Тема 2

Елементи комбінаторики

Основний принцип комбінаторики (ОПК) :
нехай треба виконати послідовно K дій, причому першу дію можна виконати n_1 способами, другу дію - n_2 способами і т.д., к – ту дію - n_k способами, тоді всі K дій разом можна виконати $N = n_1 \cdot n_2 \cdots n_k$ способами.

Множину потужності n будемо називати n**- множиною.**

n - множина називається **впорядкованою**, якщо кожному її елементу поставлено у відповідність певне число (номер елемента) від 1 до n так, що різним елементам відповідають різні числа.

Різні впорядковані n- множини, які утворені з елементів n- множини, називаються **перестановками без повторень з n елементів**, а їх загальна кількість позначається P_n і дорівнює :

$$P_n = n!$$

Зауважимо, що : $n! = (n-1)! \cdot n$

і $$0! = 1.$$

Значення $n!$ для $1 \le n \le 10$ наведені в таблиці 2.1.

Таблиця 2.1

n	$n\ !$	n	$n\ !$
1	1	6	720
2	2	7	5040
3	6	8	40320
4	24	9	362880
5	120	10	3628800

Впорядковані m- підмножини, які утворені з елементів n- множини $(m \angle n)$, називаються **розміщеннями без повторень з n елементів по m,** а їх загальна кількість позначається A_m^n і дорівнює :

$$\mathrm{A}_n^m = n(n-1) \cdots (n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}$$

З визначення випливає :

$$\mathrm{A}_n^n = \mathrm{P}_n ; \mathrm{A}_n^0 = 1$$

Невпорядковані m- підмножини, які утворені з елементів n- множини $(m < n)$, називаються **сполученнями без повторень з n елементів по m,** а їх загальна кількість позначається C_n^m і дорівнює :

$$C_n^m = \frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{m!} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

Зауважимо, що $C_n^0 = 1$, $C_n^1 = n$, $C_n^n = 1$, $C_n^m = \dfrac{A_n^m}{m!}$

Властивості чисел C_n^m :

- якщо $0 \le m \le n$ і $m, n \in Z$, то $C_n^m = C_n^{n-m}$;
- $\forall n \in Z$, $n \le 0$ вірна тотожність $\sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n$;
- якщо $0 \le m \le n$ і $m, n \in Z$, то $C_n^m = C_{n-1}^{m-1} + C_{n-1}^m$.

Остання властивість дозволяє обчислювати значення C_n^m за допомогою трикутної таблиці, яку називають **трикутником Паскаля** :

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
 & & & & & \ldots & & & & &
\end{array}
$$

В $(n+1)$- му рядку таблиці по порядку стоять $C_n^0, C_n^1, \ldots, C_n^n$.

Будь-який рядок довжиною k , утворений з елементів n - множини, називається **розміщенням з повторенням** з n елементів по k. Кількість всіх таких розміщень позначається $\overline{A}_n^k$ і дорівнює:

$$\overline{A}_n^k = n \cdot n \cdot n \cdot \ldots \cdot n = n^k .$$

Сполученнями з *n* (різних) елементів по *k* елементів з повтореннями називаються невпорядковані k – підмножини, кожен елемент яких належить одному з n видів. Кількість різних сполучень з n елементів по k з повтореннями позначається $\overline{C}_n^k$ і дорівнює: $\overline{C}_n^k = C_{k+n-1}^{n-1} = C_{k+n-1}^k$.

Розміщенням даного складу $(k_1, k_2, \ldots k_m)$ з елементів n - множини m різних видів $(m \le n)$ називається будь-який рядок довжиною $k_1 + k_2 + \ldots + k_m = n$, складений з елементів цієї множини так, що перший елемент n- множини повторюється k_1 разів, другий елемент - k_2 разів і т.д., m -ий елемент - k_m разів. Кількість все можливих розміщень даного складу $(k_1, k_2, \ldots, k_m)$ позначається $A_n(k_1, k_2, \ldots, k_m)$ і дорівнює:

$$A_n(k_1, k_2, \ldots, k_m) = \frac{(k_1 + k_2 + \ldots + k_m)!}{k_1! \, k_2! \ldots k_m!} = \frac{n!}{k_1! \, k_2! \ldots k_{m!}} .$$

Приклади розв'язання типових задач

Приклад 1.

Скільки шестизначних чисел, кратних п'яти, можна утворити з цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6 за умови, що у числі цифри не повторюються?

Розв'язання.

Для того, щоб число, складене з заданих цифр, ділилось на 5, необхідно і достатньо, щоб цифра 5 стояла на останньому місці. Інші п'ять цифр можуть стояти на решті п'яти місцях у будь-якому порядку. Тому чисел N кратних 5 буде стільки, скільки можна утворити перестановок з п'яти елементів, тобто

$$N = P_5 = 5! = 120$$

Приклад 2.

Група студентів вивчає 7 учбових дисциплін. На понеділок плануються заняття з чотирьох різних дисциплін. Скількома способами можна скласти розклад на понеділок?

Розв'язання.

Різних способів складання розкладу занять, очевидно, стільки, скільки існує чотирьохелементних впорядкованих підмножин з семиелементної множини. Значить число способів N дорівнює числу розміщень з 7 елементів по 4, тобто

$$N = A_7^4 = 7 \times 6 \times 5 \times 4 = 840.$$

Приклад 3.

На диск сейфа нанесені 12 літер, а код складається з 5 літер. Скільки невдалих спроб може зробити людина, яка не знає коду, а знає тільки, що він складається з 5 літер?

Розв'язання.

За ОПК людині потрібно зробити 5 дій: набрати першу літеру, набрати другу літеру і т.д., набрати п'яту літеру. Першу дію вона може зробити 12 способами, другу – 12 способами і т.д., п'яту – 12 способами. Тому всі п'ять дій вона може зробити за ОПК

$$N = 12 \cdot 12 \cdot 12 \cdot 12 \cdot 12 = 12^5 = 248832$$

способами. Тому кількість невдалих спроб дорівнює 248831.

Приклад 4.

При грі в доміно 4 гравця ділять порівну 28 кісток. Скількома способами вони можуть це зробити?

Розв'язання.

Перший гравець повинен вибрати 7 кісток з 28. Так як їх порядок не має значення, то він має C_{28}^7 можливостей. Після цього, другий гравець буде мати C_{21}^7 можливостей. Третій гравець обирає з 14 кісток, а тому має C_{14}^7 варіантів. Ну а четвертому гравцю залишається C_7^7 варіантів, тобто єдиний вибір. За ОПК загальна кількість можливостей N дорівнює :

$$N = C_{28}^7 \cdot C_{21}^7 \cdot C_{14}^7 \cdot C_7^7 = \frac{28!}{21!\,7!} \cdot \frac{21!}{14!\,7!} \cdot \frac{14!}{7!\,7!} = \frac{28!}{(7!)^4}.$$

Зауваження.

Аналогічно знаходиться кількість роздач карт при грі в преферанс, коли 32 карти діляться між трьома гравцями по 10 карт кожному, а дві карти кладуть у прикуп :

$$N = \frac{32!}{(10!)^3 \cdot 2!} = 2 \quad 753 \quad 294 \quad 408 \quad 504 \quad 640 \,.$$

Приклад 5.

Скількома способами можна утворити чотирьохзначне число, в десятковій формі якого відсутній 0?

Розв'язання.

Чотирьохзначні числа можна розглядати як рядки довжиною 4, утворені з елементів наступної множини: $\{1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$, тобто як розміщення з повтореннями з 9 елементів по 4:

$$\overline{A}_9^4 = 9^4 = 6561.$$

Приклад 6.

Скількома способами можна розмістити на книжній полиці з підручника з алгебри, 2 – з геометрії і 1- з математичного аналізу?

Розв'язання.

Будь-якому розміщенню вказаних підручників відповідає рядок довжиною $3+2+1=6$ складу $(3;2;1)$, тобто:

$$A_6(3,2,1) = \frac{(3+2+1)!}{3!\ 2!\ 1!} = 60\,.$$

Приклад 7.

Скількома способами можна розмістити 63 яблука між 3 особами?

Розв'язання.

Маємо три види елементів $(n = 3)$, з яких потрібно утворити все можливі кортежі довжиною $k = 63$. Отже, кількість способів розподілення яблук:

$$\overline{C}_3^{63} = C_{63+3-1}^{63} = \frac{65!}{63!\ 2!} = \frac{65 \cdot 64}{2} = 2080.$$

Задачі

2.1. Скільки діагоналей має опуклий n-кутник?

2.2. Ніякі три діагоналі опуклого десятикутника не перетинаються в одній точці. Визначити число точок перетину діагоналей.

2.3. На першій з двох паралельних прямих розташовані 15 точок, на другій – 21 точка. Скільки існує трикутників з вершинами в цих точках?

2.4. На яке найбільше число частин можуть розбити площину n прямих?

2.5. Скільки шестизначних чисел, кратних п'яти, можна утворити з цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6 за умови, що у числі цифри не повторюються?

2.6. Група студентів вивчає 7 учбових дисциплін. Скількома способами можна скласти розклад занять на понеділок, якщо на цей день заплановані заняття з 4-х дисциплін?

2.7. Скільки різних перестановок можна утворити з букв слова “задача”?

2.8. У чемпіонаті з футболу приймають участь 18 команд, причому кожні дві команди зустрічаються між собою 2 рази. Скільки матчів було зіграно?

2.9. Скільки чотиризначних чисел можна скласти з цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, якщо:
а) жодна з цифр не повторюється;
б) цифри можуть повторюватись;
в) всі цифри непарні і можуть повторюватись?

2.10. В групі 30 студентів. Скількома способами можна виділити двох студентів для чергування, якщо:
а) один з них повинен бути старшим;
б) старшого не повинно бути?

2.11. На п’ять співробітників виділені три путівки. Скількома способами їх можна розподілити, якщо:
а) всі путівки різні;
б) всі путівки однакові?

2.12. Скількома способами на шаховій дошці можна розставити 8 тур одного кольору так, щоб вони не били одна одну і стояли тільки на білих клітинах?

2.13. Автомобільний номер складається з двох букв і чотирьох цифр. Скільки різних номерів можна скласти, якщо використовується абетка з 32 літер?

2.14. На зборах повинні виступати чотири особи: *A, B, C, D*. Скількома способами їх можна записати у списку ораторів, якщо B може виступати тільки перед *A*?

2.15. Хокейна команда складається з двох воротарів, семи захисників і десяти нападників. Скількома способами тренер може утворити стартову шістку, яка складається з воротаря, двох захисників і трьох нападників?

2.16. Скількома способами 12 однакових монет можна розмістити по п’яти різним гаманцям так, щоб жоден гаманець не залишився порожнім?

2.17. Скількома способами можна спакувати дев’ять різних книжок у п’ять бандеролей, якщо чотири бандеролі повинні містити по дві книжки?

2.18. Скількома способами 2n елементів можна розбити на пари?

2.19. Скількома способами можна скласти трьохколірний прапор з горизонтальних смуг, якщо є матеріал п’яти різних кольорів?

2.20. Скількома способами можна скласти чотирьохколірний прапор з горизонтальних смуг, якщо є матеріали чотирьох різних кольорів?

2.21. В деякій державі не було двох мешканців з однаковою кількістю зубів. Яка може бути найбільша чисельність населення цієї держави (найбільша кількість зубів дорівнює 32).

2.22. Скількома способами можна обрати голосну і приголосну літери із слова „ камзол” ?

2.23. Скільки можна скласти трьохзначних чисел, в яких немає цифри 8 ?

2.24. Автомобільний номер складається з однієї, двох або трьох літер і чотирьох цифр. Знайти число таких номерів, якщо використовують абетку з 32 літер?

2.25. На колі розташовано 10 точок. Скільки існує різних опуклих многокутників, вписаних в це коло?

2.26. Скільки різних перестановок можна утворити із букв слова „ВОДОВОРОТ ”?

2.27. Скількома способами можна вибрати із слова „ логарифм ” дві приголосні і одну голосну літеру ?

2.28. Скількома способами можна розташувати білі фігури (3 тури, 2 пішака, 2 коня і королеву) на першій лінії шахової дошки?

2.29. Скільки існує трикутників, вершини яких являються вершинами даного опуклого шестикутника?

2.30. Скількома способами з 28 кісток доміно можна вибрати дві кістки так, щоб їх можна було прикласти одну до одної?

2.31. У кошику лежать 12 яблук і 10 бананів. Дмитро обирає з нього яблуко або банан. Після цього Надійка бере і яблуко і банан. В якому випадку Надійка має більшу свободу вибору: якщо Дмитро взяв яблуко або якщо він взяв банан?

2.32. У Петра є 7 детективів, а у Миколи – 9. Скількома способами вони можуть обмінятись: а) однією книгою? б) двома книгами?

2.33. Скільки існує шестизначних чисел, всі цифри яких парні?

2.34. Десять туристів розміщуються в готелі в два тримісних і один чотиримісний номери. Скільки існує способів їх розміщення?

2.35. Скількома способами можна розсадити 10 студентів на 16 місць?

2.36. Троє студентів здають іспит. Скількома способами можуть бути поставлені їм оцінки, якщо відомо, що ніхто з них не отримав „відмінно”?

2.37. Скількома способами можна впорядкувати множину чисел $\{1, 2, ..., 2n\}$ так, щоб кожне парне число мало парний номер?

2.38. Скількома способами можна розташувати білі фігури (2 коня, 2 слона, 2 тури, ферзя і короля) на першій лінії шахової дошки?

2.39. З колоди, яка містить 52 карти, вилучили 10 карт. В скількох випадках серед них буде не менш ніж два тузи?

2.40. В першості по футболу приймають участь 17 команд, які розігрують золоту, срібну та бронзову медалі. Скількома способами можуть бути розподілені ці медалі?

2.41. З колоди, яка містить 52 карти, вилучають 10 карт. В скількох випадках серед них буде : а) рівно один туз? б) рівно два тузи?

2.42. У мами 2 яблука і 3 груші. Кожного дня на протязі п’яти діб поспіль вона дає дочці по одному фрукту. Скількома способами це можна зробити?

2.43. Код складається з геометричної фігури (коло, квадрат, трикутник, трапеція), літери (абетка з 32 літер) і цифри. Скільки таких кодів можна скласти?

2.44. На першому поверсі семиповерхового будинку в ліфт увійшло 5 пасажирів. Скільки варіантів виходу пасажирів із ліфту, якщо на перших трьох (починаючи з другого) ліфт не зупинявся.

2.45. Наукове товариство складається з 25 осіб. Треба обрати президента, віце-президента, вченого секретаря і скарбника. Скількома способами може бути зроблений цей вибір, якщо кожен може посідати лише одну посаду?

2.46. У англійців прийнято давати дітям декілька імен. Скількома способами можна назвати дитину, якщо загальна кількість імен дорівнює 300, а дитині дають не більше трьох імен?

2.47. Скількома способами можна вказати на шаховій дошці білий і чорний квадрати, які не лежать на одній горизонталі і вертикалі?

2.48. П’ять дівчат і троє хлопчиків треба розбити на 2 команди по 4 особи в кожній, причому в кожній команді повинен бути хоча б один хлопець. Скількома способами можна зробити таке розбиття?

2.49. На складі є 20 видів товарів. Скількома способами їх можна розподілити між 3 маркетами так, щоб в перший маркет завезли 8 видів, в другий – 7 видів, а в третій – 5 видів товарів?

2.50. Перевірте наступне: кількість слів з трьох літер, що утворені з літер слова «гіпотенуза», дорівнює кількості всеможливих перестановок літер в слові «призма».