Тема 16. Подвійні інтеграли

Нехай D - замкнена обмежена область, що має границю Γ площі нуль. Розіб'ємо область D за допомогою скінченого числа довільних кривих площі нуль на скінчене число r замкнених часткових областей D_1, D_2, …, D_r. Сума

$$\sigma = \sum_{i=1}^{r} f(P_i) \cdot \Delta D_i \tag{16.1}$$

називається **інтегральною сумою** функції $f(x,y)$, що відповідає даному розбиттю області D на часткові області D_i і даному вибору точок $P_i(x_i, y_i)$ в часткових областях.

Функція $f(x,y)$ називається **інтегрованою за Ріманом** в області D, якщо існує скінчена границя I інтегральних сум σ цієї функції при $\Delta \to 0$.Символом Δ позначено найбільший з діаметрів часткових областей D_1, D_2, …, D_r. Границя I називається **подвійним інтегралом від функції** $f(x,y)$ **по області** D і позначається

$$I = \iint_D f(x,y)dxdy \tag{16.2}$$

Якщо функція $f(x,y)$ інтегрована в області D за допомогою кривої Γ площі нуль розбивається на дві зв'язні області D_1 і D_2, що не мають спільних точок, то функція $f(x,y)$ інтегрована в кожній з областей D_1 і D_2, причому

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D_1} f(x,y)dxdy + \iint_{D_2} f(x,y)dxdy \tag{16.3}$$

Якщо функції $f(x,y)$ і $g(x,y)$ інтегровані в області D, а α і β - будь-які дійсні числа, то функція $[\alpha f(x,y) + \beta g(x,y)]$ також інтегрована в області D, причому

$$\iint_D [\alpha f(x,y) + \beta g(x,y)]dxdy = \alpha \iint_D f(x,y)dxdy + \beta \iint_D g(x,y)dxdy \tag{16.4}$$

Якщо $f(x,y)$ і $g(x,y)$ інтегровані в області D і всюди в цій області $f(x,y) \le g(x,y)$, то $\iint_D f(x,y)dxdy \le \iint g(x,y)dxdy$.

Якщо $f(x,y)$ інтегрована в області D, то і функція $|f(x,y)|$ інтегрована в області D, причому

$$\left| \iint_D f(x,y)dxdy \right| \le \iint_D |f(x,y)|dxdy \tag{16.5}$$

Зауваження. З інтегрованості $|f(x,y)|$ в D не викликає інтегрованість $f(x,y)$ в D.

Якщо функції $f(x,y)$ і $g(x,y)$ інтегровані в області D, функція $g(x,y)$ невід'ємна (недодатня) всюди в цій області, M і m – точка верхня і точна нижня межа функції $f(x,y)$ в області D, то знайдеться число μ таке, що $m \le \mu \le M$ і таке, що справджується формула

$$\iint\limits_D f(x,y)g(x,y)dxdy = \mu \iint\limits_D g(x,y)dxdy \qquad (16.6)$$

В частковому випадку, коли функція $f(x,y)$ неперервна в D, область D зв'язна, то в цій області знайдеться така точка (ξ,η), що $\mu = f(\xi,\eta)$ і формула (16.6) прийме вигляд

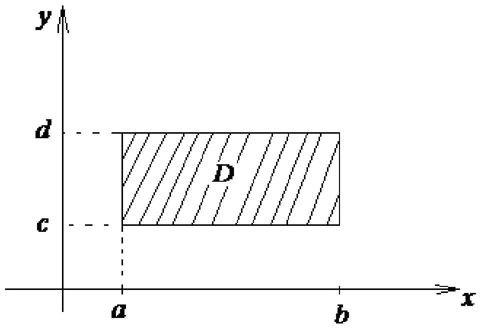
$$\iint\limits_D f(x,y)g(x,y)dxdy = f(\xi,\eta)\iint\limits_D g(x,y)dxdy \qquad (16.7)$$

Дуже важлива геометрична властивість подвійного інтегралу

$$\iint\limits_D dxdy = S_D \qquad (16.8)$$

Одним з ефективних методів обчислення подвійного інтегралу є зведення його до повторного однократного інтеграла. Алгоритм зведення залежить від типу області D.

I. Випадок, коли область D - **прямокутник**



$$D: a \le x \le b, \quad c \le y \le d$$

Інтегральна сума (16.1) приймає вигляд

$$\sigma = \sum_{i,j} f(x_i, y_i)\Delta x_i \Delta y_i, \quad i = 1 \div m, j = 1 \div n \qquad (16.9)$$

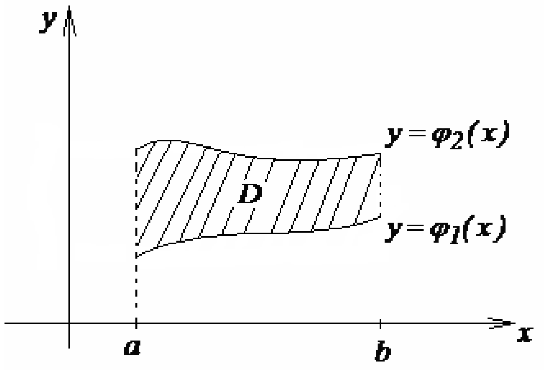
а її границя

$$I = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx \right) dy \qquad (16.10)$$

II. Випадок, коли область D - **довільна плоска фігура.**

Таку фігуру можна представити як об'єднання областей двох типів.

1^0. **Область I типу**

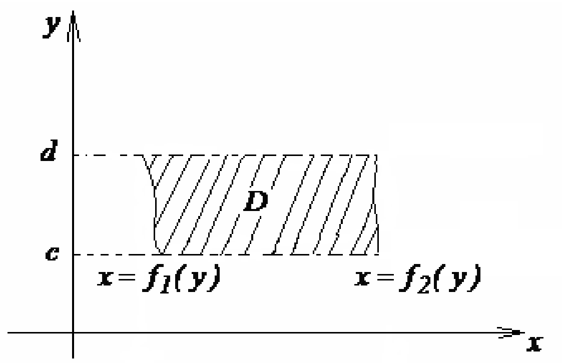


$$D: x = a, x = b, \quad y = \varphi_1(x), \quad y = \varphi_2(x)$$

Тоді інтегральна сума (16.9) має границю

$$I = \int_{a}^{b} dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy \qquad (16.11)$$

2^0. **Область ІІ типу**



$$D: y = c, y = d,$$
$$x = f_1(y)$$
$$x = f_2(y)$$

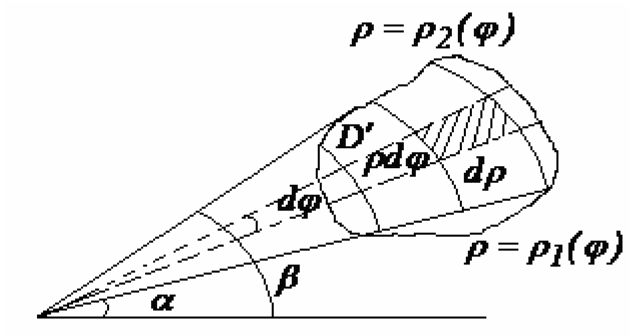
В цьому випадку інтегральна сума (16.9) має границю

$$I = \int_{c}^{d} dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx \qquad (16.12)$$

Якщо область інтегрування D подвійного інтеграла віднесена до **системи полярних координат**

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos\varphi, & 0 &\le \rho < \infty \\ y &= \rho \sin\varphi, & 0 &\le \varphi \le 2\pi \end{aligned} \qquad (16.13)$$

і якщо вона розбивається на часткові області променями $\varphi = \varphi_i = const$, що виходять з полюса, і концентричними колами $\rho = \rho_i = const$ з центром в полюсі, то $dxdy$ в формулі (16.2) перетворюються у $\rho d\rho d\varphi$ (як площа прямокутника зі сторонами $\rho d\varphi$ і $d\rho$). В цьому випадку інтегральна сума має границю



$$I = \iint_{D_i} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho d\rho d\varphi \qquad (16.14)$$

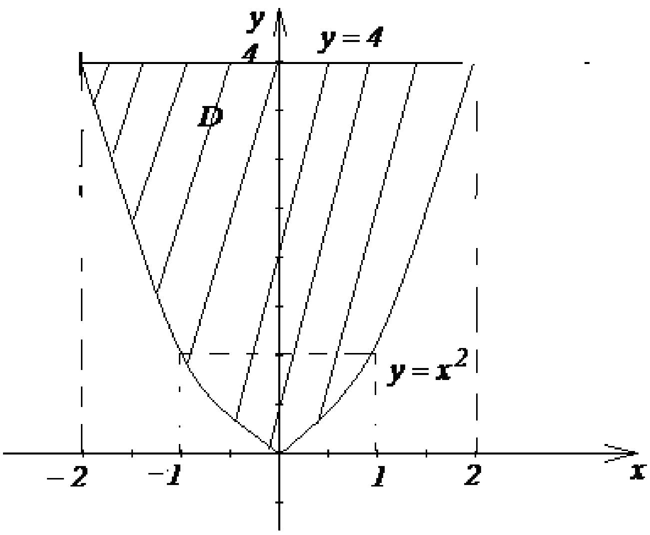
Приклади розв'язання задач

Приклад 1. Змінити порядок інтегрування і інтегралі $I = \int_{-2}^{2} dx \int_{x^2}^{4} f(x,y)dxdy$

Розв'язання. Спочатку за границями інтегрування визначаємо область інтегрування D. З вигляду інтегралу заключаємо, що область D це область І типу (16.11):

$$\begin{aligned} a&: x = -2 & \varphi_1(x)&: y = x^2 \\ b&: x = 2 & \varphi_2(x)&: y = 4 \end{aligned}.$$

Розглянемо тепер область D як область II типу. Границі внутрішнього інтегралу знаходимо, розв'язуючи відносно x рівняння параболи:



$$\psi_1(y): x = -\sqrt{y}$$

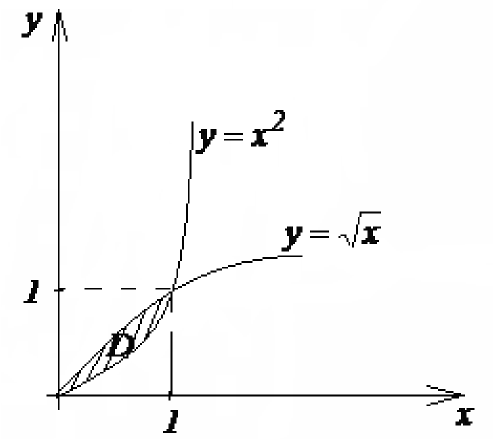
$$\psi_2(y): x = \sqrt{y}$$

Границі зовнішнього інтеграла $\begin{matrix} c: y = 0 \\ d: y = 4 \end{matrix}$ знаходимо як найменше та найбільше значення у області D. Тоді за формулою (16.10):

$$\int_{-2}^{2} dx \int_{x^2}^{4} f(x,y)dy = \int_{0}^{4} dy \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x,y)dx$$

Приклад 2. Обчислити інтеграл $\iint\limits_D (x+2y)dxdy$, де область D обмежена лініями $y = x^2$ та $y = \sqrt{x}$.

Розв'язання. Побудуємо спочатку область D. Її можна розглядати і я область I типу і як область II типу. Обираємо перший варіант, тобто будемо використовувати формулу (16.11). Для цього знайдемо точку перетину ліній $y = x^2$ і $y = \sqrt{x}$, як розв'язок системи рівнянь



$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = \sqrt{x} \end{cases},$$

$$\begin{cases} x^2 = \sqrt{x} \\ y = x^2 \end{cases} \to \begin{cases} x^4 = x \\ y = x^2 \end{cases} \to \begin{cases} x(x^3 - 1) = 0 \\ y = x^2 \end{cases} \to \begin{cases} x_1 = 0, x_2 = 1 \\ y = x^2 \end{cases}$$

Тоді $I = \iint\limits_D (x+2y)dxdy = \int_0^1 dx \int_{x^2}^{\sqrt{x}} (x+2y)dy = \int_0^1 \left(xy\Big|_{x^2}^{\sqrt{x}} + y^2\Big|_{x^2}^{\sqrt{x}} \right) dx =$

$$= \int_0^1 \left(x^{3/2} - x^3 + x - x^4 \right) dx = \frac{2}{5} x^{5/2} \Big|_0^1 - \frac{x^4}{4}\Big|_0^1 + \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 - \frac{x^5}{5}\Big|_0^1 = \frac{2}{5} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{5} = \frac{9}{20}.$$

Приклад 3. Обчислити площу області D, яка обмежена лінією $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2 xy$.

Розв’язання. Для обчислення площі області D будемо використовувати властивість подвійного інтегралу, що відображається формулою (16.8):

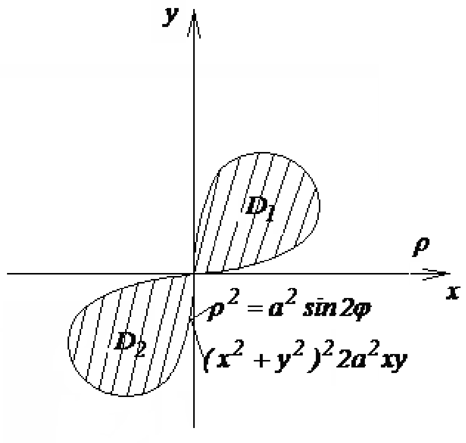
$$S_D = \iint\limits_D dxdy .$$

Область D зручніше задати у полярних координатах (16.13):

$$\rho_2 = a^2 \sin 2\varphi,$$

$$\rho = |a|\sqrt{\sin 2\varphi}.$$

З ОДЗ: $\sin 2\varphi \ge 0$ випливає, що $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$ і $\pi \le \varphi \le \frac{3}{2}\pi$.



Область D розташована симетрично відносно полюса, тому будемо обчислювати площу області D як подвійну площу області D_1, а саме:

$$S_D = \iint\limits_D dxdy = \iint\limits_{D'} \rho d\rho d\varphi = 2\iint\limits_{D_1} \rho d\rho d\varphi =$$

$$= 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{a\sqrt{\sin 2\varphi}} \rho d\rho = 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\left. \frac{\rho^2}{2} \right|_0^{u\sqrt{\sin 2\varphi}} \right) d\varphi =$$

$$= 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{a^2 \sin 2\varphi}{2} d\varphi = a^2 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\varphi d\varphi =$$

$$= \frac{a^2}{2}\left(-\cos 2\varphi\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{a^2}{2}\left(-\cos\pi + \cos 0\right) = \frac{a^2}{2}(1+1) = a^2 \text{ кв.од.}$$

Задачі

16.1. Змінити порядок інтегрування:

1) $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{2y+1}^{4-y^2} f(x,y)dx$;

2) $\int\limits_0^2 dx \int\limits_{\frac{x^2}{4}}^{2\sqrt{x}} f(x,y)dy$;

3) $\int\limits_1^2 dx \int\limits_{2x-1}^{2x+2} f(x,y)dy$;

4) $\int\limits_1^2 dy \int\limits_{\ln y}^{y} f(x,y)dx$;

5) $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{\frac{y^2}{9}}^{y} f(x,y)dx + \int\limits_1^3 dy \int\limits_{\frac{y^2}{9}}^{1} f(x,y)dx$;

6) $\int\limits_{-2}^{6} dx \int\limits_{-3-\sqrt{12+4x-x^2}}^{-3+\sqrt{12+4x-x^2}} f(x,y)dy$

16.2. У подвійному інтегралі $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ розставити границі інтегрування у полярних координатах, якщо область D являється квадратом з вершинами в точках O(0;0), A(1;0), B(1;1), C(0;1).

16.3. Обчислити подвійні інтеграли:

1) $\iint\limits_D (x+y^3)dxdy$, якщо D: $x=1, x=2, y=0$ та $y=2$;

2) $\iint\limits_D \frac{x}{y}dxdy$, якщо D: $y=x^2$ та $x=y^2$;

3) $\iint\limits_D \frac{x}{2}dxdy$, якщо D: $x=2+\sin y, x=0$ та $y=0, y=2\pi$;

4) $\iint\limits_D xydxdy$, якщо D: $x=0$, $y=0$, $x+y=1$;

5) $\iint\limits_D 2ydxdy$, якщо D: $y=\sqrt{x}$, $y=0, x+y=2$.

16.4. За допомогою переходу до полярних координат, обчислити подвійні інтеграли:

1) $\iint\limits_D \sqrt{1-(x^2+y^2)}dxdy$, якщо D: $x^2+y^2=1$;

2) $\iint\limits_D ydxdy$, якщо D обмежена верхньою половиною дуги кола $x^2+y^2=ax$ та відрізом осі OX від т. $x=0$ до т. $x=a$;

3) $\iint\limits_D \sin\sqrt{x^2+y^2}dxdy$, якщо D: $x^2+y^2=\pi^2, x^2+y^2=4\pi^2$;

4) $\iint\limits_D \frac{ydxdy}{\sqrt{x^2+y^2}}$, якщо D: $x^2+y^2=1, x^2+y^2=9, (y\geq 0)$.

16.5. Обчислити площу плоскої області D, обмеженої:

1) прямою $y=2$ і параболою $y=x^2-1$;

2) прямими $y=0$, $x=1$ і параболою $y=x^3$;

3) прямими $x=0$, $y=0$, $x=2$ і кривою $y=e^x$;

4) прямими $x=0$, $y=1$, $y=3$ і гіперболою $y=\frac{1}{x}$;

5) прямими $x=y+1, y=-1$ і кривою $x=e^y$;

6) кривою $(x^2+y^2)^2=2a^2(x^2-y^2)$.