Тема 14

Звичайні диференціальні рівняння

Диференціальним рівнянням (ДР) називається рівняння, яке зв'язує незалежні змінні, шукану функцію і її похідні:

$$F\left(x,y,y',y'',\ldots,y^{(n)}\right)=0. \qquad (14.1)$$

Порядком ДР називається порядок найвищої (старшої) похідної, яка входить в рівняння.

Довільна функція $y=y(x)$ називається **розв'язком ДР** (14.1) на проміжку (a,b), якщо при підстановці в це рівняння вона перетворює його в тотожність, для всіх $x\in(a,b)$.

Для відшукання розв'язків рівняння (14.1) інтегрують. На кожному кроці інтегрування порядок ДР зменшується на одиницю і з'являється одна нова стала інтегрування. Тому **загальний розв'язок ДР** містить *n* довільних сталих і має вигляд:

$$y=\varphi(x,c_1,c_2,\ldots,c_n) \qquad (14.2)$$

Задача про відшукання розв'язку ДР, що задовольняє **початкові умови**

$$y\Big|_{x=x_0}=y_0,\quad y'\Big|_{x=x_0}=y_0',\ldots y^{(n-1)}\Big|_{x=x_0}=y_0^{(n-1)},\quad a<x<b \qquad (14.3)$$

називається **задачею Коші для ДР** (14.1).

Якщо загальний розв'язок ДР заданий в наявному виді

$$\Phi(x,y,c_1,\ldots,c_n)=0,$$

(14.4)

то рівність (14.4) називають **загальним інтегралом ДР.**

Всяка функція, яка отримується із загального розв'язку (14.2), при конкретних значеннях $c_{10},c_{20},\ldots,c_{n0}$ сталих інтегрування, називається **частинним розв'язком** відповідного ДР.

Графік довільного частинного розв'язку ДР називається **інтегральною кривою** даного ДР.

Загальний розв'язок ДР описує ***n* – параметричну сім'ю інтегральних кривих**.

ДР вважається **проінтегрованим в квадратурах**, якщо його загальний розв'язок отриманий в явній чи неявній формі, яка може містити ще не взяті інтеграли від невідомих функцій.

Класи рівнянь, що інтегруються в квадратурах

I. **Диференціальні рівняння I-го порядку.**

Загальний вигляд:

$$F(x,y,y')=0 \qquad (14.5)$$

або

$$y'=f(x,y) \qquad (14.6)$$

ДР (14.6) визначає деяке **поле напрямків** в області Д існування його розв'язків, тому що кутовий коефіцієнт дотичної до інтегральної кривої в точці *M(x,y)*, рівній $\kappa = y'(M) = f(x,y)$ (рис.14.1):

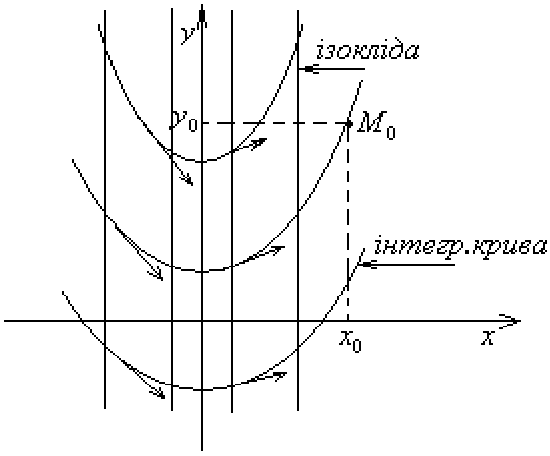

Рис.14.1

Множина точок $M^*(x^*, y^*)$ область Д, в яких нахил дотичних до інтегральних кривих ДР однаковий, називається **ізокліною** даного ДР. Рівняння ізокліни можна записати у вигляді

$$f(x,y) = const \tag{14.7}$$

1^0. **Рівняння з відокремленими змінними**

Якщо права частина рівняння (14.6) має вигляд

$$f(x,y) = P(x) \cdot Q(y),$$

то
$$y' = P(x) \cdot Q(y) \tag{14.8}$$

або
$$\frac{dy}{dx} = P(x) \cdot Q(y)$$

і змінні розділяються. Тоді загальний розв'язок рівняння (14.8) має вигляд:

$$\int \frac{dy}{Q(y)} = \int P(x)dx + C \tag{14.9}$$

Аналогічно будується загальний розв'язок рівняння

$$P(x) \cdot Q(y)dx + R(x)S(y)dy = 0, \tag{14.10}$$

яке теж являється рівнянням з відокремленими змінними.

2^0. **Однорідні рівняння**

Рівняння (14.6) називається однорідним, якщо його права частина $f(x,y)$ є однорідною функцією нульового виміру відносно x та y. На практиці це означає, що $f(x,y)$ можна представити як функцію відношення змінних y/x або x/y. Тому загальний вигляд однорідного рівняння 1-го порядку такий

$$y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right) \tag{14.11}$$

При його інтегруванні вводиться заміна

$$\frac{x}{y}=u(x) \text{ або } \frac{y}{x}=u(x),$$

яка зводить до рівняння з відокремленими змінними.

3^0. **Лінійні рівняння першого порядку**

Так називаються рівняння (14.5) лінійні відносно невідомої функції і її похідної, тобто рівняння вигляду

$$y'+P(x)y=Q(x), \tag{14.12}$$

де $P(x)$ і $Q(x)$ - функції, що залежать лише від x.

Розв'язок рівняння (14.12) шукають у вигляді добутку двох функцій:

$$y=u(x)\cdot v(x) \tag{14.13}$$

які підібрані спеціальним чином так, що рівняння (14.12) розпадається на два рівняння з розподіленими змінними. З (14.13)

$$y'=u'v+v'u \tag{14.14}$$

Підставляючи (14.13) і (14.14) в (14.12), матимемо:

$$u'v+v'u+P(x)uv=Q(x)$$

або

$$u'v+u(v'+P(x)v)=Q(x) \tag{14.15}$$

Функції $u(x)$ і $v(x)$ повинні бути такими, щоб вираз в дужках (14.15) дорівнював нулеві, тоді з (14.15) отримуємо:

$$\begin{cases} v'+P(x)\cdot v=0 \\ u'v=Q(x) \end{cases}.$$

Загальний розв'язок лінійного рівняння має вигляд:

$$y=u(x)\cdot v(x)=e^{-\int P(x)dx}\cdot\left[\int Q(x)e^{\int P(x)fx}+C\right] \tag{14.16}$$

Рівняння Бернуллі має вигляд

$$y'+P(x)y=Q(x)\cdot y^n \tag{14.17}$$

і при $n=0$ являється лінійним ДР. Розв'язок рівняння Бернуллі знаходиться аналогічно за допомогою заміни (14.13).

II. **Диференціальні рівняння вищих порядків, які допускають зниження порядку**

1^0. **Рівняння розв'язанні відносно старшої похідної**, права частина яких залежить від x:

$$y^{(n)}=f(x) \tag{14.18}$$

Щоб розв'язати це рівняння, його потрібно n разів проінтегрувати.

2^0. **Рівняння, які не містять явно шукану функцію і кілька її послідовних похідних:**

$$F(x,y^{(\kappa)},y^{(\kappa+1)},\ldots,y^{(n)})=0. \tag{14.19}$$

Заміна

$$y^{(\kappa)}=p(x) \tag{14.20}$$

знижує порядок рівняння (14.19) на κ одиниць:

$$\Phi(x,p,p',\ldots,p^{(n-\kappa)})=0.$$

3^0. **Рівняння, які не містять явно незалежну змінну:**

$$F(y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0. \quad (14.21)$$

Заміна: $$y' = P(y) \quad (14.22)$$

В частковому випадку рівняння (14.21):

$$F(y, y', y'') = 0$$

$$y' = P(y) \text{ і } y'' = \frac{dP}{dx} = \frac{dP}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = P' \cdot P.$$

Аргументом виступає шукана функція і отримується рівняння першого порядку відносно функції $P(y)$: $\Phi(y, P, P') = 0$.

Приклади розв'язання типових задач

Приклад 1.

Розв'язати ДР $\left(e^x + 2\right)y' = ye^x$

Розв'язання

Це ДР першого порядку, в якому можна розділити змінні. Для цього враховуємо, що $y' = \dfrac{dy}{dx}$. Тоді

$$\left(e^x + 2\right)\frac{dy}{dx} = ye^x$$

або

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ye^x}{e^x + 2}.$$

Це рівняння виду (14.8). Розділяємо змінні за правилом пропорції:

$$\frac{dy}{y} = \frac{e^x dx}{e^x + 2}.$$

Інтегруючи обидві частини, матимемо

$$ln\, y = ln\left|e^x + 2\right| + ln\, C.$$

Звідси $$y = C(e^x + 2).$$

Приклад 2

Розв'язати ДР $2x^2 dy = (x^2 + y^2 dx)$

Розв'язання

Розв'яжемо рівняння відносно похідної

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + y^2}{2x^2}$$

або

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\left[1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2\right] \quad (14.23)$$

Це рівняння першого порядку типу (14.11), тобто однорідне. Робимо заміну:

$$\frac{y}{x}=u(x)$$

Тоді $$y=u(x)\cdot x$$

$$y'=u'(x)\cdot x+u(x).$$

Підставляємо y і y' в рівняння (14.23):

$$u'(x)\cdot x+u(x)=\frac{1}{2}(1+u(x)).$$

Отримали рівняння з відокремленими змінними:

$$2x\frac{du}{dx}=u^2-2u+1$$

або $$\frac{2du}{(u-1)^2}=\frac{dx}{x}.$$

Інтегруємо обидві частини і підставляємо $\frac{y}{x}$ замість u:

$$-\frac{2}{u-1}=\ln x+\ln C$$

$$-\frac{2}{\frac{y}{x}-1}=\ln Cx$$

$$\ln Cx=e^{-\frac{2x}{y-x}}.$$

Отримали загальний інтеграл рівняння.

Зауваження

При розділенні змінних ми ділили на x і на $(u-1)^2$, що є допустимим при $x\neq 0$ і $u\neq 1$. Безпосередньою перевіркою переконуємось, що $x=0$ і $u=1$, тобто $y=x$, є також рішеннями заданого рівняння, але вони не входять в загальний інтеграл.

Приклад 3

Проінтегрувати рівняння $y'+2xy=2x^2e^{-x^2}$.

Розв'язання

Це лінійне рівняння виду (14.12). Робимо заміну:

$$y=u\cdot v$$

$$y'=u'v+v'u.$$

Підставляємо y і y' в задане рівняння:

$$u'v+v'u+2xuv=2x^2e^{-x^2}$$

$$v[u'+2xu]+uv=2x^2e^{-x^2}.$$

Звідси отримуємо систему двох рівнянь з розділеними змінними:

$$\begin{cases} u'+2xu=0 \\ uv'=2x^2e^{-x^2} \end{cases}.$$

З першого рівняння:

$$\frac{du}{dx}=-2xu, \quad \frac{du}{u}=-2xdx,$$
$$ln u=-x^2, \quad (c=0),$$
$$u=e^{-x^2}.$$

Підставляємо вираз для u у друге рівняння:

$$e^{-x^2}\frac{dv}{dx}=2x^2e^{-x^2},$$
$$dv=2x^2dx.$$

Звідки
$$v=\frac{2}{3}x^3+C$$

і загальним розв'язком даного рівняння є

$$y=u(x)\cdot v(x)=e^{-x^2}\left(\frac{2}{3}x^3+C\right).$$

Зауваження

В деяких випадках, коли рівняння не є лінійним відносно *y*, за допомогою тотожних перетворень його можна звести до рівняння, яке буде лінійним відносно *x* і x'. Наприклад, рівняння

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x\cos y+\sin 2y}$$

не є лінійним відносно *y*, так як *y* знаходиться під знаком синуса і косинуса. Але простими перетвореннями його можна звести до лінійного відносно *x* і x':

$$\frac{dx}{dy}-x\cos y=\sin 2y.$$

В такому випадку робиться заміна

$$x=u(y)\cdot v(y).$$

Приклад 4

Для ДР $y'''=\dfrac{24}{(x+2)^5}$ знайти розв'язок задачі Коші: $y(0)=1,\ y'(0)=2,$ $y''(0)=-1.$

Розв'язання

Це рівняння третього порядку виду (14.18). Інтегруємо послідовно три рази:

$$y'''=24(x+2)^{-5},$$
$$y''=24\int\frac{dx}{(x+2)^5}=-\frac{6}{(x+2)^4}+C_1,$$
$$y'=\int\left[-\frac{6}{(x+2)^4}+C_1\right]dx=\frac{2}{(x+2)^3}+C_1x+C_2,$$

$$y=\int\left[\frac{2}{(x+2)^3}+C_1x+C_2\right]dx=-\frac{1}{(x+2)^2}+\frac{C_1x^2}{2}+C_2x+C_3.$$

Підставляємо послідовно в y'',y' і y початкові умови і визначаємо C_1,C_2,C_3:

$$\left.\begin{aligned}&-1=-\frac{6}{2^4}+C_1\\&2=\frac{2}{2^3}+C_2\\&1=-\frac{1}{2^2}+C_3\end{aligned}\right\}\rightarrow C_1=-\frac{5}{8},\quad C_2=\frac{7}{4},\quad C_3=\frac{5}{4}.$$

Частковий розв'язок рівняння має вигляд:

$$y=-\frac{1}{(x+2)^2}-\frac{5}{16}x^2+\frac{7}{4}x+\frac{5}{4}.$$

Приклад 5

Проінтегрувати ДР $y'''=(y'')^2$

Розв'язання

Це ДР третього порядку виду (14.19). Робимо заміну $y''=P(x)$ і отримуємо рівняння першого порядку відносно $P(x)$:

$$\frac{dP}{dx}=P^2.$$

Розділяємо змінні і інтегруємо:

$$\frac{dP}{P^2}=dx,\quad -\frac{1}{P}=x+C_1,$$

$$P=-\frac{1}{x+C_1}.$$

Вертаємося до старої змінної:

$$y''=-\frac{1}{x+C_1}.$$

Інтегруємо послідовно два рази:

$$y'=-ln(x+C_1)+C_2,$$

$$y=-(x+C_1)ln(x+C_1)+x+C_1+C_2x+C_3,$$

або

$$y=-(x+C_1)ln(x+C_1)+x(C_2+1)+C_3+C_1.$$

Для простоти можна замінити

$$C_2+1=\tilde{C}_2$$

$$C_3+C_1=\tilde{C}_3$$

і тоді загальний розв'язок приймає вигляд

$$y=-(x+C_1)ln(x+C_1)+\tilde{C}_2x+\tilde{C}_3.$$

Приклад 6

Проінтегрувати ДР $2(y')^2 = (y-1)y''$.

Розв'язання

Це рівняння другого порядку виду (14.21). Робимо заміну $y' = P(y)$.

Тоді $y'' = \frac{dP}{dy} \cdot P$ і отримуємо рівняння першого порядку відносно P:

$$2P^2 = (y-1) \cdot P \cdot \frac{dP}{dy}$$

або

$$P\left[2P - (y-1)\frac{dP}{dy}\right] = 0.$$

Це рівняння еквівалентно сукупності умов:

$$\left[\begin{array}{l} P = 0 \\ 2P - (y-1)\dfrac{dP}{dy} = 0 \end{array}\right. .$$

З першої умови

$$P = 0, \quad \frac{dy}{dx} = 0, \quad y = C.$$

Легко перевірити, що $y = C(y' = 0, y'' = 0)$ перетворює задане рівняння у тотожність, отже, є розв'язком. Загальний розв'язок даного ДР отримаємо, якщо проінтегруємо рівняння з відокремленими змінними з другої умови

$$2P - (y-1)\frac{dP}{dy} = 0,$$

$$\frac{dP}{dy} = \frac{dy}{y-1},$$

$$\frac{1}{2}\ln P = \ln(y-1) + \ln C_1,$$

$$\sqrt{P} = C_1(y-1),$$

$$P = C_1^2(y-1)^2.$$

Повертаємось до старої змінної

$$\frac{dy}{dx} = C_1^2(y-1)^2.$$

Відокремлюємо змінні і інтегруємо:

$$\int \frac{dy}{C_1^2(y-1)^2} = \int dx,$$

$$-\frac{1}{C_1^2(y-1)} = x + C_2,$$

$$-\frac{1}{C_1^2}=(x+C_2)(y-1)$$

або

$$C_3=(x+C_2)(y-1), \text{ де } C_3=\frac{1}{C_1^2}.$$

Задачі

14.1. Довести, що функція $\varphi(x)=e^{\sqrt{1-x^2}}$ є розв'язком рівняння $xydx+\sqrt{1-x^2}dy=0$.

14.2. Довести, що рівняння $x^2e^y-y-2=0$, що визначає у як неявну функцію від x, є інтеграл диференціального рівняння $x^3e^yy'+3x^2e^y-y'=0$.

14.3. Перевірити, чи являються задані функції розв'язками або інтегралами відповідних диференціальних рівнянь:

1) $y=x^2-4x, \quad xdy-ydx=x^2dx;$ 2) $y=2e^{-\frac{1}{x^2}}, \quad y'x^3=2y;$

3) $4x^2+y^2=2x, \quad 4-\frac{y^2}{x^2}+\frac{2y}{x}y'=0;$

4) $y=x^3(\ln x-1)+2x^2, \quad xdy-2ydx=x^3\ln xdx.$

14.4. Побудувати параболи із сім'ї $y=x^2+C$ при $C=\pm1$, $C=\pm2$. Написати рівняння параболи цього сімейства, що проходить через точку *(-1; 4)*.

14.5. Побудувати кола із сім'ї $x^2+y^2=2Cx$ при $C=\pm1, C=\pm4$. Написати рівняння кола цього сімейства, що проходить через точку *(-1;1)*.

14.6. Побудувати диференціальні рівняння наступних сімейств ліній:

1) $y=x+C;$ 2) $y=Cx+C^2;$ 3) $y^2=2Cx.$

14.7. За допомогою ізоклін накреслити загальну картину ходу інтегральних кривих наступних диференціальних рівнянь:

1) $y'=\sqrt{x^2+y^2};$ 2) $y'=x^2+4y^2;$ 3) $y'=x-y^2.$

14.8. Проінтегрувати ДР з розділеними змінними:

1) $y^2dx-xdy=0;$ 2) $(1+x)ydx+(1-x)xdy=0;$

3) $(1+x)dx-(1-x)dy=0;$ 4) $(y-1)dx+x^2dy=0;$

5) $(1+x^2)dy-\sqrt{1-y^2}dx=0;$ 6) $(x-xy^2)dx+(y-x^2y)dy=0;$

7) $x^2y'+y=0;$ 8) $x+xy+y'(y+xy)=0.$

14.9. Знайти загальний і частковий інтеграли за початковими умовами:

1) $2y'\sqrt{x}=y, \quad y(4)=1;$ 2) $y'=(2y+1)ctgx, \quad y\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2};$

3) $x^2y'+y^2=0, \quad y(-1)=1;$ 4) $(1+y^2)dx=xydy, \quad y(2)=1.$

14.10. Знайти загальний розв'язок або загальний інтеграл однорідних ДР:

1) $y'=\frac{y}{x}-tg\frac{y}{x};$ 2) $xy'+y\,ln\frac{y}{x}=0;$

3) $xy'-y-\sqrt{x^2+y^2}=0;$ 4) $4xyy'-y^2-3x^2=0;$

5) $xyy'=8x^2+y^2;$ 6) $xy^2y'=x^3+y^3;$

7) $xy'=y(1+ln\frac{y}{x});$ 8) $y'=\frac{y^2}{x^2}-\frac{y}{x}.$

14.11. Знайти часткові інтеграли за даними початковими умовами:

1) $y+\sqrt{x^2+y^2}-xy'=0,\ y(1)=0;$

2) $xy'=y(1+ln\frac{y}{x}),\ y(1)=\frac{1}{\sqrt{e}};$

3) $y'=\frac{y^2}{x^2}-\frac{y}{x},\ y(-1)=1.$

14.12. Проінтегрувати лінійні ДР та рівняння Бернуллі:

1) $y'+\frac{2y}{x}=\frac{e^{-x^2}}{x};$ 2) $y'\cos x-y\sin x=\sin 2x;$

3) $xy'-y=x\sqrt{x};$ 4) $y'\sin x-y=\sin x\cdot\sin\frac{x}{2};$

5) $xy'+y=ln\,x+1;$ 6) $y'-ytg=ctgx;$

7) $y'-\frac{2y}{x+1}=(x+1)^2;$ 8) $y'\cos x+y\sin x=1;$

9) $y'+y=e^{-x};$ 10) $y'+\frac{1-2x}{x^2}y=1;$

11) $y'+xy=x^3y^3;$ 12) $xy'+y+xy^2=0;$

13) $y'-xy+y^3e^{-x^2}=0;$ 14) $y'+xy=xy^3.$

14.13. Розв’язати задачу Коші для ДР Бернуллі:

1) $3y^2y'+y^3=x+1,\ y(1)=-1;$ 2) $(1-x^2)y'-xy=xy^2,\ y(0)=0{,}5.$

14.14. Довести, що $y=C_1x^{3/2}+C_2$ є загальним розв’язком рівняння $2xy''=y'$ в області $x>0.$ Знайти частковий розв’язок, який задовольняє початковим умовам: $y(1)=4,\ y'(1)=3.$

14.15. Крива задовольняє рівнянню $\frac{d^2y}{dx^2}=x+3.$ Знайти її рівняння, якщо відомо, що вона проходить через точку $(2;4)$ та має в цій точці кутовий коефіцієнт 3.

14.16. Знайти загальний і частковий (там, де задані початкові умови) розв’язок ДР:

1) $y^{(IV)}=x;$ 2) $y''=ln\,x;$ 3) $y''=\sin 2x;$

4) $y''=x\sin x;$ 5) $y'''=\frac{24}{(x+2)^5},\ y(0)=1,\ y'(0)=2,\ y''(0)=-1;$

6) $y''' = \dfrac{6}{x^2}, y(1) = 2, y'(1) = 1, y''(1) = 1;$

7) $y'' = 4\cos 2x, y(0) = 0, y'(0) = 0;$

8) $y'' = \dfrac{1}{1+x^2};$ 9) $y'' = \arcsin x;$

10) $y''' = \dfrac{1}{x}, y(1) = 1, y'(1) = 2, y'' = -2;$

11) $y^{(IV)} = \sin x, y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1, y'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 2, y''\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = y'''\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0;$

12) $y^{(V)} = e^{2x}, y(0) = 0, y'(0) = -2, y''(0) = 3, y'''(0) = -1, y^{(IV)}(0) = 2.$

14.17. Знайти розв'язки рівнянь:

1) $(1-x^2)y'' - xy' = 2;$ 2) $y'' = y';$

3) $(y'')^2 = y'';$ 4) $x^3y'' + x^2y' = 1;$

5) $y'' + y'\,tgx = \sin 2x;$ 6) $y''x\ln x = y';$

7) $xy'' - y' = e^x x^2;$ 8) $y'' + 2x(y')^2 = 0;$

9) $(x-3)y'' + y' = 0;$ 10) $x(y''+1) + y' = 0.$

14.18. Розв'язати задачу Коші для ДР: $(y''x - y')y' = x^3,\ y(1) = 1, y'(1) = 0.$

14.19. Знайти загальний і частковий (там, де задані початкові умови) розв'язок ДР (або інтеграл):

1) $y'' - e^y y' = 0;$ 2) $yy' - (y')^2 = y^3, y(0) = -\dfrac{1}{2}, y'(0) = 0;$

3) $y''\,tgy = 2(y')^2;$ 4) $2yy'' = (y')^2;$

5) $2yy'' = 1 + (y')^2;$ 6) $y'' = \dfrac{1}{\sqrt{y}};$

7) $y^3y'' = -1;$ 8) $y^3y'' = 1, y(-2) = 1, y'(-2) = -1;$

9) $2yy'' = (y')^2, y(-1) = 4, y'(-1) = 1;$

10) $y(1-\ln y)y'' + (1+\ln y)y'^2 = 0.$

14.20. Виділити інтегральну криву, яка проходить через точку $(1;1)$ і дотикається в цій точці бісектриси першого координатного кута, для ДР $(y')^2 + 2yy'' = 0.$