МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

О.В. Кузьма, О.В. Суліма, Т.О. Рудик, Н.П. Селезньова, Н.М. Назаренко

ВИЩА МАТЕМАТИКА
Аналітична геометрія та лінійна алгебра. Елементи векторної алгебри

Конспект лекцій

*Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
як навчальний посібник для здобувачів ступеня бакалавра, які навчаються за спеціальністю
151 «Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології»*

Київ
КПІ ім. Ігоря Сікорського
2021

Рецензенти: *Защепкіна Н.М.,* д-р техн. наук, професор кафедри інформаційно-вимірювальних технологій ПБФ КПІ ім. Ігоря Сікорського

Диховичний О.О. канд. фіз.-мат. наук, доцент кафедри математичного аналізу та теорії ймовірностей ФМФ КПІ ім. Ігоря Сікорського

Відповідальний редактор: *Стогний В.І.*, канд. фіз.-мат. наук, доцент кафедри математичної фізики ФМФ КПІ ім. Ігоря Сікорського

Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського (протокол № 8 від 24.06.2021р.) за поданням Вченої ради Приладобудівного факультету (протокол № 5/21 від 31.05.2021 р.)

Електронне мережне навчальне видання

Кузьма Олександр Всеволодович, канд. фіз.-мат. наук, доцент
Суліма Ольга Вікторівна, канд. фіз.-мат. наук, доцент
Рудик Тетяна Олександрівна, канд. фіз.-мат. наук, доцент
Селезньова Надія Петрівна, канд. фіз.-мат. наук, доцент
Назаренко Наталія Миколаївна, асист.

ВИЩА МАТЕМАТИКА.

Аналітична геометрія та лінійна алгебра. Елементи векторної алгебри.
Конспект лекцій.

Кузьма О.В. Вища математика. Аналітична геометрія та лінійна алгебра. Елементи векторної алгебри. Конспект лекцій. [Електронний ресурс]: навч. посіб. для студ. спеціальності 151 «Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології» / О.В. Кузьма, О.В. Суліма, Т.О. Рудик та інш.; КПІ ім. Ігоря Сікорського. – Електронні текстові дані (1 файл: 1,50 Мбайт). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2021. – 127 с.

Основою навчального посібника є матеріали курсу лекцій «Лінійна алгебра та аналітична геометрія», який викладається студентам приладобудівного факультету КПІ ім. Ігоря Сікорського. В навчальному посібнику розглянуто елементи теорії матриць і визначників, методи розв'язування систем лінійних рівнянь, основи аналітичної геометрії на площині, векторної алгебри, аналітичної геометрії у просторі на базі векторної алгебри. Наведені розв'язки типових завдань сприяють кращому засвоєнню матеріала та отриманню навичок розв'язування прикладів. Наприкінці навчального посібника запропоновано варіанти завдань для проведення контрольних і розрахунково-графічних робіт.

Для студентів технічних спеціальностей КПІ ім. Ігоря Сікорського.

ЗМІСТ

Передмова

Навчальний посібник відповідає програмі з вищої математики для приладобудівного факультету Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського» та призначений для студентів інженерно-технічних спеціальностей.

Головною метою даного навчального посібника є ознайомлення студентів з основами лінійної алгебри, векторної алгебри та аналітичної геометрії, що читається для студентів приладобудівного факультету , обсягом теоретичного та практичного матеріалу, необхідного для засвоєння цього курсу.

Посібник складається з конспекту лекцій з вищої математики та містить глави "Елементи лінійної алгебри", "Елементи векторної алгебри" та "Аналітична геометрія". У навчальному посібнику наведено близько 300 прикладів і задач.

Математичні дисципліни "Лінійна алгебра", "Векторна алгебра" та "Аналітична геометрія" традиційно входять до базових розділів вищої математики і викладаються на перших курсах усіх технічних, економічних та соціологічних підрозділів Київського політехнічного інститута імені Ігоря Сікорського. Слід відмітити, що ця перша частина курсу вищої математики ніякою мірою не є більш простою чи менш важливою у розумінні майбутнього практичного застосування. Навпаки, в методичному розумінні, викладений матеріал є першим знайомством із основами та методами вищої математики, які стануть базою математичного наукового підходу до математичного моделювання, що широко використовується на вищих рівнях спеціалізації і є основою сучасних дослідницьких технологій.

Аналітична геометрія грає основну роль у розвитку просторового мислення студентів технічного університету.

Вивчення аналітичної геометрії сприяє розвитку у студентів просторових уявлень, які необхідні для розв'язування прикладних технічних завдань та характеризує високий рівень інженерного мислення.

Аналітична геометрія, як один з розділів вищої математики, служить фундаментом для інших природнонаукових, загальноінженерних та спеціальних дисциплін.

При математичному моделюванні значної кількості задач у курсах бакалаврської і магістерської підготовки студентів приладобудівного факультету та інших підрозділів інженерного профілю університету широко використовуються знання, отримані при засвоєнні студентами лінійної алгебри, векторної алгебри та аналітичної геометрії.

Посібник може бути рекомендовано студентам першого курсу для більш ефективного засвоєння лекційних матеріалів, а також стати основою дистанційного курсу із зазначених розділів фундаментальної математичної підготовки, що допоможе студентам заочної форми навчання або старшокурсникам при спеціалізації як довідниковий матеріал. Частина розділів може використовуватись абітурієнтами НТУУ «КПІ імені Ігоря Сікорського» для поглибленого опанування матеріалу з метою розв’язування завдань незалежного тестування.

При написанні навчального посібника використано багаторічний досвід викладання вищої математики студентам приладобудівного факультету Київського політехнічного інституту імені Ігоря Сікорського.

Матеріал посібника розбито на дев’ять лекцій. Набір розглянутих в лекціях питань відповідає змісту навчального посібника. Теоретичний матеріал ілюструється достатньою кількістю прикладів, що дозволяє студентам самостійно розібратися в даній темі. Наприкінці посібника запропоновано добірки індивідуальних завдань, які можуть бути використані студентами для закріплення викладеного матеріалу, а також для проведення викладачами різних видів контролю знань студентів.

Вважаємо, що даний навчальний посібник допоможе більш глибокому засвоєнню викладених глав з вищої математики та сприятиме подальшому вивченню вищої математики.

Глава 1. Елементи лінійної алгебри

1. Лекція №1. Визначники другого і третього порядків. Правило Крамера. Визначники вищих порядків та їх властивості

1.1 Визначники другого порядку. Правило Крамера

Нехай дана система двох лінійних рівнянь з двома невідомими:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases} \text{, причому } a_{11} \neq 0. \qquad (1.1)$$

Знайдемо x_1 і x_2 через коефіцієнти та вільні члени системи (1.1).

Припустимо, що $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$. Тоді для системи (1.1) отримаємо *єдиний розв'язок.*:

$$x_1 = \frac{b_1a_{22}-a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}; \quad x_2 = \frac{a_{11}b_2-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}. \qquad (1.2)$$

Напишемо матрицю *A* системи (1.1):

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \qquad (1.3)$$

Означення: Число $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ називається *визначником (або детермінантом)* матриці *A* (1.3), причому, визначником другого порядку, тому, що матриця *A* є матрицею другого порядку.

Запис визначника:

$$|A| = det\ A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}, \qquad (1.4)$$

де $a_{11}a_{22}$ – називають головною діагоналлю, $a_{12}a_{21}$ – побічною діагоналлю.

Розглянемо чисельники в (1.2):

Для невідомого x_1 :

$$b_1a_{22} - a_{12}b_2 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = d_1.$$

Для невідомого x_2 :

$$b_2a_{11} - b_1a_{21} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = d_2.$$

Тоді формули (1.2) записуються у такому вигляді (через визначники):

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} = \frac{d_1}{d}; \qquad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} = \frac{d_1}{d}. \qquad (1.5)$$

Це правило розв'язання системи двох лінійних рівнянь з двома невідомими називається правилом Крамера і формулюється наступним чином:

Правило Крамера. Якщо визначник $d = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ складений із коефіцієнтів системи (1.1) не дорівнює нулю, то ми отримаємо розв'язок системи (1.1), якщо візьмемо за невідомі дроби, спільним знаменником яких є визначник (1.4), а чисельником для невідомого $x_i (i = 1,2)$ є визначник, який отримують заміною у визначнику (1.4) і-того стовпця стовпчиком із вільних членів системи (1.1).

Приклад. Розв'язати систему, користуючись правилом Крамера:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 6, \\ 3x + \quad y = 7 \end{cases}.$$

Розв'язування: $d = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 - 3 \cdot 3 = 2 - 9 = -7 \neq 0 =>$ Можна застосовувати правило Крамера. Обчислимо d_1і d_2:

$$d_1 = \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} = -15; \qquad d_2 = \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = -4.$$

Отже, розв'язком нашої системи є така сукупність чисел:

$$x = \frac{d_1}{d} = \frac{15}{7}; \qquad y = \frac{d_2}{d} = \frac{4}{7}$$

Відповідь: $\left(\frac{15}{7}; \frac{4}{7}\right)$.

1.2. Визначники третього порядку. Правило Крамера

Розглянемо систему трьох лінійних рівнянь з трьома невідомими:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases} \qquad (1.6)$$

Якщо розв'язати цю систему методом виключення невідомих, прийдемо до формул, аналогічних формулам (1.5), тільки з більш громіздкими обчисленнями і тому ми їх проводити не будемо, а введемо одразу ж означення визначника третього порядку.

Напишемо матрицю системи (1.6):

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}. \qquad (1.7)$$

Означення. Визначником третього порядку, який відповідає матриці (1.7), називають число:

$$|A| = det\ A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} +$$

$$a_{21}a_{32}a_{13} - -a_{11}a_{23}a_{32} - a_{21}a_{12}a_{33} \qquad (1.8)$$

де $a_{11}a_{22}a_{33}$ – головна діагональ, $a_{13}a_{22}a_{31}$ – побічна діагональ.

Символи a_{ij} називають елементами визначника, причому перший індекс i показує номер рядка, а другий індекс j – номер стовпця, на перетині яких стоїть даний елемент.

Привило трикутника – перше правило обчислення визначника третього порядка:

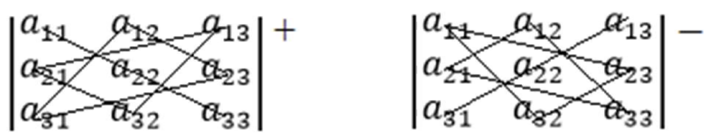

Схема обчислення додатніх членів

Схема обчислення від'ємних членів

Приклад. Обчислити визначник:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot 0 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 \cdot 1 + (-1) \cdot (-2) \cdot 2 - 2 \cdot 0 \cdot 1 - 1 \cdot 1 \cdot (-2)$$
$$- 1 \cdot (-1) \cdot (-1) = 0 + 1 + 4 - 0 + 2 - 1 = 6$$

Правило Крамера.

Напишемо формули Крамера для розв’язування системи (1.6). Якщо позначити визначник (1.8) через d , а визначник, який отримується заміною його j-того стовпця (j = 1, 2, 3) стовпчиком із вільних членів системи (1.6) символом d_j, то для значень невідомих x_1, x_2, x_3 отримаємо наступні формули, за умови, що:

$$x_1 = \frac{d_1}{d} = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}; \quad x_2 = \frac{d_2}{d} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}};$$

$$x_3 = \frac{d_3}{d} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}. \qquad (1.9)$$

Підставляючи вираз (1.9) у рівняння (1.6), ми отримаємо, що всі ці рівння задовольняються, тобто числа (1.9) є розв’язком системи (1.6).

Отже, сформуємо правило Крамера для системи трьох рівнянь.

Правило Крамера (формулювання).

Якщо визначник із коефіцієнтів системи трьох лінійних рівнянь з трьома невідомими не дорівнює нулю, то розв’язок цієї системи може бути знайдений за правилом Крамера, яке формулюється аналогічно випадку системи двох рівнянь.

Приклад. Розв’язати систему за правилом Крамера:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 6; \\ x_1 + 5x_2 \qquad = -3. \end{cases}$$

Розв’язування. Спочатку перевіримо, чи можна застосовувати правило Крамера, тобто чи d не дорівнює нулю.

$$det\ A = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 2 + 10 - (-1) - 15 - 0 = -2 \neq 0,$$

отже, можна застосувати правило Крамера.

Знаходимо d_1, d_2, d_3:

$$d_1 = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 6 & -1 & 1 \\ -3 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 6 + 30 - 3 - 25 - 0 = -4;$$

$$d_2 = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 2 & 6 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 5 - 6 - 6 + 9 - 0 = 2;$$

$$d_3 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 2 & -1 & 6 \\ 1 & 5 & -3 \end{vmatrix} = 9 + 12 + 50 + 5 - 90 + 12 = -2.$$

Отже, за правилом Крамера:

$$x_1 = \frac{d_1}{d} = 2; \quad x_2 = \frac{d_2}{d} = -1; \quad x_3 = \frac{d_3}{d} = 1.$$

Тоді розв’язок системи: $x_1 = 2;\ x_2 = -1;\ x_3 = 1.$

1.3. Визначники n-го порядку та їх властивості

1.3.1. Перестановки і підстановки

Означення. Будь-яке розташування чисел $1,2,\ldots,n$ в деякому певномупорядку називають *перестановкою з n чисел*.

Число різних перестановок із n символів дорівнює: $1 \cdot 2 \cdot\ldots\cdot n = n!$.

Означення. Говорять, що в даній перестановці числа і j складають *інверсію*, якщо $i > j$, але і стоїть в цій перестановці лівіше ніж j.

Перестановка називається *парною*, якщо її символи складають парне число інверсій і *непарною* – у протилежному випадку.

Приклади:

1) $1, 2, \ldots, n$ – парна перестановка, бо число інверсій = 0.

2) Перестановка $4, 5, 1, 3, 6, 2$ $(n = 6)$ – парна, бо має 8 інверсій.

Твердження. При $n \geq 2$ число парних перестановок із n символів дорівнює числу непарних, тобто дорівнює $1/2n!$.

Означення. Будь-яке взаємно-однозначне відображення A множини перших n натуральних чисел на себе називають *підстановкою n-го степення*, причому підстановка A може бути написана за допомогою перестановок, написаних одна під одною, а саме: $A = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_n \\ \alpha_{i1} & \alpha_{i2} & \cdots & \alpha_{in} \end{pmatrix}$.

Твердження. Число підстановок n-го степення дорівнює числу перестановок із n символів, тобто дорівнює n! .

Означення. Підстановка A буде парною, якщо загальне число інверсій у двох p рядках будь-якого її запису – парне, і непарне – у протилежному випадку.

Приклади:

1. $\begin{pmatrix} 3\ 1\ 4\ 5\ 2 \\ 2\ 5\ 4\ 3\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} \leftarrow\ 4 \text{ інверсії} \\ \leftarrow\ 7 \text{ інверсій} \end{cases} => \text{підстановка непарна.}$

2. $\begin{pmatrix} 1\ 2\ 3\ 4\ 5 \\ 5\ 1\ 2\ 4\ 3 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} \leftarrow\ 0 \text{ інверсії} \\ \leftarrow\ 5 \text{ інверсій} \end{cases} = > \text{ підстановка непарна}$

1.3.2. Поняття визначника n-го порядку

Ведемо означення визначника n-го порядку. Нехай дана квадратна матриця порядку n.

$$\begin{pmatrix} a_{11}\ a_{12}\ \dots\ a_{1n} \\ a_{21}\ a_{22}\ \dots\ a_{2n} \\ \dots\ \ \dots\ \ \dots\ \ \dots \\ a_{n1}\ a_{n2}\ \dots\ a_{nn} \end{pmatrix} \tag{1.10}$$

Розглянемо можливі добутки по n елементів цієї матриці, які розташовані у різних рядках і у різних стовпчиках, тобто добутки вигляду:

$$a_1\alpha_1 \cdot a_2\alpha_2 \dots a_n\alpha_n$$

де індекси α_1, α_2, ... , α_n складають деяку перестановку з чисел: $1, 2, \ldots, n$. Число таких добутків дорівнює числу різних перестановок із n символів, тобто $n!$.

Означення. Визначником n-го порядку, який відповідає матриці (1.10) , називається *алгебраїчна сума n! членів*, яка складена наступним чином: її членами є будь-які добутки n елементів матриці, взяті по одному в кожному рядку і в кожному стовпчику, причому член береться зі знаком «+», якщо його індекси складають парну підстановку, і зі знаком «-» − у протилежному випадку.

Такий визначник запишемо у такому вигляді:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

1.3.3. Властивості визначників n-го порядку

Означення. Транспонуванням матриці (1.10) називають таке перетворення цієї матриці, при якому її рядки стають стовпчиками з тими ж номерами, тобто:

$$(1.10) \to \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} = \text{Ат.}$$

Властивості:

1. Визначники не змінюються при транспонуванні.

Наслідок. У детермінанті (визначнику) рядки і стовпці рівноправні.

2. Перестановка двох рядків det (детермінанта) змінює знак det.

3. Визначник, що має два однакових рядка (стовпця) дорівнює 0.

4. Спільний множник всіх елементів деякого рядка det можна винести за знак det.

5. Якщо один із рядків (стовпців) det складається з нулів, то $det = 0$.

6. det, що має два пропорційних рядка (стовпця) дорівнює 0.

7. Якщо кожен елемент і-го рядка det є сумою двох доданків, то такий визначник дорівнює сумі двох визначників, у одного з яких і-ий рядок складається з перших доданків, а у другого – з других. Інші елементи усіх трьох визначників однакові.

8. Якщо один із рядків det є лінійною комбінацією його інших рядків, то $det = 0$.

9. Визначник не змінюється, якщо до елементів одного з його рядків додаються елементи іншого рядка, попередньо помножені на одне й те саме число.

Наслідок. Визначник не змінюється, якщо до одного його рядку додається лінійна комбінація інших рядків.

2. Лекція №2. Обчислення визначників n–го порядку. Алгебра матриць. Матричний метод розв'язування систем лінійних рівнянь

2.1. Обчислення визначників n–го порядку

2.1.1. Розклад визначника за елементами рядка або стовпця

Розглянемо визначник $n-$ го порядку:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1j} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,j-1} & a_{2j} & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{i,j-1} & a_{ij} & a_{i,j+1} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{nj} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Означення. *Мінором* (n-1)-го порядку M_{ij} елемента a_{ij} квадратичної матриці A n-го порядку визначник (n-1)-го порядку, який утворюється з даного визначника в результаті викреслення i-го рядка та j-го стовпця.

Означення. Алгебраїчним доповненням A_{ij} елемента a_{ij} називається:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij} .$$

Сформуємо твердження, яке будемо використовувати при доведенні основного результату про обчислення визначників n-го порядку.

Твердження. Якщо в i-тому рядку визначника n-го порядку, всі елементи, можливо, крім одного елемента a_{ij} дорівнюють нулю, то цей визначник дорівнює добутку a_{ij} на його алгебраїчне доповнення.

Теорема 2.1. Визначник n-го порядку дорівнює сумі добутків елементів будь-якого стовпчика (рядка) на їх алгебраїчне доповнення, тобто:

$$d = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} & \cdots & a_{2n} \\ - & - & - & - & - & - \\ a_{n1} & a_{21} & \cdots & a_{nk} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= a_{1k} \cdot A_{1k} + a_{2k} \cdot A_{2k} + \cdots a_{1nk} \cdot A_{nk}$$

Доведення. Розглянемо визначник n-го порядку.

$$d = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,k-1} & a_{1k} & a_{1,k+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2,k-1} & a_{2k} & a_{2,k+1} & \dots & a_{2n} \\ - & - & - & - & - & - & - & - \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n,k-1} & a_{nk} & a_{n,k+1} & \dots & a_{nk} \end{vmatrix} =$$

Додаємо до кожного елемента k- го стовпця (n-1) нуль і запишемо за властивістю 7 (Лекція №1) d у вигляді суми n визначників (від цього det не зміниться).

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,k-1} & a_{1k} + 0 + \dots + 0 & a_{1,k+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2,k-1} & 0 + a_{2k} + \dots + 0 & a_{2,k+1} & \dots & a_{2n} \\ & - & - & - & - & - & \\ a_{n1} & \dots & a_{n,k-1} & 0 + \dots + 0 + a_{nk} & a_{n,k+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 & \dots & a_{2n} \\ - & - & - & - & - & - \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & 0 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} & \dots & a_{2n} \\ - & - & - & - & - & - \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & 0 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & 0 & \dots & a_{2n} \\ - & - & - & - & - \\ a_{n1} & \dots & a_{nk} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{1k} \cdot A_{1k} + a_{2k} \cdot A_{2k} + \cdots a_{1nk} \cdot A_{nk} . \quad (1.11)$$

Що і треба було довести.

Зауваження. Формулу (1.11) називають другим правилом обчислення визначників n-го порядку.

Приклад 1. Обчислити визначник :

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} + 0 = 11 - -13 = -2 .$$

Розкрили визначник за третім стовпчиком.

Приклад 2. Обчислити визначник:

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & -6 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 4 \cdot (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} -1 & -6 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & -3 & 2 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{4+1} \cdot$$

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & -6 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 4 \cdot (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} -1 & -6 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & -3 & 2 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{4+1} \cdot$$

$$\cdot \begin{vmatrix} -1 & -6 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 4 \cdot \left(4 \cdot \ (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} -1 & -6 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} + 2 \cdot \ (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} -1 & -6 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}\right) +$$

$$+(-1)^5 \cdot \left((-1) \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} - 6 \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}\right) =$$

$$= 4(-4 \cdot (3 + 24) + 2 \cdot (-3 + 12)) - (-(15 - 16) + 6 \cdot$$

$$\cdot (10 - 16)) = 4 \cdot (-90) + 35 = 325$$

(розкрили за першим рядком).

2.1.2. Обчислення визначника методом зведення до трикутного вигляду матриці

Означення. Матриця n-го порядку називається правою трикутною, якщо всі її елементи, розташовані нижче головної діагоналі, дорівнюють нулю, та лівою трикутною, якщо всі її елементи, розташовані вище головної діагоналі, дорівнюють нулю.

Теорема 2.2. Визначник трикутної матриці дорівнює добутку діагональних елементів цієї матриці.

Доведення. Нехай дана право трикутна матриця:

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ - & - & - & - \ - & - \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

За доведеною теоремою 1.1, $det\,A = a_{11} \cdot A_{11} = a_{11} \cdot (-1)^{1+1} \cdot$

$$M_{11} == a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ - & - & - & - \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot M_{22} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \dots \cdot$$

$$a_{n-1,n-1} \cdot a_{nn} => \ det\,A = a_{11} \cdot a_{22} \dots a_{n-1,n-1} \cdot \qquad (1.12)$$

Зауваження. Теорема 2.2 (формула (1.12)) - це третє правило обчислення визначників n-го порядку.

Теорема 2.3. Будь-яку матрицю n-го порядку за допомогою елементарних перетворень можна звести до трикутної форми.

Означення. Елементарними перетвореннями матриці називаються такі перетворення:

1. Перестановка (транспозиція) двох рядків (стовпців) матриці.

2. Множення рядка (стовпця) матриці на деяке число C≠ 0.

3. Додавання до одного рядка (стовпця) другого рядка (стовпця), помноженого на деяке число C.

Приклад. Обчислити визначник із прикладу 1 за третім правилом.

Зведемо матрицю до трикутного вигляду:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 5 & 0 \end{pmatrix} => (\text{переставимо рядки}) => \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= (\text{домножимо перший рядок на } (-2) \text{ і додамо до другого;}$$
$$\text{домножимо перший рядок на } (-3) \text{ і додамо до третього}) =>$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 0 & -11 & 1 \\ 0 & -13 & 1 \end{pmatrix} => \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 0 & -11 & 1 \\ 0 & -13 & 1 \end{pmatrix} = > \begin{pmatrix} \text{домножимо другий рядок} \\ \text{на } \frac{13}{11} \text{ і додамо до третього} \\ \text{рядка} \end{pmatrix}$$

$$=> \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 0 & 11 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{11} \end{pmatrix} => \det A = 1 \cdot 11 \cdot \left(-\frac{2}{11}\right) = -2.$$

2.2. Алгебра матриць

2.2.1. Основні поняття

Означення . Прямокутна таблиця чисел a_{ij}, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ - & - & - & - \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

називається *матрицею розміру* $m \times n$ (m - рядків і n- стовпців).

Числа a_{ij} називаються елементами матриці. Це записують так:

$$A = (a_{ij}), \quad \text{або} \quad A = ||a_{ij}||, \quad \text{або} \quad A = [\, a_{ij} \,].$$

Якщо m=n, то матриця називається *квадратною.* Кількість рядків (стовпців) квадратної матриці називається її *порядком.*

Означення. Квадратна матриця n-го порядку називається одиничною матрицею порядоку n, якщо всі елементи її головної діагоналі дорівнюють одиниці, а всі елементи, розташовані поза головної діагоналі, дорівнюють нулю.

Позначення:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ - & - & - & - & - \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Розглянемо, які дії над матрицями є можливими.

2.2.2. Дії над матрицями

1. Сума матриць і множення матриці на число.

Означення. Сумою A + B двох квадратних матриць $A = (a_{ij})$ і $B = (b_{ij})$ порядку n називається матриця $C = (c_{ij})$, будь-який елемент якої дорівнює сумі відповідних елементів матриць A і B.

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}.$$

Означення. Добутком kA квадратної матриці $A = (a_{ij})$ на число k називається матриця $\mathrm{A}' = (a'_{ij})$, яку отримуємо в результаті добутку всіх елементів матриці A на число k.

$$a'_{ij} = k \cdot a_{ij}.$$

Основні **властивості**:

1. $\mathrm{A} + \mathrm{B} = \mathrm{B} + \mathrm{A}$ – комутативність.

2. $(\mathrm{A} + \mathrm{B}) + \mathrm{C} = \mathrm{A} + (\mathrm{C} + \mathrm{B})$ – асоціативність.

3. $\begin{cases} \alpha(\mathrm{A} + \mathrm{B}) = \alpha\mathrm{A} + \alpha\mathrm{B} \\ (\alpha + \beta) \cdot \mathrm{A} = \alpha\mathrm{A} + \beta\mathrm{A} \\ (\alpha\beta) \cdot \mathrm{A} = \alpha(\beta\mathrm{A}) \end{cases}$ – дистрибутивність.

4. $\mathrm{A} + 0 = \mathrm{A}$, де $0(m \times n)$, $\mathrm{A}(m \times n)$, $0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$ – нульова матриця.

5. Різниця матриць $\mathrm{A} - \mathrm{B} = \mathrm{A} + (-1) \cdot \mathrm{B}$.

6. $\mathrm{A} - \mathrm{A} = \mathrm{A} + (-1) \cdot \mathrm{A} = 0$.

2. Добуток матриць.

Означення. Нехай $A = (\mathrm{a}ij)$ і $\mathrm{B} = (bij)$ – квадратні матриці порядку n. Добутком $\mathrm{A} \cdot \mathrm{B} = \mathrm{C}$ матриці A і матриці B називається матриця $\mathrm{C} = (c_{ij})$, елемент якої c_{ij} , який стоїть в i-тому рядку та j-му стовпці і дор*івн*ює сумі добутків відповідних елементів i-го рядка матриці A та j-го стовпця матриці B.

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj}. \qquad i = \overline{1,n}\,; j = \overline{1,n}$$

$$C = A \cdot B. \tag{2.1}$$

Приклади:

$$1) \begin{pmatrix} 4 & 9 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 4 \cdot 1 + 9 \cdot (-2) & 4 \cdot (-3) + 9 \cdot 1 \\ (-1) \cdot 1 + 3 \cdot (-2) & (-1) \cdot (-3) + 3 \cdot 1 \end{pmatrix} = = \begin{pmatrix} -14 & -3 \\ -7 & 6 \end{pmatrix};$$

2) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 4 & -3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 11 \\ 8 & -1 & 11 \\ 12 & -8 & 13 \end{pmatrix}$.

Властивості добутку матриць:

1. $\mathrm{A} \cdot \mathrm{B} \neq \mathrm{B} \cdot \mathrm{A}$ – не комутативність (в загальному випадку).

2. $(\mathrm{A} \cdot \mathrm{B}) \cdot \mathrm{C} = \mathrm{A} \cdot (\mathrm{B} \cdot \mathrm{C})$ – асоціативність.

3. $\mathrm{A} \cdot \mathrm{E} = \mathrm{E} \cdot \mathrm{A} = \mathrm{A}$, E - одинична матриця.

4. $(\mathrm{A} + \mathrm{B}) \cdot \mathrm{C} = \mathrm{A} \cdot \mathrm{C} + \mathrm{B} \cdot \mathrm{C}$ – дистрибутивність .

5. $\alpha \cdot (\mathrm{A} \cdot \mathrm{B}) = (\alpha \cdot \mathrm{A}) \cdot \mathrm{B} = \mathrm{A} \cdot (\alpha \cdot \mathrm{B}),\ \alpha = \ const.$

6. Визначник добутку декількох матриць n-го порядку дорівнює добутку визначників цих матриць, тобто $|\mathrm{C}| = |\mathrm{A}| \cdot |\mathrm{B}|$.

Означення. Можна говорити про добуток прямокутних матриць A та B у тому випадку, коли число стовпців матриці A дорівнює числу рядків матриці B, причому число рядків матриці $\mathrm{A} \cdot \mathrm{B}$ дорівнює числу рядків матриці A, число стовпців матриці $\mathrm{A} \cdot \mathrm{B}$ дорівнює числу стовпців матриці B.

$$\mathrm{C} = \mathrm{A} \cdot \mathrm{B}, \mathrm{A} = \left(a_{ij}\right)_{m \times n}, \mathrm{B} = \left(b_{ij}\right)_{n \times k} => C = \mathrm{A} \cdot \mathrm{B} = (\mathrm{c}_{ij})_{m \times k}.$$

Приклади.

1) $\begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 15 & -5 \\ 11 & 10 & 10 \end{pmatrix}$.

2) $(5 \quad 1 \quad 0 \quad -3) \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -4 \\ 3 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = (11 \quad -1)$.

3.Обернена матриця.

Означення. Квадратна матриця називається *виродженою*, якщо її визначник дорівнює нулю, і невиродженою у протилежному випадку.

З властивості 6: $|\mathrm{C}| = |\mathrm{A}| \cdot |\mathrm{B}|$ випливають наступні два твердження:

Твердження 1. Добуток матриць, хоча б одна з яких вироджена, буде виродженою матрицею.

Твердження 2. Добуток будь-яких невироджених матриць буде невиродженою матрицею.

Означення. Якщо А - невироджена матриця, то існує і притому єдина матриця A^{-1} така, що

$$\mathrm{A} \cdot \mathrm{A}^{-1} = \mathrm{A}^{-1} \cdot \mathrm{A} = \mathrm{E}, \tag{2.2}$$

де Е – одинична матриця.

Матриця A^{-1} називається оберненою до матриці А.

Зауваження. Для виродженої матриці оберненої матриці взагалі не існує.

Означення. Матриця

$$\mathrm{A}^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}, \tag{2.3}$$

складена з алгебраїчних доповнень до елементів матриці А, причому алгебраїчне доповнення до елемента a_{ij} стоїть на перетині j-го рядка та і-го стовпчика називається приєднаною матрицею до матриці А.

Твердження. Обернена матриця знаходиться за такою формулою:

$$\mathrm{A}^{-1} = \frac{1}{det\ A} \cdot A^*. \tag{2.4}$$

Приклад. Знайти матрицю, обернену до матриці А, $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Розв'язування.

$|A| = 1 + 18 - 2 + 3 - 3 - 4 = 13 \neq 0 =>$ матриця $\mathrm{A}\ -$ невироджена .

Знаходимо алгебраїчні доповнення:

$\mathrm{A}_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2$; $\qquad \mathrm{A}_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -3$;

$\mathrm{A}_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 7$; $\qquad A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 7$;

$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 4$; $\quad A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -5$;

$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -1$; $\quad A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 5$;

$A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3.$

Тоді $\quad A^* = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 7 \\ 7 & 4 & -5 \\ -1 & 5 & -3 \end{pmatrix}$,

Отже, $\quad A^{-1} = \frac{1}{13} \cdot A^* \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{13} & -\frac{3}{13} & \frac{7}{13} \\ \frac{7}{13} & \frac{4}{13} & -\frac{5}{13} \\ -\frac{1}{13} & \frac{5}{13} & -\frac{3}{13} \end{pmatrix}$.

Вправа. Перевірити, що $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$.

2.2.3. Розв'язування систем лінійних рівнянь матричним методом

Розглянемо систему n лінійних рівнянь з n невідомими:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}. \qquad (2.5)$$

Нехай $det\ A \neq 0$, матриця A складена із коефіцієнтів системи (2.5) є невиродженою, тому, що, за припущенням $d = |A| \neq 0$.

Позначимо $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ – стовпчик невідомих; $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ – стовпчик вільних членів. Тоді, систему (2.5) можна записати у вигляді одного матричного рівняння

$$A \cdot X = B. \qquad (2.6)$$

Помноживши обидві частини (2.6) зліва на A^{-1} , матимемо:

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B \Rightarrow E \cdot X = A^{-1} \cdot B \Rightarrow X = A^{-1} \cdot B \qquad (2.7)$$

– є стовпцем розв'язків системи (2.5), і причому єдиним.

Висновок. Такий спосіб знаходження розв'язків системи лінійних рівнянь називають *матричним способом.*

Приклад. Розв'язати систему матричним способом:

$$\begin{cases} x_1 - \ x_2 + \ x_3 = \ 1 \\ x_1 \quad\quad - 2x_3 = -1 \\ 2x_1 + \ x_2 - \ x_3 = \ 2 \end{cases}, \ A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Розв'язування. Знайдемо $|\mathrm{A}| = 6$. Побудуємо матрицю А*.Знайдемо алгебраїчні доповнення елементів матриці *A*:

$$\mathrm{A}_{11} = 2, \mathrm{A}_{21} = 0, \mathrm{A}_{31} = 2, A_{12} = -3, \mathrm{A}_{22} = -3, \mathrm{A}_{32} = 3, \mathrm{A}_{11} = 1, \mathrm{A}_{21} = -3,$$
$$\mathrm{A}_{31} = 1.$$

$$A^* = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -3 & -3 & 3 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}, A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}, A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} + 0 + \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 1 \\ \frac{1}{6} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} => x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 1.$$

3. Лекція № 3. Ранг матриці. Обчислення рангу матриці. Метод Гаусса розв'язування систем лінійних рівнянь

3.1. Ранг матриці

3.1.1. Поняття лінійної залежності стовпців (рядків) матриці

Розглянемо матрицю А$(m \times n)$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{1\,1} & a_{1\,2} & \cdots & a_{1\,n} \\ a_{2\,1} & a_{2\,2} & \cdots & a_{2\,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m\,1} & a_{m\,1} & \cdots & a_{m\,n} \end{pmatrix} \tag{3.1}$$

Позначимо $a_1, a_2, \dots, a_n$- стовпці матриці.

$a_1 \ = \ (a_{1\,1}, a_{2\,1}, \dots \ , a_{m\,1})$

$a_2 \ = \ (a_{1\,2}, a_{2\,2}, \dots \ , a_{m\,2})$

$a_n = (a_{1\,n}, a_{2\,n}, \dots \ , a_{m\,n})$,

тобто стовпчики матриці А розглядаються, як m – мірні вектори.

Означення. Систему з S стовпців $\mathrm{a}_1, \dots, \mathrm{a}_\mathrm{s}$ однієї й тієї ж висоти (вимірності m) називають *лінійно залежною,* якщо знайдуться числа $\lambda_1, \lambda_{2\,,} \dots, \lambda_\mathrm{s}$, які одночасно не дорівнюють нулю, і такі, що $\lambda_1 \cdot \mathrm{a}_1 + \lambda_2 \ \cdot \mathrm{a}_2 + \cdots + \lambda_\mathrm{s} \cdot \mathrm{a}_\mathrm{s} = 0$

(аналогічне означення лінійної залежності для рядків). У протилежному випадку ця система $(\mathrm{a}_1 \ , \mathrm{a}_2, \dots, \mathrm{a}_\mathrm{s})$ стовпців називається *лінійно незалежною* **.**

Властивості лінійно залежних систем стовпців:

1. Система з $s > 1$ стовпців є лінійно залежною тоді і лише тоді, коли хоча б один із стовпців є лінійною комбінацією решти.

2. Якщо в систему входить нульовий стовпчик, то система є лінійно залежною

3.1.2. Означення рангу матриці. Методи обчислення рангу матриці

Наведемо дві форми означення рангу матриці, які дають, між іншим, також способи його практичного обчислення.

Означення 1. Максимальне число лінійно незалежних стовпців матриці А називається *рангом цієї матриці*.

Означення 2. Максимальних порядок r відмінних від нуля мінорів матриці А називають *її рангом.*

Позначення рангу матриці: Rg А , $rang$ А.

Теорема 3.1. Максимальне число лінійно незалежних рядків будь-якої матриці дорівнює максимальному числу її лінійно незалежних стовпців, тобто дорівнює рангу цієї матриці.

Доведення. Транспонуємо матрицю. При транспонуванні max порядок відмінних від нуля мінорів не може змінитися, тому що транспонування не змінює визначника матриці**.**

Теорема 3.2. Для того, щоб визначник n-го порядку дорівнював нулю, необхідно і достатньо , щоб його рядки були лінійно залежні.

Доведення.

Достатність. Нехай рядки визначника є лінійно залежними, тоді один із його рядків є лінійною комбінацією інших. Отже, у відповідності з властивістю 8 (Лекція №1), цей визначник дорівнює нулю.

Необхідність. Нехай визначник n –го порядку дорівнює нулю. Тобто у даній квадратній матриці n –го порядку є єдиний мінор, який має max порядок n і дорівнює нулю. Звідси випливає , що найвищий порядок відмінних від нуля мінорів цієї матриці є меншим за n , тобто $rangA < n$, а це і означає , що рядки цієї матриці є лінійно залежними.

Методи обчислення рангу матриці.

1. Метод обвідних мінорів.

Нехай у матриці знайдено мінор k-го порядку М, нервний нулю. Розглянемо лише ті мінори $(k+1)$-го порядку, які містять в собі, тобто обводять мінор М: якщо вони всі дорівнюють нулю, то ранг матриці дорівнює k. У протилежному випадку серед обвідних мінорів існує ненульовий мінор $(k+1)-$ го порядку, і , отже, вся процедура повторюється.

Приклад. Обчислити ранг матриці методом обвідних мінорів.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 3 \\ -2 & 9 & -4 & 7 \\ -4 & 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Розв'язування: $M_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 9 \end{vmatrix} \neq 0$.

Розглянемо мінори , які його оточують

$$d_1 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -2 & 9 & -4 \\ -4 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad d_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -2 & 9 & 7 \\ -4 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 0 .$$

Тобто, всі обвідні мінори 3-го порядку дорівнюють нулю. Отже, згідно загальної теорії, ранг матриці дорівнює двом.

2. Метод елементарних перетворень.

Цей метод заснований на тому факті, що елементарні перетворення матриці не змінюють її рангу. Використовуючи ці перетворення, матрицю можна привести до такого вигляду, коли всі її елементи, крім $a_{11}, a_{12}, \dots . a_{rr}$ $(r \leqslant min\,(m, n))$, дорівнюють нулю. Отже, ранг матриці дорівнює r.

Приклад. Обчислити ранг матриці методом елементарних перетворень.

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ -1 & -4 & 5 \\ 3 & 1 & 7 \\ 0 & 5 & 10 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 4 & -5 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 4 & -5 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Ранг останньої матриці $rangA = 2$. Таким же є ранг початковою матриці.

3.2. Метод Гаусса розв’язування систем лінійних рівнянь

3.2.1. Класифікація систем лінійних рівнянь

Розглянемо систему m лінійних рівнянь з n невідомими :

$$\begin{cases} a_{11}\cdot x_1 + a_{12}\cdot x_2 + \ldots + a_{1n}\cdot x_n = b_1 \\ a_{21}\cdot x_1 + a_{22}\cdot x_2 + \ldots + a_{2n}\cdot x_n = b_2 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{m1}\cdot x_1 + a_{m2}\cdot x_2 + \ldots + a_{mn}\cdot x_n = b_m \end{cases} \qquad (3.1)$$

Означення 1. Система (3.1) лінійних рівнянь, яка має хоча б один розв'язок, називається *сумісною*. Лінійна система, яка не має жодного розв'язку називається *несумісною.*

Означення 2. Сумісна система, шо має тільки один розв'язок, називається *визначеною*, а сумісна система, яка має більше одного розв'язку називається *невизначеною*.

Приклади.

1) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 3 \\ x_1 + \ \ x_2 = 2 \end{cases}$ - сумісна , визначена система, (1;1) - єдиний розв'язок.

2) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 4 \\ x_1 + 3x_2 = 5 \end{cases}$ - несумісна система.

3) $\begin{cases} x_1 + \ \ x_2 = 2 \\ 2x_1 + 2x_2 = 4 \end{cases}$ - сумісна невизначена система, система чисел (l ; 2-l) буде розв’язком даної системи.

3.2.2. Метод Гаусса (метод послідовного виключення невідомих)

Розглянемо систему лінійних рівнянь (3.1).

Припустимо, що $a_{11} \neq 0$. Перетворимо систему (3.1), виключаючи невідоме x_1 з усіх рівнянь , окрім першого. Для цього обидві частини першого рівняння помножимо на число $\frac{a_{21}}{a_{11}}$ і віднімемо із відповідних частин 2-го рівняння , потім обидві частини 1-го рівняння помножимо на $\frac{a_{31}}{a_{11}}$, віднімемо із відповідних частин 3-го рівняння і.т.д..

Отже, прийдемо до нової системи із m - лінійних рівнянь та із n - невідомими:

$$\begin{cases} a_{1\,1}\cdot x_1 + a_{1\,2}\cdot x_2 + \ldots + a_{1\,n}\cdot x_n \ = b_1 \\ \qquad\qquad a'_{2\,2}\cdot x_2 + \ldots + a'_{2\,n}\cdot x_n = b'_2 \\ \qquad\qquad \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \qquad\qquad a'_{m\,2}\cdot x_2 + \ldots + a_{m\,n}\cdot x_n = b'_m \end{cases} \qquad (3.2)$$

Як ми знаємо, система рівнянь (3.2) еквівалентна системі (3.1). Будемо перетворювати систему (3.2), при цьому перші рівняння не будемо змінювати взагалі.

Ми припустимо, що в системі (3.2) немає рівняння, всі коефіцієнти лівої частини якого дорівнюють нулю і вільний член також дорівнює нулю. В іншому випадку ми б їх відкинули. А якщо б зустрілися рівняння вигляду:

$$0\cdot x_p + 0\cdot x_{p+1} = b_k \neq 0\ ,$$

то система була б несумісна. Отже, вважаємо що $a_{2\,2} \neq 0$.

Виконаємо перетворення системи (3.2), віднявши з обох частин 3-го і кожного з наступних рівнянь обидві частини 2-го рівняння, помножені відповідно на числа: $\frac{a_{3\,2}}{a_{2\,2}}, \frac{a_{4\,2}}{a_{2\,2}}, \ldots, \frac{a_{m\,2}}{a_{2\,2}}$.

Отже, буде виключено невідоме x_2 із усіх рівнянь, крім 1-го та 2-го. У результаті отримаємо систему (3.3), еквівалентну системі (3.2), а тому й системі (3.1).

$$\begin{cases} a_{1\,1}\cdot x_1 + a_{1\,2}\ \cdot x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + a_{1\,n}\ \ \cdot x_n = b_1 \\ \qquad\qquad a'_{2\,2}\cdot x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + a'_{2\,n}\ \ \cdot x_n = b'_2 \\ \qquad\qquad\qquad a''_{3\,3}\cdot x_3 + \ \ldots + a''_{3\,n}\ \ \cdot x_n = b''_3 \\ \qquad\qquad\qquad \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \qquad\qquad\qquad a''_{s\,3}\cdot x_3 + \cdots\ + a''_{s\,n}\ \ \cdot x_n = b''_s \end{cases} \qquad (3.3)$$

У системі (3.3) s рівнянь. Так як деякі рівняння можуть бути відкинуті, то $s \leq m$. Аналогічно продовжуємо виключати решту невідомих до тих пір, поки:

а) у процесі елементарних перетворень системи ми приходимо до несумісної системи;

б) отримаємо наступну систему рівнянь, еквівалентну системі (3.1):

$$
\begin{cases}
a_{1\,1}\cdot x_1 + a_{1\,2}\cdot x_2 + \ldots + a_{1\,k} \quad \cdot x_k + \ldots + a_{1\,n} \quad \cdot x_n = b_1 \\
\qquad\qquad a'_{2\,2}\cdot x_2 + \ldots + a'_{2\,k} \quad \cdot x_k + \ldots + a'_{2\,n} \quad \cdot x_n = b'_2 \\
\cdot\;\cdot \\
\qquad\qquad\qquad\qquad a_{k\,k}^{(k-1)}\cdot x_k + \ldots + a_{k\,n}^{(k-1)}\cdot x_n = b_k^{(k-1)}
\end{cases}
\tag{3.4}
$$

Система (3.4) називається *трапецієподібною при* $k \leq n$.

Висновок. В цьому випадку система (3.1) – сумісна. Вона буде визначеною при $k = n$ і невизначеною при $k < n$.

1. Дійсно, якщо $k = n$, то система (3.4) має вигляд:

$$
\begin{cases}
a_{1\,1}\cdot x_1 + a_{1\,2}\cdot x_2 + \cdots + a_{1\,n}\cdot x_n = b_1 \\
\qquad\qquad a_{2\,2}\cdot x_2 + \cdots + a_{2\,n}\cdot x_n = b_2 \\
\qquad\qquad \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad a_{n\,n}\cdot x_n = b_n
\end{cases}
\tag{3.5}
$$

Система (3.5) називається *трикутною* (або система має трикутну форму). З останнього рівняння отримаємо певне значення для невідомого x_n. Підставляючи його в передостаннє рівняння, знайдемо єдине значення для невідомого x_{n-1}. Далі, продовжуючи таким чином, ми переконаємося у тому, що система (3.5), а з нею і система (3.1) мають єдиний розв’язок.

Отже, система (3.1) – сумісна і визначена.

2. Якщо $k < n$, то для «вільних» невідомих $x_{k+1}, \ldots, x_n$, візьмемо довільні числові значення, після чого, рухаючись по системі (3.4) знизу вгору, ми, як і раніше, знайдемо для невідомих $x_k, x_{k+1}, \ldots, x_2, x_1$ певні значення. Завдяки тому, що, значення для вільних невідомих можна обрати нескінченним числом способів, система (3.4), а з нею і система (3.1) будуть сумісними, але невизначеними.

Легко перевірити, що при будь-яких виборах значень для вільних невідомих, будуть знайдені всі розв’язки системи (3.1).

Основний результат за методом Гаусса.

Метод Гаусса застосовується до будь-якої системи лінійних рівнянь. При цьому, система буде несумісною, якщо в процесі перетворень, ми отримаємо рівняння, в якому коефіцієнти при всіх невідомих дорівнюють нулю, а вільний член не дорівнює нулю.

Якщо ж ми такого рівняння не зустрінемо, то система буде сумісною. Сумісна система рівнянь буде визначеною, якщо вона зводиться до трикутного вигляду (3.5), і невизначеною, якщо зводиться до трапецієподібного вигляду (3.4) при $n < k$.

Зауваження. На практиці, при розв'язуванні методом Гаусса, слід виписати матрицю складену із коефіцієнтів системи, приєднати до неї стовпчик із вільних членів, для зручності відокремлений вертикальною лінією, і всі перетворення використовувати з рядками цієї «розширеної» матриці.

Приклад. Розв'язати систему за методом Гаусса

$$\begin{cases} 2x - 4y + 3z = 1 \\ \ \ x - 2y + 4z = 3 \\ 3x - \ \ y + 5z = 2 \end{cases}.$$

Розв'язування. Напишемо розширену матрицю системи:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 4 & 3 \\ 3 & -1 & 5 & 2 \end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 3 \\ 2 & -4 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 5 & 2 \end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & -5 & -5 \\ 0 & 5 & -7 & -7 \end{array}\right) \leftrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 3 \\ 0 & 5 & -7 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Останню матрицю трансформуємо в систему рівнянь:

$$\begin{cases} x - 2y + 4z = -\,3 \\ \qquad 5y - 7z = -7 \\ \qquad\qquad\ \ z = -\,1 \end{cases}$$

Ця система має трикутну форму $\Longrightarrow$ вона визначена, тобто має єдиний розв'язок $x = -1,\ y = 0,\ z = 1.$ Розв'язок: $(-1; 0; 1)$.

Введемо поняття лінійної однорідної системи рівнянь.

3.2.3. Системи лінійних однорідних рівнянь метод Гаусса

Означення. Лінійне рівняння називається *однорідним*, якщо його вільний член дорівнює нулю. Система лінійних рівнянь, у якої всі рівняння лінійні і однорідні, називається *системою лінійних однорідних рівнянь.*

Загальний вигляд системи однорідних рівнянь:

$$
\begin{cases}
a_{1\,1} \cdot x_1 + a_{1\,2} \cdot x_2 + \cdots + a_{1\,n} \cdot x_n = 0 \\
a_{2\,1} \cdot x_1 + a_{2\,2} \cdot x_2 + \cdots + a_{2\,n} \cdot x_n = 0 \\
\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\
a_{m\,1} \cdot x_1 + a_{m\,2} \cdot x_2 + \cdots + a_{m\,n} \cdot x_n = 0
\end{cases}
$$

Означення. Розв'язок системи рівнянь, у якому всі компоненти дорівнюють нулю, називається *нульовим (тривіальним) розв'язком***.**

Твердження. Будь-яка система лінійних однорідних рівнянь має нульовий розв'язок $(0, 0, \dots ,0)$, тобто завжди є сумісною. Ненульові розв'язки, якщо вони існують, можна знайти методом Гауса. *(див. п. 3.2.2)*.

4. Лекція № 4. Загальна теорія лінійних систем

4.1. Критерій сумісності системи лінійних рівнянь

Нехай задано систему лінійних рівнянь (3.1). Напишемо матрицю A та розширену матрицю $\bar{A}$ системи (3.1).

$$A=\begin{pmatrix} a_{1\,1} & a_{1\,2} & \dots & a_{1\,n} \\ a_{2\,1} & a_{2\,2} & \dots & a_{2\,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m\,1} & a_{m\,2} & \dots & a_{m\,n} \end{pmatrix}, \qquad \bar{A}=\left(\begin{array}{cccc|c} a_{1\,1} & a_{1\,2} & \dots & a_{1\,n} & b_1 \\ a_{2\,1} & a_{2\,2} & \dots & a_{2\,n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \cdots \\ a_{m\,1} & a_{m\,2} & \dots & a_{m\,n} & b_m \end{array}\right)$$

Сформулюємо критерій Кронекера-Капеллі сумісності системи лінійних рівнянь.

Теорема Кронекера-Капеллі: Для того, щоб система лінійних рівнянь була сумісною, необхідно і достатньо, щоб ранг матриці цієї системи дорівнював рангу розширеної матриці цієї системи, тобто $rangA = rang\bar{A}$.

4.2. Критерій визначеності системи лінійних рівнянь

Теорема. Сумісна система лінійних рівнянь (3) є визначеною тоді і лише тоді, коли ранг матриці цієї системи дорівнює числу невідомих, тобто $rangA = n$.

Приклад. Дослідити на сумісність і визначеність систему рівнянь:

$$\begin{cases} 2x_1 + 1x_2 - 1x_3 - 3x_4 = 2 \\ 4x_1 + 1x_2 + 1x_3 - 7x_4 = 3 \\ 0x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 3x_4 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 - 2x_4 = 3 \end{cases}$$

Розв'язування. Напишемо основну і розширену матриці системи:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -3 \\ 4 & 0 & 1 & -7 \\ 0 & 2 & -3 & 1 \\ 2 & 3 & -4 & -2 \end{pmatrix}, \bar{A}=\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & -3 & 2 \\ 4 & 0 & 1 & -7 & 3 \\ 0 & 2 & -3 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -4 & -2 & 3 \end{array}\right)$$

1. Тому, що $rang\,A = rang\,\bar{A} = 2$, система є сумісною завдяки критерію Кронекера-Капеллі.

2. Тому, що $rang\ A = 2$, але $n = 4$, тобто $rang\ A \neq n$, завдяки критерію визначеності системи, наша система невизначена, отже, вона має безліч розв'язків.

4.3. Розв'язування довільних систем лінійних рівнянь

Нехай в системі лінійних рівнянь (4.1) $rang\ A = rang\ \overline{A} = r$, система (4.1) сумісна.

$$\begin{cases} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \cdots + a_{1n} \cdot x_n = b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \cdots + a_{2n} \cdot x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + \cdots + a_{mn} \cdot x_n = b_m \end{cases} \qquad (4.1)$$

Будемо вважати, що базисний мінор, розташований у перших r рядках ($1 \leq r \leq \min(m,n)$) і стовпцях матриці А.

Відкинувши останні (m- r) рівняння системи (4.1), напишемо *систему, скорочену,* яка еквівалентна початковій, тому, що всі (m- r) рівняння є лінійною комбінацією r- перших рівнянь системи

$$\begin{cases} a_{11} \cdot x_1 + \cdots + a_{1r} \cdot x_r + a_{1,r+1} \cdot x_{r+1} + \ldots + a_{1n} \cdot x_n = b_1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots . \\ a_{r1} \cdot x_r + \cdots + a_{rr} \cdot x_r + a_{r,r+1} \cdot x_{r+1} + \ldots + a_{rn} \cdot x_n = b_r \end{cases} \qquad (4.2)$$

Система (4.2) – скорочена система, яка відповідає системі (4.1). Назвемо $x_1, x_2, \ldots, x_r$ - базисними, а $x_{r+1}, \ldots, x_r$– вільними невідомими і перенесемо доданки, які містять вільні невідомі, у праву частину рівняння (4.2).

У результаті отримаємо систему відносно базисних невідомих

$$\begin{cases} a_{11} \cdot x_1 + \cdots + a_{1r} \cdot x_r = b_1 - a_{1,r+1} \cdot x_{r+1} - \cdots - a_{1n} \cdot x_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots , \\ a_{r1} \cdot x_r + \cdots + a_{rr} \cdot x_r = b_r - a_{1,r+1} \cdot x_{r+1} - \cdots - a_{rn} \cdot x_n \end{cases} \qquad (4.3)$$

яка для кожного набору значень вільних невідомих $x_{r+1} = C_1 \ldots, x_n = C_{n-r}$ має єдиний розв'язок $x_1(C_1, \ldots, C_{n-r})$, $x_2(C_1, \ldots, C_{n-r})$, ..., $x_r(C_1, \ldots, C_{n-r})$, який можна знайти за правилом Крамера.

Відповідний розв'язок скороченої, а, відповідно, і початкової системи має вигляд

$$(x_1(C_1, \ldots, C_{n-r}), \ldots, x_r(C_1, \ldots C_{n-r}), C_1, \ldots, C_{n-r}) \qquad (4.4)$$

Приклад. Дослідити сумісність і знайти розв'язок системи

$$\begin{cases} x_1 + \ \ x_2 - 2x_3 - \ \ x_4 + \ \ x_5 = 1 \\ 3x_1 - \ \ x_2 + \ \ x_3 + 4x_4 + 3x_5 = 4 \\ x_1 + 5x_2 - 9x_3 - 9x_4 + \ \ x_5 = 0 \end{cases}$$

Розв'язання. Переконаємось, що $rang\,A = rang\,\overline{A} = 2$ => система сумісна.

$n = 5,\ r = rang\,A = 2 \Rightarrow n - r = 3,$ тобто вільних невідомих 3: x_3, x_4, x_5.

Невідомі x_1, x_2 – базисні, тому що базисний мінор d = $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -40.$

$n = 5,\ m = 3 \Rightarrow$ система невизначена. $rang\,A = 2 < n = 5.$

Розглянемо скорочену систему:

$$\begin{cases} x_1 + \ \ x_2 = 1 + 2x_3 + \ \ x_4 - \ \ x_5 \\ 3x_1 - \ \ x_2 = 4 - \ \ x_3 - 4x_4 - 3x_5 \end{cases}$$

Вона визначена і сумісна, d = -4≠0. Розв'язуємо систему за правилом Крамера:

$d_1 = \begin{vmatrix} 1 + 2x_3 + \ \ x_4 - \ \ x_5 & 1 \\ 4 - \ \ x_3 - 4x_4 - 3x_5 & -1 \end{vmatrix} = -5 - x_3 + 3x_4 + 4x_5.$

$d_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 + 2x_3 + \ \ x_4 - \ \ x_5 \\ 3 & 4 - \ \ x_3 - 4x_4 - 3x_5 \end{vmatrix} = 1 - 7x_3 - 7x_4$ =>

$$\begin{cases} x_1 = \frac{d1}{d} = \frac{5}{4} + \frac{1}{4}x_3 - \frac{3}{4}x_4 - \ \ x_5 \\ x_2 = \frac{d2}{d} = -\frac{1}{4} + \frac{7}{4}x_3 + \frac{7}{4}x_4 \end{cases}$$ - загальний розв'язок системи.

4.4. Системи лінійних однорідних рівнянь. Загальна теорія

Застосуємо отримані нами попередні результати до випадку системи лінійних однорідних рівнянь:

$$\begin{cases} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \cdots + a_{1n} \cdot x_n = 0 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \cdots + a_{2n} \cdot x_n = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + \cdots + a_{mn} \cdot x_n = 0 \end{cases} \quad (4.5)$$

Система (4.5) завжди сумісна. Завжди маємо принаймні один розв'язок - (0,0,…,0).

Висновки.

1. Нехай rang $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{r}$. Якщо $r = n$, то нульовий розв'язок буде єдиним розв'язок системи (4.5); якщо $r < n$ – система має також розв'язки, що не дорівнюють нулю.

2. Система n лінійних рівнянь однорідних із n невідомими тоді і лише тоді має розв'язки, не рівні нулю, коли $detA = 0$, $detA = 0 \Leftrightarrow rangA < n$.

3. Якщо в системі однорідних рівнянь число рівнянь менше числа невідомих, то система має розв'язки, відмінні від нульового.

Властивості розв'язків системи (4.5):

1. Якщо $(b1, b2, \dots, bn)$ - розв'язок системи (4.5), то для будь-якого k : $(kb1, kb2, \dots, kbn)$ - розв'язок системи (4.5).

2. Якщо $(C_1, C_2, \dots, C_n)$ - ще один розв'язок системи (4.5), то $(b1 + C1, b2 + C2, \dots, bn + Cn)$ - розв'язок системи (4.5).

Приклад. Знайти загальний розв'язок однорідної системи

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 8x_3 + 2x_4 + x_5 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 7x_4 + 2x_5 = 0 \\ x_1 + 11x_2 - 12x_3 + 34x_4 - 5x_5 = 0 \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 16x_4 + 3x_5 = 0 \end{cases}$$

Розв'язування. Перевірити: $rangA = 2$.

$n = 5 \;\; => \;\; n - r = 5 - 2 = 3 => x1, x2$ – базисні, x_3, x_4, x_5 – вільні невідомі.

Складемо і розв'яжемо скорочену систему:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 8x_3 + 2x_4 + x_5 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 7x_4 + 2x_5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x_1 + x_2 = 8x_3 - 2x_4 - x_5 \\ 2x_1 - 2x_2 = 3x_3 + 7x_4 - 2x_5 \end{cases}$$

$$d = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -8 .$$

За правилом Крамера: $d1 = \begin{vmatrix} 8x_3 - 2x_4 - x_5 & 1 \\ 3x_3 + 7x_4 - 2x_5 & -2 \end{vmatrix} = -19x3 - 3x4 + 4x5,$

$$\mathrm{d2} = \begin{vmatrix} 3 & 8x_3 - 2x_4 - x_5 \\ 2 & 3x_3 + 7x_4 - 2x_5 \end{vmatrix} = -7x3 + 25x4 - 4x5 \;\; =>$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{19}{8} x_3 + \frac{3}{8} x_4 - \frac{1}{2} x_5 \\ x_2 = \frac{7}{8} x_3 - \frac{25}{8} x_4 + \frac{1}{2} x_5 \end{cases}$$ - загальний розв'язок системи.

Глава 2. Елементи векторної алгебри

5. Лекція № 5. Вектори. Лінійні операції над векторами. Координати вектора у прямокутній декартовій системі координат

5.1.Основні означення

Обираючи та розробляючи математичні методи розв'язування прикладних задач певного змісту, застосовують як скалярні, так і векторні величини.

Скалярна величина (від лат. scala - шкала) - це величина, яка є результатом порівняння цієї величини з деякою одиницею виміру.

Прикладами скалярних величин можуть бути маса, щільність, робота, сила струму, температура, середній розмір заробітної плати.

Векторна величина (від лат. vehere - тягнути) - це величина, яка характеризується не тільки деяким числовим значенням, а й певним напрямком у просторі і зображується у вигляді напрямлених відрізків - геометричних векторів.

Вектор, відповідно до конкретного змісту зображуваної величини, визначається своїм модулем (довжиною) і розташуванням у просторі: напрямком і лінією дії або напрямком і точкою прикладання (наприклад, сили). Отже, коротко, можна сказати, що *вектор – це напрямлений відрізок прямої*.

Модулем або абсолютною величиною вектора називають довжину цього вектора у відповідних одиницях.

Пряма, на якій лежить вектор, називається лінією дії або основою.

Напрямок вектора $\vec{a}$ при графічних побудовах позначається стрілкою на його кінці. Напрямок вектора в просторі визначають кути, які він утворює з осями координат. Зазвичай обчислюють косинуси цих кутів. Їх називають напрямними косинусами вектора.

Точка, з якою суміщається початок вектора, називається точкою його прикладання.

У багатьох випадках вектори можна переносити або по лінії їх дії, або у будь-яку точку простору паралельно самим собі. Згідно з цим, вектори бувають:

- вільні - це вектори, які можна переносити у будь-яку точку простору паралельно самим собі; такі вектори повністю характеризуються модулем і напрямком у просторі;

- ковзні вектори зображають величини, кожну з яких, не порушуючи її змісту і числового значення, можна перенести до будь-якої точки деякої прямої; ковзні вектори характеризуються модулем, напрямком і лінією дії;

- нерухомі, або зв’язні, вектори зображають величини, кожна з яких відноситься до деякої фіксованої точки простору; зв'язні вектори характеризуються модулем, напрямком і точкою прикладання.

У курсі вищої математики вивчаються правила застосування основних операцій над вільними векторами.

Переходячи до вивчення основних операцій над векторами, введемо необхідну символіку та основні означення.

Вектори, як правило, записують двома буквами латинського алфавіту, що позначають початок і кінець вектора $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \dots\right)$, або однією буквою $\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \dots\right)$. Модуль вектора позначається так: $\left|\overrightarrow{AB}\right|, |\vec{a}|$ або a .

Нульовим називається такий вектор, у якого початок і кінець збігаються. Цей вектор позначають $\vec{0}$. Модуль нульового вектора дорівнює нулю. Напрям цього вектора вважають невизначеним. Інколи зручно вважати нульовий вектор паралельним (колінеарним) або перпендикулярним будь – якому вектору.

Вектори, які лежать на одній прямій або на паралельних прямих, називаються *колінеарними*. Нуль-вектор вважають колінеарним будь-якому іншому вектору. Колінеарність позначають символом $\|$: $\vec{a}\|\vec{b}.$ Вектор, довжина якого дорівнює "1", називається *одиничним* вектором. Одиничний вектор, який колінеарний вектору $\vec{a}$ і має з ним однаковий напрям, називається *ортом вектора* $\vec{a}$ і позначається $\overrightarrow{a_0}(|\vec{a}| = 1)$.

Вектори, які містяться в одній або паралельних площинах, називаються *компланарними*.

Рівними векторами називаються співнапрямлені (мають один і той самий напрямок) колінеарні вектори, що мають однакові модулі.

Протилежними векторами називаються такі колінеарні вектори, які є протилежно напрямленими і мають однакові модулі. Вектор, протилежний вектору $\vec{a}$, позначають через $-\vec{a}$.

5.2. Лінійні операції над векторами

Лінійними операціями над векторами називаються операції додавання векторів та множення векторів на числа (скаляри).

При виконанні графічних операцій над векторами вектори задають графічно в певному масштабі.

Означення суми двох векторів. Нехай задано два вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$. *Сумою* $\vec{a} + \vec{b}$ називається вектор, який іде з початку вектора $\vec{a}$ в кінець вектора $\vec{b}$, за умови, що початок вектора $\vec{b}$ збігається з кінцем вектора $\vec{a}$.

Це означення ще іноді називають правилом трикутника (многокутника) додавання векторів. Отже, щоб додати вектор $\vec{a}$ до вектора $\vec{b}$, необхідно:

- за допомогою паралельного перенесення помістити початок вектора $\vec{b}$ в кінець вектора $\vec{a}$;

- вектор, що з'єднує початок вектора $\vec{a}$ із кінцем вектора $\vec{b}$, буде сумою даних векторів (рис. 5.1).

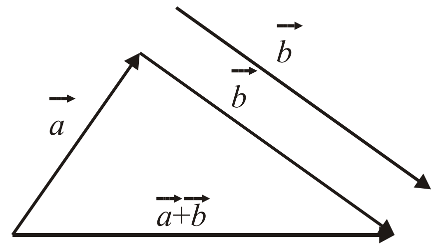

Рис. 5.1

Зауваження. У випадку застосування правила трикутника до обчислення суми векторів, коли їх кількість є більшою або дорівнює трьом, завдяки відповідній побудові, одержуємо многокутник. Тому це правило називають ще правилом многокутника.

Також іноді буває зручно застосовувати *правило паралелограма* при додаванні векторів, яке є, очевидно, наслідком правила трикутника. Для того щоб додати вектор $\vec{a}$ до вектора $\vec{b}$ за правилом паралелограма, необхідно:

- за допомогою паралельного перенесення звести ці вектори до спільного початку;

- на цих векторах, як на сторонах, побудувати паралелограм;

- вектор, що збігається з діагоналлю одержаного паралелограма і виходить із спільного початку даних векторів, буде сумою цих векторів (рис. 5.2).

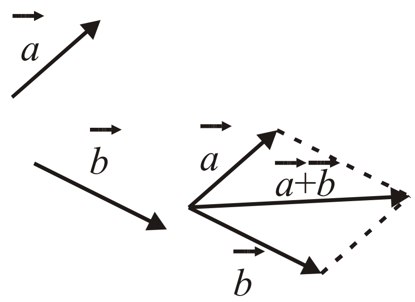

Рис. 5.2

Властивості суми векторів:

а) $\vec{a}+\ \vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ (комутативний закон);

б) $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ (асоціативний закон);

в) $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$ (сума двох протилежних векторів дорівнює нуль-вектору).

Різниця векторів.

У векторній алгебрі вводиться дія віднімання векторів, що є, як і у арифметиці, оберненою до дії додавання.

Означення. Різницею $\vec{b}-\vec{a}$ називається вектор, який у сумі з вектором $\vec{a}$ складає вектор $\vec{b}$.

Правило. Щоб відняти вектор $\vec{b}$ від вектора $\vec{a}$, необхідно:

-за допомогою паралельного перенесення звести дані вектори до спільного початку;

-вектор, який з'єднує кінці даних векторів і напрямлений у бік вектора зменшуваного, буде різницею даних векторів (рис. 5.3.).

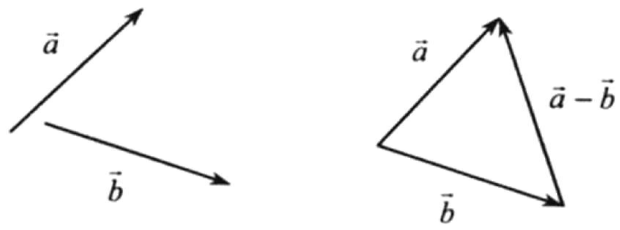

Рис. 5.3

Приклад. У ΔABC проведено медіани $\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BE}, \overrightarrow{CK}$ (рис.5.4). Довести, що $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CK}=0$

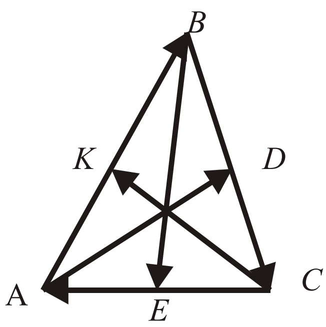

Рис. 5.4

Доведення. Завдяки тому, що точки D, E, K ділять відповідні сторони ΔABC навпіл, із ΔABC, ΔBCE, ΔKCA, відповідно маємо:

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}; \quad \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CA}; \quad \overrightarrow{CK} = \overrightarrow{CA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}.$$

Додавши ліві та праві частини цих рівностей, отримаємо

$$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CK} = \frac{3}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}\right) = 0,$$

що й необхідно було довести.

Приклад. Дано: $|\vec{a}| = 11, |\vec{b}| = 23, |\vec{a} - \vec{b}| = 30$. Знайти $|\vec{a} + \vec{b}|$.

Розв'язування. Вектори $|\vec{a} + \vec{b}|$та $|\vec{a} - \vec{b}|$ є діагоналями паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ та $\vec{b}$ як на сторонах (рис. 5.5).

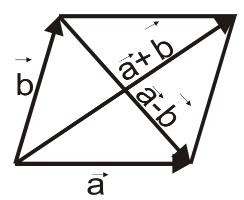

Рис. 5.5

Відомо, що сума квадратів довжин діагоналей паралелограма дорівнює сумі квадратів довжин всіх його сторін. Отже,

$$|\vec{a} + \vec{b}\,|^2 + |\vec{a} + \vec{b}\,|^2 = \sqrt{2(11^2 + 23^2) - 30^2 = 20}.$$

Добуток вектора на число (скаляр).

Означення. Добутком вектора $\vec{a}$ на скаляр λ називається вектор $\vec{a}$, який задовольняє такі умови:

1) $\vec{b} = \lambda\vec{a}, |\vec{b}| = |\lambda||\vec{a}|$ (вектор $\vec{b}$ колінеарний вектору $\vec{a}$).

2) Якщо $\lambda > 0$, то вектори $\vec{a}$ і $\lambda\vec{a}$ співнапрямлені, якщо $\lambda < 0$, то вектори $\vec{a}$ та $\lambda\vec{a}$ протилежно напрямлені.

3) Якщо $|\lambda| > 1$, то $|\lambda\vec{a}| > |\vec{a}|$;

4) Якщо $|\lambda| < 1$, то $|\lambda\vec{a}| < |\vec{a}|$.

Загалом операцію множення вектора $\vec{a}$ на число λ можна тлумачити як відповідну деформацію (розтягнення або стискання) вектора $\vec{a}$ у λ разів зі зміною його напрямку, якщо $\lambda < 0$ (рис.5.6).

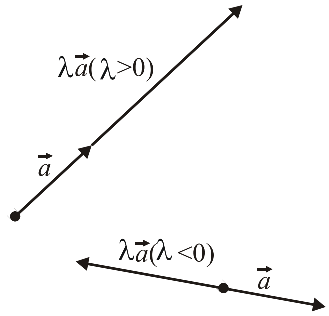

Рис. 5.6

Зауваження. Різницю векторів можна зобразити у вигляді суми: $\vec{b}-\vec{a}=\vec{b}+(-1)\vec{a}$, тому часто не виокремлюють різницю, а операції додавання та віднімання векторів називають сумою векторів.

Властивості добутку вектора на скаляр:

а) $\lambda\vec{a}=\vec{a}\lambda$;

б) $\lambda_1\lambda_2\vec{a}=(\lambda_1\lambda_2)\vec{a}$;

в) $(\lambda_1\lambda_2)\vec{a}=\lambda_1\vec{a}+\lambda_2\vec{a}$;

г) $\lambda(\vec{a}_1+\vec{a}_2)=\lambda\vec{a}_1+\lambda\vec{a}_2$;

д) $\vec{a}=|\vec{a}|\vec{a}_0$; $\vec{a}_0$ – орт вектора $\vec{a}$.

Приклад. Довести, що вектори що

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CB}+2\overrightarrow{BA}$ та $\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ є колінеарними.

Доведення. Застосовуючи властивості операцій над векторами, отримаємо

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CB}+2\overrightarrow{BA}=\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}\right)+\left(\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BC}\right)=\vec{0}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{AC}.$$

Отже, задане число $k=-\frac{1}{3}$ є таким, що задовольняє рівність:

$$-\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}=k\cdot\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CB}+2\overrightarrow{BA}\right).$$

За ознакою колінеарності векторів задані в умові вектори є колінеарними.

5.3. Лінійна залежність та незалежність векторів

Лінійною комбінацією векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ називається вектор

$\vec{a} = \beta_1\vec{a}_1 + \beta_2\vec{a}_2 + \dots + \beta_n\vec{a}_n$, де $\beta_1\beta_2, \dots, \beta_n$ - деякі скалярні множники (числа), які називаються коефіцієнтами лінійної комбінації.

Отже, лінійні комбінації векторів - це вектори, які отримують в результаті виконання деякої кількості лінійних операцій над даними векторами $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$.

Система векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ називається лінійно залежною, якщо рівність $\beta_1\vec{a}_1 + \beta_2\vec{a}_2 + \dots + \beta_n\vec{a}_n = \vec{0}$ є можливою за умови, що принаймні один із множників $\beta_1\beta_2, \dots, \beta_n$ відмінний від нуля.

Система векторів називається лінійно незалежною, якщо рівність $\vec{a} = \beta_1\vec{a}_1 + \beta_2\vec{a}_2 + \dots + \beta_n\vec{a}_n$ можлива тоді й лише тоді, коли всі

$\beta_k = 0, k \in \{1,2, \dots, n\}$; Якщо система векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ лінійно залежна, то принаймні один із цих векторів можна записати у вигляді лінійної комбінації інших векторів. Так, із умови, що $\beta_k \neq 0$, випливає, що

$$\vec{a}_k = \lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \dots + \lambda_{k-1}\vec{a}_{k-1} + \dots + \lambda_n\vec{a}_2,$$

де

$$\lambda_1 = -\frac{\beta_1}{\beta_k},\ \lambda_2 = -\frac{\beta_2}{\beta_k}, \dots, \lambda_n = -\frac{\beta_n}{\beta_k}.$$

Можна довести такі **твердження:**

- необхідною і достатньою ознакою лінійної залежності двох векторів є їх колінеарність; два неколінеарні вектори - лінійно незалежні;

- необхідною і достатньою ознакою лінійної залежності трьох векторів є їх компланарність; три некомпланарні вектори — лінійно незалежні.

5.4. Лінійний простір геометричних векторів

Розглянемо множину всіх геометричних векторів у просторі. Будь-яка лінійна комбінація довільного числа таких векторів є також геометричним вектором, тобто належить цій множині.

У межах даної множини виконуються такі умови:

- визначена операція додавання елементів множини (у результаті додавання сума є також елементом цієї множини);

- визначена операція множення елементів цієї множини на скалярний множник;

ці операції мають такі **властивост і**:

а) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ - комутативність відносно додавання векторів;

б) $\left(\vec{a} + \vec{b}\right) + \vec{c} = \overrightarrow{a} + \left(\vec{b} + \vec{c}\right)$ - асоціативність відносно додавання векторів;

в) $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$ - існування нульового елемента;

г) $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$ - існування протилежного елемента;

д) $\vec{a} \cdot 1 = \vec{a}$ - особлива роль одиничного числового множника;

е) $\lambda_1 (\lambda_2 \cdot \vec{a}) = (\lambda_1 \cdot \lambda_2)\vec{a}$ - асоціативність відносно добутку чисел;

є) _$\lambda (\vec{a}_1 + \vec{a}_2) = (\lambda\vec{a} + \lambda\vec{a}_2)$ - дистрибутивність відносно додавання векторів;

ж) $(\lambda_1 \cdot \lambda_2)\vec{a} = \lambda_1\vec{a} + \lambda_2\vec{a}$ - дистрибутивність відносно додавання чисел.

Множина геометричних векторів, у межах якої виконуються умови а) - ж), називається лінійним простором цих векторів. Найпростішими прикладами лінійних просторів геометричних векторів є:

- множина всіх колінеарних векторів;

- множина всіх компланарних векторів;

- множина всіх геометричних векторів.

Зауваження. Властивості, розглянуті в п. 1.3, мають не тільки множини геометричних векторів, а й інші множини найрізноманітнішої природи.

Наприклад, множина дійсних чисел відносно математичних операцій додавання і множення на дійсне число; множина всіх многочленів від однієї змінної степеня не вищих за n. Сума двох многочленів степеня не вищих за n і результату множення многочлена степеня $k \cdot (k \leq n)$ на скаляр належить початковій множині.

5.5. Векторний базис. Розкладання довільного вектора за базисом

Означення. Базисом лінійного простору називається така упорядкована сукупність лінійно незалежних векторів $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$, що кожен вектор цього простору можна тільки одним способом зобразити у вигляді їх лінійної комбінації.

Вважають, що:

$\vec{e}_1$ - перший базисний вектор;

$\vec{e}_2$ - другий базисний вектор і т.п.

Лінійний простір називається n мірним лінійним простором, якщо його базис складається з n векторів.

Базисом у 3мірному просторі називається сукупність трьох некомпланарних векторів, взятих у певному порядку: $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$.

Базисом на площині називається сукупність двох неколінеарних векторів, взятих у певному порядку: $\vec{e}_1, \vec{e}_2$.

Рівність $\vec{a} = \lambda_1\vec{e}_1 + \lambda_2\vec{e}_2 + \cdots + \lambda_n\vec{e}_n$ називається розкладом вектора $\vec{a}$ за базисом $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$. Вектори $\lambda_1\vec{e}_1, \lambda_2\vec{e}_2, \dots, \lambda_n\vec{e}_n$ називаються складовими вектора $\vec{a}$. За допомогою базису в n мірному просторі кожному вектору ставляться у відповідність n чисел $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. Числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ називаються координатами, або проекціями, вектора $\vec{a}$ у базисі $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$. У координатній формі вектор записують так: $\vec{a} = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$.

5.6. Лінійні операції над векторами, які задані своїми координатами

Правило 1. При додаванні або відніманні векторів, відповідно, додаються або віднімаються їхні відповідні координати. Тобто, якщо

$\vec{a} = \lambda_1\vec{e}_1 + \lambda_2\vec{e}_2, \vec{b} = \beta_1\vec{e}_1 + \beta_2\vec{e}_2$, то $\vec{a} \pm \vec{b} = (\lambda_1 \pm \beta_1)\vec{e}_1 + (\lambda_2 \pm \beta_2)\vec{e}_2$,

$$\left(\vec{a} \pm \vec{b}\right) = \{(\lambda_1 \pm \beta_1); (\lambda_2 \pm \beta_2)\}.$$

Правило 2. При множенні вектора на число його координати множаться на це число.

Теорема. Якщо два вектори колінеарні, то їх відповідні координати пропорційні.

Доведення. Справді, нехай $\vec{a} \| \vec{b}$, тоді $\vec{a} = k\vec{b}$. Якщо $\vec{a} = \lambda_1\vec{e}_1 + \lambda_2\vec{e}_2$, $\vec{b} = \frac{1}{k}\vec{a}$, то $\vec{b} = \frac{\lambda_1}{k}\vec{e}_1 + \frac{\lambda_2}{k}\vec{e}_2$. Далі маємо $\frac{\lambda_1}{\frac{\lambda_1}{k}} = \frac{\lambda_2}{\frac{\lambda_2}{k}} = k$.

Приклад. Довести, що вектори $\vec{a} = \{2; 0; 1\}$, $\vec{b} = \{1; -1; 2\}, \vec{c} = \{3; 1; 1\}$ лінійно незалежні.

Доведення. Лінійна незалежність векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ означає виконання рівності $\alpha \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{b} + \gamma \cdot \vec{c} = \vec{0}$ лише за умови $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Запишемо вищезгадану рівність у координатному вигляді $\{2\alpha + \beta + 3\gamma;\ -\beta + \gamma; \alpha + 2\beta + \gamma\} = \{0,0,0\}$. Застосувавши умову рівності двох векторів (вектори рівні, якщо рівні їх відповідні координати), отримаємо систему лінійних рівнянь

$$\begin{cases} \{2\alpha + \beta + 3\gamma = 0, \\ -\beta + \gamma = 0, \\ \alpha + 2\beta + \gamma = 0 \end{cases}$$

Відносно $\alpha, \beta, \gamma,$ яка має тільки нульовий розв'язок завдяки тому, що її визначник

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Звідси випливає, що вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ лінійно незалежні.

Приклад. У базисі векторів із попередньої задачі знайти координати вектора $\vec{d} = \{1; 1; 1\}$. Позначивши через α, β, γ, координати вектора$\vec{d}$ в базисі векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, маємо:

$$\vec{d} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}.$$

Ця векторна рівність є рівносильною таким трьом координатним:

$$\begin{cases} 2\alpha + \beta + 3\gamma = 1, \\ -\beta + \gamma = 1, \\ \alpha + 2\beta + \gamma = 1. \end{cases}$$

Отже, отримано систему лінійних рівнянь з трьома невідомими $\alpha, \beta, \gamma,$. Завдяки тому, що визначник цієї системи не дорівнює нулю, вона має єдиний розв'язок. Розв'язуючи цю систему, знаходимо $\alpha = -3,\ \beta = 1, \gamma = 2$. Тоді в базисі із векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ маємо $\vec{d} = \{-3; 1; 2\}$.

5.7. Ортогональна проекція вектора на вісь

Прям l у , на якій зафіксовано точку, додатний напрямок та одиницю виміру довжини, називають *віссю*. Як правило, додатний напрямок і одиницю довжини задають одночасно за допомогою одиничного вектора $\vec{l}_0$, колінеарного прямій l (рис. 5.7). Нехай із кінців заданого вектора $\overrightarrow{AB}$ опущено перпендикуляри AA_1 та BB_1 на вісь l. Тоді відрізок A_1B_1 називається *ортогональною проекцією* вектора $\overrightarrow{AB}$ на вісь l. Проекцію A_1B_1 можна розглядати як вектор $\overrightarrow{A_1B_1}$ або як скалярну величину – довжину відрізка A_1B_1. Така проекція отримала назву ортогональної тому, що із кінців вектора $\overrightarrow{AB}$ опускали перпендикуляри на вісь. Проекцію вектора на вісь можна отримати шляхом проектування кінців вектора на вісь у заданому напрямку, тобто паралельно якомусь заданому вектору, отже, вектори $\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{BB_1}$ можуть бути не перпендикулярними до осі l. В цьому випадку проекція вектора на вісь не є ортогональною.

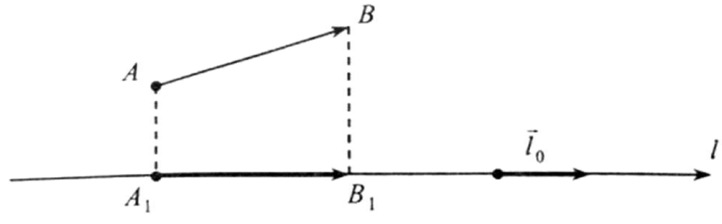

Рис. 5.7

Надалі ми матимемо справу тільки зі скалярними проекціями вектора на вісь і ортогональну проекцію називатимемо просто проекцією.

Означення. Проекцією вектора $\overrightarrow{AB}$ на вісь l називається число, модуль якого дорівнює довжині відрізка $\overrightarrow{A_1B_1}$ (рис. 5.8) цієї осі, що міститься між проекцією його початку (точки А) і кінця (точки В). Це число береться зі знаком «плюс», якщо напрямок вектора $\overrightarrow{A_1B_1}$ збігається з додатним напрямком осі, і зі знаком «мінус», якщо напрямок вектора $\overrightarrow{A_1B_1}$ і додатний напрям осі протилежні (рис. 5.8).

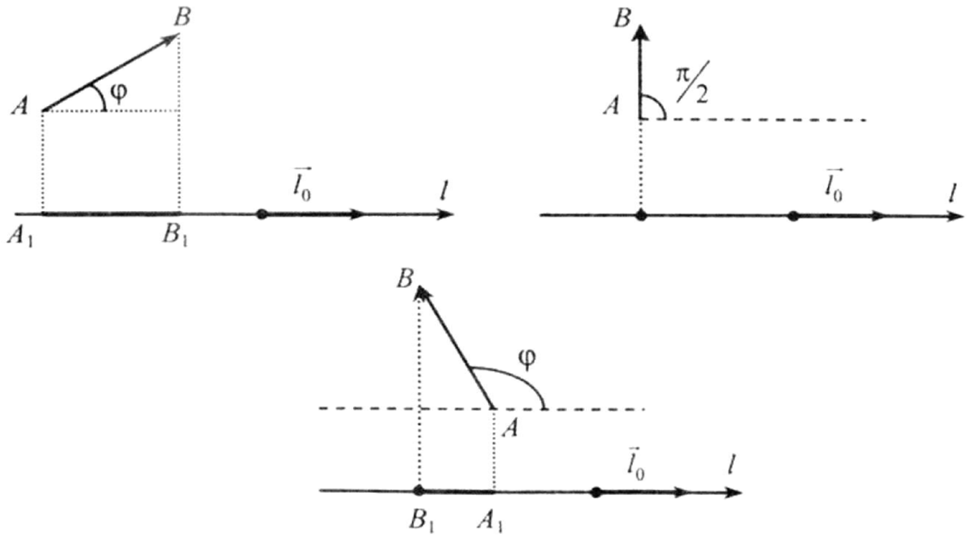

Рис. 5.8

Теорема. Проекція вектора $\overrightarrow{AB}$ на вісь l дорівнює добутку довжини вектора $\overrightarrow{AB}$ на косинус кута між цим вектором і віссю l.

Пишуть: $np_i = \left|\overrightarrow{AB}\right| \cos(\overrightarrow{AB}\ \hat{}\,, l)$.

При доведенні теореми застосовується таке правило: у прямокутному трикутнику катет дорівнює гіпотенузі, помноженій на косинус кута, прилеглого до цього катета. Ілюстрацію доведення теореми наведено на рис. 5.9,

де $\varphi = (\overrightarrow{AB}\ \hat{}\,, l)$.

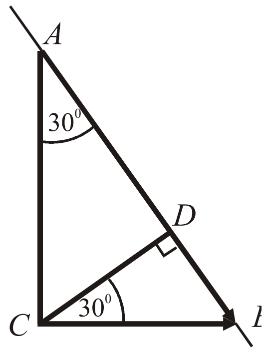

Рис. 5.9

Основні властивості проекцій векторів:

1) рівні вектори мають рівні проекції на одну й ту саму вісь;

2) проекція суми векторів на одну й ту саму вісь дорівнює сумі їх проекцій на цю саму вісь:

3) при множенні вектора на число його проекція множиться на це саме число:

$$np_1\left(k\cdot\overrightarrow{AB}\right)=k\cdot np_i\overrightarrow{AB};$$

4) проекція ненульового вектора на вісь дорівнює нулю, якщо вектор і вісь перпендикулярні.

Приклад. Задано прямокутний трикутник ABC, $\angle C=90^0, \angle A=30^0$. Нехай $\overrightarrow{AB}$ одиничний вектор. Знайти векторну і скалярну проекції вектора $\overrightarrow{CB}$ на вісь l , що визначається вектором $\overrightarrow{AB}$.

Розв'язування. Знайдемо проекції точок C та B на вісь l. Ними будуть відповідно точки D та B (рис.1.9) Тоді $\overrightarrow{DB}=np_{AB}-\overrightarrow{CB}.$ За властивістю прямокутного трикутника, що має кут у 30^0, отримаємо:

$|\overrightarrow{CB}|=\frac{1}{2}\ |\overrightarrow{AB}|$, $|\overrightarrow{DB}|=\frac{1}{2}\ |\overrightarrow{CB}|$, звідки $|\overrightarrow{DB}|=\frac{1}{4}\ |\overrightarrow{AB}|$.

Отже, $|\overrightarrow{DB}|=\frac{1}{4}\ |\overrightarrow{AB}|$, а звідси випливає, що $np_{AB}-\overrightarrow{CB}=\frac{1}{4}$.

5.8. Прямокутна декартова система координат

Означення. Множина, що складається з точки O і векторного базису $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$, називається декартовою системою координат у просторі і позначається $\{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ (рис. 5.10).

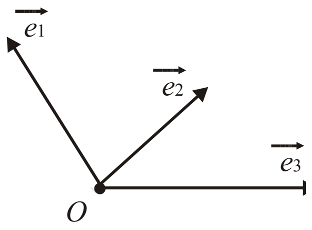

Рис. 5.10

Означення. Декартова система координат $\{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ у просторі називається прямокутною або ортогональною, якщо $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ - одиничні взаємно перпендикулярні вектори.

Якщо ж вектори $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ не є взаємно перпендикулярними, то таку систему координат називають афінною.

Базисні вектори $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ у прямокутній системі в просторі прийнято позначати відповідно через $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$. Вектор $\vec{\imath}$ визначає вісь OX, вектор $\vec{\jmath}$- вісьOY, вектор $\vec{k}$- вісь OZ.

Зауваження. Аналогічно визначається прямокутна декартова система координат на площині.

Прямокутні системи координат поділяються направу (рис.5.11) і ліву (рис.5.12) системи.

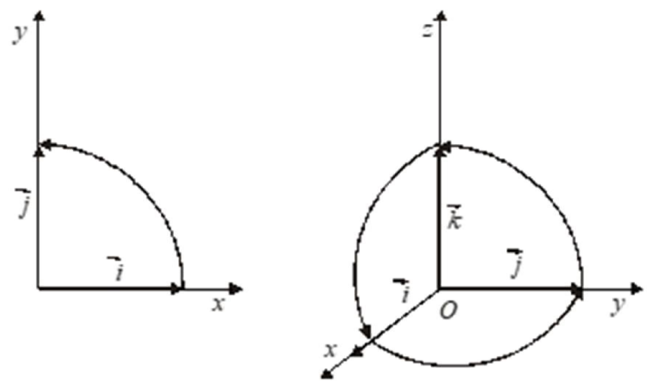

Рис. 5.11

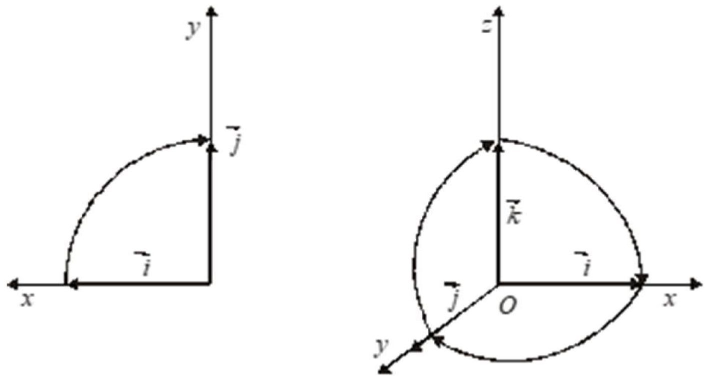

Рис. 5.12

Далі розглядатимемо тільки праві системи координат, де за додатний напрям обертання береться обертання «проти годинникової стрілки»: з кінця третього вектора $\vec{k}$ найкоротший поворот від першого вектора $\vec{\imath}$ і до другого вектора $\vec{\jmath}$ видно проти годинникової стрілки. Також надалі будемо користуватись тільки прямокутною декартовою системою координат.

5.9. Координати вектора у прямокутній системі координат

Нехай маємо в просторі деякий вектор $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ (рис.5.13). Розкладемо його на дві складові: $\vec{a}_z$ - паралельну осі OZ і $\vec{a}_{xy}$ - паралельну площині OXY. Тепер запишемо вектор $\vec{a}$ у вигляді $\vec{a} = \vec{a}_z + \vec{a}_{xy}$. Вектор $\vec{a}_{xy}$, у свою чергу, розкладемо на дві складові: $\vec{a}_x$ - паралельну осі OX і $\vec{a}_y$ - паралельну осі OY.

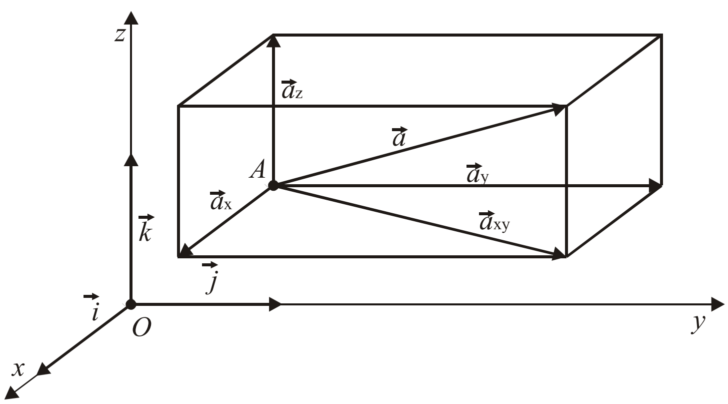

Рис. 5.13

Завдяки тому, що $\vec{a} = \vec{a}_z + \vec{a}_{xy}$ і $\vec{a}_{xy} = \vec{a}_x + \vec{a}_y$, маємо $\vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y + \vec{a}_z$. Такий запис вектора $\vec{a}$ називається його векторним розкладом за базисом.

Оскільки векторні складові, або компоненти $\vec{a}_x, \vec{a}_y, \vec{a}_z$, колінеарні відповідним базисним векторам $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$, то існують скалярні множники $\vec{a}_x, \vec{a}_y, \vec{a}_z$ такі, що

$$\vec{a}_x = a_x\vec{\imath}, \qquad \vec{a}_y = a_y\vec{\jmath}, \qquad \vec{a}_z = a_z\vec{k}.$$

На основі останніх рівностей розкладання вектора $\vec{a}$ за базисом $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ набуває вигляду $\vec{a} = a_x\vec{\imath} + a_y\vec{\jmath} + a_z\vec{k}$, де коефіцієнти розкладу $\vec{a}_x, \vec{a}_y, \vec{a}_z$ є проекціями вектора $\vec{a}$ на відповідні координатні осі і називаються його координатами. Координати вектора часто позначають так: X, Y, Z. Якщо відомі координати початку і кінця вектора: $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, то

$$\vec{a}_x = X = np_{ox}\vec{a} = x_2 - x_1;$$

$$\vec{a}_y = Y = np_{oy}\vec{a} = y_2 - y_1;$$

$$\vec{a}_z = Z = np_{oz}\vec{a} = z_2 - z_1.$$

Вектор $\vec{a}$ записують скорочено через його проекції або координати у вигляді:

$$\vec{a} = X\vec{\imath} + Y\vec{\jmath} + Z\vec{k},$$

$$\vec{a} = (x_2 - x_1)\vec{\imath} + (y_2 - y_1)\vec{\jmath} + (z_2 - z_1)\vec{k},$$

$$\vec{a} = \{X; Y; Z\}, , \vec{a} = \{(x_2 - x_1); (y_2 - y_1); (z_2 - z_1)\}. \qquad (5.1)$$

Приклад. Знайти координати вектора, якщо є відомими координати його початку та кінця: $A(3; 2; -1)$, $B(1; 0; 4)$.

Розв 'язування. Скористаємося формулою (5.1):

де, $\vec{a} = \vec{AB}$, $A(x_1 y_1 z_1)$, $B(x_2 y_2 z_2)$.

Отже, маємо:

$$\vec{AB} = (1 - 3)\vec{\imath} + (0 - 2)\vec{\jmath} + (4 + 1)\vec{k} = -2\vec{\imath} + 4\vec{\jmath} + 7\vec{k} \text{ або}$$

$$\overrightarrow{AB} = \{-2; 4; 7\}.$$

Приклад. Записати вектор $\vec{a} = \{2; 4; 7\}$ у вигляді суми складових.

Розв'язування. Якщо $\vec{a} = \{X; Y; Z\}$, то $\vec{a} = X\vec{\imath} + Y\vec{\jmath} + Z\vec{k}$. Отже, маємо $\vec{a} = 2 + 4\vec{\jmath} + 7\vec{k}$.

Зауваження. Лінійні операції над векторами, заданими проекціями в прямокутній декартовій системі координат, повністю збігаються з лінійними операціями над векторами, заданими своїми координатами при довільному базисі (розглянуті в п. 5.6).

Приклад. Дано вектори: $\vec{a} = \{3; -1; 4\}, \vec{b} = \{5; 0; 6\}$. Знайти $\vec{a} + \overrightarrow{b}$; $2\vec{a} - \vec{b}$.

Розв'язування: $\vec{a} + \vec{b} = 8\vec{\imath} - \vec{\jmath} + 10\vec{k}; \vec{a} + \overrightarrow{b};\ 2\vec{a} - \vec{b} = \vec{\imath} - \overrightarrow{2\jmath} + 2\vec{k}$..

5.10. Довжина вектора, заданого в координатній формі

Нам відома формула, яка визначає довжину відрізка AB через координати його кінців A, B. Якщо точки A та B взяти за точки початку і кінця вектора $\vec{A}B$, то $X = x_2 - x_1$, $Y = y_2 - y_1$, $Z = z_2 - z_1$, тоді формула для визначення довжини вектора матиме вигляд:

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}. \tag{5.2}$$

Приклад. Обчислити довжину вектора $\overrightarrow{AB} = \{1; -2; 2\}$

Розв'язування. На підставі формули (5.2) маємо $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{1 + 4 + 4} = 3$.

5.11. Напрямні косинуси вектора

За означенням проекції вектора на вісь маємо

$$X = np_{ox}\vec{A}B = \left|\vec{A}B\right| \cos(AB, OX) = \left|\vec{A}B\right| \cos\alpha,$$

$$X = np_{oy}\vec{A}B = \left|\vec{A}B\right| \cos(AB, OY) = \left|\vec{A}B\right| \cos\beta,$$

$$X = np_{oz}\vec{A}B = \left|\vec{A}B\right| \cos(AB, OZ) = \left|\vec{A}B\right| \cos\gamma.$$

Числа $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$, називаються *напрямними косинусами* вектора $\vec{A}B$. Напрямні косинуси пов'язані між собою співвідношенням

$$cos^2\alpha + cos^2\beta + cos^2\gamma = 1. \tag{5.3}$$

$$\left|\overrightarrow{AB}\right|^2 = X^2 + Y^2 + Z^2,$$

звідки

$$\left|\overrightarrow{AB}\right|^2 = \left|\overrightarrow{AB}\right|^2 cos^2\alpha + \left|\overrightarrow{AB}\right|^2 cos^2\beta + \left|\overrightarrow{AB}\right|^2 cos^2\gamma = \left|\overrightarrow{AB}\right|^2 (cos^2\alpha +$$

$$+cos^2\beta + cos^2\gamma).$$

Якщо скоротити ліву і праву частини рівностей на $\left|\overrightarrow{AB}\right|^2$, то дістанемо

$$cos^2\alpha + cos^2\beta + cos^2\gamma = 1.$$

З наведених формул можна вивести формули для обчислення $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ для вектора $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \{X, Y, Z\}$:

$$\cos\alpha = \frac{X}{\left|\overrightarrow{AB}\right|}, \qquad \cos\beta = \frac{Y}{\left|\overrightarrow{AB}\right|}, \qquad \cos\gamma = \frac{Z}{\left|\overrightarrow{AB}\right|} \qquad (5.4)$$

Приклад. Обчислити напрямні косинуси вектора $\vec{A}B$, якщо

$$A(1; -1; 3), \quad B(2; 1; 1).$$

Розв'язування. Координатами вектора $\vec{A}B$ є: $X = 1; Y = 2; Z = -2$, тоді

$\left|\vec{A}B\right| = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2} = 3$ і за формулою (5.4)

$$\cos\alpha = \frac{X}{\left|\overrightarrow{AB}\right|} = \frac{1}{3}, \qquad \cos\beta = \frac{Y}{\left|\overrightarrow{AB}\right|} = \frac{2}{3}, \qquad \cos\gamma = \frac{Z}{\left|\overrightarrow{AB}\right|} = \frac{-2}{3}.$$

Приклад. Вектор $\overrightarrow{AB}$ утворює з осями OX та OY кути по 60°. Який кут він утворює з віссю OZ?

Розв'язування. Із співвідношення (5.3) маємо $cos^2 60° + cos^2 60° + cos^2\gamma = 1$, а оскільки $cos^2 60° = \frac{1}{2}$, то, $cos^2\gamma = \frac{1}{2}$ і, отже, $\cos\gamma = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Значення $\gamma = \pm\frac{\pi}{4}$ відповідає двом векторам, які симетричні одне одному відносно координатної площини OXY.

6. Лекція № 6. Скалярний добуток векторів та його властивості

6.1. Скалярний добуток двох векторів

Означення. Скалярним добутком двох векторів називають число, яке обчислюється як добуток довжин цих векторів на косинус кута між ними:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos(\vec{a}^\wedge\vec{b}) = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi.$$

Зауваження. В літературі можна зустріти різні способи позначення скалярного добутку векторів, наприклад: $\vec{a}\cdot\vec{b}$, $(\vec{a}\cdot\vec{b})$, $\vec{a}\vec{b}$.

За означенням проекції вектора на вісь маємо:

$$np_{\vec{a}}\vec{b} = |\vec{b}|\cos(\vec{a}^\wedge\vec{b}) = |\vec{b}|\cos\varphi,$$

$$np_{\vec{b}}\vec{a} = |\vec{a}|\cos(\vec{a}^\wedge\vec{b}) = |\vec{a}|\cos\varphi.$$

Підставивши ці співвідношення у формулу для скалярного добутку двох векторів, дістанемо

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|np_{\vec{a}}\vec{b} = |\vec{b}|np_{\vec{b}}\vec{a}\ .$$

Скалярний добуток двох векторів дорівнює добутку довжини одного з них на проекцію другого вектора на напрям першого.

Зауваження. Скалярний добуток вектора $\vec{a}$ на себе називають скалярним квадратом вектора $\vec{a}\cdot\vec{a} = \vec{a}^2 = |\vec{a}||\vec{a}|\cos 0^0 = |\vec{a}|^2$.

Отже, скалярний квадрат вектора дорівнює квадратові його довжини. Із цієї властивості випливає формула для обчислення довжини вектора

$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2}.$$

6.2. Основні властивості скалярного добутку

Геометричні властивості:

1. Якщо $\vec{a}\perp\vec{b}$, то $\cos\varphi = 0$ і $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$. Є правильним і обернене твердження: якщо перемножити два ненульові вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$, то $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$ тільки за умови, що $\cos(\vec{a}^\wedge,\vec{b}) = \cos\varphi = 0$ тобто $\varphi = \frac{\pi}{2}$, і $\vec{a}\perp\vec{b}$.

Отже, якщо скалярний добуток дорівнює нулю, то вектори взаємно перпендикулярні.

2. $\vec{a}\cdot\vec{b}>0$, якщо $\cos\varphi>0$, тобто $0<\varphi<\frac{\pi}{2}$ (φ - гострий кут).

3. $\vec{a}\cdot\vec{b}<0$, якщо $\cos\varphi<0$ тобто $\frac{\pi}{2}<\varphi<\pi$ (φ - тупий кут).

4. $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|$, якщо $\cos\varphi=1$, тобто вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ колінеарні і збігаються за напрямком.

Алгебраїчні властивості:

1. Комутативна властивість: $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$

Доведення. За означенням скалярного добутку маємо

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos(\vec{a}\,\hat{}\,,\vec{b}),\qquad \vec{b}\cdot\vec{a}=|\vec{b}||\vec{a}|\cos(\vec{b}\,\hat{}\,,\vec{a}),$$

$$\cos(\vec{a}\,\hat{}\,,\vec{b})=\cos(\vec{b}\,\hat{}\,,\vec{a}),\cos\varphi=\cos(-\varphi).$$

Тоді $\vec{b}\cdot\vec{a}=|\vec{b}||\vec{a}|\cos(\vec{b}\,\hat{}\,,\vec{a})=\vec{a}\cdot\vec{b}$, що й потрібно було довести.

2. Дистрибутивна властивість: $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$.

Доведення. Маємо

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=|\vec{a}|np_{\vec{a}}(\vec{b}+\vec{c})=|\vec{a}|(np_{\vec{a}}\vec{b}+np_{\vec{a}}\vec{c})=|\vec{a}|np_{\vec{a}}\vec{b}+|\vec{a}|np_{\vec{a}}\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c},$$

що й необхідно було довести.

3. Асоціативна властивість: $(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b}=\lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})$.

Доведення. Маємо $(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b}=|\vec{b}|np_{\vec{b}}(\lambda\vec{a})=|\vec{b}|\lambda np_{\vec{b}}\vec{a}=\lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})$, оскільки $|\vec{b}|np_{\vec{b}}\vec{a}=\vec{a}\cdot\vec{b}$.

6.3. Скалярний добуток векторів у координатній формі

Нехай $\vec{a}=X_1\vec{\imath}+Y_1\vec{\jmath}+Z_1\vec{k}$, $\vec{b}=X_2\vec{\imath}+Y_2\vec{\jmath}+Z_2\vec{k}$, тоді, враховуючи дистрибутивну властивість скалярного добутку, маємо

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\left(X_1\vec{\imath}+Y_1\vec{\jmath}+Z_1\vec{k}\right)\left(X_2\vec{\imath}+Y_2\vec{\jmath}+Z_2\vec{k}\right)=$$

$$=X_1X_2\vec{\imath}^2+Y_1Y_2\vec{\jmath}^2+Z_1Z_2\vec{k}^2+Y_1X_2\vec{\jmath}\cdot\vec{\imath}+Z_1X_2\vec{k}\cdot\vec{\imath}+X_1Y_2\vec{\imath}\cdot\vec{\jmath}$$

$$+Z_1Y_2\vec{k}\cdot\vec{\jmath}+X_1Z_2\vec{\imath}\cdot\vec{k}+Y_1Z_2\vec{\jmath}\cdot\vec{k}.$$

Враховуючи, що

$\vec{\imath}^2=1,\ \vec{\jmath}^2=1,\ \ \vec{k}^2=1,\ \vec{\jmath}\cdot\vec{\imath}=0,\ \ \vec{k}\cdot\vec{\imath}=0,\ \ \vec{\imath}\cdot\vec{\jmath}==0,\ \ \vec{\imath}\cdot\vec{k}=0,\ \ \vec{\jmath}\cdot\vec{k}=0.$

Дістанемо $\vec{a}\cdot\vec{b}=X_1X_2+Y_1Y_2+Z_1Z_2.$

Словами це формулюється так*: скалярний добуток двох векторів* $\vec{a}$ *і* $\vec{b}$, *заданих своїми координатами, дорівнює сумі добутків їх відповідних координат.*

6.4. Кут між двома векторами. Умова взаємної перпендикулярності двох векторів

Із формул, які визначають скалярний добуток

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi=X_1X_2+Y_1Y_2+Z_1Z_2,$$

отримуємо:

$$\cos\varphi=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|},$$

$$\varphi=arc\cos\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|},$$

$$\cos\varphi=\frac{X_1X_2+Y_1Y_2+Z_1Z_2}{\sqrt{X_1{}^2+Y_1{}^2+Z_1{}^2}\sqrt{X_2{}^2+Y_2{}^2+Z_2{}^2}} \tag{6.1}$$

$$\varphi=arc\cos\frac{X_1X_2+Y_1Y_2+Z_1Z_2}{\sqrt{X_1{}^2+Y_1{}^2+Z_1{}^2}\sqrt{X_2{}^2+Y_2{}^2+Z_2{}^2}}$$

Якщо вектори взаємноперпендикулярні, $\varphi = \frac{\pi}{2}$, то $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi = 0$. З цієї рівності випливає *умова взаємної перпендикулярності векторів* $\vec{a}$ та $\vec{b}$ в координатній формі:

$$X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2 = 0.$$

6.5. Застосування скалярного добутку

Скалярний добуток двох векторів застосовується в задачах фізики та механіки для обчислення роботи: *робота дорівнює скалярному добутку вектора сили $\vec{F}$ на вектор переміщення $\vec{S}$*, тобто

$$A = \vec{F} \cdot \vec{S}. \qquad (6.2)$$

Приклад. Обчислити роботу, яку виконує сила $\vec{F}$={-6;2}, коли точка її прикладання, рухаючись прямолінійно, переміщується з точки $A(-1;3)$ в точку $B(-1;3)$ (рис. 6.1).

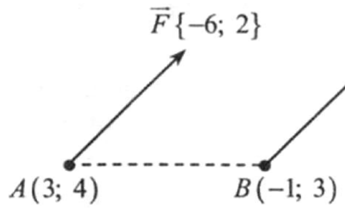

Рис. 6.1

Розв'язування. Визначимо вектор переміщення $\overrightarrow{AB} = \{-4; 1\}$, скористаємось формулою (6.2). Обчислимо скалярний добуток векторів $\vec{F}$ та $\overrightarrow{AB}$.

$$F \cdot \overrightarrow{AB} = (-6)(-4) + 2(-1) = 24 - 2 = 22 \quad \text{(од. роботи).}$$

Приклад. Дано три сили: $\vec{F_1} = \{3; -4\}$, $\vec{F_2} = \{2; 3\}$, $\vec{F_3} = \{-3; -2\}$, прикладені до однієї точки. Обчислити роботу, яку виконує рівнодійна цих сил, коли точка їх прикладання, рухаючись прямолінійно, переміщується з точки $A(5; 3)$ в точку $B(4; -1)$.

Розв'язування. Обчислюємо силу $\vec{F}$, яка є рівнодійною сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$: $\vec{F} = \vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$, $\vec{F} = \{2; -3\}$ Знаходимо вектор переміщення $\overrightarrow{AB} = \{-1; -4\}$ і обчислюємо роботу за формулою (6.2): $A = \vec{F} \cdot \overrightarrow{AB} = -2 + 12 = 10$(од. роботи).

Приклад. Дано точки $A(2; 0; 1)$, $B(2; 1; 0)$,$C(1; 0; 0)$. Знайти $\angle ABC$.

Розв'язування. $\angle ABC$ будемо шукати, як кут між векторами

$\overrightarrow{BA} = \{0; -1; 1\}$ та $\overrightarrow{BC} = \{-1; -1; 0\}$. За формулою (6.1) для косинуса кута між двома векторами маємо

$$\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}} = \frac{0 \cdot (-1) + (-1) \cdot (-1) + 1 \cdot 0}{\sqrt{0^2 + (-1)^2 + 1^2 \cdot \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + 0^2}}} = \frac{1}{2}.$$

Отже, $\varphi = 60°$.

Приклад. Два вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ задано своїми координатами

$\vec{a} = \{7; 2; -1\}, \vec{b} = \{1; 2; -3\}$. Знайти скалярний добуток цих векторів та косинус кута між ними.

Розв'язування. Вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ задано в координатній формі, тому для обчислення їх скалярного добутку скористаємось формулою

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2,$$

якщо $\vec{a} = \{x_1, y_1, z_1\}$ і $\vec{b} = \{x_2, y_2, z_2\}$,

маємо $\vec{a} \cdot \vec{b} = 7 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + (-1) \cdot (-3) = 14.$

Тоді $\cos(\vec{a}, ^\wedge\vec{b})$ визначатимемо за формулою:

$$\cos(\vec{a}, ^\wedge\vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}.$$

Оскільки $\vec{a} \cdot \vec{b} = 14,$ $|\vec{a}\,| = \sqrt{7^2 + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{54}$

і $|\vec{b}\,| = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-3)^2} = \sqrt{14}$, то

$$\cos(\vec{a}, ^\wedge\vec{b}) = \frac{14}{\sqrt{54}\sqrt{54}} \approx 0{,}509$$

7. Лекція № 7. Векторний та мішаний добутки векторів

7.1. Означення векторного добутку

Векторним добутком двох векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$*, називається вектор* $\vec{c}$*, який задовольняє такі умови:*

а) вектор $\vec{c}$ перпендикулярний до площини, в якій лежать вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ (рис. 7.1);

б) вектор $\vec{c}$ напрямлений від площини, яка визначається векторами $\vec{a}$ та $\vec{b}$, у той бік, де відбувається найкоротший поворот від вектора $\vec{a}$ до вектора $\vec{b}$ проти годинникової стрілки, якщо дивитися з кінця вектора $\vec{c}$, тобто вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ утворюють праву трійку векторів;

в) довжина вектора $\vec{c}$ чисельно дорівнює площі паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ та $\vec{b}$ як на сторонах.

Векторний добуток позначають так: $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ або $\vec{c} = [\vec{a}, \vec{b}]$

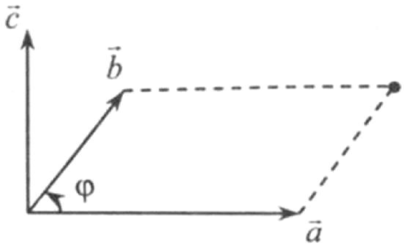

Рис. 7.1

7.2. Основні властивості векторного добутку

Геометричні властивості.

1. Довжина вектора $\vec{c}$ (векторного добутку $\vec{a}$ та $\vec{b}$) чисельно дорівнює площі паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ та $\vec{b}$, як на сторонах цього паралелограма. Площа паралелограма зі сторонами $\vec{a}$ та $\vec{b}$, і гострим кутом між ними $\vec{\varphi}$ обчислюється за формулою $S_{nap} = |\vec{a}||\vec{b}| \sin\varphi,$ тому

$$|\vec{c}| = |\vec{a}||\vec{b}| \cdot \sin(\vec{a}, \hat{} \vec{b}) = |\vec{a}||\vec{b}| \sin\varphi .$$

2. $|\vec{c}| = |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}|$, якщо $\sin\varphi = 1,$ тобто

$$\varphi = (\vec{a}, {}^\wedge\vec{b}) = \frac{\pi}{2} \text{ або } \quad \vec{a} \perp \vec{b}.$$

3. $\vec{a} \times \vec{b} = 0,$. якщо $\varphi = 0$ або $\varphi = \pi$.

4. Вираз $\overrightarrow{a} \times \vec{a} = [\vec{a}, \vec{a}]$ називається векторним квадратом, який дорівнює нулю.

Алгебраїчні властивості.

1. При зміні порядку множників векторний добуток змінює знак на протилежний тобто, $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$.

2. Асоціативність відносно множення на число: $(\lambda\vec{a}) \times \vec{b} = \lambda(\vec{a} \times \vec{b})$.

3. Дистрибутивність відносно додавання векторів:

$$(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}, \qquad \vec{c} \times (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{c} \times \vec{a} + \vec{c} \times \vec{b}.$$

4. Обчислення векторного добутку у випадку, коли вектори задано в координатній формі.

На основі властивостей векторного добутку векторів обчислимо $\vec{a} \times \vec{b}$:

$$\vec{a} \times \vec{b} = (X_1\vec{\imath} + Y_1\vec{\jmath} + Z_1\vec{k}) \times (X_2\vec{\imath} + Y_2\vec{\jmath} + Z_2\vec{k}) =$$

$$= X_1X_2(\vec{\imath} \times \vec{\imath}) + Y_1Y_2(\vec{\jmath} \times \vec{\jmath}) + Z_1Z_2(\vec{k} \times \vec{k}) + Y_1X_2(\vec{\jmath} \times \vec{\imath}) + Z_1X_2(\vec{k}$$

$$\times\times \vec{\imath}) + X_1Y_2(\vec{\imath} \times \vec{\jmath}) + Z_1Y_2(\vec{k} \times \vec{\jmath}) + X_1Z_2(\vec{\imath} \times \vec{k}) + Y_1Z_2(\vec{\jmath} \times \vec{k}).$$

Виходячи з рис. 7.2, знайдемо векторний добуток ортів:

$$\vec{\imath} \times \vec{\imath} = 0, \quad \vec{\imath} \times \vec{\jmath} = k, \quad \vec{\imath} \times \vec{k} = -\vec{\jmath}, \quad \vec{\jmath} \times \vec{\imath} = -\vec{k}, \quad \overline{\jmath} \times \vec{\jmath} = 0, \quad \vec{\jmath} \times \vec{k} = \vec{\imath},$$

$$\vec{k} \times \vec{\imath} = \vec{\jmath}, \quad \vec{k} \times \vec{\jmath} = -\vec{\imath}, \quad \vec{k} \times \vec{k} = \vec{0} .$$

Підставляючи ці значення у попередню формулу для $\vec{a} \times \vec{b}$, дістанемо

$$\vec{a} \times \vec{b} = (Y_1Z_2 - Z_1Y_2)\vec{\imath} - (X_1Z_2 - Z_1X_2)\vec{\jmath} + (X_1Y_2 - Y_1X_2)\vec{k}.$$

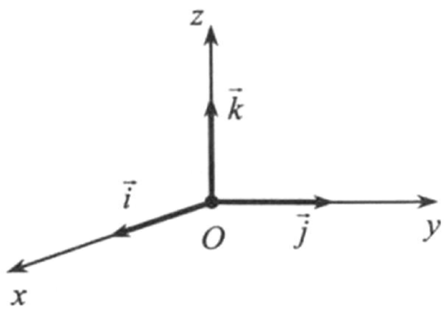

Рис. 7.2

Цей результат можна записати за допомогою такого визначника третього порядку:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} Y_1 & Z_1 \\ Y_2 & Z_2 \end{vmatrix} \vec{\imath} + \begin{vmatrix} X_1 & Z_1 \\ X_2 & Z_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \end{vmatrix} \vec{k} \qquad (7.1)$$

7.3. Застосування векторного добутку

Нехай у деякій точці B прикладена сила $\vec{F}$. Моментом сили $\vec{F} = \{X_2; Y_{2;} Z_2\}$, прикладеної в точці B, відносно довільної точки A (рис. 7.3), називається вектор, який дорівнює векторному добутку радіуса-вектора $\vec{r}_\text{в} = \overrightarrow{AB} = \{X_1; Y_{1;} Z_1\}$ на вектор сили : $\vec{F}$

$$\vec{\mathrm{M}}_A(\vec{F}) = \vec{r}_\text{в} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{vmatrix} \qquad (7.2)$$

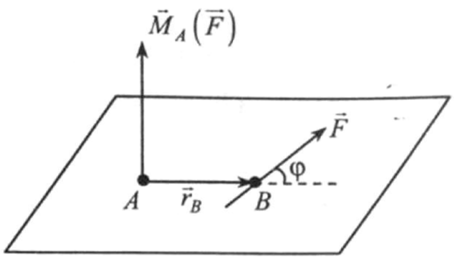

Рис. 7.3

Приклад. Сила $\vec{F} = \{1; 3; 2\}$ прикладена у точці $B(3; 4; 5)$. Знайти момент сили $\vec{F}$ відносно точки $A(1; 2; 3)$.

Розв'язування. $\vec{r}_\text{в} = \overrightarrow{AB} = \{2; 2; 2\}$.Тоді за формулою (7.2)

$$\vec{M}_A(\vec{F}) = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -2\vec{\imath} - 2\vec{\jmath} + 4\vec{k}.$$

Зауваження. Векторний добуток можна застосовувати до обчислення моменту сил, що діють на диполь, для обчислення сили, яка діє на провідник зі струмом у магнітному полі, в гіроскопічних ефектах і т. п.

Приклад. Обчислити площу трикутника ABC з вершинами в точках

$A(1;0;2).$, $B(2;1;3)$, $C(0;1;2)$.

Розв'язування. Побудуємо вектори $\overrightarrow{AB} = \{1;1;1\}$ та $\overrightarrow{AC} = \{-1;1;0\}$ (рис. 7.4).

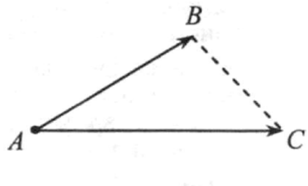

Рис. 7.4

За формулою (7.1) обчислимо векторний добуток $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$:

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}.$$

Довжина вектора, що є векторним добутком, чисельно дорівнює площі паралелограма, побудованого на векторах $\overrightarrow{AB}$ та $\overrightarrow{AC}$ як на сторонах. Площа трикутника дорівнює половині площі відповідного паралелограма. Отже,

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + 2^2} = \frac{\sqrt{6}}{2}(od^2).$$

Приклад. Обчислити синус кута A трикутника ABC з вершинами в точках $A(1;0;2).$, $B(2;1;3)$, $C(0;1;2)$.

Розв'язування. Синус кута A трикутника ABC можна обчислити за формулою

$$\sin A = \frac{\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right|}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{AC}\right|}$$

Кут A є гострим, якщо $\left|\overrightarrow{BC}\right|^2 < \left|\overrightarrow{AB}\right|^2 + \left|\overrightarrow{AC}\right|^2$,і тупим, якщо $\left|\overrightarrow{BC}\right|^2 > \left|\overrightarrow{AB}\right|^2 + \left|\overrightarrow{AC}\right|^2$. Ці нерівності безпосередньо випливають із теореми косинусів. За теоремою косинусів маємо

$$\left|\overrightarrow{BC}\right|^2 = \left|\overrightarrow{AB}\right|^2 + \left|\overrightarrow{AC}\right|^2 - 2\left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AC}\right| \cos\angle A.$$

Якщо $\angle A$ - гострий, то $\cos\angle A > 0$, якщо ж $\angle A$ - тупий, то $\cos\angle A < 0$.

У випадку, коли $\angle A = \frac{\pi}{2}$, $\cos\angle A = 0$,найдемо координати векторів

$$\overrightarrow{AB} = \{1;1;1\},\ \overrightarrow{AC} = \{-1;1;0\},\ \overrightarrow{BC} = \{-2;0;-1\},$$

тоді $\left|\overrightarrow{AB}\right|^2 = 3$; $\left|\overrightarrow{AC}\right|^2 = 2$; $\left|\overrightarrow{BC}\right|^2 = 5$. У нашому випадку $\left|\overrightarrow{BC}\right|^2 > \left|\overrightarrow{BC}\right|^2 = \left|\overrightarrow{AB}\right|^2 + \left|\overrightarrow{AC}\right|^2$, отже $\angle A = \frac{\pi}{2}$ і $\sin\angle A = 1$.

Цього висновку можна дійти, якщо обчислити скалярний добуток вектора $\overrightarrow{AB}$ на вектор $\overrightarrow{AC}$, який у нашому випадку дорівнює нулю.

7.4. Мішаний добуток трьох векторів

З'ясуємо, що можна сказати про добуток трьох векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ з урахуванням того, що нам відомо скалярний і векторний добутки двох векторів.

Є можливими такі випадки:

1) якщо вектор $\vec{a}$, помножити на вектор $\vec{b}$, скалярно, а результат потім помножити на вектор $\vec{c}$, то дістанемо вектор, колінеарний вектору $\vec{c}$;

2) якщо вектор $\vec{a}$, помножити на вектор $\vec{b}$, векторно, а отриманий вектор помножити на вектор $\vec{c}$ скалярно, то дістанемо скаляр;

3) якщо вектор $\vec{a}$, помножити на вектор $\vec{b}$, векторно, а одержаний вектор помножити на вектор $\vec{c}$ векторно, то дістанемо вектор.

У випадку 2) отримаємо векторно-скалярний, або мішаний, добуток, а у випадку 3) - подвійний векторний добуток. Предметом нашого вивчення буде мішаний добуток.

Означення. Мішаним добутком трьох векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ називають скалярну величину, яку можна дістати в результаті скалярного множення векторного добутку двох перших векторів $\vec{a}$ i $\vec{b}$ на третій вектор $\vec{c}$: $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$.

Мішаний добуток позначається так:

$$\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{c} = \left[\vec{a}, \vec{b}\right] \cdot \vec{c} = \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}.$$

Далі доведемо, що *результат мішаного добутку не залежить від "кругової" перестановки векторів:*

$$\left[\vec{a},\vec{b}\right]\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\left[\vec{b},\vec{c}\right]=\vec{a}\vec{b}\vec{c}.$$

7.5. Геометричний зміст мішаного добутку

Нехай зведені до спільного початку некомпланарні вектори $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ утворюють праву трійку (рис. 7.5).

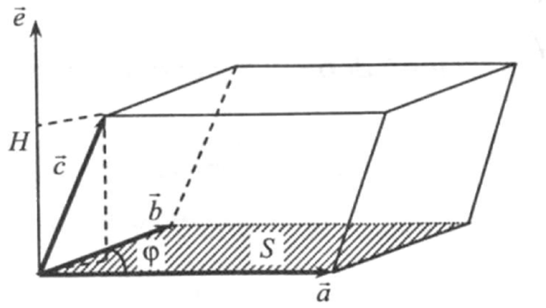

Рис. 7.5

Нехай $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{e}$, тоді, за означенням векторного добутку,

$|\vec{e}|=|\vec{a}|\left|\vec{b}\right|\sin\varphi=S_{\text{пар}}$, тобто модуль векторного добутку дорівнює площі паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a},$ та $\vec{b},$ як на сторонах. Скалярний добуток вектора $\vec{e}$ на вектор $\vec{c}$ можна записати так: $\vec{e}\cdot c=|\vec{e}|np_{\vec{e}}\vec{c}$. Проекція вектора $\vec{e}$ на напрям вектора $\vec{e}$ буде висотою паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ як на ребрах: $np_{\vec{e}}\vec{c}=H$. Отже,

$$|\vec{e}|np_{\vec{e}}\vec{c}=|\vec{a}|\left|\vec{b}\right|\sin\varphi\cdot H=S_{nap}H=V_{nap}.$$

Узагальнюючи все сказане, можна сформулювати наступну теорему.

Теорема. Модуль мішаного добутку $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ дорівнює об'єму паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ як на ребрах. Знак мішаного добутку додатний, якщо вектори $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ утворюють праву трійку, і від'ємний у протилежному випадку.

Наслідок. Із теореми випливає, що, в якому б порядку ми не брали множники, абсолютна величина мішаного добутку $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ не зміниться.

Отриманим результатом можна скористатися для обчислення об'єму піраміди

$$V_{піp} = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot H = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} S_{пар} \cdot H = \frac{1}{6} V_{пар} \qquad (7.3)$$

7.6. Мішаний добуток у координатній формі

Нехай вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ задано в координатній формі: $\vec{a} = \{X_1; Y_1; Z_1\}$, $\vec{b} = \{X_2; Y_2; Z_2\}, \vec{c} = \{X_3; Y_3; Z_3\}$. За відомою формулою обчислимо $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{e}$, де

$$\vec{e} = \begin{vmatrix} Y_1 & Z_1 \\ Y_2 & Z_2 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} X_1 & Z_1 \\ X_2 & Z_2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \end{vmatrix} \vec{k},$$

$$\vec{e} \cdot \vec{c} = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} Y_1 & Z_1 \\ Y_2 & Z_2 \end{vmatrix} X_3 - \begin{vmatrix} X_1 & Z_1 \\ X_2 & Z_2 \end{vmatrix} Y_3 + \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \end{vmatrix} Z_3.$$

Ліва частина цієї рівності є розкладом визначника $\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix}$ за елементами третього рядка. Отже, маємо

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix}. \qquad (7.4)$$

Приклад. Обчислити об'єм трикутної піраміди, вершини якої містяться у точках (рис. 7.6): $A(-7; 11; 1).$, $B(-4; -7; -3)$, $C(-1; -2; -4), D(1; -1; 1)$.

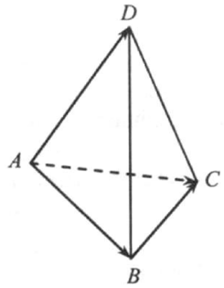

Рис. 7.6

Розв'язування. Знайдемо координати векторів

$\overrightarrow{AB} = \{3; 4; 2\}$, $\overrightarrow{AC} = \{6; 9; 5\}$, $\overrightarrow{AD} = \{8; 10; 0\}$. Скористаємось співвідношенням (7.3) (V_{nap}- об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах

$$V_{nap} = \left|\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right| = mod\begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 6 & 9 & -5 \\ 8 & 10 & 0 \end{vmatrix} = |-34| = 34,$$

то, $V_{nip} = \frac{1}{6}34 = 5\frac{2}{3}$ (од. куб.).

7.7. Умова компланарності трьох векторів

Мішаний добуток векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ дорівнює нулю, якщо:

1) серед векторів-співмножників є хоча б один нуль-вектор;

2) серед векторів-співмножників два вектори колінеарні;

3) всі три вектори компланарні.

Випадок 1) можна звести до випадку 2):

а) якщо один із векторів є нуль-вектором, то він може належати будь-якій площині і, зокрема, тій, де лежать два ненульові вектори;

б) якщо два вектори колінеарні, то паралельним перенесенням їх можна розмістити на одній прямій, а якщо так, то через цю пряму і третій вектор можна провести площину. Отже, ці вектори компланарні.

Зауваження. Коли пряма і напрям вектора є мимобіжними, то за допомогою паралельного перенесення можна домогтися їх перетину.

Доведемо рівність нулю мішаного добутку для випадку 3), коли три вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ компланарні. У цьому випадку векторний добуток двох довільних векторів цієї трійки буде вектором, що є перпендикулярним до площини, в якій лежать вектори. Обчислюючи скалярний добуток цього вектора на третій вектор, матимемо добуток двох взаємно перпендикулярних векторів, а, отже, він буде дорівнювати нулю.

У підсумку, можна сформулювати теорему.

Теорема. Необхідною і достатньою умовою компланарності трьох векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ є рівність нулю їх мішаного добутку.

Приклад. Перевірити, чи є компланарними вектори:

$\vec{a} = \{1; 2; 3\}$, $\vec{b} = \{2; -3; 4\}$, $\vec{c} = \{0; -7; 10\}$.

Розв‘язування. Обчислимо мішаний добуток даних векторів за формулою (7.4):

$$\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & -4 \\ 0 & -1 & -10 \end{vmatrix} = 0.$$

Отже, ці вектори компланарні.

Зауваження. Використовуючи основні властивості визначників, можна довести теорему.

Теорема. Кругова перестановка множників мішаного добутку не змінює його величини. Перестановка двох сусідніх множників змінює знак добутку на протилежний:

$$\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{c} = \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) \cdot \vec{a} = (\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{b} = -\left(\vec{b} \times \vec{a}\right) \cdot \vec{c} = -\left(\vec{c} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{a} =$$
$$= -(\vec{a} \times \vec{c}) \cdot \vec{b}$$

Глава 3. Аналітична геометрія

8. Лекція № 8. Пряма на площині

8.1. Найпростіші задачі аналітичної геометрії

До найпростіших задач аналітичної геометрії належать такі:

- обчислення відстані між двома точками, якщо задано їх координати;

- знаходження координат точки, що ділить даний відрізок у відношенні λ, якщо є відомими координати кінців цього відрізка;

- обчислення площі трикутника, коли задано координати його вершин.

Задача. Задано точки $A(x_1, y_1)$ та $B(x_2, y_2)$. Обчислити відстань між точками A та B.

Розв'язування. З'єднаємо відрізком прямої точки A та B і побудуємо вектор $\overrightarrow{AB}$. Тоді вектор $\overrightarrow{AB}$ матиме такі координати:

$$\overrightarrow{AB} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}$$ (рис. 8.1).

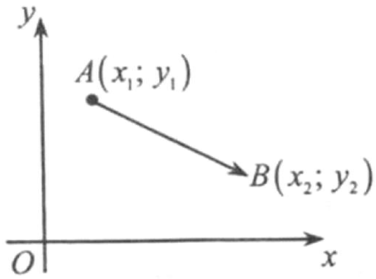

Рис. 8.1

Довжину вектора $\overrightarrow{AB}$ обчислимо за формулою

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{X^2 + Y^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}\ .$$

Аналогічну формулу отримаємо, коли точки $A(x_1, y_1, z_1)$ і $B(x_2, y_2, z_2)$ задано у просторі. Тоді $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$.

Приклад. Обчислити відстань між точками $A(1; 2; 3)$ і $B(5; 2; 6)$.

Розв'язування. Маємо $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(5-1)^2 + (2-2)^2 + (6-3)^2}$.

Досить часто виникає потреба у розв'язуванні наступної задачі.

Задача. Обчислити координати точки, що ділить даний відрізок у відношенні λ, якщо задано координати кінців цього *відрізка.*

Розв'язування. Нехай початковою точкою відрізка є точка $A(x_1, y_1, z_1)$ кінцем є точка $B(x_2, y_2, z_2)$. Існує кілька методів розв'язування цієї задачі. Ми будемо розв'язувати її так: нехай задано відрізок AB. Точка $M(x, y, z)$, яка ділить відрізок у відношенні λ, може лежати на відрізку або на його продовженні (рис. 8.2).

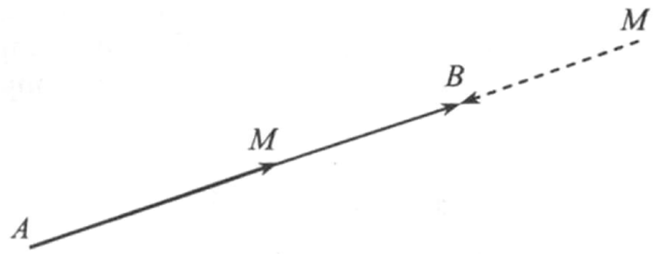

Рис. 8.2

Вектори $\overrightarrow{AM}$ та MB колінеарні, тому $\frac{|\overrightarrow{AM}|}{|MB|} = \lambda$. Якщо точка M лежить між точками A, Bна відрізку AB, тобто ділить відрізок AB з середини, то вектори $\overrightarrow{AM}$ та MB співнапрямлені і $\lambda > 0$. Коли ж точка M лежить на продовженні відрізка AB, тобто ділить відрізок AB ззовні, вектори $\overrightarrow{AM}$ та MB протилежно напрямлені, тоді $\lambda < 0$. Вектори $\overrightarrow{AM}$ та MB матимуть відповідно координати:

$$\overrightarrow{AB} = \{x - x_1; y - y_1; z - z_1\}, \overrightarrow{MB} = \{x - x_2; y - y_2; z - z_2\}.$$

Із колінеарності цих векторів випливає пропорційність їх відповідних координат:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x} = \lambda, \quad \frac{y - y_1}{y_2 - y} = \lambda, \quad \frac{z - z_1}{z_2 - z} = \lambda.$$

Отримані рівності розв'яжемо відносно x, y, z:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}. \qquad (8.1)$$

Координати точки $M(x, y, z)$, що ділить відрізок AB у відношенні λ, можна знайти за цими ж формулами.

Отримані формули правильні, якщо $\lambda \neq -1$. Із цих формул можна легко дістати формули для обчислення координат середини відрізка. Тоді $\lambda = 1$ і формули набувають такого вигляду:

$$x = \frac{x_1+x_2}{2}, y = \frac{y_1+y_2}{2}, z = \frac{z_1+z_2}{2} \qquad (8.2)$$

Отже*, координати середини відрізка є середніми арифметичними відповідних координат його кінців*.

Приклад. Знайти координати точки перетину медіан трикутника, якщо задано координати його вершин.

Розв'язування. Нехай маємо трикутник ABC (рис. 8.3) з вершинами

$$A(x_1, y_1, z_1), B(x_2, y_2, z_2), C(x_3, y_3, z_3) .$$

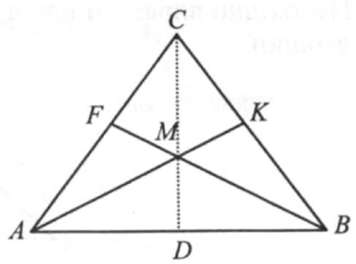

Рис. 8.3

Нехай AK, CD, BF - медіани трикутника, а точка $M(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ - точка їх перетину. Знайдемо координати точки D середини відрізка AB за формулами (8.2).

Точка M, у якій перетинаються медіани трикутника, ділить відрізок CD у відношенні 2:1, починаючи від точки C, отже$\frac{CM}{MD} = 2$ і $\lambda = 2$.

Координати точки M обчислюються формулами (8.1) (як точки перетину медіан):

$$\bar{x} = \frac{x_3+2x_D}{1+2}, \bar{y} = \frac{y_3+2y_D}{1+2}, \bar{z} = \frac{z_3+2z_D}{1+2}.$$

Зупинимось детальніше на обчисленні $\bar{x}$:

$$\bar{x} = \frac{x_3+2\frac{x_1+x_2}{2}}{3} = \frac{x_1+x_2+x_3}{3}.$$

Аналогічно можна отримати

$$\bar{y} = \frac{y_1+y_2+y_3}{3}; \quad \bar{z} = \frac{z_1+z_2+z_3}{3} \ .$$

Координати точки перетину медіан трикутника є середніми арифметичними відповідних координат його вершин. Точка перетину медіан трикутника є центром ваги трикутної пластинки, тобто двовимірного трикутника, який не збігається з центром каркасного трикутника.

Приклад. Вершини трикутника містяться у точках $A(1;1;1)$, $B(5;1;-2)$, $C(7;9;1)$. Знайти координати точки D перетину бісектриси кута A зі стороною CB.

Розв'язування. Знайдемо довжини сторін трикутника A та AC:

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(5-1)^2 + (1-1)^2 + (-2-1)^2 = 5};$$

$$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{(7-1)^2 + (9-1)^2 + (1-1)^2 = 10};$$

Завдяки тому, що бісектриса ділить сторону CB на частини, пропорційні прилеглим сторонам трикутника, то

$$\lambda = \frac{|\overrightarrow{CD}|}{|\overrightarrow{DB}|} = \frac{|\overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{AB}|} = \frac{10}{5} = 2.$$

За формулами ділення відрізка у заданому відношенні знайдемо:

$$x_D = \frac{x_c + \lambda x_B}{1+\lambda} = \frac{7+2(-5)}{1+2}, = \frac{17}{3};$$

$$y_D = \frac{y_c+\lambda y_B}{1+\lambda} = \frac{11}{3}; \ z_D = \frac{z_c+\lambda z_B}{1+\lambda} = -1;$$

Задача. Обчислити площу трикутника, якщо відомо координати його вершин.

Розв'язування. Нехай маємо трикутник ABC (рис. 8.4), вершинами якого є точки: $A(x_1, y_1, z_1), B(x_2, y_2, z_2), C(x_3, y_3, z_3)$ Необхідно знайти площу трикутника ABC.

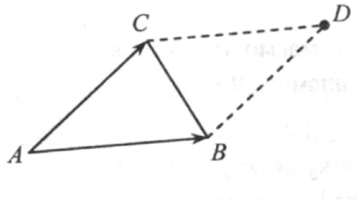

Рис. 8.4

Існує кілька методів розв'язування цієї задачі. Ми будемо її розв'язувати за допомогою векторів. Вектори $\overrightarrow{AB}$ та $\overrightarrow{AC}$ мають такі координати:

$$\overrightarrow{AB} = \{x_2 - x_1;\ y_2 - y_1;\ z_2 - z_1\}, \qquad \overrightarrow{AC} = \{x_3 - x_1;\ y_3 - y_1;\ z_3 - z_1\}.$$

Відомо, що довжина вектора векторного добутку векторів $\overrightarrow{AB}$ та $\overrightarrow{AC}$ чисельно дорівнює площі паралелограма $ABCD$, побудованого на векторах $\overrightarrow{AB}$ та $\overrightarrow{AC}$ як на сторонах. Площа трикутника ABCдорівнює половині площі цього паралелограма. Скористаємось відомими формулами обчислення векторного добутку векторів та обчислення довжини вектора. Маємо

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} \vec{j}$$

$$+ \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} \vec{k}.$$

Тоді

$$S_{\triangle ABC} =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\begin{vmatrix} y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix}^2 - \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}^2}$$

Зауваження. У частинному випадку, коли ABC лежить у площині OXY, а $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3)$, для обчислення його площі користуються формулою

$$S_{\triangle ABC} = \tfrac{1}{2}(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1),$$

яку можна записати більш компактно у вигляді визначника другого порядку:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} mod \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}.$$

У цій формулі mod означає взяти модуль від значення визначника.

Приклад. Обчислити площу трикутника *ABC* за відомими координатами його вершин $A(1;1)$, $B(6;4)$, $C(8;2)$.

Розв'язування. Вектори AB і AC мають координати: $\overrightarrow{AB} = \{5;3\}$, $\overrightarrow{AC} = \{7;1\}$. Обчислимо векторний добуток векторів $\overrightarrow{AB}$ та $\overrightarrow{AC}$:

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 5 & 3 & 0 \\ 7 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -16\vec{k}.$$

Тоді $S_{ABC} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{16^2} = 8(\text{кв. од})$.

.Аналогічний результат дістанемо, якщо скористаємось формулою обчислення площі трикутника, коли його вершини лежать у площині OXY:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} mod \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} = 8.$$

8.2. Різні види рівняння прямої на площині

Означення. Рівняння $F(x,y) = 0$ називається рівнянням лінії L у даній системі координат, якщо координати x та y довільної точки площини задовольняють дане рівняння, коли точка належить цій лінії, і не задовольняють, коли точка не належить лінії.

Наведене означення лягає в основу методів аналітичної геометрії, суть яких полягає у тому, що лінії, які вивчаються, досліджуються за допомогою аналізу їх рівнянь.

Розглянемо декілька найпростіших прикладів:

а)$x - y = 0$ - рівняння бісектриси I та III координатних кутів;

б) $x + y = 0$ - рівняння бісектриси II та IV координатних кутів;

в) $x^2 - y^2 = 0 \Leftrightarrow (x-y)(x+y) = 0.$ це рівняння визначає геометричне місце точок бісектрис координатних кутів;

г) $x^2 + y^2 = 0$ - це рівняння визначає тільки одну точку з координатами $x = 0.\ y = 0,$, яка є початком координат;

д) $x^2 + y^2 + 1 = 0$ - не існує жодної точки, (дійсні) координати якої задовольняють дане рівняння, а значить ніякого геометричного образу на площині дане рівняння не визначає.

Розглянемо рівняння ліній, в яких функція F є лінійною відносно x і y. Такі лінії мають загальну назву прямих ліній на площині.

Зупинимось на окремих випадках рівнянь прямих ліній на площині

8.2.1. Пряма з кутовим коефіцієнтом

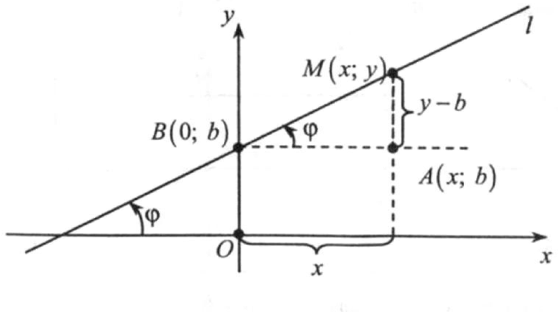

Рис. 8.5

Нехай задано пряму l (рис. 8.5), яка утворює з додатним напрямком осі OX кут φ і перетинає вісь OY у точці$B(0, b)$. Точка $M(x, y)$, що належить прямій l, має змінні координати x та y Змінні координати цієї точки мають задовольняти рівняння прямої l.

Тангенс кута φ нахилу прямої до осі OX називається кутовим коефіцієнтом цієї прямої, його позначають через k так що $k = tg\varphi$.

У випадку, коли пряма паралельна осі OX, кут φ нахилу її до осі OX, вважають рівним нулю.

Візьмемо на прямій l довільну точку $M(x, y)$, тоді

$$tg\varphi = \frac{AM}{MB}, \qquad tg\varphi = \frac{y-b}{x}, \qquad k = \frac{y-b}{x},$$

якщо $x \neq 0$.. Далі дістаємо рівняння

$$y = kx + b \tag{8.3}$$

Рівняння (8.3) називається *рівнянням прямої з кутовим коефіцієнтом*.

Кожна пряма, яка не є перпендикулярною до осі OX, може бути записана у вигляді (8.3). Якщо пряма проходить через початок координат, то її рівняння матиме вигляд $y = kx$ (рис. 8.6).

Якщо пряма паралельна осі OX, то її рівняння має вигляд $y = b$ (рис.8.7).

Якщо пряма паралельна осі OY, то її рівняння має вигляд $x = a$ (рис. 8.8).

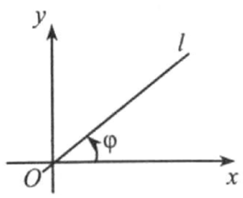

Рис. 8.6

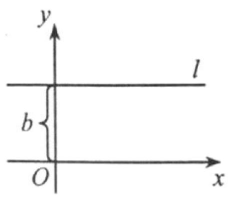

Рис. 8.7

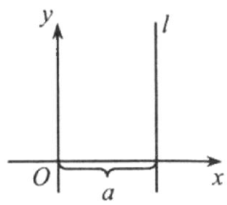

Рис. 8.8

Рівняння осі OX має вигляд $y = 0$, рівнянням осі OY є $x = 0$.

8.2.2. Рівняння прямої, що проходить через задану точку в заданому напрямку

Нехай пряма l визначається точкою $M_1(x_1 y_1)$ і кутом нахилу φ прямої до додатного напряму осі OX або кутовим коефіцієнтом $k = tg\varphi$ (рис.8.9), причому пряма не перпендикулярна до осі OX.

Візьмемо на прямій l довільну точку$M(x, y)$ і виконаємо побудову згідно з рис. 8.9.

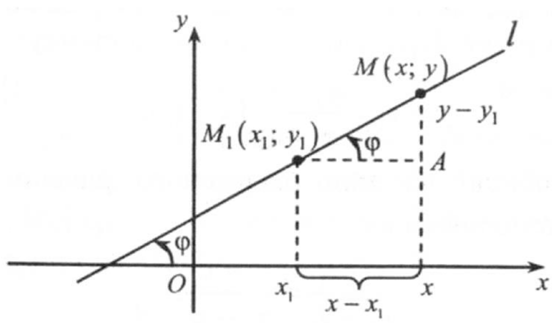

Рис. 8.9

З ΔAMM_1маємо

$$tg\varphi = \frac{AM}{AM_1} = \frac{y - y_1}{x - x_1} = k,$$

$$y - y_1 = k(x - x_1) \qquad (8.4)$$

Рівняння (8.4) називається *рівнянням прямої, що проходить через задану точку в заданому напрямку.*

8.2.3. Рівняння прямої, що проходить через дві задані точки

Нехай точки $M_1(x_1 y_1), M_2(x_2 y_2)$ належать прямій l (рис. 8.10).

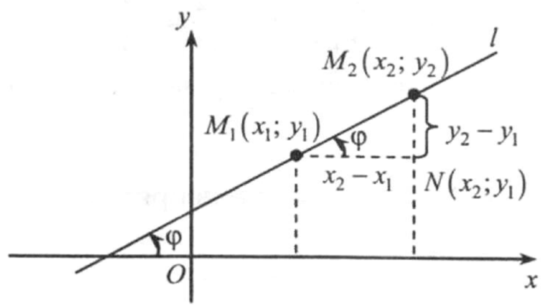

Рис. 8.10

Виконаємо побудову згідно з рис. 8.10 і позначимо кут нахилу прямої l із одатним напрямком осі OX черезφ . З M_1NM_2 маємо

$$tg\varphi = \frac{NM_2}{M_1N} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = k.$$

Підставимо значення кутового коефіцієнта в рівняння прямої, що проходить через точку $M_1(x_1 y_1)$ у даному напрямку

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1).$$

Поділивши обидві частини одержаного рівняння на $(y_2 - y_1)$, $y_2 \neq y_1$, дістанемо рівняння

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{x-x_1}{x_2-x_1}. \qquad (8.5)$$

Рівняння (8.5) називається рівнянням прямої, що проходить через дві задані точки.

Зауваження. У випадку, коли $y_2 - y_1$ (з властивості пропорції

$(y - y_1)(x_2 - x_1) = (y_2 - y_1)(x_2 - x_1)$, маємо $y - y_1$. Це є рівняння прямої, яка паралельна осі OX. Аналогічно у випадку, коли $x_2 - x_1$, маємо $x - x_1$. Це є рівняння прямої, яка паралельна осі OY.

Приклад. Записати рівняння прямої, що проходить через точки $A(-1; 2)$ та $B(2; 1)$.

Розв'язування. Згідно з рівнянням (8.3), припускаючи в ньому, що

$x_1 = -1,\ y_1 = 2,\ x_2 = 2,\ y_2 = 1,$ дістанемо

$$\frac{y-2}{1-2} = \frac{x+1}{2+1} \Leftrightarrow \frac{y-2}{-1} = \frac{x+1}{3}.$$

Після відповідних спрощень дістанемо рівняння шуканої прямої у вигляді

$$x + 3y - 5 = 0.$$

8.2.4. Загальне рівняння прямої

Теорема. Рівняння

$$Ax + By + C = 0 \qquad (8.6)$$

визначає пряму лінію на площині.

Доведення. Якщо $A \neq 0$ або $B \neq 0$, то рівняння (4.6) має ненульовий розв'язок, тобто існує точка $M_0(x_0, y_0)$ така, що

$$Ax_0 + By_0 + C = 0\cdot \qquad (8.7)$$

Віднявши почленно від рівняння (4.6) рівняння (4.7), отримаємо рівняння

$$A(x - x_0) + B(y - y_{0)} + C = 0\cdot \qquad (8.8)$$

Рівняння (8.8) еквівалентне рівнянню (8.6). Доведемо, що рівняння (8.8) визначає пряму лінію. Пряму лінію можна задати точкою, що належить цій прямій, і вектором, перпендикулярним до цієї прямої. Нехай точка$M_0(x_0, y_0)$ належить прямій l, а вектор $\vec{n} = \{A; B\}$ перпендикулярний до даної прямої (рис. 8.11).

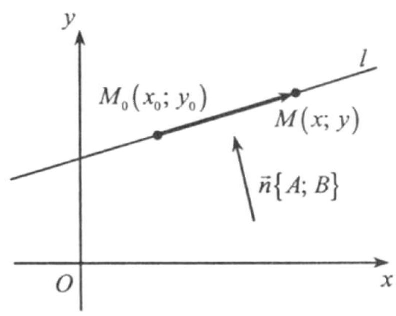

Рис. 8.11

Візьмемо на прямій l змінну точку $M(x, y)$ і побудуємо вектор

$\overrightarrow{M_0M} = \{x - x_0; y - y_0\}$. Справді, якщо точка $M_0(x_0, y_0)$ належить прямій l, то її координати задовольняють рівняння (8.8), а, отже, вектори$\vec{n} = \{A; B\}$ і $\overrightarrow{M_0M} = \{x - x_0; y - y_0\}$ взаємно перпендикулярні. Із перпендикулярності векторів $\vec{n}$ та $\overrightarrow{M_0M}$ випливає $\vec{n}\ \overrightarrow{M_0M = 0}$. Виконавши множення покоординатно, маємо$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$, тобто ми дістали рівняння (8.8).

Якщо точка не належить прямій l , то її координати не задовольняють рівняння (4.8), а, значить, вектори $\vec{n}$ та $\overrightarrow{M_0M}$ не перпендикулярні і їх скалярний добуток не дорівнює нулю.

Отже, рівняння (8.8), а з огляду на еквівалентність, і рівняння (8.6) будуть рівняннями прямої на площині.

*Рівняння (8.6) називається загальним рівнянням прямої на площи*ні.

Зауваження. Вектор $\vec{n} = \{A; B\}$ називається нормальним вектором прямої (8.6).

8.2.5. Дослідження загального рівняння прямої

Загальне рівняння прямої має вигляд (8.6). З'ясуємо, яке положення займає пряма лінія відносно координатних осей, коли один або два коефіцієнти рівняння (8.6) дорівнюють нулю.

а) $C = 0$, тоді $Ax + By = 0$ - рівняння прямої, що проходить через початок координат;

б) $A = 0$, тоді $By + C = 0 \Rightarrow y = -\frac{C}{B}$ - рівняння прямої, паралельної осі OX;

в) $B = 0$, тоді $Ax + C = 0 \Rightarrow x = \frac{C}{A}$ - рівняння прямої, паралельної осі OY;

г) $C = 0$, $B = 0$, $A \neq 0$, тоді $Ax = 0 \Rightarrow x = 0$- рівняння осі OY (пряма збігається з віссю OY);

д) $C = 0$, $A = 0$, $B \neq 0$, тоді $By = 0 \Rightarrow \mathrm{y} = 0$ - рівняння осі OX (пряма збігається з віссю OX);

є) $A = 0, B = 0$. Звідси випливає, що $C = 0$, і дістаємо тотожність $0x + 0y + 0 = 0$. У цьому випадку ми не маємо певної лінії.

8.2.6. Рівняння прямої у відрізках

Повна назва цього типу рівняння прямої така: рівняння прямої у відрізках, які вона відтинає на координатних осях. Розглянемо пряму l (рис. 8.12), що не проходить через початок координат і перетинає координатні осі.

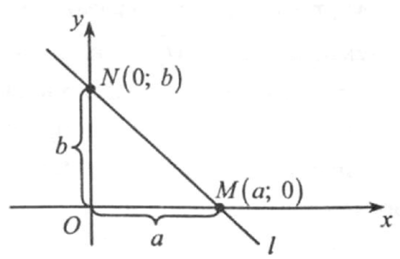

Рис. 8.12

Візьмемо рівняння цієї прямої у загальному вигляді: $Ax + By + C = 0$.

Нехай пряма перетинає координатні осі, тоді $A \neq 0, B \neq 0$, а з огляду на те, що вона не проходить через початок координат, то $C \neq 0$. Нехай пряма l перетинає вісь OX у точці $M(a;0)$, вісь OY - у точці $N(b;0)$.Точки $M(a;0)$ та $N(b;0)$ належать прямій, отже, координати цих точок задовольняють рівняння (8.6). Маємо $Aa + C = 0$ та $Bb + C = 0$, звідки $A = -\frac{C}{a}$, $B = \frac{C}{b}$. Підставивши значення A та B у рівняння (4.6), дістанемо $-\frac{C}{a} - \frac{C}{b} + C = 0$. Поділимо обидві частини одержаного рівняння на $-C \neq 0$, після цього отримаємо рівняння

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1. \tag{8.9}$$

Рівняння (8.9) називається *рівнянням прямої у відрізках*.

Приклад. Загальне рівняння прямої $2x + 4y - 1 = 0$ записати у вигляді рівняння прямої у відрізках.

Розв'язування. Нехай точки $M(a;0)$ та $N(b;0)$ є відповідно точками перетину прямої з координатними осями OX та OY. Для обчислення координат a та b цих точок підставимо координати точок у рівняння прямої.

Маємо

$$2a - 1 = 0 \Rightarrow a = \frac{1}{2}, \quad 4b - 1 = 0 \Rightarrow b = \frac{1}{4}.$$

Підставивши значення a та b у рівняння (4.7), дістанемо рівняння прямої у відрізках

$$\frac{x}{\frac{1}{2}} + \frac{y}{\frac{1}{4}} = 1.$$

8.2.7. Канонічне рівняння прямої

Нами було доведено, що пряма, яка визначається загальним рівнянням $Ax + By + C = 0.$, є перпендикулярною до вектора $\vec{n} = \{A; B\}$, який називається нормальним вектором прямої.

Означення. Будь-який ненульовий вектор, колінеарний даній прямій, називається напрямним вектором цієї прямої.

Задача. Знайти рівняння прямої, що проходить через точку $M_1(x_1, y_1)$ і має напрямний вектор $\vec{q} = \{l; m\}$ (рис. 8.13).

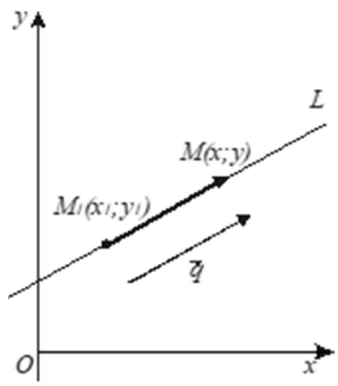

Рис. 8.13

Розв'язування. Візьмемо на прямій L довільну точку $M(x, y)$ і побудуємо вектор $\overrightarrow{M_1M}$. Вектор $\overrightarrow{M_1M} = \{x - x_1; y - y_1\}$ буде колінеарним напрямному вектору $\vec{q} = \{l, m\}$, тому, їх відповідні координати пропорційні. Із пропорційності координат дістаємо рівняння

$$\frac{x-x_1}{l} = \frac{y-y_1}{m}. \qquad (8.10)$$

Рівняння (8.10) називається *канонічним рівнянням прямої*. "Канонічне" грецькою означає типове, традиційне.

Зокрема, якщо пряма проходить через точку$M_1(x_1, y_1)$ паралельно осі OX, то за її напрямний вектор можна взяти вектор $\vec{q} = \{l, 0\}$Тому рівняння (8.10) набуває такого вигляду: $\frac{x-x_1}{l} = \frac{y-y_1}{0}$. Із того, що добуток середніх членів пропорції дорівнює добутку крайніх її членів, маємо $y - y_1 l = (x - x_1)0$, звідки $y - y_1$. Це і є рівняння прямої, паралельної осі OX .

Аналогічно, якщо пряма проходить через точку $M_1(x_1, y_1)$ паралельно осі OY, то її рівнянням є $x - x_1$.

Приклад. Записати канонічне рівняння прямої, що проходить через точку $A(3; -2)$ і має напрямний вектор $q = \{5; 7\}$

Розв'язування. Скористаємося рівнянням (8.10). У нашому випадку $x_1 = 3,\ y_1 - 2, l = 5,\ m = 7$ Підставивши ці значення в рівняння (8.10), дістанемо

$$\frac{x-3}{5} = \frac{y-2}{7}.$$

8.2.8. Параметричні рівняння прямої

Параметричні рівняння прямої дістанемо із канонічного рівняння прямої (8.10). Для цього в рівнянні (8.10) значення відношень позначають через t: $\frac{x-x_1}{l} = \frac{y-y_1}{0} = t, t \in R,$ $t \in R$. Далі записують систему

$$\begin{cases} \dfrac{x-x_1}{l} = t, \\ \dfrac{y-y_1}{m} = t. \end{cases}$$

Якщо кожне рівняння одержаної системи розв'язати відносно x та y, то дістанемо

$$\begin{cases} x = x_1 + lt \\ y = y_1 + mt \end{cases} \tag{8.11}$$

Рівняння (8.11) називаються *параметричними рівняннями прямої*. Змінна t набуває довільних дійсних значень і називається параметром. Коли точка M рухається по прямій, то параметр t змінюється за абсолютною величиною та знаком.

Якщо за параметр t взяти час, то параметричні рівняння визначають закон руху матеріальної точки по прямій лінії зі сталою швидкістю $v = \sqrt{l^2 + m^2}$, тобто рух відбувається за інерцією.

8.2.9. Нормальне рівняння прямої

Нормальне рівняння прямої має вигляд

$$x \cos a + y \sin a - p = 0 \tag{8.12}$$

У цьому рівнянні p - довжина перпендикуляра, опущеного з початку координат на цю пряму, a- кут, який цей перпендикуляр утворює з додатним напрямком осі OX. Беруть цей кут від осі OX проти годинникової стрілки, $\cos a, \sin a$ - координати одиничного вектора нормалі цієї прямої

$\vec{n} = \{\cos a, \sin a\}$ (рис. 8.14).

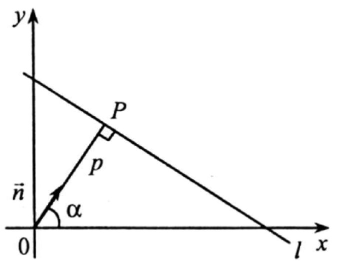

Рис. 8.14

Покажемо, як звести загальне рівняння прямої до її нормального рівняння. Рівняння (8.9) і (8.12) є двома різними формами рівняння однієї прямої. Отже, коефіцієнти цих рівнянь мають бути пропорційними:

$$\frac{\cos a}{A} = \frac{\sin a}{B} = \frac{-P}{C} = M,$$

або

$$M \cdot A = \cos a, \quad M \cdot B = \sin a, \quad C \cdot M = -p;$$

$$M^2 \cdot (A^2 + B^2) = sin^2 a + cos^2 a = 1; \;\; M = \pm \frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

Знак у M оберемо протилежним знаку вільного членаC оскільки

$C \cdot M = -p$. Число M називається нормувальним множником рівняння (8.9).

Для зведення загального рівняння прямої $Ax + By + C = 0$ до нормального виду необхідно обидві його частини помножити на нормувальний множник

$$M = \pm \frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}} \qquad (8.13)$$

Знак нормуювального множника береться протилежним знаку вільного члена C загального рівняння прямої (8.9).

Приклад. Загальне рівняння прямої $4x - 3y + 12 = 0$ записати у нормальному вигляді.

Розв'язування. Щоб звести загальне рівняння прямої до нормального виду, його обидві частини слід помножити на нормувальний множник (8.13). Знак нормувального множника береться протилежним знаку вільного члена в загальному рівнянні прямої. У нашому випадку вільний член у загальному рівнянні прямої дорівнює (+12), отже, нормувальний множник беремо зі знаком мінус. Далі $A = 4,\ B = -3,$ звідси $M = -\frac{1}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}$.

Помноживши на M обидві частини рівняння $4x - 3y + 12 = 0$, зведемо його до нормального видгляду:

$$-\frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y - \frac{12}{5} = 0.$$

Зауваження. Необхідно запам'ятати, що в нормальному рівнянні прямої сума квадратів коефіцієнтів при змінних координатах має дорівнювати одиниці, а вільний член має бути від'ємним.

Приклад. Чи буде рівняння прямої $-\frac{12}{13}x + \frac{5}{13}y - 3 = 0$ рівнянням прямої в нормальному вигляді?

Розв'язування. Перевіримо виконання вимог до рівняння прямої в нормальному вигляді:

а) сума квадратів коефіцієнтів при змінних координатах має дорівнювати одиниці:

$$\left(-\frac{12}{13}\right)^2 + \left(\frac{5}{13}\right)^2 = \frac{144}{149} + \frac{25}{169} = 1,$$

б) вільний член має бути від'ємним: $p - -3$.

Отже, дане рівняння є рівнянням прямої у нормальному вигляді.

8.2.10. Побудова прямої лінії за її рівнянням

Пряма вважається визначеною, якщо є відомими дві точки, що їй належать. Для того, щоб побудувати пряму за її рівнянням, необхідно, користуючись цим рівнянням, знайти координати двох її (довільних) точок.

Необхідно пам'ятати: якщо *точка належить прямій, то координати цієї точки задовольняють рівняння прямої, тобто при підстановці їх у рівняння дістаємо правильну числову рівність*.

1. Якщо пряма задана загальним рівнянням $Ax + By + C = 0, C \neq 0,$, то для її побудови найпростіше визначити точки перетину прямої з

координатними осями.

Приклад. Побудувати пряму $2x + y - 6 = 0$

Розв'язування. Ця пряма перетинає вісь OX у точці $A(3; 0)$. Справді, поклавши в цьому рівнянн $y = 0$і , дістанемо рівняння $2x - 6 = 0$, звідки $x = 3$. Поклавши в рівнянні прямої $x = 0$, дістанемо для визначення y рівняння $y - 6 = 0$, звідки $y = 6$. Отже, пряма перетинає вісь OY у точці $B(0; 6)$. За точками $A(3; 0)$ та $B(0; 6)$ будуємо пряму (рис. 8.15).

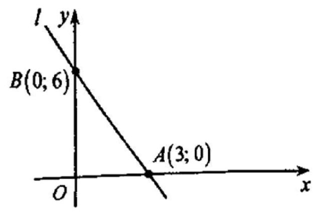

Рис. 8.15

2. Якщо пряма задана рівнянням: $Ax + By + C = 0, C = 0,$, то дана пряма проходить через початок координат. Другу точку визначаємо, поклавши, наприклад, $x = a$. Тоді для визначення y дістанемо рівняння

$$Aa + By = 0, \ \ y = -\frac{Aa}{B}$$

Отже, пряма $Ax + By = 0$ проходить через точки $(0; 0)$ і (а; $-\frac{Aa}{B}$)

Приклад. Побудувати пряму$2x - 4y = 0$.

Розв'язування. Ця пряма проходить через початок координат, оскільки $C = 0$. Обчислюємо координати другої точки. Для цього покладемо $x = 2$. Тоді для визначення y дістаємо рівняння $2 \cdot 2 - 4y = 0 \Rightarrow y = 1$. Отже, пряма

$2x - 4y = 0$ проходить через точки $O(0; 0), A(2; 1)$. За цими точками будуємо пряму (рис. 8.16).

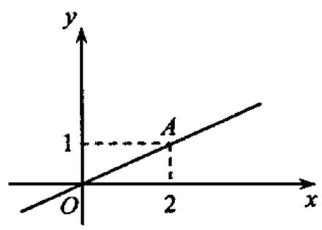

Рис. 8.16

3. Якщо пряму задано рівнянням $y = kx + b$ із кутовим коефіцієнтом, то з цього рівняння є відомою величина відрізка, який відтинає пряма на осі ординат від початку координат, і для побудови прямої залишається визначити координати ще однієї точки.

Приклад. Побудувати пряму $y = 3x + 2$.

Розв'язування. Пряму $y = 3x + 2$ задано рівнянням із кутовим коефіцієнтом. Із рівняння видно, що пряма відтинає на осі ординат відрізок, величина якого $b = 2$ (рис. 8.17). Отже, точка $A(0; 2)$ належить прямій. Знайдемо ще одну точку на цій прямій. Найкраще визначити точку перетину прямої з віссю OX. Поклавши в рівнянні $y = 0$, дістанемо $3x + 2 = 0$, звідки

$x = -\frac{2}{3}$. Точка B перетину прямої OX з віссю має координати $-\frac{2}{3}$ і 0 .

З'єднавши отримані точки, дістанемо пряму, що задається данимм рівнянням (рис. 8.17).

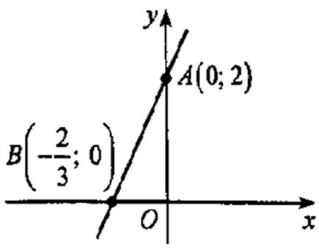

Рис. 8.17

8.3. Розміщення прямих на площині

Прямі задано рівняннями з кутовими коефіцієнтами.

Нехай пряміL_1, L_2 , не паралельні осі OY, задані рівняннями з кутовими коефіцієнтами:

$$(L_1)\ y = k_1x + b_1; \qquad (L_2)\ y = k_2x + b_2,$$

тоді, відповідно, кутами їх нахилу будуть кути φ_1 та φ_2:

$k_1 = tg\varphi_1, \quad k_2 = tg\varphi_2,$ (рис. 8.18).

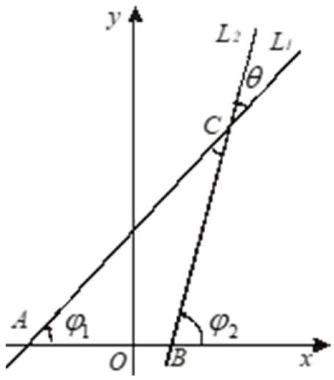

Рис. 8.18

Кутом між прямими L_1 та L_2 назвемо той кут, на який необхідно повернути пряму L_1 навколо точки їх перетину C проти годинникової стрілки, щоб вона збігалася (стала паралельною) з прямою L_2.

Оскільки при повороті на кут $(\pi - \theta)$ пряма також займе початкове положення, то звідси випливає, що кут між двома прямими визначається неоднозначно. Одне із значень цього кута можна завжди вибрати так, щоб воно було невід'ємним і меншим за π. На рис. (8.18) цей кут позначено через $\theta : (L_1, L_2) = \theta$.

Кут φ_1 буде зовнішнім кутом трикутника ABC. Із теореми про те, що зовнішній кут трикутника дорівнює сумі двох його внутрішніх кутів, які несуміжні з ним, дістаємо рівність $\varphi_2 = \varphi_1 + \theta \Rightarrow \theta = \varphi_2 - \varphi_1$.

Звідси

$$tg\theta = \frac{tg\varphi_2 - tg\varphi_1}{1 + tg\varphi_1 tg\varphi_2}, \text{ але } tg\varphi_1 = k_1, tg\varphi_2 = k_2 ,$$

тоді
$$tg\theta = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_2 k_1} \tag{8.14}$$

Формула (8.14) визначає тангенс кута між двома прямими через їх кутові коефіцієнти.

Зауваження 1. Формула (8.14) визначає тангенс кута θ, який визначається обертанням навколо точки C прямої L_1 з кутовим коефіцієнтом k_1 проти годинникової стрілки до збігу з прямою L_2.

Зауваження 2. Якщо порядок прямих не вказано, то цей порядок можна обирати самостійно.

З формули (8.14) легко дістати умови паралельності та перпендикулярності прямих L_1 та L_2

$$L_1 \parallel L_2 \Leftrightarrow k_1 = k_2 \ .$$

Якщо $L_1 \perp L_2$, то $\theta = 90°$ і$tg\theta$ $tg\theta$ не існує. У цьому випадку знаменник дробу (8.14) дорівнює нулю. Отже, умова перпендикулярності прямих : $k_2 k_1 = -1$.

Приклад. Обчислити кут між прямими $y = 2x - 3$ та $y = 3x - 2$ $y = -3x + 2$.

Розв'язування. У нашому випадку $k_1 = 2,\ a\ k_2 = -3$. За формулою (8.14) маємо

$$tg\theta = \frac{-3-2}{1+2(-3)} = 1.$$

Отже, кут між прямими $(L_{1,}\hat{}L_2) = 45°$= .

Прямі задано загальними рівняннями.

Якщо прямі L_1 та L_2 задано загальними рівняннями, то кут θ між ними дорівнює куту між нормальними векторами до цих прямих:

$$(L_1) \quad A_1x + B_1y + C_1 = 0, \ (L_2) \quad A_2x + B_2y + C_2 = 0,$$

$$\vec{n}_1 = \{A_1; B_2\}, \ \vec{n}_2 = \{A_2; B_2\} \ .$$

За формулою кута між векторами маємо

$$\cos(\vec{n}_{1,}\hat{}\vec{n}_2) = \cos\theta = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}. \quad (8.15)$$

Згідно з формулою (4.15) умови паралельності й перпендикулярності прямих L_1 та L_2матимуть вигляд:

$$L_1 \parallel L_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}.$$

Зауваження. Якщо $A_2 = 0$ (або $B_2 = 0$) , то це означає, що пряма L_2 паралельна осі OX (або OY). Оскільки $L_1 \parallel L_2$, то пряма L_1 також паралельна осі OX (або OY), тобто $A_1 = 0$;

$$L_1 \perp L_2 \Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 = 0.$$

Приклад. Визначити чи є перпендикулярними такі прямі:

$$(L_1) x - y = 0, \ \ (L_2) x + y = \ \ 12.$$

Розв'язування. Дані прямі задано загальними рівняннями, отже

$A_1 = 1, \ B_1 = -1, A_2 = 1, B_2 = 1.$ Перевіримо виконання умови перпендикулярності прямих $A_1A_2 + B_1B_2 = 0$. Маємо $1 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 = 0$. Отже, умова перпендикулярності виконується і ці прямі є взаємно перпендикулярними.

Прямі задано канонічними рівняннями.

Якщо прямі L_1 та L_2 задано канонічними рівняннями,

$$(L_1)\, \frac{x - x_1}{l_1} = \frac{y - y_1}{m_1}; \ \ (L_2)\, \frac{x - x_2}{L_2} = \frac{y - y_2}{m_2}. \, ,$$

то кут між ними визначається як кут між напрямними векторами цих прямих, тобто між векторами $q_1 = \{l_1; m_1\}, \ q_2 = \{l_2; m_2\}$,. За відомою формулою маємо

$$\cos(\vec{q}_1 \wedge \vec{q}_2) = \cos\theta = \frac{l_1 l_2 + m_1 m_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2}\sqrt{l_2^2 + m_2^2}}. \qquad (8.16)$$

Згідно з формулою (8.16) умови паралельності і перпендикулярності прямих L_1 та L_2 мають такий вигляд:

$$L_1 \parallel L_2 \Leftrightarrow \frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2}; \quad L_1 \perp L_2 \Leftrightarrow l_1 l_2 + m_1 m_2 = 0 \cdot$$

Приклад. Визначити, чи є паралельними такі прямі:

$$(L_1)\, \frac{x - 5}{4} = \frac{y - 3}{6}; \ \ (L_2)\, \frac{x - 1}{2} = \frac{y - 7}{3}.$$

Розв'язування. Дані прямі задано канонічними рівняннями, отже,

$l_1 = 4, \ m_1 = 6{,}1, \ l_2 = 2, \ m_2 = 3$. Перевіримо виконання умови паралельності прямих $\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2}$. Умова $\frac{4}{2} = \frac{6}{3} = 2$ виконується, отже, прямі паралельні. Також слід пересвідчитись у тому, що ці прямі не збігаються. Для цього рівняння цих прямих запишемо у такому вигляді:

$$y = \frac{3}{2}x - 3; y = \frac{3}{2}x + 5.$$

Це є рівняння прямих з кутовими коефіцієнтами, які відтинають на осі OY різні відрізки від початку координат, тому ці прямі не збігаються.

8.4. Відстань від точки до прямої

Нехай задано загальне рівняння прямої $l\colon Ax + By + C = 0$ і точку $M_1(x_1, y_1)$. Відстанню d від точки $M_1(x_1, y_1)$ до прямої l є довжина перпендикуляра, опущеного з цієї точки на пряму l (рис. 8.19).

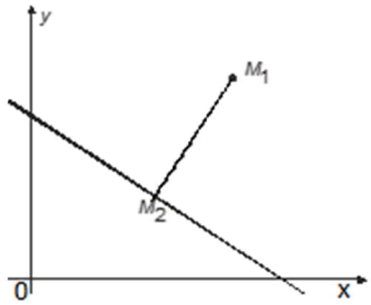

Рис. 8.19

Нехай $M_2(x_2, y_2)$ основа перпендикуляра, опущеного з точки $M_1(x_1, y_1)$ на пряму l. Тоді відстань між точками M_1 та M_2 дорівнює $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$. Координати точки M_2 знайдемо, склавши таку систему рівнянь:

$$\begin{cases} Ax_2 + By_2 + C = 0; \\ A(y_2 - y_1)^2 - B(x_2 - x_1)^2 = 0. \end{cases}$$

Перше рівняння отримали шляхом підстановки координат точки M_2 в рівняння прямої l, а друге рівняння системи є рівнянням прямої, яка проходить через точки M_1 і M_2. З цієї системи рівнянь отримаємо

$$(x_2 - x_1) = -\frac{A}{A^2+B^2}(Ax_1 + By_1 + C); \quad (y_2 - y_1) - \frac{B}{A^2+B^2}(Ax_1 + By_1 + C).$$

Підставивши ці значення у формулу для відстані між точками M_1 іM_2, маємо

$$d = \left|\frac{Ax_1+By_1+C}{\sqrt{A^2+B^2}}\right|. \tag{8.17}$$

Правило: щоб обчислити відстань від точки $M_1(x_1, y_1)$ до прямої $Ax + By + C = 0$, можна дане рівняння прямої звести до нормального вигляду, а за тим у ліву частину одержаного рівняння підставити замість змінних координат координати даної точки. Абсолютна величина одержаного числа і буде шуканою відстанню.

Приклад. Обчислити відстань від точки $A(2;5)$ до прямої $6x+8y-5=0$.

Розв'язування. Згідно з наведеним правилом зведемо дане рівняння прямої до нормального вигляду. Обчислимо нормувальний множник

$$M=\frac{1}{\sqrt{6^2+8^2}}=\frac{1}{10}.$$

Нормальне рівняння прямої можна записати так: $\frac{3}{5}x+\frac{4}{5}y-\frac{1}{2}=0$. Далі в ліву частину цього рівняння підставимо координати даної точки. Абсолютна величина одержаного числа і дасть шукану відстань: $d=\left|\frac{3}{5}\cdot 2+\frac{4}{5}5-\frac{1}{2}\right|=\frac{47}{10}$.

Відстань від точки до прямої - величина завжди додатна. Крім відстані від точки до прямої, розглядається і величина відхилення точки від прямої.

Відхилення δ даної точки від даної прямої є відстань від цієї точки до прямої, взята зі знаком «плюс», коли точка і початок координат лежать по різні боки від прямої, і зі знаком «мінус», якщо точка і початок координат лежать по один бік від прямої.

Висновок. Відстань від точки до прямої дорівнює абсолютній величині відхилення цієї точки від прямої: $d=|\delta|$.

Приклад. Як розміщені відносно початку координат точка $B\left(\frac{1}{6};\frac{1}{4}\right)$ та пряма $6x+8x-5=0$?

Розв'язування. Рівняння даної прямої в нормальному вигляді можна записати так: $\frac{3}{5}x+\frac{4}{5}x-\frac{1}{2}=0$. У праву частину цього рівняння підставимо координати даної точки. Одержане число визначатиме відхилення даної точки від даної прямої. Отже,

$$\delta=\frac{3}{5}\frac{1}{6}+\frac{4}{5}\frac{1}{4}-\frac{1}{2}=-\frac{1}{5}.$$

даному прикладі відхилення є від'ємне число, отже, точка і початок координат лежать по один бік від прямої.

9. Лекція № 9. Площина. Пряма у просторі

9.1. Рівняння площини

9.1.1. Загальне рівняння площини

Нехай площина α проходить через точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ перпендикулярно до вектора $\vec{N} = \{A; B; C\}$ (рис. 9.1). Цими умовами визначається єдина площина у просторі. Вектор $\vec{N}$ називається нормальним вектором площини α. Візьмемо в площині α довільну точку $M(x; y; z)$. Тоді вектор $\overline{M_0 M} = \{x - x_0; y - y_o; z - -z_0\}$ буде перпендикулярним до вектора$\vec{N} = \{A; B; C\}$. Отже, скалярний добуток цих векторів дорівнює нулю, тобто $\overrightarrow{N} \cdot \overrightarrow{M_0 M} = 0$.

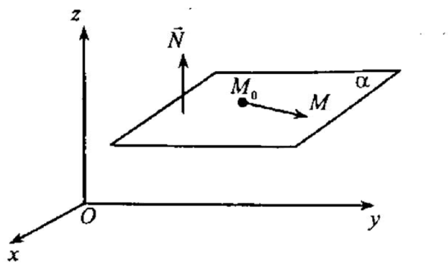

Рис. 9.1

Це рівняння запишемо в координатній формі

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0\cdot \qquad (9.1)$$

Рівняння (9.1) є рівнянням площини, що є перпендикулярною до заданого вектора $\vec{N} = \{A; B; C\}$ і проходить через задану точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$.

Рівняння площини, записане у вигляді

$$Ax + By + C_z + D = 0, \qquad (9.2)$$

де $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$, називається *загальним рівнянням площини.*

Можна довести, що будь-яке рівняння вигляду (9.2) є рівнянням площини.

9.1.2. Неповні рівняння площини

Якщо в рівнянні (9.2) деякі із коефіцієнтів $A; B; C; D$ дорівнюють нулю, то такі рівняння називаються неповними рівняннями площини. Особливість розміщення площин, які задаються неповними рівняннями, в просторі визначається такими правилами:

Правило 1: Якщо $D = 0$, то рівняння $Ax + By + C_z + D = 0$ визначає площину, що проходить через початок координат.

Приклад. Площина, задана рівнянням $2x - 3y + 4z = 0$ $(D = 0)$, проходить через початок координат.

Правило 2. Якщо дорівнює нулю коефіцієнт при одній із координатних змінних, то площина паралельна відповідній координатній осі.

Приклад. Площина, задана рівнянням $7y + 4z - 5 = 0$ $(A = 0)$, паралельна осі OX.

Правило 3. Якщо дорівнюють нулю коефіцієнти при двох із координатних змінних, то площина паралельна відповідній координатній площині.

Приклад. Площина, задана рівнянням $2z - 6 = 0$ $(A = 0, B = 0)$, паралельна координатній площині OXY.

Правило 4. Якщо дорівнює нулю коефіцієнт при одній із координатних змінних і $D = 0$ то площина проходить через відповідну координатну вісь.

Приклад. Площина, задана рівнянням $3x + 4y = 0$ $(C = 0; D = 0)$, проходить через вісь OZ.

Правило 5. Якщо дорівнюють нулю коефіцієнти при двох координатних змінних і $D = 0$, то площина збігається з відповідною координатною площиною. OXY

Приклад. Площина, задана рівнянням $5z = 0$, збігається з координатною площиною.

9.1.3. Рівняння площини у відрізках

Рівняння площини у відрізках має вигляд:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1. \qquad (9.13)$$

До цього вигляду можна звести повне загальне рівняння площини.

$$Ax + By + C_z + D = 0,\ Ax + By + C_z = -D,$$

$$\frac{A_x}{-D} + \frac{By}{-D} + \frac{Cz}{-D} = 1.$$

Запишемо останнє рівняння так:

$$\frac{x}{\frac{-D}{A}} + \frac{y}{\frac{-D}{B}} + \frac{z}{\frac{-D}{C}} = 1.$$

Введемо позначення: $a = -\frac{D}{A},\ b = -\frac{D}{B},\ c = -\frac{D}{C}$ Числа abc визначають відрізки, які відтинає площина на координатних осях. Справді, якщо точка M площини належить осі OX, то її координати будуть такі: M $(x_0; 0; 0)$. Отже, $Ax_0 + D = 0$, звідки $x_0 = -\frac{D}{A}$, , отже, $a = -\frac{D}{A}$.

Приклад. Звести рівняння площини $x + 2y - 3z + 6 = 0$ до рівняння площини у відрізках.

Розв'язування. Це рівняння є загальним рівнянням площини. Обчислимо довжини відрізків a, b, c, які вона відтинає на координатних осях:

на осі OX, якщо $y = 0,\ z = 0,$, то $x + 6 = 0$, отже, $x = -6$ і $a = -6$;

на осі OY якщо $x = 0,\ z = 0,$, то $2y + 6 = 0$, отже, $y = -3$ і $b = -3$;

на осі OZ, якщо $x = 0,\ y = 0,$, то -$3z + 6 = 0$, отже, $z = 2$ і $c = 2$

Рівняння площини у відрізках матиме вигляд

$$\frac{x}{-6} + \frac{y}{-3} + \frac{z}{2} = 1.$$

9.1.4. Рівняння площини, що проходить через три задані точки, які не лежать на одній прямій

Нехай маємо три точки $M_1(x_1; y_1; z_1), M_2(x_2; y_2; z_2), M_3(x_3; y_3; z_3)$ які не лежать на одній прямій (рис. 9.2).

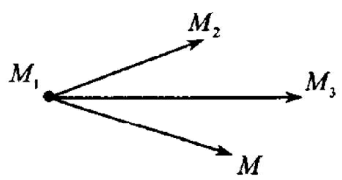

Рис. 9.2

Розглянемо вектори $\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_1M_3},$. Ці вектори не є колінеарними, а, отже, довільна точка площини $M(x, y, z)$ лежить в одній площині з точками M_1, M_2, M_3 тоді й тільки тоді, коли вектори $\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_1M_3}, \overrightarrow{M_1M}$ будуть компланарними. Якщо вектори компланарні, то їх мішаний добуток дорівнює нулю:

$$\left(\overrightarrow{M_1M_2} + \overrightarrow{M_1M_3}\right) \cdot \overrightarrow{M_1M} = 0.$$

Напишемо цю умову у вигляді

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0. \qquad (9.4)$$

Рівняння (9.4) називається *рівнянням площини, що проходить через три задані точки*.

Приклад. Знайти рівняння площини, що проходить через точки

$$M_1(1; 2; -1), M_2(-1; 0; 4), M_3(-2; -1; 1)\cdot$$

Розв'язування. На підставі (9.4) рівняння шуканої площини можна записати у вигляді

$$\begin{vmatrix} x - 1 & y - 2 & z + 1 \\ -2 & -2 & 5 \\ -3 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

Обчислимо цей визначник, розкриваючи його за елементами першого рядка:

$$11(x - 1) - 11(y - 2) + 0(z + 1) = 0\cdot$$

Розкриємо дужки, зведемо подібні члени і скоротимо на 11, після чого дістанемо $x - y + 1 = 0$. Це рівняння визначає площину, яка паралельна осі OZ.

9.1.5. Нормальне рівняння площини

Нормальне рівняння площини має вигляд

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0. \qquad (9.5)$$

У рівнянні (9.5) $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ - координати одиничного нормального вектора, який опущено із початку координат на цю площину, кути α, β, γ- кути, які утворює цей вектор з відповідними координатними осями, p- довжина перпендикуляра, проведеного із початку координат до цієї площини.

Для зведення загального рівняння площини $Ax + By + C_z + D = 0$ до нормального виду необхідно його помножити на нормувальний множник

$$M = \pm \frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \qquad (9.6)$$

Знак нормувального множника M береться протилежним до знака вільного члена D.

Приклад. Знайти довжину перпендикуляра, опущеного із початку координат на площину $10x + 15y - 6z - 380 = 0$, і косинуси кутів, які утворені цим перпендикуляром з координатними осями.

Розв'язування. Зведемо рівняння площини до нормального вигляду. За формулою (9.6) знаходимо значення нормувального множника $M = \frac{1}{19}$. Обидві частини рівняння заданої площини помножимо на $\frac{1}{19}$ і дістанемо рівняння площини в нормальному вигляді

$$\frac{10}{19}x + \frac{15}{19}y - \frac{6}{19}z - 20 = 0,$$

з якого видно, що $p = 20$. Отже, довжина перпендикуляра, опущеного з початку координат на площину, дорівнює 20. Косинуси кутів, які утворені цим перпендикуляром з координатними осями, дорівнюють

$$\cos\alpha = \frac{10}{19},\ \cos\beta = \frac{15}{19}, \cos\gamma = \frac{6}{19}.$$

Контроль: $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

9.2. Кут між двома площинами

Кут між двома площинами визначається як кут між нормальними векторами цих площин. Нехай площини задано загальними рівняннями

$$A_{1x}x + B_{1y}y + C_1 z + D_1 = 0 \text{ та } A_{2x}x + B_{2y}y + C_2 z + D_2 = 0$$

тоді нормальним вектором першої площини буде вектор - $\vec{N}_1 = \{A_1;\ B_1; C_1\}$, а другої - $\vec{N}_2 = \{A_2;\ B_2; C_2\}$. Косинус кута між цими векторами, а значить і між площинами обчислюється за відомою формулою

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}. \qquad (9.7)$$

Умова перпендикулярності двох площин збігається з умовою перпендикулярності векторів $\vec{N}_1$ і $\vec{N}_2$ та має вигляд

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2. \qquad (9.8)$$

Умова паралельності двох площин збігається з умовою колінеарності векторів $\vec{N}_1$ і $\vec{N}_2$та має вигляд

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}. \qquad (9.9)$$

Зауваження. 1. Якщо одна з координат вектора $\vec{N}_2$ дорівнює нулю, наприклад,$A_2 = 0$, то вектор $\vec{N}_2$ перпендикулярний до осі OX. З умови $\vec{N}_1 \parallel \vec{N}_2$ випливає, що вектор $\vec{N}_1$ також перпендикулярний до осі OX , а отже, і $A_1 = 0$.

Зауваження 2. Якщо дві координати вектора $\vec{N}_2$ дорівнюють нулю, наприклад, $A_2 = 0$ і $B_2 = 0$, то вектор $\vec{N}_2$ перпендикулярний до площини OXY .

З умови $\vec{N}_1 \parallel \vec{N}_2$ випливає, що вектор $\vec{N}_1$ також є перпендикулярним до площини OXY , тобто є паралельним осі OZ. Це означає, що $A_1 = 0$ і $B_1 = 0$.

Приклад. Обчислити косинус кута між двома площинами

$$sx - 3y + 4z = 0, \quad 3x - 4y - 2z + 5 = 0.$$

Розв'язування. За формулою (5.7), якщо врахувати, що

$$A_1 = 5,\ B_1 = -3,\ C_1 = 4, \quad A_2 = 3,\ B_2 = -4, \quad C_2 = 2\ ,$$

Дістанемо

$$\cos\varphi = \frac{15+12-8}{\sqrt{50}\cdot\sqrt{29}} = \frac{19}{5\sqrt{58}}.$$

Отже,

$$\cos\varphi = \frac{19}{5\sqrt{58}}.$$

9.2.1. Відстань від точки до площини

Відстань від точки $A_0(x_1, y_1, z_1)$ до площини $Ax + By + C_z + D = 0$ є довжиною перпендикуляра, опущеного із цієї точки на площину. Вона обчислюється за формулою

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C_{z_1} + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \qquad (9.10)$$

Правило. Щоб визначити відстань від точки $A_0(x_1, y_1, z_1)$ до площини $Ax + By + C_z + D = 0$ необхідно дане рівняння площини звести до нормального вигляду, потім у ліву частину одержаного рівняння підставити замість змінних координат координати заданої точки. Абсолютна величина одержаного числа і буде шуканою відстанню.

Приклад. Обчислити відстань від точки $A_0(2,3,-1)$ до площини $10x + 7x - 6y - 6z + 42 = 0$.

Розв'язування. Відстань від точки до площини обчислюємо за формулою (9.10), у якій $A = 7; B = -6;$ $C = -6;$ $D = 42;$ $x_1 = 2;$ $y_1 = 3;$ $z = -1.$ Підставивши ці значення у формулу (5.10), одержимо $d = 4$. Відстань від точки до прямої є величина завжди додатна. Крім відстані від точки до площини, розглядається ще й відхилення точки від площини.

Відхилення δ заданої точки від площини є відстань від цієї точки до заданої площини, взята зі знаком «плюс», коли точка і початок координат лежать по різні боки від даної площини, і зі знаком «мінус», якщо точка й початок координат лежать по один бік від площини.

Висновок. Відстань від точки до площини дорівнює абсолютній величині відхилення цієї точки від площини: $d = |\delta|$.

Зауваження. Звернемо увагу на схожість обчислення відстані і відхилення точки від площини з обчисленням відстані і відхилення точки від прямої на площині, що розглянуто в п. 8.4.

9.3. Різні рівняння прямої лінії у просторі

9.3.1. Канонічні рівняння прямої у просторі

Пряму L у просторі можна визначити точкою $M_1(x_1, y_1, z_1)$, яка належить цій прямій, і напрямним вектором $\vec{q} = \{l; m; n\}$ цієї прямої (рис. 9.3).

Візьмемо на прямій L довільну точку $M(x; y; z)$ і побудуємо вектор $\overrightarrow{M_1M} = \{x - x_1; y - y_1; z - z_1\}$.

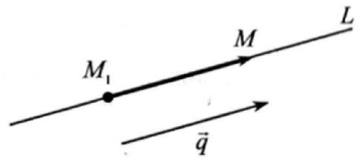

Рис. 9.3

Вектори $\overrightarrow{M_1M}$ та $\vec{q}$ колінеарні, а тому їх відповідні проекції пропорційні:

$$\frac{x-x_1}{l} = \frac{y-y_1}{m} = \frac{z-z_1}{n}. \qquad (9.11)$$

Рівняння (9.11) є канонічними рівняннями прямої у просторі.

Зауваження. Коли у рівнянні (9.11) один із знаменників дорівнює нулю, то вважатимемо, що відповідний чисельник також дорівнює нулю.

Приклад. Пояснити положення прямої $\frac{x-4}{0} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+5}{4}$ у просторі.

Розв'язування. Дану пряму задано канонічними рівняннями (9.11). Оскільки $l = 0$, то $x - 4 = 0$. Отже, пряма перетинає вісь OX у точці $x - 4$ і перпендикулярна до цієї осі.

9.3.2. Рівняння прямої, що проходить через дві задані точки

Пряму Lу просторі можна визначити двома точками $M_1(x_1, y_1, z_1)$ та $M_2(x_2, y_2, z_2)$, що належать цій прямій (рис. 9.4).

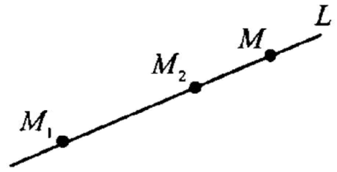

Рис. 9.4

Візьмемо на прямій L довільну точку $M(x, y, z)$ і побудуємо вектори

$$\overrightarrow{M_1M} = \{x - x_1; y - y_1; z - z_1\}, \qquad \overrightarrow{M_1M_2} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}.$$

Вектори $\overrightarrow{M_1M}$і $\overrightarrow{M_1M_2}$ колінеарні, а тому їх відповідні координати пропорційні:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}. \qquad (9.12)$$

Рівняння (9.12) є рівнянням прямої у просторі, яка проходить через дві задані точки.

9.3.3. Параметричні рівняння прямої

Якщо в рівнянні (9.11) значення відношень позначити через t

$$\frac{x - x_1}{l} = t; \ \frac{y - y_1}{m} = t; \ \frac{z - z_1}{n} = t, \qquad t \in R,$$

а потім розв'язати одержані рівняння відносно $x, y, z,$ то дістанемо

$$\begin{cases} x = x_1 + lt; \\ y = y_1 + mt; \\ z = z_1 + nt; \end{cases} \qquad t \in R \qquad (9.13)$$

Як і для прямої на площині, змінна t набуває довільних дійсних значень і називається параметром. Коли точка M рухається по прямій, параметр t змінюється за абсолютною величиною і знаком.

Рівняння (9.13) називаються *параметричними рівняннями прямої.*

Параметричні рівняння прямої зручно застосовувати у тих випадках, коли необхідно знайти точку перетину прямої і площини.

Приклад. Задано пряму L та площину α. Знайти точку їх перетину.

$$(L)\,\frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-4}{2}; \quad (\alpha)\ 2x + y + z - 6 = 0.$$

Розв'язування. Дану пряму задано канонічними рівняннями.

Параметричні рівняння цієї прямої мають вигляд

$$x = 2 + t; \quad y = 3 + t; \quad z = 4 + 2t.$$

Підставивши ці вирази в ліву частину заданого рівняння площини, отримаємо рівняння з одним невідомим t

$$2(2 + t) + (3 + t) + (4 + 2t) - 6 = 0.$$

Розв'язавши це рівняння, знаходимо $t = -1$, а значить, координатами шуканої точки є $x = 1; y = 2; \ z = 2$.

9.3.4. Рівняння прямої, як лінії перетину двох площин

Пряма L може бути задана як лінія перетину двох площин α_1 та α_2 (рис. 9.5).

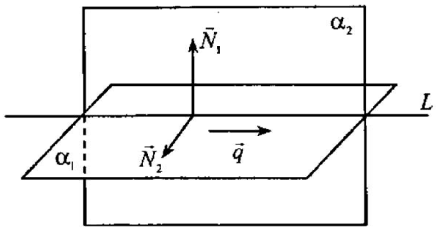

Рис. 9.5

$$(L)\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0; & (\alpha_1) \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. & (\alpha_2) \end{cases} \qquad (9.14)$$

Нормальними векторами цих площин є вектори $\vec{n}_1 = \{A_1; B_1; C_1\}$ та $\vec{n}_2 = \{A_2; B_2; C_2\}$. Напрямний вектор $\vec{q}$ заданої прямої можна обчислити як векторний добуток векторів $\vec{n}_1$ та $\vec{n}_2$:

$$\vec{q} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix} \qquad (9.15)$$

Щоб від рівнянь (9.14) перейти до канонічних рівнянь прямої (9.11), необхідно знайти, крім координат вектора $\vec{q} = \{l; m; n\}$, координати точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, яка належить цій прямій. Точку M_1 можна взяти як точку перетину даної прямої з однією із координатних площин:

- з площиною OXY , тоді $z = 0$;
- з площиною OXZ, тоді $y = 0$;
- з площиною OYZ, тоді $x = 0$.

У будь-якому випадку з рівнянь (9.14) дістаємо систему двох рівнянь із двома невідомими, розв'язавши яку, знайдемо координати точки M_1.

Приклад. Звести рівняння прямої до канонічного вигляду

$$\begin{cases} 2x - y + 3z - 1 = 0; \\ 5x + 4y - z - 7 = 0. \end{cases}$$

Розв'язування. Пряму задано як лінію перетину двох площин.

Канонічні рівняння прямої у просторі мають вигляд

$$\frac{x-x_1}{l} = \frac{y-y_1}{m} = \frac{z-z_1}{n}.$$

Напрямний вектор $\vec{q}$ цієї прямої обчислимо за формулою (9.15):

$$\vec{q} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 3 \\ 5 & 4 & -1 \end{vmatrix} = -11\vec{i} + 14\vec{j} + 13\vec{k}.$$

За точку M_1 візьмемо точку перетину цієї прямої з площиною OYZ, тоді $x = 0$. Дістанемо систему двох рівнянь з двома невідомими

$$\begin{cases} -y + 3z - 1 = 0; \\ \ 4y - z - 7 = 0. \end{cases}$$

Розв'язавши цю систему, отримаємо:$y = 0, z = 1$ Отже, точка M_1 має координати 0;2;1, і канонічне рівняння прямої можна записати так:

$$\frac{x}{-11} = \frac{y-2}{14} = \frac{z-1}{13}.$$

9.4. Кут між двома прямими в просторі

Нехай прямі задано канонічними рівняннями:

$$(L_1)\,\frac{x - x_1}{l_1} = \frac{y - y_1}{m_1} = \frac{z - z_1}{n_1};$$

(9.16)

$$(L_2)\,\frac{x - x_2}{L_2} = \frac{y - y_2}{m_2} = \frac{z - z_2}{n_2}$$

Напрямними векторами цих прямих є вектори $q_1 = \{l_1; m_1;\ n_1\}$,

$q_2 = \{l_2; m_2; n_2\,\}$ і

$$\cos(\vec{L}_{1,}\hat{\ }L_2) = \cos(q_1, \hat{\ }q_2) = \frac{L_1L_2+m_1m_2+n_1n_2}{\sqrt{l_1^2+m_1^2+n_1^2}\sqrt{l_2^2+m_2^2+n_2^2}} \qquad (9.17)$$

Кут між прямими l_1 та l_2 визначається як кут між напрямними векторами цих прямих.

З формули (9.17) дістаємо умови паралельності та перпендикулярності прямих l_1 та l_2 :

$$L_1 \perp L_2 \Leftrightarrow l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2 = 0;$$

$$L_1 \parallel L_2 \Leftrightarrow \frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}.$$

Приклад. Знайти косинус кута між прямими:

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-3}{2}, \ \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-1}{-2}.$$

Розв'язування. Кут між двома прямими визначається за формулою (9.17), в якій необхідно взяти $l_1 = 3$; $m_1 - 1$; $n_1 = 2$; $l_2 = 2$; $m_2 = 4$; $n_2 = -2$;

Підставивши ці значення у формулу (9.17), дістанемо

$$\cos\varphi = \frac{-1}{2\sqrt{21}}.$$

9.5. Пряма і площина у просторі

9.5.1. Умова належності двох прямих площині

Нехай прямі L_1і L_2 задано канонічними рівняннями (9.16). Пряма L_1 визначається точкою $M_1(x_1, y_1, z_1)$ і напрямним вектором $q_1 = \{l_1; m_1; n_1\}$, , а пряма L_2 - точкою $M_2(x_2, y_2, z_2)$ і напрямним вектором $q_2 = \{l_2; m_2; n_2\}$. Оскільки прямі L_1 та L_2 мають належати одній площині, то точки M_1, M_2 також мають належати цій площині, а значить, і вектор

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}.$$

має належати цій площині. Вектори q_1 та q_2 паралельні площині, отже, вектори $\overrightarrow{M_1M_2}$, q_1 ,q_2 є компланарними, а тому їх мішаний добуток дорівнює нулю:

$$\overrightarrow{(M_1M_2)} \times q_1) \cdot q_2 = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0 \qquad (9.18)$$

Якщо величини l_1, m_1, n_1 не пропорційні величинам l_2, m_2, n_2 l_2, m_2, n_2, то співвідношення (9.18) є необхідною і достатньою умовою перетину двох прямих у прос

9.5.2. Кут між прямою та площиною

Нехай пряму задано канонічними рівняннями $\frac{x-x_1}{l} = \frac{y-y_1}{m} = \frac{z-z_1}{n}$, площину - загальним рівнянням $Ax + By + C_z + D = 0$. Тоді напрямним вектором прямої буде вектор $\vec{q}(l, m, n)$, а нормальним вектором площини буде вектор

$\vec{N} = \{A; B; C\}$.

Означення. Кутом φ між прямою та площиною називається будь-який із двох суміжних кутів, які утворені прямою та її проекцією на цю площину (рис. 9.6).

Нехай ψ - кут між напрямним вектором прямої $\vec{q}$ і нормальним вектором площини $\vec{N}$; L_1 - проекція прямої L на площину α. Вважатимемо, що $\varphi \leq \frac{\pi}{2}$,

оскільки синуси суміжних кутів рівні: $\sin\varphi = \sin(180° - \varphi)$.

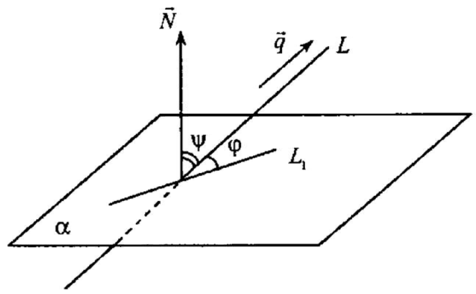

Рис. 9.6

З рис. 9.6 видно, що $\psi + \varphi = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \psi = \frac{\pi}{2} - \varphi$. Враховуючи ці зауваження, обчислюємо косинус кута ψ :

$$\cos\psi = \cos(\frac{\pi}{2} - \varphi) = \sin\varphi = \frac{|Al + Bm + Cn|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}$$

Отже,

$$\sin\varphi = \frac{|Al+Bm+Cn|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{l^2+m^2+n^2}} \qquad (9.19)$$

За формулою (9.19) обчислюється синус кута між прямою та площиною. У чисельнику стоїть знак модуля, оскільки $\sin\varphi \geq \frac{\pi}{2}$.

З формули (9.19) дістаємо умови паралельності та перпендикулярності прямої L і площини α:

$$L \| \alpha \Leftrightarrow Al + Bm + Cn = 0;$$

$$L \perp \alpha \Leftrightarrow \frac{A}{l} = \frac{B}{m} = \frac{C}{n}.$$

9.5.3. Умова належності прямої площині

Умова належності прямої $\frac{x-x_1}{l} = \frac{y-y_1}{m} = \frac{z-z_1}{n}$ площині

$Ax + By + C_z + D = 0$ визначається такою системою рівнянь:

$$\begin{cases} Ax_1 + By_1 + C_{z_1} + D = 0; \\ Al + Bm + Cn = 0. \end{cases} \qquad (9.20)$$

Пряма визначається точкою $M_1(x_1, y_1, z_1)$ та напрямним вектором

$q = \{l; m;\ n\}$. Із рівняння площини випливає, що її нормальним вектором є вектор $\vec{N} = \{A; B; C\}$. Перша рівність в умові (9.20) випливає з вимоги, що, якщо пряма належить площині, то й точка, яка належить цій прямій, також належить площині. А якщо це так, то координати точки мають задовольняти рівняння площини: $Ax_1 + By_1 + C_{z_1} + D = 0$. Вектори $\vec{q}$ та $\vec{N}$ взаємно перпендикулярні, а тому їх скалярний добуток дорівнює нулю: $Al + Bm + +Cn = 0$.

Приклад. Перевірити, чи пряма

$$(L) \cdot \frac{x-2}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+1}{3}$$

лежить у площині

$$(\alpha) \cdot x + y - z - 6 = 0.$$

Розв'язування. За умовою $x_1 = 2; y_1 = 3; z_1 = -1; l = 1; m = 1;$ $n = 3;$ $A = 1; B = 1; C = -1.$ Перша і друга рівності (9.20) виконуються, отже, пряма L лежить у площині α.

9.5.4. Рівняння перпендикуляра, опущеного з даної точки на задану пряму

Перпендикуляр, опущений з точки$M_0(x_0, y_0, z_0)$ на пряму L_1, задану канонічним рівнянням

$$\frac{x-x_1}{l_1} = \frac{y-y_1}{m_1} = \frac{z-z_1}{n_1} \qquad (9.21)$$

точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ не належить прямій L_1), можна представити такими рівняннями:

$$\begin{cases} l_1(x-x_0) + m_1(y-y_0) + n_1(z-z_0) = 0; \\ \begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ l_1 & m_1 & n_1 \end{vmatrix} = 0 \end{cases} \qquad (9.22)$$

$$(9.23)$$

У векторній формі ці рівняння можна записати так:

$$\begin{cases} \vec{a}_1(\vec{r} - \vec{r_0}) = 0; \\ (\vec{r} - \vec{r_0})(\vec{r}_1 - \vec{r_0})\vec{a}_1 = 0 \end{cases} \qquad (9.24)$$

Взяте окремо рівняння (9.22) представляє собою площину Q (рис.9.7), проведену через точку M_0 перпендикулярно до прямої L_1 , а рівняння (9.22) – площину R, проведену через точку M_0 і пряму L_1.

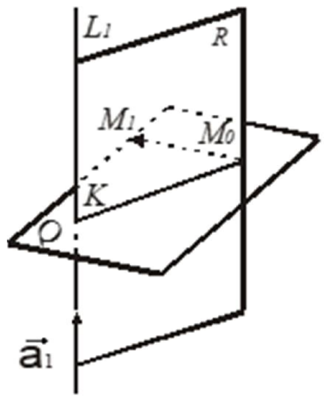

Рис.9.7

Приклад. Знайти рівняння перпендикуляра, опущеного з точки (1;2;1) на пряму

$$\frac{x-2}{3}=\frac{y}{2}=\frac{z}{1}. \tag{9.25}$$

Розв'язування. Підставимо координати заданої точки та координати напрямного вектора в рівняння (9.22), (9.23):

$$\begin{cases} 3(x-1)+2(y-2)+1(z-1)=0; \\ \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-1 \\ 2-1 & y-2 & 0-1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}=0. \end{cases}$$

Після спрощень маємо:

$$\begin{cases} 3x+2y+z-8=0; \\ y-2z=0 \end{cases}. \tag{9.26}$$

Координати основи K перпендикуляра знайдемо, розв'язавши систему, що складається із рівнянь (9.25), (9.26). Маємо $K\left(\frac{17}{7};\frac{2}{7};\frac{1}{7}\right)$.

9.5.5. Рівняння спільного перпендикуляра до двох заданих прямих

Пряма UV, що перетинає дві непаралельні прямі (L_1та L_2 на рис. (9.8))

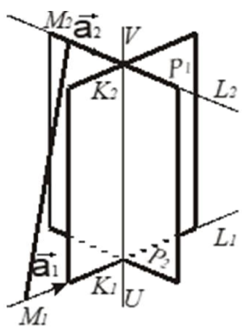

Рис. 9.8

і є перпендикулярною до них, може бути представлена (у векторній формі) такими рівняннями:

$$(\vec{r}-\vec{r}_1)\vec{a}\vec{a}_1=0 \tag{9.27}$$

$$(\vec{r}-\vec{r}_2)\vec{a}\vec{a}_2=0 \tag{9.28}$$

де $\vec{a}_1=\{l_1;m_1;\ n_1\},\ \vec{a}_2=\{l_2;m_2;\ n_2\},$, та $\vec{a}=\vec{a}_1\times\vec{a}_2$.

Окремо рівняння (9.27) визначає площину P_1, проведену через пряму L_1

паралельно вектору $\vec{a} = \vec{a}_1 \times \vec{a}_2$. Аналогічно рівняння (9.28) визначає площину P_2, проведену через пряму L_2 паралельно вектору $\vec{a}$.

Точка K_1, в якій UV перетинає L_1, може бути знайденою при перетині L_1 з площиною P_2. Аналогічно можна знайти точку K_2, після чого можна знайти довжину спільного перпендикуляра K_1K_2 .

Зауваження. У випадку паралельності прямих L_1 та L_2 (тоді $\vec{a} = 0$ і рівняння (9.27), (9.28) перетворюються на тотожності) є безліч прямих UV. Щоб отримати рівняння однієї із них, візьмемо на L_1 (рис 9.8) довільну точку K_1 і складемо рівняння прямої, що проходить через K_1 за напрямком вектора $\vec{a}_1 \times \vec{b}$, де $\vec{b} = \vec{a}_1 \times (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$.

Приклад. Знайти рівняння спільного перпендикуляра до прямих, заданих у параметричному вигляді:

$$(L_1)\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 - 4t \\ z = -1 - t \end{cases} \qquad (L_2)\begin{cases} x = -1 + t' \\ y = 1 - 2t' \\ z = 1 + 2t' \end{cases} \qquad (9.29)$$

Розв'язування. Маємо $\vec{a}_1 = \{2; -4; -1\}$, $\vec{a}_2 = \{1; -2; 2\}$ - напрямні вектори заданих прямих L_1 та L_2; вектор $\vec{a}$, що визначає напрямок спільного перпендикуляра до прямих L_1 та L_2, можна знайти за допомогою векторного добутку векторів $\vec{a}_1$ та $\vec{a}_2$:

$$\vec{a}_1 \times \vec{a}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -4 & -3 \\ 5 & -2 & 2 \end{vmatrix} = -10 \cdot \vec{i} - 5 \cdot \vec{j} + 0 \cdot \vec{k}.$$

Завдяки тому, що вектори $\vec{a}_1$ $\vec{a}_2$, та $\vec{a}$ мають бути компланарними, шуканий перпендикуляр можна представити такими рівняннями:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z+1 \\ 2 & -4 & -1 \\ -10 & -5 & 0 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} x+1 & y-2 & z-1 \\ 1 & -2 & 2 \\ -10 & -5 & 01 \end{vmatrix} = 0.$$

Спрощуючи ці рівняння, отримаємо

$$\begin{cases} -5x + 10y + 10z + 11 = 0, \\ 10x - 20y - 25z + 75 = 0. \end{cases}$$

Скоротивши ці рівняння на «∓ 5» (відповідно), маємо:

$$\begin{cases} x - 2y + 10z + 11 = 0, \\ 2x - 4y - 5z + 15 = 0. \end{cases} \quad (9.30)$$

Точку K_1 перетину спільного перпендикуляра з прямою L_1 знайдемо з системи (9.29) – (9.30). Отримаємо $K_1(-\frac{11}{25};\frac{97}{25};\frac{7}{25})$. Аналогічно точку K_2 перетину спільного перпендикуляра з прямою L_2 знайдемо з системи (9.29) – (9.30). Маємо $K_2(-\frac{41}{25};\frac{82}{25};\frac{7}{25})$. Довжина спільного перпендикуляра дорівнює

$$d = \sqrt{(-\frac{41}{25}+\frac{11}{25})^2 + (-\frac{82}{25}+\frac{97}{25})^2 + (-\frac{7}{25}+\frac{7}{25})^2} = \frac{3}{\sqrt{5}}.$$

9.5.6. Найкоротша відстань між двома прямими

Найкоротшою відстанню між двома прямими L_1 та L_2 є довжина d їх спільного перпендикуляра. Її можна знайти, склавши рівняння спільного перпендикуляра. Цю задачу можна розв'язати простіше, а саме, нехай

$\vec{a}_1 = \{l_1; m_1;\ n_1\}$- напрямний вектор прямої L_1, що проходить через точку $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $\vec{a}_2 = \{l_2; m_2;\ n_2\}$- напрямний вектор прямої L_2, що проходить через точку$M_2(x_2, y_2, z_2)$. Помістимо початки векторів $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ в точку M_1 і на векторах $M_1, \overrightarrow{M_1M_2}$ побудуємо паралелепіпед (рис. 9.9).

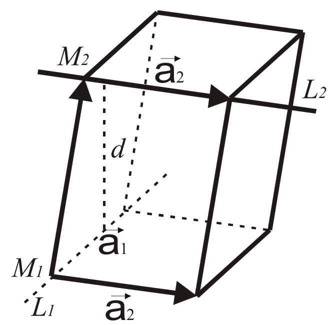

Рис. 9.9

Найкоротша відстань між заданими прямими дорівнює відстані між площинами граней паралелепіпеда, яким належать прямі, і може бути обчислена як висота цього паралелепіпеда. Об'єм V обчислимо як мішаний добуток векторів, на яких він побудований:

$$V = \left|\overrightarrow{(a_1} \times\ \vec{a}_2) \cdot \overrightarrow{M_1M_2}\right|.$$

Площу основи S знайдемо, застосувавши векторний добуток векторів $S = |\vec{a}_1 \times \vec{a}_2|$, Отже,

$$d = \frac{V}{S} = \frac{|\overrightarrow{(a_1} \times \vec{a}_2) \cdot \overrightarrow{M_1M_2}|}{|\vec{a}_1 \times \vec{a}_2|}.$$

Приклад. Знайти відстань між прямими

$$(L_1)\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 - 4t \\ z = -1 - t \end{cases} \qquad (L_2)\begin{cases} x = -1 + t' \\ y = 1 - 2t' \\ z = 1 + 2t' \end{cases}$$

Маємо $\vec{a}_1 = \{2; -4;\ -1\}$, $\vec{a}_2 = \{1; -2;\ 2\}$ - напрямні вектори заданих прямих L_1 та L_2 , точка $M_1(1; 1; -1)$ належить прямій L_1, а точка $M_2(-1; 2; 1)$ $M_2(-1;2;1)$ - прямій . L_2

Отримаємо: $S = |\vec{a}_1 \times \vec{a}_2| = mod \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -4 & -3 \\ 5 & -2 & 2 \end{vmatrix} = \left|-10\vec{i} - 5 \cdot \vec{j} + 0 \cdot \vec{k}\right| == \sqrt{(-10)^2 + (-5)^2 + 0^2} = \sqrt{125},$

$$V = \left|\overrightarrow{(a_1} \times\ \vec{a}_2) \cdot \overrightarrow{M_1M_2}\right| = mod \begin{vmatrix} 2 & -4 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 15,$$

$$d = \frac{15}{\sqrt{125}} = \frac{3}{\sqrt{5}}.$$

Індивідуальні завдання

1. Розрахунково-графічна робота "Елементи лінійної алгебри"

Завдання 1.1. Знайти значення параметра α , при якому визначник матриці дорівнює нулю (n - номер варіанта).

1. $\begin{pmatrix} \alpha & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & n \end{pmatrix}$ 2. $\begin{pmatrix} 1 & \alpha & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & n & 3 & 4 \end{pmatrix}$ 3. $\begin{pmatrix} 1 & 31 & \alpha & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 1 & n \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & \alpha \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & n & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ 4. $\begin{pmatrix} 2 & n & 2 & 5 \\ 2 & \alpha & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ 5. $\begin{pmatrix} 2 & n & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & \alpha & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

Завдання 1.2. Знайти елементи матриці

$D = A2 - BC + A - 1 + n \cdot E$ (n — номер варіанта, E - одинична матриця).

1. $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ n & 1 & 6 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} n & 2 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

2. $A = \begin{pmatrix} n & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} n & 2 \\ -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} n & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

3. $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ n & 1 & 5 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} n & 2 \\ -4 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -n & 4 & -1 \end{pmatrix}$

4. $A = \begin{pmatrix} 4 & n & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -n & 4 & -1 \end{pmatrix}$

5. $A = \begin{pmatrix} 4 & n & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 3 \\ 0 & n \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \end{pmatrix}$

$$6.\ A=\begin{pmatrix}4&2&1\\-1&n&1\\0&1&-1\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}n&2\\-1&0\\0&1\end{pmatrix}\qquad C=\begin{pmatrix}2&2&0\\-1&4&-1\end{pmatrix}$$

Завдання 1.3. Розв'язати систему лінійних рівнянь методом Крамера, матричним та методом Гаусса (n - номер варіанта).

$$1.\ A=\begin{pmatrix}4&2&1\\-1&n&1\\0&1&-1\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\qquad C=\begin{pmatrix}5\\4\\1\end{pmatrix}$$

$$2.\ A=\begin{pmatrix}4&0&5\\n&1&-6\\3&1&-1\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\qquad C=\begin{pmatrix}5\\4\\1\end{pmatrix}$$

$$3.\ A=\begin{pmatrix}5&5&0\\1&0&n\\2&1&-1\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\qquad C=\begin{pmatrix}-3\\1\\5\end{pmatrix}$$

$$4.\ A=\begin{pmatrix}5&5&0\\1&0&2\\2&1&-n\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\qquad C=\begin{pmatrix}3\\-1\\7\end{pmatrix}$$

$$5.\ A=\begin{pmatrix}2&1&0\\1&0&3\\2&n&7\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\qquad C=\begin{pmatrix}-1\\10\\7\end{pmatrix}$$

$$6.\ A=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&0&2\\2&n&7\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\qquad C=\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$$

Завдання 1.4. Дослідити систему лінійних рівнянь, задану розширеною матрицею, на сумісність. Якщо система сумісна, знайти який-небудь базисний розв'язок системи (n —номер варіанта).

$$1.\left(\begin{array}{cccc|c}2&-1&1&-1&5\\1&2&-2&3&-6\\5n+3&5n+6&-5n-6&8n+9&-13n-18\end{array}\right)$$

$$2.\left(\begin{array}{cccc|c}2&-1&1&-1&5\\1&2&-2&3&-6\\4n+2&3n+4&-2n-4&5n+6&-7n-12\end{array}\right)$$

3. $\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & -1 & 5 \\ 1 & 2 & -2 & 3 & -6 \\ n-1 & -3n-2 & 3n+2 & -4n-3 & 11n+6 \end{array}\right)$

4. $\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & -1 & 5 \\ 1 & 2 & -2 & 3 & -6 \\ -n-3 & -7n-6 & 7n+6 & -10n-9 & 23n+18 \end{array}\right)$

5. $\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & -1 & 5 \\ 1 & 2 & -2 & 3 & -6 \\ 2.5n+0.5 & 1 & -1 & 0.5n+1.5 & 2n-3 \end{array}\right)$

6. $\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & -1 & 5 \\ 1 & 2 & -2 & 3 & -6 \\ 1.5-0.5n & 2n-1 & 2n+1 & -2.5n-1.5 & 8n+3 \end{array}\right)$

2. Розрахунково-графічна робота “Елементи векторної алгебри та аналітична геометрія”

Завдання 2.1. Задано вектори $\bar{\alpha} = m\bar{e}_1 + (m+1)\,\bar{e}_2 + (m+2)\,\bar{e}_3$; $\bar{b} = n\bar{e}_2 + (n+1)\,\bar{e}_3$; $\bar{c} = \bar{e}_2 + n\bar{e}_3$, де $\bar{e}_1 = (1,0,0)$; $\bar{e}_2 = (0,1,0)$; $\bar{e}_3 = (0,0,1)$.

Перевірити, чи вектори $\bar{\alpha}, \bar{b}, \bar{c}$ є лінійно незалежними. Якщо вектори $\bar{\alpha}, \bar{b}, \bar{c}$ є лінійно незалежними, знайти координати вектора $\bar{d} = n\bar{e}_1 - \bar{e}_2 + \bar{e}_3$ у базисі $\bar{\alpha}, \bar{b}, \bar{c}$.

(Число $m = 1,2,\dots,6$ - задається викладачем, n – номер варіанта).

Завдання 2.2. Скласти рівняння прямих, що проходять через точку перетину прямих $nx - (n+1)y + 1 = 0, (n+1)x - y - 2 = 0$ паралельно та перпендикулярно прямій $y = -\frac{1}{m+1}x + 1$. (Число $m = 1,2,\dots,6$ - задається викладачем, n – номер варіанта).

Завдання 2.3. Задано вершини піраміди своїми координатами в ортонормованому базисі
$A_1(x_1; y_1; z_1), A_2(x_2; y_2; z_2), A_3(x_3; y_3; z_3), A_4(x_4; y_4; z_4)$,

Знайти:

1. Довжину ребра A_1A_2;

2. Кут між ребрами A_1A_2 та A_1A_3;

3. Площу грані $A_1A_2A_3$;

4. Об'єм піраміди $A_1A_2A_3A_4$;

5. Рівняння площини $A_1A_2A_3$;

6. Рівняння площини, що проходить через точки A_1, A_4 перпендикулярно до площини $A_1A_2A_3$;

7. Рівняння висоти, опущеної з точки A_4 на площину грані $A_1A_2A_3$;

8. Координати точки A_5, що симетрична точці A_4 відносно грані $A_1A_2A_3$;

9. Рівняння площини, що проходить через точку A_4 перпендикулярно до прямої A_1, A_4.

Координати точок визначити таким чином:

1. $A_1(1,n,0); A_2(0,n,0); A_3(n,0{,}2); A_4(1,n,n)$;
2. $A_1(2,n,0); A_2(0,n,0); A_3(n,0{,}3); A_4(n,2,n)$;
3. $A_1(3,n,0); A_2(0,n,0); A_3(n,0{,}4); A_4(n,n,3)$;
4. $A_1(4,n,0); A_2(0,n,0); A_3(n,0{,}5); A_4(1,n,n)$;
5. $A_1(5,n,0); A_2(0,n,0); A_3(n,0{,}6); A_4(n,2,n)$;
6. $A_1(6,n,0); A_2(0,n,0); A_3(n,0{,}7); A_4(n,1,n)$;

3.Контрольна робота "Елементи лінійної алгебри"

Завдання 3.1. Знайти матрицю $D = 2A^2 - 3B \times C + A^{-1} + E$

3.1.1	$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$
3.1.2	$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$
3.1.3	$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -4 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

3.1.4	$A=\begin{pmatrix}4&2&0\\-1&1&1\\0&1&6\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}3&1\\-4&3\\0&1\end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix}1&2&0\\-1&4&1\end{pmatrix}$
3.1.5	$A=\begin{pmatrix}4&2&0\\-1&3&1\\0&2&6\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}3&2\\-4&3\\0&2\end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix}2&2&0\\-1&4&1\end{pmatrix}$
3.1.6	$A=\begin{pmatrix}4&6&0\\-1&3&1\\0&1&6\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}3&6\\-4&3\\0&1\end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix}3&2&0\\-1&4&6\end{pmatrix}$
3.1.7	$A=\begin{pmatrix}4&7&0\\-1&3&1\\0&1&6\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}3&2\\-4&7\\0&1\end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix}3&2&0\\-1&4&7\end{pmatrix}$
3.1.8	$A=\begin{pmatrix}4&2&0\\-1&3&1\\0&1&8\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}3&2\\-4&8\\0&1\end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix}3&2&0\\-1&8&1\end{pmatrix}$
3.1.9	$A=\begin{pmatrix}4&2&0\\-1&3&1\\0&1&9\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}3&9\\-4&3\\0&1\end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix}9&2&0\\-1&4&1\end{pmatrix}$
3.1.10	$A=\begin{pmatrix}1&2&0\\-1&3&1\\0&1&6\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}3&2\\-1&3\\0&1\end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix}3&10&0\\-1&4&1\end{pmatrix}$
3.1.11	$A=\begin{pmatrix}4&2&0\\-1&3&1\\0&1&1\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}2&2\\-4&3\\0&1\end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix}3&11&0\\-1&4&1\end{pmatrix}$
3.1.12	$A=\begin{pmatrix}4&2&0\\-1&3&2\\0&1&6\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}3&2\\-4&3\\0&2\end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix}3&2&0\\-1&4&2\end{pmatrix}$
3.1.13	$A=\begin{pmatrix}4&2&0\\-1&3&1\\0&3&6\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}3&2\\-4&3\\0&3\end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix}3&2&0\\-3&4&1\end{pmatrix}$
3.1.14	$A=\begin{pmatrix}4&2&0\\-1&3&4\\0&1&6\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}3&4\\-4&3\\0&1\end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix}3&2&0\\-1&4&4\end{pmatrix}$

3.1.15	$A=\begin{pmatrix}4&2&5\\-1&0&1\\0&1&6\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}3&2\\-4&0\\5&1\end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix}3&2&5\\-1&0&1\end{pmatrix}$
3.1.16	$A=\begin{pmatrix}4&2&6\\-1&3&0\\0&1&6\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}3&2\\-4&3\\6&0\end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix}3&0&6\\-1&4&1\end{pmatrix}$
3.1.17	$A=\begin{pmatrix}4&2&7\\-1&3&1\\0&1&0\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}0&2\\-4&3\\7&1\end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix}3&2&7\\-1&4&0\end{pmatrix}$
3.1.18	$A=\begin{pmatrix}4&2&0\\-1&3&1\\8&0&6\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}3&2\\-4&0\\8&1\end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix}3&2&8\\-1&4&0\end{pmatrix}$
3.1.19	$A=\begin{pmatrix}4&2&9\\-1&3&0\\0&1&6\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}3&2\\0&3\\9&1\end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix}3&0&9\\-1&4&1\end{pmatrix}$
3.1.20	$A=\begin{pmatrix}4&2&3\\-1&0&1\\0&1&6\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}3&2\\-4&0\\3&1\end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix}0&2&3\\-1&4&1\end{pmatrix}$
3.1.21	$A=\begin{pmatrix}1&2&0\\-1&3&4\\0&1&6\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}3&2\\-1&3\\0&4\end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix}3&2&0\\-4&1&1\end{pmatrix}$
3.1.22	$A=\begin{pmatrix}4&5&0\\-1&3&1\\0&1&6\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}3&5\\-4&3\\0&1\end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix}3&5&0\\-1&4&1\end{pmatrix}$
3.1.23	$A=\begin{pmatrix}4&2&0\\-1&3&3\\0&1&6\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}3&2\\-4&3\\0&3\end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix}3&2&0\\-1&4&3\end{pmatrix}$
3.1.24	$A=\begin{pmatrix}4&2&0\\-1&3&4\\0&1&6\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}3&2\\-4&3\\0&4\end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix}3&2&0\\-1&4&4\end{pmatrix}$
3.1.25	$A=\begin{pmatrix}4&2&0\\-1&3&1\\0&2&6\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}3&2\\-4&3\\0&2\end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix}3&2&0\\-1&4&2\end{pmatrix}$

3.1.26	A=$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}$ B=$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 3 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$ C=$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & 6 \end{pmatrix}$
3.1.27	A=$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 7 \end{pmatrix}$ B=$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 3 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$ C=$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -7 & 4 & 1 \end{pmatrix}$
3.1.28	A=$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 8 \end{pmatrix}$ B=$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 3 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$ C=$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & 8 \end{pmatrix}$
3.1.29	A=$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 9 \end{pmatrix}$ B=$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 3 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$ C=$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & 9 \end{pmatrix}$
3.1.30	A=$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 10 & 6 \end{pmatrix}$ B=$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 3 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}$ C=$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & 10 \end{pmatrix}$

Завдання 3.2. Система трьох лінійних рівнянь з трьома невідомими задана розширеною матрицею. Розв'язати систему рівнянь за формулами Крамера, методом Гаусса та матричним методом.

3.2.1.	3.2.2.	3.2.3.
$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & -5 \\ 3 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & -6 & 11 \\ 3 & 0 & 4 & -2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & -6 & 4 \\ 3 & 0 & 4 & 11 \end{pmatrix}$
3.2.4.	**3.2.5.**	**3.2.6.**
$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 11 \\ 3 & 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -6 & 5 \\ 1 & 0 & 2 & 15 \\ 3 & 1 & 2 & 14 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & -4 \end{pmatrix}$

3.2.7. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$	3.2.8. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 & 14 \end{pmatrix}$	3.2.9. $\begin{pmatrix} 4 & 5 & 0 & -1 \\ 4 & 0 & 3 & 10 \\ 2 & 3 & 4 & 7 \end{pmatrix}$
3.2.10. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & -1 & -4 \\ 1 & -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$	3.2.11. $\begin{pmatrix} 2 & -4 & 4 & 10 \\ -3 & 8 & -10 & -25 \\ 4 & -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	3.2.12. $\begin{pmatrix} -3 & -7 & 2 & 4 \\ -2 & -2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -4 & 0 \end{pmatrix}$
3.2.13. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & -5 & 2 & -7 \end{pmatrix}$	3.2.14. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 10 \\ 3 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$	3.2.15. $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & 6 \\ 5 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$
3.2.16. $\begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 & -4 \\ 1 & -1 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$	3.2.17. $\begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & -2 \\ 3 & 5 & 1 & 6 \end{pmatrix}$	3.2.18. $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 7 \end{pmatrix}$
3.2.19. $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}$	3.2.20. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & 3 & -4 & 0 \end{pmatrix}$	3.2.21. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & -5 \\ -1 & 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$
3.2.22. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 & -3 \\ 5 & -1 & -3 & -14 \end{pmatrix}$	3.2.23. $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & -16 \\ 1 & 2 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$	3.2.24. $\begin{pmatrix} 5 & -6 & 4 & 3 \\ 3 & -3 & 2 & 2 \\ 4 & -5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

3.2.25.	3.2.26.	3.2.27.
$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 7 \\ 2 & 1 & -5 & -8 \\ 4 & 5 & -1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 & 11 \\ 1 & 1 & -2 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 19 \\ 2 & 7 & 4 & 30 \\ 3 & -1 & 6 & -1 \end{pmatrix}$
3.2.28.	3.2.29.	3.2.30.
$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & -4 \\ 3 & -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & 1 & 6 \\ 1 & 5 & 0 & -3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 7 & 2 & 3 & 15 \\ 5 & -3 & 2 & 15 \\ 10 & -11 & 5 & 36 \end{pmatrix}$

4. Контрольна робота “Елементи векторної алгебри та аналітична геометрія”

Завдання 4.1. Задані координати точок: $A_1(x_1; y_1; z_1), A_2(x_2; y_2; z_2), A_3(x_3; y_3; z_3), A_4(x_4; y_4; z_4), B(3; 8; 5)$.

1. Знайти об’єм піраміди $A_1A_2A_3A_4$і площу грані $A_1A_2A_4$.

2. Знайти об’єм паралелепіпеда побудованого на векторах $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{A_1A_3}$, $\overrightarrow{A_1A_4}$.

3. Знайти довжину вектора $\overrightarrow{A_1B}$ і розкласти його за векторами $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{A_1A_3}$, $\overrightarrow{A_1A_4}$, якщо це можливо. Знайти кут, утворений векторами $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{A_1A_3}$ і, а також довжину більшої діагоналі паралелограма, побудованого на цих векторах.

4.1.1. $A_1(2; -2; 0)$, $A_2(-2; 0; 3)$, $A_3(0; -1; 1)$, $A_4(-2; 1; -2)$.
4.1.2. $A_1(-1; 3; 2)$, $A_2(0; 1; 2)$, $A_3(1; 2; -1)$, $A_4(-2; 0; 1)$.
4.1.3. $A_1(-2; 0; -2)$, $A_2(-1; 1; 1)$, $A_3(2; 2; 0)$, $A_4(0; -2; 2)$.
4.1.4. $A_1(3; -3; 0)$, $A_2(0; 3; -1)$, $A_3(4; 0; 1)$, $A_4(-2; 1; 2)$.
4.1.5. $A_1(0; 3; 1)$, $A_2(1; -3; -1)$, $A_3(-1; 0; -2)$, $A_4(2; -1; 0)$.

4.1.6. $A_1(4; 0; 1)$, $A_2(-1; -1; -1)$, $A_3(-2; 1; 0)$, $A_4(3; 2; -2)$.
4.1.7. $A_1(-4; 2; -3)$, $A_2(0; 0; -1)$, $A_3(1; -2; 1)$, $A_4(-2; 1; 0)$.
4.1.8. $A_1(-1; -1; 0)$, $A_2(2; 2; -1)$, $A_3(3; 1; -2)$, $A_4(0; -2; 1)$.
4.1.9. $A_1(0; 0; -4)$, $A_2(-1; 0; -2)$, $A_3(-4; 2; 1)$, $A_4(4; -2; -1)$.
4.1.10. $A_1(-2; -1; 0)$, $A_2(0; -2; -1)$, $A_3(2; 0; 1)$, $A_4(1; 2; 3)$.
4.1.11. $A_1(-3; 0; 4)$, $A_2(1; -1; 0)$, $A_3(-2; 1; -4)$, $A_4(-1; 2; -3)$.
4.1.12. $A_1(3; -1; 2)$, $A_2(-1; 1; -2)$, $A_3(1; 0; -3)$, $A_4(0; -2; 4)$.
4.1.13. $A_1(2; -1; 1)$, $A_2(-2; 1; 4)$, $A_3(0; 4; -1)$, $A_4(-1; -4; 0)$.
4.1.14. $A_1(-4; 0; 3)$, $A_2(2; -1; 2)$, $A_3(-3; 1; 1)$, $A_4(-2; 2; -1)$.
4.1.15. $A_1(-1; 2; 3)$, $A_2(1; -2; -3)$, $A_3(0; 1; 2)$, $A_4(2; 0; -1)$.
4.1.16. $A_1(-3; -2; -1)$, $A_2(0; 2; 1)$, $A_3(2; -1; 4)$, $A_4(1; 1; 2)$.
4.1.17. $A_1(1; 4; 3)$, $A_2(3; 0; -1)$, $A_3(-1; 2; 2)$, $A_4(2; -3; -2)$.
4.1.18. $A_1(0; -1; 1)$, $A_2(4; 1; -2)$, $A_3(-3; 4; 2)$, $A_4(3; 2; 0)$.
4.1.19. $A_1(4; -1; 3)$, $A_2(2; -3; 0)$, $A_3(-2; 3; 5)$, $A_4(-1; 0; -2)$.
4.1.20. $A_1(2; 5; -1)$, $A_2(-2; 4; 3)$, $A_3(3; -1; 2)$, $A_4(0; -4; -2)$.
4.1.21. $A_1(-1; 4; -2)$, $A_2(2; 3; -1)$, $A_3(3; 0; 2)$, $A_4(-3; 4; -2)$.
4.1.22. $A_1(-4; 1; 3)$, $A_2(-1; -1; 3)$, $A_3(2; 3; 4)$, $A_4(3; 0; 2)$.
4.1.23. $A_1(3; -1; -3)$, $A_2(-1; 2; 2)$, $A_3(1; 0; 5)$, $A_4(2; -3; 0)$.
4.1.24. $A_1(0; 2; -1)$, $A_2(1; -3; 4)$, $A_3(-1; 3; -2)$, $A_4(-2; 0; 3)$.
4.1.25. $A_1(-3; 2; -1)$, $A_2(4; -1; 2)$, $A_3(2; 1; 0)$, $A_4(-1; 5; -2)$.

4.1.26. $A_1(-2; -1; -3)$, $A_2(-3; 2; 1)$, $A_3(1; -2; 2)$, $A_4(2; 3; 4)$.
4.1.27. $A_1(1; -2; 3)$, $A_2(-2; 0; -1)$, $A_3(-1; -1; 2)$, $A_4(0; 1; 0)$.
4.1.28. $A_1(0; 1; 1)$, $A_2(1; -1; 0)$, $A_3(-1; 0; 2)$, $A_4(2; -2; 3)$.
4.1.29. $A_1(4; 2; -1)$, $A_2(1; -1; 0)$, $A_3(-3; 0; 1)$, $A_4(3; 1; 2)$.
4.1.30. $A_1(0; -1; -1)$, $A_2(1; -2; 0)$, $A_3(-1; 0; 2)$, $A_4(2; 4; 3)$.

Завдання 4.2. Дано координати вершин трикутника *ABC*.

Знайти:

а) довжину сторони ВС;

б) рівняння лінії ВС;

в) рівняння висоти, проведеної із вершини *A*;

г) довжину висоти, проведеної із вершини *A*;

д) рівняння бісектриси внутрішнього кута *B*;

е) рівняння площини трикутника АВС.

4.2.1. $A(7; 1)$,$B(-5; -4)$,$C(-9; -1)$. 4.2.2. $A(0; 5)$,$B(12; 0)$,$C(18; 8)$.

4.2.3. $A(8; 0)$,$B(-4 ;5)$,$C(-8; -2)$. 4.2.4. $A(1; 5)$,$B(13; 0)$,$C(9; 18)$.

4.2.5. $A(6; 1)$,$B(-6; -4)$,$C(-10; -1)$. 4.2.6. $A(-1; 5)$,$B(11; 0)$,$C(17; 8)$.

4.2.7. $A(6; 5)$,$B(-6; 0)$,$C(-10; 3)$. 4.2.8. $A(-2; 6)$,$B(10; 1)$,$C(16; 9)$.

4.2.9. $A(10; -1)$,$B(-2; -6)$,$C(-6; 3)$. 4.2.10. $A(-1; 7)$,$B(11; 2)$,$C(17; 10)$.

4.2.11. $A(-6; 4)$,$B(-10; -1)$,$C(6; 1)$. 4.2.12. $A(12; 0)$,$B(18; 8)$,$C(0; 5)$.

4.2.13. $A(-2; -6)$,$B(-6; -3)$,$C(10; -1)$. 4.2.14. $A(8; 2)$,$B(14; 10)$,$C(-4; 7)$.

4.2.15. $A(2; -4)$,$B(-2; -1)$,$C(14; 1)$. 4.2.16. $A(2; -1)$,$B(8; 7)$,$C(-10; 4)$.

4.2.17. $A(5; -3)$,$B(1; 0)$,$C(17; 2)$. 4.2.18. $A(14; -6)$,$B(8; 7)$,$C(-10; 4)$.

4.2.19. $A(3; 4)$,$B(-1; 7)$,$C(15; 9)$. 4.2.20. $A(1; -2)$,$B(7; 6)$,$C(-11; 3)$.

4.2.21. $A(4; 4)$,$B(1; -3)$,$C(-5; 1)$. 4.2.22. $A(3; -1)$,$B(-3; 3)$,$C(2; 6)$.

4.2.23. $A(3; 6)$,$B(7; -1)$,$C(9; 5)$. 4.2.24. $A(5; -1)$,$B(-3; -2)$,$C(3; -8)$.

4.2.25. $A(-6; -2)$,$B(2; 1)$,$C(-3; 7)$. 4.2.26. $A(-4; -3)$,$B(-5; 5)$,$C(2; 5)$.

4.2.27. $A(2; 4)$,$B(4; -4)$,$C(6; 1)$. 4.2.28. $A(-8; -1)$,$B(-2; -3)$,$C(-2; 5)$.

4.2.29. $A(1; -1), B(6; 0), C(5; -7)$.   4.2.30. $A(4; 3), B(6; -3), C(-3; -2)$.

Завдання 4.3. Аналітична геометрія у просторі.

В задачах 4.3.1 - 4.3.10 дани рівняння прямої L і координати точки А.

Знайти рівняння площини, яка проходить через точку A і пряму L.

4.3.1. $(L)\ \frac{x-2}{1}=\frac{y-3}{2}=\frac{z+1}{3};\ \ \mathrm{A}(3;\ 4;\ 0)$.

4.3.2. $(L)\ \frac{x-3}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{2};\ \ A(-1;\ -1;\ 0)$.

4.3.3. $(L)\ \frac{x-4}{5}=\frac{y+3}{2}=\frac{z}{1};\ \ A(3;\ 1;\ -2)$.

4.3.4. $(L)\ \frac{x}{7}=\frac{y+2}{3}=\frac{z-1}{5};\ \ A(3;\ 1;\ -2)$.

4.3.5. $(L)\ \frac{x-1}{3}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-2}{-1};\ \ A(4;\ -1;\ 3)$.

4.3.6. $(L)\ \frac{x}{4}=\frac{y-2}{-3}=\frac{z+1}{1};\ \ A(2;\ -1;\ 1)$.

4.3.7. $(L)\ \frac{x+1}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z-3}{5};\ \ A(3;\ 2;\ 1)$.

4.3.8. $(L)\ \frac{x+2}{-3}=\frac{y-1}{2}=\frac{z}{2};\ \ A(1;\ 2;\ -1)$.

4.3.9. $(L)\frac{x}{6}=\frac{y}{1}=\frac{z+2}{-1};\ A(5;1;-1)$.

4.3.10. $(L)\frac{x+3}{2}=\frac{y-3}{2}=\frac{z}{3};\ A(-3;3;1)$.

В задачах 4.3.11-4.3.20 знайти канонічне рівняння прямої, яка проходить через точку A_4, перпендикулярно площині, що проходить через точки A_1, A_2, A_3, координати яких задані.

4.3.11. $A_1(0;0;2)$, $A_2(2;0;5)$, $A_3(1;1;0)$, $A_4(4;1;2)$

4.3.12. $A_1(3;0;5)$, $A_2(0;0;2)$, $A_3(4;1;2)$, $A_4(1;1;0)$

4.3.13. $A_1(1;1;0)$, $A_2(4;1;2)$, $A_3(0;0;2)$, $A_4(3;0;5)$

4.3.14. $A_1(4;7;2)$, $A_2(1;1;0)$, $A_3(3;0;5)$, $A_4(0;0;2)$

4.3.15. $A_1(0;0;0)$, $A_2(3;-2;1)$, $A_3(1;4;0)$, $A_4(5;2;3)$

4.3.16. $A_1(3;1;0)$, $A_2(0;7;2)$, $A_3(-1;0;-5)$, $A_4(4;1;5)$

4.3.17. $A_1(1;-1;1)$, $A_2(0;2;4)$, $A_3(1;3;3)$, $A_4(4;2;-3)$

4.3.18. $A_1(1;-1;2)$, $A_2(2;1;1)$, $A_3(1;1;4)$, $A_4(0;0;0)$

4.3.19. $A_1(1;-3;2)$, $A_2(5;1;-4)$, $A_3(2;0;3)$, $A_4(1;-5;2)$

4.3.20. $A_1(3;5;3)$, $A_2(-2;11;-5)$, $A_3(1;2;4)$, $A_4(0;6;4)$

В задачах 4.3.21-4.3.30 дано загальне рівняння прямої L і координати точки A. Необхідно знайти відстань від точки A до прямої L.

4.3.21. $(L)\begin{cases} 2x - y - 3z = -1, \\ x - 5y + z = 0 \end{cases}$ $A(3;0;2)$.

4.3.22. $(L)\begin{cases} x + 2y + 3z = 1, \\ 2x - 3y + 2z = 9 \end{cases}$ $A(1;2;0)$.

4.3.23. $(L)\begin{cases} x + y - z = 1\,, \\ 8x + 3y - 6z = 2 \end{cases}$ $A(-1;2;1)$.

4.3.24. $(L)\begin{cases} x + y - z = -2, \\ 4x - 3y + z = 1 \end{cases}$ $A(2;3;0)$.

4.3.25. $(L)\begin{cases} 2x + 5y - 3z = 4, \\ 4x - 3y + 2z = 9 \end{cases}$ $A(0;-4;2)$.

4.3.26. $(L)\begin{cases} 2x + 7y - z = 8, \\ x + 2y + z = 4 \end{cases}$ $A(-3;0;5)$.

4.3.27. $(L)\begin{cases} 3x + 4y + 2z = 8, \\ x + 5y + z = 0 \end{cases}$ $A(1;3;0)$.

4.3.28. $(L)\begin{cases} x + y - z = 1, \\ x + 2y + z = 4 \end{cases}$ $A(-2;0;1)$.

4.3.29. $(L)\begin{cases} x - 4y - 2z = -3, \\ 3x + y + z = 5 \end{cases}$ $A(5;1;-2)$.

4.3.30. $(L)\begin{cases} 3x + y + z = 5, \\ 4x - 3y + z = 1 \end{cases}$ $A(0;-5;2)$

Список рекомендованої і використаної літератури

1. Шкіль М.І Вища математика: підручник у 3-х книгах. Кн.1. Аналітична геометрія з елементами алгебри / М.І. Шкіль, Т.В. Колесник, В.Т. Коблова.- Київ, Либідь, 1994. – 280 с.
2. Дубовик В.П. Вища математика. Збірник задач: навч. посібн. / В.П. Дубовик, І.І. Юрик. – Київ: А.С.К., 2005. – 648 с.
3. Дубовик В.П. Вища математика: навч. посібн. / В.П. Дубовик, І.І. Юрик. – Київ: А.С.К., 2005. – 648 с
4. Лавренчук В.П. Вища математика. Загальний курс. Ч.1. Лінійна алгебра та аналітична геометрія. / В.П. Лавренчук, О.Р. Мартинюк, О.С. Кондур. – Чернівці, Книга – ХХ1, 2010. – 319 с.
5. Дюженкова Л.І. Вища математика: приклади і задачі: навч. посібн. / Л.І. Дюженкова, О.Ю. Дюженкова, Г.О. Міхалін. – Київ, Академія, 2002. – 624 с.
6. Дюженкова Л.І. Математичний аналіз у задачах і прикладах: у 2-х частинах. Ч.1 Навч. посібн. / Л.І. Дюженкова, Т.В. Колесник, М.Я. Лященко та інш. – Київ, Вища школа, 2002. – Ч.1. – 462 с.
7. Бюшгенс С.С. Аналитическая геометрия. Ч.1 / С.С. Бюшгенс. - М.-Л.: ГОНТИ, 1939 - 419 с.
8. Выгодский М.Я. Справочник по высшей математике / М.Я. Выгодский. – М.: Наука, 1977.– 871 с.
9. Данко П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч.1 / П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова. – М.: Высшая школа, 1997.- 304 с.
10. Ефимов Н.В. Краткий курс аналитической геометрии / Н.В. Ефимов.- М.: Наука, 1965 – 227 с.
11. Каплан И.А. Практические занатия по высшей математике. Ч.1 / И.А. Каплан. - Харьков: ун-т., 1973. – 203 с.
12. Клетеник Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии / Д.В.

Клетеник. –М.: Наука, 1972. - 240 с.

13. Привалов И.И. Аналитическая геометрия / И.И. Привалов - М.: Наука, 1964. – 272 с.
14. Фролов С.В. Курс высшей математики / С.В. Фролов, Р.Я. Шостак. - М.: Высшая школа, 1966. – 664 с.