Тема 12

Визначений інтеграл та його застосування

Нехай функція $y=f(x)$ визначена на $[a,b]$ і $a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_n=b$ – довільне розбиття на n частин, а $x_i \le \xi_i \le x_{i+1}$ і $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$, $i = 0 \div (n-1)$. Сума

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i \qquad (12.1)$$

називається **інтегральною сумою** функції $f(x)$ на [a,b]. Границю суми S_n за умови, що $n \to \infty$, а $max\,\Delta x_i \to 0$, називається визначеним інтегралом функції $f(x)$ в границях від $x=a$ до $x=b$ і позначається

$$\lim_{n\to\infty} S_n = I = \int_a^b f(x)dx \qquad (12.2)$$

Якщо функція $f(x)$ неперервна на $[a,b]$, то функція

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt \qquad (12.3)$$

є первісною для функції $f(x)$, тобто

$$F'(x) = f(x),\ a \le x \le b$$

Формула Ньютона-Лейбніца:

Якщо $F'(x) = f(x)$, то

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a) \qquad (12.4)$$

Якщо функція $y=f(x)$ неперервна зі своєю похідною $\varphi'(t)$ на $[\alpha,\beta]$, де $a=\varphi(\alpha)$ і $b=\varphi(\beta)$, причому функція $f[\varphi(t)]$ визначена і неперервна на $[\alpha,\beta]$, то

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,dt \qquad (12.5)$$

Якщо функції $u(x)$ і $v(x)$ неперервно-диференційовані на $[a,b]$, то

$$\int_a^b u(x)dv(x) = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)du(x) \qquad (12.6)$$

Нехай $f(x) \le F(x)$ на $[a,b]$, тоді

$$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b F(x)dx \qquad (12.7)$$

Якщо $f(x) \ge 0$ на $[a,b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx \ge 0 \tag{12.8}$$

Число $$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \tag{12.9}$$

називається **середнім значенням функції** $f(x)$ **на [*a,b*].**

Якщо плоска фігура є криволінійною трапецією: $y=f(x)$ $(f(x)\ge 0)$, $y=0$, $x=a$, $x=b$, де $f(x)$ – неперервна функція, то її площа обчислюється за формулою

$$S = \int_a^b f(x)dx \tag{12.10}$$

Якщо крива задана рівняннями в параметричній формі $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$, то площа криволінійної трапеції, обмеженої цією лінією, двома вертикалями $x = a$ і $x = b$, і відрізком вісі *OX*, виражається інтегралом

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \psi(t)\varphi'(t)dt, \tag{12.11}$$

де t_1 і t_2 визначаються з рівнянь $a = \varphi(t_1)$ і $b = \varphi(t_2)$ $(\varphi(t) \ge 0$ на відрізку$[t_1,t_2])$.

Якщо крива задана рівнянням у полярних координатах $\rho = \rho(\varphi)$, то площа сектора *AOB* (рис.13.1), обмеженого дугою кривою і двома полярними радіусами OA і

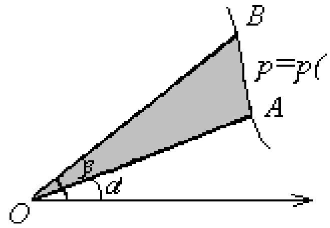


Рис.13.1

OB, що відповідають значенням $\varphi_1 = \alpha$ і $\varphi_2 = \beta$, виражається інтегралом

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} \rho(\varphi)d\varphi. \tag{12.12}$$

Якщо плоска гладка крива віднесена до прямокутної системи координат і задана

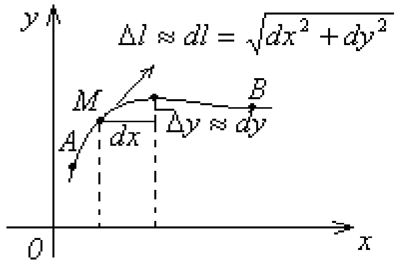


Рис. 13.2

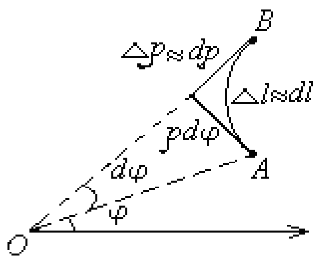


Рис. 13.3

рівнянням $y = f(x)$ або $(x = F(y))$ або параметричними рівняннями $x = \varphi(t), y = \psi(t),$ то диференціал dl довжини її дуги (рис.13.2) виражається формулою $dl = \sqrt{1 + (y')^2}\,dx = \sqrt{1 + (x')^2}\,dy = \sqrt{(x')^2 + (y')^2}\,dt,$ а довжина дуги *AB* визначається інтегралом

$$L_{AB} = \int_A^B dl = \int_{x_A}^{x_B} \sqrt{1 + (y')^2}\,dx = \int_{y_A}^{y_B} \sqrt{1 + (x')^2}\,dy = \int_{t_A}^{t_B} \sqrt{(x')^2 + (y')^2}\,dy. \qquad (12.13)$$

Якщо ж крива віднесена до полярної системи координат і задана рівнянням $\rho = \rho(\varphi)$ (рис.13.3), то $dl = \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2}\,d\varphi$ і

$$L_{AB} = \int_A^B dl = \int_{\varphi_A}^{\varphi_B} \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2}\,d\varphi. \qquad (12.14)$$

Якщо поверхня утворена обертанням дуги *AM* плоскої кривої навколо вісі *OX* (рис.13.4), то диференціал площі бічної поверхні зрізаного круглого конуса з

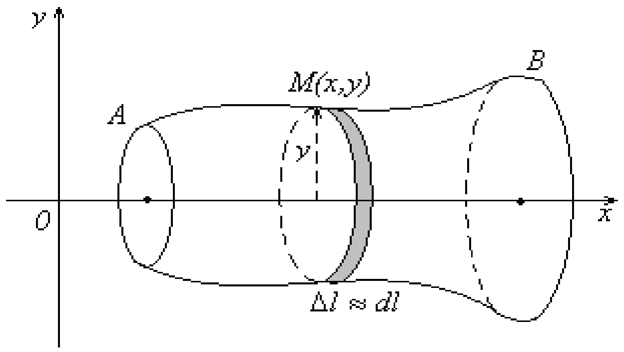


Рис.13.4

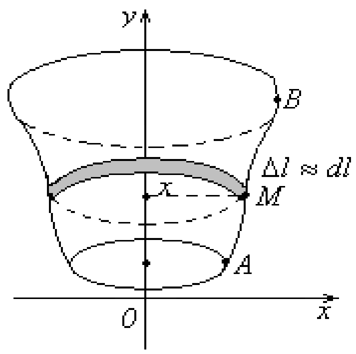


Рис.13.5

утворюючою dl і радіусами основ y і $y + dy$:

$$dS = \pi(2y + dy)dl \approx 2\pi y dl,$$

а площа поверхні, утвореної обертанням дуги *AB*, визначається інтегралом

$$S = \int_A^B dS = 2\pi \int_A^B y dl. \qquad (12.15)$$

При обертанні дуги *AB* кривої навколо вісі OY (рис.13.5)

$$dS \approx 2\pi x dl, \quad S = \int_A^B dS = 2\pi \int_A^B x dl \qquad (12.16)$$

Якщо тіло утворено обертанням криволінійної трапеції x_1ABx_2 (рис. 13.6) навколо вісі *OX*, то будь-який плоский перетин, який перпендикулярний до вісі *OX*,

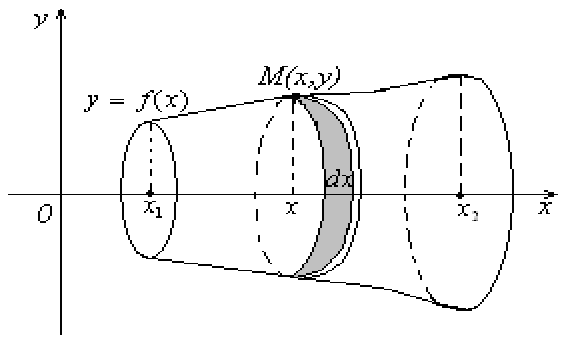


Рис.13.6

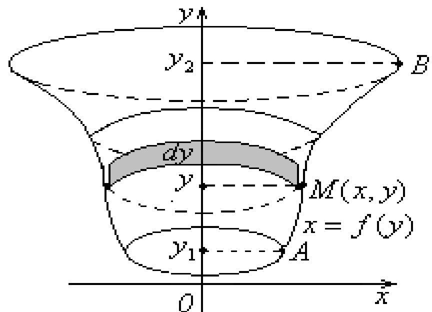


Рис.13.7

являється круг, радіус якого дорівнює відповідній ординаті кривої $y = f(x)$. Площа перетину $S(x)$, що відповідає абсцисі x, як площа круга, дорівнює πy^2. Диференціал об'єму тіла, що відповідає приросту dx, є $dV = \pi y^2 dx$, а увесь об'єм тіла обертання визначається інтегралом

$$V_{OX} = \pi \int_{x_1}^{x_2} y^2 dx, \quad (x_1 < x_2) \qquad (12.17)$$

Якщо тіло утворено обертанням криволінійної трапеції y_1ABy_2 (рис.13.7) навколо вісі OY, то $dV = \pi x^2 dy$ і

$$V_{OY} = \pi \int_{y_1}^{y_2} x^2 dy, \quad (y_1 < y_2) \qquad (12.18)$$

Невласні інтеграли з нескінченними межами інтегрування (**невласні інтеграли першого роду**):

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)dx, \text{ де } x \in [a;+\infty) \qquad (12.19)$$

і функція $y = f(x)$ інтегральна на $x \in [a;b)$, $a,b \in R$.

Якщо границя (12.19) існує (не існує або нескінченна), то невласний інтеграл називається **збіжним** (**розбіжним**), а функція $f(x)$ - **інтегрованою** (**неінтегрованою**) на проміжку $[a;+\infty)$.

Аналогічно

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{b \to -\infty} \int_a^b f(x)dx \qquad (12.20)$$

невласний інтеграл на проміжку $[-\infty;b)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_c^{+\infty} f(x)dx \qquad (12.21)$$

невласний інтеграл з двома нескінченними межами де $c \in R$.

Невласні інтеграли від необмежених функцій (**невласні інтеграли другого роду**):

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)dx, \qquad (12.22)$$

де функція $y = f(x)$ визначена при $x \in [a;b)$, має нескінченний розрив в точці $x = b$ (**особлива точка**) і інтегрована на $[a;b-\varepsilon)$ при довільному $\varepsilon > 0$, інтеграл (12.22) **збігається (розбігається)** якщо границя існує (не існує або нескінченна).

Аналогічно, якщо $x = a$ - особлива точка, то

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx \qquad (12.23)$$

Якщо функція $y = f(x)$ має нескінченний розрив в точці $x = c$, де $c \in [a;b)$ і неперервна при $a \le x < c$ і $c < x \le b$, то

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{c+\varepsilon}^{b} f(x)dx \qquad (12.24)$$

Невласний інтеграл (12.24) називається **збіжним (розбіжним)**, якщо існують обидві границі в правій частині рівності (12.24), і **розбіжним**, якщо не існує хоча б одна з них.

Приклади розв'язання типових задач

Приклад 1.

Обчислити інтеграл $\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} \sin 2x dx.$

Розв'язання.

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} \sin 2x dx = -\frac{1}{2}\cos 2x \Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = -\frac{1}{2}(\cos\frac{\pi}{3} - \cos 0) = -\frac{1}{2}(\frac{1}{2} - 1) = \frac{1}{4}.$$

Приклад 2.

Обчислити інтеграл $\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^2 x \cos x dx.$

Розв'язання.

Скористаємось формулою (12.5) і зробимо заміну змінної:

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^2 x \cos x dx = \left| \begin{array}{c} \sin x = t \\ \cos x dx = dt \\ x_1 = 0, t_1 = 0, \\ x_2 = \frac{\pi}{6}, t_2 = \frac{1}{2}, \end{array} \right| = \int\limits_0^{\frac{1}{2}} t^2 dt = \frac{t^3}{3}\Bigg|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{24}.$$

Приклад 3.

Обчислити інтеграл $\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} x\sin xdx$.

Розв'язання.

Підінтегральна функція є добутком полінома першого степеня на трансцендентну функцію. Тому скористаємось методом інтегрування в частинах і формулою (12.6):

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} x\sin xdx = \begin{vmatrix} u = x & dv = \sin xdx \\ du = dx & v = -\cos x \end{vmatrix} =$$

$$= -x\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{6}} + \int \cos xdx = -x\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{6}} + \sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = -\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} = \frac{6-\sqrt{3}\pi}{12}.$$

Приклад 4.

Обчислити інтеграл $\int \left|x^2-1\right|dx.$

Розв'язання.

Підінтегральна функція $y = \left|x^2-1\right|$ додання на [1,2] і від'ємна на [0,1]. Тому

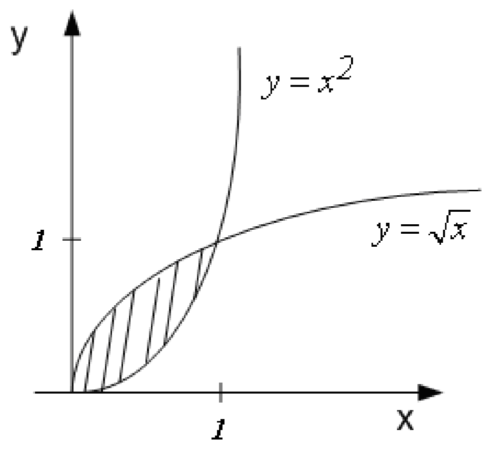
$$\int\limits_0^2 \left|x^2-1\right|dx = -\int\limits_0^1 \left|x^2-1\right|dx + \int\limits_1^2 \left|x^2-1\right|dx = -\int\limits_0^1 x^2dx + \int\limits_0^1 dx + \int\limits_1^2 x^2dx - \int\limits_1^2 \ dx =$$

$$-\frac{x^3}{3}\Bigg|_0^1 + x\Big|_0^1 + \frac{x^3}{3}\Bigg|_1^2 - x\Big|_1^2 = \frac{4}{3}.$$

Приклад 5.

Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $y = \sqrt{x}$, $y = x^2$.

Розв'язання.



Знайдемо точки перетину ліній, що обмежують фігуру:

$\sqrt{x} = x^2 \to x = x^4 \to x_1 = 0,\ x_2 = 1.$

Отже, враховуючи (12.10), маємо:

$$S = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)dx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 - \frac{x}{3}\Big|_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \text{ (кв.од.).}$$

Приклад 6.

Обчислити довжину дуги півкубічної параболи $y = \sqrt{x^3}$ від початку координат до точки $M(4;8)$.

Розв'язання.

Знайдемо y' і підставимо у формулу (12.11):

$$L = \int_0^4 \sqrt{1 + \left(\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}\right)^2} dx = \int_0^4 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x}dx = \left| \begin{array}{c} 1 + \frac{9}{4}x = t \\ \frac{9}{4}dx = dt \\ x_1 = 0,\ t_1 = 1 \\ x_2 = 4,\ t_2 = 10 \end{array} \right| = \frac{4}{9}\int_1^{10} t^{\frac{1}{2}}dt = \frac{4 \cdot 2t^{\frac{3}{2}}}{9 \cdot 3}\Bigg|_1^{10} =$$

$$= \frac{8}{27}(10^{\frac{3}{2}} - 1) = \frac{8}{27}(10\sqrt{10} - 1).$$

Приклад 7.

Знайти площу поверхні, утвореної обертанням навколо вісі OX астроїди $x = a\cos^3 t, y = a\sin^3 t.$

Розв'язання

Функція задана параметрично. Застосовуємо формулу (12.15). При цьому врахуємо, що $dl = \sqrt{x'^2 + y'^2}dt$ і те, що $\frac{1}{2}$ поверхні, утворена обертанням четвертої частини астроїди, розташованої в першому квадранті (рис.12.19),

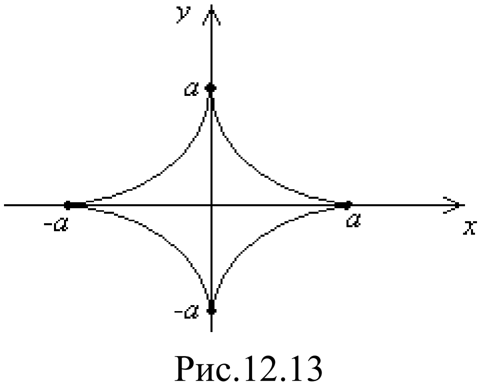


Рис.12.13

при зміні t від 0 до $\frac{\pi}{2}$. Отримуємо:

$$S = 2\cdot 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} y\sqrt{x'^2+y'^2}\,dt = 4\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} a\sin^3 t\sqrt{\left(-3a\cos^2 t\sin t\right)^2+\left(3a\sin^2 t\cos t\right)^2}\,dt =$$

$$12a^2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 t\cos dt = 12a^2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 t\,d\sin t = \frac{12}{5}a^2\pi\sin^5 t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{12}{5}\pi a^2$$

Приклад 8.

Обчислити об’єм тіла, утвореного обертанням навколо осі OY фігури, обмеженої лінією $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$

Розв’язання

Ця лінія є еліпс. Якщо у цього еліпса $b<a,$ то при обертанні його навколо малої вісі отримуємо стиснутий еліпсоїд обертання (рис.12.20).

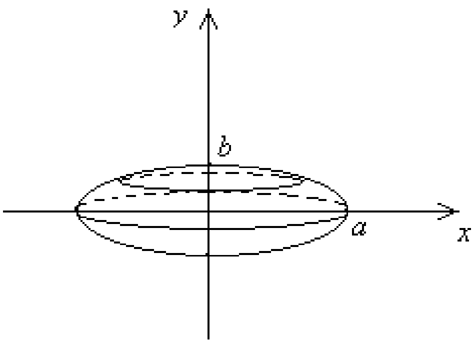


Рис.12.20

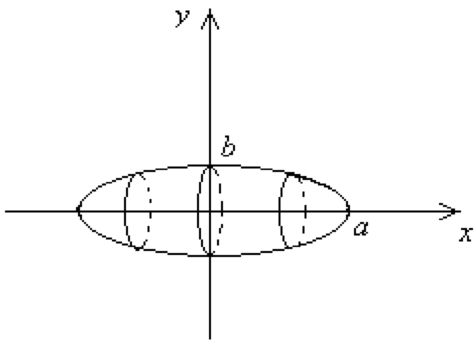


Рис.12.21

Обчислюємо об’єм V_1 цього тіла за формулою (12.18:)

$$V_1=\pi\int_{y_1}^{y_2} x^2dy = \pi a^2\int_{-b}^{b}\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)dy = 2\pi a\int_0^{b}\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)dy = 2\pi a^2\left(y-\frac{y^3}{3b^2}\right)\Bigg|_0^{b} = \frac{4}{3}\pi a^2 b$$

Якщо еліпс обертається навколо великої вісі, то отримуємо подовжений еліпсоїд обертання (рис.12.21), об’єм якого $V_2=\frac{4}{3}\pi ab^2.$

Очевидно $V_1>V_2.$

Приклад 9.

Обчислити невласні інтеграли (або встановити їх розбіжності).

а) $\int_0^{+\infty} cosxdx$

Розв’язання

$\int_0^{+\infty} cosxdx = \lim_{b\to+\infty}\int_0^{b}\cos xdx = \lim_{b\to+\infty}\left(sinx\Big|_0^b\right) = \lim_{b\to+\infty}\left(sinb-sin0\right) = \lim_{b\to+\infty}(sinb)$ - не існує.

Отже, невласний інтеграл розбіжний.

б) $\int\limits_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{x^2}$

Розв'язання

$$\int\limits_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{x^2} = \lim_{a \to -\infty} \int\limits_{a}^{-1} \frac{dx}{x^2} = \lim_{a \to -\infty} \left(-\frac{1}{x}\Big|_a^{-1} \right) = -\lim_{a \to -\infty} \left(1 + \frac{1}{a} \right) = 1.$$

Отже, невласний інтеграл збіжний.

в) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$

Розв'язання

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \int\limits_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2} + \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{a \to -\infty} \int\limits_{a}^{0} \frac{dx}{1+x^2} + \lim_{b \to +\infty} \int\limits_{0}^{b} \frac{dx}{1+x^2} =$$

$$= \lim_{a \to -\infty} \left(arctgx \Big|_a^0 \right) + \lim_{b \to +\infty} \left(arctgx \Big|_c^b \right) =$$

$$= \lim_{a \to -\infty} (arctg0 - arctga) + \lim_{b \to \infty} (arctgb - arctga) = -\left(-\frac{\pi}{2} \right) + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

Отже, невласний інтеграл збіжний.

г) $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$

Розв'язання

$x = 1 - особлива\ точка$

$$\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{0}^{1-\varepsilon} (1-x)^{-\frac{1}{2}} dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \left((-2)\sqrt{1-x} \right)\Big|_0^{1-\varepsilon} = -2 \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\sqrt{1-1+x} \right) - \sqrt{1-0} \Big) =$$

$= 2 \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \left(1 - \sqrt{\varepsilon} \right) = 2$, де $\varepsilon > 0$.

Отже, невласний інтеграл збіжний.

д) $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{x^n}, n > 0$

Розв'язання

Якщо $n \neq 1$, то

$$\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{x^n} = \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{0+\varepsilon}^{1} x^{-n} dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{x^{1-n}}{1-n}\Big|_{\varepsilon}^{1} = \frac{1}{1-n} \lim_{\varepsilon \to 0} \left(1 - \varepsilon^{1-n} \right) = \begin{cases} \frac{1}{1-n}, при\ 0 < n < 1; \\ +\infty, при\ n > 1. \end{cases}$$

Якщо n=1, то $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x} = \lim\limits_{\varepsilon\to+0}\left(\ln x\Big|_{\varepsilon}^{1}\right) = -\lim\limits_{\varepsilon\to+0}\left(\ln\varepsilon\right) = +\infty$.

Отже, невласний інтеграл збігається при $0 < n < 1$ і розбігається при $n \ge 1$.

Задачі

12.1. Обчисліть визначений інтеграл за формулою Ньютона-Лейбніца:

1) $\int\limits_0^{1,5} \frac{x^2+2x+1}{x+1}dx;$ 2) $\int\limits_1^4 \frac{\sqrt{x}-\sqrt[3]{2x}}{x}dx;$

3) $\int\limits_0^{-1} \frac{t^4-1}{1+t^2}dt;$ 4) $\int\limits_{-1}^{0} \frac{\sqrt{4+4x+x^2}}{x+2}dx;$

5) $\int\limits_{-4}^{-3} \frac{\sqrt{4+4x+x^2}}{x+2}dx;$ 6) $\int\limits_0^{2\pi} (\sin 3\varphi + 5\cos\frac{\varphi}{2})d\varphi;$

7) $\int\limits_{-1}^{1} \frac{2^x-3^x}{6^x}dx;$ 8) $\int\limits_{2\sqrt{2}}^{4} x\sqrt{x^2-7}dx;$

9) $\int\limits_{-1}^{1} \frac{x^2dx}{3+2x^3};$ 10) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\cos^2 xdx;$

11) $\int\limits_2^8 \frac{dx}{x\ln x};$ 12) $\int\limits_0^1 \frac{e^xdx}{e^x+5};$

13) $\int\limits_0^1 xe^{-x}dx;$ 14) $\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \arcsin xdx;$

15) $\int\limits_1^2 x\ln xdx;$ 16) $\int\limits_0^{\pi} e^x\sin xdx.$

12.2. Обчисліть визначений інтеграл:

1) $\int\limits_{-1}^{2} f(x)dx,\ \ \text{якщо}\ \ f(x)=\begin{cases} x, & x\le 0 \\ x^2, & x>0 \end{cases};$

2) $\int\limits_{-1}^{1} |x|\,dx;$ 3) $\int\limits_0^{\pi} \sqrt{\frac{1-\cos 2\varphi}{2}}d\varphi;$

4) $\int\limits_0^{\pi} \sqrt{\frac{1+\cos 2\varphi}{2}}d\varphi;$ 5) $\int\limits_0^{2\pi} |\sin 2x|\,dx.$

12.3. Не обчислюючи інтеграл, визначте його знак:

1) $\int_0^{\pi} x\sin x dx;$ 2) $\int_1^{2} lg\, x dx;$

3) $\int_1^{1,1} (x^2 - 3x + 2)dx;$ 4) $\int_{10}^{11} (x^2 - 3x + 2)dx;$

5) $\int_1^{2} log_{0,1}\, x dx;$ 6) $\int_0^{1} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x})dx.$

12.4. Не обчислюючи інтегралів, визначте, який з них більший:

1) $\int_0^{0,9} x^{10}dx$ або $\int_0^{0,9} x^{11}dx;$ 2) $\int_1^{90} x^{10}dx$ або $\int_1^{90} x^{11}dx;$

3) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$ або $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx;$ 4) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x dx$ або $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos^2 x dx.$

12.5. Доведіть, що:

$$1)\ \frac{\pi}{128} < \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^{10} x dx < \frac{\pi}{4};$$

$$2)\ \frac{e}{3} < \int_1^{e} \frac{dx}{\ln x + 2} < \frac{e}{2};$$

$$3)\ \frac{3}{2} < \int_{0,5}^{2} \frac{4^x}{x} dx < 48.$$

12.6. Обчисліть площу фігури, обмеженої лініями:

1) $y = 4x - 5;\ \ x = -3;\ \ x = 2;\ \ y = 0;$

2) $y = 2x^2;\ \ y = 0;\ \ x = 2;\ \ x = 4;$

3) $y = x^2 + 4x;\ \ y = x + 4;$

4) $y = 0,5x^2 - 3x + 2;\ \ y = x - 4;$

5) $y = \sqrt{x};\ \ y = 0;\ \ x = 9;$

6) $y = \frac{1}{\sqrt{x}};\ \ y = 0;\ \ x = 1;\ \ x = 4;$

7) $y = \frac{1}{x};\ \ x = 1;\ \ x = e;\ \ y = 0;$

8) $y = \sin 3x;\ \ y = 0;\ \ x = 0;\ \ x = \frac{\pi}{3};$

9) $y = \ln x;\ \ x = 0;\ \ y = 1;\ \ y = -1;$

10) $y = e^x;\ \ y = 0;\ \ x = 0;\ \ x = 3;$

11) $y = e^{x}; \quad y = x+1; \quad x = 2;$

12) $y = tgx; \quad y = 0; \quad x = \dfrac{\pi}{3}.$

13) еліпса $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t \end{cases}$;

14) одною аркою циклоїди $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \quad \text{і віссю } OX \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$;

15) астроїдою $\begin{cases} x = a\cos^{3} t \\ y = a\sin^{3} t \end{cases}$;

16) кардіоїдою $\begin{cases} x = a(2\cos t - \cos 2t) \\ y = a(2\sin t - \sin 2t) \end{cases}$;

17) лемніскатою Бернуллі $\rho^{2} = a^{2}\cos 2\varphi$;

18) равликом Паскаля $\rho = 2 + \cos\varphi$.

12.7. Визначити довжину дуги лінії:

1) $y^{2} = x^{2}$, яку відтинає пряма $x = 1;$

2) $y^{2} = \ln\cos x$, яку відтинають прямі $x = 0$ і $x = \dfrac{\pi}{6};$

3) $y^{2} = (x+1)$, яку відтинає пряма $x = 4;$

4) $y^{2} = \dfrac{4}{9(2-x)^{3}}$, яку відтинає пряма $x = -1;$

5) $y^{2} = x^{2} - 1$, яку відтинає вісь Ox;

6) $y = \ln\sin x$, від $x = \dfrac{\pi}{3}$ до $x = \dfrac{2\pi}{3};$

7) $y = \dfrac{x^{2}}{4} - \dfrac{1}{2}\ln x$ від $x = 1$ до $x = e.$

8) астроїди $\begin{cases} x = a\cos^{3} t \\ y = a\sin^{3} t \end{cases}$;

9) однієї арки циклоїди $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$;

10) $\begin{cases} x = t^{2} \\ y = \dfrac{t}{3}\left(t^{2} - 3\right) \end{cases}$ між точками перетину з віссю OX;

11) кардіоїди $\rho = a(1 - \cos\varphi);$

12) всієї кривої $\rho = a\sin^{3}\dfrac{\varphi}{3};$

13) всієї кривої $\rho = a\cos^3\frac{\varphi}{3}$;

14) першого звою спіралі Архімеда $\rho = a\varphi$.*

12.8. Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням:

1) навколо осі OX дуги кубічної параболи $y = x^3$,що міститься між прямими $x = -\frac{2}{3}$ і $x = \frac{2}{3}$;

2) навколо осі OX дуги параболи $y^2 = 2x$ між точками перетину з прямою $2x = 3$;

3) навколо осі OX однієї хвилі синусоїди $y = \sin x$;

4) навколо осі OX дуги кола $x^2 + y^2 = 4$ $(y > 0)$ між точками з абсцисами $x = -1$ і $x = 1$;

5) навколо осі OX дуги кубічної параболи $y = \frac{x^3}{3}$ від $x = -2$ до $x = 2$;

6) навколо осі OX дуги параболи $y^2 = 4 + x$, відтятої прямою $x = 2$;

7) навколо осі OY дуги параболи $y = \frac{x^2}{2}$, відтятої прямою $y = 1{,}5$;

8) навколо осі OY лінії $4x^2 + y^2 = 4$;

9) навколо осі OX кола $x = a\cos t, y = a\sin t$;

10) навколо осі OY пів кубічної параболи $x = 4 - \frac{t^2}{2}, y = \frac{t^3}{3}$ між точками перетину з осями координат;

11) навколо осі OX петлі кривої $x = t^2, y = \frac{t}{3}\left(t^2 - 3\right)$.

12.9. Обчислити об’єм тіла, утвореного обертанням фігури, що обмежена лініями:

1) $xy = 4, \quad x = 1, \quad x = 4, \quad y = 0$ навколо осі OX;

2) $y^2 = (x + 4)^3$ і $x = 0$ навколо осі OY;

3) $y^2 = 4 - x, \quad x = 0$ навколо осі OY;

4) $y = \cos x$ і $y = -1$ навколо прямої $y = -1$ при $-\pi \le x \le \pi$;

5) $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right), x = 0, y = 0$ (при $x > 0$);

6) $y^2 + x - 4 = 0, \quad x = 0$ навколо осі OY;

7) астроїди $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$ навколо осі OY;

8) однієї арки циклоїди $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t)$ навколо осі OX;

9) $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ навколо осі OX;

10) астроїди $x = a\cos^3 t, y = a\sin^3 t$ навколо осі OX.

12.10. Обчисліть невласні інтеграли або доведіть їх розбіжність

а) $\int_{0}^{+\infty} xe^{-x^2}dx$ б) $\int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{4+x^2}$

в) $\int_{0}^{+\infty} x\sin x dx$ г) $\int_{-\infty}^{\infty} e^{x}dx$

д) $\int_{0}^{1} \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$ е) $\int_{0}^{1} \ln x dx$

ж) $\int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$ з) $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2}$