусиль в основній системі, зумовлені дією одиничних основних невідомих (рис.11.5).

Дійсні епюри зусиль у рамі, що розглядається, побудовані на рис.11.6,а,б,в. При цьому між епюрами M_{∂} і Q_{∂} виконується диференціальна залежність $Q_{\partial} = dM_{\partial}/dx$.

У практичних розрахунках можна дійсну епюру згинальних моментів M_{∂} будувати за способом накладення

$$M_{\partial} = \bar{M}_1 X_1 + \bar{M}_2 X_2 + \dots + \bar{M}_n X_n + M_p,$$

поперечні сили одержати на базі диференціальної залежності $Q_{\partial} = dM_{\partial}/dx$, а поздовжні сили – шляхом аналізу рівноваги вузлів або фрагментів схеми, до яких прикладено зовнішні навантаження та знайдені згинальні моменти та поперечні сили в перерізі, яким виділено вузол чи фрагмент.

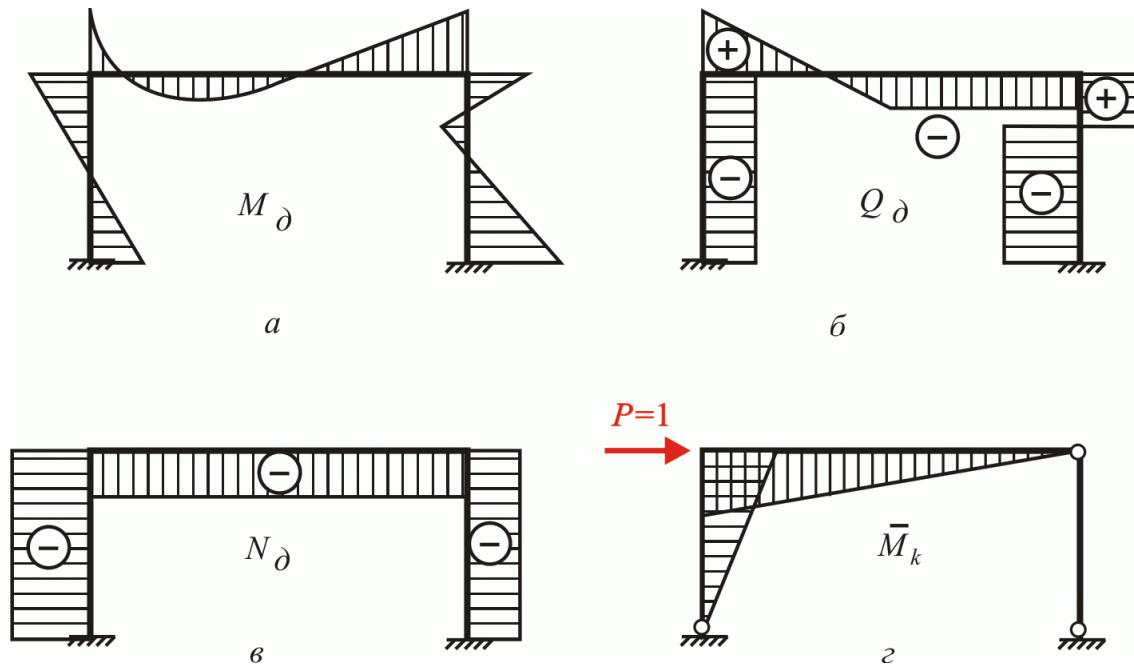


Рис.11.6

11.7. Обчислення переміщень у статично невизначуваних системах

Переміщення в статично невизначуваних системах можуть бути обчислені за формулою Максвелла–Мора:

$$\Delta_{k\delta} = \sum_l \int \frac{\bar{N}_k N_\delta}{EA} dx + \sum_l \int \frac{\bar{M}_k M_\delta}{EI} dx + \sum_l \int \frac{\eta \bar{Q}_k Q_\delta}{GA} dx. \quad (11.21)$$

У цьому співвідношенні $M_\delta, Q_\delta, N_\delta$ – дійсні зусилля в статично невизначуваній системі, $\bar{M}_k, \bar{Q}_k, \bar{N}_k$ – зусилля, зумовлені одиничною узагальненою силою, що відповідає шуканому переміщенню. Означені зусилля можуть бути обчислені для вихідної статично невизначуваної системи. Для цього її доведеться розраховувати за методом сил на дію допоміжного одиничного навантаження. Проте якщо взяти до уваги, що дійсні зусилля $M_\delta, Q_\delta, N_\delta$ фактично обчислюються в статично визначуваній основній системі, то переміщення також можуть бути обчислені в тій самій основній системі. Отже, зусилля $\bar{M}_k, \bar{Q}_k, \bar{N}_k$ можна знайти в статично визначуваній основній системі, яка перебуває під дією зовнішніх навантажень і дійсних величин реакцій у відкинутих в'язях. Більше того, оскільки кінцеві значення дійсних зусиль не залежать від вибору основної системи, для обчислення переміщень можна брати як основну систему, за якою провадився розрахунок, так і будь-яку іншу. Так, для визначення горизонтального переміщення ригеля в рамі, що розглядається, можна прикласти до ригеля в допоміжному стані

одичну горизонтальну силу і побудувати одичну епюру \bar{M}_k в основній системі, за якою провадився розрахунок (рис.11.3,а), або в будь-якій іншій, наприклад, в основній системі, що зображена на рис.11.3,в. Відповідна одична епюра показана на рис.11.6,г.

Отже, визначення переміщення в статично невизначуваній системі від дії зовнішнього навантаження слід виконувати в такій послідовності:

1. Визначити дійсні зусилля в статично невизначуваній системі ($M_\partial, Q_\partial, N_\partial$).
2. Вибрати будь-яку основну систему методу для вихідної статично невизначуваної системи.
3. Утворити допоміжний "одичний" стан k цієї основної системи, приклавши до неї одичну узагальнену силу, що відповідає шуканому переміщенню.
4. Визначити зусилля в допоміжному одичному стані ($\bar{M}_k, \bar{Q}_k, \bar{N}_k$).
5. Обчислити переміщення за формулою Максвелла–Мора (11.21).

11.8. Кінематична перевірка розрахунку

Для перевірки правильності розрахунку будь-якої статично невизначуваної системи застосовують так звану **кінематичну перевірку**. Вона полягає в обчисленні переміщення, яке напевне дорівнює нулю. Такими переміщеннями у вихідній статично визначуваній схемі є переміщення в напрямках існуючих в'язей. Перемножимо, наприклад, за формулою Мора дійсну епюру зусиль M_∂ , що побудована за формулою (11.20), в n раз статично невизначуваній рамі на будь-яку одичну епюру \bar{M}_i :

$$\Delta_{i\partial} = \sum \int_0^l \frac{\bar{M}_i M_\partial}{EI} dx = \sum \int_0^l \frac{\bar{M}_i (\bar{M}_1 X_1 + \bar{M}_2 X_2 + \dots + \bar{M}_n X_n + M_p)}{EI} dx.$$

Розкривши дужки, замінимо інтеграл суми на суму інтегралів. При цьому винесемо постійні величини за знаки інтегралів:

$$\begin{aligned} \Delta_{i\partial} = \sum \int_0^l \frac{\bar{M}_i M_\partial}{EI} dx = X_1 \sum \int_0^l \frac{\bar{M}_i \bar{M}_1}{EI} dx + X_2 \sum \int_0^l \frac{\bar{M}_i \bar{M}_2}{EI} dx + \dots + \\ + X_n \sum \int_0^l \frac{\bar{M}_i \bar{M}_n}{EI} dx + \sum \int_0^l \frac{\bar{M}_i M_p}{EI} dx. \end{aligned}$$

Ураховуючи, що коефіцієнти при основних невідомих являють собою переміщення, перепишемо одержаний вираз:

$$\Delta_{i\delta} = \sum \int_0^l \frac{\bar{M}_i M_{\delta}}{EI} dx = \delta_{i1} X_1 + \delta_{i2} X_2 + \dots + \delta_{in} X_n + \Delta_{ip}.$$

Порівнюючи праву частину співвідношення з (11.4), доходимо висновку, що

$$\Delta_{i\delta} = \sum \int_0^l \frac{\bar{M}_i M_{\delta}}{EI} dx = 0. \quad (11.22)$$

Таким чином, для перевірки правильності розрахунку статично невизначуваної системи достатньо в будь-якій основній системі методу сил визначити зусилля від дії будь-якого основного невідомого $X_i = 1$ і помножити їх за формулою Мора на дійсні зусилля. Якщо результат дорівнює нулю, то зусилля знайдено правильно.

11.9. Приклад розрахунку статично невизначуваної рами методом сил

Розрахуємо раму, зображену на рис.11.7,а за методом сил.

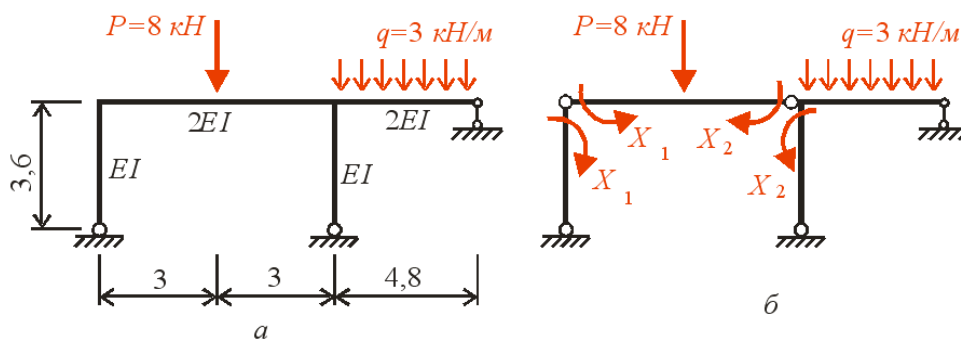


Рис.11.7

Рама має два замкнені контури і чотири прості шарніри, тому ступінь статичної невизначуваності

$$n = 3k - u = 3 \cdot 2 - 4 = 2.$$

Таким чином, задана рама має дві “зайві” в’язі. Статично визначувану основну систему дістанемо за рахунок їхнього відкидання, наприклад, введенням двох простих шарнірів (рис.11.7,б). Реакції відкинутих в’язей, тобто згинальні моменти X_1 і X_2 у перерізах стержнів,

становитимуть основні невідомі методу сил. Система канонічних рівнянь методу сил набуде вигляду:

$$\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1P} = 0;$$

$$\delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2P} = 0.$$

Як було зазначено, ці рівняння є умовами відсутності переміщень у напрямках “зайвих” в’язей і, отже, умовами нерозривності деформацій. Коефіцієнти при основних невідомих і вільні члени характеризують переміщення в основній системі в напрямках відкинутих в’язей. Для їхнього обчислення побудуємо епюри внутрішніх зусиль в основній системі окремо від дії кожного невідомого, яке береться за одиницю, а також від дії зовнішнього навантаження. (рис.11.8).

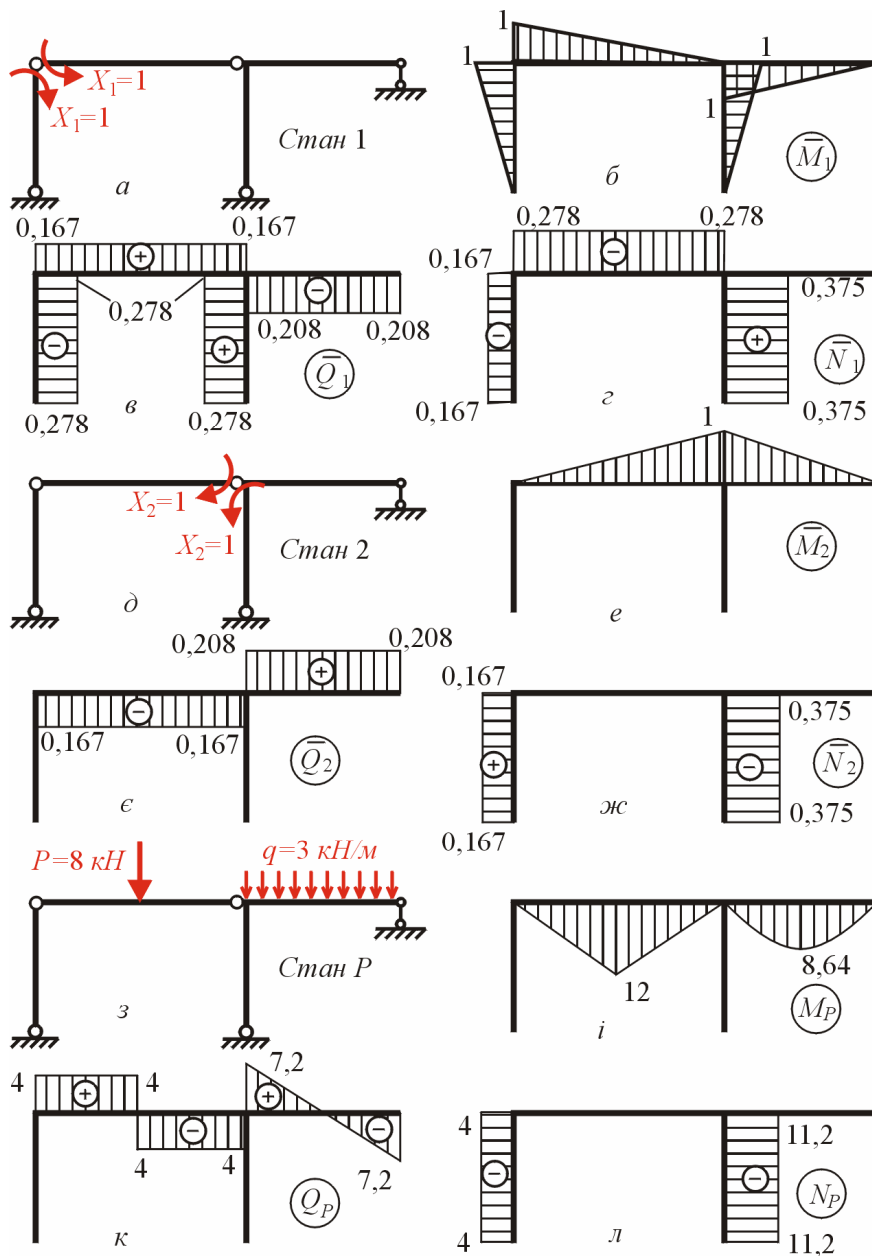


Рис.11.8

Обчислимо коефіцієнти за допомогою формули Мора.

$$\delta_{11} = \sum_0^l \int \frac{\bar{M}_1^2}{EI} dx = \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3,6 \cdot 1 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 \cdot 2 + \frac{1}{2EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 +$$

$$+ \frac{1}{2EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 4,8 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{4,2}{EI};$$

$$\delta_{12} = \sum_0^l \int \frac{\bar{M}_1 \bar{M}_2}{EI} dx = \frac{1}{2EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 6 \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 - \frac{1}{2EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 4,8 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 = -\frac{0,3}{EI};$$

$$\delta_{22} = \sum_0^l \int \frac{\bar{M}_2^2}{EI} dx = \frac{1}{2EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{1}{2EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 4,8 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{1,8}{EI};$$

$$\Delta_{1P} = \sum_0^l \int \frac{\bar{M}_1 M_P}{EI} dx = \frac{4,8}{6 \cdot 2EI} \left(0 + 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 8,64 + 0 \right) - \frac{1}{2EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 6 \cdot \frac{1}{2} = -\frac{2,088}{EI};$$

$$\Delta_{2P} = \sum_0^l \int \frac{\bar{M}_2 M_P}{EI} dx = -\frac{1}{2EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 6 \cdot \frac{1}{2} - \frac{4,8}{6 \cdot 2EI} \left(0 + 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 8,64 + 0 \right) = -\frac{15,912}{EI}.$$

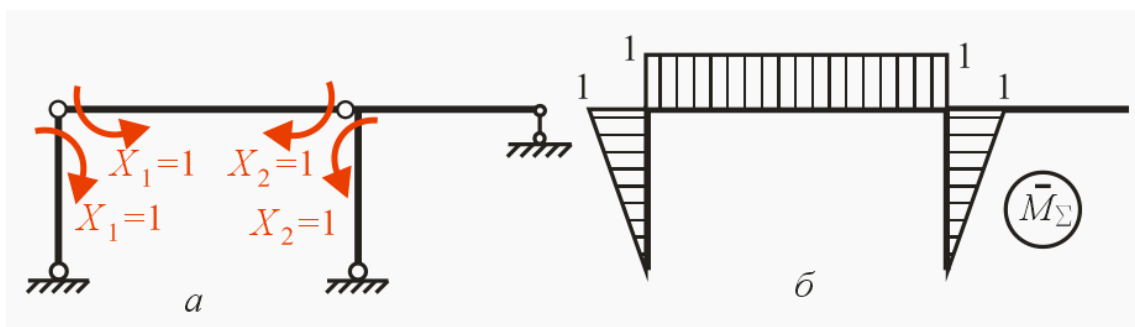


Рис.11.9

Для перевірки правильності обчислення коефіцієнтів побудуємо сумарну одиничну епюру згинальних моментів від одночасної дії всіх основних невідомих, які дорівнюють одиниці (рис.11.9). Ту ж саму епюру можна побудувати як суму одиничних епюр згинальних моментів (рис.11.8.б.е):

$$\bar{M}_\Sigma = \bar{M}_1 + \bar{M}_2.$$

Перевірка полягає в почерговому перемноженні сумарної одиничної епюри \bar{M}_Σ на кожен одиничну (\bar{M}_1, \bar{M}_2) і на вантажну M_P епюри, побудовані в основній системі, і в порівнянні одержаних результатів з сумами коефіцієнтів відповідних стовпців матриці коефіцієнтів:

$$\delta_{i\Sigma} = \sum_0^l \int \frac{\bar{M}_i \bar{M}_\Sigma}{EI} dx \Leftrightarrow \sum_{j=1}^n \delta_{ij} \quad (i = 1, 2, \dots, n);$$

$$\Delta_{\Sigma P} = \sum_0^l \int \frac{M_P \bar{M}_\Sigma}{EI} dx \Leftrightarrow \sum_{j=1}^n \Delta_{jP}.$$

Зрештою маємо:

$$\delta_{1\Sigma} = \sum_0^l \int \frac{\bar{M}_1 \bar{M}_\Sigma}{EI} dx = \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 3,6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 \cdot 2 + \frac{1}{2EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 6 \cdot 1 = \frac{3,9}{EI};$$

$$\delta_{11} + \delta_{21} = \frac{4,2}{EI} - \frac{0,3}{EI} = \frac{3,9}{EI} \Rightarrow \delta_{1\Sigma} = \delta_{11} + \delta_{21};$$

$$\delta_{2\Sigma} = \sum_0^l \int \frac{\bar{M}_2 \bar{M}_\Sigma}{EI} dx = \frac{1}{2EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 6 \cdot 1 = \frac{1,5}{EI};$$

$$\delta_{22} + \delta_{12} = -\frac{0,3}{EI} + \frac{1,8}{EI} = \frac{1,5}{EI} \Rightarrow \delta_{2\Sigma} = \delta_{22} + \delta_{12};$$

$$\Delta_{\Sigma P} = \sum_0^l \int \frac{M_P \bar{M}_\Sigma}{EI} dx = \frac{1}{2EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 6 \cdot 1 = \frac{18}{EI};$$

$$\Delta_{1P} + \Delta_{2P} = -\frac{2,088}{EI} - \frac{15,912}{EI} = -\frac{18}{EI} \Rightarrow \Delta_{1P} + \Delta_{2P} = \Delta_{\Sigma P}.$$

З одержаних результатів можна дійти висновку, що переміщення основної системи обчислені правильно. Підставивши коефіцієнти до системи канонічних рівнянь і скоротивши на постійний множник EI , маємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{aligned} 4,2X_1 - 0,3X_2 - 2,088 &= 0; \\ -0,3X_1 + 1,8X_2 - 15,912 &= 0, \end{aligned}$$

розв'язок якої визначає величини реакцій у відкинутих в'язях:

$$X_1 = 1,142; \quad X_2 = 9,030.$$

Для визначення внутрішніх зусиль у заданій рамі можна скористатися принципом суперпозиції. Так, дійсні згинальні моменти можуть бути обчислені як сума згинальних моментів в основній системі від дії кожного чинника окремо:

$$M_{\partial} = \sum_{i=1}^n \bar{M}_i X_i + M_P.$$

Для двічі статично невизначуваної рами

$$M_{\partial} = \bar{M}_1 X_1 + \bar{M}_2 X_2 + M_P.$$

Побудову дійсної епюри згинальних моментів показано на рис.11.10.

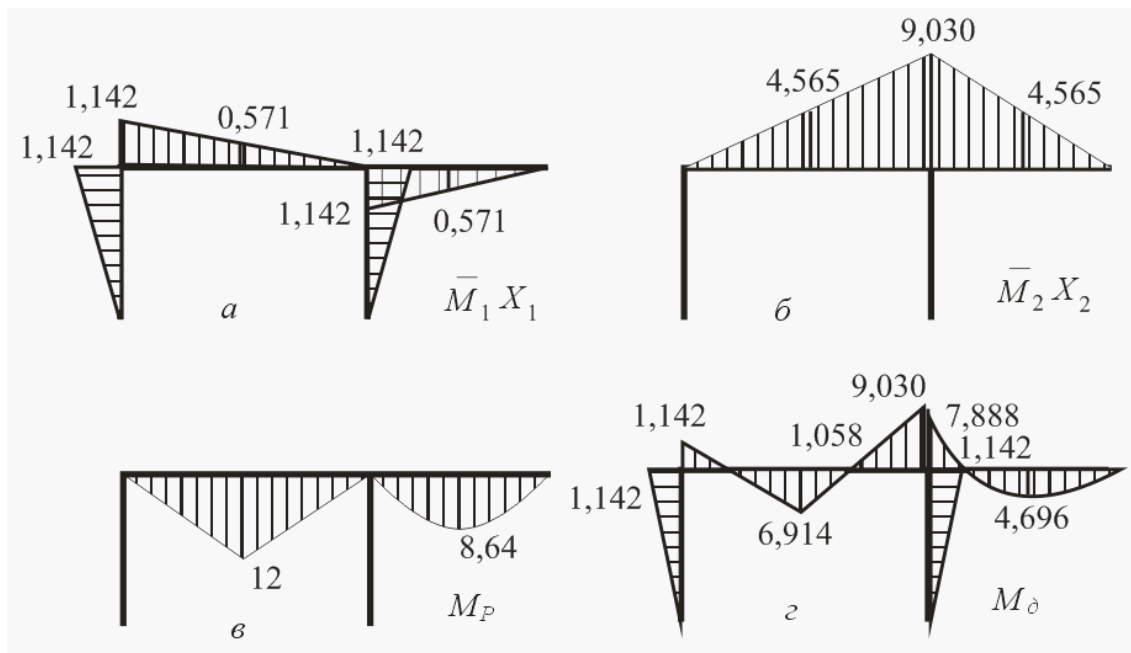


Рис.11.10

Для виконання кінематичної перевірки ([див.п.11.8](#)) дійсної епюри згинальних моментів M_{∂} (рис.11.10,г) слід перемножити її на будь-яку одиничну епюру моментів, побудовану в будь-якій основній системі. У цьому прикладі для перевірки використаємо сумарну одиничну епюру згинальних моментів \bar{M}_{Σ} ([рис.11.9.б](#)):

$$\begin{aligned} \Delta_{\Sigma\partial} &= \sum \int_0^l \frac{\bar{M}_{\Sigma} M_{\partial}}{EI} dx = \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1,142 \cdot 3,6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 \cdot 2 - \frac{1}{2EI} \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2,886 + \\ &+ \frac{1}{2EI} \cdot 1 \cdot 3 \cdot 1,058 = \frac{2,741}{EI} - \frac{4,329}{EI} + \frac{1,587}{EI} = \frac{4,328}{EI} - \frac{4,329}{EI} \approx 0. \end{aligned}$$

Отже, дійсна епюра згинальних моментів відповідає умовам нерозривності деформацій.

Дійсні епюри поперечних (рис.11.11,а) і поздовжніх сил (рис.11.11,б) також можна побудувати за принципом суперпозиції:

$$Q_{\partial} = \bar{Q}_1 X_1 + \bar{Q}_2 X_2 + Q_P;$$

$$N_{\partial} = \bar{N}_1 X_1 + \bar{N}_2 X_2 + N_P.$$

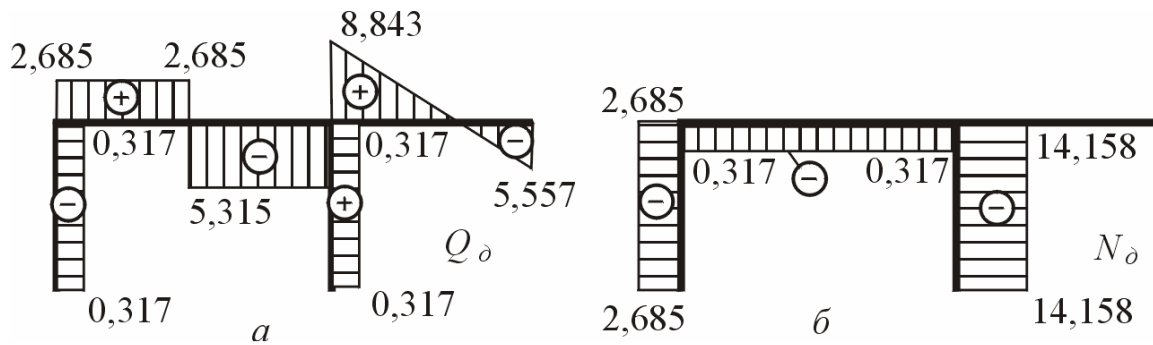


Рис.11.11

Уся рама загалом, а також будь-який її елемент мають перебувати у стані рівноваги. Перевіримо, наприклад, рівновагу одного з вузлів. Для цього виокремлюємо цей вузол за допомогою замкненого перерізу і в перетинах прикладемо внутрішні зусилля як вже відомі сили (рис.11.12).

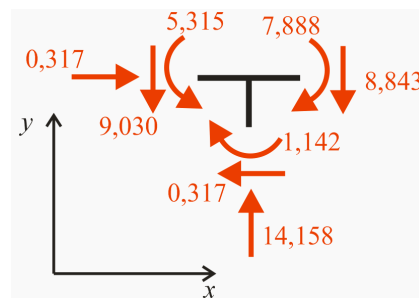


Рис.11.12

Складаємо рівняння рівноваги вирізаного вузла:

$$\sum M = -9,030 + 1,142 + 7,888 = 0;$$

$$\sum F_x = 0,317 - 0,317 = 0;$$

$$\sum F_y = -5,315 - 8,843 + 14,158 = 0.$$

Отже, розглянутий вузол перебуває в стані рівноваги. Аналогічно можна перевірити рівновагу будь-якого елемента або всієї рами.

11.10. Використання симетрії

11.10.1. Симетрія розрахункової схеми і навантаження

Система називається **симетричною** відносно осі, якщо за допомогою прямої, котра збігається з віссю симетрії, її можна розділити на дві частини, кожна з яких є дзеркальним відображенням іншої (рис.11.13,а).

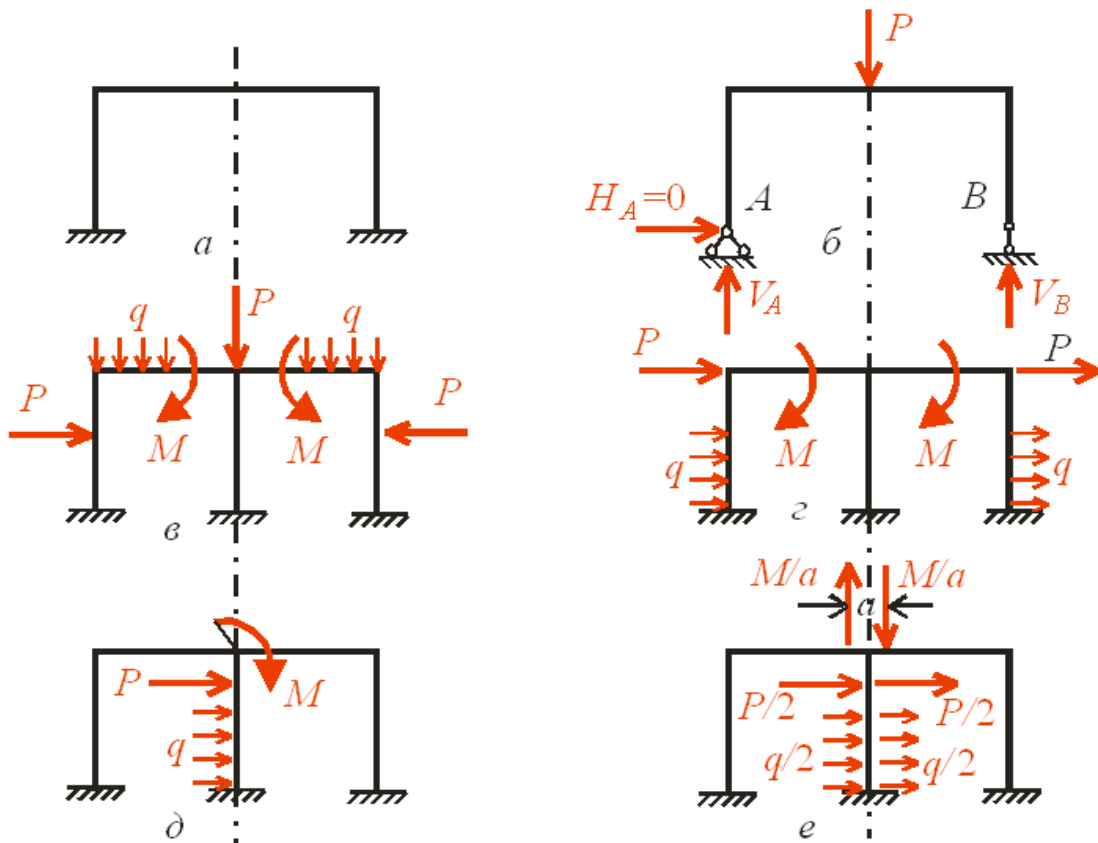


Рис.11.13

Разом із симетричними існують не цілком симетричні системи, які можуть розглядатись як симетричні за певних умов. Так, наприклад, рама (рис.11.13,б), хоча і не повністю симетрична, оскільки має ліворуч шарнірно-нерухому, а праворуч – шарнірно-рухому опору, при дії вертикального навантаження може розглядатись як симетрична, тому що горизонтальна реакція лівої опори дорівнює нулю і дана опора може трактуватись як шарнірно-рухома. Системи такого типу називають **умовно симетричними**.

Поняття симетрії поширюється на навантаження, дію температури, зміщення опор: дія вважається симетричною, якщо вона на одній половині конструкції є дзеркальним відображенням дії на другій половині (рис.11.13,в). Якщо ж дія розташована симетрично, але по відношенню до осі симетрії в протилежних напрямках, то така дія зветься **кососиметричною** або **обернено-симетричною** (рис.11.13,г). Зокрема, зосереджена сила P , лінія дії якої збігається з віссю симетрії,

є симетричною, а зосереджена сила або розподілене навантаження, які прикладені до осі симетрії і напрямлені перпендикулярно до неї, є кососиметричними. Те саме можна стверджувати відносно зосередженого моменту (рис.11.13,д). Це пов'язано з тим, що зосереджену силу P можна подати як дві зосереджені сили величиною $P/2$, розподілене навантаження інтенсивністю q – як два навантаження з інтенсивністю $q/2$ кожне, а зосереджений момент M замінити парою сил (рис.11.13,е).

Будь-яка дія загального вигляду може бути представлена як сума двох дій, одна з яких є симетричною, а друга – **кососиметричною** або **оберненосиметричною**. Наприклад, зосереджена сила P_1 (рис.11.14,а) замінюється двома симетричними і двома кососиметричними зосередженими силами $P_1/2$, рівномірно розподілене навантаження q – двома симетричними (рис.11.14,б) і двома кососиметричними (рис.11.14,в) навантаженнями інтенсивністю $q/2$. Якщо дія початково є симетричною (сила P_2) або кососиметричною, то розкладення її не здійснюється.

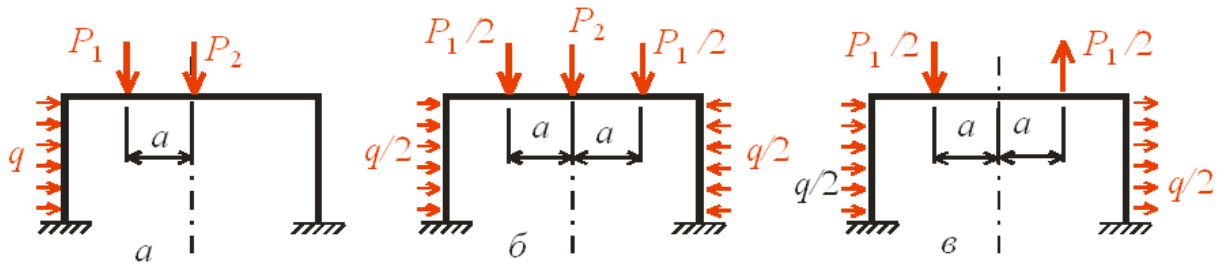


Рис.11.14

На симетричне і кососиметричне може бути розкладене навантаження, яке прикладається в симетричних перерізах, але має різні величини. Так, два зосереджених моменти M_1 і M_2 (рис.11.15,а) замінюються двома парами зосереджених моментів. Моменти першої пари дорівнюють $(M_1 + M_2)/2$ (рис.11.15,б) і спрямовані симетрично.

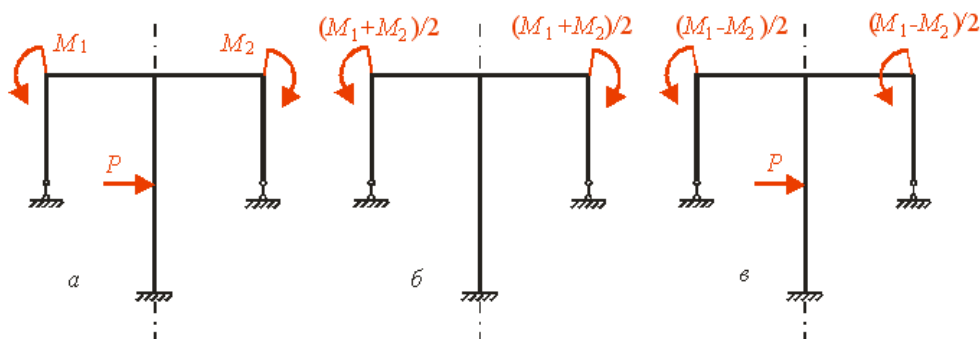


Рис.11.15

Величини моментів другої пари, які спрямовані кососиметрично, становлять $(M_1 - M_2)/2$ (рис.11.15,в). При цьому первісно кососиметрична сила P не розкладається.

11.10.2. Навантаження загального вигляду

Для спрощення розрахунку за методом сил симетричної системи необхідно, щоб основна система була симетричною або умовно симетричною. Також необхідно, щоб умовам симетрії та косої симетрії відповідали основні невідомі.

Розглянемо, наприклад, раму під дією навантаження загального вигляду (рис.11.16,а).

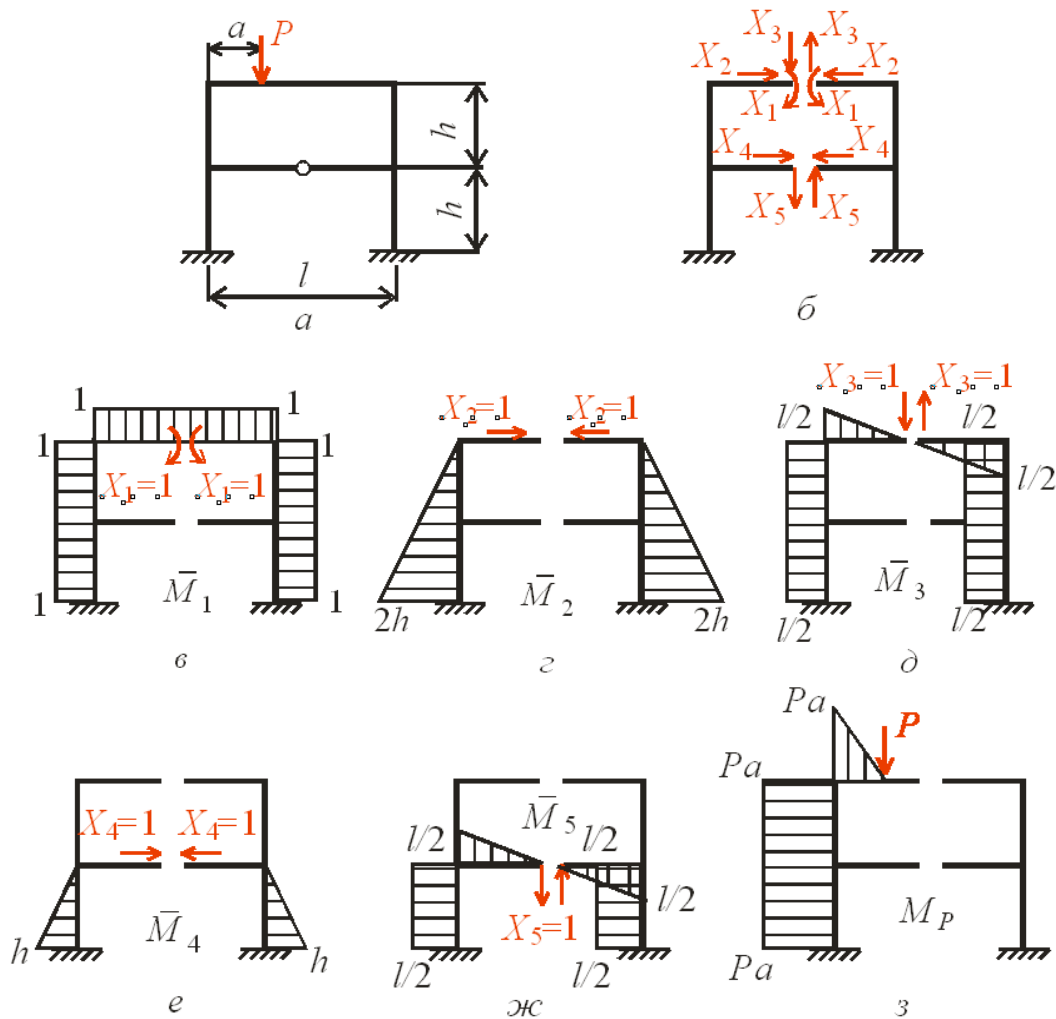


Рис.11.16

Ступінь її статичної невизначуваності $n=3k - u = 3 \cdot 2 - 1 = 5$. Основну систему, одержану за рахунок розрізання рами по осі симетрії, зображено на рис.11.16,б.

До основної системи прикладаються основні невідомі, що являють собою зусилля в місцях розрізів. Завдяки розташуванню на осі симетрії рами основні невідомі поділяються на симетричні (X_1, X_2 і X_4) та кососиметричні (X_3 і X_5) навантаження на симетричну основну систему.

Для визначення основних невідомих необхідно скласти і розв'язати систему розв'язувальних (канонічних) рівнянь методу сил, вигляд якої залежить лише від ступеня статичної невизначуваності рами. Отже, ця система канонічних рівнянь може бути записана формально:

$$\delta_{11}X_1 + \delta_{21}X_2 + \delta_{13}X_3 + \delta_{14}X_4 + \delta_{15}X_5 + \Delta_{1P} = 0;$$

$$\delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{23}X_3 + \delta_{24}X_4 + \delta_{25}X_5 + \Delta_{2P} = 0;$$

$$\delta_{31}X_1 + \delta_{32}X_2 + \delta_{33}X_3 + \delta_{34}X_4 + \delta_{35}X_5 + \Delta_{3P} = 0;$$

$$\delta_{41}X_1 + \delta_{42}X_2 + \delta_{43}X_3 + \delta_{44}X_4 + \delta_{45}X_5 + \Delta_{4P} = 0;$$

$$\delta_{51}X_1 + \delta_{52}X_2 + \delta_{53}X_3 + \delta_{54}X_4 + \delta_{55}X_5 + \Delta_{5P} = 0.$$

Епюри згинальних моментів від кожного основного невідомого і від зовнішнього навантаження побудовано на [рис.11.16,в – 11.16,з](#). Як бачимо, у симетричній основній системі епюри згинальних моментів \bar{M}_1 , \bar{M}_2 і \bar{M}_4 , що зумовлені дією симетричних невідомих, є симетричними, епюри \bar{M}_3 і \bar{M}_5 , побудовані від дії кососиметричних невідомих – кососиметричними, а вантажна епюра M_p – епюрою загального вигляду, оскільки вона є результатом дії навантаження загального вигляду.

При обчисленні коефіцієнтів системи рівнянь легко впевнитись у тому, що добуток симетричних епюр на кососиметричні тотожно дорівнює нулю. Це є природним, оскільки очевидно, що в симетричній системі симетричні дії не можуть викликати кососиметричні деформації і навпаки. Звідси випливає, що

$$\delta_{13} = \delta_{15} = \delta_{23} = \delta_{25} = \delta_{31} = \delta_{32} = \delta_{34} = \delta_{43} = \delta_{45} = \delta_{51} = \delta_{52} = \delta_{54} = 0.$$

Зрештою, вихідна система п'ятьох канонічних рівнянь розпадеться на дві незалежні підсистеми. Перша підсистема містить як невідомі лише симетричні сили:

$$\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{14}X_4 + \Delta_{1P} = 0;$$

$$\delta_{12}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{24}X_4 + \Delta_{2P} = 0;$$

$$\delta_{14}X_1 + \delta_{42}X_2 + \delta_{44}X_4 + \Delta_{4P} = 0,$$

а друга – лише кососиметричні сили, а саме:

$$\delta_{35}X_3 + \delta_{53}X_5 + \Delta_{3P} = 0;$$

$$\delta_{35}X_3 + \delta_{55}X_5 + \Delta_{5P} = 0.$$

Підсистеми розв'язуються незалежно одна від одної. Дійсні епюри можуть бути побудовані способом накладання:

$$M_{\partial} = \bar{M}_1 X_1 + \bar{M}_2 X_2 + \bar{M}_3 X_3 + \bar{M}_4 X_4 + \bar{M}_5 X_5 + M_p;$$

$$Q_{\partial} = \bar{Q}_1 X_1 + \bar{Q}_2 X_2 + \bar{Q}_3 X_3 + \bar{Q}_4 X_4 + \bar{Q}_5 X_5 + Q_p;$$

$$N_{\partial} = \bar{N}_1 X_1 + \bar{N}_2 X_2 + \bar{N}_3 X_3 + \bar{N}_4 X_4 + \bar{N}_5 X_5 + N_p.$$

Дійсні епюри, які є результатом накладання симетричних і косиметричних графіків, матимуть загальний вигляд.

11.10.3. Симетричне навантаження

Розглянемо ту саму статично невизначувану раму під дією симетричного навантаження (рис.11.17,а). Для її розрахунку використаємо основну систему і основні невідомі, вибрані в попередньому пункті (рис.11.17,б). Очевидно, що в цьому випадку одиничні епюри згинальних моментів (рис.11.16,в – 11.16,ж) залишаться без змін і система канонічних рівнянь також розпадеться на дві незалежні підсистеми.

Перша підсистема, що містить як невідомі лише симетричні сили

$$\delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 + \delta_{14} X_4 + \Delta_{1P} = 0;$$

$$\delta_{12} X_1 + \delta_{22} X_2 + \delta_{24} X_4 + \Delta_{2P} = 0;$$

$$\delta_{14} X_1 + \delta_{42} X_2 + \delta_{44} X_4 + \Delta_{4P} = 0,$$

змінять лише величини вільних членів через відмінність вантажної епюри згинальних моментів (рис.11.17,в).

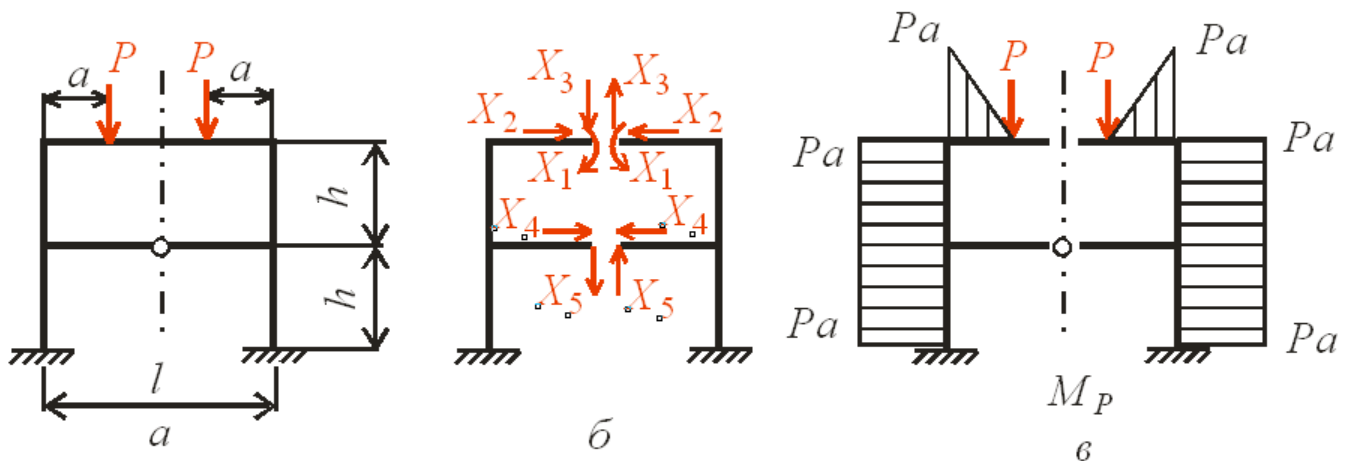


Рис.11.17

Внаслідок симетрії епюри згинальних моментів вантажного стану вільні члени другої підсистеми, що містить лише косиметричні невідомі, дорівнюють нулю. Отже, друга підсистема рівнянь має вигляд

$$\delta_{35}X_3 + \delta_{53}X_5 = 0;$$

$$\delta_{35}X_3 + \delta_{55}X_5 = 0.$$

Отримана однорідна система рівнянь при не виродженій матриці має тривіальний розв'язок. Матриця коефіцієнтів системи канонічних рівнянь не вироджена завдяки геометричній незмінюваності основної систем. Звідси маємо $X_3 = X_5 = 0$.

Отже, можна зробити висновок, що **в симетричній рамі під дією симетричного навантаження кососиметричні невідомі напевно дорівнюють нулю**. Необхідно визначати лише симетричні основні невідомі. Дійсні епюри M_0 і N_0 будуть симетричними, а епюра Q_0 – кососиметричною.

11.10.4. Кососиметричне навантаження

Розглянемо ще раз ту саму статично невизначувану раму (рис.11.16,а) під дією кососиметричного навантаження (рис.11.18,а). Для її розрахунку використаємо основну систему і основні невідомі, вибрані у п.11.10.2 (рис.11.18,б). Очевидно, що й у цьому випадку одиничні епюри згинальних моментів (рис.11.16,в,г,д,е,ж) залишаться без змін і система канонічних рівнянь також розпадеться на дві незалежні підсистеми.

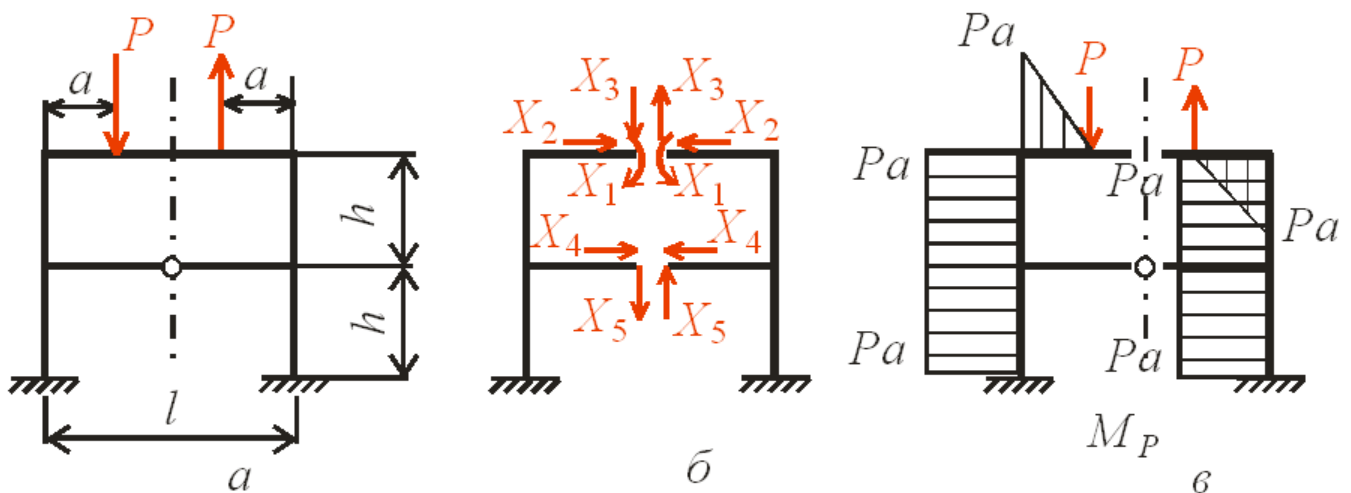


Рис.11.18

Перша підсистема, що містить як невідомі лише симетричні сили, внаслідок косої симетрії епюри згинальних моментів вантажного стану (рис.11.18,в) матиме нульові вільні члени:

$$\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{14}X_4 = 0;$$

$$\delta_{12}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{24}X_4 = 0;$$

$$\delta_{14}X_1 + \delta_{42}X_2 + \delta_{24}X_4 = 0.$$

Ця однорідна система рівнянь має тривіальний розв'язок, тобто $X_1 = X_2 = X_4 = 0$.

Отже, основні кососиметричні невідомі можна визначити, розв'язавши другу підсистему рівнянь

$$\delta_{35}X_3 + \delta_{53}X_5 + \Delta_{3p} = 0;$$

$$\delta_{35}X_3 + \delta_{55}X_5 + \Delta_{5p} = 0.$$

Зрештою можна дійти висновку, що **в симетричній рамі під дією кососиметричного навантаження симетричні невідомі напевно дорівнюють нулю**. Необхідно визначати лише кососиметричні основні невідомі. Дійсні епюри M_0 і N_0 будуть кососиметричними, а епюра Q_0 – симетричною.

11.10.5. Групові невідомі

Нагадаємо, що дістати спрощення при розрахунку симетричної конструкції можна тоді, коли при симетричній основній системі основні невідомі розділяються на симетричні і кососиметричні, тобто такі, що приводять до симетричних і кососиметричних епюр згинальних моментів в одиничних станах. У попередніх прикладах це виконувалось завдяки відкиданню “зайвих” в'язей на осі симетрії рами, що зумовило прикладання невідомих на осі симетрії. Якщо при побудові симетричної основної системи відкидаються “зайві” в'язі, що не розташовані на осі симетрії, одиничні епюри згинальних моментів можуть бути несиметричними. Це виключає одержання спрощень розрахунку. Однак, оскільки основні невідомі є силами, вони можуть бути розкладені на симетричні і кососиметричні складові, які становитимуть сукупності невідомих дій і називаються **груповими невідомими**. Покажемо це на прикладі.

Розглянемо раму під дією навантаження загального вигляду ([рис.11.19,а](#)).

Ступінь її статичної невизначуваності $n=3k - u = 3 \cdot 2 - 2 = 4$. Основна система, одержана за рахунок відкидання чотирьох опорних в'язей, зображена на [рис.11.19,б](#).

Основні невідомі, що являють собою реакції відкинутих опор, позначимо X'_1, X'_2, X'_3, X'_4 . Симетрично розташовані сили X'_1 і X'_3 , а також X'_2 і X'_4 не дорівнюють одна одній і тому не можуть вважатися симетричними або кососиметричними. Беручи до уваги, що невідомі, як і будь-які інші силові дії можуть бути розкладені на симетричні і кососиметричні складові, замінимо основні невідомі X'_1 і X'_3 двома іншими силами X_1 і X_3 , пов'язаними з попередніми силами співвідношеннями

$$X_1 = \frac{X'_1 + X'_3}{2}; \quad X_3 = \frac{X'_1 - X'_3}{2},$$

причому сили X_1 прикладемо симетрично, а сили X_3 – косиметрично (рис.11.19,в). Аналогічно замінимо дві інші сили X'_2 і X'_4 . Позначимо:

$$X_2 = \frac{X'_2 + X'_4}{2}; \quad X_4 = \frac{X'_2 - X'_4}{2}.$$

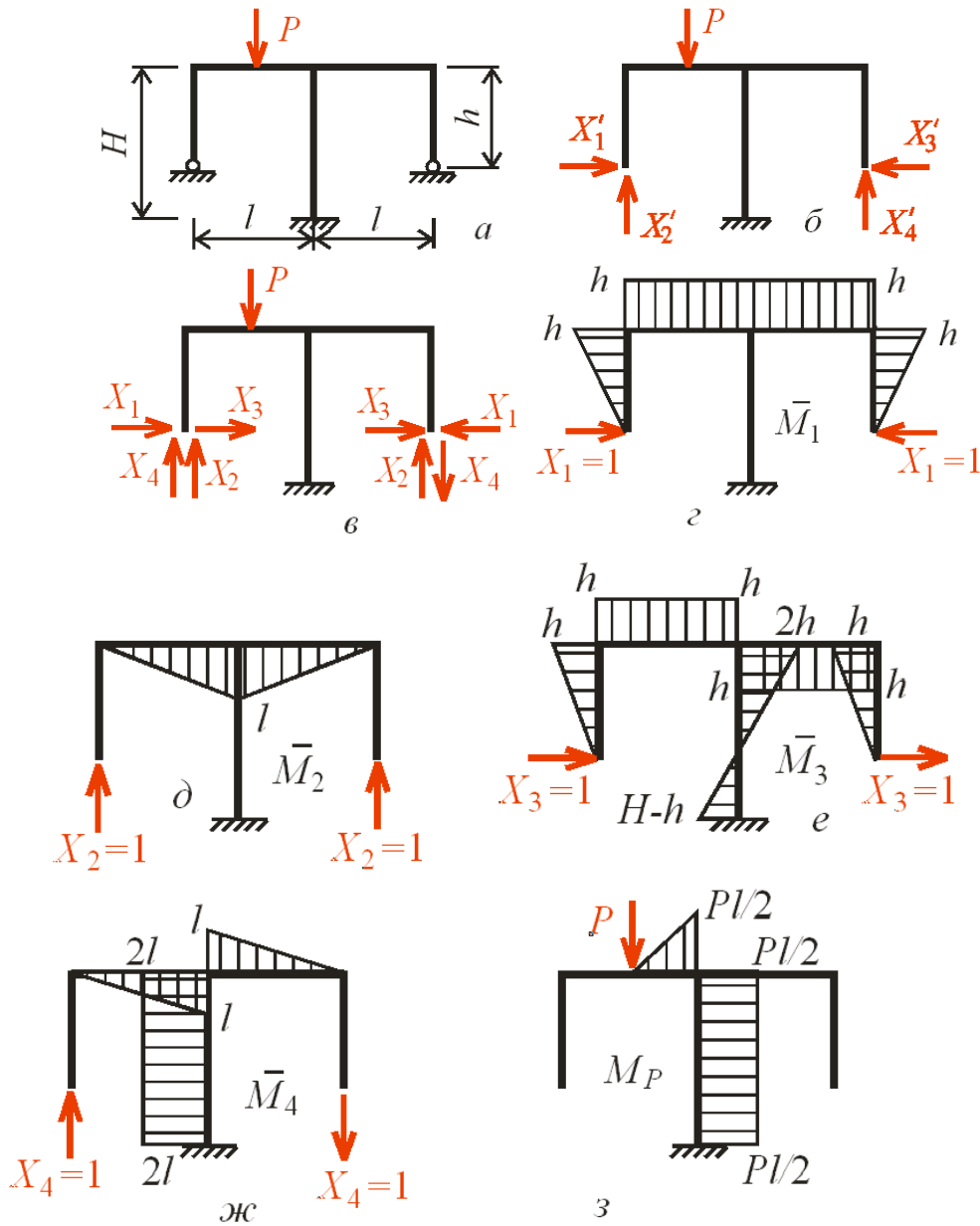


Рис.11.19

Сили X_2 прикладемо симетрично, а сили X_4 – косиметрично (рис.11.19,в). Зрештою на основну систему діятимуть сила P , яке є навантаженням загального вигляду, симетричні невідомі сили X_1 і X_2 , а також косиметричні невідомі сили X_3 і X_4 . Кожна з цих нових невідомих сил фактично становить групу сил.

Система канонічних рівнянь може бути записана формально:

$$\begin{aligned}\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{13}X_3 + \delta_{14}X_4 + \Delta_{1p} &= 0; \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{23}X_3 + \delta_{24}X_4 + \Delta_{2p} &= 0; \\ \delta_{31}X_1 + \delta_{32}X_2 + \delta_{33}X_3 + \delta_{34}X_4 + \Delta_{3p} &= 0; \\ \delta_{41}X_1 + \delta_{42}X_2 + \delta_{43}X_3 + \delta_{44}X_4 + \Delta_{4p} &= 0.\end{aligned}$$

У цій системі основними невідомими є групові невідомі. Відповідним буде також фізичний зміст рівнянь. Наприклад, перше рівняння свідчить про те, що зближення кінців A і B основної системи від всіх дій повинне дорівнювати нулю. Друге рівняння засвідчує дорівнювання нулю сумарного вертикального переміщення кінців A і B основної системи тощо.

Епюри згинальних моментів від кожного основного невідомого і від зовнішнього навантаження побудовано на [рис.11.19,г-ж](#). Як видно, епюри згинальних моментів \bar{M}_1 і \bar{M}_2 , що зумовлені дією симетричних невідомих, є симетричними, епюри \bar{M}_3 і \bar{M}_4 , побудовані від дії кососиметричних невідомих, – кососиметричними, а вантажна епюра M_p – епюрою загального вигляду, оскільки вона є результатом дії навантаження загального вигляду.

Зрештою, як було вже показано, вихідна система чотирьох канонічних рівнянь розпадеться на дві незалежні підсистеми. Перша підсистема містить як невідомі лише симетричні сили:

$$\begin{aligned}\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1p} &= 0; \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2p} &= 0,\end{aligned}$$

а друга – лише кососиметричні сили:

$$\begin{aligned}\delta_{33}X_3 + \delta_{34}X_4 + \Delta_{3p} &= 0; \\ \delta_{43}X_3 + \delta_{44}X_4 + \Delta_{4p} &= 0.\end{aligned}$$

Підсистеми розв'язуються незалежно одна від одної. Дійсні епюри можуть бути побудовані за способом накладання:

$$\begin{aligned}M_\partial &= \bar{M}_1X_1 + \bar{M}_2X_2 + \bar{M}_3X_3 + \bar{M}_4X_4 + M_p; \\ Q_\partial &= \bar{Q}_1X_1 + \bar{Q}_2X_2 + \bar{Q}_3X_3 + \bar{Q}_4X_4 + Q_p; \\ N_\partial &= \bar{N}_1X_1 + \bar{N}_2X_2 + \bar{N}_3X_3 + \bar{N}_4X_4 + N_p.\end{aligned}$$

Дійсні епюри, які є результатом накладання симетричних і кососиметричних графіків, будуть епюрами загального вигляду.

Зауважимо, що за необхідності виконання розрахунку симетричної рами на дію навантаження загального вигляду зручно розкласти це навантаження на симетричну і кососиметричну складові. У цьому випадку виконуються два окремі розрахунки рами: на дію симетричного та на дію кососиметричного навантажень. Остаточні епюри зусиль від вихідного навантаження загального вигляду одержуються як суми відповідних епюр, побудованих від його симетричних і кососиметричних складових:

$$M_{\partial} = M_{\partial}^{сим.} + M_{\partial}^{косим.};$$

$$Q_{\partial} = Q_{\partial}^{сим.} + Q_{\partial}^{косим.};$$

$$N_{\partial} = N_{\partial}^{сим.} + N_{\partial}^{косим.}.$$

11.11. Розрахунок статично невизначуваних ферм

Розрахунок статично невизначуваних ферм за методом сил має деякі особливості, які пов'язані з особливостями їхньої структури, навантаження і напружено-деформованого стану (див. [главу 8](#)). Так, ступінь статичної невизначуваності ферм можна обчислювати як за формулою (11.1), так і за іншою формулою, призначеною лише для ферм:

$$n = C + C_{on} - 2B, \quad (11.19)$$

де C – кількість стержнів ферми, C_{on} – кількість опорних стержнів, B – кількість вузлів ферми. Для ферми, що зображена на [рис.11.20,а](#),

$$n = 22 + 4 - 2 \cdot 12 = 2.$$

Якщо ж скористатися формулою (11.1), то можна записати:

$$n = 3k - u = 3 \cdot 12 - 34 = 2.$$

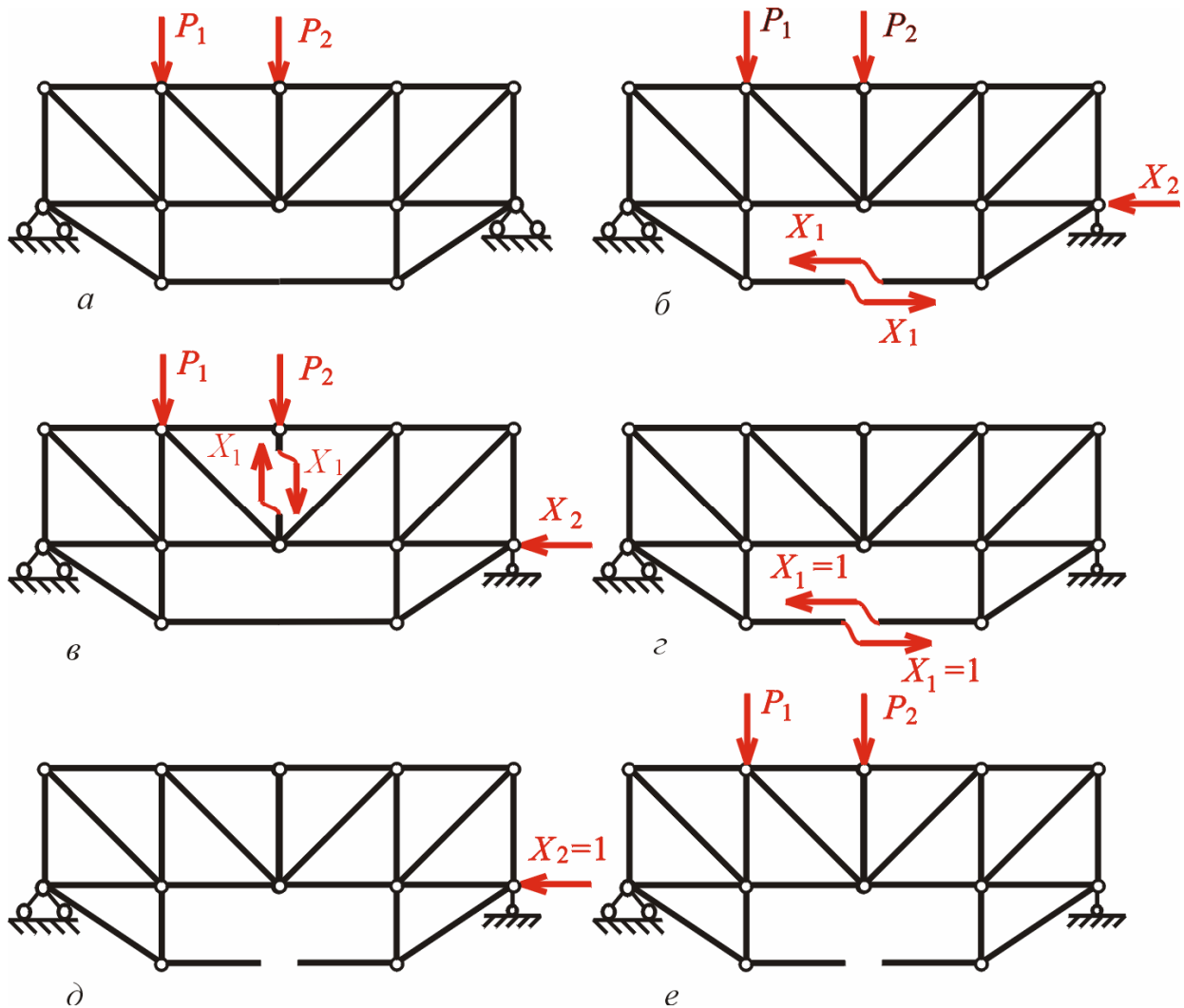


Рис.11.20

Маємо той самий результат, але він здобутий дещо складнішими розрахунками, що зумовлюється необхідністю обчислення кількості простих шарнірів.

Відкидання “зайвих” в’язей під час призначення основної системи здійснюється або розрізанням стержнів ферми, або відкиданням опорних стержнів. У першому випадку до місця розрізу прикладаються поздовжні сили, величина яких невідома, у другому – невідомих реакцій відкинутих опорної в’язей (рис.11.20,б). Проте в усіх випадках основна система повинна бути геометрично незмінюваною. З цих причин схема, що зображена на рис.11.20,в, не може бути обрана для розрахунку, оскільки є миттєво змінюваною (вузол *D* прикріплюється до ферми двома стержнями *CD* і *DE*, які розташовані вздовж однієї прямої).

Система канонічних рівнянь має звичайний вигляд і для ферми, що розглядається, може бути записана в такий спосіб:

$$\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1p} = 0;$$

$$\delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2p} = 0.$$

Для обчислення коефіцієнтів системи рівнянь необхідно утворити допоміжні і вантажний стан (рис.11.20,г,е). Оскільки в стержнях ферми виникають лише поздовжні сили, формула Мора набуватиме такого вигляду:

$$\delta_{ij} = \frac{1}{EA_0} \sum_{k=1}^C \bar{N}_i \bar{N}_j l'_k; \quad \Delta_{ip} = \frac{1}{EA_0} \sum_{k=1}^C \bar{N}_i N_p l'_k. \quad (11.24)$$

У цих формулах $\bar{N}_i, \bar{N}_j, N_p$ – поздовжні зусилля в стержнях основної системи відповідно від дії одиничних невідомих $X_i = 1, X_j = 1$ і від зовнішнього навантаження, EA_0 – довільна константа, яку доцільно покласти такою, що дорівнює жорсткості на поздовжні деформації якогось стержня ферми, l' – зведені довжини стержнів ферми, які обчислюються за формулою

$$l'_k = \frac{EA_0}{EA_k} l_k, \quad (11.25)$$

де l_k, EA_k – довжина і згина жорсткість стержня k ферми.

Дійсні зусилля можуть обчислюватись за способом накладання:

$$N_\partial = \bar{N}_1 X_1 + \bar{N}_2 X_2 + \dots + \bar{N}_n X_n + N_p. \quad (11.26)$$

11.12. Приклад розрахунку статично невизначуваної ферми

Виконаємо розрахунок статично невизначуваної ферми, представленій на рис.11.21,а.

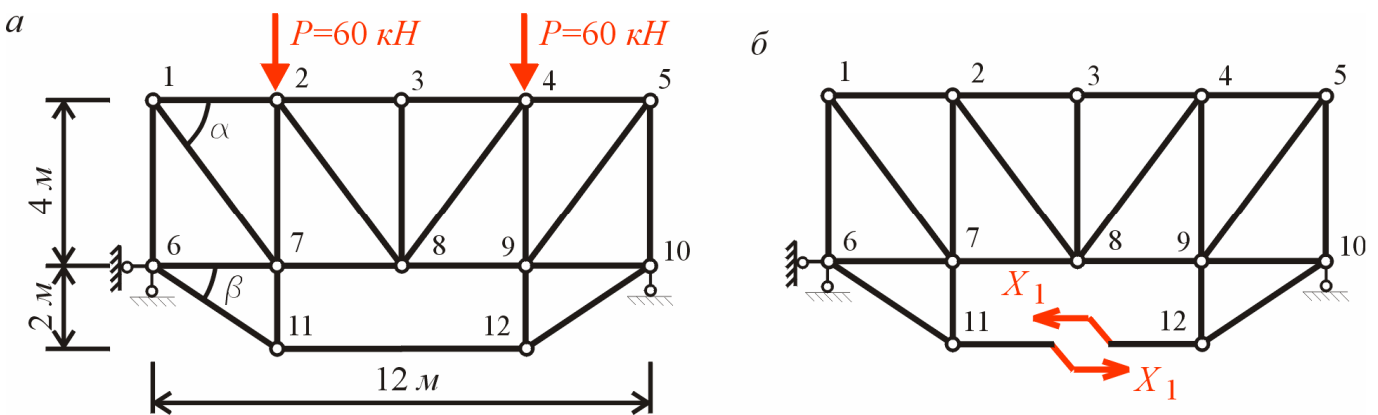


Рис.11.21

Стержні ферми мають такі жорсткості:

- нижній пояс і підвіска – EA ;
- верхній пояс і стійки – $2EA$;
- розкоси – $1,5EA$.

11.12.1. Ступінь статичної невизначуваності

Ступінь статичної невизначуваності обчислюємо за формулою (11.19):

$$n = 22 + 3 - 2 \cdot 12 = 1.$$

Оскільки кількість опорних в'язей дорівнює їх мінімально можливій кількості, очевидно, що “зайвим” можна вважати один зі стержнів решітки.

11.12.2. Вибір основної системи

Основну систему утворимо шляхом розрізу горизонтального стержня підвіски (рис.11.21.б). Легко впевнитись, що перетворена в такий спосіб ферма утворена способом “діад” і, отже, є геометрично незмінюваною. За основне невідоме X_1 береться зусилля, яке діє в горизонтальному стержні підвіски.

11.12.3. Допоміжний стан основної системи

Визначення опорних реакцій (рис.11.22,а)

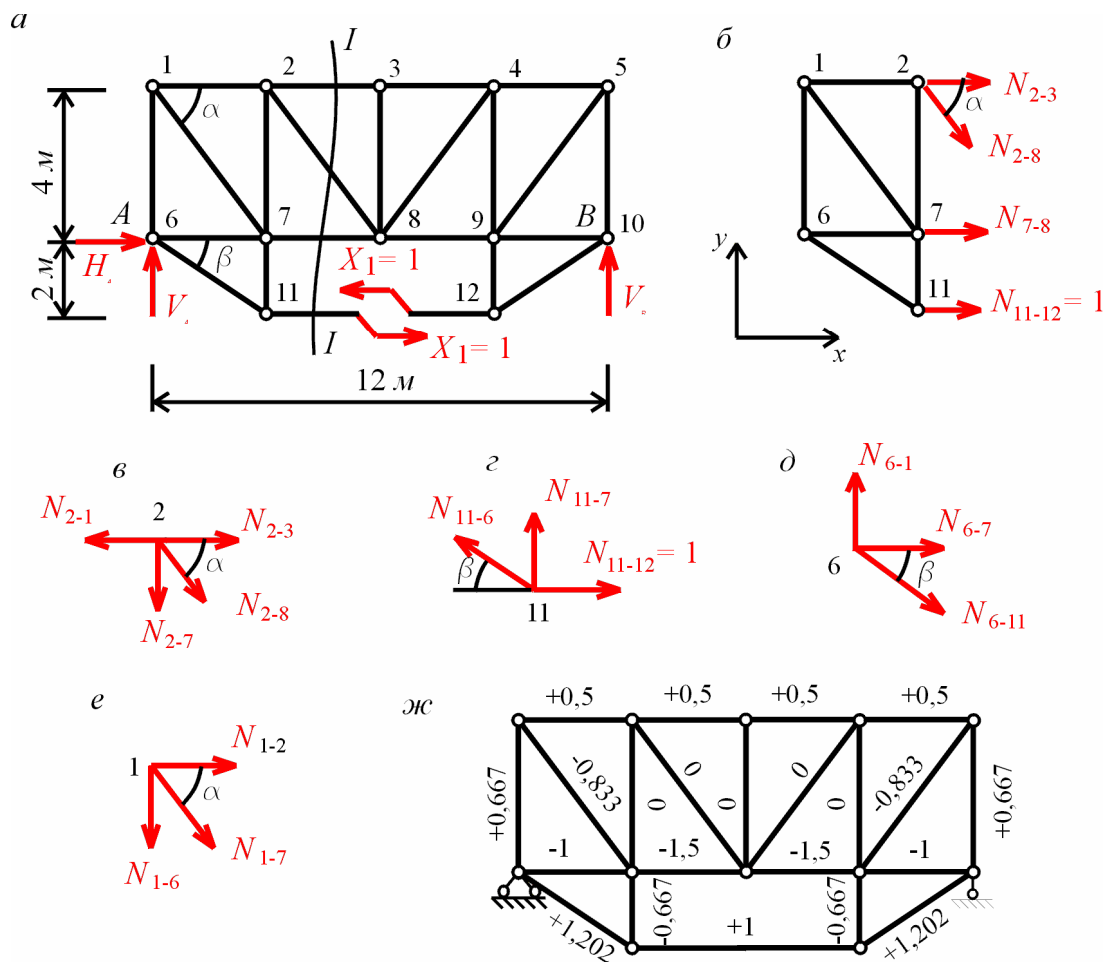


Рис.11.22

$$\sum M_B = 0 \Rightarrow V_A \cdot 12 - 1 \cdot 2 + 1 \cdot 2 = 0 \Rightarrow V_A = 0;$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow -V_B \cdot 12 - 1 \cdot 2 + 1 \cdot 2 = 0 \Rightarrow V_B = 0;$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow H_A - 1 + 1 = 0 \Rightarrow H_A = 0.$$

Тригонометричні функції кутів нахилу стержнів визначимо по геометричній схемі ферми:

$$\sin\alpha = \frac{l_{2-7}}{l_{1-7}} = \frac{4}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 0,8000; \quad \cos\alpha = \frac{l_{1-2}}{l_{1-7}} = \frac{4}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 0,6000.$$

$$\sin\beta = \frac{l_{7-11}}{l_{6-11}} = \frac{2}{\sqrt{3^2 + 2^2}} = 0,5547; \quad \cos\beta = \frac{l_{6-7}}{l_{6-11}} = \frac{3}{\sqrt{3^2 + 2^2}} = 0,8320.$$

Внутрішні зусилля

На підставі ознак нульових стержнів доходимо висновку, що стержень 3-8 є нульовим:

$$N_{3-8} = 0.$$

Виконавши розріз *I-I* розглядаємо рівновагу лівої половини ферма (рис.11.22,б).

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow -N_{2-8}\sin\alpha = 0 \Rightarrow N_{2-8} = 0;$$

$$\sum M_7 = 0 \Rightarrow N_{2-3} \cdot 4 - 1 \cdot 2 = 0 \Rightarrow N_{2-3} = +0,5;$$

$$\sum M_2 = 0 \Rightarrow -N_{7-8} \cdot 4 - 1 \cdot 6 = 0 \Rightarrow N_{7-8} = -1,5.$$

Розглядаємо рівновагу вузлів.

Вузол 2 (рис.11.22,в):

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow N_{2-3} - N_{2-1} + N_{2-8}\cos\alpha = 0 \Rightarrow N_{2-1} = 0,5;$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow -N_{2-7} - N_{2-8}\sin\alpha = 0 \Rightarrow N_{2-7} = 0.$$

Вузол 11 (рис.11.22,г):

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow -N_{11-6}\cos\beta + N_{11-12} = 0 \Rightarrow N_{11-6} = \frac{1}{0,8320} = 1,202;$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow N_{11-7} + N_{11-6}\sin\beta = 0 \Rightarrow N_{11-7} = -N_{11-6} \cdot 0,5547 = -0,667.$$

Вузол 6 (рис.11.22,д):

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow N_{6-7} + N_{6-11}\cos\beta = 0 \Rightarrow N_{6-7} = -N_{6-11} \cdot 0,8320 = -1,000;$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow N_{6-1} - N_{6-11}\sin\beta = 0 \Rightarrow N_{6-1} = N_{6-11} \cdot 0,667 = 0,667.$$

Вузол 1 (рис.11.22,е):

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow -N_{1-7} \sin \alpha - N_{1-6} = 0 \Rightarrow N_{1-7} = -\frac{N_{1-6}}{0,8000} = -0,833;$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow N_{1-2} + N_{1-7} \cos \alpha = 0 \Rightarrow N_{1-2} = -N_{1-7} 0,6000 = 0,5.$$

Результати розрахунку (зусилля допоміжного стану \bar{N}_1) наведено на рис.11.22,ж.

11.12.4. Розрахунок основної системи у вантажному стані

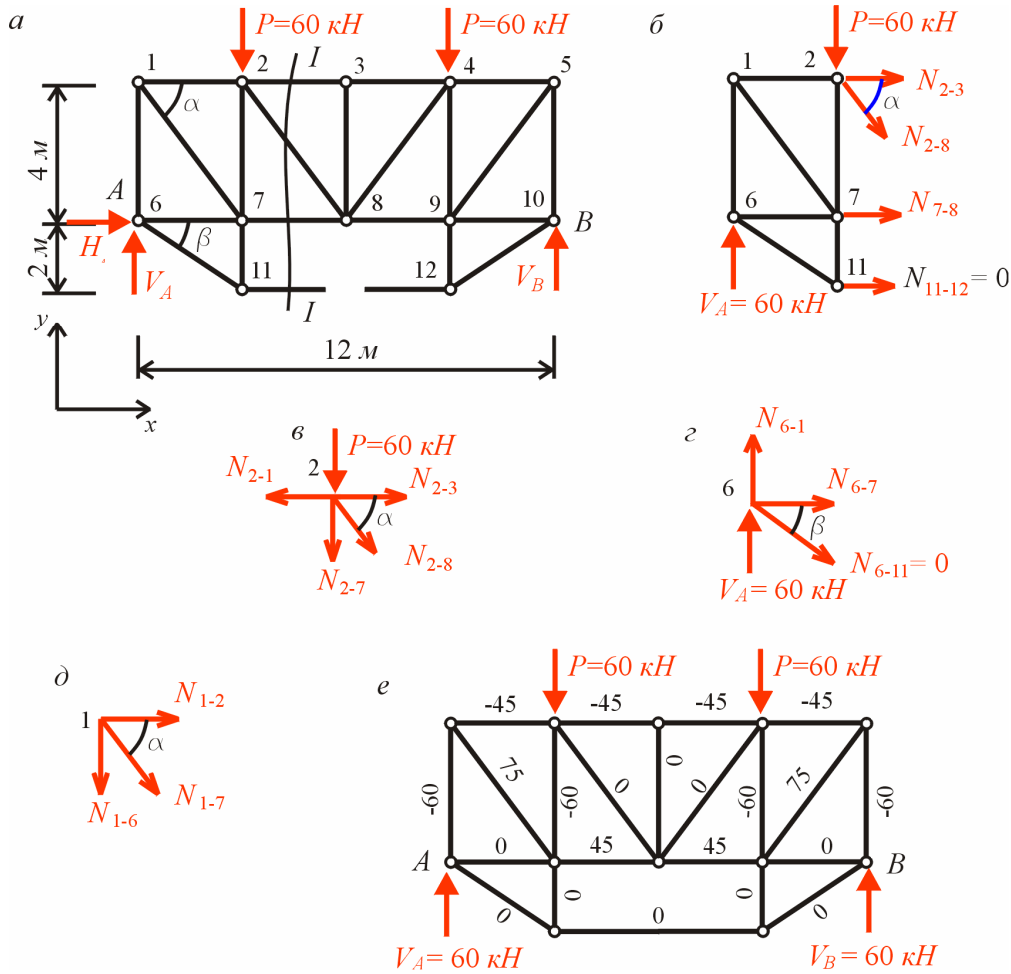


Рис.11.23

Визначення опорних реакцій

$$\sum M_B = 0 \Rightarrow V_A \cdot 12 - 60 \cdot 9 - 60 \cdot 3 = 0 \Rightarrow V_A = 60 \text{ кН};$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow -V_B \cdot 12 + 60 \cdot 9 + 60 \cdot 3 = 0 \Rightarrow V_B = 60 \text{ кН};$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow H_A = 0.$$

Внутрішні зусилля

Шість стержнів основної системи є завідомо нульовими:

$$N_{11-12} = N_{7-11} = N_{6-11} = N_{9-12} = N_{10-12} = N_{3-8} = 0.$$

Для визначення зусиль в інших стержнях скористаємось методами наскрізних перерізів та вирізання вузлів.

Переріз $I-I$ (рис.11.23,б).

$$\begin{aligned}\sum F_y = 0 &\Rightarrow -N_{2-8}\sin\alpha + 60 - 60 = 0 \Rightarrow N_{2-8} = 0; \\ \sum M_7 = 0 &\Rightarrow N_{2-3} \cdot 4 + 60 \cdot 3 = 0 \Rightarrow N_{2-3} = -45 \text{ кН}; \\ \sum M_2 = 0 &\Rightarrow -N_{7-8} \cdot 4 + 60 \cdot 4 = 0 \Rightarrow N_{7-8} = 45 \text{ кН}.\end{aligned}$$

Вузол 2 (рис.11.23,в):

$$\begin{aligned}\sum F_x = 0 &\Rightarrow -N_{2-1} + N_{2-3} + N_{2-8}\cos\alpha = 0 \Rightarrow N_{2-1} = -45 \text{ кН}; \\ \sum F_y = 0 &\Rightarrow -N_{2-7} - N_{2-8}\sin\alpha - 60 = 0 \Rightarrow N_{2-7} = -60 \text{ кН}.\end{aligned}$$

Вузол 6 (рис.11.23,г):

$$\begin{aligned}\sum F_x = 0 &\Rightarrow N_{6-7} + N_{6-11}\cos\beta = 0 \Rightarrow N_{6-7} = 0; \\ \sum F_y = 0 &\Rightarrow N_{6-1} - N_{6-11}\sin\beta + 60 = 0 \Rightarrow N_{6-1} = -60 \text{ кН}.\end{aligned}$$

Вузол 1 (рис.11.23,д):

$$\begin{aligned}\sum F_y = 0 &\Rightarrow -N_{1-7}\sin\alpha - N_{1-6} = 0 \Rightarrow N_{1-7} = -\frac{N_{1-6}}{0,8000} = 75 \text{ кН}; \\ \sum F_x = 0 &\Rightarrow N_{1-2} + N_{1-7}\cos\alpha = 0 \Rightarrow N_{1-2} = -N_{1-7} \cdot 0,6000 = -45 \text{ кН}.\end{aligned}$$

Унаслідок симетрії зусилля для правої половини основної системи є дзеркальним відбиттям зусиль лівої половини.

Система канонічних рівнянь методу сил

Унаслідок того, що задана ферма один раз статично невизначувана, система канонічних рівнянь методу сил складається з одного рівняння

$$\delta_{11} X_1 + \Delta_{1P} = 0,$$

яке виражає рівність нулю взаємного наближення точок прикладення основних невідомих.

Обчислення коефіцієнтів системи канонічних рівнянь

Практичний розрахунок рами складається з однотипних обчислень для всіх стержнів ферми, тому розрахунок зручно виконувати в табличній формі (див. [табл. 11.1](#)).

Перший стовпець містить перелік всіх стержнів ферми. Стовпці 2 і 3 – довжини стержнів і жорсткості – визначаються по схемі ферми. Тут вважаємо, що $EA_0 = EA$. Зведені довжини стержнів, обчислені за формулою (11.25), записано в стовпець 4.

Зусилля в допоміжному і вантажному станах занесено відповідно в стовпці 5 і 6.

Коефіцієнти системи рівнянь визначаються за формулами (11.24). Обчислення записані в стовпці 7 і 8. Суми чисел в цих стовпцях дорівнюють відповідно коефіцієнтам δ_{11} та Δ_{1P} . Отже

$$\delta_{11} = \frac{45,602}{EA_0}, \quad \Delta_{1P} = -\frac{1116,580}{EA_0}.$$

Таблиця 11.1

Ст.	l	$\frac{EA}{EA_0}$	l'	\bar{N}_1	N_P	$\bar{N}_1\bar{N}_1l'$	$N_P\bar{N}_1l'$	\bar{N}_1X_1	N_δ	$N_\delta\bar{N}_1l'$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1-2	3	2	1,5	0,5	-45	0,375	-33,750	12,243	-32,757	-24,568
2-3	3	2	1,5	0,5	-45	0,375	-33,750	12,243	-32,757	-24,568
3-4	3	2	1,5	0,5	-45	0,375	-33,750	12,243	-32,757	-24,568
4-5	3	2	1,5	0,5	-45	0,375	-33,750	12,243	-32,757	-24,568
6-7	3	1	3	-1	0	3,000	0	-24,485	-24,485	73,456
7-8	3	1	3	-1,5	45	6,750	-202,500	-36,728	8,272	-37,224
8-9	3	1	3	-1,5	45	6,750	-202,500	-36,728	8,272	-37,224
9-10	3	1	3	-1	0	3,000	0	-24,485	-24,485	73,456
1-6	4	2	2	0,667	-60	0,890	-80,040	16,332	-43,668	-58,254
2-7	4	2	2	0	-60	0	0	0	-60	0
3-8	4	2	2	0	0	0	0	0	0	0
4-9	4	2	2	0	-60	0	0	0	-60	0
5-10	4	2	2	0,667	-60	0,890	-80,040	16,332	-43,668	-58,254
1-7	5	1,5	3,333	-0,833	75	2,313	-208,250	-20,396	54,604	-151,616
2-8	5	1,5	3,333	0	0	0	0	0	0	0
4-8	5	1,5	3,333	0	0	0	0	0	0	0
5-9	5	1,5	3,333	-0,833	75	2,313	-208,250	-20,396	54,604	-151,616
7-11	2	1	2	-0,667	0	0,890	0	-16,332	-16,332	21,786
9-12	2	1	2	-0,667	0	0,890	0	-16,332	-16,332	21,786
6-11	3,605	1	3,605	1,202	0	5,209	0	29,431	29,431	127,532
10-12	3,605	1	3,605	1,202	0	5,209	0	29,431	29,431	127,532
11-12	6	1	6	1	0	6,000	0	24,485	24,485	146,912
						45,602	-1116,580			0,000

Розв'язання канонічних рівнянь

Підставляємо коефіцієнти до канонічного рівняння:

$$\frac{45,602}{EA_0} X_1 - \frac{1116,580}{EA_0} = 0.$$

Звідси

$$X_1 = 24,485.$$

Обчислення дійсних зусиль в стержнях ферми

Дійсні зусилля в стержнях статично невизначуваної ферми обчислимо, базуючись на принципі незалежності дій сил, як суми зусиль в основній системі від основного невідомого і від зовнішнього навантаження, тобто за формулою

$$N_{\partial} = \bar{N}_1 X_1 + N_P.$$

Добутки $\bar{N}_1 X_1$ підраховуються в стовпці 9, а дійсні зусилля – в стовпці 10.

Кінематична перевірка результатів розрахунку

Результати розрахунку перевіряються перемноженням дійсних зусиль в стержнях ферми N_{∂} на одиничні зусилля \bar{N}_1 , тобто

$$\Delta_{1\partial} = \frac{1}{EA_0} \sum \bar{N}_1 N_{\partial} l'.$$

Перемноження для кожного стержня записуються в стовпці 11. Сума чисел стовпця дорівнює нулю, тобто

$$\Delta_{1\partial} = \frac{1}{EA_0} \sum \bar{N}_1 N_{\partial} l' = 0.$$

Отже, розрахунок виконано правильно.

11.13. Розрахунок нерозрізних балок

Суцільну статично невизначувану балку, яка не переривається шарнірами, називають **нерозрізною**.

З погляду кінематичного аналізу всі опорні в'язі, за винятком трьох, є “зайвими”. Отже ступінь статичної невизначуваності балки може бути обчислений за формулою

$$n = C - 3, \quad (11.27)$$

де C – кількість опорних в'язей (для шарнірно-рухомої опори $C=1$, для шарнірно-нерухомої $C=2$, для затиснення $C=3$). Так, для балки, що показана на рис.11.24,а, ступінь статичної невизначуваності $n=7 - 3 = 4$.

Ступінь статичної невизначуваності балки може бути також обчислений за формулою $n=3k-u$.

11.13.1. Рівняння трьох моментів

Основна система для розрахунку нерозрізної балки за методом сил може бути утворена відкиданням будь-яких в'язей, що можуть розглядатись як “зайві”. Так, можна відкинути всі проміжні шарнірно-рухомі опори. Тоді основна система становитиме статично визначувану і геометрично незмінювану балку на двох опорах, до якої разом із зовнішніми навантаженнями прикладені реакції відкинутих опор X_1 , X_2 , X_3 і X_4 як сили невідомої величини. Хоч така основна система формально і є правильною, разом із тим вона вкрай нераціональна.

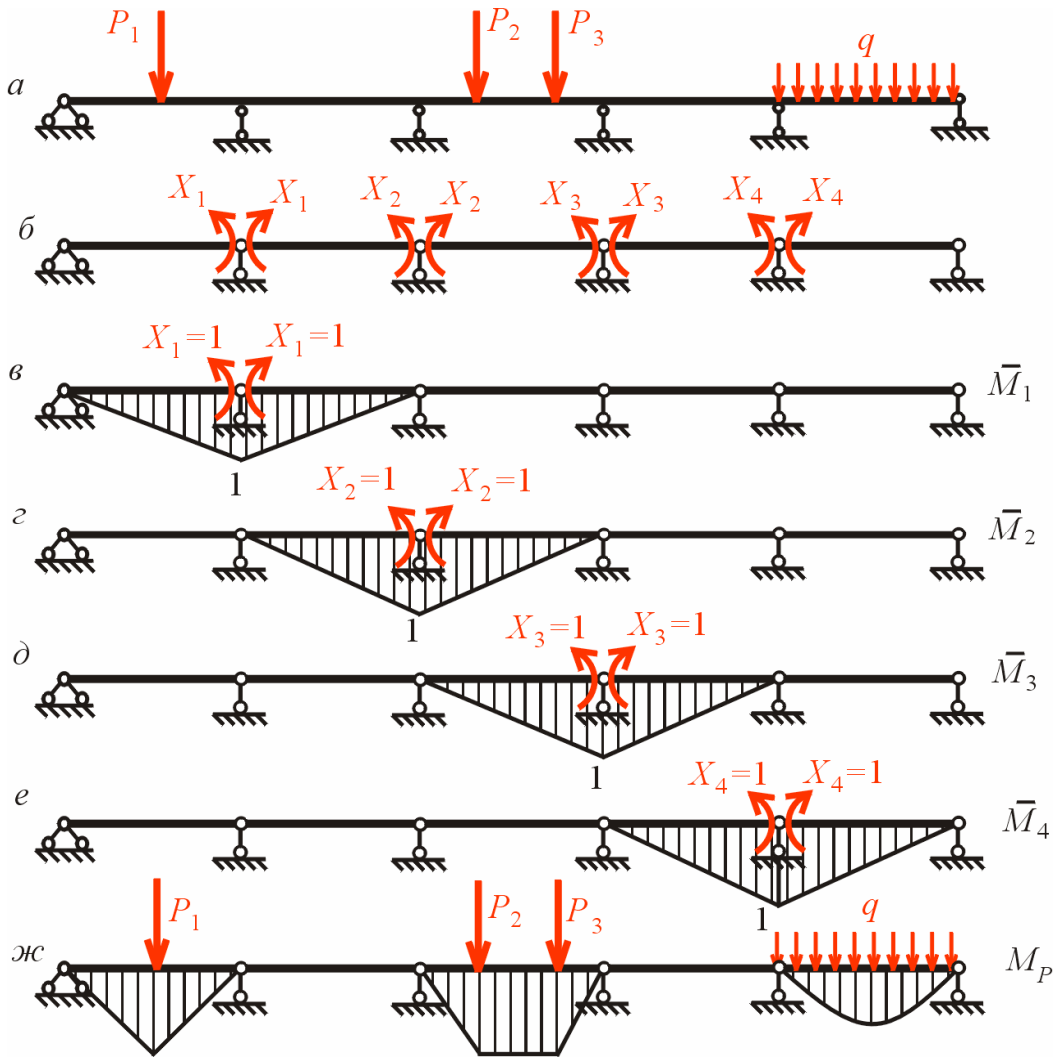


Рис.11.24

Для розрахунку нерозрізних балок слід використовувати запропоновану Б.П.Клапейроном стандартну основну систему, що утворюється постановкою шарнірів над опорами (рис.11.24,б). Система являє собою сукупність окремих однопрогонових балок, які деформуються незалежно одна від одної. Тому дія зовнішнього навантаження з однієї однопрогової балки на іншу не передається. Основними невідомими в даному випадку є згинаючі моменти, що виникають у перерізах балки над її опорами, так звані **опорні моменти**.

Для нерозрізної балки, що розглядається, система канонічних рівнянь матиме такий вигляд:

$$\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{13}X_3 + \delta_{14}X_4 + \Delta_{1p} = 0;$$

$$\delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{23}X_3 + \delta_{24}X_4 + \Delta_{2p} = 0;$$

$$\delta_{31}X_1 + \delta_{32}X_2 + \delta_{33}X_3 + \delta_{34}X_4 + \Delta_{3p} = 0;$$

$$\delta_{41}X_1 + \delta_{42}X_2 + \delta_{43}X_3 + \delta_{44}X_4 + \Delta_{4p} = 0.$$

Одиничні і вантажна епюри згинальних моментів побудовані на рис.11.24,в,г,д,е,є.

На підставі того, що деякі епюри не мають спільних ділянок, можна записати

$$\delta_{13}=\delta_{14}=\delta_{24}=\delta_{31}=\delta_{41}=\delta_{42}=0.$$

Система канонічних рівнянь з урахуванням цього матиме такий вигляд:

$$\begin{aligned} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 &+ \Delta_{1p} = 0; \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{23}X_3 &+ \Delta_{2p} = 0; \\ \delta_{32}X_2 + \delta_{33}X_3 + \delta_{34}X_4 + \Delta_{3p} &= 0; \\ \delta_{43}X_3 + \delta_{44}X_4 + \Delta_{4p} &= 0. \end{aligned}$$

Як бачимо, в кожному рівнянні, крім першого та останнього, тільки три коефіцієнти при невідомих відмінні від нуля: головний і два сусідніх з ним. Тому довільне рівняння i матиме вигляд

$$\delta_{i,i-1}X_{i-1} + \delta_{i,i}X_i + \delta_{i,i+1}X_{i+1} + \Delta_{ip} = 0.$$

Розглянемо епюри, необхідні для обчислення коефіцієнтів цього рівняння. На рис.11.25 зображено фрагмент нерозрізної балки та епюри згинальних моментів від одиничних невідомих та від зовнішнього навантаження.

Обчислимо коефіцієнти рівняння за формулою Мора:

$$\delta_{i,i-1} = \sum \int_l \frac{\bar{M}_i \bar{M}_{i-1}}{EI} dx = \frac{1}{EI_i} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot l_i \cdot \frac{1}{3} = \frac{l_i}{6EI_i},$$

$$\delta_{i,i} = \sum \int_l \frac{\bar{M}_i \bar{M}_i}{EI} dx = \frac{1}{EI_i} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot l_i \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{EI_{i+1}} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot l_{i+1} \cdot \frac{2}{3} = \frac{l_i}{3EI_i} + \frac{l_{i+1}}{3EI_{i+1}},$$

$$\delta_{i,i+1} = \sum \int_l \frac{\bar{M}_i \bar{M}_{i+1}}{EI} dx = \frac{1}{EI_{i+1}} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot l_{i+1} \cdot \frac{1}{3} = \frac{l_{i+1}}{6EI_{i+1}},$$

$$\Delta_{ip} = \sum \int_l \frac{\bar{M}_i M_p}{EI} dx = \frac{1}{EI_i} \Omega_{p,i} y_i + \frac{1}{EI_{i+1}} \Omega_{p,i+1} y_{i+1}.$$

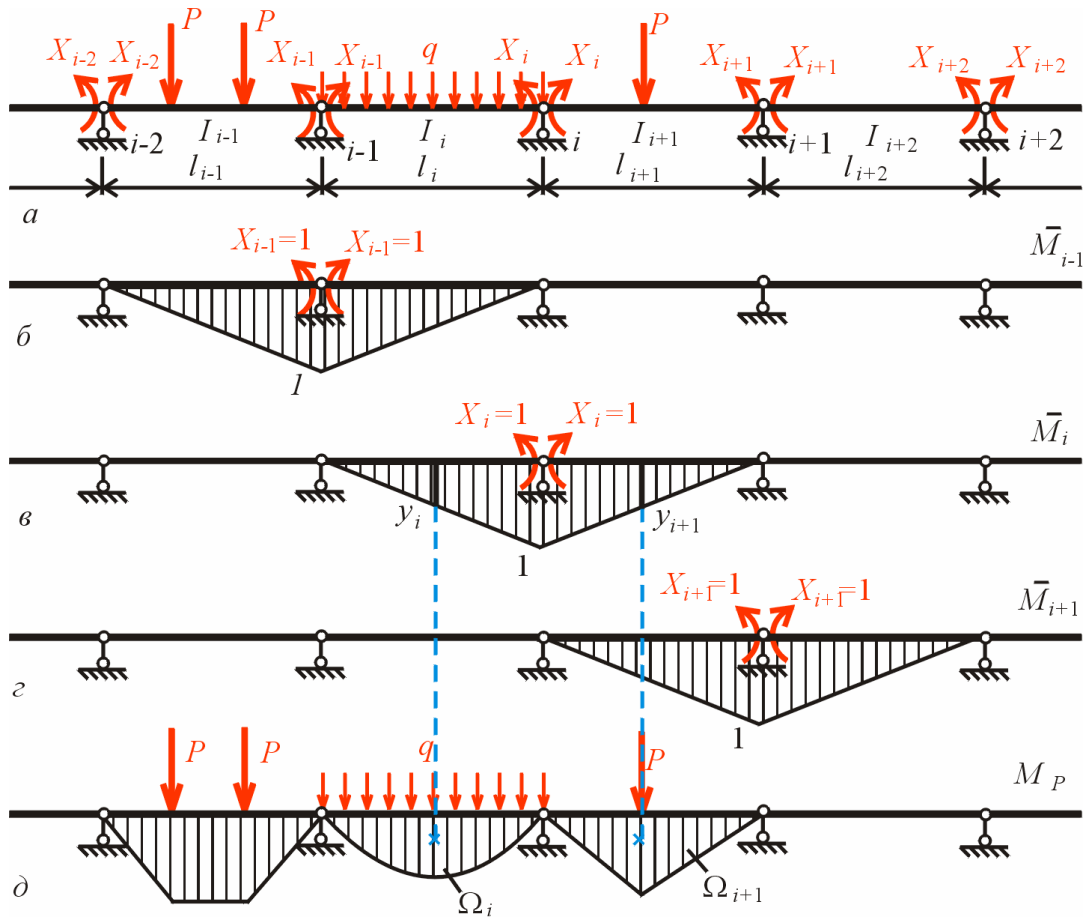


Рис.11.25

Після підстановки переміщень до рівняння та деяких перетворень одержимо остаточно:

$$l'_i X_{i-1} + 2(l'_i + l'_{i+1}) X_i + l'_{i+1} X_{i+1} = -6 \left(\frac{l'_i}{l_i} B_i^{\phi} + \frac{l'_{i+1}}{l_{i+1}} A_{i+1}^{\phi} \right). \quad (11.28)$$

Тут позначено: l'_i, l'_{i+1} – зведені довжини прогонів, які обчислюються за формулами: $l'_i = \frac{EI_o}{EI_i} l_i$,

$l'_{i+1} = \frac{EI_o}{EI_{i+1}} l_{i+1}$, де EI_o – жорсткість на згин одного з прогонів балки, яка обирається за основну;

$B_i^{\phi}, A_{i+1}^{\phi}$ – фіктивні опорні реакції на опорі i в прогонах l_i і l_{i+1} відповідно.

Для визначення фіктивних опорних реакцій необхідно побудувати епюри M_p від зовнішнього навантаження в цих прогонах, як в окремих однопрогонових балках. Ці епюри слід розглядати як деяке фіктивне навантаження, що зумовлює появу означених фіктивних реакцій. На рис.11.26 показано дві схеми фіктивного навантаження і фіктивних опорних реакцій розглянутої балки.

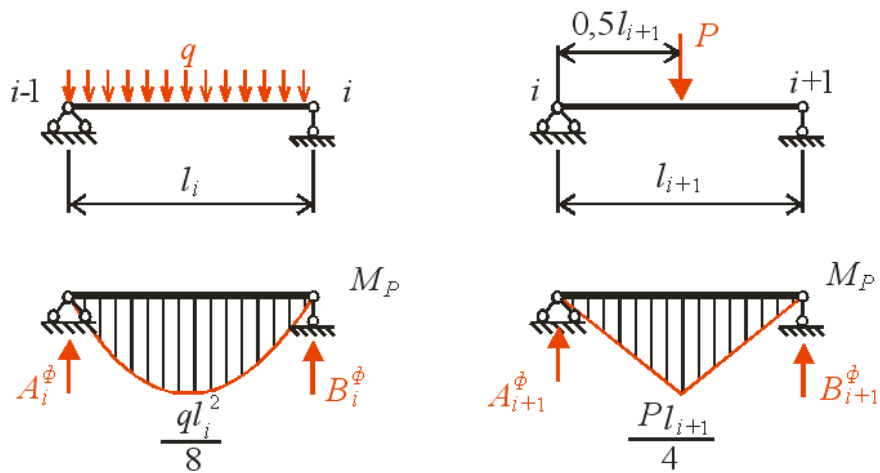


Рис.11.26

Значення фіктивних реакцій опор для деяких прогонових навантажень наведено в [Додатку 1](#). Записане рівняння слушне лише в тому випадку, якщо основна система одержана постановкою шарнірів над опорами і основні невідомі являють собою опорні моменти, тобто $X_{i-1} \equiv M_{i-1}$, $X_i \equiv M_i$, $X_{i+1} \equiv M_{i+1}$. Тому це рівняння часто записують так:

$$l'_i M_{i-1} + 2(l'_i + l'_{i+1}) M_i + l'_{i+1} M_{i+1} = -6 \left(\frac{l'_i}{l_i} B_i^{\phi} + \frac{l'_{i+1}}{l_{i+1}} A_{i+1}^{\phi} \right) \quad (11.29)$$

ї називають **рівнянням трьох моментів**. Цим рівнянням можна скористатися для формального складання системи канонічних рівнянь методу сил, якщо нерозрізна балка має стандартний вигляд, тобто має на кінцях шарнірні опори.

Щоб перейти до стандартної схеми потрібно:

- відкинути консолі, якщо вони є, а затиснення замінити на фіктивні прогони нульової довжини;
- пронумерувати опори зліва направо;
- пронумерувати прогони в такий спосіб, щоб їхні номери відповідали номерам правих опор прогонів.

Так, розрахункова схема нерозрізної балки (рис.11.27,а) замінена стандартною схемою (рис.11.27,б).

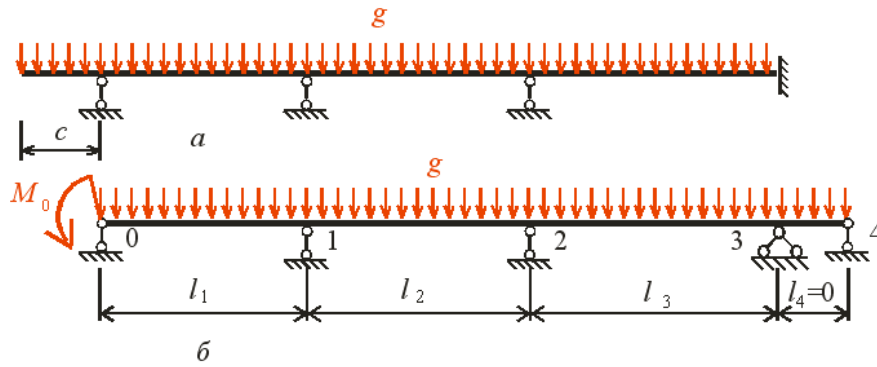


Рис.11.27

З викладеного випливає, що для складання системи канонічних рівнянь методу сил для нерозрізної балки не обов'язково будувати одиничні епюри в основній системі і обчислювати переміщення за формулою Мора. Цілком достатньо записати рівняння трьох моментів (11.28) або (11.29) для кожної проміжної опори стандартної схеми балки, надаючи індексу i почергового значення 1,2 тощо.

Розглянемо обчислення дійсних зусиль у довільному прогоні нерозрізної балки l_i . Скористаємось способом накладання:

$$M_{\partial} = \sum_{i=1}^n \bar{M}_i X_i + M_p.$$

Оскільки в довільному прогоні l_i лише дві одиничні епюри, що відмінні від нуля, запишемо

$$M_{\partial} = \bar{M}_{i-1} X_{i-1} + \bar{M}_i X_i + M_p.$$

Для будь-якого перерізу з координатою z (рис.11.28) можна записати, що

$$M_{\partial}^z = \frac{M_{i-1}}{l_i} (l_i - z) + \frac{M_i}{l_i} z + M_p^z. \quad (11.30)$$

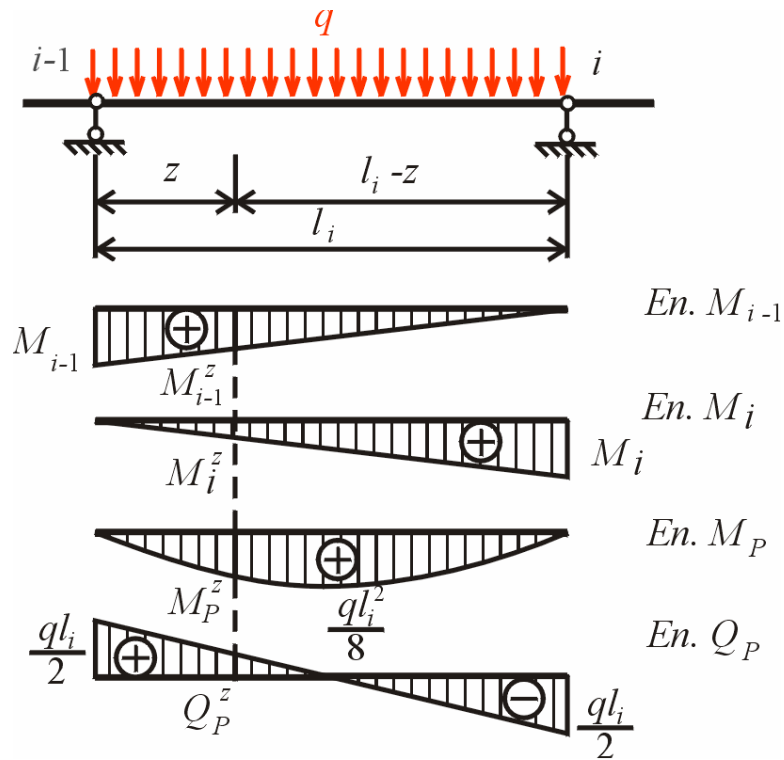


Рис.11.28

Продиференціювавши цей вираз, дістанемо формулу для обчислення поперечних сил у довільному перерізі будь-якого прогону нерозрізної балки:

$$Q_{\partial}^z = \frac{dM_{\partial}^z}{dz} = \frac{M_i - M_{i-1}}{l_i} + Q_P^z. \tag{11.31}$$

Опорні реакції можуть бути обчислені виходячи з рівнянь рівноваги опорних в'язей (рис.11.29):

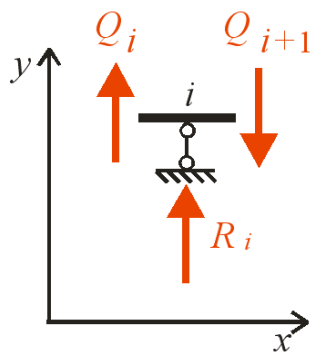


Рис.11.29

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow R_i = Q_{i+1} - Q_i, \tag{11.32}$$

де Q_{i+1} і Q_i – поперечні сили відповідно праворуч і ліворуч опори.

11.13.2. Метод моментних фокусів

Метод моментних фокусів безпосередньо впливає з розрахунку за допомогою рівнянь трьох моментів нерозрізних балок, у яких навантажено лише один прогін. Розглянемо таку балку (рис.11.30,а).

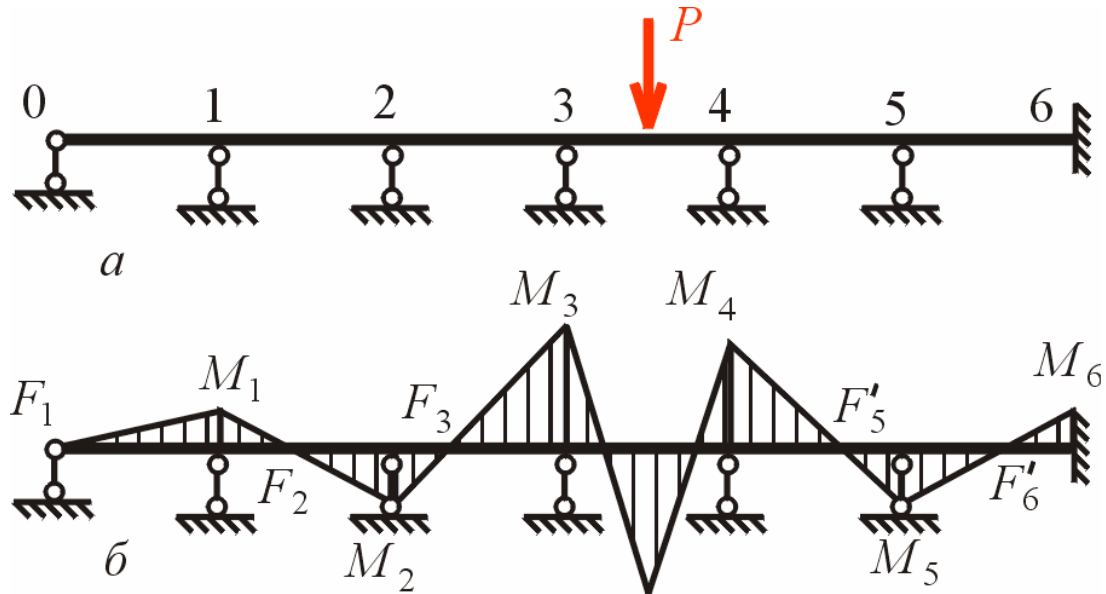


Рис.11.30

Епюра згинальних моментів, одержана завдяки розрахунку, побудована на рис.11.30,б. З аналізу цієї епюри можна дійти таких висновків:

- у міру віддалення від завантаженого прогону опорні моменти зменшуються за значенням;
- на кожному ненавантаженому прогоні епюра M прямолінійна і перетинає вісь балки, тобто має нульову точку. Цю точку називають **моментним фокусом** цього прогону.

Залежно від розташування навантаження щодо даного прогону розрізняють ліві і праві моментні фокуси. **Лівим фокусом** називають нульову точку епюри M у ненавантаженому прогоні, якщо він розташований ліворуч від навантаженого прогону (точки F_1, F_2, F_3 на рис.11.30,б). Аналогічно визначаються праві фокуси (точки F'_5, F'_6).

Кожному фокусу відповідає деяке додатне число, яке називається **фокусним співвідношенням**. Воно характеризує співвідношення опорних моментів на кінцях даного ненавантаженого прогону. Так, для фокуса F_1 (рис.11.30,б) фокусне співвідношення $k_1 = -M_1/M_0 = \infty$, для фокусів F_2 і F_3 фокусне співвідношення $k_2 = -M_2/M_1$ і $k_3 = -M_3/M_2$. І взагалі для довільного прогону l_i (рис.11.30,а) ліве фокусне співвідношення

$$k_i = -\frac{M_i}{M_{i-1}}. \quad (11.33)$$

Величина фокусного співвідношення визначає розташування фокуса в прогоні балки (рис.11.31).

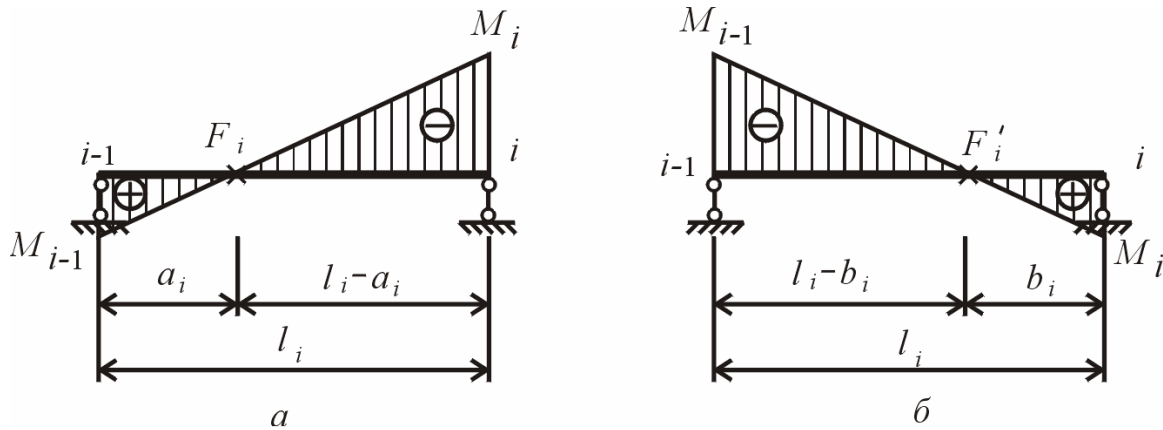


Рис.11.31

З геометричних міркувань

$$\frac{l_i - a_i}{a_i} = -\frac{M_i}{M_{i-1}} = k_i,$$

звідки відстань a_i виражається через фокусне співвідношення залежністю

$$a_i = \frac{l_i}{1 + k_i}. \tag{11.34}$$

Аналогічні залежності можна записати для правих фокусів. Так, для фокусів F'_5, F'_6 фокусні співвідношення мають вигляд: $k'_5 = -M_4/M_5$, $k'_6 = -M_5/M_6$. У правому фокусі F'_i довільного прогону l_i (рис.11.29,б) відповідне фокусне співвідношення виражається формулою

$$k'_i = -\frac{M_{i-1}}{M_i}, \tag{11.35}$$

а відстань правого фокуса до правої опори прогону – формулою

$$b_i = \frac{l_i}{1 + k'_i}. \tag{11.36}$$

Для визначення величин фокусних співвідношень розглянемо яку-небудь нерозрізну балку (рис.11.32).

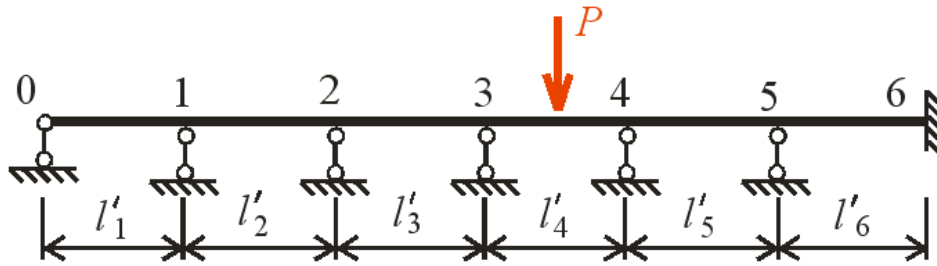


Рис.11.32

Запишемо рівняння трьох моментів (11.29) почергово для кожної проміжної опори. Для опори 1 ($i=1$)

$$l'_1 M_0 + 2(l'_1 + l'_2)M_1 + l'_2 M_2 = -6\left(\frac{l'_1}{l_1} B_1^\phi + \frac{l'_2}{l_2} A_2^\phi\right).$$

Оскільки в прогонах l_1 і l_2 відсутнє зовнішнє навантаження, то фіктивні опорні реакції $B_1^\phi = A_2^\phi = 0$. Також дорівнює нулю опорний момент на крайній опорі $M_0 = 0$. Зрештою маємо

$$2(l'_1 + l'_2)M_1 + l'_2 M_2 = 0,$$

звідки можемо записати

$$-\frac{M_2}{M_1} = \frac{2(l'_1 + l'_2)}{l'_2} = k_2 = \text{const}.$$

Для опори 2 ($i=2$)

$$l'_2 M_1 + 2(l'_2 + l'_3)M_2 + l'_3 M_3 = 0.$$

Тут враховано, що зовнішнє навантаження в прогонах l_2 і l_3 відсутнє. Після нескладних перетворень маємо:

$$-\frac{M_3}{M_2} = 2 + \frac{l'_2}{l'_3} \left(2 - \frac{1}{k_2}\right) = k_3 = \text{const}.$$

Продовжуючи такі самі записи для наступних опор, можемо зрештою записати ліве фокусне співвідношення для довільного прогону i у вигляді

$$k_i = 2 + \frac{l'_{i-1}}{l'_i} \left(2 - \frac{1}{k_{i-1}}\right). \quad (11.37)$$

Аналогічну формулу можна одержати і для правих фокусних співвідношень:

$$k'_i = 2 + \frac{l'_{i+1}}{l'_i} \left(2 - \frac{1}{k'_{i+1}} \right). \tag{11.38}$$

Необхідно звернути увагу на те, що фокусні співвідношення залежать тільки від фізико-геометричних характеристик балки і не залежать від розташування, характеру і величини навантаження. Звідси випливає, що і точки моментних фокусів також не залежать від навантаження і являють собою деякі константи нерозрізної балки.

Формула (11.37) дає змогу обчислити фокусне співвідношення в прогоні l_i , якщо відоме фокусне співвідношення в попередньому прогоні l_{i-1} , а для обчислення правого фокусного співвідношення за формулою (11.38) потрібно мати співвідношення у прогоні l_{i+1} . Таким чином обчислення лівих фокусних співвідношень необхідно розпочинати з лівого, а правих – з правого кінця балки. Крім того, необхідно знати ліве фокусне співвідношення у крайньому лівому і праве фокусне співвідношення у крайньому правому прогоні, які залежать від виду крайньої опори. Ці величини зображені на рис.11.33.

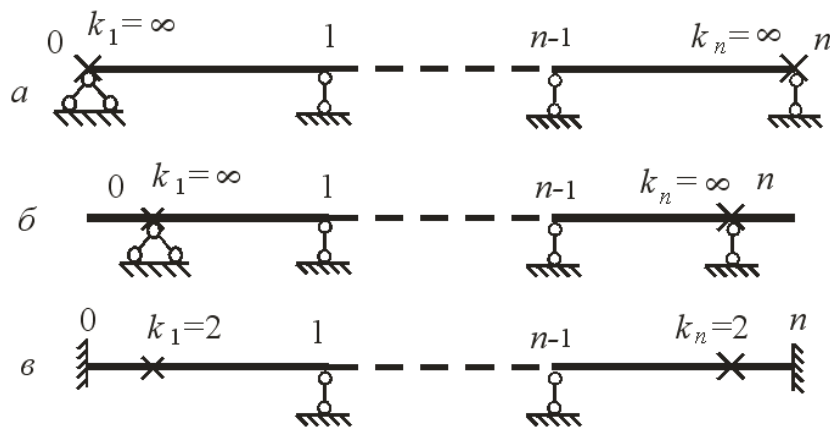


Рис.11.33

Для розрахунку нерозрізної балки за методом моментних фокусів необхідно також визначити опорні моменти по кінцях навантаженого прогону. З цією метою розглянемо фрагмент балки, який містить цей прогін (рис.11.34), разом із очікуваною епюрою згинальних моментів.

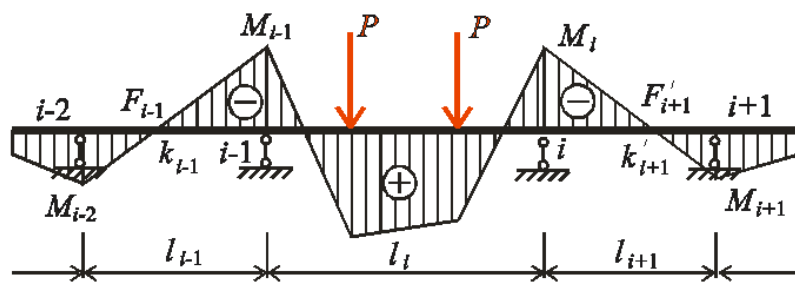


Рис.11.34

Запишемо рівняння трьох моментів для опор по кінцях навантаженого прогону.

Опора $i-1$:

$$l'_{i-1}M_{i-2} + 2(l'_{i-1} + l'_i)M_{i-1} + l'_iM_i = -6 \left(\frac{l'_i}{l_i} A_i^\phi \right)$$

Тут враховано, що внаслідок відсутності навантаження у прогоні l_{i-1} фіктивна реакція $B_{i-1}^\phi = 0$.

Опора i :

$$l'_iM_{i-1} + 2(l'_i + l'_{i+1})M_i + l'_{i+1}M_{i+1} = -6 \left(\frac{l'_{i+1}}{l_{i+1}} B_i^\phi \right).$$

Ще два рівняння дістанемо, виходячи з фокусних співвідношень у ненавантажених прогонах:

$$-\frac{M_{i-1}}{M_{i-2}} = k_{i-1}; \quad -\frac{M_i}{M_{i+1}} = k'_{i+1}.$$

Розв'язавши чотири рівняння відносно опорних моментів на кінцях навантаженого прогону маємо, зрештою маємо

$$M_{i-1} = -\frac{6}{l_i} \cdot \frac{A_i^\phi k'_i - B_i^\phi}{k_i k'_i - 1}; \quad (11.39)$$

$$M_i = -\frac{6}{l_i} \cdot \frac{B_i^\phi k_i - A_i^\phi}{k_i k'_i - 1}. \quad (11.40)$$

Отже, може бути запропонована така процедура розрахунку нерозрізної балки:

- обчислити фокусні співвідношення за формулами (11.37) і (11.38);
- визначити опорні моменти на лівому і правому кінцях навантаженого прогону за формулами (11.39) – (11.40);
- переміщуючись вліво відносно навантаженого прогону, обчислити опорні моменти на наступних опорах через ліві фокусні співвідношення ($M_j = -M_{j+1} / k_{j+1}$);
- переміщуючись відносно завантаженого прогону в правий бік, обчислити опорні моменти на наступних опорах через праві фокусні співвідношення ($M_j = -M_{j-1} / k'_j$).
- за формулами (11.30) – (11.32) визначити внутрішні зусилля в прогонах балки і опорні реакції.

11.13.3. Побудова огинаючих епюр

Навантаження, що діють на будівельну конструкцію, можуть бути постійними або тимчасовими. Як постійне навантаження розглядається власна вага балки. Вага обладнання і

вантажів, які розташовуються на балці і в процесі експлуатації споруди можуть змінювати свої величини та положення, розглядаються як тимчасові навантаження. Таким чином, внутрішні зусилля – це сума зусиль від дії постійного і тимчасових навантажень. Проте оскільки величини і розташування тимчасових навантажень можуть змінюватися, змінюватимуться і сумарні значення зусиль. Під час проектування важливо знати екстремальні величини зусиль, які можуть виникнути в системі за будь-яких можливих змін тимчасового навантаження. Ці розрахунки для будь-якого перерізу балки k можуть бути виконані за допомогою формул:

$$\begin{aligned} S_{max}^k &= S_{пост}^k + \sum (+S_{тим}^k); \\ S_{min}^k &= S_{пост}^k + \sum (-S_{тим}^k). \end{aligned} \quad (11.41)$$

У цих формулах S_{max}^k , S_{min}^k – максимальні і мінімальні зусилля в перерізі k від дії постійного і тимчасових навантажень, $S_{пост}^k$ – зусилля від дії постійного навантаження, $(+S_{тим}^k)$, $(-S_{тим}^k)$ – відповідно додатні і від’ємні величини зусиль при передбачуваних тимчасових навантаженнях.

У балках обчислюють максимальні і мінімальні згинальні моменти і поперечні сили:

$$\begin{aligned} M_{max}^k &= M_{пост}^k + \sum (+M_{тим}^k); \\ M_{min}^k &= M_{пост}^k + \sum (-M_{тим}^k); \\ Q_{max}^k &= Q_{пост}^k + \sum (+Q_{тим}^k); \\ Q_{min}^k &= Q_{пост}^k + \sum (-Q_{тим}^k). \end{aligned}$$

Епюри M_{max} , M_{min} , Q_{max} , Q_{min} , що характеризують максимальні і мінімальні згинальні моменти і поперечні сили, які виникають у перерізах балки за будь-яких передбачуваних тимчасових навантажень, називають огинаючими епюрами внутрішніх зусиль.

11.14. Особливості розрахунку статично невизначуваних комбінованих систем

Комбінованими системами називаються такі, що мають у своєму складі елементи, які піддані згину (балки, рами, арки), так і елементи, які мають лише поздовжні деформації (ферми, стержні із шарнірним приєднанням обох кінців).

Ступінь статичної невизначуваності комбінованих систем краще обчислювати за формулою (11.1), перераховуючи складні шарніри у прості.

Основна система обирається за загальними правилами, система канонічних рівнянь для визначення основних невідомих має стандартний вигляд.

Так, для балки, яка підсилена фермою (рис.11.35,а), ступінь статичної невизначуваності

$$n = 3k - u = 3 \cdot 4 - 11 = 1.$$

Основна система, що одержана шляхом розрізу стержня ферми, зображена на рис.11.35,б.

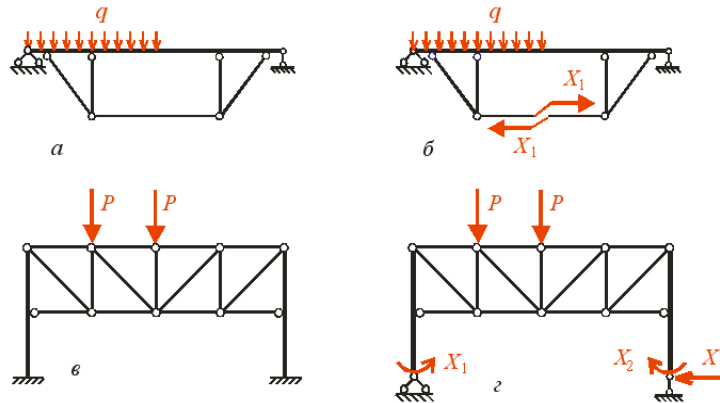


Рис.11.35

Система розв'язувальних рівнянь містить лише одне рівняння

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1P} = 0.$$

Стержнева система на рис.11.35,в є комбінацією двох консольних балок з фермою. Ступінь її статичної невизначуваності

$$n = 3k - u = 3 \cdot 9 - 24 = 3.$$

Основну систему, яка одержана відкиданням опорних в'язей, наведено на рис.11.35,г. Система розв'язувальних рівнянь має вигляд

$$\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{13}X_3 + \Delta_{1P} = 0;$$

$$\delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{23}X_3 + \Delta_{2P} = 0;$$

$$\delta_{31}X_1 + \delta_{32}X_2 + \delta_{33}X_3 + \Delta_{3P} = 0.$$

Основна відмінність розрахунку комбінованих систем полягає в обчисленні коефіцієнтів і вільних членів системи канонічних рівнянь, для чого використовується формула Мора у вигляді

$$\begin{aligned} \delta_{ij} &= \sum_l \int \frac{\bar{M}_i \bar{M}_j}{EI} dx + \sum \frac{\bar{N}_i \bar{N}_j}{EA} l; \\ \Delta_{ip} &= \sum_l \int \frac{\bar{M}_i M_p}{EI} dx + \sum \frac{\bar{N}_i N_p}{EA} l. \end{aligned} \quad (11.42)$$

У перші доданки цих формул входять згинальні моменти одиничних та вантажного станів основної системи, що виникають лише в елементах балок, рам, арок. В других доданках беруться

до уваги поздовжні сили лише в елементах, що зазнають тільки поздовжніх деформацій (ферми, прямолінійні стержні, приєднані шарнірами на обох кінцях). Впливом на значення коефіцієнта чи вільного члена поздовжніх сил в елементах, що зазнають згину, можна знехтувати. Дійсні зусилля можуть бути обчислені за формулами [\(11.20\)](#).