Тема 13

Диференціальне числення функцій багатьох змінних

I. Нехай D - множина упорядкованих чисел $(x;y)$. Якщо кожній парі $(x;y)\in D$ за певним законом відповідає число z, то кажуть, що на множині D **визначено функцію від двох змінних** x і y, і записують $z=f(x,y)$.

Множину пар $(x;y)$, для яких функція $z=f(x,y)$ визначена, називають **областю визначення функції** і позначають $D(f)$ або D.

Множину значень z позначають $E(f)$ або E. Аналогічно означаться поняття функції трьох і більшого числа змінних.

Функцію двох змінних можна зобразити графічно у вигляді деякої поверхні.

Графіком функції $z=f(x,y)$ в прямокутній системі $Oxyz$ називається ГМТ $M(x;y;f(x;y))$, проекції яких $(x;y)$ належать області D. Це ГМТ утворює в тривимірному просторі певну поверхню (рис. 13.1), проекцією якої на площину Oxy є множина D.

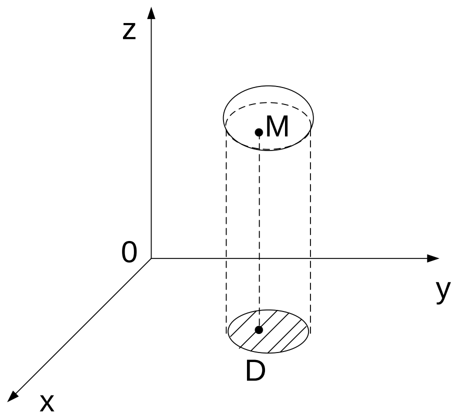

Рис. 13.1

Лінією рівня функції $z=f(x,y)$ називається лінія $f(x,y)=C$, в точках якої функція зберігає стале значення $z=C, C\in E(f)$.

Поверхнею рівня функції $u=f(x;y;z)$ називається поверхня $f(x;y;z)=C$, в точках якої функція зберігає стале значення $u=C, C\in E(f)$.

Надалі розглядатимемо лише функції двох змінних.

Побудова графіків функцій двох змінних виконується методом перерізів, який полягає в тому, що поверхню $z=f(x,y)$ перетинають площинами $x=x_o$ та $y=y_o$ і за графіками кривих $z=f(x_0,y)$ та $z=f(y_o,x)$ визначають графік функції $z=f(x,y)$.

Функція $z=f(x,y)$ називається **однорідною** функцією k-го порядку, якщо виконується тотожність

$$f(\lambda_x,\lambda_y)=\lambda^k f(x,y) \qquad (13.1)$$

для довільного $\lambda\neq 0$.

ІІ. Нехай $\rho(M,M_o)=\sqrt{(x-x_o)^2+(y-y_o)^2}$ - відстань між точками $M(x;y)$ та $M_0(x_o;y_o)$, де $M_o \in D$ або $M_o \overline{\in} D$, проте в довільному околі точки M_o міститься хоча б одна точка множини D, відмінна від M_o.

Число A називається **границею функції** $z=f(M)$ у точці M_o, якщо для кожного числа $\varepsilon>0$ знайдеться число $\delta>0$ таке, що для всіх точок $M(x;y)\in D$, які задовольняють умову $0<\rho(M,M_o)<\delta$, виконується нерівність $|f(M)-A|<\varepsilon$. При цьому записують:

$$\lim_{M\to M_o} f(M)=A \text{ або } \lim_{\substack{x\to x_o\\ y\to y_0}} f(x,y)=A \tag{13.2}$$

Функція $z=f(M)$ називається **неперервною в точці** M_o, якщо

$$\lim_{M\to M_o} f(M)=f(M_o) \tag{13.3}$$

Функція $f(x,y)$ називається **неперервною на множині** D, якщо вона неперервна в кожній точці $(x;y)$ цієї множини. Точки, в яких неперервність функцій порушується, називаються **точками розриву функції**. Точки розриву можуть бути ізольовані, утворювати лінії розриву, поверхні розриву і т.д.

ІІІ. Якщо існує границя

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x+\Delta x,y)+f(x,y)}{\Delta x} \tag{13.4}$$

то вона називається **частинною похідною функції** $z=f(x,y)$ **в точці** $M(x;y)$ **по змінній** x і позначається одним із таких символів:

$$\frac{\partial z}{\partial x},\ \frac{\partial f}{\partial x},\ z'_x, f'_x \tag{13.5}$$

Зазначена вище границя обчислюється при умові, що змінна y вважається сталою.

Аналогічно означається частинна похідна по змінній y:

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial y}=z'_y=f'_y=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y} \tag{13.6}$$

Функція $f(x,y)$ називається **диференційованою в точці *М*,** якщо її повний приріст $\Delta z=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)$ можна подати так:

$$\Delta z=A\Delta x+B\Delta y+\alpha\Delta x+\beta\Delta y, \tag{13.7}$$

де A і B – дійсні числа, що не залежать від Δx та Δy, α і β - нескінченно малі при $\Delta x\to 0$ і $\Delta y\to 0$ функції.

Повним диференціалом dz функції $z=f(M)$ називається головна лінійна частина приросту функції, яка обчислюється за формулою:

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy, \tag{13.8}$$

де $dx=\Delta x, dy=\Delta y$.

Для наближеного обчислення значення функції користуються рівністю:

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) \approx f(x,y) + \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\Delta y \qquad (13.9)$$

Частинними похідними другого порядку функції $z = f(x,y)$ називаються її частинні похідні від частинних похідних першого порядку:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = z''_{xx} = f''_{xx}; \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = z''_{xy} = f''_{xy}; \qquad (13.10)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = z''_{yx} = f''_{yx}; \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = z''_{yy} = f''_{yy}.$$

Частинні похідні, які відмінні одна від одної лише порядком диференціювання, називаються **мішаними похідними**; вони є рівними між собою при умові, що вони неперервні в деякому околі точки M:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \qquad (13.11)$$

Диференціал другого порядку $d^2 z$ функції $z = f(x,y)$ означається за формулою:

$$d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2 \qquad (13.12)$$

Нехай $z = f(x,y)$ - функція двох змінних x і y, які також залежать від змінних u та v: $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$, тоді функція $z = f(x(u,v), y(u,v))$ є **складеною функцією** незалежних змінних u та v. Якщо всі зазначені функції диференційовані, то:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}, \quad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} \qquad (13.13)$$

Зокрема, якщо $x = x(t), y = (t)$, то

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt} \qquad (13.14)$$

IV. **Похідною** функції $z = f(x,y)$в точці $M(x,y)$ за напрямом вектора $l = \overrightarrow{MM_1}$ називається границя:

$$\frac{\partial z}{\partial l} = \lim_{MM_1 \to 0} \frac{f(M_1) - f(M)}{MM_1} = \lim_{\rho \to 0} \frac{\Delta z}{\rho}, \qquad (13.15)$$

де $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$.

Якщо функція $f(x,y)$ диференційована, то похідна за напрямом:

$$\frac{\partial z}{\partial l} = \frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y}\sin\alpha, \qquad (13.16)$$

де α - кут, утворений вектором $\vec{l}$ з *Ox*.

Якщо ж $u = f(x,y,z)$, то

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos\gamma\,, \qquad (13.17)$$

де $cos\,\alpha, cos\,\beta, cos\,\gamma$ - напрямні косинуси вектора $\vec{l}$.

Градієнтом функції $z = f(x,y)$ в точці $M(x,y)$називається вектор, що починається з цієї точки і координати якого є частинними похідними функції z:

$$grad\ z = \frac{\partial z}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial z}{\partial y}\vec{j}. \qquad (13.18)$$

Градієнт функції і похідна за напрямом $\vec{l}$ пов’язані формулою:

$$\frac{\partial z}{\partial l} = np_{\vec{l}}\,grad\ z. \qquad (13.19)$$

Похідна в даній точці за напрямом вектора $\vec{l}$ має найбільше значення, якщо напрям вектора $\vec{l}$ збігається з напрямом градієнта, причому

$$\left(\frac{\partial z}{\partial l}\right)_{max} = |grad\ z.| = \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} \qquad (13.20)$$

Якщо ж $u = f(x,y,z)$, то

$$grad\ u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + .\frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}. \qquad (13.21)$$

V. Нехай поверхню задано рівнянням $F(x,y,z) = 0$ і точка $M_o(x_o; y_o; z_o) \in F$. Рівняння дотичної площини до поверхні в точці M_0:

$$F'_x(M_o)(x - x_o) + F'_y(M_o)(y - y_o) + F'_z(M_o)(z - z_o) = 0 \qquad (13.22)$$

а рівняння нормалі:

$$\frac{x - x_o}{F'_x(M_o)} = \frac{y - y_o}{F'_y(M_o)} = \frac{z - z_o}{F'_z(M_o)} \qquad (13.23)$$

Якщо рівняння поверхні задано в явній формі $z = f(x,y)$, то рівняння (13.22) і (13.23) набувають відповідно вигляду:

$$z - z_o = f'_x(x_o, y_o)(x - x_o) + f'_y(x_o, y_o)(y - y_o) \qquad (13.24)$$

та

$$\frac{x - x_o}{f'_x(x_o, y_o)} = \frac{y - y_o}{f'_y(x_o, y_o)} = \frac{z - z_o}{-1} \qquad (13.25)$$

VI. Нехай функція $z = f(x,y)$ визначена в області D, а точка $M_o(x_o, y_o) \in D$. Якщо існує окіл точки M_0, який належить області D і для всіх відмінних від M_0 точок M цього околу виконується нерівність $f(M) < f(M_o)(f(M) > f(M_o))$, то точку M_0 називають **точкою локального максимуму (мінімуму)** функції $f(x,y)$, а число $f(M_o)$ - **локальним максимумом (мінімумом)** цієї функції. Точки максимуму та мінімуму функції називають **точками екстремуму**.

Необхідні умови існування екстремуму функції $z = f(x,y)$: функція $f(x,y)$ може мати екстремум лише у точках, в яких $\frac{\partial z}{\partial x} = 0$ і $\frac{\partial z}{\partial y} = 0$ (стаціонарні точки) та у точках, де похідні не існують.

Для з'ясування **достатніх** умов існування екстремуму функції $f(x,y)$, позначимо:

$$f'_{xx}(x_0;y_0) = A; \quad f''_{xy}(x_0;y_0) = B; \quad f''_{yy}(x_0;y_0) = C; \quad \Delta = AC - B^2 \quad (13.26)$$

Тоді:

1) якщо $\Delta > 0$, то у точці $(x_0;y_0)$ існує екстремум, причому максимум при $A < 0$ і мінімум при $A > 0$;
2) якщо $\Delta < 0$, то точка $(x_0;y_0)$ не є точкою екстремуму;
3) якщо $\Delta = 0$, то екстремум може бути, а може і не бути (потрібні додаткові дослідження).

Приклади розв'язання типових задач:

Приклад 1.

Знайти область визначення D та множину E значень функції $z = \frac{1}{\sqrt{y^2 - x}}$.

Розв'язання.

$y^2 - x > 0,$ межа області (парабола $y^2 = x$) не належить їй, тобто це відкрита область $x < y^2$; множина значень $E:(0;+\infty)$.

Приклад 2.

Знайти границю $A = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 1}$.

Розв'язання.

$$A = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{(x^2 + y^2)(\sqrt{x^2 + y^2 + 1} + 1)}{(\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 1)(\sqrt{x^2 + y^2 + 1} + 1)} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{(x^2 + y^2)(\sqrt{x^2 + y^2 + 1} + 1)}{x^2 + y^2 + 1 - 1} =$$

$$= \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} (\sqrt{x^2 + y^2 + 1} + 1) = 2.$$

Відповідь: $A=2$.

Приклад 3.

Дослідити на неперервність функцію $z = \frac{x^2 + 2y - 1}{x^2 + y^2}$.

Розв'язання.

Функція не визначена в точці, де знаменник перетворюється на нуль. Тому вона має розрив в точці $0(0;0)$.

Відповідь: функція розривна в точці $(0;0)$.

Приклад 4.

Знайти частинні похідні функції $z = arctg\,\frac{y}{x}$.

Розв'язання.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1+(\frac{y}{x})^2}\cdot(-\frac{y}{x^2}) = -\frac{y}{x^2+y^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{1+(\frac{y}{x})^2}\cdot\frac{1}{x} = \frac{x}{x^2+y^2}.$$

Приклад 5.

Знайти частинні похідні функції $z = sin(uv)$, де $u = 2x+3y, v = xy$.

Розв'язання.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = v\,cos(uv)\cdot 2 + u\,cos(uv)y = cos(2x^2y+3xy^2)\cdot(4xy+3y^2),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = v\,cos(uv)\cdot 3 + u\,cos(uv)x = cos(2x^2y+3xy^2)\cdot(6xy+2x^2).$$

Приклад 6.

Знайти похідні другого порядку від функції $z = x^3 - x^2y + y^2$.

Розв'язання.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 2xy,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x-2y,\quad \frac{\partial z}{\partial y} = -x^2+2y,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = -2x.$$

Відповідь: $6x-2y; 2; -2x.$

Приклад 7.

Знайти повний диференціал функції $z = x^3y^2$.

Розв'язання.

Частинні похідні $z'_x = 3x^2y^2$ і $z'_y = 2x^3y$ є неперервними функціями на всій площині Oxy.

Тому $dz = 3x^2y^2dx + 2x^2ydy.$

Приклад 8.

Знайти $d^2 z$ функції $z = \sin x \cdot \sin y$.

Розв'язання.

$z'_x = \cos x \cdot \sin y,\ \ z'_y = \sin x \cdot \cos y,\ \ z''_{xx} = -\sin x \cdot \sin y,\ \ z''_{xy} = \cos x \cdot \cos y,$

$z''_{yy} = -\sin x \cdot \sin y,\ \ d^2 z = -\sin x \sin y dx^2 + 2\cos x \cos y dxdy - \sin x \sin y dy^2.$

Приклад 9.

Знайти похідну функції $z = \ln(x^2 + y^2)$ в точці $M(3;4)$ за напрямом градієнта функції z.

Розв'язання.

Вектор $\vec{l}$ співпадає з градієнтом функції $z = \ln(x^2 + y^2)$ в точці M. Оскільки

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_M = \left.\frac{2x}{x^2 + y^2}\right|_M = \frac{6}{25};\quad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_M = \left.\frac{2y}{x^2 + y^2}\right|_M = \frac{8}{25};$$

то $gradz = \frac{6}{25}\vec{i} + \frac{8}{25}\vec{j}.$

Таким чином,

$$\frac{\partial z}{\partial l} = |gradz| = \sqrt{\left(\frac{6}{25}\right)^2 + \left(\frac{8}{25}\right)^2} = \frac{2}{5}.$$

Відповідь: $\frac{2}{5}$.

Приклад 10.

Знайти рівняння нормалі та дотичної площини до параболоїда $z = x^2 + y^2$ в точці $M_o(1;-2;5)$.

Розв'язання.

За формулами (13.24) і (13.25) маємо:

$f(x,y) = x^2 + y^2,\quad f'_x(x,y) = 2x,\quad f'_y(x,y) = 2y,\quad f'_x(1,-2) = 2,$ $f'_y(1,-2) = -4,$ звідси, $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-4} = \frac{z-5}{-1}$ - рівняння нормалі, $2x - 4y - z - 5 = 0$ - рівняння дотичної площини.

Приклад 11.

Знайти розміри відкритого прямокутного басейну об'єму V, за яких на його облицювання піде найменша кількість матеріалу.

Розв'язання.

Нехай x,y,z відповідно довжина, ширина і висота басейну, тоді $V = xyz$, звідки $z = \frac{V}{xy}$.

Кількість матеріалу, необхідного для облицювання басейну:

$S = xy + 2yz + 2xz$, або $S = S(x,y) = xy + 2V(\frac{1}{x} + \frac{1}{y})$.

Треба знайти мінімум функції $S(x,y)$, якщо $x > 0$, $y > 0$.

Маємо $S'_x(x,y) = y - \frac{2V}{x^2}$, $\quad S'_y(x,y) = x - \frac{2V}{y^2}$,

$$\begin{cases} y - \frac{2V}{x^2} = 0 \\ x - \frac{2V}{y^2} = 0; \end{cases} \qquad x = y = \sqrt[3]{2V}.$$

Отже, функція має одну стаціонарну (критичну) точку $M\left(\sqrt[3]{2V}, \sqrt[3]{2V}\right)$, яка є точкою мінімуму. Тоді $z = \frac{1}{2}\sqrt[3]{2V}$. Таким чином, басейн повинен мати висоту $\frac{1}{2}\sqrt[3]{2V}$ і квадратну основу із стороною $\sqrt[3]{2V}$.

Відповідь: розміри басейну $\sqrt[3]{2V}; \sqrt[3]{2V}; \frac{1}{2}\sqrt[3]{2V}$.

Приклад 12.

Знайти екстремум функції $z = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$.

Розв'язання.

Знаходимо частинні похідні

$z'_x = 2x + y - 3, \quad z'_y = x + 2y - 6.$

Стаціонарні точки функції визначимо із системи: $\begin{cases} 2x + y - 3 = 0, \\ x + 2y - 6 = 0, \end{cases}$ звідки $x = 0; y = 3; M(0,3).$

Знайдемо $z''_{xx}, z''_{yy}, z''_{xy}$:

$z''_{xx} = 2; \quad z''_{yy} = 2; \quad z''_{xy} = 1$ і знайдемо за формулою (13.26) $\Delta = AC - B^2 = 2 \cdot 2 - 1 = 3 > 0; A > 0.$

Отже, в точці $M(0,3)$ задана функція має мінімум, причому $z_{min} = -9.$

Відповідь: $z_{min} = -9$ в точці $M(0,3)$.

Задачі

13.1. Для функції $z = \frac{x+3y}{x-3y}$ знайти:

а) $f(1,0)$; б) $f(0,1)$; в) $f(3,-1)$; г) $f(1,-3)$; д) $f(-x,-y)$; е) $f(\frac{1}{x},\frac{1}{y})$.

13.2. Знайти та зобразити області визначення функцій двох змінних:

а) $z = x + \sin y$; б) $z = \frac{1}{x-y}$; в) $z = \sqrt{x-y}$; г) $z = \sqrt{x^2 - y^2}$;

д) $z = \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$; е) $z = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$; ж) $z = \ln\sqrt{\frac{y}{x}}$; з) $z = e^{xy}$;

і) $z = \arcsin(x+y)$; к) $z = \ln x - \ln y$; л) $z = \arccos\frac{x}{x+y}$.

13.3. Знайти поверхні рівня наступних функцій:

1) $u = x + y + 3z$; 2) $u = x^2 + y^2 + z^2$; 3) $u = (x^2 + y^2 + z^2)^2$

13.4. Знайти границі функцій:

а) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}$; б) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2 + xy + y^2}{x^2 + y^2}$; в) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{tg(x^2 + y^2)}{\sin(x^2 + y^2)}$;

г) $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}} (x^2 + y^2)\sin\frac{1}{x^2 + y^2}$; д) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} (1 + x^2 y^2)^{\frac{1}{x^2 + y^2}}$; е) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{e^{-\frac{1}{x^4 + y^4}}}{x^4 + y^4}$.

13.5. Знайти точки розриву функцій:

а) $z = \frac{x^2 + y^2}{y - 2x}$; б) $z = \frac{x+1}{y^2 - 4x}$; в) $z = \frac{1}{1 - e^{xy}}$; г) $z = \frac{1}{\ln(x^2 + y^2)}$.

13.6. Знайти частинні похідні першого порядку:

а) $z = x^3 + y^3 - 3xy$; б) $z = \frac{x-y}{x+y}$; в) $z = \ln\sqrt{\frac{x-y}{x+y}}$; г) $z = arctg\frac{xy-1}{x+y}$;

д) $z = \sin\frac{x}{y}\cos\frac{x}{y}$; е) $z = \ln\cos arctg\frac{x}{y}$.

13.7. Знайти похідні другого порядку функцій:

а) $z = y\ln x$; б) $z = xy + \sin(x+y)$; в) $z = \ln tg(x+y)$;

г) $z = arctg\frac{x+y}{1-xy}$; д) $z = x^2\ln(x+y)$; е) $z = \sin(x + \cos y)$.

13.8. Знайти повні диференціали першого порядку функцій:

а) $z = \ln(x^2 + y^2)$; б) $z = e^x(\cos y + x\sin y)$;

в) $z = ln\,tg\left(\frac{y}{x}\right);$ г) $z = arctg\,\frac{2(x+\sin y)}{4 - x\sin y};$

д) $z = ln(x + \sqrt{x^2 + y^2});$ е) $z = e^{x+y}(x\cos y + y\sin x).$

13.9. Знайти повні диференціали другого порядку таких функцій:

а) $z = \frac{y^2}{x^2};$ б) $z = y\ln x;$ в) $z = e^{xy};$ г) $z = \sin x \cdot \sin y;$

д) $z = \frac{1}{2}ln(x^2 + y^2);$ е) $z = cos(x + y).$

13.10. 1) Знайти $grad\ z$ в точці $(3;2)$, якщо $z = x^2 + y^2;$

2) Знайти $grad\ z$ в точці $(2;1)$, якщо $z = \sqrt{4 + x^2 + y^2};$

3) Знайти $grad\ z$ в точці $(x_0; y_0)$, якщо $z = arctg\,\frac{y}{x}.$

13.11. 1) Знайти похідну функції $z = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 + 1$ в точці $M(3;1)$ за напрямом $\overrightarrow{MN}$, де $N(6;5);$

2) Знайти похідну функції $z = arctg(xy)$ в точці $(1;1)$ за напрямом бісектриси I координатного кута;

3) Знайти похідну функції $u = arcsin\,\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ в точці $M(1;1;1)$ за напрямом $\overrightarrow{MN}$, де $N(3;2;3);$

4) Знайти похідну функції $u = ln(x^2 + y^2 + z^2)$ в точці $M(1;2;1)$ за напрямом вектора $\vec{r} = 2\vec{i} + 4\vec{j} + 4\vec{k}.$

13.12. Скласти рівняння дотичної площини та рівняння нормалі до заданих поверхонь у вказаних точках:

а) $z = 3 + x^2 - y^2$ у точці $M(1;2;0);$

б) $z = xy$ у точці $M(1;1;1);$

в) $z = x^2 - 2xy + y^2 - x + 2y$ у точці $M(1;1;1);$

г) $z = arctg\,\frac{y}{x}$ у точці $M(1;1;\frac{\pi}{4});$

д) $z = ln(x^2 + y^2)$ в точці $M(1;0;0);$

е) $z = \sin x \cos y$ в точці $M(\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4};\frac{1}{2}).$

13.13. Дослідити на екстремум функції:

а) $z = x^2 - xy + y^2 + 9x - 6y + 20;$ б) $z = 4(x - y) - x^2 - y^2;$

в) $z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2};$ г) $z = x^3 + y^3 - 3axy;$

д) $z = 4 - (x^2 + y^2)^{\frac{2}{3}};$ е) $z = \sqrt{(a - x)(a - y)(x + y - a)}.$

13.14. Намет має форму циліндра, завершеного прямою конічною верхівкою. При заданому об'ємі намету визначити його розміри так, щоб для його виготовлення було витрачено найменше матеріалу.

13.15. Знайти найменше і найбільше значення функції:

а) $z = x^2 - xy + y^2 - 4x$ в замкненій області, що обмежена прямими $x = 0, y = 0, 2x + 3y - 12 = 0;$

б) $z = xy + x + y$ в квадраті, що обмежений прямими $x = 1, x = 2, y = 2, y = 3;$

в) $z = xy$ в крузі $x^2 + y^2 \le 1;$

г) $z = x^2 + 3y^2 + x - y$ в трикутнику, що обмежений прямими $x = 1, y = 1, x + y = 1.$

13.16. 1) Знайти величину і напрям градієнта функції $u = \frac{1}{r}$, де $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, в точці $M(x_0; y_0; z_0)$.

2) Знайти величину і напрям градієнта функції $u = xyz$ в точці $M(2;1;1)$.

3) Знайти похідну функції $u = \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y + \frac{1}{6}z$ за напрямом вектора $\vec{l} = 6\vec{i} + 3\vec{j} - 6\vec{k}$ в довільній точці.

13.17. Довести, що функція $z = x^y y^x$ задовольняє рівняння: $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = (x + y + \ln z)z.$

13.18. Записати в полярних координатах вираз: $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

13.19. Довести, що $\frac{\partial^4 x}{\partial x^2 \partial y \partial z} = \frac{\partial^4 u}{\partial x \partial y \partial z \partial x}$, якщо $u = xz + e^{yz} + y$.

13.20. Довести, що площина, дотична до поверхні $xyz = a^3$ в будь-якій її точці утворює з координатними площинами тетраедр постійного об'єму. Знайти цей об'єм.