

Практичне заняття № 3.2

ПОНЯТТЯ ФУНКЦІЇ. ОГЛЯД ЕЛЕМЕНТАРНИХ
ФУНКЦІЙ

1. Означення функції, область визначення функції. Основні елементарні функції. Парність, непарність, періодичність функцій.
2. Перетворення графіків функцій.

1. Означення функції, область визначення функції. Основні елементарні функції. Парність, непарність, періодичність функцій.

Якщо кожному значенню x множини X за певним правилом поставлено у відповідність єдине значення y множини Y , то кажуть, що задана функція $y = f(x)$. Змінна x називається незалежною змінною або аргументом, а змінна y – залежною змінною або функцією. Множина X називається областю визначення функції. Множина Y усіх значень змінної y , яких вона набуває при всіх значеннях x з області визначення функції X називається областю значень функції.

- 1) Ціла функція $y = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$ визначена на всій числовій осі.
- 2) Дробово-раціональна функція $y = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \dots + b_{m-1}x + b_m}$ визначена для всіх x , крім тих, де знаменник дорівнює нулю.
- 3) Степенева функція $y = x^n$ з раціональним додатним показником $n = \frac{k}{m}$ при непарному m визначена на всій числовій вісі, а при парному m визначена для $x \geq 0$.
- 4) Показникова функція $y = a^x$, $a > 0$ визначена на всій числовій осі.
- 5) Логарифмічна функція $y = \log_a x$, $a > 0$ визначена для $x > 0$.
- 6) Тригонометричні функції $y = \sin x$; $y = \cos x$ визначені на всій числовій осі, $y = \operatorname{tg} x$; $y = \sec x$ визначені на всій числовій осі, крім точок $x = \frac{\pi}{2}(2k+1)$, $k \in \mathbb{Z}$, $y = \operatorname{ctg} x$; $y = \operatorname{cosec} x$ визначені на всій числовій вісі, крім точок $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
- 7) Обернені тригонометричні функції $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$ визначені на відрізку $-1 \leq x \leq 1$, $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arcctg} x$ визначені на всій числовій вісі.

Функція $y = f(x)$ називається парною, якщо для будь-якого $x \in X$ виконується рівність $f(-x) = f(x)$, тобто значення функції не змінюються при зміні знака аргумента. Графік такої функції симетричний відносно осі Oy .

Функція $y = f(x)$ називається непарною, якщо для будь-якого $x \in X$ виконується рівність $f(-x) = -f(x)$, тобто значення функції змінюються на протилежні при зміні знака аргумента. Графік такої функції симетричний відносно початку координат.

Функція $y = f(x)$ називається періодичною, якщо для будь-якого $x \in X$ виконується рівність $f(x \pm T) = f(x)$, $T \neq 0$. Число T , додавання або віднімання якого від аргумента x не змінює значення функції $y = f(x)$, називається періодом цієї функції.

Задача 1. Знайти область визначення функцій:

$$\begin{aligned} 1) \quad y &= \sqrt{1-x^2}, & 2) \quad y &= \frac{x-2}{x^2+5x+6} - \sqrt[3]{3x+4}, \\ 3) \quad y &= \arccos \frac{1-2x}{3}, & 4) \quad y &= \lg(x^2-9). \end{aligned}$$

Розв'язання:

$$\begin{aligned} 1) \quad 1-x^2 &\geq 0, \quad (x-1)(x+1) \leq 0, \quad -1 \leq x \leq 1. \\ 2) \quad x^2+5x+6 &\neq 0, \quad x \neq -3, \quad x \neq -2. \\ 3) \quad -1 \leq \frac{1-2x}{3} &\leq 1, \quad -3 \leq 1-2x \leq 3, \quad -4 \leq -2x \leq 2, \quad -1 \leq x \leq 2. \\ 4) \quad x^2-9 &> 0, \quad (x-3)(x+3) > 0, \quad x \in (-\infty, -3) \cup (3, \infty). \end{aligned}$$

Відповідь: 1) $-1 \leq x \leq 1$; 2) $x \neq -3, x \neq -2$; 3) $-1 \leq x \leq 2$; 4) $x \in (-\infty, -3) \cup (3, \infty)$.

Задача 2. Знайти область визначення функцій:

$$1) \quad y = \frac{\sqrt{x-3}}{x^3-64}, \quad 2) \quad y = \lg(x-2) + \arcsin \frac{x}{4}, \quad 3) \quad y = \frac{1-\sqrt[3]{x}}{\sqrt{3\cos 2x}}, \quad 4) \quad y = \sqrt[4]{7x-x^2-12}.$$

Відповідь: 1) $x \in [3, 4) \cup (4, \infty)$; 2) $x \in (2, 4]$; 3) $x \in (-\frac{\pi}{4} + \pi k, \frac{\pi}{4} + \pi k)$; 4) $x \in [3, 4]$.

Задача 3. Знайти парні та непарні функції:

$$1) \quad y = \frac{x}{2+x^2}, \quad 2) \quad y = x \sin x, \quad 3) \quad y = \frac{3}{x-1}, \quad 4) \quad y = \ln \cos x.$$

Розв'язання:

$$1) f(-x) = \frac{-x}{2 + (-x)^2} = -\frac{x}{2 + x^2} = -f(x) \text{ — функція непарна;}$$

$$2) f(-x) = -x \sin(-x) = -x(-\sin x) = x \sin x = f(x) \text{ — функція парна;}$$

$$3) f(-x) = \frac{3}{-x-1} = -\frac{3}{x+1} \neq f(x) \text{ і } \neq f(-x) \text{ — функція не є ні парною, ні непарною;}$$

$$4) f(-x) = \ln \cos(-x) = \ln \cos x = f(x) \text{ — функція парна.}$$

Відповідь: 1) непарна; 2) парна; 3) не парна, не непарна; 4) парна.

Задача 4. Знайти парні та непарні функції:

$$1) y = \frac{x^4}{5 + x^2}, \quad 2) y = x^2 \sin 3x, \quad 3) y = \frac{x e^{\cos x}}{x^2 - 1}, \quad 4) y = x - \operatorname{arctg} x.$$

Відповідь: 1) парна; 2) непарна; 3) непарна; 4) непарна.

2. Елементарні функції. Перетворення графіків функцій.

Перетворення графіка функції $y = f(x)$:

- 1) $y = f(x - a)$ — паралельне перенесення вздовж осі Ox на a вправо ($a > 0$) або вліво ($a < 0$);
- 2) $y = f(x) + b$ — паралельне перенесення вздовж осі Oy на b вверх ($b > 0$) або вниз при ($b < 0$);
- 3) $y = f(kx)$ — стискання вздовж осі Ox в k разів ($k > 1$) або розтягнення в k разів ($k < 1$);
- 4) $y = kf(x)$ — розтягнення вздовж осі Oy в k разів ($k > 1$) або стискання в k разів ($k < 1$);
- 5) $y = f(-x)$ — симетричне відображення графіка відносно осі Oy ;
- 6) $y = -f(x)$ — симетричне відображення графіка відносно осі Ox ;
- 7) $y = f(|x|)$ — симетричне відображення частини графіка, що лежить праворуч відносно осі Oy вліво відносно осі ординат, права частина при цьому залишається без змін;
- 8) $y = |f(x)|$ — симетричне відображення частини графіка, що лежить нижче осі Ox вверх відносно осі абсцис, верхня частина при цьому залишається без змін.

Задача 5. Побудувати графік функції: 1) $y = |x^2 - 4x + 1|$; 2) $y = -2\sin|x|$.

Розв'язання:

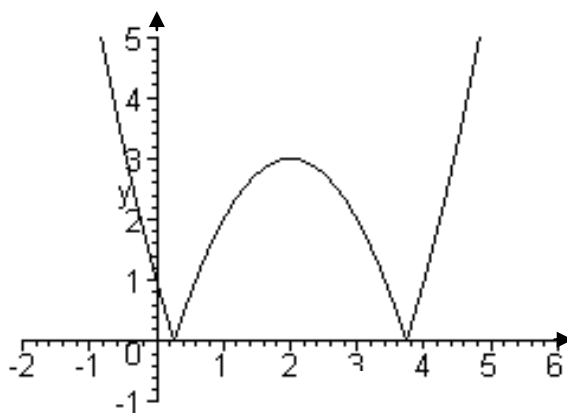
1) Спочатку перетворимо функцію, виділивши повний квадрат:

$$y = |x^2 - 4x + 4 - 4 + 1| \Rightarrow y = |(x - 2)^2 - 3|.$$

Будемо будувати графіки в такій послідовності:

$$y = x^2 \rightarrow y = (x - 2)^2 \rightarrow y = (x - 2)^2 - 3 \rightarrow y = |(x - 2)^2 - 3|.$$

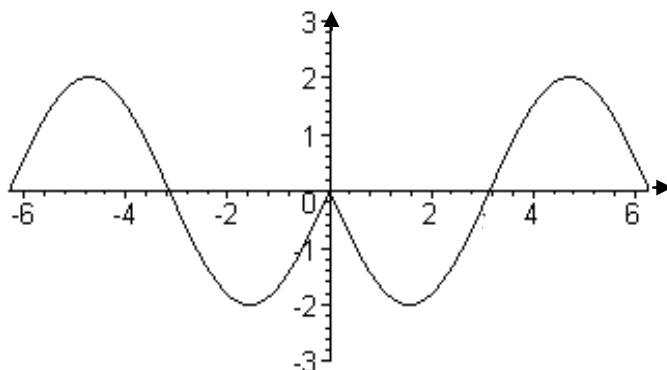
Для цього побудуємо графік $y = x^2$, посунемо його на 2 вправо, потім на 3 вниз і нарешті відобразимо нижню частину вверх відносно осі Ox .



2) Почнемо побудову графіка $y = -2\sin|x|$ з графіка функції $y = \sin x$:

$$y = \sin x \rightarrow y = 2\sin x \rightarrow y = -2\sin x \rightarrow y = -2\sin|x|.$$

Для цього побудуємо графік $y = \sin x$, розтягнемо його в 2 рази вздовж осі Oy , потім відобразимо вниз симетрично відносно осі Oy і відобразимо праву частину вліво відносно осі Oy .



Задача 6. Побудувати в одній системі координат графіки функцій

1) $y = \cos x$, $y = \cos 2x$, $y = \cos \frac{x}{2}$; 2) $y = \sin x$, $y = 3\sin x$, $y = \frac{1}{3}\sin x$.

Задача 7. Побудувати графіки функцій

- | | | |
|--|----------------------------|------------------------------|
| 1) $y = 2 - x$; | 2) $y = x^2 + 5$; | 3) $y = \sqrt{x} $; |
| 4) $y = 1 - x^2$ | 5) $y = x^2 + 8x$; | 6) $y = x^2 + 2x - 4$; |
| 7) $y = x^2 - x + 1$; | 8) $y = x^2 - 6x + 5 $ | 9) $y = x^2 + 2 x $; |
| 10) $y = x - 1 $; | 11) $y = \cos x - 0,5 $; | 12) $y = 1 - e^{- x }$; |
| 13) $y = \frac{1}{2} \arccos x + 1 $; | 14) $y = -\sqrt{ x }$; | 15) $y = 3 + \ln(1 - x) $. |

*Домашнє завдання***Задача 1.** Знайти область визначення функцій:

- | | |
|-------------------------------------|--|
| 1) $y = \sqrt{5 - x^4}$, | 2) $y = \frac{2}{x^2 + 5x + 6} - \sqrt[4]{3x + 4}$, |
| 3) $y = \arcsin \frac{1 - 3x}{x}$, | 4) $y = \lg(x^2 - 6x + 9)$. |

Задача 2. Знайти парні та непарні функції:

- | | |
|------------------------------------|-------------------------------|
| 1) $y = \frac{x^4 + 5}{x}$, | 2) $y = x^3 \sin 3x$, |
| 3) $y = \frac{xe^{-x}}{x^2 - 1}$, | 4) $y = \frac{1}{x} + 7x^2$. |

Задача 3. Побудувати графіки функцій

- | | | |
|-----------------------|---------------------------|-----------------------------|
| 1) $y = 3 - 2x$; | 2) $y = 1 - x^2$; | 3) $y = \sqrt{ x - 2 } $; |
| 4) $y = x^2 - 2x $; | 5) $y = x^2 + 4 x + 3$; | 6) $y = 1 - 2\sin x $. |