Тема 11

Первісна. Невизначений інтеграл

Функція $F(x)$ називається **первісною на** $[a,b]$ **для функції** $f(x)$, якщо для всіх $x \in [a,b]$ виконується рівність $F'(x) = f(x)$. (11.1)

Якщо $F'(x) = f(x)$ і $\Phi'(x) = f(x)$, то

$$F(x) = \Phi(x) + C,\; C - const \tag{11.2}$$

Множина всіх первісних для функції $f(x)$ називається невизначеним інтегралом від функції $f(x)$ і позначається

$$\int f(x)dx = F(x) + C \tag{11.3}$$

Властивості невизначеного інтегралу:

1) $$\int \left[\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \; f_i(x) \right] dx = \sum_{i=1}^{n} \left[\alpha_i \int f_i(x)dx \right] \tag{11.4}$$

2) $$d\int f(x)dx = d(F(x)+C) = F'(x)dx = f(x)dx \tag{11.5}$$

$$\int d\; f(x) = f(x) \tag{11.6}$$

3) $$\int f(\varphi(x))d\varphi(x) = F(\varphi(x)) + C \tag{11.7}$$

Таблиця інтегралів.

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, \qquad n \neq -1$$

$$\int \frac{dx}{x} = ln|x| + c,$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{ln\, a} + c,$$

$$\int e^x dx = e^x + c,$$

$$\int sin\, x dx = -cos\, x + c,$$

$$\int \frac{dx}{sin\, x} = ln\left| tg\frac{x}{2} \right| + c,$$

$$\int cos\, x\; dx = sin\, x + c,$$

$$\int \frac{dx}{cos^2 x} = tgx + c,$$

$$\int \frac{dx}{sin^2 x} = -ctgx + c,$$

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} arctg\frac{x}{a} + c,$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = arcsin\frac{x}{a} + c,$$

$$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} ln\left| \frac{a+x}{a-x} \right| + c,$$

$$\int \frac{dx}{cos\, x} = ln\left| tg\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + c,$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = ln\left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + c.$$

У наведених формулах c - стала інтегрування.

Формула інтегрування частинами має вигляд:

$$\int u(x)dv(x)=u(x)\cdot v(x)-\int v(x)du(x), \qquad (11.8)$$

де $u(x)$ і $v(x)$ - диференційовані функції від x.

Ця формула здебільшого застосовується для інтегрування виразів, які є добутком полінома на трансцендентну функцію.

Приклади розв'язання типових задач

Приклад 1.

Обчислити інтеграл: $\int\left(\sqrt{x}+1\right)\left(x-\sqrt{x}+1\right)dx$

Розв'язання.

Скористуємось методом розкладу, який базується на першій властивості (11.4) невизначеного інтегралу. Для цього перетворимо підінтегральний вираз у суму, скориставшись формулами скороченого множення:

$$\int\left(\sqrt{x}+1\right)\left(x-\sqrt{x}+1\right)dx=\int\left(\sqrt{x^3}+1\right)dx=\int x^{3/2}dx+\int dx=\frac{2x^{\frac{5}{2}}}{5}+x+c.$$

Приклад 2.

Обчислити інтеграл: $\int\frac{ln^2 x}{x}\,dx.$

Розв'язання.

Будемо використовувати метод підведення під знак диференціалу, який базується на третій властивості (11.7) невизначеного інтегралу. Для цього зробимо заміну змінної:

$$\int\frac{ln^2 x}{x}\,dx=\left|\begin{matrix} ln\,x=t \\ \frac{dx}{x}=dt \end{matrix}\right|=\int t^2dt=\frac{t^3}{3}+c=\frac{ln^3 x}{3}+c.$$

Приклад 3.

Обчислити інтеграл: $\int x^2e^xdx.$

Розв'язання.

Це класичний інтеграл, який інтегрується частинами, так як підінтегральна функція є добутком полінома другого порядку на трансцендентну функцію. Тому використовуємо формулу (11.8):

$$\int x^2e^xdx=\left|\begin{matrix} u=x^2 & dv=e^xdx \\ du=2xdx & v=e^x \end{matrix}\right|=x^2e^x-2\int xe^xdx.$$

Використовуємо формулу (11.8) вдруге для обчислення інтегралу в правій частині:

$$\int xe^xdx=\left|\begin{matrix} u=x & dv=e^xdx \\ du=dx & v=e^x \end{matrix}\right|=xe^x-\int e^xdx=xe^x-e^x+c.$$

Таким чином:

$$\int x^2 e^x dx = e^x(x^2 - 2x + 2) + c.$$

Приклад 4.

Обчислити інтеграл: $\int \frac{x+3}{x^2 - 2x - 5}\, dx.$

Розв'язання.

За допомогою елементарних перетворень представимо чисельник як похідну від знаменника і розіб'ємо інтеграл на суму двох інтегралів:

$$\int \frac{x+3}{x^2-2x-5}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x-2+6+2}{x^2-2x-5}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x-2}{x^2-2x-5}dx + 4\int \frac{dx}{x^2-2x-5} =$$

$$= \frac{1}{2}ln\left|x^2-2x-5\right| + 4\int \frac{dx}{x^2-2x-5} = \frac{1}{2}ln\left|x^2-2x-5\right| + 4\int \frac{dx}{(x-1)^2-6} =$$

$$= \frac{1}{2}ln\left|x^2-2x-5\right| + 4\cdot\frac{1}{2\sqrt{6}}ln\left|\frac{x-1-\sqrt{6}}{x-1+\sqrt{6}}\right| + c = \frac{1}{2}ln\left|x^2-2x-5\right| + \frac{2}{\sqrt{6}}ln\left|\frac{x-1-\sqrt{6}}{x-1+\sqrt{6}}\right| + c.$$

Приклад 5.

Обчислити інтеграл: $\int \frac{xdx}{(x-1)(x+1)^2}$.

Розв'язання.

Підінтегральна функція є дробово-раціональною. Розкладаємо її на прості дроби:

$$\frac{x}{(x-1)(x+1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B_1}{x+1} + \frac{B_2}{(x+1)^2}$$

Звідси $$x \equiv A(x+1)^2 + B_1(x-1)(x+1) + B_2(x-1).$$

Прирівняємо коефіцієнти при однакових степенях x:

$$\begin{array}{c|c} x^2 & 0 = A + B_1 \\ x^1 & 1 = 2A + B_2 \\ x^0 & 0 = A - B_1 - B_2 \end{array}$$

Отримали систему 3 – х рівнянь з 3 невідомими. Розв'язуючи цю систему матимемо

$$A = \frac{1}{4},\quad B_1 = -\frac{1}{4},\quad B_2 = \frac{1}{2}.$$

Тоді $$\frac{x}{(x-1)(x+1)^2} = \frac{1}{4(x-1)} - \frac{1}{4(x+1)} + \frac{1}{2(x+1)^2}$$

Тепер можна використати метод розкладу:

$$\int \frac{xdx}{(x-1)(x+1)^2} = \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x+1} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{(x+1)^2} = \frac{1}{4}ln|x-1| - \frac{1}{4}ln|x+1| - \frac{1}{2(x+1)} + c =$$

$$= \frac{1}{4} ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| - \frac{1}{2(x+1)} + c.$$

Приклад 6.

Обчислити інтеграл: $\int cos^2 3x \cdot sin^4 3x dx.$

Розв'язання.

Підінтегральна функція є тригонометричною і представляє собою добуток парних степенів синуса і косинуса. В таких випадках підінтегральний вираз перетворюють за допомогою формул зниження порядку:

$$sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - cos 2x), \; cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + cos 2x).$$

Тому

$$\int cos^2 3x \cdot sin^4 3x dx = \int (cos 3x \cdot sin 3x)^2 \cdot sin^2 3x dx =$$

$$= \int \frac{sin^2 6x}{4} \cdot \frac{1 - cos 6x}{2} dx = \frac{1}{8} \int \left(sin^2 6x - sin^2 6x \cdot cos 6x\right) dx =$$

$$= \frac{1}{8} \int \left[\frac{1 - cos 12x}{2} - sin^2 6x \cdot cos 6x\right] dx = \frac{1}{8}\left(\frac{x}{2} - \frac{sin 12x}{24} - \frac{1}{18} sin^3 6x\right) + c.$$

Приклад 7.

Обчислити інтеграл: $\int \frac{dx}{sin\, x}.$

Розв'язання.

Скористаємось універсальною тригонометричною підстановкою:

$$tg\, \frac{x}{2} = t$$

Тоді $$dx = \frac{2dt}{1+t^2}, \quad sin\, x = \frac{2t}{1+t^2}.$$

Отримуємо: $$\int \frac{dx}{sin\, x} = \int \frac{2\left(1+t^2\right)}{\left(1+t^2\right) \cdot 2t} dt = \int \frac{dt}{t} = ln|t| + c = ln\left|tg\, \frac{x}{2}\right| + c.$$

Приклад 8.

Обчислити інтеграл: $$\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3+1}} dx.$$

Розв'язання.

Підінтегральна функція є ірраціональною. Для того, щоб позбавитись ірраціональності зробимо заміну змінної:

$$x = t^4, \quad dx = 4t^3 dt.$$

Тоді: $$\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3+1}} dx = 4\int \frac{t^2 \cdot t^3 dt}{t^3+1} = 4\int \frac{t^5 dt}{t^3+1}.$$

Підінтегральна функція тепер є раціональною. Виділяємо цілу частину, так як порядок чисельника вищий за порядок знаменника:

$$\frac{t^5}{t^3+1}=t^2-\frac{t^2}{t^3+1}$$

Тепер використовуємо метод розкладу:

$$4\int\frac{t^5}{t^3+1}dt=4\int\left(t^2-\frac{t^2}{t^3+1}\right)dt=4\int t^2dt-\int\frac{t^2}{t^3+1}dt=\frac{4}{3}t^3-\frac{4}{3}\ln\left|t^3+1\right|+c=\frac{4}{3}\left[x^{\frac{3}{4}}-\ln\left|x^{\frac{3}{4}}+1\right|\right]+c.$$

Задачі

11.1. Довести, що функція $F(x)$ є первісною для функції $f(x)$ на вказаному проміжку, якщо:

1) $F(x)=3\sqrt[3]{x}$, $\quad f(x)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$, $\quad x\in(0,\infty)$;

2) $F(x)=tgx-\sqrt{3}$, $\quad f(x)=\dfrac{1}{cos^2 x}$, $\quad x\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$;

3) $F(x)=20-\dfrac{1}{x}$, $\quad f(x)=\dfrac{1}{x^2}$, $\quad x\in(0,\infty)$;

4) $F(x)=3^x\cdot ln(5x)$, $\quad f(x)=3^x\left(ln3\cdot ln(5x)+\dfrac{1}{x}\right)$, $\quad x\in(0,\infty)$;

5) $F(x)=e^{sin x}+x+\pi$, $\quad f(x)=e^{sin x}\cdot cos x+1$, $\quad x\in R$.

11.2. Знайдіть первісну $F(x)$, якщо:

1) $f(x)=7-2x$;

2) $f(x)=2x-3x^2$;

3) $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$;

4) $f(x)=2\sin x+cos 3x$;

5) $f(x)=\sqrt{2x}$.

11.3. Знайдіть функцію $F(x)$, якщо відомо, що $F'(x)=4x^3-3x^2$ і $F(1)=3$.

11.4. Знайдіть первісну $F(x)$ для функції $y=f(x)$, графік якої проходить через точку M:

1) $f(x)=e^{-3x}$, $\quad M(0;-2)$;

2) $f(x)=7^{x/4}$, $\quad M(8;1/ln7)$;

3) $f(x)=\dfrac{1}{sin^2 3x}$, $\quad M\left(\dfrac{\pi}{12};-1\right)$.

11.5. Обчисліть інтеграли, використовуючи метод розкладу:

1) $\displaystyle\int\frac{2+3\sqrt[3]{x^2}+5\sqrt{x}}{\sqrt{x^3}}dx$; $\quad$ 8) $\displaystyle\int\frac{\cos^2 x}{1-\sin x}dx$; $\quad$ 15) $\displaystyle\int\frac{dx}{x^2-10}$;

2) $\int\left(5\cos x-3x^2+\frac{1}{x}\right)dx;$

3) $\int\frac{3e^{2x}+e^x\cos x}{e^x}dx;$

4) $\int(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)dx;$

5) $\int\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{4\sqrt{x}}dx;$

6) $\int\frac{\cos 2x}{\cos x-\sin x}dx;$

7) $\int\frac{\cos 2x}{\cos^2 x\cdot\sin^2 x}dx;$

9) $\int\frac{dx}{1+\cos 2x};$

10) $\int\frac{\cos^2 x+2\cos x-3}{3+\cos x};$

11) $\int a^x\left(1+\frac{a^{-x}}{\sqrt{x^3}}\right)dx;$

12) $\int\frac{2x^2}{1+x^2}dx;$

13) $\int\frac{x^2+5x+6}{x+2}dx;$

14) $\int\frac{dx}{x^2+7};$

16) $\int\frac{dx}{\sqrt{4+x^2}};$

17) $\int\frac{dx}{\sqrt{8-x^2}};$

18) $\int\frac{\sqrt{2+x^2}-\sqrt{2-x^2}}{\sqrt{4-x^2}}dx;$

19) $\int tg^2 x dx;$

20) $\int ctg^2 x\, dx;$

21) $\int 3^x\cdot e^x\, dx.$

11.6. Обчисліть інтеграли, використовуючи метод підведення під знак диференціалу:

1) $\int\frac{dx}{4x+1};$

2) $\frac{dx}{\sqrt{1-\frac{x}{2}}};$

3) $sin\frac{2x-1}{4}dx;$

4) $\int 2e^{\frac{x-1}{2}}dx;$

5) $\int\frac{dx}{1+4x^2};$

6) $\int\frac{dx}{7\cos^2(3-x)};$

7) $\int(\cos 2x+\sin 2x)^2 dx;$

8) $\sin x\cdot\cos 7x\ dx;$

9) $\int\cos^4 x dx;$

10) $\int\frac{\ln x}{x}dx;$

11) $\int\frac{xdx}{x^2+9};$

12) $\int y\sqrt{3y^2+1}\,dy;$

13) $\int xe^{-x^2}dx;$

14) $\int\frac{3x^2dx}{(1-5x^3)^3};$

15) $\int\cos x\cdot\sqrt{\sin x}\,dx;$

16) $\int\frac{\sin x}{\sqrt[3]{\cos^2 x}}dx;$

17) $\int\frac{tgx+1}{\cos^2 x}dx;$

18) $\int\frac{e^{tgx}}{\cos^2 x}dx;$

19) $\int 4\sin^3 x dx;$

20) $\int\frac{e^x dx}{2-3e^x};$

21) $\int\frac{\sqrt{\ln y}}{y}dy;$

22) $\int\frac{2\ln^2 x+3}{x}dx;$

23) $\int\frac{dt}{t\ln t};$

24) $\int\frac{xdx}{3x+2};$

25) $\int\sqrt{\frac{\arcsin x}{1-x^2}}dx;$

26) $\int\frac{x^3dx}{\sqrt[3]{x^4+1}};$

27) $\int e^{\sqrt{x}}\frac{dx}{\sqrt{x}};$

28) $\int\frac{\ln x-3}{x\sqrt{\ln x}}dx;$

29) $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{x^6-2}};$

30) $\int \frac{\cos x dx}{\sqrt{3+\sin x}}$; 31) $\int \frac{e^x \sqrt{arctg\, e^x}}{1+e^{2x}} dx$.

11.7. Обчисліть інтеграли, використовуючи метод інтегрування частинами:

1) $\int x^2 \ln x dx$; 2) $\int x e^x dx$; 3) $\int \ln x\, dx$;

4) $\int arctg\, x dx$; 5) $\int x arctg x dx$; 6) $\int arctg \sqrt{x}\, dx$;

7) $\int x^2 \sin x dx$; 8) $\int x \cos^2 x dx$; 9) $\int \sqrt{x} \ln x dx$;

10) $\int \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx$; 11) $\int e^x \sin x dx$; 12) $\int \sqrt{1+x^2}\, dx$;

13) $\int \sin(\ln x) dx$.

11.8. Обчисліть інтеграли $\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c} dx$, $\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx$:

1) $\int \frac{dx}{x^2-2x+5}$; 2) $\int \frac{dx}{x^2+4x+29}$; 3) $\int \frac{dx}{x^2+3x+1}$;

4) $\int \frac{6x-7}{3x^2-7x+11} dx$; 5) $\int \frac{7x+1}{6x^2+x-1} dx$; 6) $\int \frac{4x-5}{x^2+5} dx$;

7) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+3}}$; 8) $\int \frac{dx}{\sqrt{2-3x-4x^2}}$; 9) $\int \frac{dx}{\sqrt{2-3x-4x^2}}$;

10) $\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2-2x-1}}$; 11) $\int \frac{dx}{\sqrt{5-4x-x^2}}$; 12) $\int \frac{(x+3)dx}{\sqrt{4x^2+4x+3}}$;

13) $\int \frac{(x-3)dx}{\sqrt{3+66x-11x^2}}$; 14) $\int \frac{(x+3)dx}{\sqrt{3+4x-4x^2}}$.

11.9. Проінтегрувати раціональні дроби:

1) $\int \frac{dx}{x(x^2+1)}$; 2) $\int \frac{2x-1}{(x-1)(x-2)} dx$; 3) $\int \frac{dx}{x(x+1)^2}$;

4) $\int \frac{x^2-5x+9}{x^2-5x+6} dx$; 5) $\int \frac{xdx}{(x^2+1)(x-1)}$; 6) $\int \frac{x-3}{x^3-x} dx$.

11.10. Обчисліть інтеграли від тригонометричних функцій:

1) $\int \sin^2 x \cos^2 x dx$; 2) $\int \cos^4 x dx$;

3) $\int \sin^3 x dx$; 4) $\int \sin^4 x dx$;

5) $\int \cos^4 x \sin^3 x dx$; 6) $\int \sin^4 x \cos^4 x dx$;

7) $\int tg^3 x dx$; 8) $\int ctg^5 x dx$;

9) $\int \frac{dx}{\cos^4 x}$; 10) $\int \sin x \cos 3x dx$;

11) $\int \frac{dx}{4-5\sin x}$; 12) $\int \frac{dx}{5-3\cos x}$;

13) $\int \frac{\cos x dx}{1+\cos x}$; 14) $\int \frac{1+tgx}{\sin 2x} dx$.

11.11. Обчисліть інтеграли від ірраціональних функцій:

1) $\int \frac{5x-6}{\sqrt{1-3x}} dx$; 2) $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3}+1} dx$;

3) $\int \frac{\sqrt{x^3}-\sqrt[3]{x}}{6\sqrt[4]{x}} dx$; 4) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+4x-4}}$;

5) $\int \frac{x^3}{\sqrt{x-1}} dx$; 6) $\int \frac{\sqrt{x}}{x+2} dx$.