

Відповіді, вказівки

Тема 1:

1.6. а) $\left\{1; \frac{1}{2}\right\}$; б) $\{2 \pm i\}$; в) $\left\{\frac{3}{4} \pm \frac{\sqrt{7}}{4}i\right\}$; г) $\{1; 2; -2\}$; д) $\{2; \pm 2i\}$; е) $\{-2; -1 \pm i\}$;
ж) $\left\{-\frac{3}{2}; \frac{-3 \pm \sqrt{10}}{2}\right\}$.

1.12. а) $\{1, 2, 3, 6\}$; б) $\{2\}$; в) $\{a, б, л, о, n, p\}$; г) $\{1, 3, 4, 5, 6\}$; д) $\{1, 3, 5, 7\}$.

1.13. а) $\{x | x = 2k, x \in N, k = 1 \div 5, k \in N\}$.

1.14. а) справжнє; б) хибне; в) хибне; г) справжнє.

1.15. а) скінчена; б) нескінчена; в) скінчена; г) скінчена; д) нескінчена;
е) нескінчена; ж) нескінчена.

1.16. а) да; б) да; в) ні; г) да; д) ні; е) ні; ж) да.

1.17. Встановимо бієктивну відповідність між цілими і натуральними числами за такою схемою:

0	-1	1	-2	2	...
1	2	3	4	5	...

Тобто додатньому цілому числу $n \geq 0$ поставимо у відповідність непарне число $2n+1$, а від'ємному цілому числу $n < 0$ – парне число $2|n|$. Таким чином утворені пари вичерпають всі елементи обох множин.

1.23. Ні. Корисно звернути увагу на те, що хоча $\emptyset \subset A$, все таки $\emptyset \notin A$.

1.24. $\{\emptyset\}$.

1.25. а) $A \subset B$; б) ні; в) ні; г) $B \subset A$.

1.26. а) справжнє; б) хибне; в) хибне; г) хибне; д) хибне; е) справжнє;
ж) справжнє; з) справжнє; і) хибне.

1.27. $A \subset B$, $A = C$, $C \subset B$.

1.28. $A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20\}$; $B = \{1, 4, 9, 16\}$;
 $C = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19\}$; $D = \{1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$.

1.29. 2^n .

1.31. а) $S \subset S$; б) $x \in P$; в) $Y \not\subset X$; г) $S \subset T$; д) $z \notin Z$.

1.34. а) $\{1, 2, 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 16, 18, 20\}$; б) $\{4, 16\}$; в) \emptyset ; г) \emptyset ; д) $\{2\}$;
е) $\{3, 5, 7, 11, 13, 15, 17, 19\}$; ж) $\{1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 13, 14, 16, 17, 18, 19, 20\}$.

1.37. Це твердження є справжнім тільки у випадку $A = B$.

$$1.38. A - \bar{A} = A.$$

$$1.39. A - B = \emptyset.$$

$$1.41. A \cap B = \{2\}; A \cup B = \{0, 1, 2\}; A - B = \{1\}; B - A = \{0\}.$$

$$1.42. A \cap B = \{0, 1\}; A \cup B = \{-2, -1, 0, 1\}; A - B = \{-1\}; B - A = \{-2\}; A + B = \{-2, -1\}.$$

$$1.43. A \cap B = \{0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \dots\}; A \cup B = \{0, \pm \pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \dots\};$$

$$A - B = \{\pm \pi, \pm 3\pi, \pm 5\pi, \dots\}; B - A = \emptyset;$$

$$A + B = \{\pm \pi, \pm 3\pi, \pm 5\pi, \dots\}.$$

$$1.46. 1) \{a, b, d\}; \quad 2) \{c, g\}; \quad 3) \{e, f, g\}; \quad 7) \{a, b, d, e, f\}; \quad 8) U;$$

$$9) \{a, e, f, g\}; \quad 12) \{a, b, c, d, f\}; \quad 17) \{a, b, c, d, f, g\}; \quad 22) \{a, e, f, g\}; \quad 23) \{b, c, d, e, f, g\};$$

$$24) \{a, b, d, e, f\}.$$

1.53. а) не розбиття; б) розбиття; в) розбиття; г) розбиття; д) не розбиття.

Тема 2

$$2.1. \frac{n(n-3)}{2}.$$

$$2.2. 210.$$

$$2.3. 5355.$$

2.4. Якщо жодна пряма не проведена, то число частин дорівнює 1. Очевидно, для того, щоб число частин було максимальним, необхідно, щоб ніякі три прямі не перетинались в одній точці і ніякі дві прямі не були паралельні. Будемо проводити послідовно прямі, дотримуючись вказаних умов. Зауважимо, що після проведення кожної прямої число частин збільшується на 1 плюс число точок перетину, які з'являються. Тому після проведення n прямих число частин збільшиться на n плюс число точок перетину прямих, яке дорівнює $\frac{n(n-1)}{2}$.

$$\text{Таким чином, число частин дорівнює } 1 + n + \frac{n(n-1)}{2} = 1 + \frac{n(n+1)}{2}.$$

$$2.5. 120.$$

$$2.6. 840.$$

$$2.7. 120.$$

$$2.8. 153.$$

$$2.9. \text{ а) } 300; \text{ б) } 1080; \text{ в) } 81.$$

$$2.10. \text{ а) } 870; \text{ б) } 435.$$

$$2.11. \text{ а) } 60; \text{ б) } 10.$$

$$2.12. 576.$$

$$2.13. 4999680.$$

$$2.15. 5040.$$

$$2.16. 330.$$

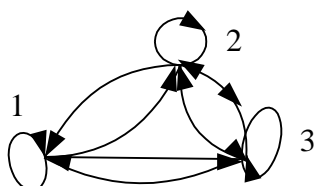
$$2.17. 945.$$

- 2.18. Позначимо число розбиттів $2n$ елементів на пари через R_{2n} . Оберемо будь-який елемент. За участю цього елемента пару можна утворити $(2n-1)$ способом. Кожного разу після утворення однієї пари буде залишатися $(2n-2)$ елементів, які можна розбити на пари R_{2n-2} способами. Тому $R_{2n} = (2n-1)R_{2n-2}$. Використовуючи цю рекурентну формулу, отримуємо
- $$R_{2n} = (2n-1)R_{2n-2} = (2n-1)(2n-3)R_{2n-4} = \dots = (2n-1)(2n-3)\dots 3 \cdot R_2 = \\ = (2n-1)(2n-3)\dots 3 \cdot 1 = (2n-1)!!$$
- 2.19. Позначимо 5 кольорів літерами a, b, c, d, f . Тоді будь-який прапор ідентифікується кортежем з трьох різних літр. Тому число прапорів дорівнює числу розміщень без повторень з 5 по 3, тобто $A_5^3 = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$
- 2.20. В цьому випадку різні прапори відрізняються один від одного лише порядком кольорів. Їх кількість дорівнює числу перестановок з 4 елементів, тобто $P_4 = 4! = 24$
- 2.21. Кожному мешканцю держави відповідає підмножина множини X . Ця підмножина складається з 32 елементів. Різні набори елементів ідентифікують різних людей. Загальна кількість підмножин 32-множини дорівнює 2^{32} . Значить, в державі не може бути більше, ніж 2^{32} мешканців.
- 2.22. 8
- 2.23. 648
- 2.24. $32 \cdot 10^4 + 32^2 \cdot 10^4 + 32^3 \cdot 10^4 = 33820 \cdot 10^4$
- 2.25. $\sum_{r=3}^{10} C_{10}^r$
- 2.26. $\frac{7!}{3!2!} = 420$
- 2.27. 30
- 2.29. 20
- 2.30. 294
- 2.31. $11 \cdot 10 > 12 \cdot 9$
- 2.32. а) 63 б) 756
- 2.33. 12500
- 2.34. 420
- 2.35. C_{16}^{10}
- 2.36. За о.п.к. $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$
- 2.37. $(n!)^2$
- 2.38. 5040
- 2.39. $C_{52}^{10} - [C_{48}^{10} + C_{48}^9 \cdot C_4^1]$
- 2.40. 4080
- 2.41. а) $C_4^1 \cdot C_{48}^9$ б) $C_{48}^8 \cdot C_4^2$
- 2.42. 10
- 2.43. За о.п.к. 1280

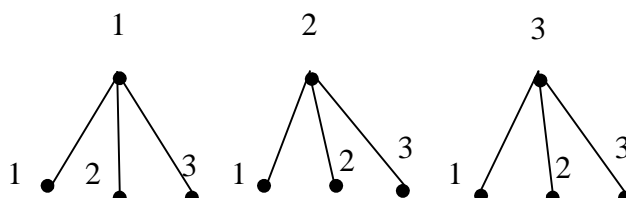
- 2.44. 125
 2.45. 303600
 2.46. 26820600
 2.47. За о.п.к. 768
 2.48. 30

Тема 3

3.3.



a)



б)

Потужність множини дорівнює 9.

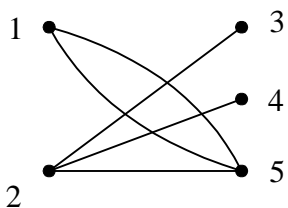
3.8. $\mu = 6$.

3.9. $n - 1$.

3.10 а) $\frac{n(n-1)}{2} - (n-1) = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$; е) $\frac{r(r-1)}{2}$.

3.11. 3.

3.19.

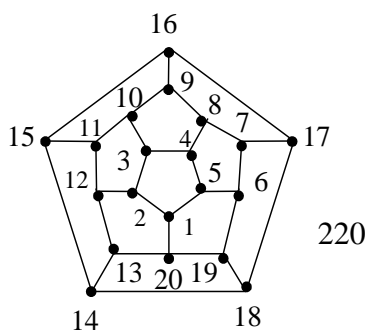


$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Висячих вершин 2. Так як $\mu = 1$, то достатньо віддалити міст 2–3, або 2–4 і граф стане незв'язним. Для отримання каркасу треба віддалити одне ребро, що зв'язує вершини 1 і 5.

3.22. а) 2); 3); 4); б) 1).

3.25.



Тема 4

4.2. а) $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 5 & -1 & 2 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} -2 & 4 & 4 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 0 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$; д) $\begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$.

4.3. $\begin{pmatrix} 96 & 12 & 8 \\ -18 & 54 & -8 \\ 51 & 85 & 111 \end{pmatrix}$.

4.4. $\begin{pmatrix} 9 & 6 & 6 \\ 6 & 9 & 6 \\ 6 & 6 & 9 \end{pmatrix}$.

4.6. а) 2; б) 2; в) 3; г) 0, якщо $a=0$; 2, якщо $a \neq 0$.

4.7. а) 9; б) 1; в) $-4xy$; г) 0; д) 60; е) $-2x$; ж) $-4a^3$; з) $n \cdot n!$; к) $\sin(\beta - \alpha)$; л) 0.

4.8. а) $2i3$; б) $x \in R$; в) $-2i0$; г) 3; д) -1 ; е) $\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$.

4.9. а) $\left(-\infty; 1\frac{3}{5}\right) \cup (8; \infty)$; б) $x < \log_2 3$; в) $\left(\frac{1}{3}; \frac{3}{4}\right)$.

4.10. $A_{14} = 5$; $A_{32} = -2$.

4.11. а) 38; б) 22.

4.12. а) (0;2); б) (-7;5); в) (1,5;-0,5); г) (-1;0;1); д) (2;-1;-3);
е) $x_1 = -19$; $x_2 = 26$; $x_3 = 11$; $x_4 = -5$; ж) $x_1 = 1$; $x_2 = 2$; $x_3 = -1$; $x_4 = 0$.

4.14. а) $x_1 = x_2 = 1$; $x_3 = 0$; б) $x_1 = 2$; $x_2 = 0$; $x_3 = -1$.

4.15. а) сумісна; б) несумісна; в) сумісна; г) несумісна.

4.16. а) $x_1 = -17t$, $x_2 = 16t$, $x_3 = 13t$, де $t \in R$; б) $x_1 = x_2 = x_3 = 0$;
в) $x_1 = 7t$, $x_2 = 8t$, $x_3 = 13t$, де $t \in R$.

4.17. а) $x_1 = 14t$, $x_2 = 21t$, $x_3 = x_4 = t$, де $t \in R$;

б) $x_1 = -10t + 10$, $x_2 = t$, $x_3 = -16t + 15$, $x_4 = 4 - 5t$ де $t \in R$;

в) $x_1 = 8x_3 - 7x_4$, $x_2 = -6x_3 + 5x_4$;

г) $x_1 = -1 + x_3 + x_4$, $x_2 = 3 - x_3 - x_4$.

4.18. при $t \neq -1$ і $t \neq -5$ система несумісна;

при $t = 5$ $x_1 = -\frac{9}{5}$; $x_2 = \frac{15a + 17}{5}$; $x_3 = a$, де $a \in R$;

при $t = -1$ $x_1 = -3$; $x_2 = 3a + 1$; $x_3 = a$, де $a \in R$.

4.19. $a = n - 1$, $a = -1$.

4.20. $X = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

4.21. при $t \neq 0$ система несумісна; при $t = 0$ $x_1 = (-5x_3 - 13x_4 - 3) : 2$;

$$x_2 = (-7x_3 - 19x_4 - 7) : 2.$$

4.22 якщо $t = -3$, то система несумісна;

$$\text{якщо } t \neq 1, t \neq -3, \text{ то } x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = \frac{1}{t+3};;$$

$$\text{якщо } t = 1, \text{ то } x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1.$$

4.23. якщо $(a+2)(a-1) \neq 0$, то $x_1 = x_2 = x_3 = 0$;

$$\text{якщо } a = -2, \text{ то } x_1 = x_2 = x_3;$$

$$\text{якщо } a = 1, \text{ то } x_1 + x_2 + x_3 = 0.$$

$$4.25. \begin{cases} x_2 = -x_1 + 12x_4 \\ x_3 = -x_1 + 7x_4, \quad x_1 = 8, x_2 = 4, x_3 = -1, x_4 = x_5 = 1. \\ x_5 = x_4 \end{cases}$$

Тема 5

$$5.2. \quad \overrightarrow{MA} = \frac{1}{2}(\vec{a} - \vec{b}); \overrightarrow{MB} = \frac{1}{2}(\vec{b} - \vec{a}).$$

$$5.3. \quad \overrightarrow{AB} = (-4; 2; -1); \overrightarrow{BA} = (4; -2; 1)$$

$$5.4. \quad |\vec{a}| = 4$$

$$5.5. \quad Z = \pm 3$$

$$5.6. \quad N(4; 1; 1)$$

$$5.7. \quad \left(\frac{12}{25}; -\frac{3}{5}; -\frac{16}{25}\right)$$

$$5.8. \quad 60^\circ$$

$$5.9. \quad M_1(\sqrt{3}; \sqrt{3}; \sqrt{3}) \text{ або } M_2(-\sqrt{3}; -\sqrt{3}; -\sqrt{3})$$

$$5.10. \quad |\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{129}; |\vec{a} - \vec{b}| = 7$$

$$5.11. \quad \text{а) } np_{OX}(\vec{a} + \vec{b}) = 1; np_{OY}(\vec{a} + \vec{b}) = -1; np_{OZ}(\vec{a} + \vec{b}) = 6$$

$$\text{б) } np_{OX}\left(-\frac{1}{2}\vec{b}\right) = 1; np_{OY}\left(-\frac{1}{2}\vec{b}\right) = -\frac{1}{2}; np_{OZ}\left(-\frac{1}{2}\vec{b}\right) = 0$$

$$\text{в) } np_{OX}(2\vec{a} + 3\vec{b}) = 0; np_{OY}(2\vec{a} + 3\vec{b}) = -1; np_{OZ}(2\vec{a} + 3\vec{b}) = 12$$

$$5.12. \quad |\vec{a}| = 70, \cos \alpha = \frac{2}{7}, \cos \beta = \frac{3}{7}, \cos \gamma = -\frac{6}{7}.$$

$$5.14. \quad m^2 + m + 1.$$

$$5.15. \quad \vec{d} = -48\vec{i} + 45\vec{j} - 36\vec{k}$$

$$5.16. \quad \vec{p} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$$

$$5.17. \quad \vec{c} = 2\vec{p} - 3\vec{q} + \vec{r}$$

$$5.18. \quad \text{а) } -6 \quad \text{б) } 13 \quad \text{в) } -61$$

- 5.19. $|\vec{a}| = |\vec{b}|$
- 5.20. $\cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{7}}$
- 5.21. а) 41; б) -200.
- 5.22. $\vec{b} = (-24; 32; 30)$
- 5.23. $np_{\vec{c}}(\vec{a} + \vec{b}) = -4$
- 5.24. $\frac{3\pi}{4}$
- 5.25. $S = 49$.
- 5.26. $|\vec{a} \times \vec{b}| = 16$
- 5.27. $S_{\triangle ABC} = 14$
- 5.28. а) $S = \frac{1}{2}\sqrt{110}$; б) $S = \frac{1}{2}\sqrt{17,875}$.
- 5.29. 24
- 5.30. Вказівка: показати, що мішаний добуток $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = 0$
- 5.31. $V = \frac{5}{6}$ Вказівка: $V_{OABC} = \frac{1}{6}|\vec{OA}\vec{OB}\vec{OC}|$
- 5.32. $H=11$. Вказівка: довжина висоти, проведеної з вершини D – це відстань від точки D до площини (ABC) .
- 5.33. $V = 24$.
- 5.37. $\vec{c} = \left\{ -\frac{5}{\sqrt{2}}; \frac{11}{\sqrt{2}}; -\frac{4}{\sqrt{2}} \right\}$.
- 5.38. $D_1(0; 8; 0), D_2(0; -7; 0)$.
- 5.39. $\vec{EF} = \frac{2\vec{OB} + 2\vec{OC} - \vec{OA}}{6}$.
- 5.40. $\pm (6\vec{i} - 9\vec{j} - 2\vec{k})$.
- 5.42. $A(-2; 2), B(-\frac{3}{2}; \frac{3\sqrt{3}}{2}), C(\sqrt{3}; 1)$.
- 5.43. 5.
- 5.44. а) $A_I(\rho; -\varphi)$; б) $A_I(\rho; \pi + \varphi)$; в) $A_I(\rho; \pi - \varphi)$.
- 5.45. Вказівка: використати теорему косинусів.

Тема 6

6.2. $A\left(2; -\frac{5}{3}\right); B\left(-\frac{7}{5}; \frac{43}{15}\right); C(2; 4)$

6.3. 1). $k = -\frac{5}{3}$; 2). $k = \frac{3}{5}$

6.4. 1). $2x+3y-7=0$; 2). $3x-2y-4=0$

6.5. $P_1(-2;-1)$

6.6. $4x-5y-2=0$

6.7. 1). $\varphi = 45^0$; 2). $\varphi = 45^0$

6.8. $\frac{x}{6} + \frac{y}{-4} = 1$

6.15 а) паралельна осі Oz ; б) паралельна площині Oxz ;
в) проходить через початок координат.

6.16 $x - y - 3z + 2 = 0$

6.17 $(x - x_1) + 4(y - y_1) + 7(z - z_1) = 0$

6.18 Вказівка: розглянути мішаний добуток трьох компланарних векторів.

6.19 а). так; б). ні.

6.20 а). так; б). ні.

6.21. $d = \frac{13}{\sqrt{29}}$.

6.22. $d = \frac{7\sqrt{5}}{3}$.

6.23. а). $x + y + z - 5 = 0$; б). $2x + 2y + z - 6 = 0$.

6.24. $7x - 11y - z - 15 = 0$.

6.25. $M(5;5;5)$.

6.26. $4x - 3y + 12z - 169 = 0$.

6.27. $5y + 4z = 0; 5x - 3z = 0; 4x + 3y = 0$.

6.28. $6x + 5y - 7z - 27 = 0$.

6.29. $\frac{x}{2} + \frac{y}{2} + \frac{z}{\pm\sqrt{2}} = 1$.

6.30. 60^0 .

6.31. $x + 7y + 10z = 0$.

6.32. $x - z = 0$.

6.33. $\arcsin \frac{5}{6}$.

6.34. $\frac{x}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z}{4}$.

6.35. $n = 1; M(2; -3; 1)$.

6.36. $\frac{x-3}{0} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z+1}{1}$.

6.37. а). $N_I(3;3;-3)$; б). $N_I(\frac{9}{7}; -\frac{4}{7}; -\frac{22}{7})$.

6.38. $\frac{x-5}{2} = \frac{y-3}{5} = \frac{z-4}{-8}$.

$$6.39. \frac{x-1}{5} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{-7}.$$

$$6.40. 5y + 5z - 64 = 0, x = 0 \quad (yOz); 5x + 5z - 2 = 0, y = 0 \quad (xOz); \\ 5x - 5y + 62 = 0, z = 0 \quad (xOy).$$

$$6.41. \cos \alpha = \frac{6}{7}; \cos \beta = \frac{3}{7}; \cos \gamma = \frac{2}{7}.$$

$$6.42. \frac{x-5}{1} = \frac{y+1}{3} = \frac{z+3}{-11}.$$

$$6.43. M(0; 7; -2).$$

$$6.44. \begin{cases} x = -3t - 1 \\ y = 6t + 1 \\ z = t + 2 \end{cases}.$$

$$6.45. \frac{5\sqrt{30}}{6}.$$

$$6.46. \cos \varphi = \frac{20}{21}.$$

$$6.47. \frac{x}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-1}{0}.$$

$$6.48. \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z-1}{2}.$$

$$6.49. \frac{x}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-1}{-1}.$$

$$6.50. x - 5y - 2z + 11 = 0.$$

$$6.51. 90^0.$$

$$6.52. \frac{x}{-10} = \frac{y-3.4}{13} = \frac{z-5.2}{19}.$$

$$6.53 \text{ а). } x^2 + y^2 = 9; \text{ б). } (x-2)^2 + (y+3)^2 = 49.$$

$$6.54 \text{ а). } C(5; -2), r = 5; \text{ б). } C(-2; 0), r = 8; \text{ в). } C(1; -2), r = 5;$$

$$6.55 \text{ а). } \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1; \text{ б). } \frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{84} = 1; \text{ в). } \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1.$$

$$6.56. \text{ а). } a = 1, \quad b = 2; \text{ б). } a = 5, \quad b = 1; \text{ в). } a = \frac{5}{2}; \quad b = \frac{5}{3}; \text{ г). } a = \frac{1}{3}; \quad b = \frac{1}{5};$$

$$\text{ д). } a = 1, \quad b = \frac{1}{2}; \text{ ж). } a = \frac{1}{3}; \quad b = 1.$$

$$6.57. \text{ а). } a = 5, \quad b = 3; \text{ б). } F_1(-4; 0), \quad F_2(4; 0); \text{ в). } \varepsilon = \frac{4}{5}; \text{ г). } x = \pm \frac{25}{4}.$$

$$6.58. \text{ а). } \frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1; \text{ б). } \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1; \text{ в). } \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1; \text{ г). } \frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1.$$

$$6.59. \text{ а). } 2a = 6, \quad 2b = 4; \text{ б). } 2a = 8, \quad 2b = 2; \text{ в). } 2a = 8, \quad 2b = 4; \text{ г). } 2a = 2b = 2;$$

д). $2a = \frac{2}{5}$; $2b = \frac{1}{2}$; ж). $2a = 5$; $2b = \frac{10}{3}$.

6.60. Вказівка: виділити повні квадрати відносно x та y в рівняннях і звести рівняння до канонічного вигляду.

6.61. а). $y^2 = 6x$; б). $y^2 = -x$; в). $x^2 = \frac{y}{2}$; г). $x^2 = -6y$.

6.63. 1). півколо верхньої півплощини з центром $O(0;0)$ та $R = 3$;

2). півколо нижньої півплощини з центром $O(0;0)$ та $R = 5$;

3). півколо з центром $C(-2;0)$ та $R = 3$, розміщене ліворуч відносно прямої $x + 2 = 0$;

4). півколо з центром $C(-2;-3)$ та $R = 5$, розміщене під прямою $y + 3 = 0$;

5). половина еліпса $\frac{(x-3)^2}{25} + \frac{(y+7)^2}{4} = 1$, розміщена над прямою $y + 7 = 0$;

6). половина еліпса $\frac{x^2}{16} + \frac{(y+3)^2}{4} = 1$, розміщена в лівій півплощині;

7). половина еліпса $\frac{(x+5)^2}{4} + \frac{(y-1)^2}{9} = 1$, розміщена праворуч від прямої $x + 5 = 0$;

8). половина еліпса $\frac{(x+3)^2}{9} + \frac{(y-1)^2}{16} = 1$, розміщена під прямою $y - 1 = 0$;

9). частина гіперболи $\frac{(x-2)^2}{9} - \frac{(y+1)^2}{4} = 1$, розміщеної над прямою $y + 1 = 0$;

10). вітка гіперболи $\frac{(x-3)^2}{4} - \frac{(y-7)^2}{9} = -1$, розміщеної під прямою $y - 7 = 0$;

11). вітка гіперболи $\frac{(x-9)^2}{16} - \frac{(y+2)^2}{4} = 1$, розміщеної ліворуч від прямої $x - 9 = 0$;

12). частина гіперболи $\frac{(x-5)^2}{9} - \frac{(y+2)^2}{16} = -1$, розміщеної ліворуч від прямої $x - 5 = 0$;

13). частина параболи $y^2 = -18x$, розміщена у III чверті;

14). частина параболи $x^2 = 5y$, розміщена у I чверті;

15). частина параболи $y^2 = -x$, розміщена у II чверті;

16). частина параболи $x^2 = 16y$, розміщена у IV чверті.

6.64. 1). пряма $y = 2x$;

2) півпряма $y = x (y \geq 0)$;

4) еліпс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$;

- 5) відрізок прямої AB , де $A(1;0)$ і $B(0;1)$;
- б) астроида $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$.
- 6.66. а). $(x-2)^2 + (y+3)^2 + (z-3)^2 = 36$;
 б). $x^2 + y^2 + z^2 = 49$;
 в). $(x-1)^2 + (y-4)^2 + (z+7)^2 = 121$.
- 6.67. Вказівка:
 а). центр $C(3;-4;-1)$ та $R=4$;
 б). центр $C(-1;2;0)$ та $R=3$;
 в). сфера не існує.
- 6.68. Вказівка:
 а). круговий циліндр з віссю, що паралельна осі Oy ;
 б). гіперболічний циліндр з віссю, що паралельна осі Oy ;
 в). гіперболічний циліндр з віссю, що паралельна осі Ox , і напрямною
 $\frac{y^2}{25} - \frac{z^2}{16} = 1, \quad x=0$;
 г). параболічний циліндр з віссю, що паралельна осі Oy , і напрямною
 $(z+2)^2 = 2(x-1), \quad y=0$;
 д). параболічний циліндр з віссю, що паралельна осі Ox , і напрямною
 $y^2 = -6z, \quad x=0$;
 ж). круговий циліндр з віссю, що паралельна осі Oz , і напрямною
 $x^2 + (y-2)^2 = 4, \quad z=0$.
- 6.69. а). $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{4} = 1$; б). $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{25} - \frac{z^2}{16} = 1$;
 в). $x^2 + y^2 - 9z^2 = 0$; г). $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ і $x^2 - y^2 + z^2 = -1$.
- 6.70. а)., б)., в)., г). еліптичний параболоїд;
 д). двопорожнинний гіперболоїд;
 ж). однопорожнинний гіперболоїд.
- 6.71. а). однопорожнинний гіперболоїд;
 б). еліпсоїд;
 в). однопорожнинний гіперболоїд;
 г). еліптичний параболоїд.

Тема 7

- 7.1. $f(0)=1; f(3)=10; f(-3)=28$;
 7.2. $f(-5)=-3; f(-2)=0; f(0)=4; f(3)=1$;
 7.3. $f(-1)=2; f(2)=5; f(0)=1; f(3)=10; f(x)=x^2+1$;

7.5. 1). ні; 2). так.

7.6. 1). $\pm\sqrt{\frac{5}{2}}$; 2). -1 ; 3). 2 ; 4). $-\frac{3}{4}$; 5). -8 ; 6). 1 ; 7). 0 ; 1 ; 2 ; 8). $\frac{\pi}{2}n, n \in \mathbb{Z}$.

7.7. а). $f(-1) = -1; f(0) = -\frac{1}{2}; f(1) = 0$; б). $f(0) = -1; f(1) = -\frac{1}{4}$;

в). $f(-1) = 0,4; f(0) = 0,3; f(1) = 0$; г). $f(0) = 0; f(1) = 1$;

д). $f(-1) = -1; f(0) = 0; f(1) = 1$;

ж). $f(-1) = -2; f(0) = -1; f(1) = 1$.

7.8. а). $D: (-\infty; -2) \cup (-2; 7) \cup (7; \infty)$;

б). $D: (-\infty; -4) \cup (-4; 4) \cup (4; \infty)$;

в). $D: (-\infty; 0]$;

г). $D: \emptyset$;

д). $D: [-2; 1]$;

ж). $D: (-\infty; 0) \cup (0; \infty)$;

з). $D: (-\infty; 0) \cup (2,5; \infty)$;

к). $D: [1; 3) \cup (4; \infty)$;

л). $x \in \mathbb{R}$, крім $\pi, n \in \mathbb{Z}$;

м). $x \in \mathbb{R}$;

н). $D: (-\frac{1}{2}; \infty)$;

о). $D: [\frac{3-\sqrt{5}}{2}; \frac{3+\sqrt{5}}{2}]$;

п). $D: [-5; 7] \setminus \{-\pi; 0; \pi; 2\pi\}$.

7.9. а). $V = 4\pi h$ (рис. 7.7); б). $V = 5\pi r^2$ (рис. 7.8); в). $h = \frac{1}{2\pi r^2}$ (рис. 7.9).

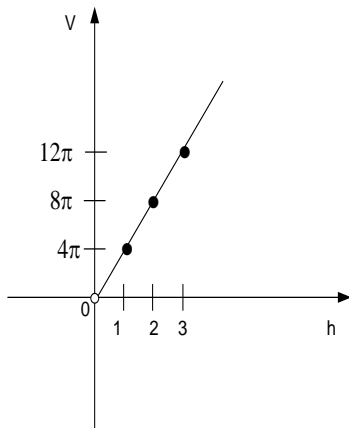


Рис. 7.7

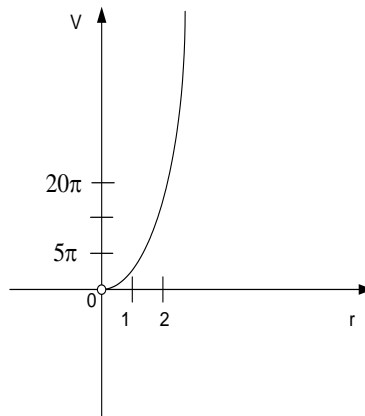


Рис. 7.8

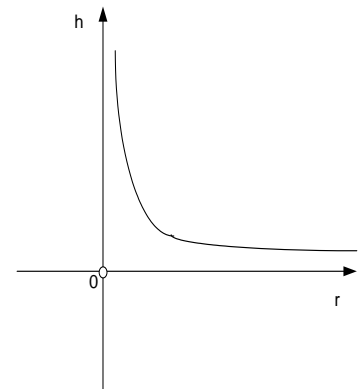


Рис. 7.9

7.10. а). функція стаціонарна; б). функція зростає на \mathbb{R} ;

в). зростає на $(-1; \infty)$; спадає на $(-\infty; -1)$;

г). зростає на \mathbb{R} ; д) зростає на $(-\infty; -\frac{1}{2})$, спадає на $(-\frac{1}{2}; \infty)$;

ж). зростає на $(0; \infty)$; спадає на $(-\infty; 0)$;

з). зростає на $(-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4})$; к). зростає на $(-\infty; 0)$ і $(0; \infty)$.

7.11. 1). рис. 7.10; 2). рис. 7.11; 3). рис. 7.12.

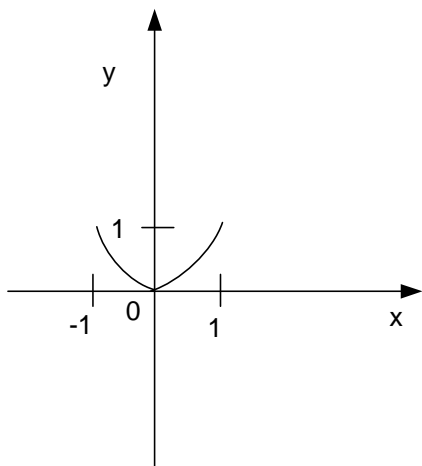


Рис. 7.10

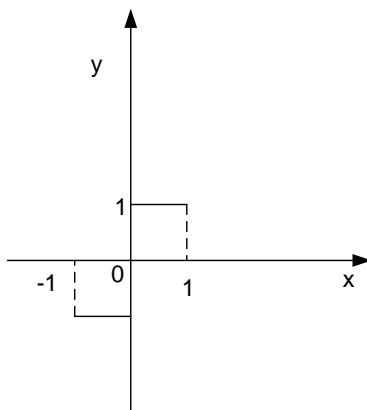


Рис. 7.11

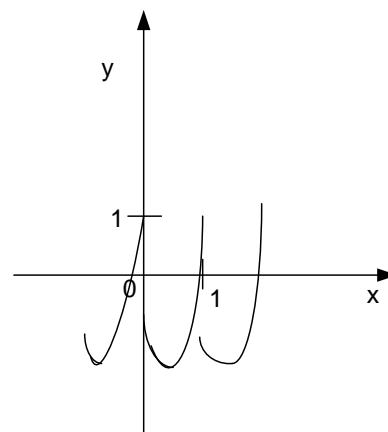


Рис. 7.12

7.12. а) $T = \pi$; б) $T = \pi$; в) $T = 4\pi$; г) $T = \frac{\pi}{2}$; д) $T = \frac{\pi}{2}$; е) $T = 70\pi$.

7.13. к). рис. 7.13; л). рис. 7.14; м). рис. 7.15; н). рис. 7.16;
о). рис. 7.17; п). рис. 7.18; р). рис. 7.19; с). рис. 7.20.

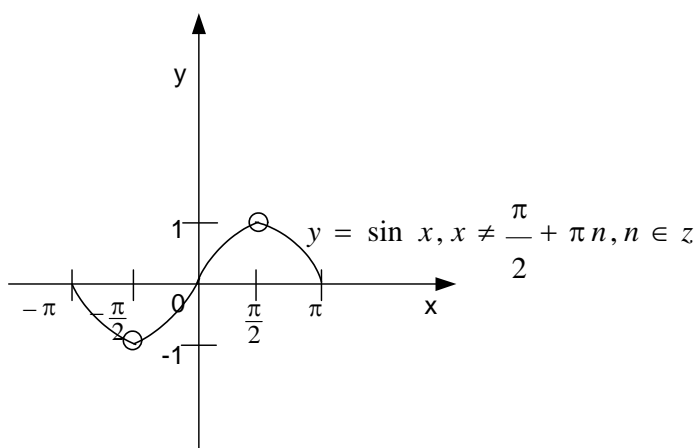


Рис. 7.13

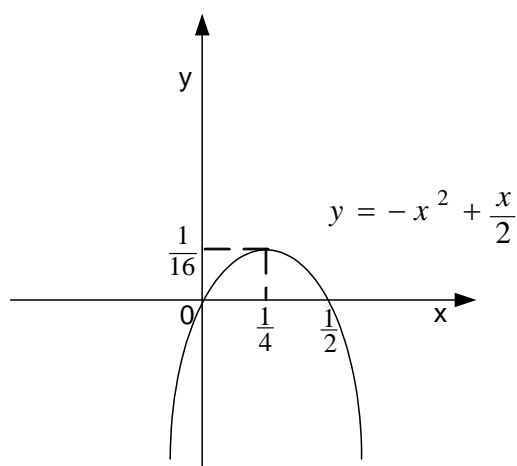


Рис. 7.14

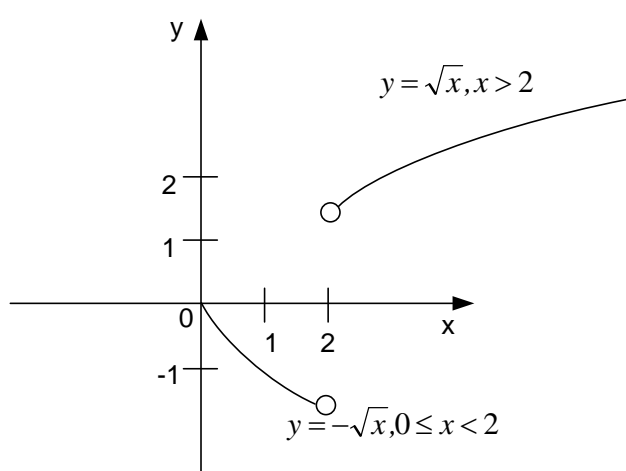


Рис. 7.15

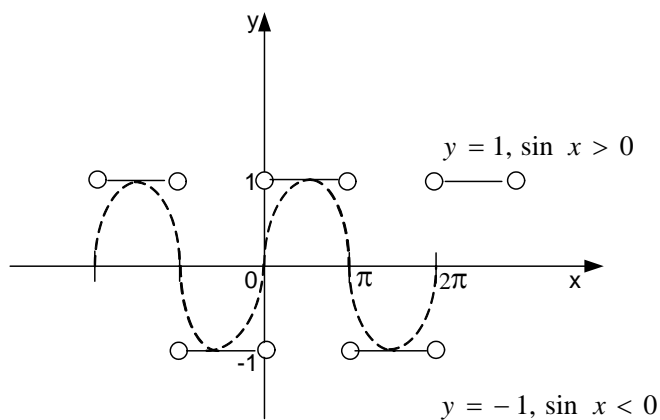


Рис. 7.16

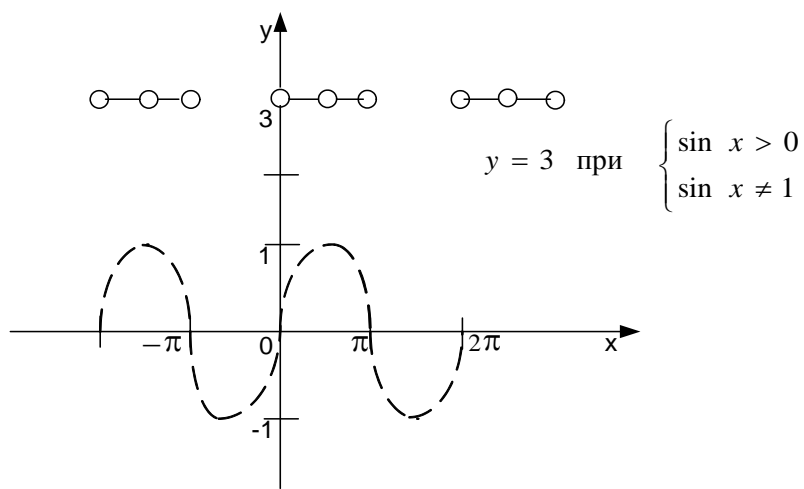


Рис. 7.17

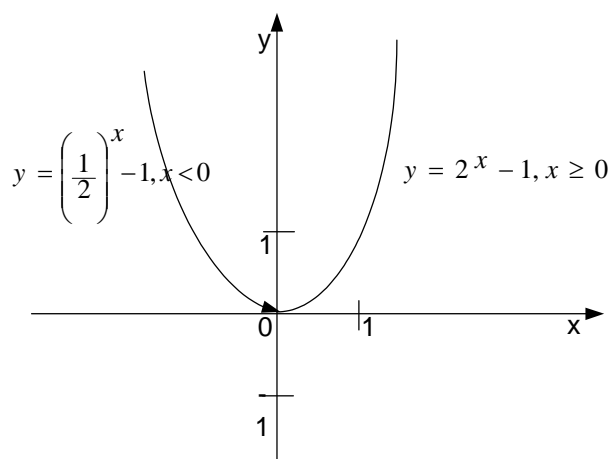


Рис. 7.18

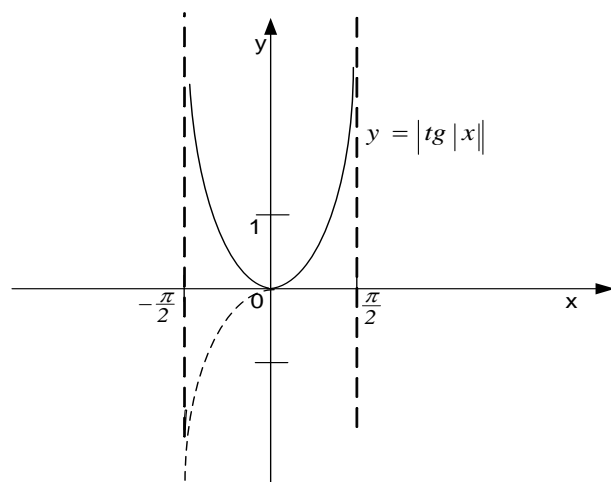


Рис. 7.19

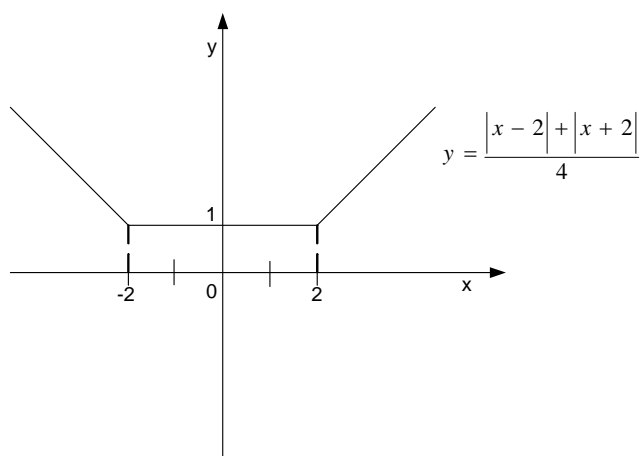


Рис. 7.20

Тема 8

- 8.1. 1) $-\frac{1}{5}$; 2) 2; 3) 2; 4) $\frac{1}{32}$; 5) 0; 6) $-\infty$.
- 8.2. 1) 12; 2) $-\frac{1}{6}$; 3) $\frac{\sqrt{11}}{286}$; 4) $-\sqrt{3}$; 5) $\frac{2}{3}$; 6) $-\frac{5}{12}$.
- 8.3. 1) -1; 2) $-\frac{1}{2}$; 3) $-\frac{3}{4}$; 4) $\frac{7}{8}$; 5) ∞ ; 6) $\frac{10}{9}$.
- 8.4. 1) $\sqrt{2}$; 2) 2; 3) $\frac{5}{6}$; 4) 1; 5) -10; 6) $-\frac{\sqrt{2}}{8}$; 7) $-\infty$; 8) $\frac{\sqrt{5}}{5}$; 9) -3; 10) ∞ .
- 8.5. 1) 3; 2) 1; 3) $-\frac{1}{2}$; 4) $-\infty$; 5) $\frac{3}{8}$; 6) ∞ .
- 8.6. 1) 0; 2) $\frac{13}{4}$; 3) 0; 4) $\frac{1}{2}$, якщо $x \rightarrow +\infty$ і $-\infty$, якщо $x \rightarrow -\infty$; 5) ± 2 ; 6) $\frac{a+b}{2}$, якщо $x \rightarrow +\infty$ і ∞ , якщо $x \rightarrow -\infty$.
- 8.7. 1) e^{-4} ; 2) e^{-2} ; 3) 0; 4) 3; 5) 15; 6) e ; 7) 1; 8) $e^{-\frac{1}{2}}$; 9) $e^{\lg 2}$; 10) e^{a-b} .
- 8.8. 1) $\frac{1}{3}$; 2) 0; ∞ .
- 8.9. 1) $\frac{1}{5}$ 2) ∞ . 3) 1; 4) $\frac{1}{12}$; 5) $\frac{1}{2}$; 6) 0; 7) $-\frac{1}{2}$, вказівка: скористатися $\arctg b - \arctg a = \arctg \frac{b-a}{1+ab}$; 8) $\frac{1}{2}$.
- 8.10. 1) 1, якщо $x \rightarrow +0$ і -1 , якщо $x \rightarrow -0$; 2) $+\infty$; 3) не існує; 4) $\ln a$; вказівка: покласти $x = \frac{1}{t}$, де $x \rightarrow 0$; 5) 1, вказівка: $x^x = e^{x \ln x}$; 6) \sqrt{e} ; 7) 4; 8) $-\frac{3}{4}$; 9) $-\frac{1}{2}$; 10) $\ln 2$.
- 8.11. 1) $\alpha = O(\beta)$; 2) $\alpha \sim \beta$; 3) $\alpha = O(\beta)$; 4) $\alpha \sim \beta$; 5) $\alpha \sim \beta$; 6) $\beta(x) = O(\alpha(x))$.
- 8.12. 1) 1; 2) 3; 3) $\frac{2}{\beta}$; 4) 1; 5) ∞ ; 6) $\frac{1}{4}$; 7) $-\frac{1}{4}$; 8) $+\infty$; 9) $\frac{9}{25}$; 10) $\frac{\ln 5 \cdot \ln 4}{\ln 3 \cdot \ln 6}$.
- 8.15. $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, вказівка: покласти $\arccos x = y$.

Тема 9

- 9.2. Використати умову неперервності функції.
- 9.3. Показати, що не виконуються умови неперервності в точці x_0 .
- 9.4. а) в точці $x=0$ розрив II роду; в точці $x=2$ розрив I роду з $\delta=10$; б) в точці $x=-2$ розрив I роду з $\delta=2$; в) в точках $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$ розрив II роду; г) в

точці $x=0$ розрив можна усунути, в точках $x=\pi, n \in \mathbb{Z}$ (крім $n=0$) – розрив II роду.

9.5. а) ні; б) ні; в) так, $a=-1$.

9.6. а) $x=1$ - точка розриву II роду; б) $x=-1; 3$ - точки розриву II роду; в) $x=\pm 1$ - точки розриву II роду; г) $x=0$ - точка розриву, який можна усунути; д) $x=-2$ - точка розриву, який можна усунути; $x=1,5$ - точка розриву II роду; ж) $x=\pi+2\pi n, n \in \mathbb{Z}$ - точки розриву II роду; є) $x=\frac{\pi}{2}(2k+1)$, де $k \in \mathbb{Z}$ - точки розриву I роду.

9.8. а) $x \in (-\infty; -1) \cup (2; 5)$; б) $x > -1$; в) $x \in (-\infty; -3) \cup (-2; \infty)$; г) $x \in [0; 1) \cup (4; \infty)$.

9.9. При $x=0$.

Тема 10

$$10.2. 1) \frac{2}{3}\sqrt{x}; 2) -2\sqrt{2}x^{\sqrt{2}-1}; 3) \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{6}{x^3}; 4) \frac{3}{4\sqrt[4]{x}}; 5) 7x^{\frac{4}{3}}; 6) \frac{3}{2\sqrt[4]{2x}};$$

$$7) -\frac{3}{2\sqrt[4]{2x^5}}; 9) \frac{-2x^5+3x^4-3x^2+14x-7}{x^2(1-x)^2}; 11) -\frac{2\ln 3}{x^3}; 12) \frac{2}{3}x + \frac{6}{x^3}.$$

$$10.3. 1) -4x(1,5x^2); 2) 2x(2x^2+1); 3) \frac{(x-3)(x+1)}{(x-1)^2}.$$

$$10.4. 1) \cos x - \frac{1}{\sin^2 x}; 2) 5(\cos x - x \sin x); 3) \operatorname{tg} x + \frac{x+\sqrt{2}}{\cos^2 x}; 4) -\frac{x \sin x + \cos x}{x^2};$$

$$5) x^2(3 \cos x - x \sin x); 10) 0.$$

$$10.5. 1) 1 + \ln x; 2) \frac{1 - \ln x}{x}; 3) e^x(\log_2 x + \frac{1}{x \ln 2}); 4) -\frac{\ln 2}{x \ln^2 x}; 5) \frac{e^x \cdot (1 + 2x + 2\sqrt{2x})}{2\sqrt{x}};$$

$$6) x \cdot e^x; 7) 2^{\frac{x}{2}-1} \cdot \ln 2; 8) \frac{\sqrt{x}(\ln x + 2 + \pi) + 8}{2x}; 9) \frac{x^3(1 + \ln x^3 - 3e) + 4}{x(x^2 + 4)^2};$$

$$11) \frac{2^{\ln x} \cdot \ln 2}{x}; 12) \frac{x(\ln x + 1) + 10}{x}; 13) \frac{2 \ln x}{x}; 15) 2^{2 \ln x}(1 + \ln x) \cdot \ln 2.$$

$$10.6. 1) \frac{2x}{3\sqrt[3]{(1+x^2)^2}}; 2) \frac{6(x+1)^{11}(x-1)}{x^7}; 4) \frac{-3 \sin 6x}{\sin 5}; 5) \frac{2x}{\cos^2 x^2} - \frac{2 \sin^2 2x}{\cos^4 2x};$$

$$6) \frac{-\cos \frac{1}{x}}{x^2}; 9) -\sin 2x \cdot \cos \cos 2x; 12) \frac{1}{2\sqrt{x}}; 13) -\frac{2}{(x+2)(x+3)};$$

$$14) 3 \cdot 2^{\sin^2 3x} \ln 2 \cdot \sin 6x; 15) \frac{1}{(x+1) \ln(x+1) \cdot \ln \ln(x+1)};$$

$$16) \frac{2 \sin x}{(1 + \operatorname{tg}^4 x) \cdot \cos^3 x}; \quad 17) \operatorname{tg}^3 x; \quad 20) \frac{2e^{\ln^2 x} \cdot \ln x}{x}.$$

$$10.7. 1) x^x (1 + \ln x); \quad 4) x^{\sin x} \left(\frac{\sin x}{x} + \cos x \cdot \ln x \right);$$

$$5) (\cos x)^{\operatorname{arctg} x} \left(\frac{\ln \cos x}{1 + x^2} - \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{arctg} x \right);$$

$$6) (1 + 2x)(1 + 3x) + 2(1 + x)(1 + 3x) + 3(x + 1)(1 + 2x);$$

$$7) -\frac{(x + 2)(5x^2 + 19x + 20)}{(x + 1)^4 (x + 3)^5}; \quad 8) \frac{3x^2 + 5}{3(x^2 + 1)} \sqrt[3]{\frac{x^2}{x^2 + 1}};$$

$$9) (\operatorname{arctg} x)^x \cdot \left[\ln \operatorname{arctg} x + \frac{x}{(1 + x^2) \operatorname{arctg} x} \right]; \quad 10) x^{x^x} \cdot x^x \left(\frac{1}{x} + \ln x + \ln^2 x \right).$$

$$10.8. 1) -\frac{2x + y}{x + 2y}; \quad 2) \frac{e^{-x} + y}{e^y + x}; \quad 3) \frac{e^x \sin y + e^{-y} \sin x}{e^x \cos y + e^{-y} \cos x}; \quad 4) \frac{1}{y^2} + 1.$$

$$10.9. 1) -1; \quad 2) -\frac{1}{4 \sin^3 t}; \quad 3) \frac{3}{4e^t}; \quad 4) \frac{t(2 - t^2)}{1 - 2t^3}; \quad 5) \frac{1}{2(t + 1)^2}.$$

$$10.10. 1) -\pi^2 \ln 2; \quad 4) 1. \quad 5) \frac{1}{3}; \quad 6) 1 - e^{-1}; \quad 7) e(e - 1); \quad 8) \pm \frac{4}{3}; \quad 10) 2; \quad 11) -\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

$$10.11. 1) 2; \quad 3) -2 \cos 2x; \quad 5) \frac{e^{\sqrt{x}}}{4x} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}} \right); \quad 7) \frac{2a^3 xy}{(ax - y^2)^3}; \quad 8) -\frac{2(y^2 + 1)}{y^5}$$

$$9) \frac{(e^y - e^x)(e^{x+1} - 1)}{(e^{y+1})^3}; \quad 10) \frac{4(x + y)}{(x + y + 1)^3}; \quad 11) \frac{12y^5(xy^2 + 1)}{(3xy^2 + 2)^3};$$

$$12) -\frac{b}{a^2} \cos \operatorname{ec}^2 t; \quad 13) \frac{\sec^3 t}{t}; \quad 14) \frac{3}{4e^t}.$$

$$10.12. 1) x - y + 1 = 0; \quad 2) x - 4y + 4 = 0, \quad 4x + y - 18 = 0; \quad 3) y - 5 = 0, \quad x + 2 = 0;$$

$$4) x - 1 = 0, \quad y = 0; \quad 5) y = 2x, \quad y = -\frac{1}{2}x; \quad 6) x - 2y - 1 = 0, \quad 2x + y - 2 = 0;$$

$$7) 6x + 2y - \pi = 0, \quad 2x - 6y + 3\pi = 0;$$

$$8) \text{ дотичні: } y = 3 - x \text{ і } y = x - 1;$$

$$9) \text{ дотична і нормаль в точці } (-1; 0): x - y + 1 = 0 \text{ і } x + y + 1 = 0 \text{ в точці } (3; 0): x + y - 3 = 0 \text{ і } x - y - 3 = 0.$$

10) на колі заданій умові відповідають точки $(3;4)$ і $(-3;-4)$;

11) а) $y = x + \frac{(4-\pi)a}{2}$; б) дотична $y = \sqrt{3}x + a\left(2 - \frac{\pi}{\sqrt{3}}\right)$;

нормаль $y = -\frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{a\pi}{3\sqrt{3}}$; 12) $x + y = 4$, $x - y = 2$; 13) $M(2,1)$ при $t = 1$;

14) $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{4\sqrt{3}}{13}$.

10.13. 1) $y_{\min} = 110$; $y_{\max} = 174$; 2) $y_{\min} = +2$; $y_{\max} = -2$; 3) $y_{\min} = -\sqrt[3]{+2}$; $y_{\max} = \sqrt[3]{2}$.

10.14. 1) функція опукла на $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ і вгнута на $(-\infty, -\frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, +\infty)$;

б) функція опукла на $(-\infty, 0)$ і вгнута на $(0, +\infty)$.

10.15. 2) вертикальні асимптоти $x = \pm 2$, горизонтальна асимптота $y = 0$, точок екстремума нема, точок перегику нема;

3) горизонтальна асимптота $y = 0$, $x = 3$ - точка максимуму, точки перегику: $x_1 = 0$, $x_2 \approx 1,27$ і $x_3 \approx 4,73$;

4) асимптот нема, $x = e^{-1}$ - точка мінімуму, точок перегику нема;

5) похила асимптота $y = -x$, точок екстремуму нема, точки перегику $x_1 = 0$, $x_2 = 1$.

10.16. 1) $\frac{e^x - x}{x \cdot e^x} dx$; 2) $-\frac{e^x}{\sqrt{1 - e^{2x}}} dx$; 4) $9\sqrt{x} \ln x dx$.

10.17. 1) використовується формула $\sqrt[3]{x + \Delta x} \approx \sqrt[3]{x} + \frac{\Delta x}{3\sqrt[3]{x^2}}$ і $\sqrt[3]{65} \approx 4,02$; 2) 0,486.

10.18. 1) $\frac{10}{7}$; 2) 1; 3) $\frac{6}{7}$; 4) $-\frac{1}{2}$; 5) $\frac{1}{2}$.

Тема 11

11.2. 1) $x(7-x) + c$; 2) $x^2(1-x) + c$; 3) $\frac{x^2}{2} + \ln|x| + c$;

4) $-2 \cos x + \frac{1}{3} \sin 3x + c$; 5) $\frac{\sqrt{8x^3}}{3} + c$.

11.3. $x^4 - x^3 + 3$.

11.4. 1) $-\frac{1}{3}(e^{-3x} + 5)$; 2) $\frac{1}{\ln 7}(4 \cdot 7^{x/4} - 195)$; 3) $-\frac{1}{3}(\operatorname{ctg} 3x + 2)$.

11.5. 1) $-6x^{\frac{1}{3}} + 18x^{\frac{1}{6}} + 5\ln|x| + c$; 2) $5\sin x - x^3 + \ln|x| + c$; 3) $3e^x + \sin x + c$;

- 4) $\frac{x^2}{2} - x + c$; 5) $\frac{1}{2}\sqrt{x} + c$; 6) $\sin x - \cos x + c$;
 7) $-(\operatorname{ctgx} + \operatorname{tgx}) + c$; 8) $x - \cos x + c$; 9) $\frac{1}{2}\operatorname{tgx} + c$;
 10) $\sin x - x + c$; 11) $\frac{a^x}{\ln a} - \frac{2}{\sqrt{x}} + c$; 12) $2(x - \operatorname{arctgx}) + c$;
 13) $\frac{x^2}{2} + 3x + c$; 14) $\frac{1}{\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{7}} + c$; 15) $\frac{1}{2\sqrt{10}} \ln \left| \frac{x - \sqrt{10}}{x + \sqrt{10}} \right| + c$;
 16) $\ln |x + \sqrt{4 + x^2}| + c$; 17) $\arcsin \frac{x}{2\sqrt{2}} + c$; 18) $\arcsin \frac{x}{\sqrt{2}} - \ln(x + \sqrt{x^2 + 2}) + c$;
 19) $\operatorname{tgx} - x + c$. Вказівка: покласти $\operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x - 1$; 20) $-\operatorname{ctgx} - x + c$;
 21) $\frac{(3e)^x}{\ln 3 + 1} + c$.

- 11.6. 1) $\frac{1}{4} \ln |4x + 1| + c$; 2) $-4\sqrt{1 - \frac{x}{2}} + c$; 3) $-2 \cos \left(\frac{2x - 1}{4} \right) + c$;
 4) $4e^{\frac{x-1}{2}} + c$; 5) $\frac{1}{2} \operatorname{arctg} 2x + c$; 6) $-\frac{1}{7} \operatorname{tg}(3 - x) + c$;
 7) $x - \frac{1}{4} \cos 4x + c$; 8) $\frac{3}{8}x + \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{32} \sin 4x + c$;
 10) $\frac{1}{2} \ln^2 x + c$; 11) $\frac{1}{2} \ln(x^2 + 9) + c$; 12) $\frac{1}{9} \sqrt{(3y^2 + 1)^3} + c$;
 13) $-\frac{1}{2} e^{-x^2} + c$; 14) $\frac{1}{10(1 - 5x^3)^2} + c$; 15) $\frac{2}{3} \sqrt{\sin^3 x} + c$;
 16) $-3 \sqrt[3]{\cos x} + c$; 17) $\frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tgx} + c$; 18) $e^{\operatorname{tgx}} + c$;
 19) $4 \cos x \left(\frac{\cos^2 x}{3} - 1 \right) + c$; 20) $\ln \left| \frac{1}{\sqrt[3]{2 - 3e^x}} \right| + c$;
 21) $\frac{2}{3} \sqrt{\ln^3 y} + c$; 22) $\ln |x| \left(\frac{2}{3} \ln^2 x + 3 \right) + c$; 24) $\frac{1}{3}x - \frac{2}{9} \ln |3x + 2| + c$;
 25) $\frac{2}{3} \sqrt{(\arcsin x)^3} + c$; 26) $\frac{3}{8} \sqrt[3]{(x^4 + 1)^2} + c$; 27) $2e^{\sqrt{x}} + c$;
 28) $\frac{2}{3} \sqrt{\ln^3 x} - 6 \sqrt{\ln x} + c$; 29) $\frac{1}{3} \ln |x^3 + \sqrt{x^6 - 2}| + c$;
 30) $2\sqrt{3 + \sin x} + c$; 31) $\frac{2}{3} \sqrt{\operatorname{arctg}^3 e^x} + c$.

- 11.7. 1) $\frac{x^3}{3} \left(\ln x - \frac{1}{3} \right) + c$; 2) $e^x(x-1) + c$; 3) $x(\ln x - 1) + c$;
 4) $x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + c$; 5) $\frac{1}{2} [(x^2+1) \operatorname{arctg} x] + c$;
 6) $(x+1) \operatorname{arctg} \sqrt{x} - \sqrt{x} + c$; 8) $\frac{x^2}{4} + \frac{1}{4} x \sin 2x + \frac{1}{8} \cos 2x + c$;
 10) $x - \sqrt{1-x^2} \arcsin x + c$; 11) $\frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) + c$;
 12) $\frac{x}{2} \sqrt{1+x^2} + \frac{1}{2} \ln |x + \sqrt{1+x^2}| + c$; 13) $\frac{x}{2} [\sin(\ln x) - \cos(\ln x)] + c$.
- 11.8. 1) $\frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x-1}{2} + c$; 2) $\frac{1}{5} \operatorname{arctg} \frac{x+2}{5} + c$; 3) $\frac{1}{\sqrt{5}} \ln \left| \frac{2x+3-\sqrt{5}}{2x+3+\sqrt{5}} \right| + c$;
 4) $\ln |3x^2 - 7x + 11| + c$; 5) $\frac{2}{3} \ln(3x-1) + \frac{1}{2} \ln(2x+1) + c$;
 6) $2 \ln(x^2+5) - \sqrt{5} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{5}} + c$; 7) $\ln(x+1+\sqrt{x^2+2x+3}) + c$;
 8) $\frac{1}{2} \arcsin \frac{8x+3}{\sqrt{41}} + c$; 9) $\frac{1}{\sqrt{3}} \ln |3x-1+\sqrt{9x^2-6x+3}| + c$;
 10) $\arcsin \frac{x+2}{3} + c$; 11) $\frac{1}{4} \sqrt{4x^2+4x+3} + \frac{5}{4} \ln |2x+1+\sqrt{4x^2+4x+3}| + c$;
 12) $-\frac{1}{11} \sqrt{3+66x-11x^2} + c$; 13) $-\frac{1}{4} \sqrt{3+4x-4x^2} + \frac{7}{4} \arcsin \frac{2x-1}{2} + c$.
- 11.9. 1) $\ln \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + c$; 2) $\ln \left| \frac{(x-2)^3}{x-1} \right| + c$; 3) $\frac{1}{1+x} + \ln \left| \frac{x}{x+1} \right| + c$;
 4) $x + 3 \ln|x-3| - 3 \ln|x-2| + c$; 5) $-\frac{1}{4} \ln(x^2+1) + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + \frac{1}{2} \ln|x-1| + c$.
- 11.10. 1) $\frac{1}{8} x - \frac{1}{32} \sin 4x + c$; 8) $\frac{1}{8} x - \frac{1}{32} \sin 4x + c$;
 2) $\frac{3}{8} x + \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{32} \sin 4x + c$; 9) $-\frac{1}{4} \operatorname{ctg}^4 x + \frac{1}{2} \operatorname{ctg}^2 x + \ln |\sin x| + c$;
 3) $\frac{1}{3} \cos^3 x - \cos x + c$; 10) $\operatorname{tg} x + \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 x + c$;
 4) $\frac{3}{8} x - \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{32} \sin 4x + c$; 11) $\frac{1}{3} \ln \left| \frac{\operatorname{tg}^{\frac{x}{2}} - 2}{2 \operatorname{tg}^{\frac{x}{2}} - 1} \right| + c$;
 5) $-\frac{1}{5} \cos^5 x + \frac{1}{7} \cos^7 x + c$; 12) $\frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left| 2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + c$;

$$\begin{aligned}
& 6) \frac{1}{128} \left(3x - \sin 4x + \frac{\sin 8x}{8} \right) + c; & 13) x - \operatorname{tg} \frac{x}{2} + c; \\
& 7) \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} + \ln |\cos x| + c; & 14) \frac{1}{2} (\operatorname{tg} x + \ln |\operatorname{tg} x|) + c; \\
& 11.11. 1) \frac{2(44-15x)}{27} \sqrt{1-3x} + c; & 2) \frac{4}{3} \left[\sqrt[4]{x^3} - \ln \left(\sqrt[4]{x^3+1} \right) \right] + c; \\
& 3) \frac{2}{27} \sqrt[4]{x^9} - \frac{2}{13} \sqrt[12]{x^{13}} + c; & 4) \frac{1}{2} \arcsin \frac{x-2}{x\sqrt{2}} + c; \\
& 5) 2 \sqrt{x-1} \left[\frac{(x-1)^3}{7} + \frac{3(x-1)^2}{5} + x \right] + c; & 6) 2\sqrt{x} - 2\sqrt{2} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{x}{2}} + c.
\end{aligned}$$

Тема 12

$$12.1. 1) 2,625; 2) 3\sqrt[3]{2} - 4; 3) \frac{2}{3}; 4) 1; 5) -1; 6) 0; 7) \frac{8\ln 4 - 3\ln 27}{\ln 4 \ln 27}; 8) \frac{26}{3};$$

$$9) \frac{\ln 5}{6}; 10) \frac{1}{3}; 15) \ln 4 - \frac{3}{4}; 16) \frac{e^\pi}{2}.$$

$$12.2. 1) \frac{16}{3}; 2) 1. \text{ Вказівка: цей інтеграл представляє собою площу квадрата зі стороною } a=1; 5) 4.$$

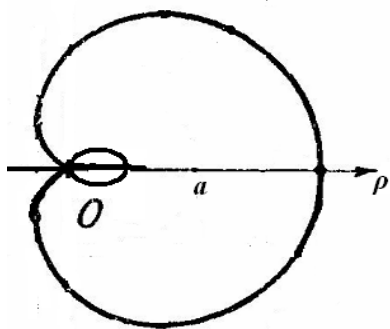
$$12.3. 1) \text{ додатній}; 2) \text{ додатній}; 3) \text{ від'ємний}; 4) \text{ додатній}; 5) \text{ від'ємний}.$$

$$12.6. 2) \frac{1}{3}; 3) 9; 4) 5\frac{1}{3}; 5) 18; 6) 2; 7) 1; 8) \frac{2}{3}; 10) e^3 - 1; 11) e^x - 5; 12) \ln 2;$$

$$13) \pi ab; 14) 3\pi a^2; 15) \frac{3\pi a^2}{8}; 16) 6\pi a^2; 17) a^2; 18) \frac{9\pi}{2}.$$

$$12.7. 1) \frac{2}{27} (13\sqrt{13} - 8); 2) \frac{1}{2} \ln 3; 3) \frac{670}{27}; 4) \frac{28}{3}; 5) \sqrt{5} + \frac{1}{2} \ln(2 + \sqrt{5});$$

$$6) \ln 3; 7) \frac{e^2+1}{4}; 8) 6a; 9) 8a; 10) 4\sqrt{3}; 11) 8a; 12) \frac{3\pi a}{2}; 13) \text{ знаходимо}$$



$$\rho' = -a \cos^2 \frac{\varphi}{3} \cdot \sin \frac{\varphi}{3} \quad \text{і} \quad \text{диференціал дуги}$$

$$dl = \sqrt{\rho^2 + \rho'^2} d\varphi = a \cos^2 \frac{\varphi}{3} d\varphi. \text{ Половина цієї лінії}$$

(див. рис.) описується кінцем полярного радіуса при зміні φ від 0 до $\frac{2}{3}\pi$. Тому за формулою (12.14) довжина всієї кривої

$$L = 2a \int_0^{\frac{3}{2}\pi} \cos^2 \frac{\varphi}{3} d\varphi = a \int_0^{\frac{3}{2}\pi} \left(1 + \cos \frac{2\varphi}{3} d\varphi \right) = a \left(\varphi + \frac{3}{2} \sin \frac{2\varphi}{3} \right) \Big|_0^{\frac{3}{2}\pi} = \frac{3}{2} a \pi;$$

$$14) \pi a \sqrt{4\pi^2 + 1} + \frac{a}{2} \ln(2\pi + \sqrt{4\pi^2 + 1})$$

$$12.8. 1) \frac{2\pi}{27} \left(\frac{125}{27} - 1 \right) \approx 0,845; \quad 2) \frac{14\pi}{3}; \quad 3) 4\pi [\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})];$$

$$4) 8\pi; \quad 5) \frac{34\sqrt{17} - 2}{9} \pi; \quad 6) \frac{62\pi}{3}; \quad 7) \frac{14\pi}{3};$$

8) прийняти y за незалежну змінну. Тоді $S = \pi \int_0^2 \sqrt{16 - 3y^2} dy$. Далі треба

застосувати підстановку $y = \frac{4}{\sqrt{3}} \sin t$. $S = 2\pi \left(1 + \frac{4\pi}{3\sqrt{3}} \right);$

$$10) 29,6\pi; \quad 11) 3\pi.$$

$$12.9. 1) 12\pi; \quad 2) 58,5\pi; \quad 3) \frac{512\pi}{15}; \quad 4) 3\pi^2; \quad 5) \frac{\pi}{4} \left(\frac{5\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right);$$

$$6) 34 \frac{2}{15} \pi; \quad 7) \frac{32\pi a^3}{105}; \quad 8) 5\pi^2 a^3; \quad 9) \frac{32\pi a^3}{105}; \quad 10) \frac{32}{105} \pi a^3.$$

$$12.10. \text{ а) збіжний до } \frac{1}{2}; \quad \text{б) збіжний до } \frac{\pi}{4}; \quad \text{в) розбіжний};$$

$$\text{г) розбіжний}; \quad \text{д) збіжний до } 1; \quad \text{е) збіжний до } -1;$$

$$\text{ж) збіжний до } \pi; \quad \text{з) розбіжний}.$$

Тема 13

$$13.1. \text{ а) } 1; \text{ б) } -1; \text{ в) } 0; \text{ г) } -0,8; \text{ д) } f(x, y); \text{ е) } \frac{y+3x}{y-3x}.$$

13.2. а) уся площа; б) уся площа, за винятком точок прямої $y = x$;

в) $y \leq x$, півплощина під прямою $y = x$ разом з точками цієї прямої;

г) $|y| \leq |x|$, внутрішня частина правого та лівого вертикальних кутів, утворених прямими $y = x$ та $y = -x$ разом з точками цих прямих;

д) частина площини поза одиничним колом, де центр – початок координат ($x^2 + y^2 \geq 1$);

е) $x^2 + y^2 < 1$, частина площини знаходиться в колі;

ж) сімейство прямих, що проходить через початок координат $y = e^{2c} x$, або $y = c_1 x (c_1 > 0)$;

з) сімейство ліній $xy = c$; при $c \neq 0$ - сімейство рівнобічних гіпербол, а при $c = 0$ - сукупність осей координат Ox і Oy ;

к) $x > 0$; $y > 0$, внутрішні точки першого координатного кута;

л) два тупі вертикальні кути, утворені прямими $y = 0$ і $y = -2x$, разом з точками цих прямих з вилюченням їх спільної точки $(0;0)$.

13.3. 1) сімейство площин $x + y + 3z = c$;

2) сімейство сфер $x^2 + y^2 + z^2 = c$ ($c > 0$);

3) сімейство сфер $x^2 + y^2 + z^2 = c$ ($c > 0$); якщо $c = 0$, то сфера вироджується в точку.

13.4. а) 0; б) не існує; в) 1; г) 1; д) 1; е) 0.

13.5. а) точки прямої $y = 2x$; б) точки параболи $y^2 = 4x$;

в) точки осей координат Ox і Oy ;

г) точки кола $x^2 + y^2 = 1$ і початок координат $(0;0)$.

13.6. а) $z'_x = 3x^2 - 3y$; $z'_y = 3y^2 - 3x$; б) $z'_x = \frac{2y}{(x+y)^2}$; $z'_y = \frac{-2x}{(x+y)^2}$;

в) $z'_x = \frac{y}{x^2 - y^2}$; $z'_y = -\frac{x}{x^2 - y^2}$; г) $z'_x = -\frac{1}{1+x^2}$; $z'_y = -\frac{1}{1+y^2}$;

д) $z'_x = \frac{1}{y} \cos \frac{x}{y} \cos \frac{y}{x} + \frac{y}{x^2} \sin \frac{x}{y} \sin \frac{y}{x}$; $z'_y = -\frac{x}{y^2} \cos \frac{x}{y} \cos \frac{y}{x} - \frac{1}{x} \sin \frac{x}{y} \sin \frac{y}{x}$;

е) $z'_x = -\frac{x}{x^2 + y^2}$; $z'_y = \frac{x^2}{y(x^2 + y^2)}$.

13.8. а) $dz = \frac{2(xdx + ydy)}{x^2 + y^2}$; б) $dz = e^x [(x \cos y - \sin y)dy + (\sin y + \cos y + x \sin y)dx]$;

в) $dz = \frac{2(xdy - ydx)}{x^2 \sin \frac{2y}{x}}$; г) $dz = \frac{2dx}{x^2 + 4} + \frac{2 \cos y dy}{\sin^2 y + 4}$;

д) $dz = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \left(dx + \frac{ydy}{x + \sqrt{x^2 + y^2}} \right)$.

13.9. а) $d^2 z = \frac{2}{x^4} (3y^2 dx^2 - 4xy dx dy + x^2 dy^2)$;

б) $d^2 z = -\frac{y}{x^2} dx^2 + \frac{2}{x} dx dy$;

в) $d^2 z = e^{xy} (y^2 dx^2 + 2(1 + xy) dx dy + x^2 dy^2)$.

13.10. 1) $6\vec{i} + 4\vec{j}$; 2) $\frac{1}{3}(2\vec{i} + \vec{j})$; 3) $\frac{1}{x_0^2 + y_0^2} (-y_0 \vec{i} + x_0 \vec{j})$

13.11. 1) 0; 2) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) $\frac{1}{6}$; 4) $\frac{7}{9}$

- 13.12. а) $2x - 4y - z + 6 = 0$; $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-4} = \frac{z}{-1}$; б) $x + y - z - 1 = 0$;
 $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{-1}$; в) $x - 2y + z = 0$; $\frac{x-1}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{-1}$;
 г) $x - y + 2z - \frac{\pi}{2} = 0$; $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z - \frac{\pi}{2}}{2}$;
 д) $z = 2(x - 1)$; $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{0} = \frac{z}{-1}$; е) $x - y - 2z + 1 = 0$; $\frac{x - \frac{\pi}{4}}{1} = \frac{y - \frac{\pi}{4}}{-1} = \frac{z - \frac{1}{2}}{-2}$.
- 13.13. а) $z_{\min}(-4; 1) = -2$; б) $z_{\max}(2; -2) = 8$; в) $z_{\max}(0; 0) = 1$;
 г) у точці $(0; 0)$ екстремуму немає; $z_{\min}(a; a) = -a^3$, якщо $a > 0$;
 $z_{\max}(a; a) = -a^3$, якщо $a < 0$;
 д) $z_{\max} = 4$; е) $z_{\max} = \frac{a\sqrt{3}}{9}$; при $x = y = \frac{2}{3}a$.
- 13.14. $R = \frac{h\sqrt{5}}{2}$, $H = \frac{h}{2}$, якщо R - радіус основи намету, H - висота циліндричної частини; h - висота конічної верхівки.
- 13.15. а) $z_{\text{найм}} = -\frac{16}{3}$; $z_{\text{найб}} = 16$; б) $z_{\text{найм}} = 5$; $z_{\text{найб}} = 11$; в) $z_{\text{найм}} = -\frac{1}{2}$; $z_{\text{найб}} = \frac{1}{2}$;
 г) $z_{\text{найм}} = 1$; $z_{\text{найб}} = 4$.
- 13.18. $\frac{\partial^2 z}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial z}{\partial \rho}$.
- 13.20. $V = \frac{9}{2}a^3$.

Тема 14

- 14.4. $y = x^2 + 3$.
- 14.5. $x^2 + y^2 = -2x$.
- 14.6. 1) $y' = 1$; 2) $y = y'x + (y')^2$; 3) $y = 2y'x$.
- 14.8. 1) $y = \frac{1}{\ln \frac{c}{x}}$; 2) $y = \frac{c(x-1)}{x}$; 3) $y = -x - 2\ln|1-x| + c$;
 4) $y - 1 = ce^{\frac{1}{x}}$; 5) $\arcsin y - \arctg x = c$; 6) $x^2 + y^2 = x^2 y^2 + c$;
 7) $y = c \cdot e^{\frac{1}{x}}$; 8) $x + y = \ln c(x+1)(y+1)$.
- 14.9. 1) $y = c \cdot e^{\sqrt{x}}$, $y = e^{\sqrt{x}-2}$; 2) $y = \frac{c \sin^2 x - 1}{2}$, $y = 2 \sin^2 x - \frac{1}{2}$;

$$3) \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = c, y = -x;$$

$$4) y^2 = c^2 x^2 - 1, x^2 = 4 + 4y^2;$$

$$14.10. 1) y = x \arcsin \frac{c}{x};$$

$$2) y = x e^{\frac{c-x}{x}};$$

$$3) y + \sqrt{x^2 + y^2} = cx^2;$$

$$4) y = \sqrt{c\sqrt{x} + x^2};$$

$$5) y = x\sqrt{2\ln cx^8};$$

$$6) y = x^3\sqrt{3\ln cx};$$

$$7) y = x e^{cx};$$

$$8) y = \frac{2x}{1 - cx^2}.$$

$$14.11. 1) y = \frac{x^2 - 1}{2};$$

$$2) y = x e^{cx}, \quad y = x e^{-x/2}.$$

$$14.12. 1) y = \frac{c - e^{-x^2}}{2x^2};$$

$$2) y = \frac{c - \cos 2x}{2 \cos x};$$

$$3) y = 2x^{3/2} + cx;$$

$$4) y = \left(2 \sin \frac{x}{2} + c \right) \operatorname{tg} \frac{x}{2};$$

$$5) y = \ln x + c/x;$$

$$6) y = 1 + \frac{\ln(c \cdot \operatorname{tg} \frac{x}{2})}{\cos x};$$

$$7) y = (x+1)^4 + c(x+1)^2;$$

$$8) y = \sin x + c \cos x;$$

$$9) e^x y = x + c;$$

$$10) y = x^2 \left(1 + c e^{1/x} \right);$$

$$11) y^2 \left(x^2 + 1 + c e^{x^2} \right) = 1; 13) y^2 = \frac{e^{x^2}}{2x + c};$$

$$14) y^2 = \frac{1}{1 + c e^{x^2}}.$$

$$14.13. 1) y^3 = x + c e^{-x}, y^3 = x - 2e^{1-x}.$$

$$14.14. y = 2x^{3/2} + 2.$$

$$14.15. y = \frac{x^3}{6} + \frac{3x^2}{2} - 5x + \frac{20}{3}.$$

$$14.16. 1) y = \frac{x^5}{120} + c_1 x^3 + c_2 x^2 + c_3 x + c_4; 2) y = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{3}{4} x^2 + c_1 x + c_2;$$

$$3) y = -\frac{1}{4} \sin 2x + c_1 x + c_2;$$

$$4) y = -x \sin x - 2 \cos x + c_1 x + c_2;$$

$$5) y = -\frac{1}{(x+2)^2} - \frac{5}{16} x^2 + \frac{7}{4} x + \frac{5}{4};$$

$$6) y = 3 \ln x + c_1 x^2 + c_2 x^2 + c_2 x + c_3, y = 3 \ln x + 2x^2 - 6x + 6;$$

$$7) y = -\cos 2x + c_1 x + c_2, \quad y = 1 - \cos 2x; 8) y = c_1 x + x \arctg x - \ln \sqrt{1+x^2} + c_2;$$

$$9) y = \frac{1}{2} x^2 \arcsin x + \frac{3}{4} x \sqrt{1-x^2} + \frac{1}{4} \arcsin x + c_1 + c_2 x;$$

$$10) y = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{7}{4} x^2 + 5x - \frac{9}{4}; \quad 11) y = \sin x + \frac{1}{2} \left(x - \frac{\pi}{2} \right)^2 + 2 \left(x - \frac{\pi}{2} \right);$$

$$12) y = \frac{1}{32} e^{2x} + \frac{1}{16} x^4 - \frac{5}{24} x^3 + \frac{23}{16} x^2 - \frac{33}{16} x - \frac{1}{32}.$$

$$14.17. 1) y = \arcsin^2 x + c_1 \arcsin x + c_2;$$

$$2) y = c_1 e^x + c_2;$$

$$3) y = \frac{1}{12} (x - c_1)^3 + c_2;$$

$$4) y = \frac{1}{x} + c_1 \ln x + c_2;$$

$$5) y = c_1 \sin x - x - \frac{1}{2} \sin 2x + c_2;$$

$$6) y = c_1 x (\ln x - 1) + c_2;$$

$$7) y = e^x (x - 1) + c_1 x^2 + c_2;$$

$$8) y = \frac{1}{\sqrt{c_1}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{c_1}} + c_2, \text{ для } c_1 > 0, y = \frac{1}{2\sqrt{-c_1}} \ln \left| \frac{x - \sqrt{-c_1}}{x + \sqrt{-c_1}} \right| + c_2, \text{ для } c_1 < 0,$$

$$y = c_2 - \frac{1}{x}, \text{ для } c = 0;$$

$$10) y = c_1 \ln|x| - \frac{x^2}{4} + c_2.$$

$$14.18. 225(y - 1)^2 = 8(x - 1)^3 (3x + 2)^2.$$

$$14.19. 1) y - \ln(c_1 + e^y) = c_1(x + c_2); \quad 2) x = \pm \ln \frac{1 - \sqrt{2y + 1}}{1 + \sqrt{2y + 1}};$$

$$3) \operatorname{ctgy} = c_2 - c_1 x;$$

$$4) y = (c_1 x + c_2)^2;$$

$$5) 4(c_1 y - 1) = (c_1 x + c_2)^2;$$

$$6) x + c_2 = \frac{2}{3} (\sqrt{y} - 2c_1) \sqrt{\sqrt{y} + c_1};$$

$$7) \sqrt{1 + c_1 y^2} = c_1 x + c_2, \text{ де } c_2 = c_1 \cdot c_2;$$

$$8) 2y^2 - 1 = (2x + 3)^2;$$

$$9) y = \frac{(x + 9)^2}{4};$$

$$10) \ln y = 1 - \frac{1}{c_1 x + c_2}.$$

$$14.20. y = \frac{1}{\sqrt[3]{4}} (3x - 1)^{2/3}.$$

Тема 16

$$16.1 \quad 1) \int_1^3 dx \int_0^{\frac{x-1}{2}} f(x, y) + \int_3^4 dx \int_0^{\sqrt{4-x}} f(x, y) dy;$$

$$2) \int_0^1 dy \int_{\frac{y^2}{4}}^{2\sqrt{y}} f(x, y) dx + \int_1^{2\sqrt{2}} dy \int_{\frac{y^2}{4}}^2 f(x, y) dx;$$

$$4) \int_0^{\ln 2} dx \int_1^{e^x} f(x, y) dy + \int_{\ln 2}^1 dx \int_1^2 f(x, y) dy + \int_1^2 dx \int_x^2 f(x, y) dy.$$

$$16.2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{\frac{1}{\cos \varphi}} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\rho + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{1}{\sin \varphi}} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \cdot \rho d\rho$$

$$16.3 \text{ 1) } 7; \text{ 2) } \frac{3}{8}; \text{ 3) } \frac{9\pi}{4}; \text{ 4) } \frac{1}{24}; \text{ 5) } \frac{5}{6}.$$

$$16.4 \text{ 1) } \frac{2\pi}{3}; \text{ 2) } \frac{a^3}{12}; \text{ 3) } -6\pi^2; \text{ 4) } 8.$$

$$16.5 \text{ 1) } 4\sqrt{3}; \text{ 2) } \frac{1}{4}; \text{ 3) } e^2 - 1; \text{ 4) } \ln 3; \text{ 5) } \frac{1}{2} - \frac{1}{e}; \text{ 6) } 2a^2. \text{ Треба врахувати симетрію області } D.$$