Тема 7

Функція дійсної змінної, властивості і графічне зображення

Якщо кожному числу x з деякої множини D за певним правилом поставлене у відповідність єдине число y, то y **є функцією від** x і позначається $y = f(x), \quad x \in D.$

Змінна x є незалежною змінною (аргументом), а змінна y - залежною змінною (функцією).

Множина D значень аргументу x, для яких функція $y = f(x)$ має дійсний зміст, є **областю визначення** цієї функції.

Множина E всіх чисел y, таких, що $y = f(x)$ для кожного $x \in D$, є **множиною значень** функції.

Функція $f(x)$ є **парною**, якщо $f(-x) = f(x),\ x \in D,$ і **непарною**, якщо $f(-x) = -f(x),\ x \in D.$

Функція $f(x)$, яка визначена на всій числовій прямій, є **періодичною**, якщо $f(x+T) = f(x)$. Число T називається **періодом функції**. Найменше з додатних чисел T є **основним періодом** функції.

Якщо функція $f(x)$ визначена на множині D і для двох довільних різних значень x_1 і x_2 аргументу з цієї множини $(x_1 < x_2)$, маємо, що:

1) $f(x_1) < f(x_2)$, то функція є зростаючою;
2) $f(x_1) > f(x_2)$, то функція є спадною;
3) $f(x_1) \le f(x_2)$, то функція є неспадною;
4) $f(x_1) \ge f(x_2)$, то функція є незростаючою.

Функції 1) – 4) на множині D називаються **монотонними** на цій множині.

Функція $f(x)$, яка визначена на множині D, є **обмеженою** на D, якщо існує таке число $M > 0$, що для всіх $x \in D$, виконується $|f(x)| < M$.

Якщо для функцій $f(x)$ і $g(x)$, які визначені на D, існує таке число N, що для всіх $x \in D$ виконується $f(x) \le N$, або $g(x) \ge N$, то $f(x)$ є **обмеженою зверху**, а $g(x)$ - **обмеженою знизу** функціями.

Якщо рівняння $F(x_1 y) = 0$, яке не розв’язане відносно y, визначає y як функцію x, то y є **неявною** функцією x.

Функція $x = \varphi(y)$ є **оберненою** до функції $y = f(x)$, якщо:

1) областю визначення φ є множина значень f;
2) множина значень φ є областю визначення f;
3) кожному $y \in E$ відповідає **єдине** $x \in D$.

Функція $y = f(x)$, де $x \in D,\ y \in E$ має обернену функцію $x = \varphi(y)$ **тоді і тільки тоді**, коли вона є **строго монотонною** в області D.

Задання функціональної залежності між x і y у вигляді двох функцій $x = \varphi(t), \quad y = \psi(t)$ однієї незалежної змінної t, які визначені на одному й тому самому проміжку, є **параметричним заданням** функцій, змінна t при цьому називається **параметром**.

Якщо функція $x = \varphi(t)$ має обернену $t = \Phi(x)$, то змінну y можна розглядати як **складену** функцію від x: $y = \varphi(\Phi(x))$.

Щоб задати функцію $y = f(x)$, треба вказати її область визначення D, множину значень E і правило f, за яким для довільного числа $x \in D$ можна знайти відповідне йому число $y \in E$.

Основні способи задання функції:
аналітичний, графічний, табличний, словесний, за допомогою комп'ютерних програм тощо.

Основними елементарними функціями є:

1) степенева $y = x^n$, $n \in R$;
2) показникова $y = a^x$, $a > 0, a \neq 1$;
3) логарифмічна $y = log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$;
4) тригонометричні $y = sin\, x, y = cos\, x, y = tgx$, $y = ctg\, x$;
5) обернені тригонометричні $y = arcsin\, x$, $y = arccos\, x$, $y = arctgx$, $y = arcctgx$.

Якщо відомий графік функції $y = f(x)$, то правильні такі твердження:

1) графік функції $y = f(x) + b$ дістанемо з графіка функції $y = f(x)$ паралельним перенесенням останнього вздовж осі Oy на величину, що дорівнює b;
2) графік функції $y = f(x + a)$ дістанемо з графіка функції $y = f(x)$ паралельним перенесенням останнього вздовж осі Ox на величину, що дорівнює - a;
3) графік функції $y = c\, f(x)$, $c \neq 0$ дістанемо з графіка функції $y = f(x)$ при $0 < c < 1$ за допомогою стискування в $\frac{1}{c}$ разів ординат останнього, а при $c > 1$ за допомогою розтягування в c разів його ординат із збереженням відповідних абсцис. Якщо $c < 0$, то графік $y = cf(x)$ є дзеркальним відображенням графіка $y = -cf(x)$ відносно осі Ox;
4) графік функції $y = f(kx)$ дістанемо з графіка функції $y = f(x)$ при $0 < k < 1$ збільшенням в $\frac{1}{k}$ разів абсцис його точок, а при $1 < k < +\infty$ - зменшенням у k разів абсцис його точок із збереженням їхніх ординат. Якщо $k < 0$, то графік $y = f(kx)$ є дзеркальним відображенням графіка $y = f(-kx)$ відносно осі Oy.

Основні елементарні функції, а також функції, утворені за допомогою формул, в яких над основними елементарними функціями виконується скінченне число арифметичних операцій (додавання, віднімання, множення, ділення) і суперпозицій (накладання), називають **елементарними**.

Елементарні функції поділяють на такі класи:

1) функція виду $P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n$, де $n \in Z_0$, $a_0, a_1, \ldots, a_n$ - дійсні числа – коефіцієнти $(a_0 \neq 0)$, називається **цілою раціональною функцією**,

або многочленом (поліномом) степеня n. Многочлен першого степеня називається також лінійною функцією, а другого – квадратичною.

2) функція, що є відношенням двох многочленів $R(x)=\dfrac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m}$, називається дробово-раціональною функцією, або раціональним дробом. Сукупність многочленів і раціональних дробів утворює клас **раціональних функцій**.

3) функція, утворена за допомогою скінченного числа суперпозицій та арифметичних операцій над раціональними функціями і над степеневими функціями з дробовими показниками, і яка не є раціональною, називається **ірраціональною** функцією. Наприклад, $y=\sqrt{x}-2;\quad y=\sqrt[3]{\dfrac{4x-1}{x^2+5}}$ тощо;

4) елементарна функція, яка не є раціональною або ірраціональною, називається **трансцендентною** функцією. Наприклад, $y=sin\,x,\quad y=5^x-x,\quad y=ln\,x,\quad y=arcsin\,x$ тощо.

Приклади розв'язання типових задач

Приклад 1.

Довжина l кола діаметром d визначається за формулою $l=\pi d$, де $\pi-const$.

Змінна l залежить від змінної d, тобто довжина кола l є функцією діаметра d: $l=f(d)$.

Приклад 2.

Знайти області визначення функцій:

а). $y=\dfrac{x+2}{\sqrt{-x^2+3x+4}}$; б). $y=lg\,sin(x-2)$; в). $y=arcsin\dfrac{x-1}{3x}$; г). $y=n!$

Розв'язання.

а). $-x^2+3x+4>0;\quad -1<x<4;\qquad D:(-1;4);$

б). $\begin{cases} sin(x-2)>0, \\ |sin(x-2)|\le 1; \end{cases}\qquad D:(2(\pi n+1);\,(2n+1)\pi+2),\ n\in z;$

в). $\begin{cases} \left|\dfrac{x-1}{3x}\right|\le 1 \\ x\ne 0 \end{cases}\qquad D:(-\infty;-\frac{1}{2}]\cup\left[\dfrac{1}{4};\infty\right);$

г). $y=n!$ ставить у відповідність кожному $n\in N$ число $y=n!$. Наприклад, якщо $n=4$, то $y=4!=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4=24$. Тому $D:Z_0$ (так як $0!=1$), де $Z_0=\{0;1;2;\ldots;n;\ldots\}$.

Приклад 3.

Побудувати графіки функцій:

а). $y=2n-3,\ n\in N;$

б). $y=\begin{cases} x^2-2, x\le 2; \\ 2, x>2; \end{cases}$

в). $y=\dfrac{|x|}{x}$.

Розв'язання.

а). графіком є нескінченна множина ізольованих точок (рис. 7.1), які лежать на прямій *y=2x-3;*

б). графіком функції, що задана різними аналітичними виразами на різних частинах області зміни *x*, є сукупність параболи і прямої (рис. 7.2).

в). функція визначена при $x\ne 0$ і набуває двох значень: *-1 і 1*; $D:(-\infty;0)\cup(0;\infty)$; E: $\{-1;1\}$ (рис. 7.3).

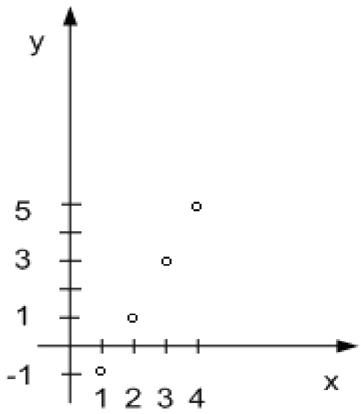


Рис. 7.1

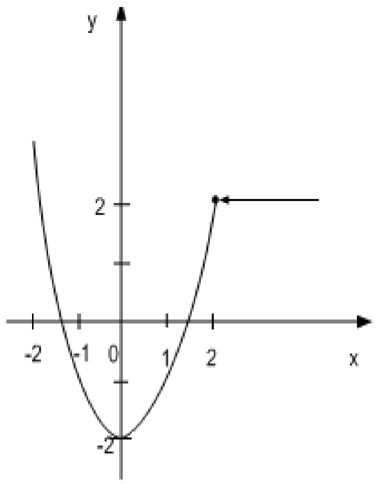


Рис. 7.2

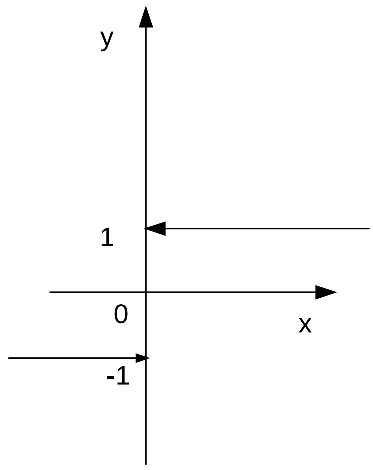


Рис. 7.3

Приклад 4.

Дослідити на парність функції:

а). $f(x)=\dfrac{1}{x+1}$;

б). $f(x)=\dfrac{x^2+x}{x}$;

в). $f(x)=\dfrac{1}{x^2-1}$.

Розв'язання.

а) функція не є парною і не є непарною, бо її область визначення не симетрична відносно точки 0 (в точці *x=1* функція визначена, а у точці *x=-1* не визначена);

б) область визначення симетрична відносно точки 0, але функція не є парною і не є непарною, бо $f(-x)=\dfrac{(-x^2)+(-x)}{-x}=\dfrac{x^2-x}{-x}=-\dfrac{x^2-x}{x}$, і, отже, $f(-x)\ne f(x)$ і $f(-x)\ne -f(x)$;

в) область визначення симетрична відносно точки 0 і

$$f(-x)=\frac{1}{(-x)^2-1}=\frac{1}{x^2-1}=f(x).$$

Отже, функція $f(x)=\frac{1}{x^2-1}$ - парна.

Приклад 5.

Довести монотонність функції $f(x)=\sqrt{x}$.

Доведення.

$D:[0;\infty)$; розглянемо різницю

$f(x_1)-f(x_2)=\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}$, де $x_1\in D, x_2\in D, x_1>x_2$.

$$\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}=\frac{(\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2})(\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2})}{(\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2})}=\frac{x_1-x_2}{\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}}.$$

Оскільки $x_1>x_2$ і $\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}>0$, то $\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}>0$. Отже, при $x_1>x_2$ $f(x_1)>f(x_2)$, і тому функція $y=\sqrt{x}$ - зростаюча.

Приклад 6.

Знайти функції, обернені до даних:

а) $y=2x-1;$

б) $y=x^2;$

в) $y=a^x;$

г) $y=\sin x;$

д) $y=arcctgx$.

Розв'язання.

а) $y=\frac{x+1}{2};$

б) $y=x^2$ на множині $(-\infty;\infty)$ не має оберненої, тому що вона не є монотонною; але на множині $(0;\infty)$ функція має обернену $y=\sqrt{x}$, $x\in(0;\infty)$;

в) функція $y=a^x$, $x\in R$, $y\in(0;\infty)$ має обернену функцію $y=\log_a x$, $x\in(0;\infty), y\in R$.

г) функція $y=\sin x$, $x\in R$ не має оберненої; але функція $y=\sin x$, де $x\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ має обернену функцію $y=\arcsin x, x\in[-1;1]$;

д) функція $y=arcctgx$, $x\in R$ має обернену функцію $y=ctgx$, де $x\in(0;\pi), y\in R.$

Приклад 7.

Використовуючи перетворення графіків функцій, побудувати графіки функцій:

а). $y=3\sin 2x;$ б). $y=2(x+1)^2-3$ в). $y=\left|\log_2|x|\ \right|$.

Розв'язання.

а). $y=3\sin 2x;$

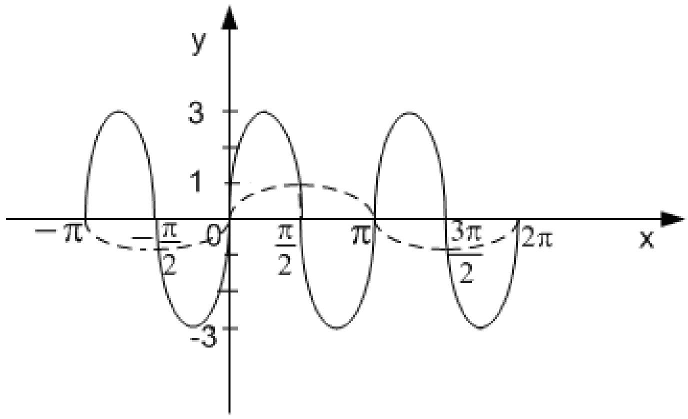


Рис. 7.4

б). $y = 2(x+1)^2 - 3$

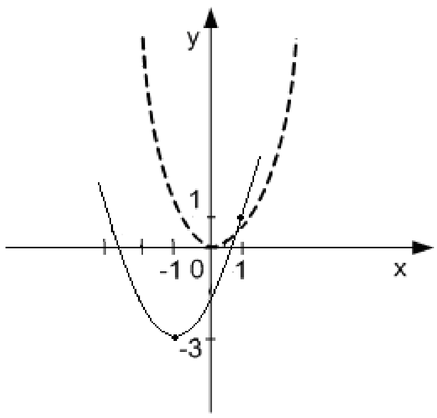


Рис. 7.5

в). $y = \left|\log_2 |x|\ \right|$.

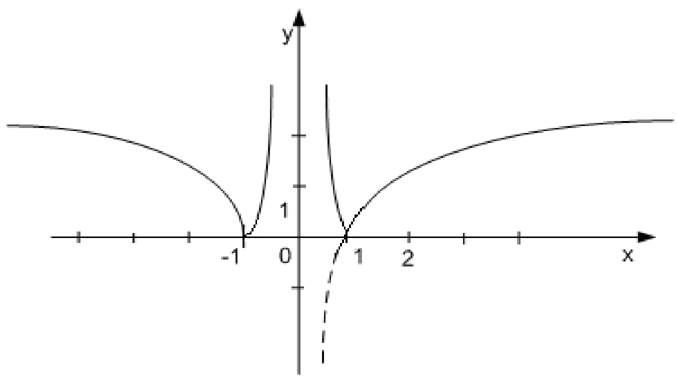


Рис. 7.6

Приклад 8.

Побудувати графіки функцій, що задані в параметричній формі:

а) $\begin{cases} x = R\cos t \\ y = R\sin t, \text{де } t \in [0;\pi] \end{cases}$; б) $\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t, \text{де } t \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right] \end{cases}$.

Розв'язання

а) Рівняння $x = R\cos t$ і $y = R\sin t$, де $t \in [0;\pi]$ задають функцію, оскільки x строго монотонна. Задана функція визначає півколо $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ (верхня півплощина), так як $y = R\sin t \geq 0$ при $t \in [0;\pi]$.

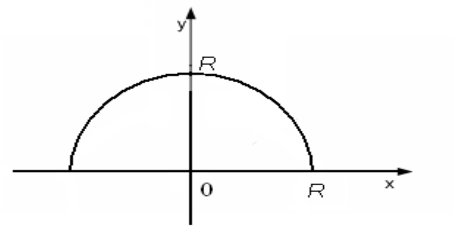


Рис.7.7

б) Рівняння $x = a\cos^3 t$ і $y = a\sin^3 t$, де $t \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ задають функцію, графіком якої є дуга астроїди в I координатному куті.

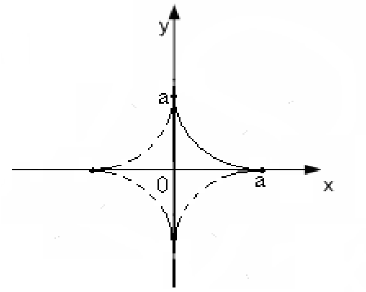


Рис.7.8

Задачі

7.1. $f(x)=2x^2-3x+1$. Знайдіть $f(0); f(3); f(-3)$.

7.2. $f(x) = \begin{cases} x+2, & -\infty < x \leq -2, \\ 4-x^2, & -2 < x < 2, \\ x-2, & 2 \leq x \leq \infty \end{cases}$

Знайдіть $f(-5); f(-2); f(0); f(3)$.

7.3. Знайдіть $f(-1), f(2\ ), f(0), f(3)$, якщо функція задана таблицею:

X	-4	-2	-1	0	1	2	3	4
Y	17	5	2	1	2	5	10	17

Задайте цю функцію аналітично.

7.4. Задані дві множини:

$E=\{4; 6; 9; 11\}$ і $E_1=\{1/4; 1/6; 1/9; 1/11\}$.

Покажіть відповідність між множинами E і E_1, яка є функцією:

1) стрілками на діаграмі Венна;
2) дводольним графом;
3) таблицею.

7.5. Нехай $X=\{-5;-1;5;6\}$, $Y=\{5;29;35\}$ Чи можна функцію $X \xrightarrow{f} Y$ задати формулою 1) $y=x^2+4;$ 2) $y=6|x|-1$.

7.6. Знайдіть корені функцій:

1) $y=-2x^2+5;$ 5) $y=\sqrt{\dfrac{x+8}{x}};$

2) $y=\dfrac{x+1}{x-1};$ 6) $y=\sqrt{\dfrac{x^2-2x+1}{8x}};$

3) $y=\dfrac{|x-2|}{x+3};$ 7) $y=27^x-13\cdot 9^x+13\cdot 3^{x+1}-27$

4) $y=\sqrt{4x+3}$ 8) $y=\sin x\cos x$

7.7. Функція задана формулою:

а) $y=\dfrac{x-1}{2};$ б) $y=\dfrac{x^2-2}{2(x+1)};$ в) $y=-0{,}1x^2-0{,}2x+0{,}3;$

г) $y=\sqrt{x};$ д) $y=\sqrt[3]{x};$ ж) $y=\begin{cases} x-1, x\le 0 \\ x^2, x>0 \end{cases}.$

Які з чисел –1, 0, 1 належать області визначення функції? Знайдіть відповідні їм значення функції. Чи належить множині значень функції число –1; число –1/2; число 0?

7.8. Знайдіть область визначення функції:

а) $\dfrac{x-5}{2x^2-10x-28};$ б) $y=\dfrac{1}{|x|-4};$

в) $y=\sqrt{-x};$ г) $y=\sqrt{x-2}-\sqrt{1-x};$

д) $y=3\sqrt{x+2}+\dfrac{1}{\sqrt{1-x}};$ ж) $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{x+1}{x}};$

з) $y=\log_{0,1}\dfrac{2x-5}{x};$ к) $y=\log_2(x^2-7x+12)+\sqrt{x-1}$

л) $y=\dfrac{\cos x}{\sin^2 x};$ м) $y=\lg(\sin x+2).$

н) $y=\arcsin\dfrac{x}{x+1};$ о) $y=\arcsin\log_2(x^2-3x+3);$

п) $y=2^{ctgx}+\arccos\dfrac{x-1}{6}.$

7.9. Встановіть залежність:

1) об'єма циліндра з радіусом основи $r=2$ см від його висоти h і побудуйте графік цієї залежнсті;

2) об'єма циліндра висотою h = 5 см від радіуса **r** його основи і побудуйте графік цієї залежності;

3) висоти h циліндра від радіуса r основи, якщо об'єм циліндра дорівнює 1 см^3.

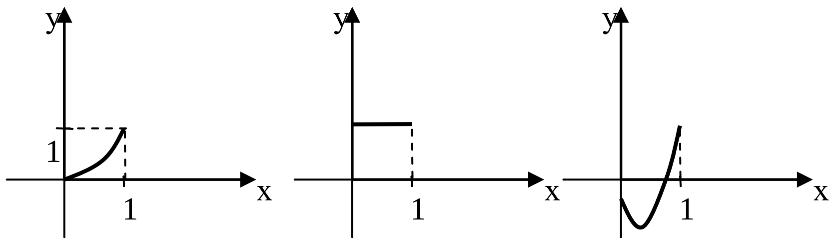
7.10. Вкажіть проміжки монотонності функцій:

$$а)\quad y=5;\quad б)\quad y=1-\frac{x}{2};\quad в)\quad y=x^2+2x+1;$$

$$г)\quad y=\left(\frac{1}{2}\right)^{-x};\quad д)\quad y=\frac{1}{x^2+x+1};\quad ж)\quad y=|x|;$$

$$з)\quad y=tg2x;\quad к)\quad y=-\frac{3}{x}.$$

7.11. На рисунку зображені графіки деяких функцій. Добудуйте їх до графіків: 1) парних; 2) непарних функцій на відрізку *[-1,1];* 3) періодичних з періодом *T=1*.



7.12. Визначити періоди функції:

а) $y=|\cos x|;$ б) $y=\sin 2x+tgx;$ в) $y=\sin\frac{x}{2}+\cos 3x;$

г) $y=\sin^4 x+\cos^4 x;$ д) $y=|\sin x|+|\cos x|;$ е) $y=\sin\frac{x}{5}+\cos\frac{x}{7}.$

7.13. Використовуючи лінійні перетворення графіків функцій, побудуйте графіки функцій:

$$а)\quad y=\sqrt{x}-4;\quad б)\quad y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x}-1;\quad в)\quad y=\sqrt{x+4};$$

$$г)\quad y=\frac{5}{x-3};\quad д)\quad y=(x+3)^x-1;\quad ж)\quad y=2+lg(x-1);$$

$$з)\quad y=2\sin(x+1);\quad к)\quad y=\cos x tgx;\quad л)\quad y=-x^2+x\log_2\sqrt{2};$$

$$м)\quad y=\frac{\sqrt{x(x-2)^2}}{x-2};\quad н)\quad y=\frac{|\sin x|}{\sin x};\quad о)\quad \log_{\sin x}\sin^3 x.$$

$$п)\ y=2^{|x|}-1;\ р)\ y=\left|tg\left|x\right|\right|;\ с)\ y=\frac{|x-2|+|x+2|}{4}.$$

7.14. За допомогою графіків визначити скільки дійсних коренів мають рівняння:

а) $2^{-|x|}=2-|x|;$ б) $2^{-|x|}=\left|2-|x|\right|;$ в) $2^x=-x;$ г) $2^{-|x|}=\left|\left||x|-1\right|-1\right|;$

д) $|lg\, x|=2-x;$ е) $x\, lg\, x=1.$

7.15. Знайти геометричне місце точок з такими координатами $(x;y)$, що $\sin\pi(|x|+|y|)=0.$