Тема 8

Границя функції

Нехай функція $f(x)$ визначена в деякому околі $u(x_0)$ точки x_0, крім, можливо, самої точки x_0. Число A є **границею** функції $f(x)$ в точці x_0, якщо для довільного числа $\varepsilon > 0$ існує число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ таке, що для всіх $x \in u(x_0)$, які задовольняють нерівність $0 < |x - x_0| < \delta$, виконується нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Позначення: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$. (8.1)

Функція $y = f(x)$ при $x \to x_0$ є **нескінченно великою** (має границю ∞), якщо вона визначена в деякому околі $u(x_0)$ точки x_0, крім, можливо, самої точки x_0, і для довільного числа $M > 0$ існує таке $\delta = \delta(M) > 0$, що для всіх x, які задовольняють нерівність $0 < |x - x_0| < \delta$, виконується нерівність $|f(x)| > M \left(\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty \right)$. (8.2)

При $x \to \infty$ функція $y = f(x)$ є **нескінченно великою**, якщо для довільного числа $M > 0$ можна знайти таке число $N = N(M) > 0$, що для всіх x, які задовольняють нерівність $|x| > N$, виконується нерівність

$$|f(x)| > M \quad \left(\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty \right) \tag{8.3}$$

Функція $\alpha(x)$ є **нескінченно малою** величиною при $x \to x_0$ $(x \to \infty)$, якщо $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = 0 \left(\lim\limits_{x \to \infty} \alpha(x) = 0 \right)$.

Деякі властивості нескінченно малих величин:

1) якщо при $x \to x_0 (x \to \infty)\, \alpha(x)$ - нескінченно мала, а $f(x)$- нескінченно велика величина, то при $x \to x_0\, (x \to \infty)\, \dfrac{1}{\alpha(x)}$ і $\dfrac{1}{f(x)}$- відповідно нескінченно велика і нескінченно мала величини;
2) сума скінченного числа нескінченно малих величин є нескінченно малою величиною;
3) добуток обмеженої функції на нескінченно малу є нескінченно малою величиною;
4) частка від ділення нескінченно малої величини на функцію, яка має відмінну від нуля границю, є нескінченно малою величиною.

Якщо кожна з функцій $f(x)$ та $g(x)$ має скінчену границю при $x \to x_0$ $(x \to \infty)$, то справедливі формули:

1) $\lim cf(x) = c \lim f(x), \quad c = const$; (8.4)
2) $\lim [f(x) \pm g(x)] = \lim f(x) \pm \lim g(x)$; (8.5)
3) $\lim [f(x) \cdot g(x)] = \lim f(x) \cdot \lim g(x)$; (8.6)
4) $\lim \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)}; \quad \lim g(x) \neq 0$. (8.7)

При обчисленні границі використовують:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=1$$ - **перша визначна границя** (8.8)

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e,\ \lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=e$$ – **друга визначна границя** (8.9),(8.10)

Число A **є границею функції** $y=f(x)$ **зліва** (лівою границею) в точці x_0, якщо для будь-якого числа $\varepsilon>0$ існує $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ таке, що при $x\in(x_0-\delta;x_0)$ виконується $|f(x)-A|<\varepsilon\left(\lim\limits_{x\to x_0-0}f(x)=f(x_0-0)=A\right)$ (8.11)

Число B є **границею функції** $y=f(x)$ **справа** (правою границею) в точці x_0, якщо для будь-якого числа $\varepsilon>0$ існує $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ таке, що при $x\in(x_0,x_0+\delta)$ виконується нерівність $|f(x)-B|<\varepsilon\left(\lim\limits_{x\to x_0+0}f(x)=f(x_0+0)=B\right)$ (8.12)

Ліва і права границі функції називаються однобічними границями.

Порівняння нескінченно малих величин:

Нехай $\alpha_1(x)$ і $\alpha_2(x)$ - нескінченно малі величини при $x\to x_0$, тоді:

1) якщо $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha_1(x)}{\alpha_2(x)}=A\neq 0,\ A\in R$, то $\alpha_1(x)$ і $\alpha_2(x)$ є нескінченно малими одного порядку;
2) якщо $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha_1(x)}{\alpha_2(x)}=0$, то $\alpha_1(x)$ є нескінченно малою вищого порядку, ніж $\alpha_2(x)$;
3) якщо $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha_1(x)}{\alpha_2(x)}=\infty$, то $\alpha_1(x)$ є нескінченно малою нижчого порядку, ніж $\alpha_2(x)$;
4) якщо $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha_1(x)}{\alpha_2^k(x)}=A\neq 0, A\in R$, то $\alpha_1(x)$ є нескінченно малою *к*-го порядку відносно $\alpha_2(x)$;
5) якщо $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha_1(x)}{\alpha_2(x)}=1$, то $\alpha_1(x)$ і $\alpha_2(x)$ є еквівалентними нескінченно малими ($\alpha_1(x)\sim\alpha_2(x)$);
6) принцип заміни еквівалентними: якщо $\alpha_1(x)\sim\alpha_1^*(x),\alpha_2(x)\sim\alpha_2^*(x)$ при $x\to x_0$, то $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{A\cdot\alpha_1(x)}{B\cdot\alpha_2(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{A\cdot\alpha_1^*(x)}{B\cdot\alpha_2^*(x)},\quad A,B-const.$

Часто зустрічаються такі еквівалентні нескінченно малі величини:

$\sin\alpha\sim\alpha,\alpha\to 0$	$e^{\alpha}-1\sim\alpha,\alpha\to 0$
$tg\alpha\sim\alpha,\ \alpha\to 0$	$a^{\alpha}-1\sim\alpha\ln a,\alpha\to 0$

$arcsin\,\alpha \sim \alpha\,, \alpha \to 0$ $\qquad$ $log_a(1+\alpha) \sim \alpha\, log_a\, e, \alpha \to 0$ (8.13)

$arctg\alpha \sim \alpha\,, \alpha \to 0$ $\qquad$ $ln(1+\alpha) \sim \alpha, \alpha \to 0$

$1-cos\,\alpha \sim \dfrac{\alpha^2}{2}, \alpha \to 0$ $\qquad$ $(1+\alpha)^k - 1 \sim k\alpha,\ \ \alpha \to 0, k > 0$

Приклади розв'язання типових задач

Приклад 1.

Знайти: $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^4+2x-1}{3x^4-x^2+10x+5}$.

Розв'язання.

Маємо невизначеність виду $\frac{\infty}{\infty}$.

Поділимо чисельник і знаменник дробу на x^4:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^4+2x-1}{3x^4-x^2+10x+5} = \lim_{x\to\infty} \frac{1+\frac{2}{x^3}-\frac{1}{x^4}}{3-\frac{1}{x^2}+\frac{10}{x^3}+\frac{5}{x^4}} = \frac{1}{3}.$$

Відповідь: $\frac{1}{3}$.

Приклад 2.

Знайти: $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3+2x^2-x-2}{x^2+3x-4}$.

Розв'язання.

Оскільки $\lim\limits_{x\to 1}\left(x^3+2x^2-x-2\right)=0,\ \lim\limits_{x\to 1}\left(x^2+3x-4\right)=0$, то маємо невизначеність виду $\frac{0}{0}$.

Щоб розкрити невизначеність, розкладемо чисельник і знаменник на множники: $x^3+2x^2-x-2=(x-1)\left(x^2+3x+2\right);\ x^2+3x-4=(x-1)(x+4)$.

Маємо $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3+2x^2-x-2}{x^2+3x-4} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x-1)\left(x^2+3x+2\right)}{(x-1)(x+4)} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2+3x+2}{x+4} = \dfrac{6}{5}$.

Відповідь: $\frac{6}{5}$.

Приклад 3.

Знайти $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x^2+5}-3}{x-2}$.

Розв'язання.

Тут невизначеність $\frac{0}{0}$. Позбудемось від ірраціональності чисельника:

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{\left(\sqrt{x^2+5}-3\right)\left(\sqrt{x^2+5}+3\right)}{(x-2)\left(\sqrt{x^2+5}+3\right)}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)\left(\sqrt{x^2+5}+3\right)}=\frac{2}{3}.$$

Відповідь: $\frac{2}{3}$.

Приклад 4.

Знайти: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[5]{(1+x)^4}-1}{x}$.

Розв'язання.

Нехай $y^5=x+1$, тоді $\lim\limits_{y\to 1}\frac{y^4-1}{y^5-1}=\lim\limits_{y\to 1}\frac{y^3+y^2+y+1}{y^4+y^3+y^2+2y+4}=\frac{4}{5}$.

Цей результат можна дістати з еквівалентності $(1+x)^{\frac{4}{5}}-1\sim\frac{4}{5}x$.

Відповідь: $\frac{4}{5}$.

Приклад 5.

Знайти: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}-x\right)$.

Розв'язання.

Маємо невизначеність виду $\infty-\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+2x}-x\right)\left(\sqrt{x^2+2x}+x\right)}{\sqrt{x^2+2x}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{\sqrt{x^2+2x}+x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{x}}+1}=1$$

Відповідь: 1.

Приклад 6.

Знайти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{\sin 3x}$.

Розв'язання.

Невизначеність виду $\frac{0}{0}$ розкриємо за допомогою першої визначної границі (8.8):

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{\sin 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin 7x}{7x}\cdot 7x}{\frac{\sin 3x}{3x}\cdot 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{7x}{3x}\cdot\frac{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{7x}}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}}=\frac{7}{3}.$$

Відповідь: $\frac{7}{3}$.

Приклад 7.

Знайти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\ln(1+x)}$.

Розв'язання.

Оскільки $\sin 5x \sim 5x, \ln(1+x) \sim x$ при $x\to 0$,то $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\ln(1+x)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{5x}{x}=5$.

Відповідь: 5.

Приклад 8.

Знайти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x}{2x-3}\right)^{2-5x}$.

Розв'язання.

Маємо невизначеність виду 1^{∞}, яку розкриємо за допомогою другої визначної границі (8.9):

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x}{2x-3}\right)^{2-5x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2x}{2x-3}-1\right)^{2-5x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2x-2x+3}{2x-3}\right)^{2-5x}=$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{2x-3}\right)^{2-5x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{3}{2x-3}\right)^{\frac{2x-3}{3}}\right)^{\frac{3(2-5x)}{2x-3}}=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{3(2-5x)}{2x-3}}=e^{\frac{-15}{2}}=\frac{1}{\sqrt{e^{15}}}.$$

Відповідь: $\frac{1}{\sqrt{e^{15}}}$.

Приклад 9.

Знайти: $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{4x+3}{2x-5}\right)^{1+7x}$.

Розв'язання.

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{4x+3}{2x-5}\right)^{1+7x}=\lim_{x\to-\infty}2^{1+7x}=2^{-\infty}=0.$$

Відповідь: 0

Приклад 10.

Знайти $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{1/x^2}$.

Розв'язання

Маємо невизначеність типу 1^{∞}. Щоб звести до другої визначної границі (8.10) використаємо формулу:

$$\lim_{\substack{x\to a\\ U\to 1\\ V\to\infty}} U(x)^{V(x)} = e^{\lim\limits_{x\to a} V(x)\cdot[U(x)-1]}.$$

Тоді $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{1/x^2} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}(\cos x-1)} = e^{-\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}} = e^{-\frac{1}{2}}$

Відповідь: $e^{-\frac{1}{2}}$

Задачі

8.1. Знайти границі:

$1)\ \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3+4x-x^3}{5x^3+7x+2};$ $\quad 2)\ \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^6-x^3+2x}{2x^6-1};$

$3)\ \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x+3}{x+\sqrt[3]{x}};$ $\quad 4)\ \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)}{(2x+3)^5};$

$5)\ \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{10x-3}{2x^3+4x+3};$ $\quad 6)\ \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^5+3x^3-4x}{3x^2-4x+2}.$

8.2.

$1)\ \lim\limits_{x\to 8}\dfrac{x-8}{\sqrt[3]{x}-2};$ $\quad 2)\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3-\sqrt{x+9}}{x};$

$3)\ \lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+6}}{2x^2-7x-15};$ $\quad 4)\ \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-3x+2}{\sqrt{5-x}-\sqrt{x+1}};$

$5)\ \lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x+4}-3}{\sqrt{x-1}-2};$ $\quad 6)\ \lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2-\sqrt{x}}{\sqrt{6x+1}-5}.$

8.3.

$1)\ \lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2+x}{x+1};$ $\quad 2)\ \lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{x^2-8x+15};$ $\quad 3)\ \lim\limits_{t\to\frac{1}{2}}\dfrac{2t^2+t-1}{4(1-t^2)-3};$

$4)\ \lim\limits_{x\to-2}\dfrac{3x^2+5x-2}{5x^2+12x+4};$ $\quad 5)\ \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+x-2}{x^3-x^2-x+1};$ $\quad 6)\ \lim\limits_{x\to-6}\dfrac{x^2+2x-24}{2x^2+15x+18.}$

8.4.

1) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos 2x}{\cos x-\sin x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{1-\cos x}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{6x}$; 4) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\sin(x-\frac{\pi}{3})}{x-\frac{\pi}{3}}$;

5) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 6x-\cos 4x}{x^2}$; 6) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\cos x}-\sqrt{2}}{x^2}$;

7) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(\sqrt{x}-1)\sin x}{x^2}$; 8) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{5+\sin x}-\sqrt{5-\sin x}}{x}$;

9) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{xtg3x}{\cos x-\cos^3 x}$; 10) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{1-2\cos x}{\pi-3x}$.

8.5.

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^3+3x^2}{x^2+1}-x\right)$; 2) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{3}{1-x^3}+\frac{1}{x-1}\right)$;

3) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{2}{2x-x^2}+\frac{1}{x^2-3x+2}\right)$; 4) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{2x^2-3x-1}{x^4-1}$;

5) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x^3}{4x^2-3}-\frac{2x^2}{4x+3}\right)$; 6) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3\sqrt{x}+8x^2-1}{x+\sin 5x}$.

8.6.

1) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2-1}-\sqrt{x^2+1})$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{4x^4+13x^2-7}-2x^2)$;

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{(2x+3)^2}-\sqrt[3]{(2x-7)^2}\right)$; 4) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$;

5) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\sqrt{4x^2+3x+1}-\sqrt{4x^2-5x+3}\right)$; 6) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\sqrt{(x+a)(x+b)}-x\right)$.

8.7.

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+3}\right)^{x+2}$; 2) $\lim\limits_{x\to 1}(7-6x)^{\frac{x}{3x-3}}$;

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+x+1}{2x^2-x+1}\right)^{x^2}$; 4) $\lim\limits_{x\to\infty}(x+3)[\ln(x+1)-\ln(x-2)]$;

5) $\lim\limits_{x\to+\infty}(3x+5)[\ln(x+5)-\ln x]$; 6) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(1+ctgx)^{tgx}$;

7) $\lim\limits_{x\to 0}(1+3x^4)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$; 8) $\lim\limits_{x\to 4\pi}(\cos x)^{\frac{1}{tgx\sin 2x}}$;

9) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{\cos 2}{\cos x}\right)^{\frac{1}{x-2}}$; 10) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+a}{x+b}\right)^{x+c}$.

8.8. Знайти однобічні границі функцій:

1) $f(x)=\frac{1}{x+2^{\frac{1}{x-3}}}$ при $x\to 3$ 2) $f(x)=e^{\frac{1}{x-a}}$ при $x\to a$.

8.9. Знайти границі:

1) $\lim\limits_{x\to 0} x\,ctg 5x;$ 2) $\lim\limits_{x\to 0} x^2\left(4^{\frac{1}{x}}-4^{\frac{1}{x+1}}\right);$

3) $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right);$

4) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} tg^2 x\left(\sqrt{2\sin^2 x+3\sin x+4}-\sqrt{\sin^2 x+6\sin x+2}\right)$

5) $\lim\limits_{x\to\infty} x^2\left(1-\cos\frac{1}{x}\right);$ 6) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\cos\sqrt{x+1}-\cos\sqrt{x}\right);$

7) $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(arctg\frac{x+1}{x+2}-\frac{\pi}{4}\right);$ 8) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(arctg\frac{x+1}{x+2}-arctg\frac{x}{x+2}\right);$

8.10. Знайти границі:

1) $\lim\limits_{x\to\pm 0}\frac{\sin x}{|x|};$ 2) $\lim\limits_{t\to 0}\frac{t+\sin t}{t-\sin t};$

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\sin x;$ 4) $\lim\limits_{t\to\infty} t\left(\sqrt[t]{a}-1\right)$, де $t>0$;

5) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^x-1}{x\ln x};$ 6) $\lim\limits_{\alpha\to 0}(2-\cos\alpha)^{1/\sin^2\alpha};$

7) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{4^x-4^{-x}}{2^{\sin x}-1};$ 8) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{\sin 3(x+1)}{x^2+4x-5};$

9) $\lim\limits_{x\to 0}\log_{\cos x}\left(1+x^2\right);$ 10) $\lim\limits_{x\to 1}\left(x^2-1\right)\log_{x^2} 2.$

8.11. Порівняти нескінченно малі при x→0:

1) $\alpha(x)=x\ln(1+x),\quad \beta(x)=\sin x;$

2) $\alpha(x)=a^x-1,\quad \beta(x)=x\ln a;$

3) $\alpha(x)=x^2\sin^2 x,\quad \beta(x)=x\,tgx;$

4) $\alpha(x)=\sqrt{1+x}-1,\quad \beta(x)=\frac{1}{2}x;$

5) $\alpha(x)=3^{tgx}-3^{-tgx},\quad \beta(x)=\sin^2 x;$

6) $\alpha(x)=(1+x)^m-1,\quad \beta(x)=mx;\quad \text{де } m\in Q^+.$

8.12. Використовуючи принцип заміни еквівалентними, обчисліть границі:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{1-\cos x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+3x\sin x)}{tg(x^2)}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+2x)}{\beta x}$; 4) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin\left(e^{x-1}-1\right)}{\ln x}$;

5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[n]{1+\sin x}-1}{tgx}$; 6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{\sin 2x}$;

7) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{arctg(2-x)+\sin(x-2)^2}{x^2-4}$; 8) $\lim\limits_{x\to +0}\dfrac{2\sin\sqrt{x^2+\sqrt{x^3}}+\ln(1+x)}{x+\sqrt{x\sqrt{x}}}$;

9) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[5]{(1+x)^3}-1}{(1+x)\sqrt[3]{(1+x)^2}-1}$; 10) $\lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{(5^\alpha-1)(4^\alpha-1)}{(3^\alpha-1)(6^\alpha-1)}$.

8.13. Довести, що при $x\to\dfrac{\pi}{2}$ функції $y=\dfrac{1}{\cos x}-tgx$ і $y=\pi-2x$ будуть нескінченно малими одного порядку. Чи будуть вони еквівалентними?

8.14. Довести, що при $x\to 0$ нескінченно малі величини $e^{2x}-e^x$ і $\sin 2x-\sin x$ будуть еквівалентними.

8.15. Знайти $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{\pi}-\sqrt{\arccos x}}{\sqrt{x+1}}$.

8.16. Через кінці і середину дуги *AB* кола проведені дотичні, а точки *A* і *B* з’єднанні хордою. Довести, що відношення площ двох трикутників, що утворилися, прямує до 4 при необмеженому зменшені дуги *AB*.