Тема 3

Вступ до теорії графів

Пара $(V(G), E(G))$ називається:

- **простим графом**, якщо $V(G)$– непорожня, скінченна множина елементів, які називаються **вершинами** графа, $E(G)$– скінченна множина невпорядкованих пар різних елементів з множини вершин $V(G)$, які називаються **ребрами** графа;

- **загальним графом** або **графом**, якщо $V(G)$– непорожня, скінченна множина вершин, $E(G)$ – скінченна сім'я невпорядкованих пар елементів з множини вершин $V(G)$;

- **орієнтованим графом** або **орграфом**, якщо $V(G)$ – непорожня, скінченна множина вершин, $E(G)$ – скінчена сім'я впорядкованих пар елементів з множин вершин $V(G)$.

Сім'єю елементів називається сукупність елементів, в якій деякі елементи можуть повторюватись.

Дамо ще декілька визначень.

Дві вершини a і b графу G називаються **суміжними**, якщо існує ребро, що їх з'єднує. При цьому вершини a і b називаються **інцидентними** цьому **ребру**, а ребро – **інцидентним вершинам** a і b.

Два різних ребра графа G називаються **суміжними**, якщо вони мають принаймні одну спільну вершину.

Степенем (валентністю) вершина a графа G називається число ребер, інцидентних вершині a.

Степінь вершини a будемо позначати через $\rho(a)$. При обчисленні степеня вершини a петлю в a враховують двічі.

Вершина степеня 0 називається **ізольованою вершиною**, вершина степеня 1 називається **висячою** або **кінцевою** вершиною.

Лема Ейлера.

Сума степенів всіх вершин графа G є парним числом, яке дорівнює подвоєному числу ребер.

Наслідок з леми Ейлера.

В будь-якому графі G число вершин непарного степеня повинно бути парним.

Два графа G_1 і G_2 називаються **ізоморфними**, якщо між множинами їх вершин $V(G_1)$ і $V(G_2)$ існує така бієктивна відповідність, що число ребер, які з'єднують будь-які вершини в G_1, дорівнює числу ребер, які з'єднують відповідні вершини в G_2.

Підграфом графа G називається граф, усі вершини якого належать $V(G)$, а всі ребра належать $E(G)$.

Граф називається **плоским (планарним),** якщо існує ізоморфний йому граф, який зображується на площині без перетину ребер.

Матрицею суміжності графа G з $V(G)=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$ називається матриця $A=(a_{ij})$ розмірності $n\times n$, в якій елемент a_{ij} дорівнює числу ребер в G, що з'єднують вершини v_i і v_j.

Можна побудувати матрицю $M(m_{ij})$ розмірності $n\times m$ для орграфа G з $V(G)=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$ і $E(G)=\{e_1,e_2,\ldots,e_m\}$, рядки якої відповідають вершинам, а стовпчики – ребрам графа G. В цій матриці:

- $m_{ij}=1$, якщо вершина v_i є початковою для ребра e_j;
- $m_{ij}=-1$, якщо вершина v_i є кінцевою для ребра e_j;
- $m_{ij}=0$, якщо вершина v_i не інцедентна ребру e_j.

Якщо граф G – неорієнтований, то використовують тільки значення $m_{ij}=1$ або $m_{ij}=0$. Матриця $M(m_{ij})$ називається **матрицею інцидентності** графу G.

Маршрутом довжини m називається послідовність m ребер графу (не обов'язково різних) таких, що кожні два сусідніх ребра мають спільну вершину.

Якщо в маршруті S початкова і кінцева вершини співпадають, то маршрут називається **циклічним**.

Маршрут називається **ланцюгом**, а циклічний маршрут – **циклом**, якщо кожне його ребро зустрічається тільки один раз (вершини можуть повторюватись, причому декілька разів). Ланцюг і цикл називаються **простими**, якщо в них жодна вершина не повторюється.

Дві вершини неорієнтованого графу G називаються **зв'язними**, якщо існує маршрут з кінцями в цих вершинах.

Граф називається **зв'язним**, якщо будь-яка пара вершин в ньому зв'язна.

Наведемо декілька тверджень відносно зв'язності.

Теорема 3.1.

Якщо у скінченому графі G рівно дві вершини мають непарний локальний степінь, то вони зв'язні.

Теорема 3.2.

Граф G з n вершинами і з числом ребер, більшим ніж C_n^2 є зв'язним.

Теорема 3.3.

Кожний неорієнтований граф розпадається єдиним чином в пряму суму своїх зв'язних компонент.

Якщо існує така вершина, віддалення якої перетворює зв'язний граф (або зв'язну компоненту незв'язного графу) у незв'язний, то вона називається **точкою зчленування.** Ребро з такими же властивостями називається **мостом.**

Теорема 3.4.

Якщо ребро графу не належить жодному циклу цього графа, то це ребро являється мостом.

Особливий інтерес представляють зв'язні ациклічні графи.

Зв'язний граф, який не містить циклів, називається **деревом.**

Незв'язний граф, компоненти якого являються деревами, називається **лісом**.

Будь-яка зв'язна сукупність ребер графу G, яка не містить циклів, разом з інцидентними їм вершинами утворює дерево графу G. Якщо таке дерево містить всі вершини графу G, то воно називається **каркасом** графу G. Ребра графу G, які належать його дереву, називаються гілками.

Число віддалених ребер в цій процедурі характеризує міру зв'язності графу G і називається **цикломатиним числом** графу G і позначається літерою μ.

Теорема 3.5.

Якщо зв'язний граф G має m ребер і n вершин, то $\mu = m - (n - 1)$.

Розглянемо деякі **важливі типи графів.**

Граф G, у якого $E(G) = 0$, називається **порожнім** графом.

Простий граф, в якому будь-які дві вершини суміжні, називається **повним** графом.

Теорема 3.6.

Граф K_n має рівно $\frac{n(n-1)}{2}$ ребер.

Граф G, у якого $\rho(a) = \kappa$, $\forall a \in V(G)$, називається **регулярним графом степеня *к*.**

Регулярні графи степеня 3 називаються також **кубічними** графами. Відомим прикладом кубічного графу являється так званий **граф Петерсена**, представлений на рис. 3.1.

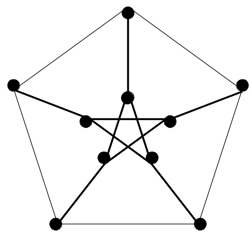
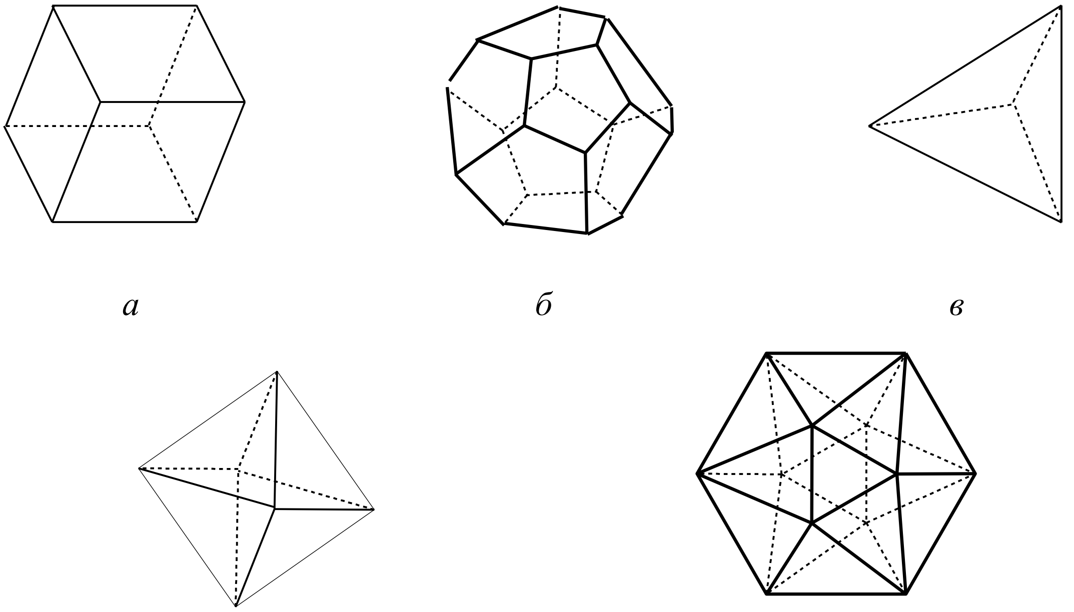


Рис. 3.1

Серед регулярних графів особливо цікаві так звані платонові графи. Регулярні графи, утворені вершинами і ребрами п'яти правильних многогранників – платонових тіл: тетраедра, куба, октаедра, додекаедра і ікосаедра, називаються **платоновими** графами.

На рис. 3.2 представлені платонові тіла.



а *б* *в*

г *д*

Рис. 3.2 Платонові тіла: куб (*а*); додекаедр (*б*); тетраедр (*в*); октаедр (*г*), ікосаедр (*д*)

Якщо в графі G множину вершин $V(G)$ можна розбити на дві підмножини $V_1(G)$ і $V_2(G)$, що не перетинаються, так, щоб кожне ребро графу зв'язувало вершини з різних підмножин, то граф G називається **дводольним** і позначається $G(V_1, V_2)$.

Теорема 3.7.

Граф G є дводольним тоді, і тільки тоді, коли всі його прості цикли мають парну довжину.

Якщо дводольний граф – простий і кожна вершина з однієї долі суміжна з усіма вершинами з іншої долі, то цей граф називається **повним дводольним** графом і позначається $K_{m,n}$, де m і n – число вершин відповідно в V_1 і V_2.

Повний дводольний граф виду $K_{1,n}$ називається **зоряним.**

Зв'язний граф G називається **ейлеровим**, якщо він містить цикл, який проходить через кожне його ребро. Такий цикл називається **ейлеровим.** Якщо зв'язний граф G містить маршрут, який проходить через кожне його ребро, то цей граф називається **півейлеровим.**

Теорема 3.8.

Зв'язний граф G являється ейлеровим тоді і тільки тоді, коли кожна його вершина має парний степінь.

Зв'язний граф G називається **гамільтоновим**, якщо він містить простий цикл, який проходить через всі вершини графу. Такий цикл називається **гамільтоновим**

циклом. Граф, що містить ланцюг, який проходить через кожну його вершину, називається **півгамільтоновим.**

Незважаючи на схожість у визначеннях для ейлерових і гамільтонових графів, відповідні теорії для цих понять мають мало спільного. Теорема 3.7 дає необхідну і достатню умову для того, щоб зв'язний граф був ейлеровим.

Теорема 3.9.

Якщо в графі G з n вершинами для будь-якої пари вершин V_i і V_j

$$\rho(V_i) + \rho(V_j) \geq n - 1,$$

то граф G має гамільтонів ланцюг. Якщо

$$\rho(V_i) + \rho(V_j) \geq n,$$

то граф G має гамільтонів цикл.

З цієї теореми випливає як наслідок результат Дірака.

Теорема 3.10 Дірака (1952 р.)

Якщо в простому графі G з n $(n \geq 3)$ вершинами $\rho(V) \geq \frac{n}{2}$ для будь-якої вершини V, то граф G є гамільтоновим.

Приклади розв'язання типових задач

Приклад 1.

Побудувати матрицю суміжності для графа G на рис. 3.3.

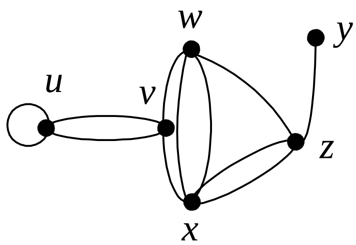


Рис. 3.3

Розв'язання.

Для цього графа $V(G) = \{u, v, w, x, z, y\}$. Значить матриця суміжності має розмірність 6×6. Для побудови матриці зробимо допоміжну таблицю (табл. 3.1).

Таблиця 3.1

	u	v	w	x	z	y
u	1	2	0	0	0	0
v	2	0	1	1	0	0
w	0	1	0	2	1	0

x	0	1	2	0	2	0
z	0	0	1	2	0	1
y	0	0	0	0	1	0

Тепер записуємо матрицю суміжності:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Приклад 2.
Побудувати матрицю інциденцій для графа G на рис. 3.4.

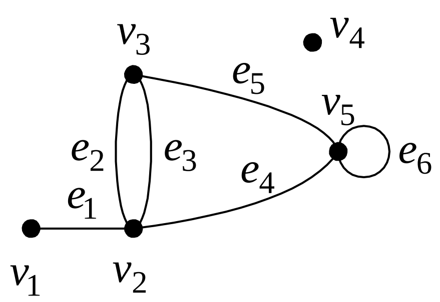


Рис. 3.4

Розв'язання.

Цей граф є загальним. Для нього множина вершин $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$, а сім'я ребер $E(G) = (v_1v_2; v_2v_3; v_2v_3; v_2v_5; v_3v_5; v_5v_5)$. Зробимо допоміжну таблицю (табл. 3.2).

Таблиця 3.2

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6
v_1	1					
v_2	1	1	1	1		
v_3		1	1		1	
v_4						
v_5				1	1	

Кожен стовпчик таблиці містить обов'язково два одиничних елемента (для орграфа ці елементи завжди мають різні знаки і дорівнюють відповідно 1 і –1). Кількість одиниць в рядку дорівнює степеню відповідної вершини (для орграфа кількість додатних одиниць визначає додатний степінь, а кількість від'ємних одиниць – від'ємний степінь). Нульовий рядок відповідає ізольованій вершині v_4, а нульовий стовпчик – петлі.

Зауважимо, що нульовий стовпчик матриці інцидентності лише вказує на наявність петлі, але не містить відомостей про те, з якою вершиною ця петля пов'язана.

Використовуючи табл. 4, записуємо матрицю інцидентності:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Задачі

3.1. Намалюйте плоский граф G, у якого $V(G)=\{a,b,c,d,f\}$ і $\rho(d)=2$, $\rho(f)=0.$ Складіть матрицю суміжності і перевірте лему Ейлера.

3.2. Намалюйте граф G, у якого 5 вершин і:

а) одна з вершин ізольована і одна має степінь 4;

б) степені всіх вершин різні, тобто дорівнюють 0, 1, 2, 3, 4;

в) рівно дві вершини мають однаковий степінь.

Складіть матрицю суміжності і перевірте лему Ейлера.

3.3. Зобразити множину двозначних чисел, які можна записати за допомогою цифр 1, 2, 3, використовуючи:

а) орієнтований граф;

б) ліс.

Яка потужність цієї множини?

3.4. В графі G: $V(G)=\{V_1,V_2,\ldots,V_n\}$ і вершини V_i і V_j суміжні тоді і тільки тоді, коли числа $i,\ j$ взаємнопрості. Зобразити граф з $n=4$ і скласти його матрицю суміжності.

3.5. Доведіть, що з точністю до ізоморфізма існує рівно 4 простих графа з 3 вершинами і 11 – з 4 вершинами.

3.6. Намалюйте всі кубічні графи з не більш як 8 вершинами. Доведіть, що:

а) кубічний граф має парне число вершин. Чи можна узагальнити цю властивість на регулярні графи вищих степенів?

б) кубічний граф має точку зчленування тоді і тільки тоді, коли він містить міст;

в) найменше число вершин в кубічному графі, який містить міст, дорівнює 10.

3.7. Опишіть матрицю суміжності:

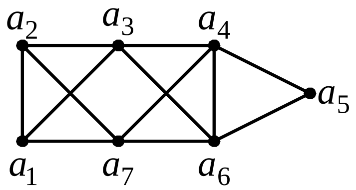
а) порожнього графу;

б) повного графу;

в) дводольного графу;

г) повного дводольного графу.

3.8. Для графу G вкажіть:



а) маршрут з a_1 до a_4;

б) ланцюг з a_1 до a_4;

в) ланцюг з a_1 до a_4 мінімальної довжини;

г) цикл максимальної довжини;

д) простий цикл мінімальної довжини.

Обчисліть цикломатичне число графу. Побудуйте каркас графу.

3.9. Яке найменше число ребер може мати зв'язний граф з n вершинами?

3.10. Обчисліть цикломатичне число для графів:

а) K_n;

б) $K_{m,n}$;

г) платонових графів;

д) графа Петерсена;

е) регулярного графа степеня r.

3.11. Яке найменше число ребер містить простий цикл?

3.12. Доведіть, що існує рівно:

а) шість неізоморфних дерев з 6 вершинами;

б) одинадцять – з 7 вершинами.

3.13. Доведіть, що кожне дерево являється дводольним графом.

3.14. Які дерева являються повними дводольними графами?

3.15. Знайдіть каркас для графів:

а) K_5;

б) $K_{2,3}$;

в) платонових графів;

г) графа Петерсена.

3.16. Покажіть, що якщо кожний з двох різних циклів деякого графу G проходить через ребро e, то в графі G існує цикл, який не проходить через ребро e.

3.17. В графі Петерсена знайдіть:

а) маршрут довжини 4;

б) цикли довжини 5, 6, 8 і 9.

3.18. Покажіть як можна використати дводольний граф для зображення:

а) ринків збуту, куди підприємства поставляють свою продукцію;

б) будівельні майданчики мікрорайону, куди фірми постачають будівельні матеріали;

в) дружні відношення між юнаками та дівчатами вашої групи.

3.19. Намалюйте дводольний граф $G(V_1, V_2)$, у якого $V_1 = \{1;2\}$, $V_2 = \{3;4;5\}$, $\rho(1) = 2$, $\rho(2) = 3$, $\rho(3) = 1$, $\rho(4) = 1$, $\rho(5) = 3$. Складіть його матрицю суміжності. Побудуйте його каркас. Визначіть кількість висячих вершин.

3.20. Для яких чисел m і n наступні графи являються ейлеровими:

а) $K_{m,n}$;

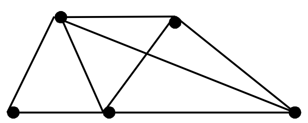
б) K_n.

3.21. Чи є серед платонових графів ейлерові? Якщо да, то знайдіть в них ейлерові цикли.

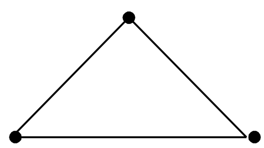
3.22. Які з зображених графів містять:

а) ейлерові цикли;

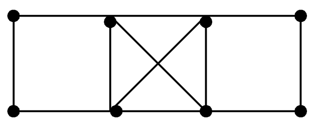
б) ейлерів ланцюг?



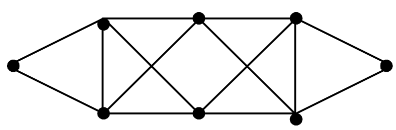
1



2



3



4

3.23.Для яких чисел m і n наступні графи являються гамільтоновими:

а) $K_{m,n}$;

б) K_n?

Знайдіть гамільтонові цикли.

3.24. Доведіть, що всі платонові графи являються гамільтоновими.

3.25. Намалюйте граф, утворений вершинами і ребрами додекаедра. Знайдіть гамільтонів цикл. Обчисліть цикломатичне число і побудуйте каркас.

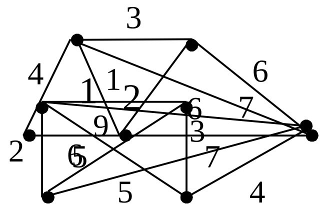
3.26. Наведіть приклад графа, який є ейлеровим, але не є гамільтоновим.

3.27. Наведіть приклад графа, який є гамільтоновим, але не є ейлеровим.

3.28. Які графи є водночас і ейлеровими і гамільтоновими? Що можна сказати про такі графи?

3.29. Які з графів задачі 90 являються гамільтоновими?

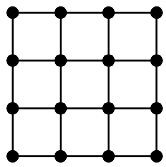
3.30. За допомогою алгоритму Краскала знайдіть каркас мінімальної довжини для графа G, зображеного на рисунку.



3.31. Чи існують гамільтонові цикли в графі, зображеному на рисунку?

Якщо так, то знайдіть серед них цикл найменшої довжини.

3.32. Квадрат розбито на n^2 мілких квадратів прямими, які паралельні його сторонам (на рисунку зображений випадок $n = 3$).



Чи має такий граф гамільтонові ланцюги і цикли?

3.33. Вартість прокладки комунікацій між шістьома пунктами (тис. грн.) виражається таблицею:

	1	2	3	4	5	6
1	*	10	8	12	17	14
2		*	6	2	13	7
3			*	6	4	12
4				*	10	19
5					*	16

Побудуйте каркас мінімальної загальної вартості. Чи буде розв’язок єдиним? Якщо ні, то знайдіть всі екстремальні каркаси.

3.34. Взаєморозуміння між членами колективу, який складається з 7 осіб, оцінено по десятибальній шкалі (вищий бал – 10):

	1	2	3	4	5	6	7
1	*	4	3	10	6	7	9
2		*	5	4	4	3	8
3			*	1	3	2	3
4				*	10	8	5
5					*	4	9
6						*	2

Побудуйте каркас максимального взаєморозуміння, який в деякий мірі характеризує найбільш ефективні контакти між членами колективу при розв'язуванні загальних питань.

3.35. Намалюйте графи для наступних відомих головоломок:

а) **ревниві чоловіки.** Три ревнивих чоловіка і їх жінки повинні переправитись через ріку. На переправі є тільки один маленький човен, який може витримати тільки дві особи. Як можуть переправитись всі шестеро, якщо ніякий чоловік не залишить свою жінку з двома іншими чоловіками?

б) **задача про розподіл.** Дві особи мають повний глечик вина місткістю 8 літрів і два порожніх глечика місткістю 5 і 3 літри. Як вони можуть розділити вино порівну?

в) **Ханойська башта.** Дошка має три гачка. На першому знаходяться m дисків, діаметри яких зменшуються від основи гачка. Як можна, перекладаючи диски по одному, розташувати їх в тому ж самому порядку на іншому гачку, якщо ні на якому кроці більший диск не може висіти після меншого (від основи гачка). Розгляньте випадок $m = 4$.