Тема 4

Лінійна алгебра

Система m лінійних рівнянь з n невідомими має вигляд:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{4.1}$$

де

$x_j,\ j = 1 \div n$ - невідомі;

$a_{ij},\ i = 1 \div m,\ \ j = 1 \div n$ - коефіцієнти системи;

$b_j,\ j = 1 \div n$ - вільні члени.

Якщо всі $b_i = 0$, то система називається **однорідною,** в противному випадку – **неоднорідною**.

Множину n чисел $x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0$ називають **розв'язком системи** (4.1), якщо кожне з рівнянь системи після підстановки в нього цих чисел замість невідомих $x_1, x_2, ..., x_n$ перетворюється в рівність.

Множина розв'язків системи (4.1) може бути порожньою, мати єдиний елемент, бути нескінченною. В першому випадку кажуть, що система **несумісна**, в інших двох – **сумісна**. Якщо розв'язок єдиний, то кажуть, що система **визначена і сумісна**.

Коефіцієнти системи утворюють **прямокутну** матрицю A порядку $m \times n$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{4.2}$$

Матриця порядку $n \times n$ називається **квадратною**:

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{4.3}$$

Елементи a_{ii}, де $i = 1 \div n$ квадратної матриці називаються **діагональними**.

Квадратна матриця, в якій всі елементи крім діагональних рівні 0, називається **одиничною** і позначається буквою E.

Дві матриці $A(a_{ij})$ і $B(b_{ij})$ однакового порядку називаються **рівними**, якщо $a_{ij} = b_{ij},\quad \forall i, j$.

Алгебраїчною сумою матриць $A(a_{ij})$ і $B(b_{ij})$ однакового порядку називається матриця $C(c_{ij})$ такого ж порядку, причому:

$$c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}, \quad \forall i, j.$$

Добутком матриці $A(a_{ij})$ **на скаляр** λ називається матриця $D(d_{ij})$ такого ж порядку, причому:

$$d_{ij} = \lambda a_{ij}, \quad \forall i, j.$$

Добутком матриці $A(a_{ij})$ **порядку** $m \times n$ **на матрицю** $B(b_{ij})$ **порядку** $n \times p$ називається матриця $C(c_{ij})$ порядку $m \times p$:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{ki}, \quad i = 1 \div m, \quad j = 1 \div p. \tag{4.4}$$

Матриці A і B називаються **переставними**, якщо

$$A \cdot B = B \cdot A.$$

Якщо в матриці $A(a_{ij})$ поміняти місцями рядки зі стовпчиками, то отримана матриця називається **транспонованою** до $A(a_{ij})$ і позначається $A^T(a_{ij})$.

Квадратна матриця називається **симетричною**, якщо

$$A^T = A.$$

Числовою характеристикою квадратної матриці $A(a_{ij})$ порядку $n \times n$ називається **визначник** або **детермінант** порядку n, який представляє собою алгебраїчну суму $n!$ доданків вигляду:

$$\det A = |A| = \sum_{P_n} (-1)^{inv(i_1, i_2, \ldots, i_n)} \cdot a_{1i_1} \cdot a_{2i_2} \ldots a_{ni_n}. \tag{4.5}$$

Якщо $|A| \neq 0$, матриця A називається **невиродженою**, в противному випадку – **виродженою**.

Для квадратної матриці порядку 2х2 з визначення випливає:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}. \tag{4.6}$$

Визначник третього порядку обчислюють за правилом трикутника (рис. 4.1) та Саррюса (рис. 4.2):

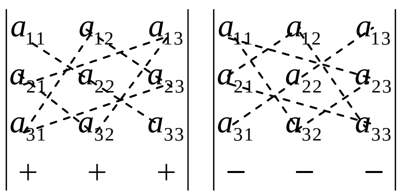

Рис. 4.1 (правило трикутника)

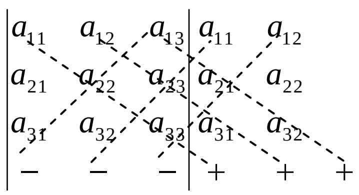

Рис. 4.2 (Правило Саррюса)

Для обчислення визначників вищих порядків використовують **властивості визначників**:

$1.^0$ $|A| = |A^T|$.

$2.^0$ Перестановка двох стовпчиків або двох рядків визначника рівносильна множенню його на (-1).

$3.^0$ Якщо визначник має два однакових стовпчика або рядка, то він дорівнює нулю.

$4.^0$ Спільний множник *к* всіх елементів рядка або стовпчик можна виносити за знак визначника.

$5.^0$ Якщо всі елементи рядка або стовпчика рівні 0, то визначник теж дорівнює 0 (це наслідок властивості 4^0 у випадку $\kappa=0$).

$6.^0$ Якщо у визначнику відповідні елементи двох рядків або стовпчиків пропорційні, то визначник дорівнює 0.

$7.^0$ Якщо до елементів деякого стовпчика (або рядка) додати відповідні елементи іншого стовпчика (або рядка), помножені на будь-який спільний множник, то величина визначника не змінюється. Наприклад,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}+ka_{12} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+ka_{22} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}+ka_{32} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Мінором M_{ij} елемента a_{ij} визначника порядка $n \times n$ називається визначник порядка $(n-1)\times(n-1)$, отриманий з даного визначника шляхом викреслювання i-го рядка та j-го стовпчика.

Алгебраїчним доповненням A_{ij} елемента a_{ij} називається мінор цього елемента, взятий зі знаком $(-1)^{i+j}$, тобто:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij} \tag{4.7}$$

$8.^0$

$$det\,A = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot A_{ik},\ i = 1 \div n,$$

$$або \tag{4.8}$$

$$det\,A = \sum_{k=1}^{n} a_{ki} \cdot A_{ki},\ i = 1 \div n.$$

Матриця A^{-1} називається **оберненою до квадратної матриці *A***, якщо:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E. \tag{4.9}$$

Теорема 4.1.

Для існування оберненої матриці A^{-1} необхідно і достатньо, щоб матриця *A* була невиродженою, при цьому

$$A^{-1} = \frac{1}{det\,A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}, \qquad (4.10)$$

де A_{ij} - алгебраїчні доповнення елементів a_{ij} визначника матриці *A* (див. (4.7)).

Систему (4.1) можна представити в матричному вигляді:

$$AX = B, \qquad (4.11)$$

де

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad (4.12)$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ . \\ b_n \end{pmatrix}. \qquad (4.13)$$

Теорема 4.2.

Невироджена квадратна неоднорідна система лінійних рівнянь має єдиний розв'язок, який задається у вигляді

$$X = A^{-1} \cdot B. \qquad \mathbf{(4.14)}$$

Введемо позначення для квадратної системи порядку $n \times n$ неоднорідних лінійних рівнянь:

Δ - визначник матриці коефіцієнтів системи;

Δ_{x_i} - визначник Δ, в якому стовпчик з коефіцієнтів при невідомих x_i замінений на стовпчик з вільних членів.

Теорема 4.3 (Крамера).

Якщо система порядку $n \times n$ невироджена, то вона має єдиний розв'язок, який задається формулою:

$$x_i = \frac{\Delta_{x_i}}{\Delta}, \quad i = 1 \div n \qquad \mathbf{(4.15)}$$

Якщо $\Delta = 0$, а хоча б один з визначників Δ_{x_i} не дорівнює 0, то система несумісна.

Якщо $\Delta = 0$ і всі Δ_{x_i}=0, тобто $\Delta = \Delta_{x_1} = \Delta_{x_2} = \ldots = \Delta_{x_n} = 0$, то система може бути несумісною або мати безліч розв'язків.

Одним з найпоширеніших методів розв’язування систем лінійних рівнянь є метод послідовного виключення невідомих, або **метод Гаусса**. Цей метод можна використовувати при розмірах системи $m \times n$ та $n \times n$.

Спочатку нормують перше рівняння, поділивши його коефіцієнти на a_{11}. Утворене рівняння множать на перші коефіцієнти усіх інших рівнянь і послідовно віднімають від решти рівнянь. У результаті першу змінну буде виключено з усіх рівнянь, крім першого. На наступному етапі розв’язання така процедура застосовується до решти n-1 рівнянь, з яких виключається друга змінна. Процес йде доти, поки після n кроків система не буде зведена до трикутного вигляду.

Рангом матриці *A* (4.2) називається найвищий порядок її мінорів, відмінних від нуля і позначається:

$$rangA, \text{ або } r(A),$$

причому
$$0 \le r(A) \le min(m,n) \tag{4.16}$$

Мінор, порядок якого визначає ранг матриці, називається **базисним.** У матриці може бути кілька базисних мінорів.

Ранг матриці можна знаходити так: якщо відшукано відмінний від нуля мінор k-го порядку, то ранг матриці не менший k. При цьому, якщо всі мінори $(k+1)$-го порядку дорівнюють 0, то ранг матриці k. Якщо хоча б один з мінорів $(k+1)$-го порядку ненульовий, то досліджується мінор $(k+2)$-го порядку і т.д.

Теорема 4.4.

Ранг матриці не зміниться, якщо над нею виконати елементарні перетворення:

1) **переставити місцями два рядки (стовпці);**
2) **помножити кожен елемент рядка (стовпця) на множник $\lambda \ne 0$;**
3) **додати до елементів рядка (стовпця) відповідні елементи будь-якого іншого рядка (стовпця), помножені на одне й те саме число.**

Скориставшись елементарними перетвореннями, матрицю можна звести до вигляду, коли всі її елементи, крім $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{rr}$, де $r \le min(m,n)$, дорівнюють нулю. Тоді ранг дорівнює r.Розглянемо основну матрицю *A* (4.2) і розширену матрицю *B* (4.17) системи:

$$B = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right). \tag{4.17}$$

Теорема 4.5 (Кронекера-Капеллі).

Для того, щоб система лінійних рівнянь (4.1) була сумісною, необхідно і достатньо, щоб ранг основної матриці *A* дорівнював рангу розширеної матриці B.

Якщо $rangA = rangB = n$, **то система має єдиний розв’язок.**

Якщо $rangA = rangB < n$, **то система (4.1) має безліч розв’язків.**

Зауваження.

Однорідна система лінійних рівнянь (4.1) завжди сумісна. Якщо $rangA = n$ $(det\,A \neq 0)$, то маємо єдиний **тривіальний** розв'язок $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0.$

Якщо $rangA = < n$ $(det\,A = 0)$, то маємо безліч розв'язків.

Приклади розв'язання типових задач

Приклад 1.

Дано: матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Знайти: матрицю $C = AB$.

Розв'язання.

Маємо за формулами (4.4):

$$C = \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 2\cdot(-2) & 1\cdot 2 + 2\cdot 0 & 1\cdot 3 + 2\cdot(-1) \\ 0\cdot 1 + (-1)\cdot(-2) & 0\cdot 2 + (-1)\cdot 0 & 0\cdot 3 + (-1)\cdot(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Відповідь: $C = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Приклад 2.

Знайти $2A^2 + 3A + 5E$, якщо $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, E – одинична матриця.

Розв'язання.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 6 & 5 \\ 8 & 11 & 6 \\ 9 & 8 & 10 \end{pmatrix};$$

$$2A^2 = \begin{pmatrix} 20 & 12 & 10 \\ 16 & 22 & 12 \\ 18 & 16 & 20 \end{pmatrix};\ 3A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 6 \\ 3 & 9 & 3 \\ 12 & 3 & 3 \end{pmatrix};$$

$$5E = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix};\ 2A^2 + 3A + 5E = \begin{pmatrix} 28 & 15 & 16 \\ 19 & 36 & 15 \\ 30 & 19 & 28 \end{pmatrix}.$$

Відповідь: $\begin{pmatrix} 28 & 15 & 16 \\ 19 & 36 & 15 \\ 30 & 19 & 28 \end{pmatrix}$.

Приклад 3.

Дано: матриця $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Знайти: матрицю A^{-1}.

Розв'язання.

$$det\, A=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \\ 3 & -6 & 1 \end{vmatrix}=15\neq 0,$$

$$A_{11}=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=1;\ A_{12}=-\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}=7;\ A_{13}=\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}=-3;$$

$$A_{21}=-\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=-2;\ A_{22}=\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}=1;\ A_{23}=-\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}=6;$$

$$A_{31}=\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=4;\ A_{32}=-\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}=-2;\ A_{33}=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}=3.$$

Тоді $$A^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{15} & -\frac{2}{15} & \frac{4}{15} \\ \frac{7}{15} & \frac{1}{15} & -\frac{2}{15} \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$ (за формулою (4.10)).

Переконуємось, що $$A\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=E$$ (за (4.9)).

Приклад 4.

Розв'язати за формулами Крамера систему рівнянь:

$$\begin{cases} x-y+z=0; \\ 2x+y+z=5; \\ 2y-z=3. \end{cases}$$

Розв'язання.

Маємо за формулами (4.15):

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix}=-1,\ \Delta_x=\begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}=-1,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 1, \ \Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 1.$$

Отже, $x = 1, y = 2, z = 1.$

Відповідь: $(1;2;1)$.

Приклад 5.

Розв’язати методом Гаусса систему рівнянь:

$$\begin{cases} x - y + 2z = -1; \\ -x + 2y - 3z = 3; \\ 2x - y + 3z = 2. \end{cases}$$

Розв’язання.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -3 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 2 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right).$$

Таким чином,

$$\begin{cases} x - y + 2z = -1; \\ 0 \cdot x + y - z = 2; \\ 0 \cdot x + 0 \cdot y + 0 \cdot z = 2. \end{cases}$$

В останньому рівнянні 0=2, тому система несумісна.

Відповідь: система несумісна.

Приклад 6.

Розв’язати систему рівнянь матричним методом:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 9 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 14. \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 16 \end{cases}$$

Розв’язання.

Запишемо систему у вигляді $A \cdot X = B,$ де

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 9 \\ 14 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Тоді розв’язок матричного рівняння має вигляд: $X = A^{-1} \cdot B.$

Знайдемо A^{-1}:

$$det\, A = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -6 \neq 0\,,$$

$$A^{-1}=-\frac{1}{6}\begin{pmatrix}14 & 5 & -13\\ 10 & -4 & 8\\ -2 & 1 & 1\end{pmatrix}.$$

Звідки $X=-\frac{1}{6}\begin{pmatrix}14 & 5 & -13\\ 10 & -4 & 8\\ -2 & 1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}9\\ 14\\ 16\end{pmatrix}=-\frac{1}{6}\begin{pmatrix}-12\\ -18\\ 12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\ 3\\ -2\end{pmatrix}.$

Відповідь: $x_1=2; x_2=3; x_3=-2.$

Приклад 7.

Знайти ранги матриць:

а) $\begin{pmatrix}1 & -2 & 0 & 4\\ -1 & 3 & -1 & 2\\ 0 & 1 & -1 & 6\end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix}4 & 3 & 2 & 2\\ 0 & 2 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 3 & 3\end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix}1 & 1 & 2 & 3 & -1\\ 2 & -1 & 0 & -4 & -5\\ -1 & -1 & 0 & -3 & -2\\ 6 & 3 & 4 & 8 & -3\end{pmatrix}$.

Розв’язання.

а)

$$\left(\begin{array}{|cc|cc}\hline 1 & -2 & 0 & 4\\ -1 & 3 & -1 & 2\\ \hline 0 & 1 & -1 & 6\end{array}\right);$$

Виділений у матриці мінор другого порядку $M_2=\begin{vmatrix}1 & -2\\ -1 & 3\end{vmatrix}\neq 0,$ отже, ранг матриці не менше 2.

Обвідними мінорами третього порядку є:

$$M_3=\begin{vmatrix}1 & -2 & 0\\ -1 & 3 & -1\\ 0 & 1 & -1\end{vmatrix}=0, M_3^*=\begin{vmatrix}1 & -2 & 4\\ -1 & 3 & 2\\ 0 & 1 & 6\end{vmatrix}=0.$$

Отже, за означенням ранг матриці 2.

б) з елементів четвертого стовпця віднімемо елементи третього стовпця:

$$\begin{pmatrix}4 & 3 & 2 & 2\\ 0 & 2 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 3 & 3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}4 & 3 & 2 & 0\\ 0 & 2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 3 & 0\end{pmatrix};$$

закреслимо четвертий стовпець:

$$\begin{pmatrix}4 & 3 & 2 & 2\\ 0 & 2 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 3 & 3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}4 & 3 & 2\\ 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix};$$

так як $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 24 \neq 0$, то ранг матриці 3.

в) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & -4 & -5 \\ -1 & -1 & 0 & -3 & -2 \\ 6 & 3 & 4 & 8 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & -4 & -5 \\ -1 & -1 & 0 & -3 & -2 \\ 4 & 1 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & -2 & -6 \\ 3 & 0 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim$

$\sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

Над даною матрицею виконані елементарні перетворення (4.4). Отримали три одиниці. Отже, ранг матриці 3.

Відповідь: а) *2*; б) *3*; в) *3*.

Приклад 8.

Дослідити на сумісність системи рівнянь:

а) $\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ 5x_1 + 3x_2 + 8x_3 + x_4 = 1 \end{cases}$; б) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 3 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 5 \end{cases}$.

Розв'язання.

а) Розширена матриця системи:

$$A^* = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 5 & 3 & 8 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Знайдемо її ранг (теорема 4.4):

$$A^* \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 5 & -2 & 4 & -2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right).$$

Отже, $r(A) = r(A^*) = 2$. Тому система сумісна, причому має безліч розв'язків, оскільки ранг менше кількості невідомих (теорема 4.5).

б) Сумісність системи перевіримо за теоремою Кронекера-Капеллі. Знайдемо ранги основної і розширеної матриць системи:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}; A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & 5 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -5 & 4 & 1 \\ 0 & -5 & 4 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -5 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Отже, $r(A) = 2;\ r(A^*) = 3.$

Таким чином, система несумісна.

Відповідь: а) сумісна; б) несумісна.

Приклад 9.

Розв'язати однорідні системи лінійних алгебраїчних рівнянь:

а) $\begin{cases} x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 0 \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 = 0; \\ x_1 - 7x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0. \\ 5x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$

Розв'язання.

а) Визначник системи:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & -7 & 2 \end{vmatrix} = 10 + 4 + 42 + 15 + 7 - 16 = 62 \neq 0,$$

тому система має єдиний нульовий розв'язок $x_1 = x_2 = x_3 = 0.$

б) Так як

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & -3 \\ 5 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -4 + 15 + 6 - 20 + 6 - 3 = 0,$$

то система має безліч розв'язків. Оскільки $rang\,A = 2,\quad n = 3,$ розглянемо, наприклад, два перших рівняння системи:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases}.$$

Оскільки визначник $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 4 + 3 = 7 \neq 0,$ то маємо систему:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = -2x_3 \\ 3x_1 + 2x_2 = 3x_3 \end{cases}.$$

Розв'яжемо останню систему за формулами Крамера:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -2x_3 & -1 \\ 3x_3 & 2 \end{vmatrix} = -4x_3 + 3x_3 = -x_3;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & -2x_3 \\ 3 & 3x_3 \end{vmatrix} = 6x_3 + 6x_3 = 12x_3;$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-x_3}{7}; \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{12x_3}{7}.$$

Припустимо, що $x_3 = 7k$, де $k \in R$, маємо: $x_1 = -k; \quad x_2 = 12k.$

Відповідь: а) $x_1 = x_2 = x_3 = 0;$ б) $x_1 = -k; \quad x_2 = 12k; x_3 = 7k$, де $k \in R.$

Задачі

4.1. Виписати матрицю системи лінійних рівнянь

$$a)\ \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 5 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 5 \end{cases} \qquad b)\ \begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ 2x_2 + 2x_3 = 2 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = -4 \end{cases}$$

4.2. Виконати дії над матрицями:

$$a)\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix};$$

$$б)\ 2 \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \qquad г)\ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix};$$

$$в)\ \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \qquad д)\ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix};$$

4.3. Для матриць A і B знайти $(A+3B)^2$, якщо

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & -8 \\ -3 & 6 & 9 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 4 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

4.4. Знайти $A^2 + A + E$, якщо

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

4.5. Переконатися, що $A \cdot A^{-1} = E$, якщо :

а) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, б) $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 8 & 4 & -1 \end{pmatrix}$.

4.6. Знайти ранги матриць:

а) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 7 & 3 & 5 \\ 15 & 7 & 11 \\ 11 & 5 & 8 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 5 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ -3 & 1 & 2 & -4 & 1 \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & 3 & 0 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} a & 5a & -a \\ 2a & a & 10a \\ -a & -2a & -3a \end{pmatrix}$.

4.7. Обчислити визначники:

а) $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 0 \end{vmatrix}$; *б)* $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ -\cos\alpha & \sin\alpha \end{vmatrix}$ *в)* $\begin{vmatrix} x-y & x+y \\ x+y & x-y \end{vmatrix}$; *г)* $\begin{vmatrix} 1 & \log_b a \\ \log_a b & 1 \end{vmatrix}$

д) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix}$; *е)* $\begin{vmatrix} -x & 1 & x \\ 0 & -x & -1 \\ x & 1 & -x \end{vmatrix}$; *ж)* $\begin{vmatrix} a & -a & a \\ a & a & -a \\ a & -a & -a \end{vmatrix}$;

з) $\begin{vmatrix} 1 & n! & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ n+1 & (n+1)! & 1 \end{vmatrix}$; *к)* $\begin{vmatrix} 2\cos^2\frac{\alpha}{2} & \sin\alpha & 1 \\ 2\cos^2\frac{\beta}{2} & \sin\beta & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$; *л)* $\begin{vmatrix} \cos 90^0 & \cos 135^0 & \sin 15^0 \\ \sin 0^0 & \sin 135^0 & tg 15^0 \\ tg 180^0 & tg 45^0 & \cos 15^0 \end{vmatrix}$;

4.8. Розв’язати рівняння:

а) $\begin{vmatrix} x^2 & 4 & 9 \\ x & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$; *б)* $\begin{vmatrix} -x & 1 & x \\ 0 & -x & -1 \\ x & 1 & -x \end{vmatrix} = -2x$;

в) $\begin{vmatrix} x^2 & 3 & 2 \\ x & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0$; *г)* $\begin{vmatrix} 3^x & 3^{x+1} \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 108$;

д) $\begin{vmatrix} x & \lg(2^x + x + 1) \\ 1 & 1 - \lg 5 \end{vmatrix} = 0$; *е)* $\begin{vmatrix} \sin x & 1 \\ 1 & 2\cos x \end{vmatrix} = 0$;

4.9. Розв’язати нерівності:

а) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ x & 10 & 12 \\ 5 & x & 12 \end{vmatrix} > -14$; *б)* $\begin{vmatrix} 4^x & 2 \\ 2^x & 1 \end{vmatrix} < 3$;

$$\text{в)}\quad \begin{vmatrix} \log_2(3x-1) & \log_2(2-x) \\ 1 & 1 \end{vmatrix} < 0$$

4.10.Обчислити алгебраїчні доповнення A_{14} і A_{32} для визначника:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

4.11. Використовуючи властивості визначників, обчислити визначники:

$$\text{а)}\quad \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}; \qquad \text{б)}\quad \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 \\ 5 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 6 & 3 \\ 1 & 5 & -1 & 2 \end{vmatrix}.$$

4.12. Розв’язати за правилом Крамера системи рівнянь:

$$\text{а)}\ \begin{cases} 5x+2y=4 \\ 7x+4y=8 \end{cases}; \quad \text{б)}\ \begin{cases} 2x_1+3x_2=1 \\ 3x_1+5x_2=4 \end{cases}; \quad \text{в)}\ \begin{cases} 3x_1+x_2=4 \\ 2x_1+4x_2=1 \end{cases};$$

$$\text{г)}\ \begin{cases} 2x-4y+3z=1 \\ x-2y+4z=3 \\ 3x-y+5z=2 \end{cases}; \quad \text{д)}\ \begin{cases} 2x-y+z=2 \\ 3x+2y+2z=-2; \\ x-2y+z=1 \end{cases}$$

$$\text{е)}\ \begin{cases} 2x_1+3x_2+8x_4=0 \\ x_2-x_3+3x_4=0 \\ x_3+2x_4=1 \\ x_1+x_4=-24 \end{cases}; \quad \text{ж)}\ \begin{cases} 2x_1+x_2-x_3+x_4=5 \\ x_1+3x_3-x_4=-2 \\ 2x_2+x_3-5x_4=3 \\ -x_1+2x_3=-3 \end{cases}$$

4.13. Розв’язати за методом Гаусса системи рівнянь 4.8: г), д), е), ж).

4.14. Розв’язати системи рівнянь матричним методом:

$$\text{а)}\ \begin{cases} 2x_1+x_2-3x_3=3 \\ x_1+x_2+2x_3=2 \\ -x_1+x_2+x_3=0 \end{cases}; \qquad \text{б)}\ \begin{cases} 2x_1-4x_2+x_3=3 \\ x_1-5x_2+3x_3=-1. \\ x_1-x_2+x_3=1 \end{cases}$$

4.15. Дослідити на сумісність системи:

$$\text{а)}\ \begin{cases} x_1+5x_2-x_3=3 \\ 2x_1+4x_2-3x_3=2 \\ 3x_1-x_2-3x_3=-7 \end{cases}; \qquad \text{б)}\ \begin{cases} 2x_1-3x_2+x_3=2 \\ 3x_1+x_2-3x_3=1 \\ 5x_1-2x_2-2x_3=4 \end{cases};$$

в) $\begin{cases} x_1+5x_2+4x_3+3x_4=1 \\ 2x_1-x_2+2x_3-x_4=0 \\ 5x_1+3x_2+8x_3+x_4=1 \end{cases}$; г) $\begin{cases} 2x_1-x_2+x_3-5x_4=4 \\ 2x_1+x_2+2x_3-x_4=1 \\ 6x_1-x_2+4x_3-11x_4=6 \end{cases}$.

4.16. Розв'язати однорідні системи рівнянь:

а) $\begin{cases} 3x_1+4x_2-x_3=0 \\ x_1-3x_2+5x_3=0 \\ 4x_1+x_2+4x_3=0 \end{cases}$; б) $\begin{cases} 2x_1-4x_2+5x_3=0 \\ x_1+2x_2-3x_3=0 \\ 3x_1-x_2+2x_3=0 \end{cases}$;

в) $\begin{cases} 2x_1-5x_2+2x_3=0 \\ x_1+4x_2-3x_3=0 \end{cases}$.

4.17. Розв'язати системи рівнянь:

а) $\begin{cases} 3x_1-2x_2+x_3-x_4=0 \\ 3x_1-2x_2-x_3+x_4=0 \\ x_1-x_2+2x_3+5x_4=0 \end{cases}$; б) $\begin{cases} 4x_1+2x_2-3x_3+2x_4=3 \\ 2x_1+3x_2-2x_3+3x_4=2 \\ 3x_1+2x_2-3x_3+4x_4=1 \end{cases}$;

в) $\begin{cases} x_1+2x_2+4x_3-3x_4=0 \\ 3x_1+5x_2+6x_3-4x_4=0 \\ 4x_1+5x_2-2x_3+3x_4=0 \\ 3x_1+8x_2+24x_3-19x_4=0 \end{cases}$; г) $\begin{cases} x_1+2x_2+x_3+x_4=5 \\ x_2+x_3+x_4=3 \\ x_1+x_2=2 \end{cases}$.

4.18. Розв'язати систему рівнянь для всіх значень параметра t:

$$\begin{cases} 2x_1-x_2+3x_3=-7 \\ x_1+2x_2-6x_3=t \\ tx_1+5x_2-15x_3=8 \end{cases}.$$

4.19. При яких значеннях a однорідна система рівнянь має ненульові розв'язки:

$$\begin{cases} -ax_1+x_2+\ldots+x_n=0 \\ x_1-ax_2+\ldots+x_n=0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_1+x_2+\ldots-ax_n=0 \end{cases} ?$$

4.20. Розв'язати систему матричних рівнянь:

$$\begin{cases} X+Y=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ 2X+3Y=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{cases}.$$

4.21. Дослідити дану систему рівнянь і знайти її загальний розв'язок в залежності від значень параметра t:

$$\begin{cases} 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 3 \\ 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 7x_4 = 1 \\ 3x_1 - 6x_2 - x_3 - 5x_4 = 9 \\ 7x_1 - 3x_2 + 7x_3 + 17x_4 = t \end{cases}.$$

4.22. Знайти розв'язки системи з параметром t:

$$\begin{cases} tx_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + tx_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + tx_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 + tx_4 = 1 \end{cases}.$$

4.23. Знайти розв'язки системи для всіх значень a:

$$\begin{cases} ax_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + ax_2 + x_3 = 0. \\ x_1 + x_2 + ax_3 = 0 \end{cases}$$

4.24. Довести, що якщо система рівнянь

$$\begin{cases} a_1x_1 + b_1x_2 + c_1x_3 + d_1 = 0 \\ a_2x_1 + b_2x_2 + c_2x_3 + d_2 = 0 \\ a_3x_1 + b_3x_2 + c_3x_3 + d_3 = 0 \\ a_4x_1 + b_4x_2 + c_4x_3 + d_4 = 0 \end{cases} \text{ сумісна, то } \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} = 0.$$

4.25. Дослідити на сумісність, знайти загальний і один частковий розв'язок системи рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 - 21x_5 = 0 \\ x_1 + x_3 - 4x_4 - 3x_5 = 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 3x_4 - 12x_5 = 0 \end{cases}.$$