Тема 15. Ряди

Вираз
$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n \qquad (15.1)$$
називають **рядом**; u_n **- загальним членом ряду;**
$$S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n \qquad (15.2)$$
частинною сумою ряду.

Якщо
$$\lim_{n\to\infty} S_n = S, \qquad (15.3)$$
то ряд (15.1) **збіжний** і S - **сума** цього ряду.

Якщо
$$\lim_{n\to\infty} S_n = \infty, \text{ то} \qquad (15.4)$$
ряд (15.1) **розбіжний.**

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} aq^n$ збіжний при $|q| < 1$ і $S = \dfrac{a}{1-q}$; розбіжний при $|q| > 1$.

Необхідна умова збіжності: якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ збіжний, то
$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0 \qquad (15.5)$$

Достатня умова розбіжності: якщо $\lim_{n\to\infty} u_n \neq 0$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ розбіжний.

Ознака порівняння: нехай ряди $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ і $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ знакододатні, причому $u_n \le v_n$, де $n = 1, 2, \ldots$, тоді якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ збіжний, то збіжний і ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, а якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ розбіжний, то розбіжний і ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$.

Гранична ознака порівняння: нехай ряди $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ та $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ знакододатні, причому існує скінчена границя
$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = a \neq 0, \qquad (15.6)$$
тоді ряди або одночасно збіжні, або одночасно розбіжні.

Ознака Д\`Аламбера: якщо для знакододатного ряду $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ існує границя
$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l \qquad (15.7)$$
то ряд збіжний при $l < 1$ і розбіжний при $l > 1$.

Ознака Коші: якщо для знакододатного ряду $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ існує границя

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = l, \qquad (15.8)$$

то ряд збіжний при $l < 1$ і розбіжний при $l > 1$.

Інтегральна ознака Коші: якщо задано ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = f(1) + f(2) + \ldots + f(n) + \ldots, \qquad (15.9)$$

де $f(x)$ - додатна, неперервна і монотонно спадна функція на проміжку $[1;+\infty)$. Тоді ряд (15.9) збіжний, якщо збіжний невласний інтеграл $\int_1^{\infty} f(x)dx$ і розбіжний, якщо розбіжний цей інтеграл. Ряд, **знаки членів якого чергуються**, має вигляд: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} = u_1 - u_2 + u_3 - \ldots$, де $u_n > 0$. (15.10)

Ознака Лейбніца: якщо для ряду (15.10) виконуються умови: 1) $u_1 > u_2 > u_3 > \ldots;$ 2) $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$, то він збігається, його сума додатна і не перевищує першого члена ряду.

Абсолютна і умовна ознака збіжності. Нехай $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ - знакозмінний ряд, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ утворений з модулів його членів.

Якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ збіжний, то збіжний і ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, причому **абсолютно**.

Якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ збіжний, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ розбіжний, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ є **умовно збіжним**.

Вираз виду $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ називають **функціональним** рядом, (15.11)

якщо $u_n(x)$ - функція.

Ознака Вейєрштрасса. Функціональний ряд (15.11) **абсолютно і рівномірно збіжний** на відрізку $[a;b]$, якщо існує знакододатній числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$, такий, що $|u_n(x)| \le \alpha_n, \quad x \in [a;b]$. Функціональний ряд виду

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ називають **степеневим рядом** (15.12)

Теорема Абеля. Якщо степеневий ряд (15.12) збіжний при $x = x_0$, то він абсолютно збіжний для всіх x, таких що $|x| < |x_0|$. Якщо при $x = x_0$ ряд (15.12) розбіжний, то він розбіжний всюди, де $|x| > |x_0|$.

Якщо для коефіцієнтів ряду (15.12) існує границя $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = R$ або

$$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} = R, \qquad (15.13)$$

то число R називається **радіусом збіжності степеневого ряду,** а інтервал $(-R;R)$ - його **інтервалом збіжності**. Причому якщо $R=0$, то ряд збігається лише в точці $x=0$. Якщо $R=+\infty$, то ряд збіжний на всій числовій осі. Питання збіжності ряду при $x=\pm R$ для кожного ряду розв'язується окремо.

Радіус збіжності ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ визначається аналогічно. Але інтервал збіжності знаходять з нерівності $|x-x_0|<R$.

Ряд Тейлора має вигляд:

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\ldots \qquad (15.14)$$

Ряд Маклорена маємо з ряду (15.14) при $a=0$:

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+.\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \qquad (15.15)$$

Розвинення деяких функцій у ряд Маклорена:

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots, \text{ де } x\in(-\infty;\infty) \qquad (15.16)$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots+\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots, \text{ де } x\in(-\infty;\infty) \qquad (15.17)$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots+\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}+\ldots, \text{ де } x\in(-\infty;\infty) \qquad (15.18)$$

$$(1+x)^m=1+\frac{m}{1!}x+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\ldots+\frac{m(m-1)\ldots(m-(n-1))}{n!}x^n+\ldots, \text{ де } x\in(-1;1) \qquad (15.19)$$

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\ldots+x^n+\ldots, \text{ де } x\in(-1;1) \qquad (15.20)$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\ldots, \text{ де } x\in(-1;1) \qquad (15.21)$$

$$arctgx=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\ldots, \text{ де } x\in[-1;1] \qquad (15.22)$$

Приклади розв’язання типових задач

Приклад 1.