Тема 5

Векторна алгебра

Вектором називається напрямлений відрізок, який позначають $\overrightarrow{AB}$ (А-початкова точка, В – кінцева) або просто $\vec{a}$.

Довжина вектора $\vec{a}$ називається його **модулем** і позначається $|\vec{a}|$.

Вектор, довжина якого дорівнює 0, називається **нульовим** і позначається $\vec{0}$.

Одиничним називається вектор довжина якого дорівнює 1.

Вектори, які лежать на паралельних прямих (або на одній прямій), називаються **колінеарними**.

Вектори, які лежать в паралельних площинах (або на одній площині), називаються **компланарними**.

Вектори називаються **рівними** між собою, якщо вони колінеарні, однаково напрямлені і рівні за модулем.

Лінійні операції над векторами.

Сумою $\vec{a}+\vec{в}$ двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{в}$ називається вектор, напрямлений з початку вектора $\vec{a}$ в кінець вектора $\vec{в}$ за умови, що кінець вектора $\vec{a}$ і початок вектора $\vec{в}$ збігаються (рис. 5.1).

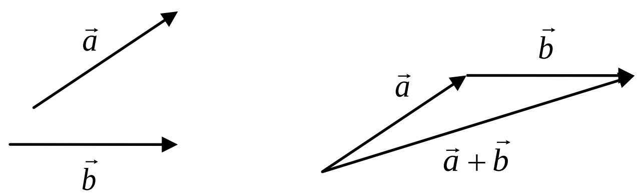


Рис. 5.1

Це так зване правило трикутника. Якщо вектори зведені до одного початку, то використовують рівносильне правило паралелограма: сума $\vec{a}+\vec{в}$ є вектор, що співпадає з тією діагоналлю паралелограма, побудованого на цих векторах, яка виходить із спільного початку векторів $\vec{a}$ і $\vec{в}$.

Сума кількох векторів – це вектор, який замикає ламану, побудовану з даних векторів (рис. 5.2).

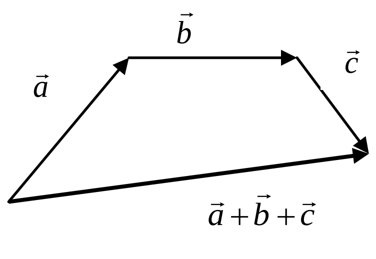


Рис. 5.2

Різницю векторів $\vec{a}$ і $\vec{в}$ розглядають як суму векторів $\vec{a}$ і ($-\vec{в}$) (рис.5.3).

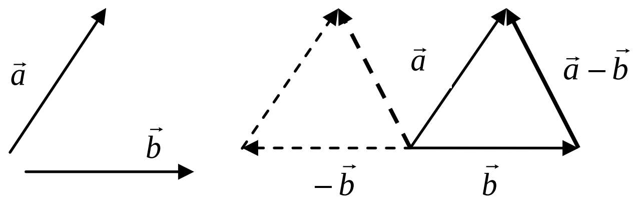


Рис. 5.3

Добутком дійсного числа λ на вектор $\vec{a}$ називають вектор $\vec{в} = \lambda\vec{a}$, довжина якого $\left|\vec{в}\right| = |\lambda|\left|\vec{a}\right|$, а напрям збігається з напрямом вектора $\vec{a}$ при $\lambda > 0$ і протилежний йому при $\lambda < 0$.

Множина векторів утворює лінійний простір.

Лінійною комбінацією векторів $\overrightarrow{a_1}$, $\overrightarrow{a_2}$, ..., $\overrightarrow{a_n}$ з дійсними коефіцієнтами λ_1, λ_2, ..., λ_n називається довільний вектор $\vec{a}$ виду:

$$\vec{a} = \lambda_1\overrightarrow{a_1} + \lambda_2\overrightarrow{a_2} + \ldots + \lambda_n\overrightarrow{a_n}, \text{ де } n \in N \quad (5.1).$$

Якщо вектор поданий у вигляді лінійної комбінації деяких векторів, то кажуть, що він **розкладений за цими векторами**.

Вектори $\overrightarrow{a_1}$, $\overrightarrow{a_2}$, ..., $\overrightarrow{a_n}$ називають **лінійно залежними**, якщо хоча б один з них є лінійною комбінацією інших. В противному випадку вектори називають **лінійно незалежними.**

Розмірність лінійного простору – це максимально можлива кількість лінійно незалежних векторів в ньому.

Якщо розмірність лінійного простору векторів дорівнює *n*, то будь-яка впорядкована сукупність з *n* лінійно незалежних векторів в ньому називається **базисом лінійного простору**.

Базис називається **ортонормованим**, якщо його вектори попарно ортогональні і одиничні. Прийнято в просторі такий базис позначати $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$, а на площині $\vec{i}$, $\vec{j}$ і називати **декартовим**. Тоді розклад вектора (5.1) по базису $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ матиме вигляд:

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k} \quad (5.2)$$

Коефіцієнти розкладу (5.2) називаються **координатами** вектора $\vec{a}$. В цьому випадку використовують позначення:

$$\vec{a} = \{a_x, a_y, a_z\} \quad (5.3)$$

Декартовою прямокутною системою координат в просторі називається сукупність точки *O* (початку координат) і ортонормованого базису. Прямі, що проходять через т. *O* в напрямку базисних векторів, називаються **координатними осями**, а координати вектора $\vec{a}$ - це його проекції на координатні осі (рис. 5.4).

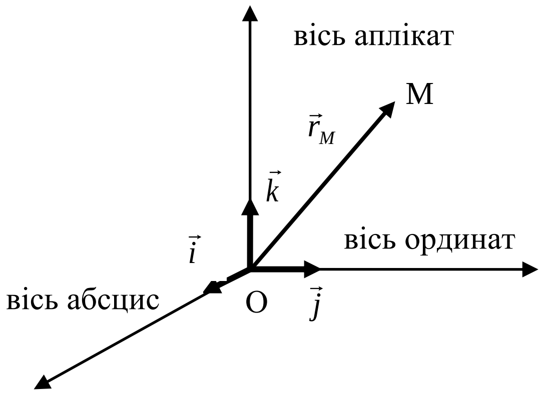


Рис. 5.4

Радіусом – вектором $\overrightarrow{r_M}$ точки простору *M* називається вектор, що з'єднує т. *O* з т. *M*. Кожній т. *M* простору ставиться у відповідність трійка чисел – координат її радіуса – вектора, які прийнято позначати: *M (x,y,z)*.

Напрям вектора $\vec{a}$ визначається кутами α, β, γ, утвореними з осями координат OX, OY, OZ.

Косинуси цих кутів (напрямні косинуси вектора) визначаються за формулами:

$$cos\alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|} = \frac{a_x}{\sqrt{a_x^{\ 2} + a_y^{\ 2} + a_z^{\ 2}}}$$

$$cos\beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|};\ cos\gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|} \tag{5.5}$$

Напрямні косинуси вектора пов'язані співвідношенням:

$$cos^2\alpha + cos^2\beta + cos^2\gamma = 1 \tag{5.6}$$

Координатами одиничного вектора є його напрямні косинуси:

$$\vec{e} = \{cos\alpha, cos\beta, cos\gamma\} \tag{5.7}$$

Добуток векторів.

I. **Скалярним добутком векторів** $\vec{a}$ і $\vec{в}$ називається число, яке дорівнює добутку модулів цих векторів на косинус кута φ між ними:

$$\vec{a} \cdot \vec{в} = |\vec{a}| \cdot |\vec{в}| cos\varphi \tag{5.8}$$

Властивості:

1. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$; (5.9)
2. $\vec{a}(\vec{в} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{в} + \vec{a} \cdot \vec{c}$ (5.10)
3. $(\lambda\vec{a}) \cdot \vec{в} = \vec{a}(\lambda \cdot \vec{в}) = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{в}),\ \lambda \in R$ (5.11)
4. $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$ (5.12)

5. Якщо $\vec{a} \neq 0$ і $\vec{в} \neq 0$, то $\vec{a} \cdot \vec{в} = 0$, тоді і тільки тоді, коли $\vec{a} \perp \vec{в}$ (5.13)

6. $cos\varphi = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{в}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{в}|}$ (5.14)

Скалярні добутки ортів осей координат:

$$\vec{i}^{\,2} = \vec{j}^{\,2} = \vec{k}^{\,2} = 1 \quad (5.15)$$

$$\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{i} \cdot \vec{k} = \vec{j} \cdot \vec{k} = 0 \quad (5.16)$$

II. **Векторним** добутком векторів $\vec{a}$ і $\vec{в}$ $(\vec{a} \times \vec{в})$ називається третій вектор $\vec{c}$, який визначається наступним чином (рис. 5.5):

1) Модуль вектора $\vec{c}$ дорівнює площі паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{в}$:

$|\vec{c}| = |\vec{a} \times \vec{в}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{в}| sin\varphi$, де φ - кут між векторами $\vec{a}$ i $\vec{в}$ (5.17)

2) $\vec{c} \perp \vec{a}$, $\vec{c} \perp \vec{в}$ і утворює праву трійку з векторами $\vec{a}$ і $\vec{в}$.

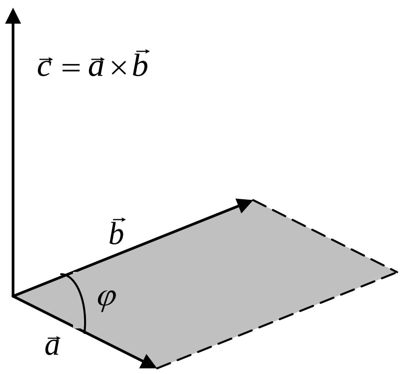


Рис. 5. 5

Властивості:

1) $\vec{в} \times \vec{a} = -\vec{a} \times \vec{в}$ (5.18)

2) Якщо $\vec{a} \neq 0$ i $\vec{в} \neq 0$, то $\vec{a} \times \vec{в} = 0$ тоді і лише тоді, коли $\vec{a}$ i $\vec{в}$ колінеарні. (5.19)

3) $(\lambda \vec{a}) \times \vec{в} = \vec{a} \times (\lambda \vec{в}) = \lambda (\vec{a} \times \vec{в})$ (5.20)

4) $\vec{a} \times (\vec{в} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{в} + \vec{a} \times \vec{c}$ (5.21)

Векторні добутки координатних ортів:

$$\vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = 0 \quad (5.22)$$

$$\vec{i} \times \vec{j} = -\vec{j} \times \vec{i} = \vec{k};\ \vec{j} \times \vec{k} = -\vec{k} \times \vec{j} = \vec{i};\ \vec{k} \times \vec{i} = -\vec{i} \times \vec{k} = \vec{j}. \quad (5.23)$$

III. **Мішаним** добутком упорядкованої трійки векторів $(\vec{a},\vec{в},\vec{c})$ називається число, яке дорівнює скалярному добутку вектора $\vec{a}\times\vec{в}$ на вектор $\vec{c}$:

$$(\vec{a},\vec{в},\vec{c}) = (\vec{a}\times\vec{в})\cdot\vec{c} \qquad (5.24)$$

Мішаний добуток $\vec{a},\vec{в},\vec{c}$ по модулю дорівнює об’єму паралелепіпеда, побудованого на цих векторах :

$$V\,парал. = |(\vec{a}\ \vec{в}\ \vec{c})|, \qquad (5.25)$$

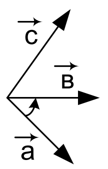
а об’єм відповідної трикутної піраміди :

$$V\,пір. = \frac{1}{6}|(\vec{a},\vec{в},\vec{c})|. \qquad (5.26)$$

Властивості :

1) Якщо $\vec{a}\neq 0,\vec{в}\neq 0,\vec{c}\neq 0,$ то $\vec{a}\vec{в}\vec{c}=0$ тоді і тільки тоді, коли вектори компланарні (5.27)

2) Якщо $\vec{a}\,\vec{в}\,\vec{c}>0$, то упорядкована трійка векторів права (рис. 5.6), а якщо $\vec{a}\,\vec{в}\,\vec{c}<0$, то – ліва (рис. 5.7).



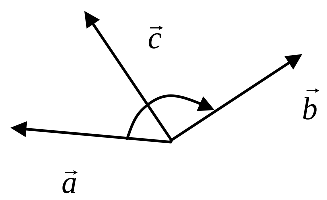


Рис. 5.6 Рис. 5.7

3) $(\vec{a}\times\vec{в})\cdot\vec{c} = \vec{a}\cdot(\vec{в}\times\vec{c}).$ (5.28)

4) $(\vec{a},\vec{в},\vec{c}) = (\vec{в},\vec{c},\vec{a}) = (\vec{c},\vec{a},\vec{в}).$ (5.29)

5) $(\vec{в},\vec{a},\vec{c}) = -(\vec{a},\vec{в},\vec{c});\ (\vec{c},\vec{в},\vec{a}) = -(\vec{a},\vec{в},\vec{c});\ (\vec{a},\vec{c},\vec{в}) = -(\vec{a},\vec{в},\vec{c}).$ (5.30)

Нехай вектори $\vec{a},\vec{в},\vec{c}$ задані в декартовому базисі :

$$\begin{aligned}\vec{a} &= \{a_x, a_y, a_z\},\\ \vec{в} &= \{в_x, в_y, в_z\},\\ \vec{c} &= \{c_x, c_y, c_z\},\end{aligned} \qquad (5.31)$$

тоді :

1^0. $\vec{a}\pm\vec{b} = (a_x \pm b_x)\vec{i} + (a_y \pm b_y)\vec{j} + (a_z \pm b_z)\vec{k}$; (5.32)

2^0. Добуток вектора $\vec{a}$ на скалярний множник λ визначається формулою:

$$\lambda\vec{a} = \lambda a_x\vec{i} + \lambda a_y\vec{j} + \lambda a_z\vec{k}. \qquad (5.33)$$

Зокрема, якщо $\lambda = \frac{1}{|\vec{a}|}$, то вектор $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ має довжину, рівну 1, і напрям вектора $\vec{a}$. Цей вектор називають **одиничним вектором** вектора $\vec{a}$ і позначають $\vec{a}_0$. Таким чином,

$$\vec{a}_0 = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}, \text{ або } \vec{a} = |\vec{a}|\vec{a}_0 \tag{5.34}$$

3^0. Вектор $\overrightarrow{AB}$, де $A(x_1, y_1, z_1)$ - початок, а $B(x_2, y_2, z_2)$ - кінець вектора, можна представити у вигляді:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{r_2} - \overrightarrow{r_1}, \tag{5.35}$$

де $\overrightarrow{r_2}$ - радіус-вектор точки В, а $\vec{r}_1$ - радіус-вектор точки А. Отже, розклад вектора $\overrightarrow{AB}$ за ортами має вигляд:

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1)\vec{i} - (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k} \tag{5.36}$$

4^0. Довжина вектора $\overrightarrow{AB}$ співпадає з відстанню між точками А і В:

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \tag{5.37}$$

5^0. Напрям вектора $\overrightarrow{AB}$ визначається напрямними косинусами:

$$\cos\alpha = \frac{x_2 - x_1}{d}; \;\; \cos\beta = \frac{y_2 - y_1}{d}; \;\; \cos\gamma = \frac{z_2 - z_1}{d}; \tag{5.38}$$

6^0. $\quad \vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z;$ (5.39)

7^0. $\quad \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$ (5.40)

8^0. $\quad \left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$ (5.41)

9^0. Якщо відрізок M_1M_2 розділений т. M у відношенні λ, тобто

$$\frac{M_1M}{MM_2} = \lambda,$$

то радіус-вектор т. M знаходиться за формулою:

$$\vec{r} = \frac{\overrightarrow{r_1} + \lambda\overrightarrow{r_2}}{1 + \lambda} \tag{5.42}$$

10^0. Умова коллінеарності векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$:

$$\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z} = \lambda; \tag{5.43}$$

11^0. Умова перпендикулярності векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$:

$$a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0 \tag{5.44}$$

Положення точки на площині можна визначити за допомогою полярної системи координат, яка задається точкою O (полюсом) і променем Op (полярною віссю).

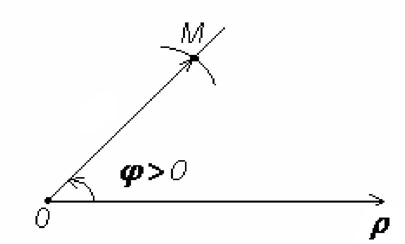


Рис.5.9

Довільна точка площини M буде мати дві полярні координати: $\rho = \left|\overrightarrow{OM}\right|$ і $\varphi = \left(\rho, \widehat{\ \overrightarrow{OM}}\right)$ (рис.5.9) де $\rho \geq 0, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$.

Між полярними і прямокутними декартовими координатами існує наступний зв'язок:

$$x = \rho\cos\varphi, y = \rho\sin\varphi; \tag{5.45}$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, tg\varphi = \frac{y}{x} \text{ (рис.5.10)}$$

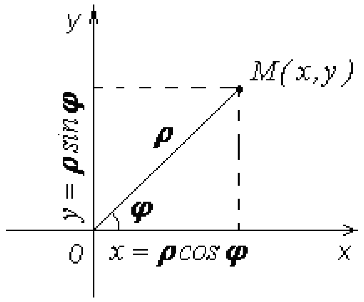


Рис.5.10

Приклади розв'язання типових задач

Приклад 1.

В трикутнику $ABC: AM = MN = NB$, де $M, N \in AB$.

Знайти вектор $\overrightarrow{CM}$, якщо $\overrightarrow{CA} = \vec{a}; \overrightarrow{CB} = \vec{b}$.

Розв'язання.

Маємо $\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$. Отже, $\overrightarrow{AM} = \dfrac{\vec{b} - \vec{a}}{3}$.

Оскільки $\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AM}$, то $\overrightarrow{CM} = \vec{a} + \dfrac{\vec{b} - \vec{a}}{3} = \dfrac{2\vec{a} + \vec{b}}{3}$

Відповідь: $\dfrac{2\vec{a} + \vec{b}}{3}$.

Приклад 2.

Радіусами-векторами вершин ΔABC є $\overrightarrow{r_1}, \overrightarrow{r_2}$ і $\overrightarrow{r_3}$. Знайти радіус-вектор точки перетину медіан трикутника.

Розв'язання.

Маємо: $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{r_2} - \overrightarrow{r_1}$; $\overrightarrow{BD} = \dfrac{\overrightarrow{r_3} - \overrightarrow{r_2}}{2}$; $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{r_2} - \overrightarrow{r_1}$;

$$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{AB}=\frac{\overrightarrow{r_3}-\overrightarrow{r_2}}{2}+\overrightarrow{r_2}-\overrightarrow{r_1}=\frac{\overrightarrow{r_2}+\overrightarrow{r_3}-2\overrightarrow{r_1}}{2};$$

$\overrightarrow{AM}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$ (D - середина BC ; M - точка перетину медіан).

$\overrightarrow{AM}=\frac{\overrightarrow{r_2}+\overrightarrow{r_3}-2\overrightarrow{r_1}}{3}$; $\vec{r}=\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{r_1}+\overrightarrow{AM}=\frac{\overrightarrow{r_2}+\overrightarrow{r_3}-2\overrightarrow{r_1}}{3}+\overrightarrow{r_1}$, або $\vec{r}=\frac{\overrightarrow{r_1}+\overrightarrow{r_2}+\overrightarrow{r_3}}{3}$

Відповідь: $\vec{r}=\frac{\overrightarrow{r_1}+\overrightarrow{r_2}+\overrightarrow{r_3}}{3}$.

Приклад 3.

Задані вектори $\vec{a}=(2;0;-2)$ і $\vec{b}=(-2;1;2)$.

Знайти проекцію вектора $\vec{c}=2\vec{a}+\vec{b}$ на вектор $\vec{b}$.

Розв'язання.

Знайдемо вектор $\vec{c}$:

$\vec{c}=2(2\vec{i}-2\vec{k})+(-2\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k})=2\vec{i}+\vec{j}-2\vec{k}$, тобто $\vec{c}=(2;1;-2)$.

Тоді $пр_{\vec{b}}\vec{c}=\frac{\vec{b}\cdot\vec{c}}{|\vec{b}|}=\frac{2(-2)+1\cdot 1+(-2)\cdot 2}{\sqrt{4+1+4}}=-\frac{7}{3}$

Відповідь: $-\frac{7}{3}$.

Приклад 4.

Визначити, при яких значеннях m і n вектори $\vec{a}=(-6;m;2)$ і $\vec{b}=(n;4;-1)$ колінеарні.

Розв'язання:

З умови колінеарності двох векторів (5.43) маємо: $\frac{-6}{n}=\frac{m}{4}=\frac{2}{-1}$; отже, $m=-8$; $n=3$.

Відповідь: $m=-8$; $n=3$.

Приклад 5.

Знайти кут між векторами $\vec{a}=\vec{i}+2\vec{j}+3\vec{k}$ і $\vec{b}=6\vec{i}+4\vec{j}-2\vec{k}$

Розв'язання.

Оскільки $\vec{a}\cdot\vec{в}=|\vec{a}|\cdot|\vec{в}|\cos\varphi$, то

$$\cos\varphi=\frac{1\cdot 6+2\cdot 4+3\cdot(-2)}{\sqrt{1+4+9}\cdot\sqrt{36+16+4}}=\frac{8}{\sqrt{14}\cdot 2\sqrt{14}}=\frac{2}{7}.$$

Отже, $\varphi=\arccos\frac{2}{7}$.

Відповідь: $\varphi = arccos\dfrac{2}{7}$

Приклад 6.

Знайти площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a} + 3\vec{b}$ і $3\vec{a} + \vec{b}$, якщо $\left|\vec{a}\right| = \left|\vec{в}\right| = 1$, $(\vec{a}\wedge\vec{b}) = 30^0$.

Розв'язання.

Маємо

$$(\vec{a} + 3\vec{b}) \times (3\vec{a} + \vec{b}) = 3\vec{a}\times\vec{a} + \vec{a}\times\vec{b} + 9\vec{b}\times\vec{a} + 3\vec{b}\times\vec{b} = 3\cdot 0 + \vec{a}\times\vec{b} - 9\vec{a}\times\vec{b} + 3\cdot 0 = -8\vec{a}\times\vec{b}$$

оскільки $\vec{a}\times\vec{a} = \vec{b}\times\vec{b} = 0$; $\vec{b}\times\vec{a} = -\vec{a}\times\vec{b}$.

Отже, $S = 8\left|\vec{a}\times\vec{b}\right| = 8\cdot 1\cdot 1\cdot sin30^0 = 4$

Відповідь: 4.

Приклад 7.

Знайти площу трикутника PQR, заданого вершинами $P(1;2;3);\ \ Q(-1;3;0);$ $R(-2;-3;-5);$.

Розв'язання.

Площа трикутника PQR дорівнює половині площі паралелограма, побудованого на векторах $\overrightarrow{PQ}$ і $\overrightarrow{PR}$.

Оскільки $\overrightarrow{PQ} = (-2;1;-3);\ \ \overrightarrow{PR} = (-3;-5;-8);$ і за формулою

$$\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 1 & -3 \\ -3 & -5 & -8 \end{vmatrix} = -23\vec{i} - 7\vec{j} + 13\vec{k}, \text{ то}$$

$$S_{\Delta PQR} = \frac{1}{2}S_{парал.} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{23^2 + 7^2 + 13^2} = \frac{\sqrt{747}}{2} = \frac{3}{2}\sqrt{83}.$$

Відповідь: $\dfrac{3}{2}\sqrt{83}$.

Приклад 8.

Знайти об'єм трикутної піраміди з вершинами $A(2;2;2);\ B(4;3;3);\ \ C(4;5;4);$ $D(5;5;6)$.

Розв'язання.

Знайдемо вектори $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$, які співпадають з ребрами піраміди:

$\overrightarrow{AB} = 2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$; $\overrightarrow{AC} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$; $\overrightarrow{AD} = 3\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}$.

Знайдемо мішаний добуток цих векторів за формулою (5.41):

$$\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right)=\begin{vmatrix}2 & 1 & 1\\ 2 & 3 & 2\\ 3 & 3 & 4\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}3 & 2\\ 3 & 4\end{vmatrix}-1\begin{vmatrix}2 & 2\\ 3 & 4\end{vmatrix}+1\begin{vmatrix}2 & 3\\ 3 & 3\end{vmatrix}=2\cdot 6-1\cdot 2-1\cdot 3=7$$

Оскільки $V_{nip.}=\frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right)\right|$, то $V_{nip.}=\frac{7}{6}$.

Відповідь: $\frac{7}{6}$

Приклад 9.

Знайти $(\vec{a}-\vec{b})(\vec{b}-\vec{c})(\vec{c}-\vec{a})$

Розв'язання.

Так як $(\vec{a}-\vec{b})+(\vec{b}-\vec{c})+(\vec{c}-\vec{a})=0$, то ці вектори компланарні (рис. 5.8).

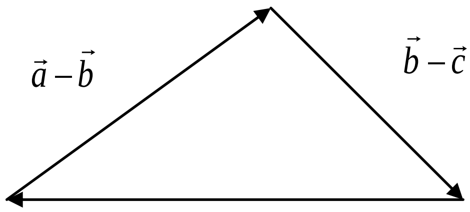


Рис. 5.8

Отже, мішаний добуток цих векторів $(\vec{a}-\vec{b})(\vec{b}-\vec{c})(\vec{c}-\vec{a})=0$

Відповідь: 0

Приклад 10.

Довести, що вектори $\vec{b}=(1;9;-11);$; $\vec{c}=(-1;6;-6);$ $\vec{d}=(-2;-3;5)$ компланарні.

Розв'язання.

Оскільки вектори компланарні тоді і тільки тоді, коли їхній мішаний добуток дорівнює нулю, знайдемо:

$$\left(\vec{b},\vec{c},\vec{d}\right)=\begin{vmatrix}1 & 9 & -11\\ -1 & 6 & -6\\ -2 & -3 & 5\end{vmatrix}=1(30-18)-9(-5-12)-11(3+12)=12+153-165=0$$

Отже, $\left(\vec{b},\vec{c},\vec{d}\right)=0$ і вектори $\vec{b},\vec{c},\vec{d}$ компланарні.

Приклад 11.

Доведіть, що вектори $\vec{a}=\{2;1;3\};\vec{b}\{2;-3;1\}$ і $\vec{c}=\{1;2;1\}$ утворюють базис, і розкладіть вектор $\vec{p}=\{0;11;3\}$ за цим базисом.

Розв'язання

Дані вектори утворюють базис, якщо вони некомпланарні. Знайдемо мішаний добуток:

$$\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)=\begin{vmatrix}2 & 1 & 3\\ 2 & -3 & 1\\ 1 & 2 & 1\end{vmatrix}=10\neq 0.$$

Отже, $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ - базис. Тоді $\vec{p}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c},$ де α,β,γ - координати вектора p в базисі $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$.

Маємо:

$$0\cdot\vec{i}+11\vec{j}+3\vec{k}=\alpha\left(2\vec{i}+\vec{j}+3\vec{k}\right)+\beta\left(2\vec{i}-3\vec{j}+\vec{k}\right)+\gamma\left(\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}\right),$$

або

$$0\cdot\vec{i}+11\vec{j}+3\vec{k}=\left(2\alpha+2\beta+\gamma\right)\vec{i}+\left(\alpha-3\beta+2\gamma\right)\vec{j}+\left(3\alpha+\beta+\gamma\right)\vec{k}.$$

Дістаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases}2\alpha+2\beta+\gamma=0\\ \alpha-3\beta+2\gamma=11,\\ 3\alpha+\beta+\gamma=3\end{cases}\text{ звідки }\begin{cases}\alpha=1\\ \beta=-2.\\ \gamma=2\end{cases}$$

Отже, $\vec{p}=\vec{a}-2\vec{b}+2\vec{c}.$

Приклад 12.

Знайти полярні координати точки $M\left(1;\sqrt{3}\right)$ і побудувати її на площині.

Розв'язання

Якщо полюс співпадає з початком координат, а полярна вісь – з додатнім напрямом осі абсцис, маємо: $tg\varphi=\dfrac{y}{x}=-\sqrt{3}.$

Отже, $\varphi=\dfrac{3}{5}\pi$, так як точка M знаходиться в IV чверті;

$$\rho=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{1^2+\left(-\sqrt{3}\right)^2}=2.$$

Отже, $M\left(2;\dfrac{5}{3}\pi\right).$

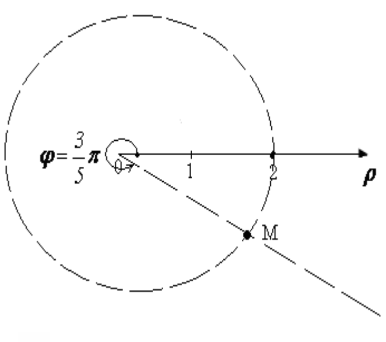


Рис.5.9

Задачі

5.1. По даним векторам $\vec{a}$ і $\vec{b}$ побудувати вектори $2\vec{a}-\vec{b}$ - *і* $\vec{b}$ *-1/2*$\vec{a}$.

5.2. У трикутнику OAB дані вектори $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$ і $\vec{b}=\overrightarrow{OB}$. Знайти вектори $\overrightarrow{MA}$ і $\overrightarrow{MB}$, де M – середина сторони AB.

5.3. Обчислити координати векторів $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{BA}$, якщо *A(3;-1;1), B(-1;1;0).*

5.4. Обчислити модуль вектора $\vec{a}=\{-1;3;\sqrt{6}\}$.

5.5. Обчислити координату *z* вектора $\vec{a}=\{4;-12;z\}$, якщо $|\vec{a}|=13$.

5.6. Визначити точку *N*, з якою співпадає кінець вектора $\vec{a}=\{3;-1;4\}$, якщо його початок співпадає з точкою *M(1;2;-3).*

5.7. Обчислити координати одиничного вектора для вектора $\vec{a}=\{12;-15;-16\}$.

5.8. Вектор $\vec{a}$ утворює з осями *OX* і *OZ* кути $\alpha=120^0$ і $\gamma=45^0$. Який кут він утворює з віссю *OY*?

5.9. Визначити координати точки *M*, якщо її радіус-вектор утворює з координатними осями однакові кути і його модуль дорівнює 3.

5.10. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ утворюють кут $\varphi=60^0$, причому $|\vec{a}|=5$, а $|\vec{b}|=8$. Визначити $|\vec{a}+\vec{b}|$ і $|\vec{a}-\vec{b}|$.

5.11. Задані два вектори $\vec{a}=\{3;-2;6\}$ і $\vec{b}=\{-2;1;0\}$. Визначити проекції на координатні осі векторів: а) $\vec{a}+\vec{b}$; б) $-1/2\vec{b}$; в) $2\vec{a}+3\vec{b}$.

5.12. Знайти довжину вектора $\vec{a}=20\vec{i}+30\vec{j}-60\vec{k}$ і його напрямні косинуси.

5.13. Довести, що *АВСД* – трапеція, якщо
$$\overrightarrow{AB}=\vec{a}+2\vec{b},\overrightarrow{BC}=-4\vec{a}-\vec{b},\overrightarrow{CD}=-5\vec{a}-3\vec{b}.$$

5.14. Знайти довжину вектора $\vec{a}=m\vec{i}+(m+1)\vec{j}+m(m+1)\vec{k}$.

5.15 Заданий розклад векотра $\vec{c}$ по базису $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$: $\vec{c}=16\vec{i}-15\vec{j}+12\vec{k}$. Визначити розклад по цьому ж базису векотра $\vec{d}$, який паралельний вектору $\vec{c}$ і має протилежний напрямок, за умови, що $|\vec{d}|=75$.

5.16. Задані три вектора $\vec{a}=\{3;-1\}$, $\vec{b}=\{1;-2\}$, $\vec{c}=\{-1;7\}$. Визначити розклад вектора $\vec{p}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ по базису $\vec{a},\vec{b}$.

5.17. Задані три вектора $\vec{p}=\{3;-2;1\}$, $\vec{q}=\{-1;1;-2\}$, $\vec{r}=\{2;1;-3\}$. Знайти розклад вектора $\vec{c}=\{11;-6;5\}$ по базису $\vec{p}$, $\vec{q}$, $\vec{r}$.

5.18. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ утворюють кут $\varphi=2/3\pi$ і відомо, що $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=4$. Обчислити: а) $\vec{a}\cdot\vec{b}$; б) $(\vec{a}+\vec{b})^2$; в) $(3\vec{a}-2\vec{b})(\vec{a}+2\vec{b})$.

5.19. Якій умові повинні задовольняти вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$, щоб вектор $\vec{a}+\vec{b}$ був перпендикулярний до вектора $\vec{a}-\vec{b}$?

5.20. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ утворюють кут $\varphi=\pi/6$, причому $|\vec{a}|=\sqrt{3}$, $|\vec{b}|=1$. Обчислити кут між векторами $\vec{p}=\vec{a}+\vec{b}$ і $\vec{q}=\vec{a}-\vec{b}$.

5.21. Задані вектори: $\vec{a}=\{4;-2;-4\}, \vec{b}=\{6;-3;2\}$. Обчислити:

а) $(\vec{a}-\vec{b})^2$; б) $(2\vec{a}-3\vec{b})(\vec{a}+2\vec{b})$.

5.22. Вектор $\vec{b}$, колінеарний вектору $\vec{a}=\{6;-8;-7,5\}$, утворює гострий кут з віссю OZ і його модуль $|\vec{b}|=50$. Знайти координати $\vec{b}$.

5.23. Задані три вектори: $\vec{a}=3\vec{i}-6\vec{j}-\vec{k}$, $\vec{b}=\vec{i}+4\vec{j}-5\vec{k}$ і $\vec{c}=3\vec{i}-4\vec{j}+12\vec{k}$. Обчислити $np_{\vec{c}}(\vec{a}+\vec{b})$.

5.24. Знайти зовнішній кут при вершині B трикутника ABC: $A(-1;-2;4)$, $B(-4;-2;0)$, $C(3;-2;1)$.

5.25. Знайти площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}=6\vec{i}+3\vec{j}-2\vec{k}$ і $\vec{b}=3\vec{i}-2\vec{j}+6\vec{k}$.

5.26. Задані $|\vec{a}|=10$, $|\vec{b}|=2$ і $\vec{a}\cdot\vec{b}=12$. Обчислити $|\vec{a}\times\vec{b}|$.

5.27. Знайти площу трикутника з вершинами $A(1;2;0)$, $B(3;0;-3)$ і $C(5;2;6;)$.

5.28. Вершини піраміди знаходяться в точках $A(2;3;4)$, $B(4;7;3)$, $C(1;2;2)$, $D(-2;0;-1)$. Обчислити : а) площу грані ABC, б) площу перерізу, що проходить через середину ребер AB, AC і AD.

5.29. Вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, які утворюють праву трійку, взаємно перпендикулярні. Обчислити мішаний добуток $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$, якщо $|\vec{a}|=4$, $|\vec{b}|=2$, $|\vec{c}|=3$.

5.30. Довести, що вектори $\vec{a}=2\vec{i}-2\vec{k}$, $\vec{b}=\vec{i}+2\vec{j}-3\vec{k}$, $\vec{c}=3\vec{i}-4\vec{j}+7\vec{k}$, компланарні.

5.31. Обчислити об'єм піраміди, вершини якої знаходяться в точках $O(1;1;2)$, $A(2;3;-1)$, $B(2;-2;4)$, $C(-1;1;3)$.

5.32. Задані вершини тетраедра: $A(2;3;1)$, $B(4;1;-2)$, $C(6;3;7)$, $D(-5;-4;8)$. Знайдіть довжину його висоти, проведеної з вершини D.

5.33. Обчислити об'єм трикутної призми, побудованої на векторах $\vec{a}=\{7;6;1\}, \vec{b}=\{4;0;3\}, \vec{c}=\{3;6;4\}$.

5.34. Довести, що точки $A(5;7;-2)$, $B(3;1;-1)$, $C(9;4;-4)$ і $D(1;5;0)$ належать одній площині.

5.35. Довести, що вектори $\vec{a}=\vec{i}+\vec{j}+m\vec{k}$, $\vec{b}=\vec{i}+\vec{j}+(m+1)\vec{k}$ і $\vec{c}=\vec{i}-\vec{j}+m\vec{k}$ не будуть компланарними при $m\in R$.

5.36. Довести компланарність векторів $\vec{a}, \vec{b}$ і $\vec{c}$, якщо $\vec{a}\times\vec{b}+\vec{b}\times\vec{c}+\vec{c}\times\vec{a}=0$.

5.37. Задані два вектори $\vec{a}=\{8;4;1\}, \vec{b}=\{2;-2;1\}$. Знайти вектор $\vec{c}$, компланарний до векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, перпендикулярний до $\vec{a}$, рівний йому за довжиною і такий, що утворює з вектором $\vec{b}$ тупий кут.

5.38. Об'єм тетраедра $V = 5$, три його вершини знаходяться в точках $A(2;1;-1)$, $B(3;0;1)$ і $C(2;-1;3)$. Знайти координати четвертої вершини D, якщо вона лежить на осі Oy.

5.39. В тетраедрі $OABC$ виразити через вектори $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ вектор $\overrightarrow{EF}$, якщо точка E – середина ребра OA, а точка F – перетин медіан трикутника ABC.

5.40. Знайти третє ребро куба, переконавшись, що вектори $\vec{a} = 7\vec{i} + 6\vec{j} - 6\vec{k}$ і $\vec{b} = 6\vec{i} + 2\vec{j} + 9\vec{k}$ можна розглядати як ребра куба.

5.41. Побудувати точки, задані полярними координатами: $A(10;\frac{\pi}{2})$, $B(3;\frac{5\pi}{4})$, $C(0;\frac{\pi}{3})$, $D(1;\frac{\pi}{6})$, $E(4;\frac{2\pi}{3})$, $F(0;0)$, $G(2;0)$, $L(5;\frac{7\pi}{4})$.

5.42. Знайти декартові прямокутні координати точок $A(2\sqrt{2};\frac{3\pi}{4})$, $B(3;\frac{2\pi}{3})$ і $C(2;\frac{\pi}{6})$.

5.43. Знайти відстань між точками $M(3;\frac{\pi}{4})$ і $N(4;\frac{3\pi}{4})$.

5.44. Знайти полярні координати точки A_1, симетричній точці $A(\rho;\varphi)$ відносно: а) полярної осі; б) полюса; в) прямої, що проходить через полюс перпендикулярно до полярної осі.

5.45. Знайти відстань між точками $M_1(\rho_1;\varphi_1)$ і $M_2(\rho_2;\varphi_2)$.