Тема 10

Похідна та диференціал функції, їх застосування

Границя відношення приросту функції до приросту аргументу в даній точці, коли приріст аргументу прямує до нуля, називається **похідною функції в точці** і позначається

$$y' = y'_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y(x+\Delta x) - y(x)}{\Delta x}.$$

З визначення випливає, що похідна від сталої дорівнює нулеві.

Правила диференціювання:

$1.^0$ $[cu(x)]' = c \cdot u'(x);$ (10.1)

$2.^0$ $[u(x) \pm v(x)]' = u'(x) \pm v'(x);$ (10.2)

$3.^0$ $[u(x) \cdot v(x)]' = u'(x) \cdot v'(x) + u(x) \cdot v'(x);$ (10.3)

$4.^0$ $\left[\frac{u(x)}{v(x)}\right]' = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v^2(x)};$ (10.4)

$5.^0$ якщо функція $y = f(t)$ має похідну в точці t, а $t = \varphi(x)$ і має похідну в точці x, то складна функція $y = f[\varphi(x)]$ має похідну в точці x, причому

$$y'(x) = y'_t \cdot t'_x$$

або

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} \qquad (10.5)$$

$6.^0$ Нехай функція $y = f(x)$ задовольняє умови:

- строго монотонна на $[a,b]$;
- існує похідна y' в будь-якій точці $x \in (a,b);$
- $f'(x) \neq 0, \ x \in (a,b).$

Тоді існує обернена функція $x = \varphi(y)$, яка має похідну, причому

$$\varphi'(y) = \frac{1}{f'(x)}, \text{ або } x'_y = \frac{1}{y'_x} \qquad (10.6)$$

Таблиця похідних

$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$	$(sinx)' = \cos x$	$(arcsinx)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$(a^x)' = a^x \cdot \ln a$	$(cosx)' = -\sin x$	$(arccosx)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$(e^x)' = e^x$	$(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$(arctgx)' = \frac{1}{1+x^2}$
$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	$(ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	$(arcctgx)' = -\frac{1}{1+x^2}$

При відшуканні похідної показниково-степеневої функції або функції, яка є добутком великої кількості співмножників, її спочатку логарифмують, а потім знаходять похідну:

$$[ln\ f(x)]' = \frac{f'(x)}{f(x)} \qquad (10.7)$$

Така похідна називається **логарифмічною похідною функції** $y = f(x)$.

Похідна n**-го порядку від функції** $y = f(x)$ **в точці** $\boldsymbol{x}$ визначається як:

$$y^{(n)} = \frac{d}{dx}\left[y^{(n-1)}\right] = \left[y^{(n-1)}\right]' \qquad (10.8)$$

Для знаходження похідної y'_x для неявної функції, яка задається рівнянням $F(x,y)=0$, треба обидві частини рівняння продиференціювати по x, розглядаючи y як функцію від x. З отриманого виразу знаходять шукану похідну y'_x. Для знаходження y''_{xx} треба рівняння $F(x,y)=0$ двічі продиференціювати по x і т.д.

Якщо функція задана параметрично

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t), \end{cases}$$

то її перша і друга похідні знаходяться за формулами:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}; \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right) = \frac{\psi''(t)\cdot\varphi'(t) - \varphi''(t)\psi'(t)}{\left[\varphi'(t)\right]^3} \qquad (10.9)$$

Рівняння дотичної і нормалі до графіку функції $y = f(x)$ в т. x_0 має відповідно вигляд:

$$y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0) \qquad (10.10)$$

$$y - y_0 = -\frac{1}{y'(x_0)}(x - x_0) \qquad (10.11)$$

Якщо функція $y = f(x)$ має скінчену похідну в точці x, тоді її приріст, що відповідає приросту аргументу Δx, можна записати у вигляді:

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \Delta x \cdot \alpha(\Delta x) \qquad (10.12)$$

де $\Delta x \to 0$ і $\alpha(\Delta x) \to 0$.

Головний, лінійний відносно Δx член приросту функції, називається **диференціалом функції в точці** $\boldsymbol{x}$ і позначається:

$$dy = f'(x)\Delta x \qquad (10.13)$$

Для наближених обчислень використовують формулу

$$\Delta y \approx dy$$

або

$$y(x + \Delta x) \approx y(x) + y'(x)\Delta x \qquad (10.14)$$

Правило Лопіталя розкриття невизначених виразів:

- якщо функції $f(x)$ і $g(x)$ визначені і диференційовані в околі точки $x = a$ за винятком самої точки $x = a$;

- $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} g(x)=0;$
- $g(x)$ і $g'(x)$ не дорівнюють нулеві;
- існує $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$,

тоді існує границя відношення функцій, причому

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} \tag{10.15}$$

Зауваження

Правило Лопіталя виконується і у випадку, коли $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} g(x)=\infty$.

Зауважимо, що правило Лопіталя можна використовувати багаторазово до тих пір, поки вираз не стане визначеним.

Приклади розв'язання типових задач

Приклад 1.

Обчислити похідну функції $y=e^{tgx}\cdot ln2x$.

Розв'язання.

Функція є добутком двох функцій, тому використовуємо третє правило (10.3) диференціювання:

$$\left(e^{tgx}\cdot ln2x\right)'=\left(e^{tgx}\right)'\cdot ln2x+e^{tgx}\cdot\left(ln2x\right)'.$$

Далі використовуємо правило диференціювання складної функції (10.5):

$$\left(e^{tgx}\right)'=e^{tgx}\cdot\frac{1}{cos^2 x},\ (ln2x)'=\frac{1}{2x}\cdot 2.$$

Таким чином

$$\left(e^{tgx}\cdot ln2x\right)'=\frac{e^{tgx}\cdot ln2x}{cos^2 x}+\frac{e^{tgx}}{x}.$$

Приклад 2.

Обчислити похідну функції $y=(sin x)^x$.

Розв'язання.

Прологарифмуємо задану функцію:

$$ln\,y=x\cdot ln\,sin\,x,$$

а тепер продиференціюємо:

$$\frac{1}{y}y'=ln\,sin\,x+x\cdot ctgx.$$

З цього співвідношення знайдемо y':

$$y'=y(ln\,sin\,x+x\cdot ctgx)=(sin\,x)^x(ln\,sin\,x+x\cdot ctgx).$$

Приклад 3.

Знайти похідну n-го порядку від функції $y = sin\,x$.

Розв'язання.

Візьмемо кілька похідних, щоб побачити закономірність:

$y' = cos\,x,\ y'' = -sin\,x,\ y''' = -cos\,x,\ y^{(IV)} = sin\,x,\ ...$

Бачимо, що через похідну порядку, кратного чотирьом, повертаємось до вихідної функції. Тому загальна формула матиме вигляд:

$$y^{(n)} = sin(\frac{\pi}{2} + x), \qquad n \in N.$$

Приклад 4.

Обчислити похідну першого і другого порядку для функції $arctgy - y + x = 0$.

Розв'язання

Диференціюємо задане рівняння, вважаючи y функцією від x:

$$\frac{y'}{1+y^2} - y' + 1 = 0,$$

або $$y' - y' - y^2 y' + 1 + y^2 = 0.$$

Розв'язуємо це співвідношення відносно y':

$$y' = \frac{1+y^2}{y^2} = \frac{1}{y^2+1}.$$

Знаходимо далі y'':

$$y'' = -2y^{-3} \cdot 4' = -\frac{2}{y^3}y'.$$

Приклад 5.

Обчислити $\frac{d^2y}{dx^2}$ для функції $\begin{cases} x = ln\,t \\ y = sin\,2t \end{cases}$

Розв'язання

Знаходимо:

$x'(t) = \frac{1}{t} \qquad x''(t) = -\frac{1}{t^2}$

$y'(t) = 2cos\quad 2t \qquad y''(t) = -4\,sin\,2t$

Тоді за формулами (10.9) матимемо:

$$\frac{dy}{dx} = 2t\,cos\,2t,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-4\,sin\,2t \cdot \frac{1}{t} + \frac{1}{t^2} \cdot 2\,cos\,2t}{\frac{1}{t^3}} = 2t(cos\,2t - 2t\,sin\,2t).$$

Приклад 6

Обчислити $sin 46^0$.

Розв'язання.

Скористуємось формулою (10.13). Нехай $x = 45^0 = \frac{\pi}{4}$; $\Delta x = 1^0 = \frac{\pi}{180^0}$.

Тоді $$sin(x + \Delta x) \approx sin\,x + cos\,x \cdot \Delta x$$

$$sin\,46^0 = sin(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{180}) \approx sin\frac{\pi}{4} + cos\frac{\pi}{4} \cdot \frac{\pi}{180},$$

або $$sin\,46^0 \approx \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\pi}{180} = 0{,}7071 + 0{,}7071 \cdot 0{,}017$$

$$sin\,46^0 \approx 0{,}7194.$$

Приклад 7

Обчислити границю $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - cos\,6x}{3x}$.

Розв'язання.

Всі умови для використання правила Лопіталя виконуються. Тому:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - cos\,6x}{3x} = \left|\frac{0}{0}\right| = \lim_{x \to 0} \frac{2\,sin^2\,3x}{3x} = 2\lim_{x \to 0} \frac{2\,sin\,3x \cdot cos\,3x \cdot 3}{3} = 2\lim_{x \to 0} sin\,6x = 0.$$

Приклад 8

Дослідити засобами диференціального числення функцію $y = \frac{x^3}{4(2-x)^2}$ і побудувати її графік.

Розв'язання.

Областю визначення $D(f)$ функції є $D(f) = R - \{2\}$.

Так як

$$y(-x) = -\frac{x^3}{4(2+x)^2} \neq \begin{cases} y(x); \\ -y(x), \end{cases}$$

то функція не має осі і центра симетрії.

Функція неперервна всюди, крім т. $x=2$, де вона має вертикальну асимптоту і розрив II роду. Знайдемо однобічні границі в т. $x=2$:

$$\lim_{x \to 2+0} \frac{x^3}{4(2-x)^2} = \left|\begin{matrix} x = 2+\delta \\ \delta \to 0 \\ x \to 2 \end{matrix}\right| = \lim_{\delta \to 0} \frac{(2+\delta)^3}{4(2-2-\delta)^2} = \left|\frac{8}{+0}\right| = +\infty.$$

$$\lim_{x \to 2-0} \frac{x^3}{4(2-x)^2} = \left|\begin{matrix} x = 2-\delta \\ \delta \to 0 \\ x \to 2 \end{matrix}\right| = \lim_{\delta \to 0} \frac{(2-\delta)^3}{4(2-2+\delta)^2} = \left|\frac{8}{+0}\right| = +\infty.$$

З'ясуємо поведінку функції, коли $x \to \pm\infty$:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3}{4(2-x)^2}=\pm\infty,$$ (так як порядок чисельника вищий порядку знаменника).

Таким чином, горизонтальної асимптоти немає.

Знайдемо границі для похилої асимптоти:

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3}{4(2-x)^2}=\frac{1}{4}$$ (так як порядок чисельника і знаменника однакові).

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{x^3}{4(2-x)^2}-\frac{x}{4}\right]=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3-x(2-x)^2}{4(2-x)^2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3-4x^2-x^2}{4(2-x)^2}=1.$$

Значить похила асимптота має рівняння $y=\frac{x}{4}+1.$

Знайдемо похідну функції, як похідну від дробу:

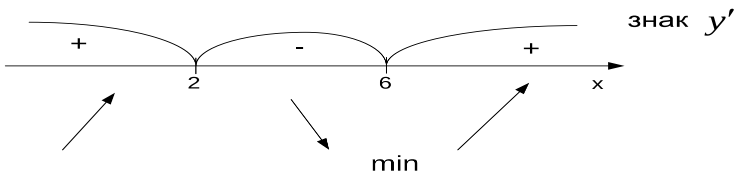
$$y'=\frac{1}{4}\cdot\frac{3x^2(2-x)^2-x^3\cdot 2(2-x)(-1)}{(2-x)^4}=\frac{1}{4}\cdot\frac{x^2(2-x)(6-x)}{(2-x)^4}=\frac{x^2(6-x)}{4(2-x)^3}=$$

$$=\frac{x^2(x-6)}{4(x-2)^3}.$$

Необхідна умова екстремуму:

$y'=0$	$y'=\infty$	y' не існує
$x_1=6$	$x\in\varnothing$	$x\in\varnothing.$

Достатня умова екстремуму:



Функція зростає при $x\in(-\infty,2)\cup(6,+\infty)$ і спадає при $x\in(2,6)$. В т. $x=6$ функція має локальний мінімум, причому

$$y_{min}=y(6)=\frac{27}{8}.$$

Знайдемо інтервали опуклості функції і точки перегину графіка функції, якщо вони є. Для знаходження другої похідної спочатку прологарифмуємо функцію, не враховуючи константу $\frac{1}{4}$:

$$y=\frac{x^2(x-6)}{(x-2)^3},$$

$$\ln y=2\ln x+\ln(x-6)-3\ln(x-2),$$

$$\frac{y'}{y}=\frac{2}{x}+\frac{1}{x-6}-\frac{3}{x-2}.$$

Тоді

$$y' = \frac{x^2(x-6)}{(x-2)^3} \cdot \left(\frac{2}{x} + \frac{1}{x-6} - \frac{3}{x-2} \right),$$

або

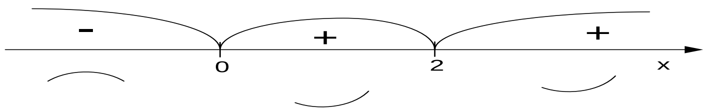
$$y' = \frac{x^2(x-6)}{(x-2)^3} \cdot \frac{2x^2 - 16x + 24 + x^2 - 2x - 3x^2 + 18x}{x(x-6)(x-2)},$$

$$y' = \frac{x \cdot 24}{(x-2)^4}.$$

Таким чином звідси отримаємо:

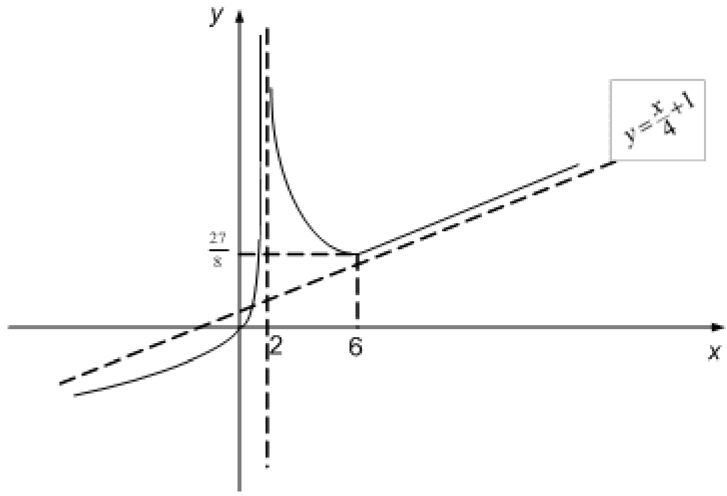
$$y'' = \frac{24x}{4(x-2)^4} = \frac{6x}{(x-2)^4}.$$

Єдина точка, де $y'' = 0$, це $x=0$. З’ясуємо знак y'' в області визначення:



Функція опукла при $x \in (-\infty, 0)$ і вгнута при $x \in (0, 2) \cup (2, +\infty)$. В т. $x=0$ – перегин графіку.

Тепер побудуємо графік функції, використовуючи отримані результати.



Задачі

10.1. Знайдіть похідну функції за визначенням:

$a)$ $y = 3x^2$; $б)$ $y = 5 - 4x^2$; $в)$ $y = (x+1)^2$.

10.2. Знайдіть похідні функцій:

1) $y = x\sqrt{x}$; 2) $y = -2x^{\sqrt{2}}$; 3) $y = \sqrt[3]{x} - 2\sqrt{x^{-1}} + \dfrac{3}{x^2} + 4$;

4) $y = \sqrt{x\sqrt{x}}$; 5) $y = 3x^2\sqrt[3]{x}$; 6) $y = \sqrt{2x\sqrt{2x}}$;

7) $y = \dfrac{1}{x\sqrt{2x}}$; 8) $y = \dfrac{5x^2 - \sqrt{x} - 3}{\sqrt[3]{x}}$; 9) $y = \dfrac{7 - 3x + x^4}{x - x^2}$;

10) $y = \dfrac{\sqrt{x}}{2 + \sqrt[3]{x^2}}$; 11) $y = \dfrac{\ln 3}{x^2} - e^2$; 12) $y = \dfrac{x^2}{3} - \dfrac{3}{x^2}$.

10.3. Знайдіть похідні функцій:

1) $y = (x^2 + 1)(3 - 5x^2)$; 2) $y = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$;

3) $y = \dfrac{x^2 + 3}{x - 1}$; 4) $y = \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^2 + x + 7}$.

10.4. Знайдіть похідні функцій:

1) $y = \sin x + ctgx$; 2) $y = 5x\cos x$;

3) $y = (x + \sqrt{2})tgx$; 4) $y = \dfrac{\cos x}{x}$;

5) $y = x^3 \cos x$; 6) $y = \dfrac{\sqrt{x}}{tgx}$;

7) $y = x \arcsin x$; 8) $y = \dfrac{arctgx}{x^2}$;

9) $y = \dfrac{\arccos x}{\arcsin x}$; 10) $y = arctgx + arcctgx$.

10.5. Знайдіть похідні функцій:

1) $y = x \ln x$; 2) $y = \dfrac{\ln x}{x}$;

3) $y = e^x \log_2 x$; 4) $y = \log_x 2$;

5) $y = (\sqrt{x} + \sqrt{2})e^x$; 6) $y = xe^x - e^x$;

7) $y = (\sqrt{2})^x$; 8) $y = (\ln x + \pi)(\sqrt{x} + 4)$;

9) $y = \dfrac{\ln x - e}{x^3 + 4}$;

10.6. Знайдіть похідні функцій:

1) $y=\sqrt[3]{1+x^2}$; 2) $y=\left(\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^{12}$;

3) $y=\sqrt{2x^2+\sqrt{x^2+1}}$; 4) $y=\dfrac{\cos^2 3x}{\sin 5}$;

5) $y=ctgx^2-\dfrac{1}{3}tg^3 2x$; 6) $y=\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$;

7) $y=\sqrt{1+tg(x^2+x^{-2})}$; 8) $y=arctg\,\dfrac{x^2-1}{\sqrt{2x}}$;

9) $y=\sin\cos^2 x\cdot\cos\sin^2 x$; 10) $y=\sin\ln x+\cos\ln x$;

11) $y=\ln(x^2+\sqrt{x^4+1})$; 12) $y=\sin(\arcsin\sqrt{x})$;

13) $y=\ln\left(\dfrac{x+3}{x+2}\right)^2$; 14) $y=2^{\sin^2 3x}$;

15) $y=\ln\ln\ln(x+1)$; 16) $y=arctgtg^2 x$;

17) $y=\dfrac{1}{2}tg^2 x+\ln\cos x$; 18) $y=\ln\sqrt{\dfrac{1+2x}{1-2x}}$;

19) $y=\dfrac{1}{2}\ln(\sin 3\sqrt{x}+\pi^x)$; 20) $y=e^{\ln^2 x}$;

21) $y-2^{tgx}+\cos 2e^{x^2}$; 22) $y=\ln tg\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\sin x}{2}\right)$;

23) $y=arctge^{\frac{x}{2}}-\ln\sqrt{\dfrac{e^x}{e^x+1}}$; 24) $y=\cos\dfrac{1}{\ln x}$;

25) $y=\ln^3(2x+3)^2$; 26) $y=3^{arctg(2x+\pi)}$;

27) $y=\dfrac{tg^2 x}{tgx^2}$; 28) $y=e^{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}$;

29) $y=\ln tg\dfrac{x}{2}-\cos x\cdot\ln tgx$; 30) $y=\cos^2 arctg\ln x^3$;

31) $y=e^{1+\frac{2}{\log_x e}}$; 32) $y=\arcsin\dfrac{1+\sin x}{\sqrt{2}}$;

33) $y=\sqrt[3]{arctg\sqrt[5]{\cos\ln^3 x}}$; 34) $y=\ln\arcsin\sqrt{1-e^{2x}}$;

35) $y=\dfrac{e^{\sin^2 x}}{\sqrt{1+tgx}}$; 36) $y=e^{\arcsin\frac{1}{x}}+4^{arctg\sqrt{x^2-1}}$

10.7. Знайдіть похідні функцій:

1) $y = x^x;$ 2) $y = x^{\frac{2}{\ln x}};$

3) $y = \sin x^{\cos x};$ 4) $y = x^{\sin x};$

5) $y = (\cos x)^{arctgx};$ 6) $y = (x+1)(2x+1)(3x+1);$

7) $y = \dfrac{(x+2)^2}{(x+1)^3(x+3)^4}$ 8) $y = x\sqrt[3]{\dfrac{x^2}{x^2+1}};$

9) $y = (arctgx)^x;$ 10) $y = x^{x^x}.$

10.8. Знайдіть похідні функцій, заданих наявно:

1) $x^2 + xy + y^2 = 6;$

2) $e^y - e^{-x} + xy = 0;$

3) $e^x \sin y - e^{-y}\cos x = 0;$

4) $x = y + arctgy.$

10.9. Знайдіть похідні функцій, заданих параметрично:

1) $\begin{cases} x = \dfrac{1}{t+1}; \\ y = \dfrac{1}{t+1}. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x = 2\cos t; \\ y = \sin t. \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x = e^{2t}; \\ y = e^{3t}. \end{cases}$

4) $\begin{cases} x = \dfrac{3at}{1+t^3}; \\ y = \dfrac{3at^2}{1+t^3}. \end{cases}$ 5) $\begin{cases} x = t^2 + 2t; \\ y = \ln(t+1). \end{cases}$

10.10. Обчисліть у вказаних точках похідні для функцій:

1) $y = 2^{tg\frac{1}{x}},$ $x = \dfrac{1}{\pi};$

2) $y = \arcsin\dfrac{2x}{1+x^2},$ $x = 0,$ $x = 2;$

3) $y = (1+x)\sqrt{2+x^2}\sqrt[3]{3+x^3},$ $x = 0;$

4) $y = \ln\sin x,$ $x = \dfrac{\pi}{4}.$

5) $e^{xy} - x^3 + y^3 = 0$ $x = 0;$

6) $xe^{-y/2} + ye^{-x/2} = 2$ $x = 0;$

7) $x\ln y + y\ln x = 1$ $x = 1;$

8) $x^2 + y^2 - 4x - 10y + 4 = 0$ $x = 6;$

9) $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3};$

10) $\begin{cases} x = t^2 \\ y = t^3 + t, \ t = 1 \end{cases}$;

11) $\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t, \ t = \dfrac{\pi}{6} \end{cases}$.

10.11. Знайдіть похідні другого порядку:

1) $y = x^2 + 13x + 11;$

2) $y = \dfrac{x^3}{3 - x^2};$

3) $y = \cos^2 x;$

4) $y = \arcsin\dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1};$

5) $y = e^{\sqrt{x}};$

6) $y = (x^2 + x + 1)e^{-x}.$

7) $x^3 + y^3 = 3axy;$

8) $y = tg(x + y);$

9) $e^x - e^y = y - x;$

10) $x + y = e^{x-y};$

11) $xy^3 + 2y - 1 = 0;$

12) $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t \end{cases};$

13) $\begin{cases} x = \cos t + t\sin t \\ y = \sin t - a\cos t \end{cases};$

14) $\begin{cases} x = e^{2t} \\ y = e^{3t} \end{cases}.$

10.12. Складіть рівняння дотичної і нормалі до графіку функції:

1) $y = e^x$ в точці $x_0 = 0$;

2) $y = \sqrt{x}$ в т. $x_0 = 4$;

3) $y = x^3 + 2x^2 - 4x - 3$ в т. $x_0 = -2$;

4) $y = \sqrt[3]{x - 1}$ в т. $x_0 = 1$;

5) $y = tg2x$ в початку координат;

6) $y = \arcsin\dfrac{x - 1}{2}$ в точці перетину з віссю Ox;

7) $y = \arccos 3x$ в точці перетину з віссю Oy;

8) $x^2 + y^2 + 4x - 2y - 3 = 0$ в точках перетину її з віссю Oy;

9) $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 3 = 0$ в точках перетину її з віссю Ox;

10) $x^2 + y^2 = 25$ в точках, в яких дотична буде параллельна прямій $3x + 4y - 12 = 0$. Зробити малюнок.

11) $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$ в точках а) $t = \dfrac{\pi}{2}$; б) $t = \dfrac{\pi}{3}$;

12) $\begin{cases} x = 2\sqrt{3}\cos t \\ y = 2\sin t \end{cases}$ в точці $t = \dfrac{\pi}{6}$;

13) На лінії $\begin{cases} x = t^2 + 1 \\ y = 2t^3 - t^2 \end{cases}$ знайти точку *M*, в якій дотична параллельна прямій $y = 2x;$

14) Знайти кут між дотичними до еліпсу $\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 3\sin t \end{cases}$ в точках $t = \frac{\pi}{6}$ і $t = \frac{\pi}{3}$. Побудувати еліпс і дотичні.

10.13. Визначте проміжки монотонності функцій та їх екстремуми:

$1)\quad y = 2x^3 + 6x^2 - 18x + 120;\quad 2)\quad y = \frac{x^2 + 1}{x};\quad 3)\quad y = \sqrt{x^3 - 3x};$

$4)\quad y = \frac{4}{\sqrt{x^2 + 16}};\qquad 5)\quad y = \frac{x}{\sin x};\qquad 6)\quad y = 2^{\cos x};$

$7)\quad y = \frac{\ln x + 2}{x};\qquad 8)\quad y = \sin^2 x - x.$

10.14. Знайти інтервали опуклості і точки перегину функцій:

$1)\quad y = 2x^4 - 3x^2 + x - 1;\qquad 2)\quad y = \frac{1}{1 - x^2};$

$3)\quad y = \sqrt[3]{x + 3};\qquad 4)\quad y = e^{-x^2};$

$5)\quad y = (x^2 + 1)e^x;\qquad 6)\quad y = \frac{e^x}{x}.$

10.15. Дослідити функції та побудувати їх графіки:

$1)\quad y = \frac{(x-1)^2}{x+1};\qquad 2)\quad y = \frac{x-1}{x^2 - 4};$

$3)\quad y = x^3 e^{-x};\qquad 4)\quad y = x\ln x;$

$5)\quad y = \sqrt[3]{1 - x^3};\qquad 6)\quad y = x + \sin x.$

10.16. Знайти диференціали:

$1)\quad d(e^{-x} + \ln x);\qquad 2)\quad d(\arccos e^x);$

$3)\quad d(\sqrt{x} + 2\sqrt{x + \sqrt{x}});\qquad 4)\quad d(2\sqrt{x^3}(3\ln x - 2)).$

10.17. Замінюючи приріст функції її диференціалом, знайти наближене значення функції *y=y(x)* у вказаних точках:

$1)\quad y = \sqrt[3]{x},\qquad x = 65;$

$2)\quad y = \sin x,\qquad x = 29^\circ;$

$3)\quad y = \sqrt{\frac{2 - x}{2 + x}},\qquad x = 0{,}15.$

10.1. Обчисліть границі функцій:

1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2+4x-7}{2x^2+3x-5}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos x}{\ln\cos 3x}$;

3) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\ln(x^2-8)}{2x^2-5x-3}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)-x}{tg^2 x}$;

5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{tgx-x}$; 6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin x}-e^x}{\sin x-x}$.