Тема 9

Неперервність функції

Нехай функція $y = f(x)$ визначена в т. x_0 і в δ-околі $u(x_o)$. Якщо нескінченно малому прирісту аргумента Δx в т x_0 відповідає нескінченно малий приріст функції $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_o)$, то функція $y = f(x)$ називається **неперервною** в т. x_0.

Це визначення на практиці еквівалентне виконанню трьох умов:

- функція $f(x)$ визначена в т. x_0 і $u(x_o)$;
- існують $\lim\limits_{x \to x_0 \pm 0} f(x)$; (9.1)
- виконується умова: $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_o + 0} f(x)$.

Якщо не виконується хоча б одна з цих умов, функція називається розривною в т. x_0. При цьому, якщо всі границі в умовах (9.1) скінченні, то розрив називається **розривом I роду**, якщо ж хоч одна з границь нескінченна, то розрив називається **розривом II роду**.

Функція, що неперервна в кожній точці відрізку $[a,b]$, називається **неперервною на цьому відрізку.**

Неперервна на відрізку $[a,b]$ функція $y = f(x)$ називається **гладкою** на $[a,b]$, якщо в кожній точці відрізка графік функціїї має дотичну.

Приклади розв'язання типових задач

Приклад 1.

Дослідити функцію $y = \begin{cases} 3x^2, x \le 1 \\ x + 2, x > 1 \end{cases}$ не неперервність в точці $x = 1$.

Розв'язання.

Функція визначена в точці $x = 1$ і в будь-якому околі цієї точки.

$f(1) = 3;\ \lim\limits_{x \to 1\text{-}0} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x<0}} 3x^2 = 3;\ \lim\limits_{x \to 1+0} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x>1}} (x + 2) = 3.$

Отже, функція неперервна в точці $x = 1$ (рис. 9.1).

Приклад 2.

Дослідити функцію $y = \begin{cases} 4 - x^2, x < 2 \\ -1, x \ge 2 \end{cases}$ на неперервність в точці $x = 2$.

Розв'язання.

$f(2) = -1;\ \lim\limits_{x \to 2\text{-}0} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x<2}} (4 - x^2) = 0;\ \lim\limits_{x \to 2+0} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x>2}} (-1) = -1.$

Отже, функція в точці $x = 2$ має розрив першого роду (рис. 9.2).

Стрибок функції $\delta = |-1 - 0| = 1$.

Приклад 3.

Дослідити функцію $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ на неперервність в точці $x=0.$

Розв'язання.

Функція $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ не визначена в точці $x=0$, але має в цій точці границю, тому $x=0$ - точка усувного розриву; досить покласти $f(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$, щоб функція стала неперервною. Отже, функція $f(x)=\begin{cases}\frac{\sin x}{x}, x\neq 0\\ 1, x=0\end{cases}$ є неперервною в точці $x=0$ (рис. 9.3).

Приклад 4.

Дослідити на неперервність функцію $f(x)=2^{\frac{1}{x+1}}$ в точці $x=-1$.

Розв'язання.

Функція не визначена в точці $x=-1$, тому функція в цій точці має розрив. Щоб визначити характер розриву, знайдемо границі зліва і справа:

$$\lim_{x\to -1-0}2^{\frac{1}{x+1}}=\begin{vmatrix}x=-1-\delta\\ \delta\to 0\end{vmatrix}=\lim_{\delta\to 0}2^{\frac{1}{-1-\delta+1}}=\left|2^{-\infty}\right|=+0;$$

$$\lim_{x\to -1+0}2^{\frac{1}{x+1}}=\begin{vmatrix}x=-1+\delta\\ \delta\to 0\end{vmatrix}=\lim_{\delta\to 0}2^{\frac{1}{-1+\delta+1}}=\left|2^{\infty}\right|=+\infty.$$

Отже, точка $x=-1$ є точкою розриву другого роду (рис. 9.4).

Приклад 5.

Дослідити на неперервність функцію $y=\sin\frac{1}{x}$ в точці $x=0$.

Розв'язання.

В точці $x=0$ функція $y=\sin\frac{1}{x}$ має розрив другого роду, тому що жодна з однобічних границь в цій точці не існує (рис. 9.5).

Приклад 6.

Знайти точки розриву функції $y=\frac{x}{x^2-1}$.

Розв'язання.

Функція $y = \dfrac{x}{x^2 - 1}$ розривна в точках $x = \pm 1$, тому що в цих точках вона не визначена. З'ясуємо вид розриву.

Так як функція непарна, будемо досліджувати тільки точку $x = 1$:

$$\lim_{x \to 1-0} \frac{x}{x^2-1} = \begin{vmatrix} x = 1-\delta \\ \delta \to 0 \end{vmatrix} = \lim_{\delta \to 0} \frac{1-\delta}{(1-\delta)^2 - 1} = \left| \frac{1}{-0} \right| = -\infty;$$

$$\lim_{x \to 1+0} \frac{x}{x^2-1} = \begin{vmatrix} x = 1+\delta \\ \delta \to 0 \end{vmatrix} = \lim_{\delta \to 0} \frac{1+\delta}{(1+\delta)^2 - 1} = \left| \frac{1}{+0} \right| = +\infty.$$

Тому $x = \pm 1$ - точки розриву другого роду (рис. 9.6).

Приклад 7.

Довести, що на відрізку $[1;2]$ рівняння $x^4 - x - 1 = 0$ має корінь.

Доведення.

Нехай $f(x) = x^4 - x - 1$. Так як $f(1) = -1$, $f(2) = 13$, то рівняння $x^4 - x - 1 = 0$ має корінь на відрізку $[1;2]$. Поділимо цей відрізок на 10 рівних частин і обчислимо послідовно $f(1{,}1) = -0{,}63\ldots, f(1{,}2) = -0{,}12\ldots, f(1{,}3) = +0{,}55\ldots$

Звідси корінь рівняння міститься між 1,2 і 1,3.

Приклад 8.

Розв'язати нерівність $x^2 - 3x + 2 > 0$.

Розв'язання.

Нехай $f(x) = x^2 - 3x + 2$. Коренями рівняння $x^2 - 3x + 2 = 0$ є числа $x_1 = 1$, $x_2 = 2$. Тому розглянемо проміжки $(-\infty;1);(1;2);(2;+\infty)$.

Оскільки $f(0) = 2 > 0$, $f(\frac{3}{2}) = -\frac{1}{4} < 0$, $f(3) = 2 > 0$, то розв'язком нерівності є інтервали $(-\infty;1)$ і $(2;+\infty)$.

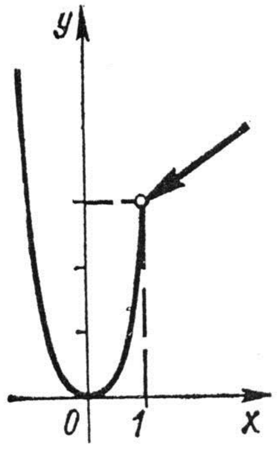


Рис. 9.1

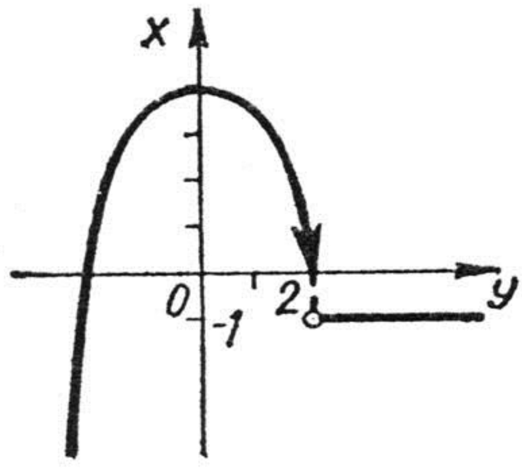


Рис. 9.2

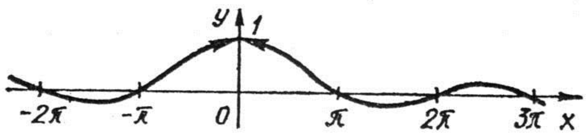


Рис. 9.3

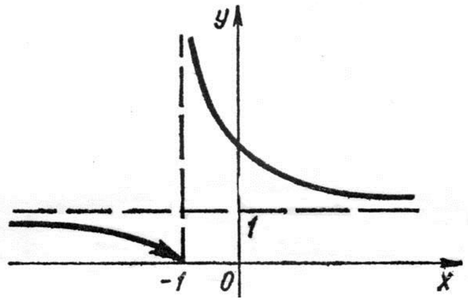


Рис. 9.4

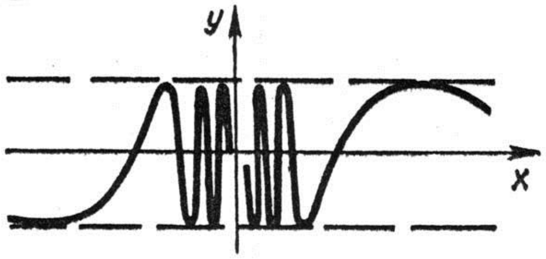


Рис. 9.5

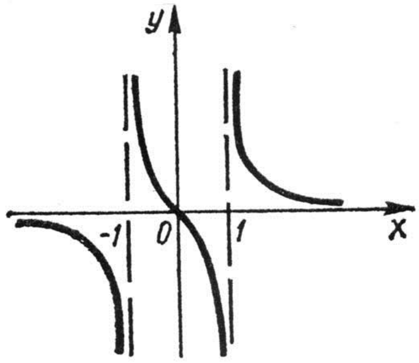
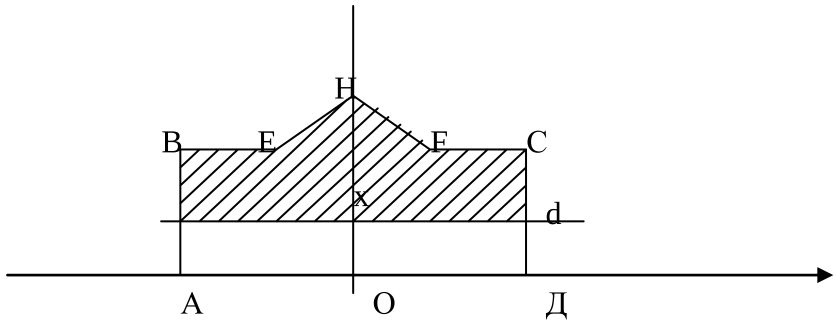


Рис. 9.6

Задачі

9.1. Фігуру *ABEHFCD*, зображену на рисунку, перетинає пряма *d*, яка паралельна її основі.



1) Встановіть залежність між довжиною відрізка, отриманого в перерізі фігури, і відстанню *x* від вершини до прямої *d*, якщо *AD=OH=4*см, *EF=AB=2*см. Побудуйте графік цієї функції. Чи буде вона неперервною?

2) Встановіть залежність між площею основи частини фігури, яка лежить вище прямої *d*, і відстанню x. Побудуйте графік функції. Чи буде вона неперервною?

9.2. Довести, що функції неперервні:

а) $y = 2x;$ *б)* $y = \sin x;$ *в)* $y = \dfrac{3x^2 - 2}{2x^2 + 7}$ в точці $x_0=3$;

г) $y=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ в точці $x_0=2$; д) $y=\dfrac{x^2-5x+4}{x^2+x-2}$ в точці $x_0=2$.

9.3. Довести, що функція розривна в точці x_0; побудувати графік функції, якщо:

а) $f(x)=\begin{cases} x+1, & x>0 \\ x^2, & x\le 0, \end{cases}$ $x_0=0$ б) $f(x)=\begin{cases} 1/x, & x\ne 0 \\ 0, & x=0, \end{cases}$ $x_0=0$

9.4. Знайти точки розриву функції, встановити їх рід, знайти стрибки функції в точках розриву 1-го роду, побудувати графік функції:

а) $y=\begin{cases} 1/x-1, & x<0 \\ (x+1)^2, & 0\le x\le 2; \\ 1-x, & 2<x. \end{cases}$ б) $y=\dfrac{|x+2|}{x+2}$;

в) $y=\dfrac{1}{\cos x}$; г) $y=\dfrac{x}{\sin x}$.

9.5. Встановити, чи існує значення параметра *a*, при якому функція неперервна в точці x_0, якщо:

а) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1+x}{1+x^3}, & x\ne -1 \\ a, & x=-1, \end{cases}$ $x_0=-1$

б) $f(x)=\begin{cases} ax^2+1, & x>0 \\ -x, & x\le 0, \end{cases}$ $x_0=0$

в) $f(x)=\begin{cases} \cos x, & x\le 0 \\ a(x-1), & x>0, \end{cases}$ $x_0=0$

9.6. Визначити точки розриву функції, поведінку функції в околі точці розриву. Зробити ескіз графіка функції в околі точки розриву:

а) $y=\dfrac{1}{1-x}$; б) $y=\dfrac{6}{x^2-2x-3}$;

в) $y=\dfrac{3^x+1}{x^2-1}$; г) $y=\dfrac{2x+x^2}{x}$;

д) $y=\dfrac{x^2+3x+2}{2x^2+x-6}$; ж) $y=\dfrac{x}{1+\cos x}$;

е) $y=4^{\frac{1}{3-x}}+2$; є) $y=\dfrac{1}{1+2^{tgx}}$;

з) $y=arctg\,\dfrac{x-1}{x+1}$; к) $y=\dfrac{5}{lg|x+1|}$;

л) $y=\dfrac{1}{x}ln\dfrac{1+x}{1-x}$; м) $y=(x+4)arctg\,\dfrac{1}{x}$;

н) $y=\dfrac{|x-1|}{arctg(x-1)}$.

9.7. Використовуючи властивості неперервних функцій доведіть, що наступні рівняння мають розв’язок на вказаному проміжку:

а) $x^3+3x+1=0, \quad -1\le x\le 0;$

б) $x^6-5x+1=0, \quad 1\le x\le 2;$

в) $\sin x-x+1=0, \quad 0\le x\le \pi;$

г) $x=2^{-x}, \quad 0\le x\le 1;$

9.8. Розв’язати нерівності:

а) $(x-2)(x+1)(x-5)<0;$ *б)* $\dfrac{5x-2}{x+1}<5;$

в) $\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{2}{x+3}<\dfrac{3}{x+2};$ *г)* $\dfrac{\sqrt{x}-2}{(x-1)(x+3)}>0;$

д) $x+4<\sqrt{x+46};$ *ж)* $(1+x)\sqrt{1+x^2}>1-x^2.$

9.9. Функція визначена наступним чином: якщо x – раціональне число, то $f(x)=0;$ якщо x – ірраціональне число, то $f(x)=x$. При яких x функція неперервна?

9.10. Довести, що рівняння $x\cdot 2^x=1$ має хоча б один додатній розв’язок, менший за 1.