Тема 6

Аналітична геометрія

I. Алгебраїчні лінії I – го порядку на площині.

1) $Ax+By+C=0$ **- загальне рівняння прямої**. (6.1)

Вектор $\vec{n}=\{A,B\}$, перпендикулярний до даної прямої, називається її **нормальним вектором**.

2) $y=kx+b$ **- рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом** k, (6.2)

$k=tg\alpha$, де $\alpha-$кут, утворений прямою з додатним напрямом осі Ox, $b-$ордината точки перетину прямої з віссю Oy.

3) $y-y_0=k(x-x_0)-$**рівняння прямої, що проходить через дану точку** $M_0(x_0;y_0)$**з заданим кутовим коефіцієнтом** k (6.3)

4) $\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}$ **- рівняння прямої** (6.4), **що проходить через дві дані точки** $M_1(x_1;y_1)$ та $M_2(x_2;y_2)$. Із загального рівняння прямої $Ax+By+C=0$ можна знайти її **кутовий коефіцієнт**

$$k=-\frac{A}{B}. \qquad (6.5)$$

Кут φ **між дома прямими**, що мають кутові коефіцієнти k_1 і k_2, визначається за формулою:

$$tg\varphi=\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}. \qquad (6.6)$$

Умова паралельності двох прямих: $k_1=k_2;$ (6.7)

перпендикулярності: $k_2=-\dfrac{1}{k_1};\ (1+k_1k_2=0).$ (6.8)

Відстань від точки $M_0(x_0;y_0)$ **до прямої** $Ax+By+C=0$ дорівнює

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}. \qquad (6.9)$$

5) $\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}-$ **рівняння прямої, що проходить через точку** $M_0(x_0;y_0)$ **паралельно напрямному вектору** $\vec{s}=\{m,n\}$(канонічне рівняння прямої).(6.10)

6) $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1-$ **рівняння прямої у відрізках** на осях, де a і $b-$ відрізки, що їх відтинає пряма на координатних осях Ox і Oy (6.11)

II. Алгебраїчні поверхні I – го порядку.

1) $Ax+By+Cz+D=O-$ **загальне рівняння площини**; (6.12)

вектор $\vec{n}=\{A,B,C\}$, перпендикулярний до даної площини, називається її **нормальним вектором;**

2) $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$ – **рівняння площини, що проходить через точку $M_0(x_0,y_0,z_0)$ перпендикулярно до нормального вектора**

$$\vec{n}=\{A,B,C\}. \tag{6.13}$$

3)
$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1 \tag{6.14}$$

- **рівняння площини у відрізках на осях**, де a,b,c - величини відрізків, що їх відтинає площина на координатних осях Ox,Oy,Oz відповідно;

4)
$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0 \tag{6.15}$$

- **рівняння площини, що проходить через три задані точки** (які не лежать на одній прямій) $M_1(x_1,y_1,z_1);\ M_2(x_2,y_2,z_2);\quad M_3(x_3,y_3,z_3)$.

Відстань від точки $M_0(x_0;y_0;z_0)$ до площини $Ax+By+Cz+D=0$ визначають за формулою:

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}. \tag{6.16}$$

Кут між двома площинами $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ та $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ знаходять за формулою:

$$\cos\varphi=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}. \tag{6.17}$$

Умова перпендикулярності площин: $A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0.$ (6.18)

Умова паралельності площин: $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$. (6.19)

Дві площини співпадають, якщо справджуються рівності:

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}=\frac{D_1}{D_2}. \tag{6.20}$$

ІІІ. Алгебраїчні лінії І – го порядку в просторі.

Пряма у просторі може задаватись:

1) **як лінія перетину двох площин**:

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0, \end{cases} \tag{6.21}$$

2) **параметричними рівняннями**:

$$x=x_0+mt,\ y=y_0+nt,\ z=z_0+pt, \tag{6.22}$$

де $M_0(x_0, y_0, z_0)$- задана точка, що належить прямій, $\vec{s} = \{m, n, p\}$ - напрямний вектор прямої;

3) **канонічними рівняннями**:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}, \qquad (6.23)$$

4) **рівняннями прямої, що проходить через дві задані точки** $M_1(x_1; y_1; z_1)$ **і** $M_2(x_2, y_2, z_2)$ є

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}. \qquad (6.24)$$

Кут між двома прямими: $\frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1} = \frac{z - z_1}{p_1}$ і $\frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2} = \frac{z - z_2}{p_2}$ обчислюють за формулою:

$$\cos\varphi = \frac{m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}. \qquad (6.25)$$

Умова паралельності прямих:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}. \qquad (6.26)$$

Умова перпендикулярності прямих:

$$m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0. \qquad (6.27)$$

Кут між прямою $\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$ **і площиною** $Ax + By + Cz + D = 0$ знаходять за формулою:

$$\sin\varphi = \frac{|Am + Bn + Cp|}{\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}\,\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \qquad (6.28)$$

Умова паралельності прямої і площини:

$$Am + Bn + Cp = 0. \qquad (6.29)$$

Умова перпендикулярності прямої і площини:

$$\frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}. \qquad (6.30)$$

Точку перетину прямої і площини знаходять із системи рівнянь:

$$\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \\ z = z_0 + pt, \\ Ax + By + Cz + D = 0. \end{cases} \qquad (6.31)$$

IV. Алгебраїчні лінії другого порядку.

Нехай задано загальне рівняння другого степеня, яке не містить добутки змінних

$$Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = O. \qquad (6.32)$$

Якщо цьому рівнянню відповідає лінія на площині, то в результаті виділення повних квадратів відносно кожної змінної вихідне рівняння може набути вигляду:

1) $$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2 \qquad (6.33)$$

- **коло радіуса** R **з центром у точці** $C(x_0; y_0)$. Зокрема, рівняння кола з центром у початку координат:

$$x^2 + y^2 = R^2. \qquad (6.34)$$

2) $$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1 \qquad (6.35)$$

- **еліпс з центром у точці** $C(x_0; y_0)$. Зокрема, канонічне рівняння еліпса має вигляд:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (6.36)$$

(рис. 6.1), де $$b^2 = a^2 - c^2, \ a > b \qquad (6.37)$$

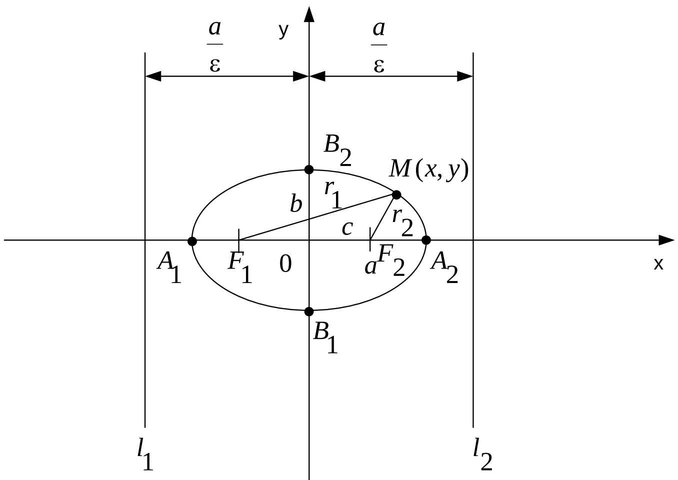

Рис. 6.1

Відстані між вершинами: велика (фокальна) вісь

$$A_2A_1 = 2a \qquad (6.38)$$

і мала вісь

$$B_2B_1 = 2b \qquad (6.39)$$

відстань між фокусами

$$F_2F_1 = 2c; \qquad (6.40)$$

a,b - півосі еліпса.

Ексцентриситет ε визначається рівністю

$$\varepsilon = \frac{c}{a}, \qquad (6.41)$$

очевидно, для еліпсу $0 < \varepsilon < 1.$

$F_1M = r_1$ і $F_2M = r_2$ - фокальні радіуси точки $M(x,y)$.

Директриси еліпса

$$x = \pm \frac{a}{\varepsilon} \tag{6.42}$$

Рівняння дотичної до еліпса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ у **точці** $M_0(x_0; y_0)$ має вигляд:

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1. \tag{6.43}$$

3) $$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = \pm 1$$

(6.44)

- **гіпербола або спряжена до неї гіпербола з центром у точці** $C(x_0, y_0)$ та характеристичним прямокутником зі сторонами $2a$ і $2b$. Діагоналі цього прямокутника – асимптоти гіперболи (рис. 6.2):

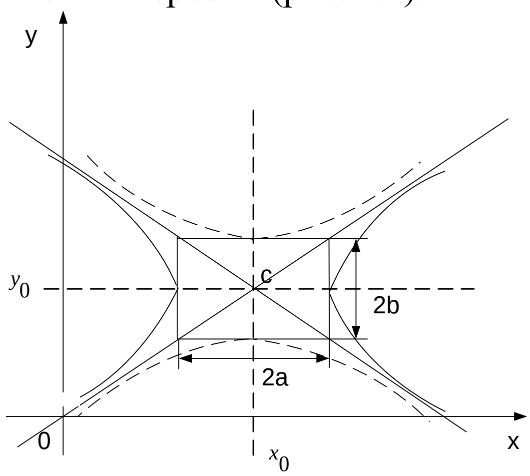

Рис. 6.2

4) $$(y - y_0)^2 = \pm 2p(x - x_0); \tag{6.45}$$

$$(x - x_0)^2 = \pm 2q(y - y_0) \tag{6.46}$$

- **параболи з вершинами у точці** $C(x_0, y_0)$,**симетричні відносно прямих** $x = x_0$ та $y = y_0$ відповідно (рис. 6.3).

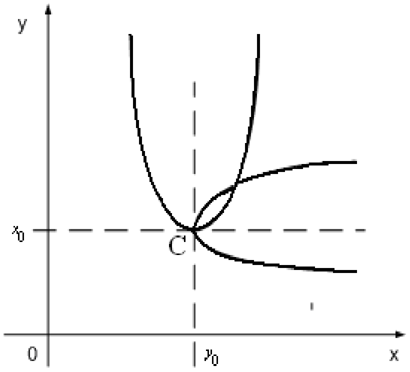

Рис. 6.3

V. Алгебраїчні поверхні другого порядку.

Алгебраїчною поверхнею другого порядку називається поверхня, рівняння якої в декартовій системі координат має вигляд:

$$Ax^2+By^2+Cz^2+2Dxy+2Exz+2Fyz+Gx+My+Lz+K=0, \qquad (6.47)$$

де коефіцієнти A,B,C,D,E,F одночасно $\neq 0$.

1. Циліндричні поверхні.

Рівняння

$$F(x;y)=0 \qquad (6.48)$$

визначає **циліндричну поверхню з твірною, паралельною осі** OZ.

Аналогічно,

$$F(y;z)=0 \qquad (6.49)$$

і

$$F(x;z)=0 \qquad (6.50)$$

- рівняння циліндричних поверхонь з твірними, паралельними осям Ox **і** Oy відповідно (рис. 6.4 а,б,в)**.**

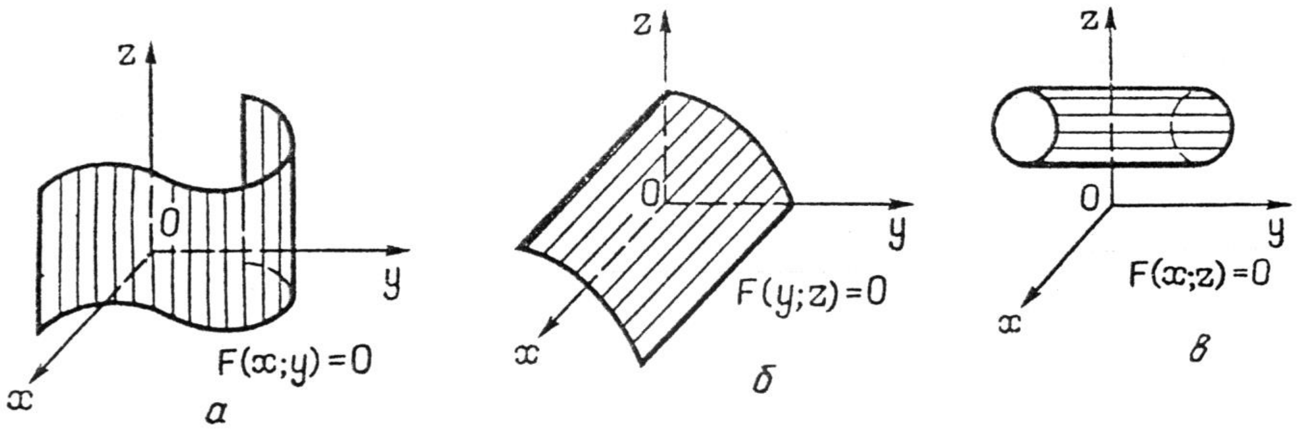

Рис 6.4

Циліндри другого порядку:

1) **круговий**: $x^2+y^2=R^2$ (рис. 6.5); (6.51)

2) **еліптичний**: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ (рис.6.6); (6.52)

3) **гіперболічний** $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ (рис.6.7); (6.53)

4) **параболічний**: $y^2=2px,\ p>0$ (рис.6.8). (6.54)

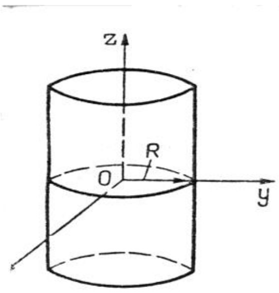

Рис. 6.5

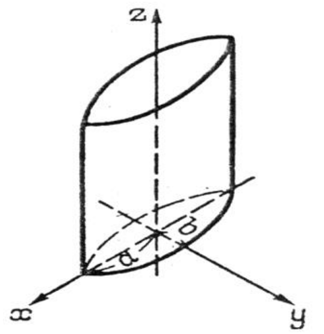

Рис. 6.6

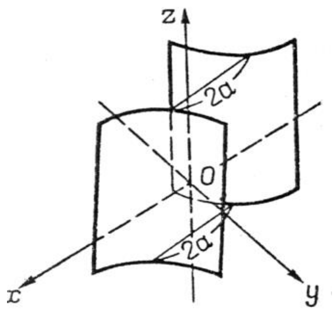

Рис. 6.7

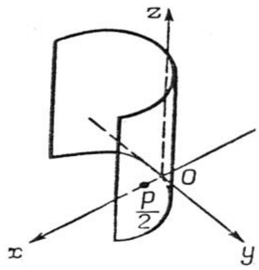

Рис.6.8

2. Поверхні обертання.

Поверхнею обертання називається поверхня, утворена обертанням заданої плоскої лінії *L* навколо деякої прямої *l* (осі обертання), що лежить у площині лінії *L*.

Щоб дістати рівняння поверхні, утвореної обертанням лінії *L*, що лежить у площині *Oxz*, навколо осі *Oz*, треба в рівнянні цієї лінії замінити змінну х на вираз $\pm\sqrt{x^2+y^2}$, тобто якщо рівняння лінії *L:F (x, z)=0, y=0*, то при її обертанні навколо осі *Oz* **рівняння поверхні обертання** має вигляд F($\pm\sqrt{x^2+y^2}$, z)=0 (6.55), рис. 6.9).

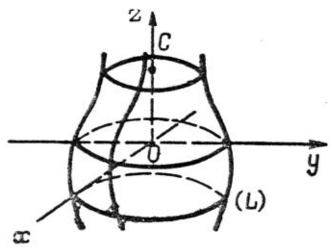

Рис. 6.9

3. Конічні поверхні.

Конічною називається поверхня, описана рухомою прямою (твірною), що проходить через фіксовану точку (вершину) і перетинає деяку криву L (напрямну) конуса. Маємо **рівняння конуса** у вигляді

$$F\ (x;\ y;\ z)=0 \tag{6.56}$$

Рівняння конуса другого порядку з вершиною в точці *O (0; 0)* (рис. 6.10) має вигляд

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0 \tag{6.57}$$

Однією з можливих напрямних цього конуса є еліпс $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\ z=c.$

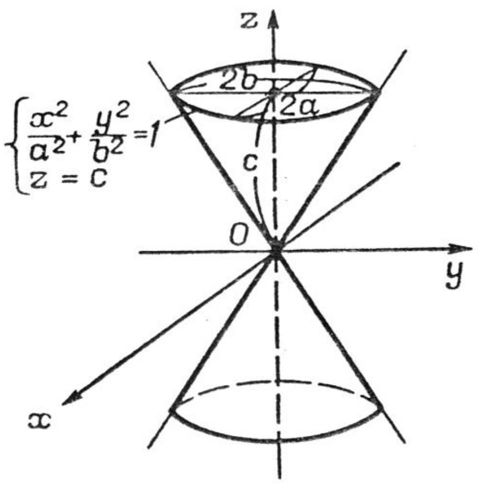

Рис. 6.10

4. Сфера.

Рівняння сфери радіуса R з центром у точці C $(x_0; y_0; z_0)$ має вигляд:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2 \qquad (6.58)$$

(рис. 6.11), зокрема, **рівняння сфери з центром у початку координат**:

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \qquad (6.59)$$

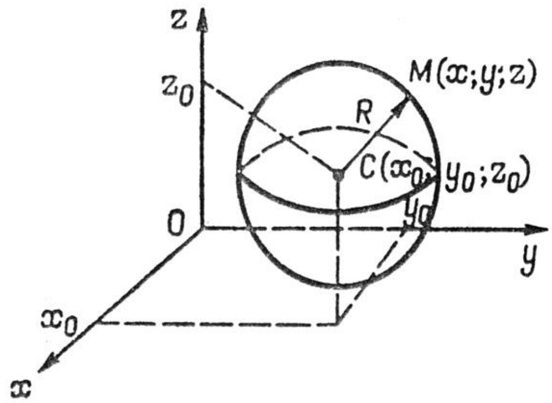

Рис. 6.11

5. Канонічні рівняння поверхонь другого порядку:

1). **Еліпсоїд** (рис. 6.12):

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \qquad (6.60)$$

2). **Гіперболоїди**:

а). однопорожнинний (рис. 6.13):

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \qquad (6.61)$$

б). двопорожнинний (рис. 6.14):

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1. \qquad (6.62)$$

3). **Параболоїди**:

а). еліптичний (рис. 6.15):

$$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z \qquad (6.63)$$

б). гіперболічний (рис. 6.16):

$$\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z \qquad (6.64)$$

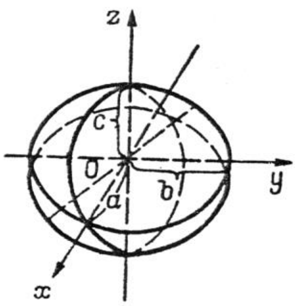

Рис. 6.12

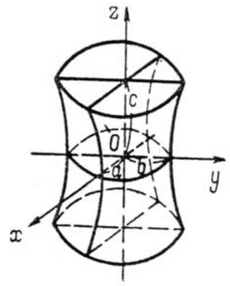

Рис. 6.13

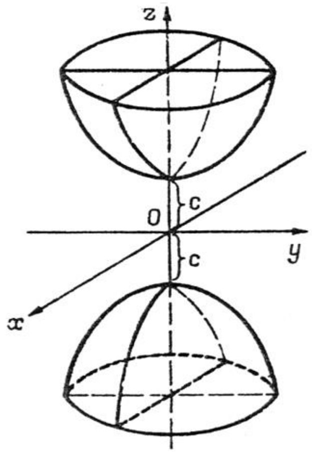

Рис. 6.14

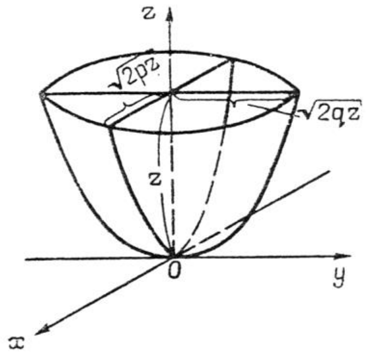

Рис. 6.15

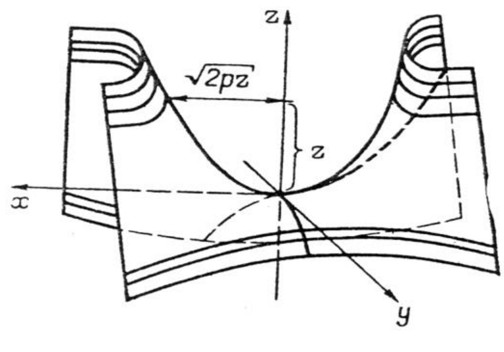

Рис. 6.16

Приклади розв'язання типових задач

Приклад 1.

Дано точки $M_1(2;-1)$ і $M_2(4;5)$. Написати рівняння прямої, що проходить через точку M_1 перпендикулярно до вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$.

Розв'язання.

Нормальний вектор шуканої прямої $\vec{n} = \overrightarrow{M_1M_2}$ має координати $\vec{n} = \{2;6\}$. Отже, $2(x-2)+6(y+1)=0$, або $x+3y+1=0$.

Відповідь: $x+3y+1=0$

Приклад 2.

Дано дві прямі: $x+7y-5=0$ і $3x-4y+20=0$.

Знайти кут між ними.

Розв'язання.

Кутовий коефіцієнт першої прямої $k_1 = -\frac{1}{7}$. а другої - $k_2 = \frac{3}{4}$.

Отже за формулою (6.6): $tg\varphi = \dfrac{\frac{3}{4}-\left(-\frac{1}{7}\right)}{1+\frac{3}{4}\cdot\left(-\frac{1}{7}\right)} = \dfrac{25\cdot 28}{28\cdot 25} = 1$. Звідки кут між прямими 45^0.

Відповідь: 45^0

Приклад 3.

Дано пряму $2x-y+7=0$ і точку $(-8;1)$. Скласти рівняння прямої, що проходить через дану точку паралельно заданій прямій.

Розв'язання.

Приведемо задане рівняння до вигляду (6.2): $y=2x+7$, отже, $k=2$.

Оскільки шукана і задана прямі паралельні, то за умовою (6.7) їхні кутові коефіцієнти рівні, тому за (6.3) маємо: $y-1=2(x+8)$, або $y-2x-17=0$.

Відповідь: $y-2x-17=0$.

Приклад 4.

Медіани BM і CN (рис. 6.17) ΔABC лежать на прямих $x+y=3$ і $2x+3y=1$, а точка $A(1;1)$ - вершина трикутника. Скласти рівняння прямої BC.

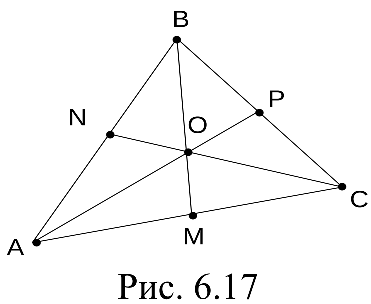

Рис. 6.17

Розв'язання.

Знайдемо координати точки перетину медіан O:

$$\begin{cases} x+y=3, \\ 2x+3y=1, \end{cases} \qquad O(8;-5)$$

З відношення $\frac{AO}{OP}=\frac{2}{1}=\lambda$ і формули (6.6) знаходимо координати точки P:

$$8=\frac{1+2x_p}{1+2};\ -5=\frac{1+2y_p}{1+2};\ x_p=\frac{23}{2};\ y_p=-8.$$

Оскільки точки B і C лежать на заданих прямих, то їхні координати задовольняють задані рівняння. P - середина BC, отже, маємо:

$$\frac{x_B+x_c}{2}=\frac{23}{2};\ \frac{y_B+y_c}{2}=-8;\ x_B+y_b=3;\ 2x_c+3y_c=1;$$

звідки $x_c=11, y_c=-7.$ Пряма BC проходить через точки $P\left(\frac{23}{2};-8\right)$ і $C(11;-7)$, тому за формулою (6.4): $\frac{x-\frac{23}{2}}{11-\frac{23}{2}}=\frac{y+8}{-7+8}$, або $2x+y-15=0$

Відповідь: $2x+y-15=0$

Приклад 5.

Знайти площу квадрата, дві сторони якого лежать на прямих $4x-3y-10=0$ і $8x-6y+15=0.$

Розв'язання.

Задані прямі паралельні, отже, довжина d сторони квадрата знаходиться як відстань від довільної точки однієї прямої до другої прямої: нехай $x=1,$ $4\cdot 1-3y-10=0$, тоді $y=-2$.

Точка $A_0(1;-2)$ належить першій прямій. За формулою (6.9) маємо:

$$d=\frac{|8\cdot 1-6\cdot(-2)+15|}{\sqrt{8^2+(-6)^2}}=\frac{7}{2}.$$

Площа квадрата $S=d^2=\left(\frac{7}{2}\right)^2=\frac{49}{4}.$

Відповідь: $\frac{49}{4}.$

Приклад 6.

Скласти рівняння площини, що проходить через точку $B(1;2;3)$ перпендикулярно до вектора $\vec{n}\{1;-3;1\}.$

Розв'язання.

Шукане рівняння маємо за формулою (6.13):

$$-1(x-1)+(-3)(y-2)+1\cdot(z-3)=0,\quad x+3y-z-4=0.$$

Відповідь: $x+3y-z-4=0.$

Приклад 7.

Написати загальне рівняння площини, що проходить через точки $M(1;2;3)$, $N(-1;0;2)$, $K(-2;1;0)$.

Розв'язання.

Підставимо координати даних точок M, N і K в рівняння (6.15):

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ -2 & -2 & -1 \\ -3 & -1 & -3 \end{vmatrix} = 0, \quad 5(x-1)-3(y-2)-4(z-3)=0, \text{ або}$$

$5x-3y-4z+13=0.$

Відповідь: $5x-3y-4z+13=0.$

Приклад 8.

Побудувати площину $3x-2y+4z-12=0.$

Розв'язання.

За формулою (6.14): $\frac{x}{4}+\frac{y}{-6}+\frac{z}{3}=1$ - рівняння площини у відрізках на осях.

Отже, $a=4, b=-6, c=3$. Будуємо площину (рис. 6.18).

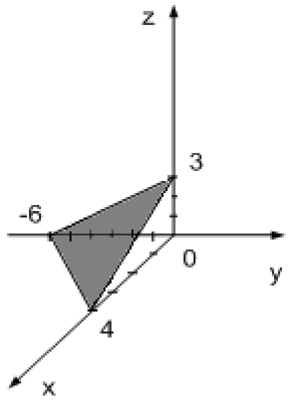

Рис. 6.18

Приклад 9.

Знайти кут між площинами $2x+y+3z-1=0$ і $x+y-z+5=0.$

Розв'язання.

За формулою (6. 17) маємо: $\cos\varphi = \frac{2\cdot 1+1\cdot 1+3\cdot(-1)}{\sqrt{2^2+1^2+3^2}\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2}}=0,$ отже, площини перпендикулярні, $\varphi = 90^0$.

Відповідь: 90^0.

Приклад 10.

Знайти висоту AH піраміди, заданої своїми вершинами $A(-1;2;-1)$; $B(1;0;2)$; $C(0;1;-1)$; $D(2;0;-1)$.

Розв'язання.

Знайдемо рівняння площини (BCD) за формулою (6.15): $\begin{vmatrix} x-1 & y-0 & z-2 \\ -1 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 0,$

звідки, $3x+6y+z-5=0$. Висоту AH знайдемо як відстань точки $A(-1;2;-1)$ від площини (BCD) за формулою (6.16): $AH = \dfrac{3\cdot(-1)+6\cdot 2+1\cdot(-1)-3}{\sqrt{3^2+6^2+1^2}} = \dfrac{5}{\sqrt{46}}$.

Відповідь: $\dfrac{5}{\sqrt{46}}$.

Приклад 11.

Знайти рівняння площини, що проходить через точку $M(2;-1;5)$ перпендикулярно до площин $3x-2y+z+7=0$ і $5x-4y+3z+1=0$.

Розв'язання.

Рівняння площини (6.12) буде:

$$A(x-2)+B(y+1)+C(z-5)=0.$$

Оскільки площина перпендикулярна до заданих площин, виконується (6.18):

$$3A-2B+C=0$$

$$5A-4B+3C=0.$$

Виключивши A, B, C з системи рівнянь

$$\begin{cases} A(x-2)+B(y-1)+C(z-5)=0 \\ 3A-2B+C=0 \\ 5A-4B+3C=0 \end{cases},$$

маємо рівняння площини у вигляді:

$$\begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z-5 \\ 3 & -2 & 1 \\ 5 & -4 & 3 \end{vmatrix} = 0,$$

або $$x+2y+z-5=0.$$

Відповідь: $x+2y+z-5=0$.

Приклад 12.

Звести до канонічного вигляду рівняння прямої

$$\begin{cases} 2x-y+3z-1=0 \\ 5x+4y-z-7=0 \end{cases}.$$

Розв'язання.

Нормальні вектори заданих площин:

$$\overrightarrow{n_1} = 2\vec{i}-\vec{j}+3\vec{k} \text{ і } \overrightarrow{n_2} = 5\vec{i}+4\vec{j}-\vec{k}.$$

Знайдемо вектор $\vec{s} = l\vec{i} + m\vec{j} + n\vec{k}$, паралельний до шуканої прямої. Оскільки $\vec{s} = \overrightarrow{n_1} \times \overrightarrow{n_2}$, то

$$\vec{s} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 3 \\ 5 & 4 & -1 \end{vmatrix} = -11\vec{i} + 17\vec{j} + 13\vec{k},$$

тобто $l = -11; m = 17; n = 13.$

За точку $M_1(x_1, y_1, z_1)$, через яку проходить пряма, можна прийняти точку перетину прямої з будь-якою з координатних площин, наприклад з площиною yOz:

$$\begin{cases} 2x - y + 3z - 1 = 0 \\ 5x + 4y - z - 7 = 0. \\ x = 0 \end{cases}$$

Отже, $x_1 = 0, y_1 = 2, z_1 = 1$.

Таким чином, шукана пряма визначається рівнянням: $\dfrac{x}{-11} = \dfrac{y-2}{17} = \dfrac{z-1}{13}$.

Відповідь: $\dfrac{x}{-11} = \dfrac{y-2}{17} = \dfrac{z-1}{13}$.

Приклад 13.

Знайти центр і радіус кола $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 23 = 0.$

Розв'язання.

$$\left(x^2 + 4x\right) + \left(y^2 - 6y - 23\right) = 0,$$

або

$$\left(x^2 + 4x + 4\right) - 4 + \left(y^2 - 6y + 9\right) - 9 - 23 = 0, \ \ (x+2)^2 + (y-3)^2 = 36.$$

За формулою (6.33) точка $(-2;3)$ - центр кола, а $R = 6$ - радіус кола.

Відповідь: $(-2;3)$; $R = 6$.

Приклад 14.

Скласти рівняння лінії, для кожної точки якої відношення відстані від точки $F(5;0)$ до відстані до прямої $x = \dfrac{15}{2}$ дорівнює $\dfrac{2}{3}$.

Розв'язання.

Нехай точка $M(x, y)$ належить шуканій кривій. Тоді відстань $FM = d_1 = \sqrt{(x-5)^2 + y^2}$, а відстань від точки M до прямої $x = \dfrac{15}{2}$: $d_2 = \left|x - \dfrac{15}{2}\right|$.

За умовою, $\dfrac{d_1}{d_2}=\dfrac{2}{3}$. Отже, $\dfrac{\sqrt{(x-5)^2+y^2}}{\left|x-\dfrac{15}{2}\right|}=\dfrac{2}{3}$. Звідси

$(x-5)^2+y^2=\dfrac{4}{9}\left(x-\dfrac{15}{2}\right)^2$; $9(x-5)^2+9y^2=4\left(x-\dfrac{15}{2}\right)^2$; $5x^2+9y^2-30x=0$ рівняння шуканої лінії. $5\left(x^2-6x\right)+9y^2=0$; $5\left(x^2-6x+9\right)-45+9y^2=0$; $5(x-3)^2+9y^2=45$.

За формулою (6.35): $\dfrac{(x-3)^2}{9}+\dfrac{y^2}{5}=1$ - це рівняння еліпса з центром в точці $C(3;0)$ та півосями $a=3;b=\sqrt{5}$.

Відповідь: $\dfrac{(x-3)^2}{9}+\dfrac{y^2}{5}=1$.

Приклад 15.

Знайти відстань фокуса гіперболи $x^2-8y^2=8$ від її асимптоти.

Розв’язання.

За формулою (6.44) канонічне рівняння гіперболи: $\dfrac{x^2}{8}-\dfrac{y^2}{1}=1$, звідки $a=\sqrt{8}$; $b=1$ - півосі. Тому рівняння асимптоти має вигляд: $x-y\sqrt{8}=0$. Оскільки $c^2=a^2+b^2$, маємо $c=3$, тому $F_1(-3;0)$ і $F_2(3;0)$ - фокуси гіперболи. Тоді відстань d від фокуса F_1 до знайденої асимптоти: $d=1$.

Відповідь: $d=1$.

Приклад 16.

Записати рівняння кривої $(x^2+y^2)^2=2a^2(x^2-y^2)$ в полярних координатах і побудувати її.

Розв’язання

Перейдемо до полярних координат:

$$x=\rho\cos\varphi; y=\rho\sin\varphi,\ \rho^2=2a^2\cos 2\varphi.$$

Звідси $\rho=\pm a\sqrt{2\cos\varphi}$, де $a>0$.

Очевидно, що крива симетрична відносно осей Ox і Oy. Для I чверті $\rho\ge 0$, $0\le 2\varphi\le\dfrac{\pi}{2}$, тобто $0\le\varphi\le\dfrac{\pi}{4}$.

Складемо таблицю:

φ	0	$\pi/18$	$\pi/9$	$\pi/6$	$2\pi/9$	$\pi/4$
ρ	$1{,}41a$	$1{,}37a$	$1{,}24a$	a	$0{,}59a$	0

і побудуємо криву, враховуючи симетрію:

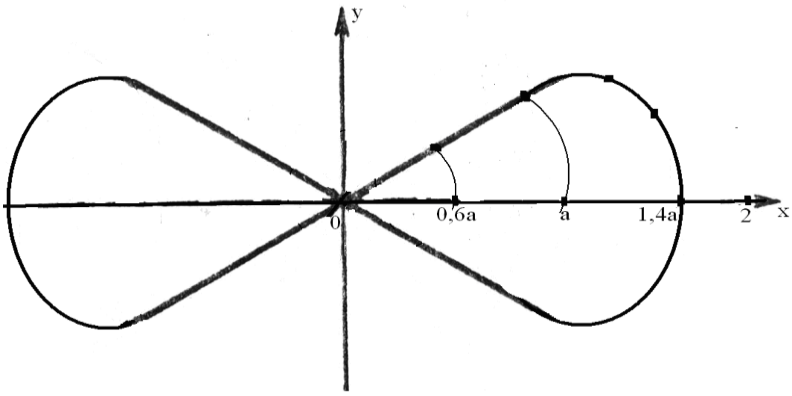

Рис.6.19

Ця крива є лемніскатою Бернуллі (дивись додаток 4).

Приклад 17.

Яка лінія визначається параметричними рівняннями: $\begin{cases} x = cos\,t \\ y = cos^2 t \end{cases}$?

Розв'язання.

Оскільки $x = cos\,t$, то $y = x^2$.

З умови слідує, що $|x| \le 1, 0 \le y \le 1$. Таким чином, маємо дугу AOB параболи $y = x^2$, де $A(-1;1), B(1;1)$.

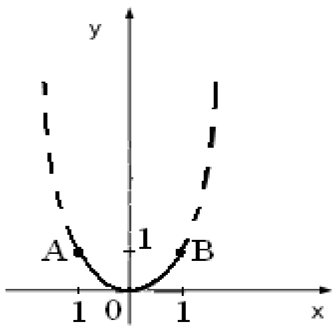

Рис.6.20

Приклад 18.

Скласти рівняння поверхні обертання, утвореної обертанням параболи $z = -\frac{1}{2} y^2$ навколо осі OZ.

Розв'язання.

Підставивши в рівняння параболи замість y вираз $\pm\sqrt{x^2 + y^2}$, маємо:

$$z = -\frac{1}{2}\left(\pm\sqrt{x^2 + y^2}\right)^2; \text{ або } z = -\frac{1}{2}\left(x^2 + y^2\right).$$

Це рівняння параболоїда обертання (рис. 6.21):

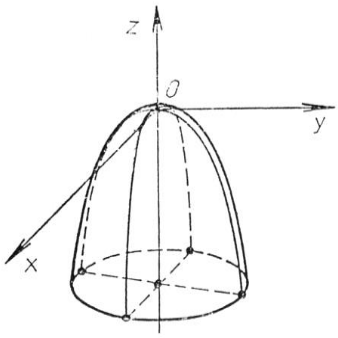

Рис. 6.21

Приклад 19.

Знайти лінії перетину однопорожнинного гіперболоїда $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{16}=1$ площинами: а) Oxz; б) Oxy; в) $x=4$.

Розв'язання.

а). Лінією перетину з площиною Oxz є гіпербола:

$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{16}=1,\ y=0$, або $\frac{x^2}{4}-\frac{z^2}{16}=1,\ y=0;$

б). Лінією перетину з площиною Oxy є еліпс:

$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{16}=1,\ z=0$, або $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1,\ z=0;$

в). Лінією перетину з площиною $x=4$ є гіпербола:

$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{16}=1,\ x=4$, або $\frac{y^2}{27}-\frac{z^2}{48}=-1,\ x=4.$

Приклад 20.

Встановити, які поверхні визначаються заданими рівняннями і зобразити їх:

а). $-\frac{x^2}{6}+4y^2+\frac{1}{2}z^2-2=0;$ б). $3x^2+\frac{y^2}{2}-\frac{z^2}{4}=0.$

Розв'язання.

а). За формулою (6.61) маємо канонічне рівняння гіперболоїда:

$-\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{\frac{1}{2}}+\frac{z^2}{4}=1$, де півосі його еліпса $OB=\frac{\sqrt{2}}{2};\ OC=2$ (рис. 6.22)

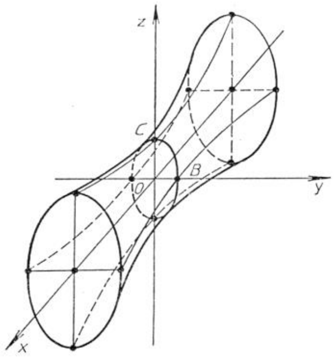

Рис. 6.22

б). За формулою (6.57) маємо канонічне рівняння конуса другого порядку: $\frac{x^2}{1}+\frac{y^2}{6}-\frac{z^2}{12}=0$, його перерізи площинами $z=const$ є еліпсами (рис. 6.23)

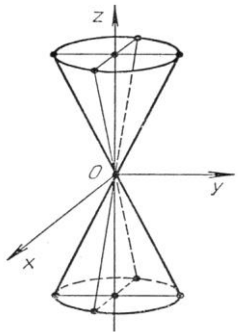

Рис. 6.23

Задачі

6.1. Побудувати пряму :
а) $3x-4y+7=0$; б) $x-2=0$; в) $y-3=0$.

6.2. Сторони AB, BC і AC трикутника ABC задані відповідно рівняннями:
$4x+3y-3=0$, $x-3y+10=0$, $x-2=0$. Визначити координати його вершин.

6.3. Задана пряма $5x+3y-3=0$. Визначити кутовий коефіцієнт k прямої:
1) паралельної даній прямій; 2) перпендикулярної до даної прямої.

6.4. Задана пряма $2x+3y+4=0$. Складіть рівняння прямої, яка проходить через точку $M_0(2;1)$:
1) паралельної даній прямій; 2) перпендикулярної до даної прямої.

6.5. Знайти проекцію точки $P(-6;4)$ на пряму $4x-5y+3=0$.

6.6. Задані вершини трикутника $M_1(2;1)$, $M_2(-1;-1)$, $M_3(3;2)$. Скласти рівняння медіани на сторону M_1M_2.

6.7. Визначити кут φ, утворений двома прямими:
1) $3x-y+5=0$, $2x+y-7=0$, 2) $x+5y-3=0$, $2x-3y+4=0$.

6.8. Задана пряма $2x-3y-12=0$. Скласти для неї рівняння у відрізках і побудувати пряму.

6.9. Знайти рівняння бісектрис кутів, утворених прямими $x-3y+5=0$ та $3x-y-2=0$.

6.10. Знайдіть відстань від вершини B до висоти AD трикутника з вершинами $A(0;-4)$, $B(3;2)$, $C(-5;1)$.

6.11. Доведіть, що прямі $3x-8y-27=0$ і $-6x+16y+11=0$ паралельні. Знайдіть відстань між ними.

6.12. Знайдіть площу трикутника, який відтинається від осей координат прямою $8x-5y+50=0$.

6.13. При яких значеннях m і n прямі $(m+4)x+2y+n-1=0$ та $2x+my-6=0$

а) паралельні; б) збігаються; в) перпендикулярні?

6.14. Довести, що рівняння прямої, яка проходить через дві точки $M_1(x_1;y_1)$ і $M_2(x_2;y_2)$, може бути задана у вигляді:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

6.15. Як розташовані площини:

а) $3x-5y+1=0$; б) $2y-2=0$; в) $2x+3y-7z=0$; г) $2x-6y+4z-2=0$

відносно координатних площин?

6.16. Задані дві точки $M_1(3;-1;2)$ і $M_2(4;-2;-1)$. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку M_1 перпендикулярно вектору $\overrightarrow{M_1M_2}$.

6.17. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку: $M_1(x_1;y_1;z_1)$, паралельно двом векторам $\vec{a}=\{3;1;-1\}$ і $\vec{b}=\{1;-2;1\}$.

6.18. Довести, що рівняння площини, яка проходить через три точки: $M_1(x_1;y_1;z_1)$, $M_2(x_2;y_2;z_2)$ і $M_3(x_3;y_3;z_3)$, може бути представлено у вигляді:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

6.19. Чи паралельні площини:

а) $x+2y+3z+5=0$ і $2x+4y+6z+11=0$;

б) $x-7y+5z-1=0$ і $2x+y-3z+4=0$?

6.20. Чи перпендикулярні площини:

а) $2x-5y+z+4=0$ і $3x+2y+4z-1=0$;

б) $7x-y+9=0$ і $y+2z-3=0$?

6.21. Знайти відстань від точки $M(1;3;-2)$ до площини $2x-3y-4z+12=0$.

6.22. Знайти довжину перпендикуляра, опущеного з точки $N(2;3;-5)$ на площину $4x-2y+5z-12=0$.

6.23. Знайти рівняння площини, що проходить: а) через точку $M(-2;3;4)$ і відтинає на координатних осях рівні відрізки; б) через точку $N(2;-1;4)$, якщо площина відтинає на осі Oz відрізок, вдвічі більший, ніж на осях Ox і Oy.

6.24. Знайти рівняння площини, що проходить через точки $P(2;0;-1)$ і $Q(1;-1;3)$ перпендикулярно до площини $3x+2y-z+5=0$.

6.25. На площині $2x-5y+2z+5=0$ знайти таку точку M, щоб пряма OM утворювала рівні кути з осями координат.

6.26. Знайти рівняння площини, якщо точка $P(4;-3;12)$ є основою перпендикуляра, проведеного з початку координат на цю площину.

6.27. Знайти рівняння площин, що проходять через осі координат перпендикулярно до площини $3x-4y+5z-12=0$.

6.28. Знайти рівняння площини, точки якої рівновіддалені від точок $M(1;-4;2)$ і $N(7;1;-5)$.

6.29. Знайти рівняння площини, що проходить через точки $P(0;2;0)$ і $Q(2;0;0)$ і утворює кут 60^0 з площиною $x=0$.

6.30. Обчислити кут між площинами, що проходять через точку $M(1;-1;-1)$, з яких одна площина містить вісь Ox, а інша – вісь Oz.

6.31. Знайти рівняння площини, якій належать початок координат і точки $A(4;-2;1)$ і $B(2;4;-3)$.

6.32. Знайти рівняння площини, що проходить через точку перетину площин $2x+2y+z-7=0$, $2x-y+3z-3=0$, $4x+5y-2z-12=0$ і через точки $E(0;3;0)$ і $F(1;1;1)$.

6.33. Знайти кут, що утворює площина $x+y+2z-4=0$ з вектором $\vec{a}=\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}$.

6.34. Опустити з початку координат перпендикуляр на пряму $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-1}{3}=\dfrac{z-3}{1}$.

6.35. При якому значенні n прямі $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{-3}=\dfrac{z}{n}$ і $\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y+5}{2}=\dfrac{z}{1}$ перетинаються? Знайти точку перетину.

6.36. Знайти рівняння прямої, що проходить через точку $M(3;2;-1)$ і перетинає вісь Ox під прямим кутом.

6.37. Знайти точку N_1, симетричну точці $N(1;1;1)$, відносно:

а) площини $x+y-2z-6=0$; б) прямої $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z+1}{-1}$.

6.38. Скласти рівняння прямої, що проходить через точку $M(5;3;4)$ паралельно до вектора $\vec{a}=2\vec{i}+5\vec{j}-8\vec{k}$.

6.39. Утворити рівняння прямої, що проходить через точку $M(1;1;1)$ перпендикулярно до векторів $\vec{s_1}=2\vec{i}+3\vec{j}+\vec{k}$ і $\vec{s_2}=3\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k}$.

6.40. Знайти рівняння проекцій прямої $\begin{cases} x+2y+3z-26=0 \\ 3x+y+4z-14=0 \end{cases}$ на координатні площини.

6.41. Обчислити кути, що утворює пряма $\begin{cases} x-2y-5=0 \\ x-3z+8=0 \end{cases}$ з осями координат.

6.42. Знайти рівняння прямої, що проходить через точку $N(5;-1;-3)$ паралельно до прямої $\begin{cases} 2x+3y+z-6=0 \\ 4x-5y-z+2=0 \end{cases}$.

6.43. Знайти точку перетину прямих: $\frac{x-1}{-1}=\frac{y-2}{5}=\frac{z+4}{2}$ і $\frac{x-2}{2}=\frac{y-5}{-2}=\frac{z-1}{3}$.

6.44. Знайти параметричне рівняння прямої, що проходить через точки $M(2;-5;1)$ і $N(-1;1;2)$.

6.45. Знайти відстань між паралельними прямими $\frac{x}{1}=\frac{y-3}{2}=\frac{z-2}{1}$ і $\frac{x-3}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-2}{1}$.

6.46. Знайти кут між прямими: $\begin{cases} 4x-y-z+12=0 \\ y-z-2=0 \end{cases}$ і $\begin{cases} 3x-2y+16=0 \\ 3x-z=0 \end{cases}$.

6.47. Трикутник ABC утворений перетином площини $x+2y+4z-8=0$ з координатними осями. Знайти рівняння середньої лінії трикутника, паралельної до площини xOy.

6.48. Скласти рівняння прямої, що проходить через точку $A(1;1;1)$ перпендикулярно $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$, якщо $B(2;3;3)$ і $C(3;3;2)$.

6.49. Скласти рівняння прямої, що проходить через точку $M(0;2;1)$ і утворює рівні кути з векторами $\vec{a}=\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k}$, $\vec{b}=3\vec{j}$, $\vec{c}=3\vec{k}$.

6.50. Знайти рівняння площини, що проходить через пряму $\frac{x+1}{3}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z}{4}$ і перпендикулярну до площини $3x+y-z+2=0$.

6.51. Знайти кут між прямою $\frac{x-3}{2}=\frac{y-5}{-3}=\frac{z+2}{-2}$ і площиною $6x-9y-6z+10=0$.

6.52. Знайти рівняння проекції прямої $\frac{x}{2}=\frac{y+3}{1}=\frac{z-2}{-2}$ на площину $2x+3y-z-5=0$.

6.53 Скласти рівняння кола, якщо:

а) центр кола співпадає з початком координат і його радіус $r=3$;

б) центр кола співпадає з точкою $C(2;-3)$ і його радіус $r=7$.

6.54. Які з рівнянь визначають коло? Знайти центр і радіус кожного з них:

а) $(x-5)^2+(y+2)^2=25$; б) $(x+2)^2+y^2=64$;

в) $x^2+y^2-2x+4y-20=0$; г) $x^2+y^2-2x+4y+14=0$;

д) $x^2+y^2+x=0$; ж) $x^2+y^2+y=0$.

6.55. Скласти рівняння еліпса, фокуси якого лежать на вісі абсцис симетрично відносно початку координат, якщо:

а) $a=5,\ b=2;$

б) $a=10,\ 2c=8;$

в) $2c=6,\ \varepsilon=3/5.$

6.56. Визначити піввісі еліпса:

а) $x^2/4+y^2=1;$ б) $x^2+25y^2=25;$

в) $4x^2+9y^2=25;$ г) $9x^2+25y^2=1;$

д) $x^2+4y^2=1;$ ж) $9x^2+y^2=1.$

6.57. Задано еліпс $9x^2+25y^2=225$. Знайти:

а) піввісі;

б) фокуси;

в) ексцентриситет;

г) рівняння директрис.

6.58. Скласти рівняння гіперболи, фокуси якої розташовані на вісі абсцис симетрично відносно початку координат, якщо:

а) $2a=10,\quad 2b=8;$

б) $2c=10,\quad 2b=8;$

в) $2c=6,\ \varepsilon=3/2;$

г) $2a=16,\quad \varepsilon=5/4.$

6.59. Визначити вісі гіперболи:

а) $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{4}=1;$ б) $\dfrac{x^2}{16}-y^2=1;$

в) $x^2-4y^2=16;$ г) $x^2-y^2=1;$

д) $25x^2-16y^2=1;$ ж) $4x^2-9y^2=25.$

6.60. Побудувати гіперболу:

а) $16x^2-9y^2-64x-54y-161=0;$

б) $9x^2-16y^2+90x+32y-367=0;$

в) $16x^2-9y^2-64x-18y+199=0.$

6.61. Скласти рівняння параболи, вершина якої знаходиться у початку координат, якщо:

а) парабола розташована на правій півплощині симетрично відносно вісі OX і її параметр $P=3$;

б) парабола розташована на лівій півплощині симетрично вісі OX і її параметр $P=0,5$;

в) парабола розташована у верхній півплощині симетрично відносно вісі OY і її параметр $P=1/4$;

г) парабола розташована у нижній півплощині симетрично відносно вісі OY і її параметр $P=3$.

6.62. Зобразити параболи:

а) $y^2=6x;$ б) $x^2=5y;$ в) $y^2=-4x;$ г) $x^2=-y.$

6.63. Встановити, які лінії визначаються рівнянням і зобразити їх:

1) $y=+\sqrt{9-x^2}$; 2) $y=-\sqrt{25-x^2}$;

3) $x=-2-\sqrt{9-y^2}$; 4) $y=-3-\sqrt{21-4x-x^2}$;

5) $y=-7+\frac{2}{5}\sqrt{16+16x-x^2}$; 6) $x=-2\sqrt{-5-6y-y^2}$;

7) $x=-5+\frac{2}{3}\sqrt{8+2y-y^2}$; 8) $y=1-\frac{4}{3}\sqrt{-6x-x^2}$;

9) $y=-1+\frac{2}{3}\sqrt{x^2-4x-5}$; 10) $y=7-\frac{2}{3}\sqrt{x^2-6x+13}$;

11) $x=9-2\sqrt{y^2+4y+8}$; 12) $x=5-\frac{3}{4}\sqrt{y^2+4y-12}$;

13) $y=-3\sqrt{-2x}$; 14) $x=+\sqrt{5y}$;

15) $y=+\sqrt{-x}$; 16) $x=+4\sqrt{-y}$.

6.64. Знайти в прямокутній системі координат рівняння наступних ліній:

1) $x=2t, y=4t$; 2) $x=t^2, y=t^2$;

3) $x=\sin t, y=\frac{1}{\sin t}$; 4) $x=\cos t, y=b\sin t$;

5) $x=\cos^2 t, y=\sin^2 t$; 6) $x=a\cos^3 t, y=b\sin^3 t$.

6.65. Побудувати криві, задані полярними рівняннями:

1) $\rho=2(1+\cos\varphi)$; 2) $\rho=2+\cos\varphi$;

3) $\rho=3\sin 2\varphi$; 4) $\rho=3+\sin\varphi$;

5) $\rho^2=a^2\cos 2\varphi$; 6) $\rho^2=a^2\sin 2\varphi$;

7) $\rho=a\sin 3\varphi$; 8) $\rho=a\cos^2\varphi$;

9) $\rho=a\varphi$; 10) $\rho=a(1+\sin\varphi)$;

11) $\rho=2a(2+\cos\varphi)$; 12) $\rho=a\cos 3\varphi$;

13) $\rho=a\sin^2\varphi$; 14) $\rho=a^{\varphi}$;

15) $\rho=a\sin^3\frac{\varphi}{3}$, якщо $a>0,\ 0\le\varphi<2\pi$.

6.66. Скласти рівняння сфери, яка має центр в точці:

а) $O(2;-3;3)$ і $r = 6$;

б) $O(0;0;0)$ і проходить через т. $B(6;-2;3)$;

в) $A(1;4:-7)$ і дотикається площини $6x+6y-7z+42=0$.

6.67. Зобразити сферу:

а) $x^2+y^2+z^2-6x+8y+2z+10=0$;

б) $x^2+y^2+z^2+2x-4y-4=0$; в) $x^2+y^2+z^2-6x+10=0$.

6.68. Зобразити циліндричні поверхні:

а) $x^2+z^2=9$; б) $xz=2$;

в) $16y^2-25z^2=400$; г) $z^2+4z-2x+6=0$;

д) $y^2=-6z$; ж) $x^2+y^2=4y$.

6.69. Скласти рівняння поверхні обертання наступних ліній:

а) $\begin{cases} y^2+z^2=4 \\ x=0 \end{cases}$; б) $\begin{cases} \dfrac{x^2}{25}-\dfrac{z^2}{16}=1 \\ x=0 \end{cases}$;

навколо OY навколо OZ

в) $\begin{cases} y=3z \\ x=0 \end{cases}$; г) $\begin{cases} y^2-z^2=1 \\ x=0 \end{cases}$.

навколо OZ навколо OZ і OY.

6.70. Методом перерізів встановити вид поверхні:

а) $x^2+y^2=\sin^2 z$; б) $4-z=x^2+y^2$; в) $x^2+y^2=2(z-1)^2$;

г) $2y^2+z^2=1-x$; д) $3x^2-y^2-z^2=3$; ж) $x^2-2y^2+z^2=1$.

6.71. Які поверхні визначаються рівняннями:

а) $2x^2-y^2+2z^2+4x+2y+8z+2=0$;

б) $2x^2+y^2+2z^2-4x+4y+4z+7=0$;

в) $x^2-6y^2+3z^2+8x+12y+1=0$;

г) $x^2+y^2+2x-2y-2z-2=0$?