Практичне заняття №3.3

ГРАНИЦЯ ФУНКЦІЇ

1. Границя числової послідовності.
2. Границя функції. Перша та друга важливі границі.
3. Застосування еквівалентних нескінчено малих до знаходження границь функцій.

1. Границя числової послідовності.

Якщо кожному натуральному числу $n \in N$ ставиться у відповідність за деяким законом дійсне число x_n, то множину чисел $\{x_1, x_2, ..., x_n, ...\}$ називають числовою послідовністю $\{x_n\}$.

Число A називається границею послідовності $\{x_n\}$, якщо для будь-якого довільного числа $\varepsilon > 0$ існує такий номер $N = N(\varepsilon)$, що для всіх $n \geq N$ виконується нерівність $|x_n - A| < \varepsilon$.

$$\lim_{n\to\infty} x_n = A \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \ \exists\ N = N(\varepsilon):\ \forall n \geq N \quad |x_n - A| < \varepsilon .$$

Зауваження: Числова послідовність $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ має скінчену границю:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \approx 2{,}7 .$$

Задача 1. Записати перші чотири члени числової послідовності $\{x_n\}$, якщо $x_n = \dfrac{(-1)^n (n+1)}{2n}$.

Розв'язання:

$x_1 = \dfrac{(-1)^1 (1+1)}{2 \cdot 1} = -1;$ $x_2 = \dfrac{(-1)^2 (2+1)}{2 \cdot 2} = \dfrac{3}{4};$ $x_3 = \dfrac{(-1)^3 (3+1)}{2 \cdot 3} = -\dfrac{2}{3};$

$x_4 = \dfrac{(-1)^4 (4+1)}{2 \cdot 4} = \dfrac{5}{8}.$

Отже шукана послідовність має вигляд $\{x_n\} = \left\{-1, \dfrac{3}{4}, -\dfrac{2}{3}, \dfrac{5}{8}, \ ...\ \right\}$.

Відповідь: $\{x_n\} = \left\{-1, \dfrac{3}{4}, -\dfrac{2}{3}, \dfrac{5}{8}, \ ...\ \right\}$.

Задача 2. Записати перші 5 членів послідовності, заданої її загальним членом:

1) $x_n = \dfrac{1}{3n}$; 3) $x_n = \dfrac{n-1}{n+1}$; 5) $x_n = \dfrac{(-1)^n}{n^2}$;

2) $x_n = \dfrac{2n+1}{n}$; 4) $x_n = \dfrac{3n+2}{n^2}$; 6) $x_n = \dfrac{(-1)^n n + n}{n+1}$.

Відповідь: 1) $\left\{\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{6}, \dfrac{1}{9}, \dfrac{1}{12}, \dfrac{1}{15}, \dots\right\}$; 2) $\left\{3, \dfrac{5}{2}, \dfrac{7}{3}, \dfrac{9}{4}, \dfrac{11}{5}, \dots\right\}$; 3) $\left\{0, \dfrac{1}{3}, \dfrac{2}{4}, \dfrac{3}{5}, \dfrac{4}{6}, \dots\right\}$;
4) $\left\{5, 2, \dfrac{11}{9}, \dfrac{7}{8}, \dfrac{17}{25}, \dots\right\}$; 5) $\left\{-1, \dfrac{1}{4}, -\dfrac{1}{9}, \dfrac{1}{16}, -\dfrac{1}{25}, \dots\right\}$; 6) $\left\{-1, \dfrac{3}{4}, -\dfrac{2}{3}, \dfrac{5}{8}, -\dfrac{3}{5}, \dots\right\}$.

Задача 3. Записати загальний член x_n послідовності:

1) $\dfrac{1}{10}, \dfrac{1}{20}, \dfrac{1}{30}, \dfrac{1}{40}, \dots$ 2) $1, \dfrac{5}{4}, \dfrac{7}{5}, \dfrac{9}{6}, \dfrac{11}{7}, \dots$ 3) $0, 2, 0, 2, 0, \dots$

Відповідь: 1) $x_n = \dfrac{1}{10\,n}$; 2) $x_n = \dfrac{2n+1}{n+2}$; 3) $x_n = \dfrac{n + (-1)^n n}{n}$.

Задача 4. Знайти границю послідовності:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^2 + 3n + 1}{3n^2 - 1}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^4 + 3n^2 + 5}{n^2 - 2}$.

Розв'язання:

1) $$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2 + 3n + 1}{3n^2 - 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2\left(2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right)}{n^2\left(3 - \frac{1}{n^2}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}}{3 - \frac{1}{n^2}} = \frac{2+0+0}{3-0} = \frac{2}{3};$$

2) $$\lim_{n\to\infty} \frac{n^4 + 3n^2 + 5}{n^2 - 2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^4\left(1 + \frac{3}{n^2} + \frac{5}{n^4}\right)}{n^2\left(1 - \frac{2}{n^2}\right)} = \lim_{n\to\infty} n^2 \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1 + \frac{3}{n^2} + \frac{5}{n^4}}{1 - \frac{2}{n^2}} = \infty \cdot \frac{1+0+0}{1-0} = \infty$$

Відповідь: 1) $2/3$; 2) ∞.

Задача 5. Знайти границю послідовності:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4n-3}{n+1}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^3 + 2n^2 + 4}{5n^2 + 1}$; 3) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}}$;

4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n-1}{2-n}$; 6) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^n-2^n}{3^n+2^n}$; 8) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n(n+2)(1-2n)}{(n+1)^3}$;

5) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2+5}{n^4+1}$; 7) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{6n^2-3n+8}{2n^2-4}$; 9) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{25^n-1}{5^n+1}$.

Відповідь: 1) 4; 2) ∞; 3) 1; 4) −2; 5) 0; 6) 1; 7) 3; 8) −2; 9) ∞.

Задача 6. Знайти границю послідовності $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$.

Розв'язання:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)=[\infty-\infty]=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\frac{1}{\infty}=0.$$

Відповідь: 0.

Задача 7. Знайти границю послідовності:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^3}{n^2+1}-\dfrac{3n^2}{3n-1}\right)$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n-3}-\sqrt{n}\right)$; 3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+3n+9}-n\right)$.

Відповідь: 1) $-1/3$; 2) 0; 3) $3/2$.

Задача 8. Знайти границю послідовності $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2+3}{n^2-1}\right)^{2n+3}$.

Розв'язання:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+3}{n^2-1}\right)^{2n+3}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-1+4}{n^2-1}\right)^{2n+3}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{4}{n^2-1}\right)^{\frac{n^2-1}{4}\cdot\frac{4(2n+3)}{n^2-1}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}e^{\frac{4(2n+3)}{n^2-1}}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4(2n+3)}{n^2-1}}=e^0=1.$$

Відповідь: 1.

Задача 9. Знайти границі послідовностей:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{2n+1}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{2}{n}\right)^{3n}$; 3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{n-2}\right)^{n}$; 4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)!-n!}{(n+1)!+n!}$.

Відповідь: 1) e^2; 2) $\dfrac{1}{e^6}$; 3) e^3; 4) 1.

2. Знаходження границі функції. Перша та друга важливі границі.

Число A називається границею функції $y = f(x)$ в точці x_0, якщо для довільного числа $\varepsilon > 0$ існує таке число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, що для всіх x $(x \neq x_0)$, для яких $|x - x_0| < \delta$, виконується нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$. Символічно це записується $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$.

Число A називається границею функції $y = f(x)$ зліва або справа в точці x_0, якщо для довільного числа $\varepsilon > 0$ існує число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ таке, що для всіх $x \in (x_0 - \delta;\ x_0)$ (або відповідно $x \in (x_0;\ x_0 + \delta)$) виконується нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$. Символічно це записується

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0 - 0) = A; \qquad \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0 + 0) = A.$$

Перша важлива границя: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$;

Друга важлива границя: $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x = \lim\limits_{y \to 0} (1 + y)^{\frac{1}{y}} = e$.

Види невизначеностей: $\left[\dfrac{0}{0}\right], \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right], [0 \cdot \infty],\ [\infty - \infty], [1^\infty],\ [0^\infty], [\infty^0], [0^0]$.

Для розкриття невизначеностей треба зробити відповідні алгебраїчні перетворення.

Задача 10. Знайти границю функції $\lim\limits_{x \to -2} \left(x^2 - 2x + 3\right)$.

Розв'язання:

Підставимо у функцію замість x його граничне значення -2:

$$\lim_{x \to -2} \left(x^2 + 3x + 4\right) = (-2)^2 + 3 \cdot (-2) + 4 = 4 - 6 + 4 = 2.$$

Відповідь: 2.

Задача 11. Знайти границі функцій:

1) $\lim\limits_{x \to 2} (3x - 5)$; 2) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{6 - 5x}{x + 2}$; 3) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x - 3}{3x + 6}$; 4) $\lim\limits_{x \to -1} \ln(3x^2 + x - 1)$.

Відповідь: 1) 1; 2) 3; 4) $-\infty$; 3) 0.

Задача 12. Знайти границі функцій:

1) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2x^2 + 3x + 1}{3x^2 - 1}$; 2) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4}{2x^2 - 2x - 4}$.

Розв'язання:

$$1)\ \lim_{x\to\infty}\frac{6x^2+3x+1}{3x^2-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2\left(6+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(3-\frac{1}{x^2}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{6+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}{3-\frac{1}{x^2}}=\frac{6+0+0}{3-0}=2;$$

$$2)\ \lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{2x^2-2x-4}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{2(x-2)(x+1)}=\lim_{x\to 2}\frac{x+2}{2(x+1)}=\frac{2+2}{2(2+1)}=\frac{2}{3}.$$

Відповідь: 1) 2; 2) $\frac{2}{3}$.

Задача 13. Знайти границі функцій:

1) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3-8}{2x-4}$; 5) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-3x}{6-5x^2}$; 9) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{10x^2+3x}{5x^2-1}$;

2) $\lim\limits_{x\to -3}\frac{9-x^2}{x^2+8x+15}$; 6) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-4x+3}{1-x^2}$; 10) $\lim\limits_{x\to 3}\left(\frac{2}{x-3}+\frac{12}{9-x^2}\right)$;

3) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-3x+2}{x^2+x+4}$; 7) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^2+5x+6}{x^2-2x-8}$; 11) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^4-x^3}{x^2-7}$;

4) $\lim\limits_{x\to 5}\frac{x^2-5x}{x^2-7x+10}$; 8) $\lim\limits_{x\to -2}\left(\frac{1}{x+2}+\frac{4}{x^2-4}\right)$; 12) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3+3x^2-x-3}{x^3+x^2-x-1}$.

Відповідь: 1) 6; 2) 3; 3) 0; 4) $\frac{5}{3}$; 5) $-\frac{1}{5}$; 6) 1; 7) $-\frac{1}{6}$; 8) $-\frac{1}{4}$; 9) 2; 10) $\frac{1}{3}$; 11) ∞; 12) 2.

Задача 14. Знайти границю функції $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)$.

Розв'язання:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)=[\infty-\infty]=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=\frac{1}{\infty}=0$$

Відповідь: 0.

Задача 15. Знайти границі функцій:

1) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{\sqrt{x^2-7}-3}{x-4}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{8+x^2}-2}{x^2}$; 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}-x\right)$;

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{x}$; 6) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{2x+1}\right)^{x}$; 8) $\lim\limits_{x\to 0}(1+5x)^{\frac{1}{x}}$;

5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 4x-\cos 2x}{x^2}$; 7) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-1}{2x+3}\right)^{2-6x}$; 9) $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x]{1+\sin 2x}$.

Відповідь: 1) $\frac{4}{3}$; 2) $\frac{1}{12}$; 3) 1; 4) 4; 5) –6; 6) $\sqrt{e}$; 7) e^{12}; 8) e^5; 9) e^2.

3. Застосування еквівалентних нескінчено малих до знаходження границь функцій.

Величина $\alpha(x)$ називається <u>нескінчено малою</u> при $x\to x_0$, якщо $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$.

Нескінчено малі величини $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ при $x\to x_0$, називаються <u>еквівалентними</u>, якщо границя їх відношення при $x\to x_0$ дорівнює одиниці.

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1.$$

<u>Вказівка:</u> Часто для спрощення знаходження границі функції використовують заміну деяких нескінчено малих функцій на еквівалентні:

$\sin x\sim x,\quad x\to 0,$ $\qquad e^x-1\sim x,\quad x\to 0,$

$\mathrm{tg}\, x\sim x,\quad x\to 0,$ $\qquad a^x-1\sim x\ln a,\quad x\to 0,$

$\arcsin x\sim x,\quad x\to 0,$ $\qquad \ln(1+x)\sim x,\quad x\to 0,$

$\mathrm{arctg}\, x\sim x,\quad x\to 0,$ $\qquad \log_a(1+x)\sim x/\ln a,\quad x\to 0,$

$1-\cos x\sim x^2/2,\quad x\to 0,$ $\qquad (1+x)^k-1\sim kx,\quad x\to 0.$

Задача 16. Знайти границю функції $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\,\mathrm{tg}\,6x}{\sin 3x^2}$.

Розв'язання:

Використаємо еквівалентні заміни $\mathrm{tg}\,x\sim x, x\to 0$ та $\sin x\sim x, x\to 0$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\,\mathrm{tg}\,6x}{\sin 3x^2}=\left|\begin{matrix}\mathrm{tg}\,x\sim x, x\to 0\\ \sin x\sim x, x\to 0\end{matrix}\right|=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot 6x}{3x^2}=\frac{6}{3}=2.$$

Відповідь: 2.

Задача 17. Знайти границі функцій:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{arctg}\,6x}{\sin 3x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\arcsin 3x}{1-\cos x}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-2x)}{\mathrm{tg}\,x}$;

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^3-1}{x\log_2(2+x)}$; 5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+2x^2)}{x\,e^x-x}$; 6) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sin(x+2)}{x^2-4}$.

Відповідь: 1) 2; 2) 6; 3) –2; 4) 3; 5) 2; 6) $-\dfrac{1}{4}$.

Задача 18. Знайти односторонні границі функцій:

1) $\lim\limits_{x\to 2+0}\dfrac{4}{x-2}$, $\lim\limits_{x\to 2-0}\dfrac{4}{x-2}$; 2) $\lim\limits_{x\to 3+0}8^{\frac{1}{x}}$, $\lim\limits_{x\to 3-0}8^{\frac{1}{x}}$.

Відповідь: 1) ∞; $-\infty$; 2) 2; 2.

Домашнє завдання

Задача 1. Знайти границі послідовностей:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3-2n+1}{2n^3-3n-5}$; 5) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n}{\sqrt{4n^2-1}}$; 9) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{7^n-8^n}{7^n+8^n}$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-2n^2-3n^3}{n^3-3n}$; 6) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt{n^3+7}}$; 10) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{4}{n}\right)^{n+3}$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5n^5-2n^2+1}{n^5+n^4-5}$; 7) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+4n}-n\right)$; 11) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{2}{n}\right)^{n+1}$;

4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^8+n^7+n^6}{8n^3-3n+1}$ 8) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n-\sqrt{2n-1}}$; 12) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{4}{n^2}\right)^{n^2-2}$

Задача 2. Знайти границі функцій:

1) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x+3}{4x+8}$; 6) $\lim\limits_{x\to -6}\dfrac{x^2+5x-6}{x^2-4x-12}$; 11) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x+2}\right)^{4x+5}$;

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}3x}{x}$; 7) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{5+x}-3}{x-4}$; 12) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\sin x)}{(1+x)^4-1}$;

3) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-2x-3}{x^2-4x+3}$; 8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 6x-\cos 2x}{x\sin x}$; 13) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-2x^2)}{\sin 2x\cdot\operatorname{arctg}x}$;

4) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^2-3x}{1-2x^2}$; 9) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x-1}\right)^{5x}$; 14) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin 5x}{1-\cos 5x}$;

5) $\lim\limits_{x\to -5}\left(\dfrac{1}{x+5}+\dfrac{10}{x^2-25}\right)$; 10) $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x]{1+\operatorname{tg}x}$; 15) $\lim\limits_{x\to 4+0}\dfrac{1}{4-x}$.