МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ БУДІВНИЦТВА І АРХІТЕКТУРИ

Л.І. Турчанінова
О.В. Доля

ПРАКТИКУМ З ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України як навчальний посібник для студентів архітектурних спеціальностей вищих навчальних закладів

Київ 2010

УДК 519.101+519.17
ББК 22.174
Т-86

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України як навчальний посібник для студентів архітектурних спеціальностей вищих навчальних закладів (лист МОНУ№ 1.4/18-Г-150 від 23.01.2007).

Рецензенти:
С.М.Краснитський, доктор фіз.-мат. наук, професор
В.М. Міхайленко, доктор технічних наук, професор

Турчанінова Л.І., Доля О.В.
Т-86 Практикум з вищої математики. Навчальний посібник. – К.: Кондор, 2010.- с.

Навчальний посібник є результатом узагальнення досвіду викладання курсу вищої математики для студентів денної форми навчання архітектурних та інших спеціальностей КНУБА. Матеріал посібника розділено на чотирнадцять тем, які традиційно вивчаються на І курсі вищих навчальних закладів і відповідають логічно завершеним змістовним модулям. Кожна з тем містить стислі теоретичні відомості і практичну частину, в якій наведені приклади розв’язання типових вправ і задачі для аудиторної та самостійної роботи.

Для активізації пізнавальної діяльності студентів і індивідуалізації навчання в посібнику спеціально наведені практикуми з основних розділів курсу і контрольні тестові завдання.

Посібник розрахований на студентів спеціальності архітектура і технічних спеціальностей всіх форм навчання, особливо дистанційної, аспірантів, слухачів мережі ФПК. Він стане в нагоді і викладачам для проведення практичних і самостійних (контрольних) робіт.

ISBN 978-966-351-145-0

Зміст

Передмова до другого видання

Друге видання навчального посібника містить 14 розділів. Розроблений новий розділ «Звичайні диференціальні рівняння», який має таку ж структуру як і всі інші.

Практично всі розділи суттєво доповнені новими задачами і відповідним додатковим теоретичним матеріалом.

Крім того авторами пропонуються задачі для індивідуальної роботи студентів, що можуть використовуватись як для аудиторної так і для самостійної роботи.

Досвід викладацької роботи авторів вказав на необхідність включення у друге видання довідкового матеріалу, що стосується основних елементарних функцій, кривих третього і четвертого порядку, циклоїд і спіралей.

Для перевірки залишкових знань студентів запропоновані варіанти тестових завдань. Тематика завдань містить матеріал змістовних модулів з курсу «Вища математика» для студентів першого курсу вищих навчальних закладів.

Додатковий матеріал до другого видання підготували автори першого видання, викладачі КНУБА: к. т. н., доц. Турчанінова Л.І., к. ф.-м. н., доц. Доля О.В.

Автори висловлюють вдячність за конструктивні побажання щодо покращення змісту посібника к. ф.-м. н., доц. Теренчук С.А. Особлива вдячність Рябчун Ю.В. за допомогу у підготовці навчального посібника до друку другого видання.

Київ, листопад 2009 р.

Передмова до першого видання

Сучасний рівень і темпи розвитку архітектурного проектування висувають перед молодими спеціалістами важливу вимогу – не тільки мати науковий потенціал в обраній діяльності, але й ефективно застосовувати здобуті знання для розв’язку проблем, що виникають в їх практичній діяльності.

Останнім часом практики використовують методи математичного програмування і сіткового планування, що базуються на лінійній алгебрі, математичному аналізі функцій однієї і багатьох змінних, дискретній математиці та інших розділах вищої математики.

Навчальний посібник містить 13 розділів, що включають в себе основні питання навчальної програми з вищої математики для архітектурних спеціальностей вищих закладів освіти. Всі розділи супроводжуються основними відомостями з теорії, визначеннями, формулами і докладно розв’язаними типовими задачами. Це дає студентам широкі можливості для активної самостійної роботи і заощадження часу.

В основу книги покладено матеріал навчально-методичного видання Турчанінової Л.І. „Збірник завдань з математики для аудиторної та індивідуальної роботи для студентів архітектурних спеціальностей” 2001 року. Цей матеріал пройшов апробацію і був суттєво доповнений.

Автори сподіваються на широке використання видання студентами не тільки архітектурних спеціальностей, а і всіх інших технічних спеціальностей, як денної так і заочної форм навчання, зокрема студентами дистанційної форми навчання для самостійного вивчення матеріалу. Книга стане в нагоді викладачам для проведення практичних занять і слухачам мережі ФПК.

В посібник увійшли матеріали різних математичних видань, які включені в список використаної літератури.

Задачник розроблений викладачами КНУБА: к.т.н., доц. Турчаніновою Л.І. (теми 1-12), асистентом Доля О.В. (тема 13 та теоретичний матеріал до тем 4-9).

Автори виражають вдячність за цінні побажання щодо покращення змісту і структури посібника рецензентам: д.ф.-м.-н., професору С.М.Красницькому та д.т.н., професору В.М.Міхайленку. Ми також вдячні Загайній Л.С. за допомогу у підготовці до видання задачника.

Київ, червень-липень 2009 р.

Тема 1

Поняття числа

Інтуїтивне визначення **множини** за Кантором: множина S є будь-яке зібрання визначених і різних між собою об'єктів нашої інтуїції або інтелекту, яке розуміється як єдине ціле. Ці об'єкти називаються **елементами** або **членами** множини S.

Кантор ввів поняття **потужності** (або об’єму) **множини**: дві множини мають однакову потужність, якщо члени будь-якої з них можна зіставити членам іншої, утворивши пари відповідних членів.

Зліченною множиною називається будь-яка множина, елементи якої можна бієктивно (взаємно-однозначно) зіставити з усіма натуральними числами.

Кажуть, що зліченна множина має потужність N_0 ("алеф-нуль"), а будь-яка множина, що рівнопотужна з множиною усіх підмножин довільної зліченної множини, має потужність 2^{N_0} (або має потужність **континуума**).

Дві множини називаються **еквівалентними**, якщо між їх елементами можна встановити взаємно-однозначну відповідність.

Класична теорема Кантора формулюється таким чином: дійсний континуум є незліченим. Іншими словами, множину дійсних чисел не можна розташувати у послідовність, так як між двома дійсними числами завжди знайдеться третє.

Інтуїтивний принцип об′ємності: дві множини **рівні** в тому і тільки в тому випадку, коли вони містять одні і ті ж елементи.

Твердження, що множина A складається з різних елементів $a_1, a_2, \dots, a_n$(і тільки з них), умовно записуємо:

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}.$$

Зокрема, $\{x\}$ - так звана **одинична множина** – є одноелементна множина, єдиним елементом якої являється x. **Порожня множина** не містить жодного елемента і позначається символом $\varnothing$.

Під **формою від** x будемо розуміти скінченну послідовність зі слів і символу x таку, що якщо кожний символ x з цієї послідовності замінити одним і тим же іменем деякого предмета відповідного роду, то в результаті отримаємо вислів.

З точки зору граматики форму від x можна визначати і по іншому – як речення, в якому щось стверджується про x.

Опис множини за допомогою форми базується на **інтуїтивному принципі абстракції:** будь-яка форма $P(x)$ визначає деяку множину A за умови, що елементами множини A є тільки ті предмети a, що роблять $P(a)$ справжнім вислівом.

Форму $P(x)$, що використовується для побудови деякої множини, називають **властивістю, що визначає множину:** $\{x | P(x)\}$.

Якщо A і B дві множини, то кажуть, що A **включена** в B (символічний запис: $A \subseteq B$), якщо кожен елемент множини A являється одночасно елементом множини B. В цьому випадку кажуть також, що множина A є **підмножиною** множини B. Множина A **строго включена** в B (символічно: $A \subset B$), або B строго включає A, або A є **справжня підмножина** B, якщо $\mathrm{A} \subset \mathrm{B}$ і $A \neq B$.

Кожна множина $A \neq \emptyset$ має принаймні дві різні підмножини: саме A і $\emptyset$. Крім того, кожний елемент a множини A визначає деяку підмножину множини A:

$$\{a\} \subseteq A.$$

Підмножини A і $\emptyset$ називаються **невласними**, а всі інші підмножини множини A називаються **власними** (або справжніми). Множина, елементами якої являються всі підмножини множини A, називається множиною підмножин A або множиною ступенем A і позначається $P(A)$.

Прийнято позначати **множину натуральних чисел** через N:

$$N = \{1,\ 2, 3, 4, \ldots\} \tag{1.1}$$

Система **цілих чисел** позначається через Z:

$$Z = \{\ldots,\ -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\} \tag{1.2}$$

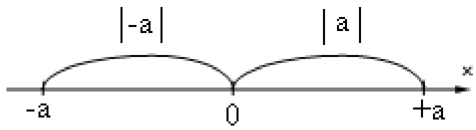
Множина **раціональних чисел** позначається:

$$Q = \left\{ x \,\middle|\, x = \frac{m}{n},\ m \in Z,\ n \in Z, n \neq 0 \right\}. \tag{1.3}$$

Числа, які представляють собою довжини відрізків, що неспільномірні з одиницею масштабу (тобто їх довжину не можна виразити цілим або дробовим числом) в сучасній математиці називаються **ірраціональними. Раціональне число є нескінченним десятковим періодичним дробом, а ірраціональне число – нескінченним десятковим неперіодичним дробом.**

Сукупність раціональних і ірраціональних чисел утворює **множину дійсних чисел,** яку прийнято позначати R.

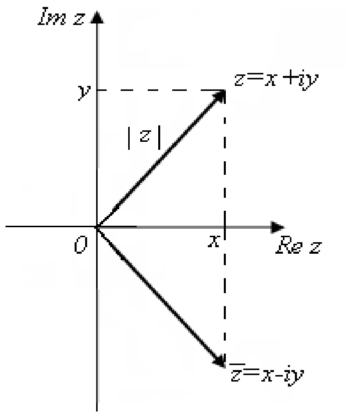
Геометричним образом дійсного числа a являється точка на дійсній віссі, причому ця точка розташована праворуч від нуля, якщо число a додатнє і ліворуч,



якщо число a від'ємне.

Відстань від дійсного числа a до нуля називається його **абсолютною величиною** або **модулем** і позначається $|a|$. За визначенням $|a| = \begin{cases} a,\ a \geq 0, \\ -a,\ a < 0 \end{cases}$.

Геометричним образом **комплексного числа** z являється точка **комплексної площини** z. На цій площині задані дві вісі: дійсна – $Re z$ і уявна – $Im z$. На дійсній вісі задані дійсні числа, а на уявній – уявні, тобто такі, що утворені за допомогою **уявної одиниці** $i = \sqrt{-1}$. Тоді комплексне число z в алгебраїчній формі матиме вигляд $z = x + iy$, $x = Re z$ і являється проекцією точки z на дійсну вісь, а $y = Im z$ являється проекцією точки z на уявну вісь. Відстань від початку координат до



точки z називається **модулем комплексного числа** z і позначається $|z|$. Число $\bar{z} = x - iy$ називається **спряженим** до числа z. Пара чисел z, $\bar{z}$ називається **комплексно-спряженою парою**.

Нехай числа a і b дійсні і задовольняють нерівності: $a < b$. Наведемо приклади множин дійсних чисел:

– **відрізок** або **сегмент** $[a,b] = \{x \in R| \ a \le x \le b\}$;

– **інтервал** або **відкритий відрізок**

$$(a,b) =]a,b[= \{x \in R | a < x < b\};$$

$$[-\infty,a] = \{x \in R | -\infty < x < a\};$$

– **півінтервал** $(a,b] =]a,b] = \{x \in R | a < x \le b\};$

$$[a,b) = [a,b[= \{x \in R | a \le x < b\};$$

– **нескінченні інтервали або півінтервали**

$$(-\infty,\infty) = R,$$

$$[-\infty,a] = \{x \in R | -\infty < x \le a\};$$

$$[a,\infty) = \{x \in R | a \le x < \infty\};;$$

– $\varepsilon -$**окіл точки** C

$$(c-\varepsilon, c+\varepsilon) = \{x \in R| \ c-\varepsilon < x < c+\varepsilon\}.$$

Об'єднанням двох множин A і B називається множина всіх елементів, що належать або множині A, або множині B, або їм обом відразу:

$$A \cup B = \{x | x \in A \text{ або } x \in B\}.$$

Перетином двох множин A і B називається множина всіх елементів, що належать одночасно і множині A, і множині B:

$$A \cap B = \{x | x \in A \text{ і } x \in B\}.$$

Розбиттям множини A називається така система V власних підмножин, що не перетинаються, множини A, в якій кожний елемент множини A є водночас і елементом деякої (а, внаслідок, точно однієї) підмножини з системи V.

Абсолютним доповненням множини A називається множина елементів універсальної множини U, які не належать множині A:

$$\bar{A} = \{x | x \in U \text{ і } x \notin A\}.$$

Відносним доповненням або різницею двох множин A і B називається множина тих елементів множини A, які водночас не належать множині B:

$$A - B = \{x | x \in A \text{ і } x \notin B\}.$$

Симетричною різницею або сумою множин A і B називається множина елементів множин A і B, що не належать водночас обом множинам:

$$A + B = \{x | x \in A \text{ або } x \in B \text{ і } x \notin (A \cap B)\}.$$

Основні властивості операцій над множинами представлені в таблиці 1.1, в якій U – універсальна множина, а A, B, C – її підмножини.

Таблиця 1.1

1. Комутативні закони: $A \cup B = B \cup A, \quad A \cap B = B \cap A.$
2. Асоціативні закони: $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C, \; A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C.$
3. Дистрибутивні закони: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C), A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$
4. Закони доповнення: $A \cup \overline{A} = U, \quad A \cap \overline{A} = \varnothing.$
5. Закони тотожності: $A \cup \varnothing = A, \; A \cap U = A.$ $A \cup U = U, A \cap \varnothing = \varnothing.$
6. Закони ідемпотентності: $A \cup A = A, \quad A \cap A = A.$
7. Закони поглинання: $A \cup (A \cap B) = A, \; A \cap (A \cup B) = A.$
8. Закони де Моргана: $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}, \quad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$
9. Властивості $\varnothing$ і U: $\overline{\varnothing} = U, \quad \overline{U} = \varnothing.$
Властивості доповнення, різниці, симетричної різниці, включення і рівності:
10. Якщо $A \cup B = U$ і $A \cap B = \varnothing$, то $B = \overline{A}$.
11. $\overline{A} = U - A$.
12. $\overline{A} = A - U$.
13. $A - B = A \cap \overline{B}$.
14. $A + B = (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)$.
15. $A + B = B + A$.
16. $(A + B) + C = A + (B + C)$.
17. $A + \varnothing = \varnothing + A = A$.
18. $A \subset B$ тоді і тільки тоді, коли $A \cap B = A$ або $A \cup B = B$, або $A \cup \overline{B} = \varnothing$.
19. $A = B$ тоді і тільки тоді, коли $(A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B) = \varnothing$.

Приклади розв'язання типових задач

Приклад 1.

Довести, що {1, 2, 3, 4} = {1, 2, 4, 4, 1, 3, 1}.

Доведення.

Обидві множини містять лише чотири різних елементи, а саме 1, 2, 3, 4. Тому вони складаються з одних і тих же елементів. На практиці не слід записувати множину так, як записано праворуч. Елементи, що повторюються, не грають ролі в операціях над множинами і тому немає потреби їх записувати.

До речі, дані множини не еквівалентні, так як множина зліва складається з чотирьох елементів, а праворуч – з восьми.

Приклад 2.

Довести, що $\{\{1,2\}\} \neq \{1,2\}$.

Доведення.

Множини не містять одні й ті ж елементи, так як ліворуч – одноелементна множина, що містить єдиний елемент $\{1,2\}$, а множина праворуч має два елементи, а саме 1 і 2.

Приклад 3.

Для множини $A = \{a,b,c\}$ побудувати $P(A)$.

Розв'язання.

Виходячи зі сказаного вище, маємо:

$$P(A) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}\}.$$

Приклад 4.

Зобразити на діаграмі Венна множини: $P = \{a,b,c,d\}$, $Q = \{a,c\}$, $R = \{d, f\}$.

Розв′язання.

Виходячи з визначення, діаграма Венна для заданих множин представлена на рис. 1.1.

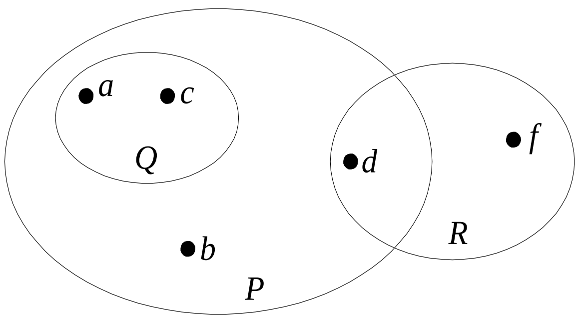


Рис. 1.1

З цієї діаграми ми бачимо, що $Q \subset P$. Цей факт ілюструється тим, що точки a і c використовуються тільки один раз і множина Q повністю лежить усередині множини P. Крім того, з рисунку бачимо, що $R \not\subset P$, так як точка f не належить множині P.

Приклад 5.
$A = \{1,2,3,4\}$, $B = \{3,4,5,6\}$. Визначити множину $A \cup B$.
Розв'язання.
За визначенням
$$A \cup B = \{1,2,3,4,5,6\}.$$
На рис. 1.2 зображена діаграма Венна. Об′єднання множин заштриховане.

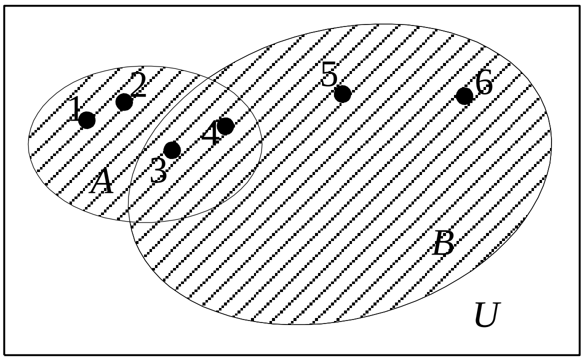


Рис. 1.2

Приклад 6.
$A = \{x | 0 < x \le 3\}$, $B = \{x | -1 < x < 2\}$. Визначити множину $A \cap B$.

Розв'язання.
За визначенням
$$A \cap B = \{x | 0 < x < 2\}.$$

Приклад 7.
$U = \{1,3,5,7,9\}$, $A = \{1,5,9\}$. Визначити множину $\overline{A}$ і розбиття V множини U.
Розв'язання.
З визначення $\overline{A} = \{3,7\}$. Тоді $V = \{\{1,5,9\},\{3,7\}\}$.

Приклад 8.
$A = \{x | 3 \le x \le 6\}$, $B = \{x | 0 \le x \le 4\}$. Визначити множину $A - B$.
Розв'язання.
З визначення $A - B = \{x | 4 < x \le 6\}$.

Приклад 9.
$A = \{1,2,3,4,7\}$, $B = \{2,5,7,9,11\}$. Визначити множини $A + B$ і $A \cup B$.
Розв'язання.

З визначення $A+B=\{1,3,4,5,9,11\}$, $A\cup B=\{1,2,3,4,5,7,9,11\}$.

Задачі

1.1. Покажіть на числовій осі множину точок, яким відповідають всі натуральні числа х, якщо

$1)\ |x|<5;\quad 2)\ |x-2|<12;\quad 3)\ |x+5|+3\le 14$

1.2. Покажіть на числовій осі множину точок, яким відповідають всі цілі числа x, якщо вони задаються умовами задачі 1.

1.3.а) Розташуйте у порядку зростання числа:

$-15;\ 3;\ -1;\ -|-4|;\ |-2|;\ 0;\ 1/2;\ 0{,}9;\ |5|;\ -4$;

б) розташуйте у порядку спадання числа:

$-7;\ 3;\ |-2|;\ -1;\ -|-3/4|;\ -0{,}75;\ -0{,}8;\ 0{,}85;$

в) порівняйте числа:

-27 і 8; $4{,}25$ і $-16{,}2$; $-0{,}75$ і $-3/4$; $|-5|$ і $|5|$; $|-4{,}7|$ і $|-8|$;

$-19{,}2$ і -21; $4\sqrt{5}+\sqrt{82}$ і 18.

1.4. Запишіть число 2,3(2) у вигляді звичайного дробу.

1.5. 1) Чи має розв'язки рівняння $a+x=b$, де a і b натуральні числа:

а) у множині натуральних чисел;

б) у множині цілих чисел;

в) у множині раціональних чисел?

2)Чи має розв'язки рівняння $ax=b$, де a і b – цілі числа:

а) у множині цілих чисел;

б) у множині раціональних чисел.

3) Чи має розв'язки рівняння $ax^2+bx+c=0$, де a,b,c - дійсні числа, якщо дискримінант від'ємний:

а) у множині дійсних чисел;

б) у множині комплексних чисел.

1.6. Знайдіть множину розв'язків рівнянь:

а) $2x^2-3x+1=0$;

б) $x^2-4x+5=0$;

в) $2x^2-3x+2=0$;

г) $x^3-x^2-4x+4=0$;

д) $x^3-2x^2+4x-8=0$;

е) $2x^3+8x^2+12x+8=0$;

ж) $x(x+1)(x+2)(x+3)=0{,}5625$.

1.7. Назвіть найбільше ціле число, яке належить множині;

$1)\ [-12;9];\ 2)\ [-1;\ 17);\ 3)\ (-8;-5];\ 4)\ (-\infty;31];\ \ 5)\ (-\infty;+\infty);\ 6)\ (-\infty;11).$

1.8. Які з цілих чисел належать множині:

$1)[0;\ 8];\ 2)(3;-3);\ 3)(-5;3];\ 4)[-1;0);\ 5)[-2;-1]$

1.9. Знайдіть множину цілих розв'язків нерівності:

$1)-8<x<1;\ 2)-3<x<3;\ 3)-3\le x<5;\ 4)-1\le x\le 1;$

1.10. Які з натуральних чисел належать множині з задачі 1.8?

1.11. Знайдіть множину натуральних розв'язків нерівності з задачі 1.9.

1.12. Перерахуйте всі елементи наступних множин:

а) $\{x|x$ – є цілим множником числа $6\}$;

б) $\{x|x^2-4=0,\ x-2=0\}$;

в) $\{x|x$ є літерою слова "парабола" $\}$;

г) $\{x|x$ є однією з цифр числа 4363151 $\}$;

д) $\{x|x\in N, x$ є непарним числом, що менше $7\}$.

1.13. Запишіть множини за допомогою форми:

а) $\{2, 4, 6, 8, 10\}$;

б) {к, о, л, о};

в) $\{1, 3, 5, 7, \ldots\}$.

1.14. Які з приведених нижче співвідношень хибні і чому:

а) $x\in\{2,a,x\}$;

б) $3\in\{1,\{2,3\},4\}$;

в) $x\in\{1,\ sinx\}$;

г) $\{x,y\}\in\{a,\{x,y\},b\}$.

1.15. Вкажіть, які з приведених множин скінченні, а які нескінченні:

а) $\{x,y,p,q\};$

б) $\{x|x$ є піщинкою в пустелі $\}$;

в) $\{x|x\in N,\ x$ кратне $12\}$;

г) $\{x|x$ є комбінацією літер алфавіту $\}$;

д) $\{x|x\in[0,1]\}$;

е) $\{x|x$ є пряма , що проходить крізь т.$(2,2)\}$;

ж) $\{x|x\in R,\ sin\,x=0\}$;

з) $\{x\in R|x\in[3,5]\}$.

1.16. Чи рівні між собою множини A і B (якщо ні, то чому):

а) $A=\{2,5,4\}, B=\{5,4,2\};$

б) $A=\{1,2,4,2\}, B=\{1,2,4\};$

в) $A=\{2,4,5\}, B=\{1,\{5,2\},6\};$

г) $A=\{1,\{2,5\},6\}, B=\{1,\{5,2\},6\};$

д) $A=\{1,\{3,4\},8\}, B=\{1,\{4,3\},5\};$

е) $A=\{2,\{1,3\},7\}, B=\{1,2,3,7\};$

ж) $A=\{x|x$ є літера слова $"sin"\}$; $B=\{y|y$ є літера слова “innins” $\}$;

з) $A=\varnothing,\ B=\{\varnothing\}$;

і) $A=\{0\}, B=\{\varnothing\}$.

1.17. Довести, що множина Z злічення.

1.18. Довести, що множина всіх парних чисел злічення.

1.19. Довести, що множина степенів числа 2, тобто $\{x\in N|x=2^n, n\in N\}$ злічення.

1.20. Виберіть порожні множини:

а) $\left\{x\in R\ \middle|x^2=0\right\}$;

б) $\{y|y$ є заміжня стара діва$\}$;

в) $\{\varnothing\}$;

г) $\{x|x$ є людиною, вік якої перевищує 200 років$\}$;

д) $\{x\in R|x^2-2x+2=0\}$.

1.21. Довести, що $A=B$, якщо $A=\{x\in N|x^2-7x+6=0\},\ B=\{1,6\}$.

1.22. Довести, що існує лише одна множина, яка не містить елементів.

1.23. Чи буде множина $\varnothing$ елементом класу множин:

$A=\{\{1,2,3\},(3,10),(7,9)\}$?

1.24. Які з множин $\varnothing$, 0, $\{\varnothing\}$ можуть бути описані як клас множин?

1.25. Чи пов'язані множини A і B співвідношенням включення (якщо так, то вкажіть, яка з них є підмножиною другої)?

а) $A=\{1,3,5\},\ B=\{1,2,3,4,5\}$;

б) $A=\{\{1\},\{2,3\},\{4\}\};\ B=\{\{1\},\{2,3\},\{4,5\}\}$;

в) $A=\{x\in R|0\le x\le 5\},\ B=\{x\in R|5\le x<7\}$;

г) $A=\{x\in N|1\le x\le 5\},\ B=\{x\in N|2<x\le 4\}$.

1.26. Задані множини:

$A=\{1,3,5,7\};\ B=\{3,5\};\ E=\{2\};\ D=\{5,7,9\}$.

Вкажіть серед наступних стверджень справжні і хибні:

а) $B\subset A$; б) $B\subseteq A$; в) $E\subset B$; г) $B\subset D$; д) $D\subset A$; є) $\varnothing\subset B$;

ж) $E\not\subset B$; з) $B\subset B$; і) $A\subset B$.

1.27. В яких відношеннях між собою знаходяться наступні три множини:

$A=\{1,3\};$

$B-$ множина непарних додатних чисел;

$C-$множина розв'язків рівняння $x^2-4x+3=0$?

1.28. $U=\{1,2,3,...,20\}$. Записати наступні підмножини U:

$A-$парних чисел;

$B-$квадратів чисел;

$C-$непарних чисел;

$D-$простих чисел.

В яких відношеннях знаходяться ці множини?

1.29. Скільки $k-$елементних підмножин має множина потужності $n\ (k\le n)$?

1.30. Напишіть всі підмножини кожної з наступних множин:

а) $A=\{x|x$ є голосною буквою $\}$;

б) $B=\{y|y$ є парне число між 1 і 7$\}$.

1.31. Перепишіть наступні твердження, використовуючи операції над множинами:

а) S є підмножиною S;

б) X належить множині P;

в) множина Y не є підмножиною множини X;

г) множина S є підмножиною множини T;

д) z не належить множині Z.

1.32. Намалюйте діаграму Венна для ілюстрації відношень між наступними множинами:

$A=\{0,1,2,3,4,5\}$; $B=\{2,3,4,7,8\}$; $C=\{2,5,7\}$; $D=\{1,2,3\}$.

1.33. Задані множини A,B,C,D із задачі 1.21. Завершіть формулювання наступних тверджень вставляючи замість крапок правильні символи:

$A\ldots B$; $2\ldots B$; $\{1,2\}\ldots A$; $D\ldots A$; $\varnothing\ldots C$; $B\ldots C$.

1.34. Запишіть множини, які отримані в результаті наступних операцій над множинами з задачі 1.32:

а) $A\cup B$; б) $A\cap B$;

в) $A\cap C$; г) $C-A$;

д) $A\cap D$; е) $C-B$;

ж) $C+\overline{D}$.

Сформулюйте властивість, що визначає кожну з отриманих множин.

1.35. Що можна сказати про відношення між множинами A,B,C, які представлені діаграмами Венна на рис. 1.3. Запишіть за допомогою операцій над множинами вирази для множин, що відповідають замальованим областям:

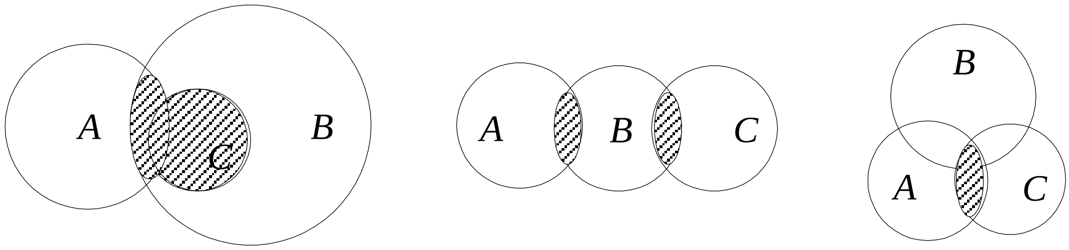


Рис. 1.3

1.36. Серед наступних множин вкажіть пари множин, що перетинаються:
$A = \{x, y\}$; $B = \{1, 2, 4, y\}$; $C = \{a, b, c, 2\}$; $D = \{1, x, a\}$; $E = \varnothing$;
$F = \{2, 3, b, c\}$.

1.37. Чи правда, що $A - B = B - A$? Якщо ви вважаєте, що в загальному випадку це не вірно, то чи можете ви вказати частковий випадок, коли це твердження справджується? Чи таке твердження завжди хибне?

1.38. Що представляє собою множина $A - \overline{A}$ для будь-якої множини A?

1.39. Якщо $A \subset B$, то якою буде множина $A - B$? Намалюйте діаграму Венна.

1.40. Доведіть, що $A - B = \varnothing$ тоді і тільки тоді , коли $A \cap B = A$.

1.41. Нехай A – множина коренів рівняння $x^2 - 3x + 2 = 0$, а $B = \{0, 2\}$.
Знайдіть $A \cap B$, $A \cup B$, $A – B$, $B – A$.

1.42. Нехай A – множина значень функції

$$y = signx = \begin{cases} 1, x > 0; \\ 0, x = 0; \\ -1, x < 0, \end{cases}$$

а B – множина коренів рівняння $x(x-1)(x+2) = 0$. Знайдіть $A \cap B$, $A \cup B$, $A - B$, $B - A$, $A + B$.

1.43. Нехай A – область визначення функції $y = 3^{\sqrt{-sin^2 x}}$, а B – множина розв′язків рівняння $cos\, x = 1$. Знайдіть $A \cap B$, $A \cup B$, $A - B$, $B - A$, $A + B$.

1.44. Нехай A – область визначення функції $y = ln(x-1)$, B – область визначення функції $y = \sqrt{3 - x}$, C – множина розв′язків нерівності $x^2 - 6x + 8 \geq 0$. Знайдіть $A \cap B$, $A \cap C$, $B \cap C$, $C - A$, $B - A$, $A - B$, $A \cup C$, $B \cup C$, $A \cup B$, $A + B$, $B + C$, $A + C$.

1.45. Зі 100 студентів англійську мову знає 28 студентів, німецьку - 30, французьку - 42, англійську і німецьку - 8, англійську і французьку - 10, німецьку і французьку - 5, всі три мови знають 3 студенти. Скільки студентів не знають жодної з трьох мов?

1.46. Задана універсальна множина $U=\{a,b,c,d,e,f,g\}$ і її підмножини:

$P=\{a,b,c,d\}$; $Q=\{a,e\}$; $R=\{b,d,e,f\}$.

Випишіть елементи, які утворюють множини:

1) $P\cap(Q\cup R)$;	2) $\overline{R}\cap\overline{Q}$;
3) $U\cap\overline{P}$;	4) $(P\cup Q)\cap(P\cup R)$;
5) $(P\cap Q)\cup R$;	6) $U\cap(P\cup R)$;
7) $(\mathrm{Q}\cup\mathrm{R})\cup\varnothing$;	8) $(P\cup U)\cup R$;
9) $\overline{P}\cup(P\cap Q)$;	10) $U\cap(R\cup P)$;
11) $(P-Q)\cup R$;	12) $(Q+R)\cup P$;
13) $(Q+\overline{P})\cap R$;	14) $(U-P)+(Q-R)$;
15) $(P\cup Q)-(P\cap Q)$;	16) $(P-R)-(Q-R)$;
17) $\overline{R}\cup\overline{Q}$;	18) $(P-\overline{Q})+R$;
19) $(\overline{P}\cap\overline{Q})+(R-P)$;	20) $\overline{(R\cap Q)}+(\overline{P}-\overline{Q})$;
21) $(\overline{R}-Q)\cap(\overline{P}+R)$;	22) $(U\cap\overline{P})+(Q-R)$;
23) $\overline{P}\cup(P\cap\overline{Q})$;	24) $\mathrm{Q}\cup(\mathrm{R}\cup\varnothing)$..

1.47. Виконайте завдання 1.35 для $U=\{x|0\le x\le 10\}$, $P=\{x|1\le x\le 6\}$,

$Q=\{x|4<x\le 8\}$, $R=\{x|7<x\le 10\}$.

1.48. Доведіть наступні тотожності:

$\overline{(A\cap B)}=\overline{A}\cup B$;

$A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)$;

$(A-B)-C=(A-C)-(B-C)$;

$(A-B)\cup(A-C)=A-(B\cap C)$;

$A\cap B\cap C=A-(A-(B\cap C))$;

$A\cap(B\cup C)=A-(A-B)\cap(A-C)$.

1.49. Продемонструйте справедливість основних законів алгебри множин на прикладі:

$U=\{1,2,3,4,5,6,7\}$; $A=\{1,2,3,4\}$; $B=\{3,4,5,6\}$; $C=\{2,3,6,7\}$.

Намалюйте діаграми Венна.

1.50. Доведіть, що $P(A\cap B)=P(A)\cap P(B)$.

1.51. Побудуйте $P(S)$, якщо:

а) $S=\{a\}$; б) $S=\{a,b\}$; в) $S=\{a,b,c\}$.

1.52. Покажіть, що $B=\{C_1,C_2,C_3\}$, де $C_1=\{1,3\}$, $C_2=\{4,6\}$, $C_3=\{2,5\}$ є розбиттям множини $S=\{1,2,3,4,5,6\}$.

1.53. Нехай $S = \{p, q, r, s, t, u\}$. Вкажіть серед наступних класів підмножин такі, які складають розбиття:

а) $\{A_1 = \{p, s, t\}, A_2 = \{q, r\}, A_3 = \{t, u\}\}$;

б) $\{B_1 = \{p\}, B_2 = \{q\}, B_3 = \{r, u\}, B_4 = \{s, t\}\}$;

в) $\{C_1 = \{p, q, t\}, C_2 = \overline{C_1}\}$;

г) $\{\{r, s, t\},\ \{p, q\},\ \{u\}, \varnothing\}$;

д) $\{\{p, q, r, s, t, u\}\}$.

1.54. Нехай A – будь-яка не порожня власна підмножина множини U. Покажіть, що клас $b = \{A, \overline{A}\}$ складає розбиття множини U.

1.55. Нехай U – множина натуральних чисел

$U = \{1, 2, 3, \ldots\} = N$.

Покажіть, що клас $\{C_1, C_2, C_3\}$, де

$$C_1 = \{x | x = 3n,\ \ n = 1, 2, \ldots\},$$

$$C_2 = \{x | x = 3n - 1,\ \ n = 1, 2, \ldots\},$$

$$C_3 = \{x | x = 3n - 2,\ \ n = 1, 2, \ldots\}$$

складає розбиття множини U.

1.56. Побудуйте всі можливі розбиття множини $U = \{0, 1, 2, 3\}$ (їх всього 15).

1.57. Знайдіть перетин множин коренів рівнянь:

1) $x^2 - 4x + 3 = 0$ *і* $x^2 - 3x + 2 = 0$;

2) $x^2 - 2x - 3 = 0$ *і* $(x + 1)(x - 8) = 0$;

3) $x^2 - 6x + 9 = 0$ *і* $|3x| = 9$;

4) $x^2 - 1 = 0$ *і* $|2x|/2x = 1,\ x \neq 0$.

1.58. Знайдіть множину допустимих значень x:

1) $\sqrt{25 - x^2} + \sqrt{x^2 - 9} = 5$; 2) $\sqrt{x^2 + x - 12} + \sqrt{x - 1} = 2$;

3) $y = \sqrt{\sin^2 x - 2\sin x + 1}$; 4) $y = \sin^2\sqrt{1 - x^2} + \cos^2\sqrt{1 - x^2}$;

5) $y = \sqrt{\lg \cos x}$; 6) $y = \sqrt{2^{\cos x} - 2}$.

1.59. Задана універсальна множина U = {1, 2, 3, 4, 5, 6} і відомо, що A, B, C – її підмножини. Назвіть елементи множини B, якщо:

1) $A = \{3, 5\}$; $B \cap C = \{3\}$; $B \cup C = \{1, 2, 3, 4, 6\}$;

2) $A \cap A = \varnothing$; $C \cup A = \{6\}$; $B \cup C = U$, $B \cap C = \varnothing$.

1.60. Задані множини:

$P = \{x \mid x \in N, x < 20, x$ – непарне число$\}$,

$Q = \{x \mid x \in N, x < 20, x$ – парне число$\}$,

$S = \{x \mid x \in N, x < 20, x$ ділиться на 3$\}$,

$T = \{x \mid x \in N, x < 20, x$ ділиться на 4$\}$.

Назвіть елементи заданих вище множин і множин:
$Q \cap T$; $Q \cap S$; $P \cap S$; $P \cap Q$; $Q \cap S \cap T$.

1.61. Знайдіть множину точок перетину кривих:

1) $x^2 + y^2 = 25$ *і* $(x - 13)^2 + y^2 = 144$;

2) $y = -5x + 12$ *і* $y = x^2 - 6x + 10$;

3) $y = x^2$ *і* $x^2 + y^2 = 30$;

4) $y = x^2 + 4$ *і* $xy = 5$.

1.62. На якій множині дані рівності будуть тотожностями?

1) $|x| = x$; 2) $\frac{x^2 - 9}{x - 3} = x + 3$; 3) $\frac{4x^2 + 4x + 1}{2x + 1} = 2x + 1$;

4) $\sqrt{x^2} = -x$; 5) $\sqrt{x^2} = x$; 6) $\sqrt{x^2} = |x|$.