

Виберіть форму подання навчального матеріалу

✓ Докладне подання

[Скорочене подання](#)

22. Статично визначувані балки

Зміст глави

[22.1. Лінії впливу для двоопорної балки](#)

[22.2. Лінії впливу для консольної балки](#)

[22.3. Навантаження ліній впливу](#)

[22.4. Вузлове прикладення навантаження](#)

[22.5. Лінії впливу для шарнірно–консольної балки](#)

[22.6. Приклад визначення зусиль у шарнірно–консольній балці за допомогою ліній впливу](#)

[Запитання для самоперевірки](#)

22.1. Лінії впливу для двоопорної балки

Розглянемо, як змінюються опорні реакції та внутрішні зусилля в однопрогоновій двоопорній балці, якщо по ній рухається вертикальна одинична сила, і побудуємо графіки зміни згаданих величин, тобто побудуємо лінії впливу. Отже, нехай однопрогонова балка AB перебуває під дією вертикальної зосередженої сили $P = 1$ ([рис.22.1.а](#)). Сила може перебувати в будь-якій точці балки (зона можливого розташування сили, тобто зона руху показана на рисунку штриховою лінією). Розташування сили визначається координатою x (початок системи координат взято на лівій опорі A). Таким чином, у процесі руху одиничної сили координата x змінюється в межах $-c_1 \leq x \leq l + c_2$.

Лінії впливу опорних реакцій

В опорах балки виникають вертикальні опорні реакції V_A та V_B . Горизонтальна складова H_A в шарнірно-нерухомій опорі A дорівнює нулю. Це впливає з рівняння рівноваги балки:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow H_A = 0.$$

Для визначення опорної реакції V_A складемо рівняння рівноваги

$$\sum M_B = 0 \Rightarrow V_A l - 1 \cdot (l - x) = 0 \Rightarrow V_A = \frac{l - x}{l}.$$

Отже, реакція V_A є лінійною функцією координати x : $V_A = V_A(x)$.

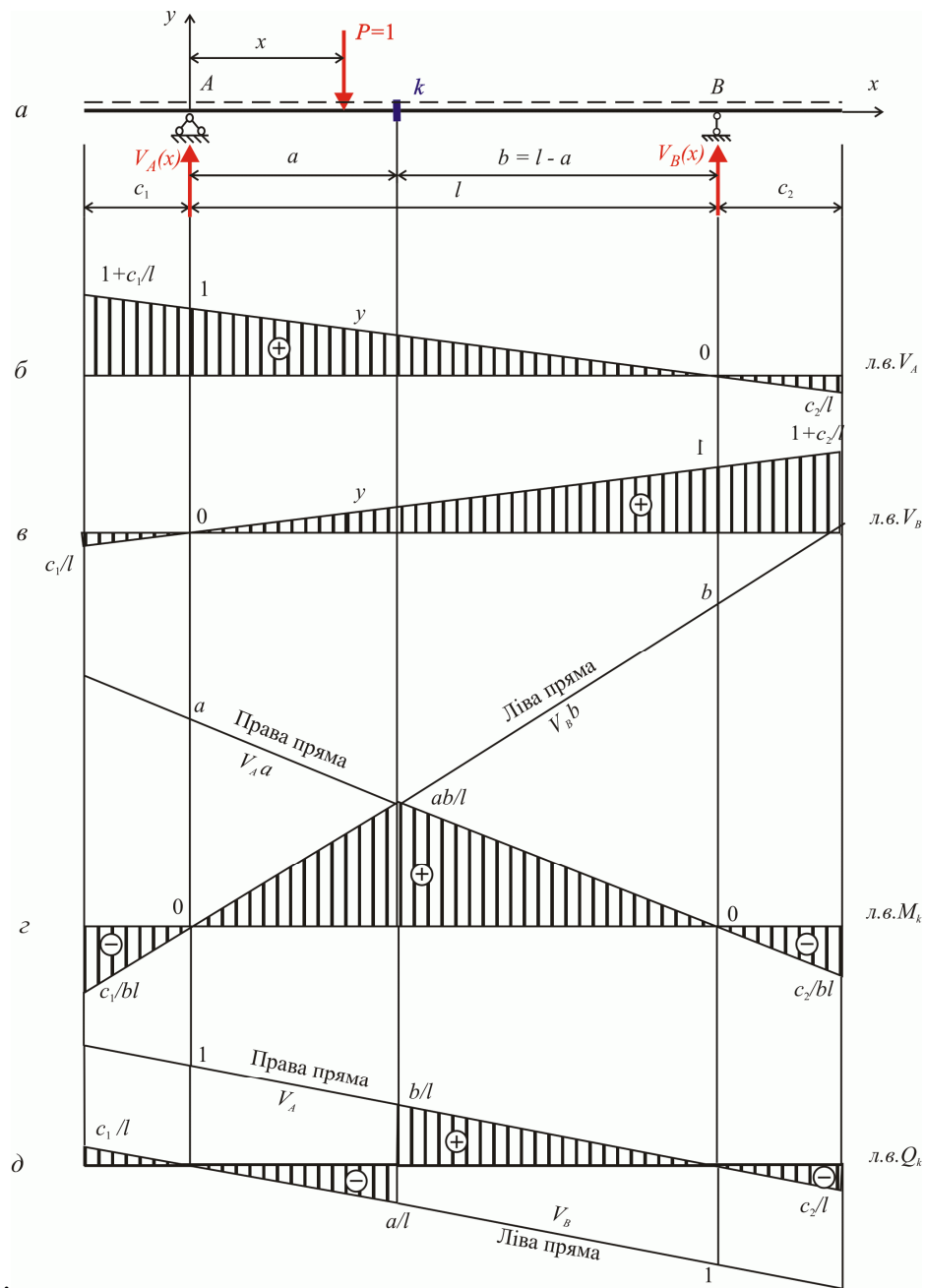


Рис.22.1

Графік зазначеної функції є прямою. Для побудови прямої надамо координаті x двох будь-яких значень (наприклад, $x = 0$ та $x = l$). У результаті маємо

$$x = 0 \Rightarrow V_A(0) = \frac{l-0}{l} = 1;$$

$$x = l \Rightarrow V_A(l) = \frac{l-l}{l} = 0.$$

Графік функції $V_A = V_A(x)$ представлено на рис.22.1,б. Він називається лінією впливу опорної реакції V_A . Графік показує, як змінюється опорна реакція V_A , якщо по балці рухається одинична вертикальна сила $P=1$. Будь-яка ордината у графіка характеризує величину опорної реакції V_A , якщо сила розташована на балці над цією ординатою.

Аналогічно побудуємо лінію впливу опорної реакції V_B .

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow -V_B l + 1 \cdot x = 0 \Rightarrow V_B = \frac{x}{l}.$$

Отже, реакція V_B також є лінійною функцією координати x

$$V_B = V_B(x).$$

Графік цієї функції – пряма. Надамо координаті x двох будь-яких значень (наприклад, $x=0$ та $x=l$). У результаті маємо:

$$\begin{aligned} x=0 &\Rightarrow V_B(0) = \frac{0}{l} = 0; \\ x=l &\Rightarrow V_B(l) = \frac{l}{l} = 1. \end{aligned}$$

Лінія впливу опорної реакції V_B побудована на [рис.22.1,в](#). Отже, одержано графік, який характеризує закон зміни опорної реакції V_B залежно від розташування одиничної сили $P=1$. Будь-яка ордината у графіка характеризує величину опорної реакції V_B , коли на балці над цією ординатою розташована одинична вертикальна сила.

Таким чином, для балки на двох опорах лінія впливу опорної реакції V_A – це пряма, яка має одиницю на опорі A і нуль на опорі B , а лінія впливу опорної реакції V_B – пряма, яка має одиницю на опорі B і нуль на опорі A . Графіки розповсюджуються на всю балку.

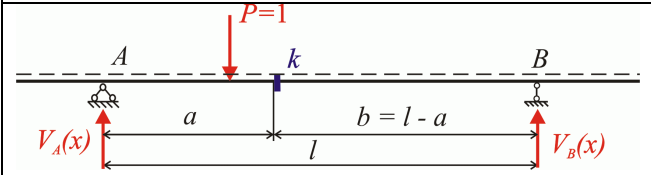
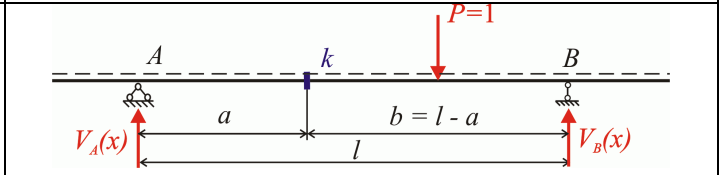
Лінія впливу згинального моменту

Визначимо згинальний момент у перерізі k , який розташовано в прогоні двоопорної балки ([рис.22.1,а](#)) на відстані a від опори A і на відстані $b=l-a$ від опори B . Скористаємось правилом, викладеним у [п.10.3](#): згинальний момент у будь-якому перерізі k обчислюється як алгебраїчна сума моментів усіх сил, що діють на балку по один бік від перерізу, стосовно його центру:

$$M_k = \sum M_k^{лів} \quad \text{або} \quad M_k = \sum M_k^{прав}. \quad (22.1)$$

Для обчислення згинального моменту при дії рухомої сили доцільно вибирати ту формулу, яка має меншу кількість доданків. Так, при розташуванні сили ліворуч перерізу k слід вибирати другу, а при розташуванні сили праворуч перерізу – першу формулу.

Отже, розглянемо два випадка розташування одиничної сили.

Сила $P=1$ ліворуч перерізу k	Сила $P=1$ праворуч перерізу k
 $M_k = \sum M_k^{npae} = V_B(x)b.$	 $M_k = \sum M_k^{lie} = V_A(x)a.$

Таким чином, ліворуч перерізу k лінію впливу згинального моменту в перерізі k можна отримати множенням лінії впливу опорної реакції V_B на множник b (див. [рис.22.1,г](#)). Цей графік називається лівою прямою. Він справедливий і, відповідно, штрихується ліворуч перерізу k .

Аналогічно, з правого боку від перерізу k лінію впливу згинального моменту в перерізі можна отримати множенням лінії впливу опорної реакції V_A на множник a ([рис.22.1,г](#)). Цей графік називається правою прямою. Він штрихується праворуч перерізу k .

Таким чином, лінія впливу згинального моменту в перерізі k складається з двох прямих, які перетинаються під перерізом k :

- ліва пряма проходить через нуль лівій опорі і штрихується ліворуч перерізу;
- права пряма проходить через нуль правій опорі і штрихується праворуч перерізу.

Проміжні ординати лінії впливу можна обчислити з умов подібності трикутників.

Остаточна лінія впливу згинального моменту в перерізі k представлена на [рис.22.1,г](#).

Лінія впливу поперечної сили

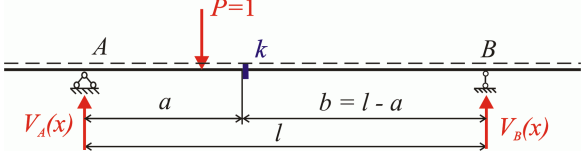
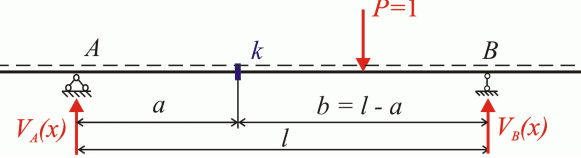
Як було зазначено у [п.10.3](#), поперечна сила в перерізі k обчислюється як сума проєкцій на вертикальну вісь всіх сил, що діють на балку по один бік від перерізу:

$$Q_k = \sum F_y^{lie} \quad \text{або} \quad Q_k = \sum F_y^{npae}. \quad (22.2)$$

Додатною вважається поперечна сила, яка намагається повернути балку стосовно перерізу за годинниковою стрілкою.

При дії рухомої сили доцільно вибрати ту формулу, яка має меншу кількість доданків. Так, при розташуванні рухомої сили ліворуч перерізу k слід вибрати другу формулу, а при розташуванні сили праворуч перерізу – першу.

Отже, розглянемо два випадка розташування одиничної сили.

Сила $P=1$ ліворуч перерізу k	Сила $P=1$ праворуч перерізу k
 $Q_k = \sum F_y^{праг} = -V_B(x).$	 $Q_k = \sum F_y^{ліб} = V_A(x).$

Таким чином, ліворуч перерізу k лінія впливу поперечної сили в перерізі k еквівалентна від'ємній лінії впливу опорної реакції V_B (див. [рис.22.1,д](#)). Цей графік називається лівою прямою. Він справедливий і, відповідно, штрихується ліворуч перерізу k .

Аналогічно, праворуч перерізу k лінія впливу поперечної сили в перерізі k еквівалентна лінії впливу опорної реакції V_A ([рис.22.1,д](#)). Цей графік називається правою прямою. Він штрихується праворуч перерізу k .

Таким чином, лінія впливу поперечної сили в перерізі k складається з двох паралельних прямих:

- ліва пряма проходить через нуль лівій опорі і штрихується ліворуч перерізу;
- права пряма проходить через нуль правій опорі і штрихується праворуч перерізу.

Проміжні ординати лінії впливу можна обчислити з умов подібності трикутників.

Остаточна лінія впливу поперечної сили в перерізі k представлена на [рис.22.1,д](#).

22.2. Лінії впливу для консольної балки

Розглянемо консольну балку AC , по якій переміщується одинична вертикальна сила $P=1$ ([рис.22.2,а](#)).

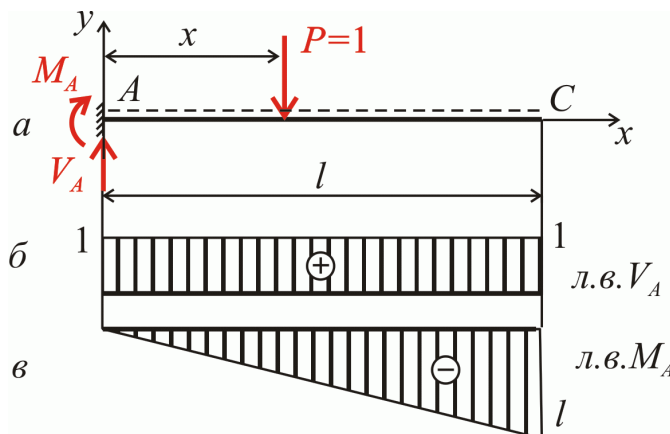


Рис.22.2

Лінії впливу опорних реакцій

У затиснені A виникає вертикальна опорна реакція V_A та моментна реакція M_A . Щодо горизонтальної опорної реакції затиснення, то вона дорівнює нулю. Це випливає з умови рівноваги $\sum F_x = 0$.

Визначаємо опорну реакцію V_A :

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow V_A - 1 = 0 \Rightarrow V_A = 1.$$

Таким чином, опорна реакція V_A є константою, яка не залежить від місцезрештування сили. Лінія впливу опорної реакції V_A показана на [рис.22.2.б](#).

Для визначення моментної реакції M_A складаємо рівняння моментів стосовно точки A :

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow M_A + 1 \cdot x = 0 \Rightarrow M_A = -x.$$

Отже, опорний момент M_A змінюється за лінійним законом. Для побудови прямої, яка характеризує зміну моменту залежно від розташування сили $P=1$, тобто для побудови лінії впливу, достатньо визначити значення функції M_A в двох довільних точках:

$$x=0 \Rightarrow M_A(0) = 0;$$

$$x=l \Rightarrow M_A(l) = -l.$$

Лінія впливу опорного моменту M_A побудована на [рис.22.2.в](#).

Лінії впливу внутрішніх зусиль

Згинальні моменти і поперечні сили в довільному перерізі k консольної балки, що перебуває під дією рухомої сили (рис.22.3,а), можна обчислювати за формулами (22.1) та (22.2) відповідно. Причому незалежно від розташування сили доцільно завжди аналізувати рівновагу консольної частини.

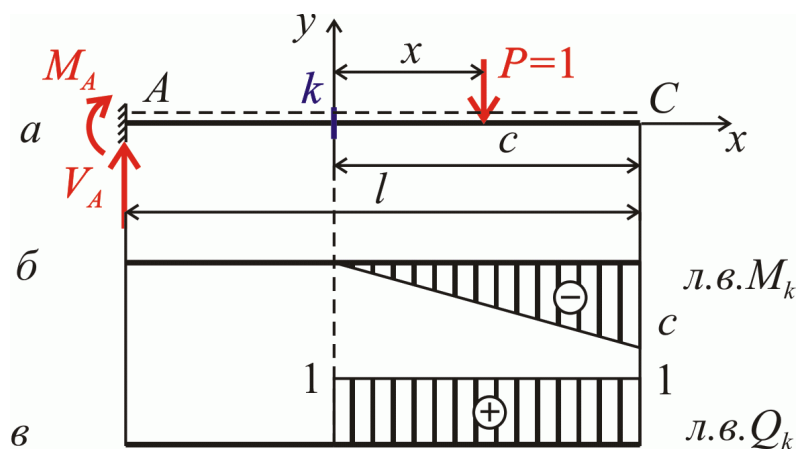
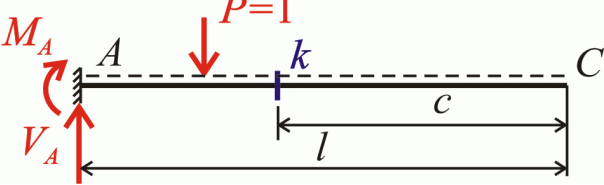
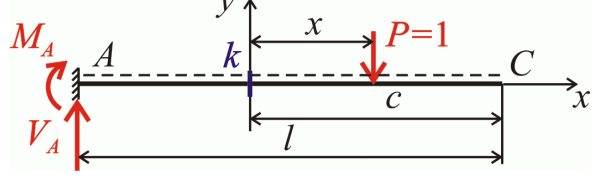


Рис.22.3

Сила $P=1$ ліворуч перерізу k	Сила $P=1$ праворуч перерізу k
 $M_k = \sum M_k^{npas} = 0.$ $Q_k = \sum F_y^{npas} = 0.$	 $M_k = \sum M_k^{npas} = -1 \cdot x.$ $Q_k = \sum F_y^{npas} = 1.$

Лінії впливу згинального моменту M_k та поперечної сили Q_k побудовано на [рис.22.3,б](#) та [22.3,в](#).

22.3. Навантаження ліній впливу

Лінії впливу є графіками зміни величини тих чи інших параметрів, що визначають напружено-деформований стан будь-яких конструкцій чи споруд, від дії одиничної рухомої сили. За допомогою ліній впливу можна обчислювати величини зазначених параметрів, від різноманітних силових дій. Причому силові дії можуть бути як нерухомими, так і рухомими. Така процедура називається навантаженням ліній впливу.

Навантаження нерухомими силовими діями

Нехай для якоїсь конструкції (наприклад, для двоопорної балки) побудовано лінію впливу якогось фактора S_k . Цим фактором може бути опорна реакція, згинальний момент в певному перерізі, прогин деякої точки осі балки тощо). Визначимо величину зазначеного фактора S_k від деяких силових дій за допомогою його лінії впливу.

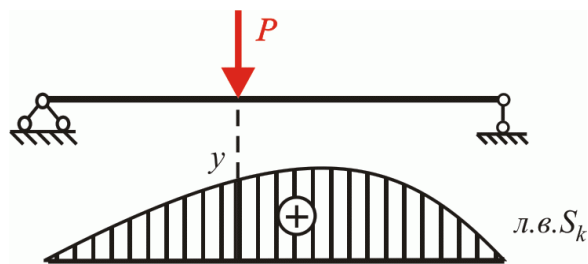


Рис.22.4

Якщо на конструкцію діє нерухома сила P (рис.22.4), то величина фактора S_k може бути обчислена за формулою

$$S_k = Py. \tag{22.3}$$

У цій формулі сила, що спрямована вниз, вважається додатною.

Величина фактора S_k при дії зосередженої вертикальної сили дорівнює добутку величини цієї сили на ординату лінії впливу фактора, в точці прикладення сили.

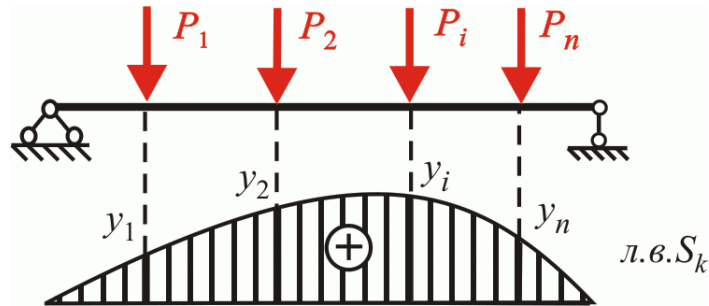


Рис.22.5

Якщо на конструкцію діє система нерухомих вертикальних сил (рис.22.5), то на підставі принципу незалежності дії сил величина фактора S_k може бути обчислена за формулою

$$S_k = \sum_{i=1}^n P_i y_i. \tag{22.4}$$

Величина фактора S_k від дії системи зосереджених вертикальних сил дорівнює сумі добутків величин сил на ординати лінії впливу цього фактора в точках прикладення відповідних сил.

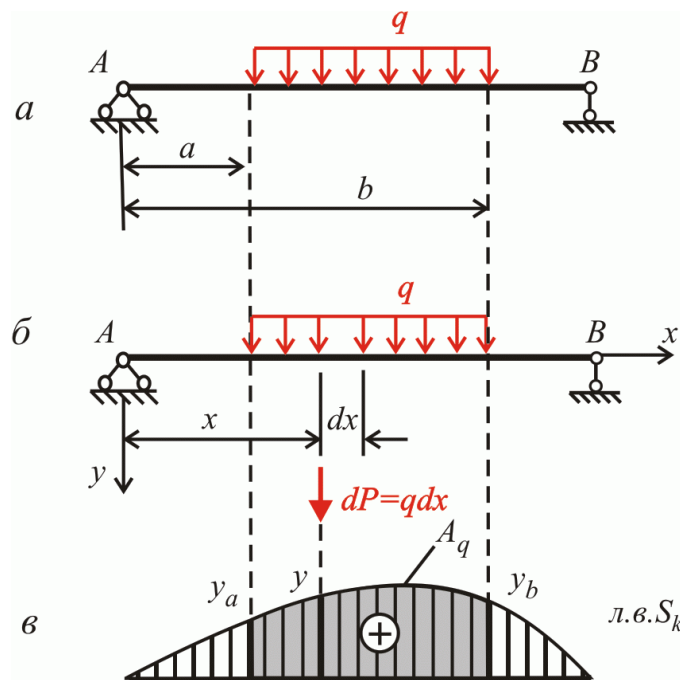


Рис.22.6

Якщо на конструкцію діє рівномірно розподілене навантаження інтенсивністю q (рис.22.6,а), то величина фактора S_k може бути обчислена за формулою

$$S_k = q A_q. \tag{22.5}$$

Дійсно, замінивши розподілене навантаження на нескінченно малій ділянці dx елементарною силою $dP=qdx$, обчислимо величину фактора S_k шляхом інтегрування

$$S_k = \int_a^b y q dx.$$

Постійну величину інтенсивності рівномірно розподіленого навантаження можна винести за знак інтеграла

$$S_k = q \int_a^b y dx = q A_q,$$

а визначений інтеграл – характеризує площу лінії впливу під розподіленим навантаженням.

Отже, величина фактора S_k від дії вертикального рівномірно розподіленого навантаження дорівнює добутку інтенсивності навантаження q на площу A_q лінії впливу цього фактора в межах навантаження.

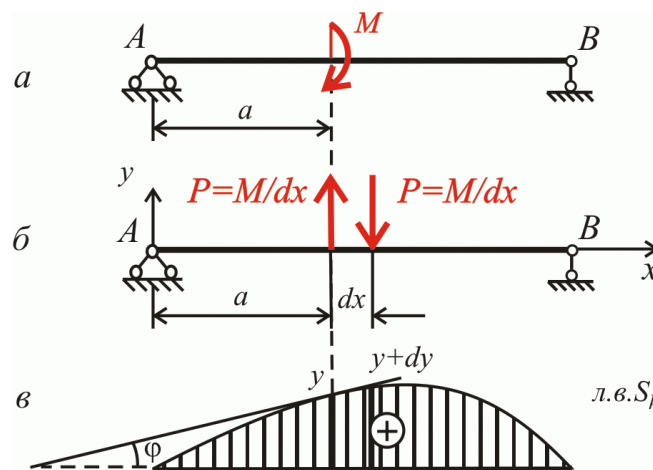


Рис.22.7

При навантаженні конструкції зосередженим моментом M (рис.22.7,а) величина фактора S_k може бути обчислена за формулою

$$S_k = M \operatorname{tg} \varphi. \quad (22.6)$$

Зазначене співвідношення легко отримати, якщо зосереджений момент замінити парою сил, кожна з яких дорівнює $P = M / dx$ (рис.22.7,б). Тоді

$$S_k = P \cdot (y + dy) - P \cdot y = M \cdot \frac{dy}{dx} = M \operatorname{tg} \varphi.$$

Таким чином, величина фактора S_k від дії зосередженого момента дорівнює добутку величини момента M на тангенс нахилу дотичної до лінії впливу фактора в точці прикладення момента. Момент, який обертається за годинниковою стрілкою, вважається додатним. Тангенс вважається додатним для кута, розташованого в першій або третій чверті.

І нарешті, у разі, якщо на систему водночас діє сукупність n зосереджених сил, k –рівномірно розподілених навантажень та m – зосереджених моментів, то величина фактора S_k може бути обчислена за формулою

$$S_k = \sum_{i=1}^n P_i y_i + \sum_{i=1}^k q_i A_{q_i} + \sum_{i=1}^m M_i \operatorname{tg} \varphi_i . \quad (22.7)$$

Отже, для обчислення величини будь-якого фактора від нерухомого навантаження за допомогою лінії впливу необхідно:

- усунути задане нерухоме навантаження;
- побудувати лінію впливу фактора, вважаючи, що по конструкції рухається одинична вертикальна сила;
- завантажити побудовану лінію впливу заданим нерухомим навантаженням за формулами (22.3)– (22.7).

Навантаження рухомими силами

Мета навантаження лінії впливу рухомими силами полягає в обчисленні найбільшої величини того чи іншого фактора, коли по конструкції переміщується система сил.

Нехай по однопрогоновій балці рухається система вертикальних зосереджених сил (рис.22.8,а), відстані між яким в процесі руху не змінюються. На рис.22.8,б показана лінія впливу якогось фактора S_k , побудована від руху одиничної сили.

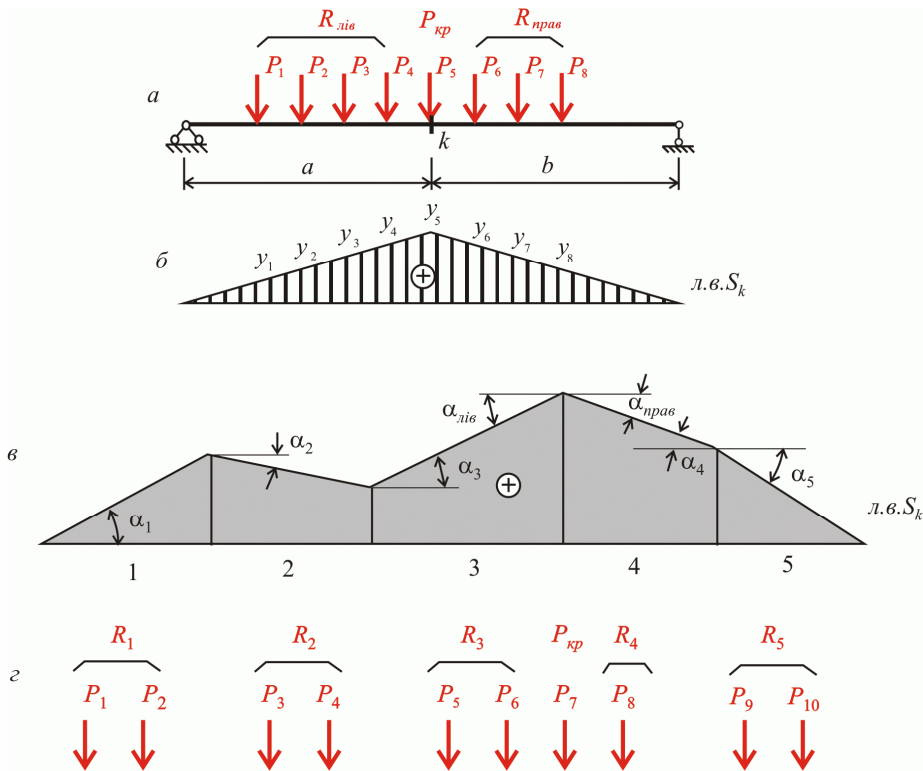


Рис.22.8

Процес навантаження системою рухомих сил має два етапи.

Перший етап. Визначення розташування системи рухомих сил, при якому шуканий фактор матиме найбільше за величиною значення. Положення буде небезпечним за двох умов:

1. Одна з сил має бути розташована над вершиною лінії впливу. Така сила називається критичним вантажем. У нашому випадку $P_{кр} = P_5$ (рис.22.8.а).
2. Має виконуватись система двох нерівностей, яка для трикутної лінії впливу має вигляд:

$$\begin{aligned} \frac{R_{лів} + P_{кр}}{a} &\geq \frac{R_{прав}}{b}; \\ \frac{R_{лів}}{a} &\leq \frac{R_{прав} + P_{кр}}{b}. \end{aligned} \quad (22.9)$$

Тут $R_{лів}$ – сума сил, розташованих ліворуч вершини лінії впливу. У даному випадку

$$R_{лів} = P_1 + P_2 + P_3 + P_4.$$

$R_{прав}$ – сума сил, розташованих праворуч вершини лінії впливу. У даному випадку

$$R_{прав} = P_6 + P_7 + P_8.$$

Якщо хоча б одна з нерівностей (22.9) не виконується, необхідно пересунути систему сил в інше положення, встановивши над вершиною іншу силу, і повторити перевірку.

У випадку полігональної ліній впливу (рис.22.8.в) умову небезпечного розташування вантажів можна записати у вигляді

$$S_L \cdot S_R \leq 0, \quad (22.10)$$

де

$$S_L = \sum R_i \operatorname{tg} \alpha_i + P_{кр} \operatorname{tg} \alpha_{лів}. \quad (22.11)$$

$$S_R = \sum R_i \operatorname{tg} \alpha_i + P_{кр} \operatorname{tg} \alpha_{прав}.$$

У цих співвідношеннях позначено: $P_{кр}$ – критична сила (величина вантажу, встановленого в місці найбільшої випуклої ординати лінії впливу); $\operatorname{tg} \alpha_i$ – тангенси кутів нахилу прямолінійних ділянок лінії впливу (додатні, якщо кути знаходяться в I або III чверті, і від'ємні, якщо кути розташовані в II або IV чвертях); R_i – рівнодійні сил, розташованих у межах відповідних прямолінійних ділянок лінії впливу (рис.22.8,г).

Другий етап. Для встановленої в небезпечне положення системи сил обчислюється величина шуканого фактора S_k за формулою (22.4). Це й буде його найбільше за величиною значення.

22.4. Вузлове прикладення навантаження

У мостових конструкціях часто зустрічається випадок, коли навантаження рухається не безпосередньо по головній балці, а по надбудові, яка являє собою систему поздовжніх балок проїзної частини, яка спирається на головну через систему другорядних поперечних балок. Так, на рис.22.9,а балки проїзної частин 0-1, 1-2, 2-3 спираються на головну балку AB в окремих точках, які називаються вузловими. Таке навантаження на головну балку називається вузловим.

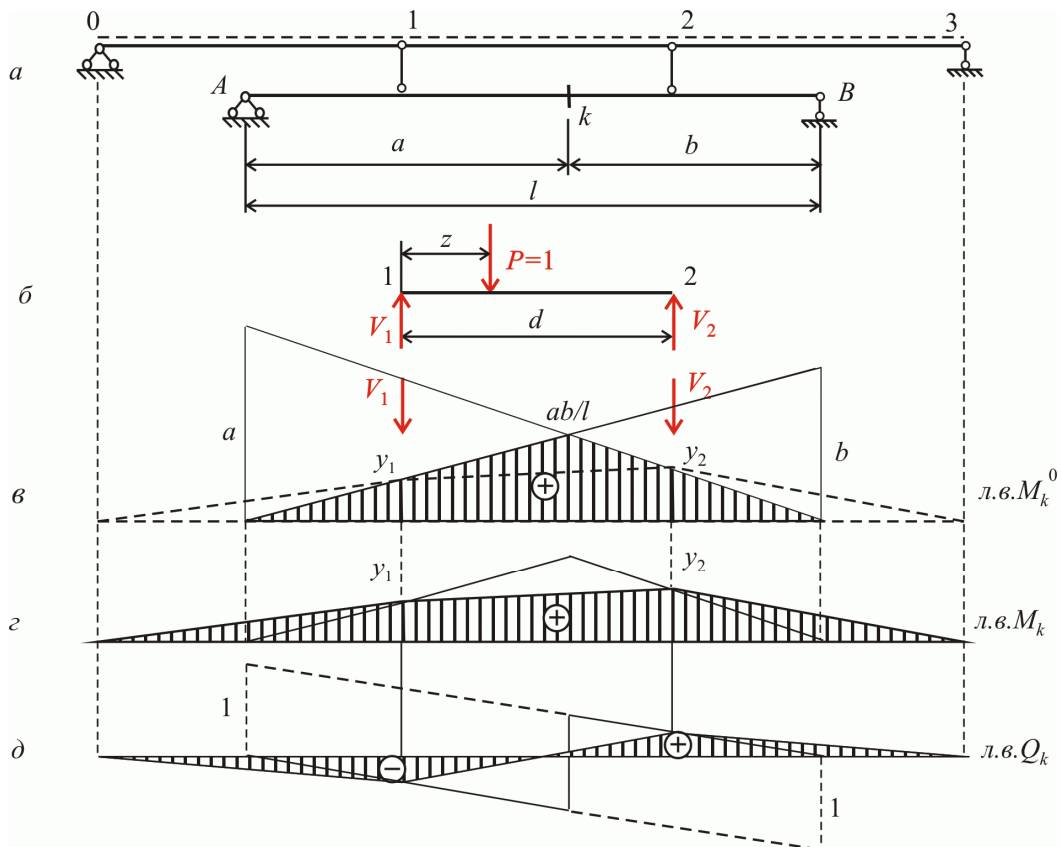


Рис.22.9

Фактично головна балка AB перебуває під дією нерухомих сил, якими є реакції опор балок проїзної частини. Причому, якщо навантаження рухається по проїзній частині, ці реакції змінюються за величиною. Визначимо ці реакції для випадку, коли одинична рухома сила перебуває на ділянці 1-2 (рис.22.9,б):

$$\sum M_2 = 0 \Rightarrow V_1 d - 1 \cdot (d - z) = 0 \Rightarrow V_1 = \frac{d - z}{d}.$$

$$\sum M_1 = 0 \Rightarrow -V_2 d + 1 \cdot z = 0 \Rightarrow V_2 = \frac{z}{d}.$$

Визначимо яке-небудь зусилля в головній балці, наприклад згинальний момент у перерізі k , від дії нерухомих сил V_1 та V_2 за допомогою лінії впливу. Лінія впливу згинального моменту в перерізі k головної балки AB показано на рис.22.9,в. Тоді, згідно формули (22.4):

$$M_k = V_1 y_1 + V_2 y_2 = \frac{d-z}{d} y_1 + \frac{z}{d} y_2.$$

Це означає, що коли одинична сила перебуває на ділянці 1–2, згинальний момент у перерізі k головної балки змінюється за лінійним законом, тому графік функції $M_k(z)$ на цій ділянці представляє собою прямолінійний відрізок. Ординати, через які буде проходити відрізок, визначимо, задавши аргументу z функції двох будь-яких значень на ділянці 1-2, наприклад:

$$\begin{aligned} z = 0 &\Rightarrow M_k(0) = y_1; \\ z = d &\Rightarrow M_k(d) = y_2. \end{aligned}$$

Зазначений відрізок показано на [рис.22.9,в](#) штриховою лінією, яка з'єднує ординати y_1 та y_2 . Аналогічно можна отримати відрізки для ділянок 0-1 та 2-3 проїзної частини. Остаточний вигляд лінії впливу згинального моменту M_k в перерізі k головної балки AB представлено на [рис.22.9,г](#).

Звідси випливає наступний порядок побудови ліній впливу для головної балки при вузловій передачі навантаження:

- Побудувати лінію впливу шуканого фактору для головної балки без урахування вузлової передачі.
- На побудовану лінію впливу спроециувати вузлові точки і з'єднати їх прямими відрізками.

На [рис.22.9,д](#) за означеними правилами побудовано лінію впливу поперечної сили в перерізі k головної балки.

22.5. Лінії впливу для шарнірно–консольної балки

Для побудови ліній впливу шарнірно–консольну балку доцільно представити у вигляді сукупності однопрогонових балок, які мають або одну опору – затиснення, або дві шарнірні опори, одна з яких шарнірно-нерухома, а друга – шарнірно-рухома. Кожна з таких однопрогонових балок спирається або на основу, або на інші прості балки. Утворена схема називається "поверховою", де кожна однопрогонова балка розглядається як окремий "поверх" конструкції. Більш докладно утворення "поверхових" схем розглядається в [главі 10](#).

Побудова ліній впливу будь-яких факторів, які виникають в шарнірно-консольній балці, виконується за два етапи:

1. За звичайними правилами будується лінія впливу лише для однопрогонової балки, до якої відноситься фактор, що аналізується.
2. Побудована лінія впливу послідовно продовжується на однопрогонові балки сусідніх "поверхів" у такий спосіб, щоб на кожному поверсі вона, по-перше, була прямолінійною, і, по-друге, перетинала вісь балки на віддаленій опорі "поверху".

Розглянемо побудову ліній впливу для шарнірно–консольної балки, представленої на рис.22.10,а.

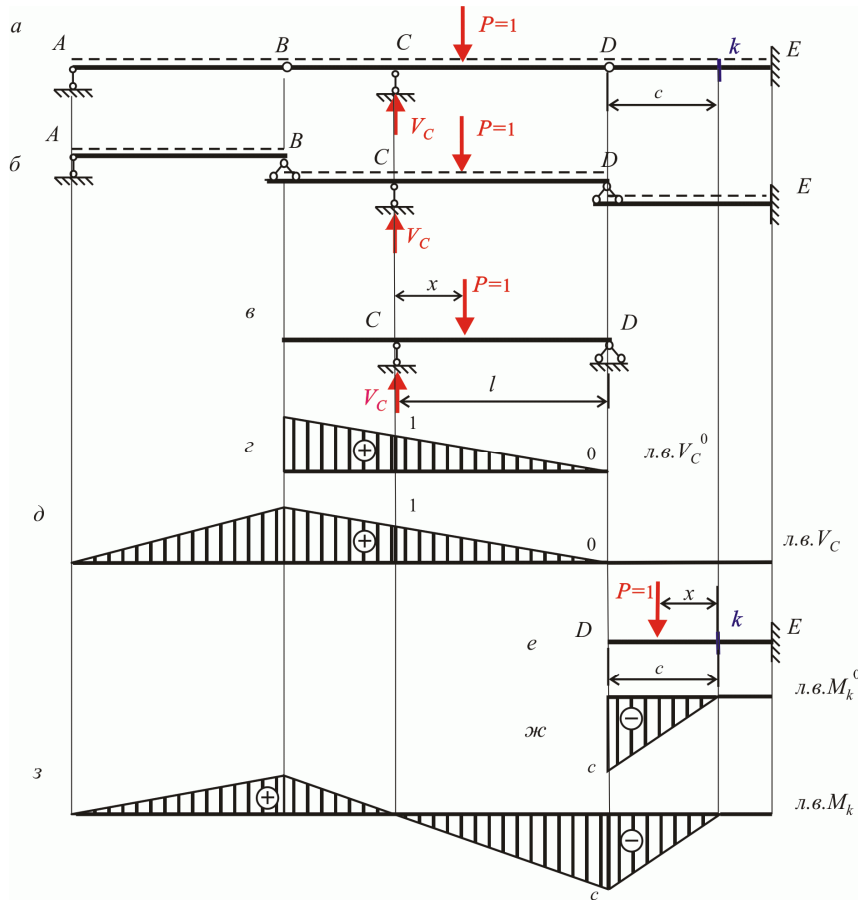


Рис.22.10

Побудова "поверхової" схеми шарнірно–консольної балки

Шарнірно-консольну балку $ABCDE$ можна представити як сукупність трьох однопрогонових балок AB , BCD і DE , які спираються одна на одну. Перший "поверх" – це консольна балка DE , яка безпосереднє спирається на основу. Другий "поверх"– це двоопорна балка BCD , яка спирається на "поверх" DE . Третій – це двоопорна балка AB , яка спирається на балку другого "поверху". "Поверхова" схема зображена на [рис.22.10.б](#).

Побудова лінії впливу опорної реакції V_C

Реакція відоситься для двоопорної балки "поверху" BCD ([рис.22.10.в](#)) . Тому на першому етапі будемо лінію впливу опорної реакції V_C саме для цієї балки:

$$\sum M_D = 0 \Rightarrow V_C l - 1 \cdot (l - x) = 0 \Rightarrow V_C = \frac{l - x}{l} = V_C(x).$$

Прямолінійний графік функції $V_C(x)$ (лінію впливу опорної реакції V_C^0 для двоопорної балки "поверху" BCD) проведемо через значення функції в двох довільних точках

$$x=0 \Rightarrow V_C(0) = \frac{l}{l} = 1;$$

$$x=l \Rightarrow V_C(l) = \frac{l-l}{l} = 0.$$

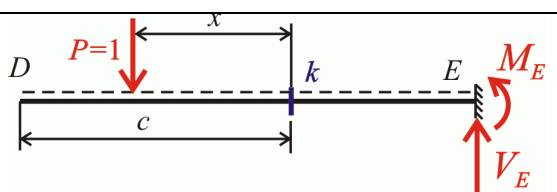
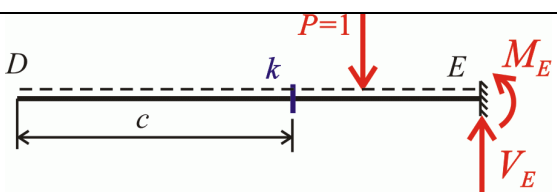
Лінія впливу опорної реакції V_C для двоопорної балки "поверху" BCD побудована на [рис.22.10.г.](#)

Другий етап. Подовжуємо лінію впливу на "поверх" AB по прямій, яка перетинає вісь на опорі A . Надалі продовжимо лінію впливу опорної реакції V_C на "поверх" DE по прямій, яка перетинає вісь на опорі E . Остаточна лінія впливу опорної реакції V_C представлена на [рис.22.10.д.](#)

Побудова лінії впливу згинального моменту M_k

Переріз k шарнірно-консольної балки розташований на консольній балці першого "поверху" DE ([рис.22.10.е.](#)).

Перший етап. Визначаємо згинальний момент M_k у перерізі k балки DE , розглядаючи два випадки розташування сили: ліворуч і праворуч перерізу k .

Сила $P=1$ ліворуч перерізу k	Сила $P=1$ праворуч перерізу k
 <p> $M_k = \sum M_k^{ліс} = -1 \cdot x.$ (при $x=0$ $M_k(0)=0$ при $x=c$ $M_k(c)=-c$) </p>	 <p> $M_k = \sum M_k^{ліс} = 0.$ </p>

Графік функції $M_k(x)$ для балки першого "поверху" DE побудовано на [рис.22.10.ж.](#)

Другий етап. Подовжуємо побудований графік на балку другого "поверху" BCD . На протязі всього "поверху" проводимо прмолінійний відрізок, який перетинає вісь балки на опорі C . Далі подовжимо графік на перший "поверх" AB , як прямий відрізок, що має нульову ординату на опорі A . Остаточна лінія впливу згинального моменту M_k наведена на [рис.22.10.з.](#)

22.6. Приклад визначення зусиль у шарнірно–консольній балці за допомогою ліній впливу

Обчислити величини вертикальних реакцій на опорах A та E , а також внутрішні зусилля в перерізах 1–1 та 2–2 балки від заданого нерухомого навантаження (рис.22.11,а). Поверхова схема шарнірно–консольної балки представлена на рис.22.11,б.

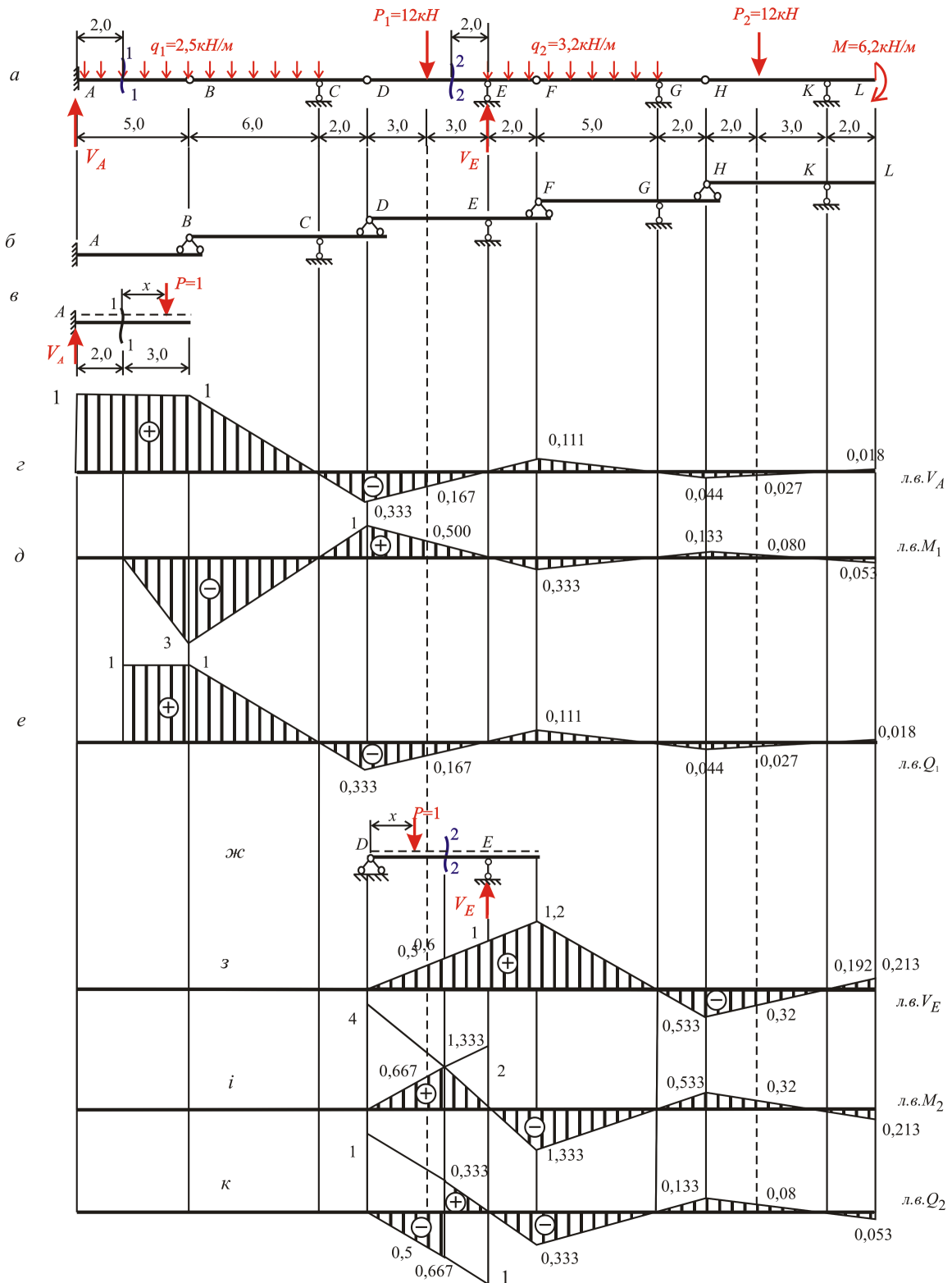


Рис.22.11

Лінія впливу опорної реакції V_A

Обчислимо вертикальну реакцію V_A з умови рівноваги консольної балки AB (рис.22.11,в):

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow V_A - 1 = 0 \Rightarrow V_A = 1.$$

Таким чином, у межах балки AB лінія впливу V_A паралельна базовій лінії. Послідовно продовжуємо графік на балки сусідніх "поверхів" в такий спосіб, щоби в межах кожного "поверху" лінія впливу була прямолінійною і перетинала базову лінію, тобто мала нульову точку, на віддаленій опорі (рис.22.11,г).

Лінії впливу внутрішніх зусиль в перерізі I-I (рис.22.11,в)

Сила $P=1$ ліворуч перерізу 1-1	Сила $P=1$ праворуч перерізу 1-1
$M_1 = \sum M_{1-1}^{прав} = 0.$	$M_{1-1} = \sum M_{1-1}^{прав} = -1 \cdot x.$ При $x = 0 \quad M_1(0) = 0,$ $x = 3 \quad M_1(3) = -3.$
$Q_1 = \sum F_y^{прав} = 0.$	$Q_1 = \sum F_y^{прав} = 1.$

У межах балки AB лінії впливу зусиль M_1, Q_1 побудовано відповідно до результатів розрахунку і подовжено на балки сусідніх "поверхів" (відповідно рис.22.11,д та рис.22.11,е).

Лінія впливу опорної реакції V_E

Визначаємо опорну реакцію V_E з умов рівноваги балки DEF (рис.22.11,ж):

$$\sum M_D = 0 \Rightarrow -V_E \cdot 6 + 1 \cdot x = 0 \Rightarrow V_E = \frac{x}{6}.$$

$$x = 0 \Rightarrow V_E(0) = \frac{0}{6} = 0;$$

$$x = l \Rightarrow V_E(l) = \frac{6}{6} = 1.$$

У межах балки DEF лінія впливу V_E побудована відповідно до результатів розрахунку і подовжена на сусідні "поверхи" (рис.22.11,з).

Лінії впливу внутрішніх зусиль в перерізі II-II (рис.22.11,ж)

Сила $P=1$ ліворуч перерізу 2-2	Сила $P=1$ праворуч перерізу 2-2
$M_2 = \sum M_{2-2}^{прав} = 2V_E.$	$M_2 = \sum M_{2-2}^{лів} = 4V_D.$
$Q_2 = \sum F_y^{прав} = -V_E.$	$Q_2 = \sum F_y^{лів} = V_D.$

Лінії впливу зусиль M_2, Q_2 у межах балки DEF побудовано відповідно до результатів розрахунку і подовжено на балки сусідніх "поверхів" (відповідно [рис.22.11.і](#) та [рис.22.11.к](#)).

Визначення опорних реакцій і внутрішніх зусиль

За допомогою побудованих ліній впливу обчислюємо опорні реакції та внутрішні зусилля від заданого нерухомого навантаження (рис.22.11,а), використовуючи формулу (22.7). Усі проміжні ординати ліній впливу визначено з умов подібності трикутників.

$$V_A = 12 \cdot (-0,167) + 12 \cdot (-0,027) + 2,5 \cdot \left(1,5 + \frac{1}{2} \cdot 1,6\right) + 3,2 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 0,111 \cdot 7\right) + 6,2 \cdot \frac{0,118}{2} = 19,281 \text{ кН}.$$

$$M_1 = 12 \cdot 0,5 + 12 \cdot 0,08 + 2,5 \cdot \left(-\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 9\right) + 3,2 \cdot \left(-\frac{1}{2} \cdot 0,333 \cdot 7\right) + 6,2 \cdot \left(-\frac{0,053}{2}\right) = 30,684 \text{ кНм}.$$

$$Q_1 = 12 \cdot (-0,167) + 12 \cdot 0,08 + 2,5 \cdot \left(1,3 + \frac{1}{2} \cdot 1,6\right) + 3,2 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 0,111 \cdot 7\right) + 6,2 \cdot \frac{0,018}{2} = 15,255 \text{ кН}.$$

$$V_E = 12 \cdot 0,5 - 12 \cdot 0,32 + 3,2 \cdot \left(\frac{1+1,333}{2} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 1,333 \cdot 5 - \frac{1}{2} \cdot 0,533 \cdot 2\right) + 6,2 \cdot \frac{0,213}{2} = 19,242 \text{ кН}.$$

$$M_2 = 12 \cdot 0,667 + 12 \cdot 0,32 + 3,2 \cdot \left(-\frac{1}{2} \cdot 1,333 \cdot 7\right) + 6,2 \cdot \left(-\frac{0,213}{2}\right) = -3,75 \text{ кН}.$$

$$Q_2 = 12 \cdot (-0,5) + 12 \cdot 0,08 + 3,2 \cdot \left(-\frac{1}{2} \cdot 0,333 \cdot 7\right) + 6,2 \cdot \left(-\frac{0,053}{2}\right) = -8,934 \text{ кН}.$$

Виберіть форму подання навчального матеріалу

✓ Докладне подання

[Скорочене подання](#)

23. Статично визначувані ферми

Зміст глави

[23.1. Лінії впливу в простих фермах](#)

[23.2. Лінії впливу в шпренгельних фермах](#)

[23.2.1. Метод наскрізних перерізів](#)

[23.2.2. Метод вирізання вузлів](#)

[23.2.3. Практичні прийоми побудови ліній впливу в шпренгельних фермах](#)

[23.3. Приклади визначення зусиль за допомогою ліній впливу](#)

[23.3.1. Проста ферма](#)

[23.3.2. Шпренгельна ферма](#)

[Заняття для самоперевірки](#)

23.1. Лінії впливу в простих фермах

Лінії впливу опорних реакцій в фермах аналогічні лініям впливу опорних реакцій в балках. Так, для ферми, представленої на [рис.23.1,а](#) лінії впливу опорних реакцій наведено на [рис.23.1,б](#) та [23.1,в](#).

Для визначення поздовжніх сил в стержнях ферми використовуються тіж самі методи, що й для дії нерухомих сил. Проте, на відміну від балки, необхідно заздалегідь визначити, по якому поясу ферми рухається одинична сила. Це пов'язано з тим, що для деяких стержнів лінії впливу зусиль при русі сили по верхньому і по нижньому поясу ферми відрізняються одна від одної.

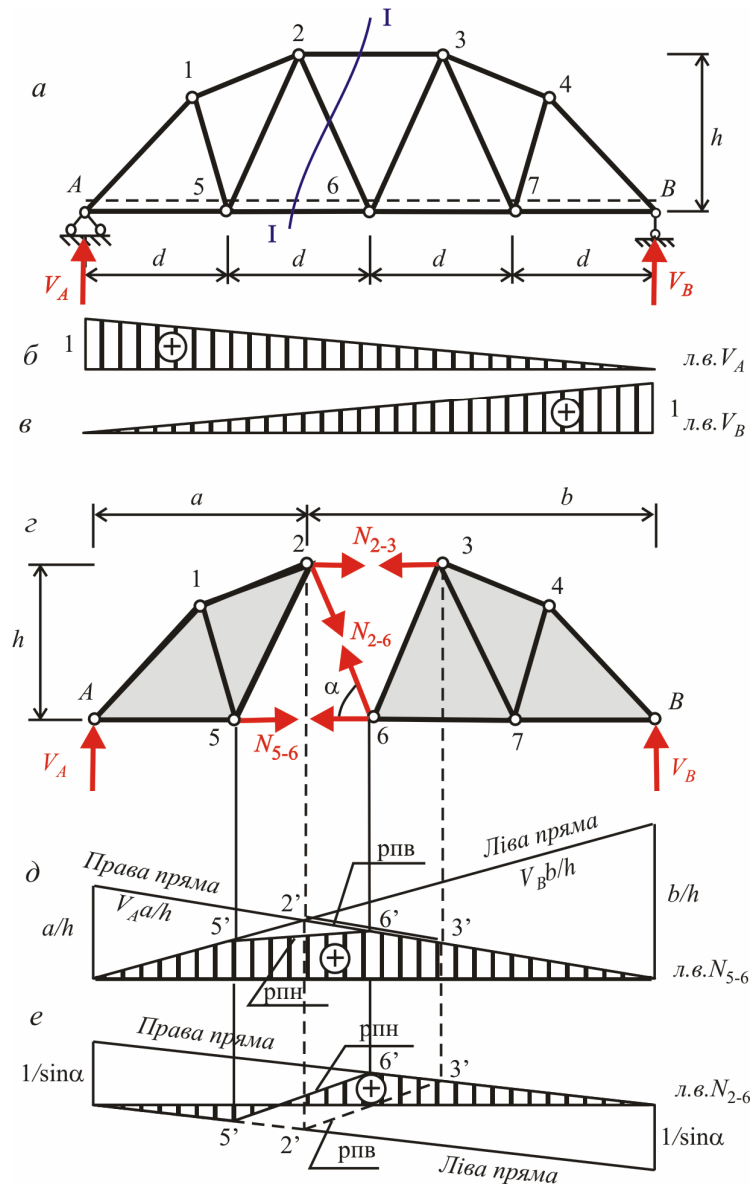


Рис.23.1

Метод наскрізних перерізів

Застосуємо метод наскрізних перерізів для аналізу поведінки зусиль в стержнях N_{5-6} та N_{2-6} . Переіз I-I, який перетинає обидва зазначені стержні, поділяє ферму на два окремі диски (рис.23.1,г). Замість розрізаних стержнів прикладаємо поздовжні сили $N_{5-6}, N_{2-6}, N_{2-3}$, які спрямовуються в додатних напрямках, тобто від відповідних вузлів. Будемо вважати, що одинична сила переміщується по нижньому поясу ферми ("рух по низу"). В опорах виникають вертикальні опорні реакції $V_A(x), V_B(x)$, графіки зміни яких (лінії впливу) побудовано на рис.23.1,б та 23.1,в.

Для зусилля N_{5-6} існує моментна точка (точка Ріттера), яка розташована у місці перетину двох інших зусиль, тобто у вузлі 2. Тому для визначення зусилля N_{5-6} необхідно скласти рівняння моментів щодо цього вузла. Що стосується зусилля N_{2-6} , то тут моментної точки не існує, бо два

інші зусилля паралельні між собою. Тому для визначення зусилля N_{2-6} необхідно скласти рівняння проєкцій на вертикальну вісь.

Як для визначення зусилля N_{5-6} , так і для визначення зусилля N_{2-6} необхідно розглядати рівновагу того диска, на який діє менша кількість сил. Зважаючи на те, що одинична сила рухається і в процесі руху може перебувати як на лівому, так і на правому дисках, будемо розглядати обидва можливі випадки. Причому, якщо сила перебуває на лівому диску, будемо аналізувати рівновагу правого диска, а якщо перебуває на правому диску, то рівновагу лівого.

Сила $P=1$ на лівому диску	Сила $P=1$ на правому диску
$\sum M_2 = 0 \Rightarrow N_{6-5}h - V_B b = 0,$ $N_{6-5} = \frac{b}{h} V_B$	$\sum M_2 = 0 \Rightarrow N_{5-6}h - V_A a = 0,$ $N_{5-6} = \frac{a}{h} V_A.$
$\sum F_y = 0 \Rightarrow N_{6-2} \sin \alpha + V_B = 0,$ $N_{6-2} = -\frac{1}{\sin \alpha} V_B.$	$\sum F_y = 0 \Rightarrow -N_{2-6} \sin \alpha + V_A = 0,$ $N_{2-6} = \frac{1}{\sin \alpha} V_A.$

Отже, в межах лівого диска лінія впливу зусилля N_{5-6} може бути побудована множенням лінії впливу опорної реакції V_B на коефіцієнт $\frac{b}{h}$ (це буде, так звана, ліва пряма), а в межах правого диска – множенням лінії впливу опорної реакції V_A на коефіцієнт $\frac{a}{h}$ (права пряма). Слід звернути увагу на те, що **ліва й права прямі перетинаються під моментною точкою**.

Ліва пряма штрихується в межах лівого, а права – в межах правого диска (рис.23.1,д). Якщо одинична сила перебуває на нижньому поясі, ліва пряма штрихується на ділянці $A-5$, а права – на ділянці $6-B$. У межах розрізаної панелі нижнього поясу ферми $5-6$ ліва і права прямі з'єднуються прямим відрізком, який називається **передатною прямою**, або **зрізкою**. Якщо ж рух здійснюється по верхньому поясу, то ліва пряма штрихується на ділянці $A-2$, а права – на ділянці $3-B$. Аналогічно, ліва й права прямі в межах розрізаної панелі верхнього поясу ферми $2-3$ з'єднуються передатною прямою. Таким чином, лінія впливу має дві передатні прямі, одна для руху по верхньому, а інша – для руху по нижньому поясу ферми.

Так само будується лінія впливу зусилля N_{2-6} . У межах лівого диска лінія впливу опорної реакції V_B множиться на коефіцієнт $-\frac{1}{\sin \alpha}$ (це буде ліва пряма), а в межах правого диска – множенням лінії впливу опорної реакції V_A на коефіцієнт $\frac{1}{\sin \alpha}$ (права пряма). Ліва і права прямі паралельні. Вони не перетинаються, що відповідає відсутності моментної точки.

Ліва пряма штрихується в межах лівого, а права – в межах правого вантажного поясу диска (рис.23.1,е). Так, якщо одинична сила перебуває на нижньому поясі, ліва пряма штрихується на ділянці $A - 5$, а права – на ділянці $6 - B$. У межах розрізаної панелі нижнього поясу ферми $5-6$ ліва і права прямі з'єднуються передатною прямою. Якщо ж рух здійснюється по верхньому поясу, то ліва пряма штрихується на ділянці $A - 2$, а права – на ділянці $3 - B$. Аналогічно, ліва і права прямі в межах розрізаної панелі верхнього поясу ферми $2-3$ з'єднуються передатною прямою. Отже, лінія впливу також має дві передатні прямі, одна для руху по верхньому, а інша – для руху по нижньому поясу ферми.

Для визначення зусиль в стержнях консольних систем опорні реакції визначати не обов'язково, бо при розрахунку зусиль методом наскрізних перерізів можна завжди обмежитись аналізом рівноваги консольної частини. Побудуємо, наприклад, лінії впливу зусиль в стержнях $1-2$ та $2-5$ консольної ферми (рис.23.2,а).

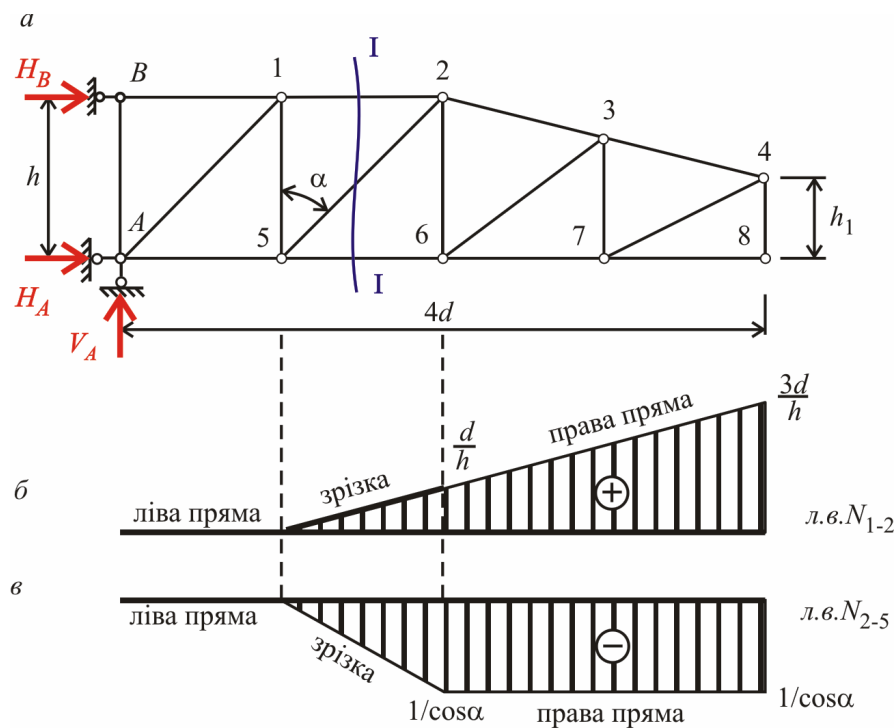
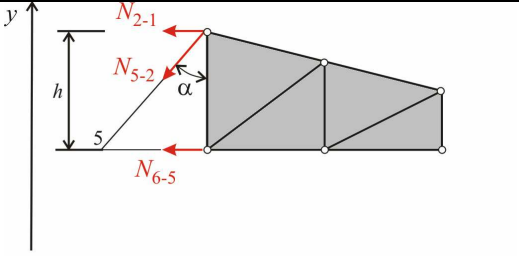
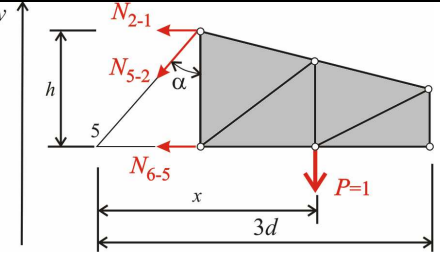


Рис.23.2

Проводимо переріз I-I, який поділяє ферму на два диска, і розглянемо рівновагу правого диска для обох випадків розташування рухомої сили: сила на лівому диску та сила на правому диску.

Сила $P=1$ на лівому диску	Сила $P=1$ на правому диску
	
$\sum M_5 = 0 \Rightarrow -N_{2-1}h = 0 \Rightarrow N_{2-1} = 0.$	$\sum M_5 = 0 \Rightarrow -N_{2-1}h + 1 \cdot x = 0 \Rightarrow N_{2-1} = \frac{x}{h}.$ <p style="text-align: center;">При $x = d \Rightarrow N_{2-1}(d) = \frac{d}{h}.$</p> <p style="text-align: center;">При $x = 3d \Rightarrow N_{2-1}(3d) = \frac{3d}{h}.$</p>
$\sum F_y = 0 \Rightarrow -N_{5-2} \cos \alpha = 0 \Rightarrow N_{5-2} = 0.$	$\sum F_y = 0 \Rightarrow -N_{5-2} \cos \alpha - 1 = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow N_{5-2} = -\frac{1}{\cos \alpha}.$

Для обох ліній впливу ліві прямі (прямі в межах лівих дисків) збігаються з базовою лінією. Права пряма лінії впливу N_{2-1} є похилою прямою, а на лінії впливу зусилля N_{5-2} – права пряма паралельна базовій лінії. Як і раніше, зрізки (передатні прямі), з'єднують ліві і праві прямі в межах розрізаної панелі вантажного поясу ферми. Остаточні лінії впливу побудовано на [рис.23.2.6](#) та [23.2.в.](#)

Таким чином, лінія впливу, побудована способом наскрізних перерізів, складається з трьох прямих:

1. Ліва пряма, яка перетинає вісь на лівій опорі і штрихується в межах вантажного поясу лівого диска.
2. Права пряма, що перетинає вісь на правій опорі і штрихується в межах вантажного поясу правого диска. Ліва й права прямі завжди перетинаються під моментною точкою.
3. Передатна пряма з'єднує ліву й праву прямі в межах розрізаної панелі вантажного поясу ферми. Іноді передатна пряма може збігатися з лівою чи правою прямою.

Метод вирізання вузлів

Метод застосовується у випадку, коли можна замкненим перерізом вирізати вузол ферми і скласти для нього рівняння проєкцій, яке міститиме лише одну невідому величину – зусилля в стержні, що аналізується. Рівняння проєкцій складається для двох випадків розташування одиничної сили:

1. сила розташована поза вузлом, тобто за межами розрізаних панелей;

2. сила знаходиться у вузлі.

Для прикладу побудуємо лінії впливу зазначеним методом для стержнів 2–2' та 3–3' (рис.23.3,а).

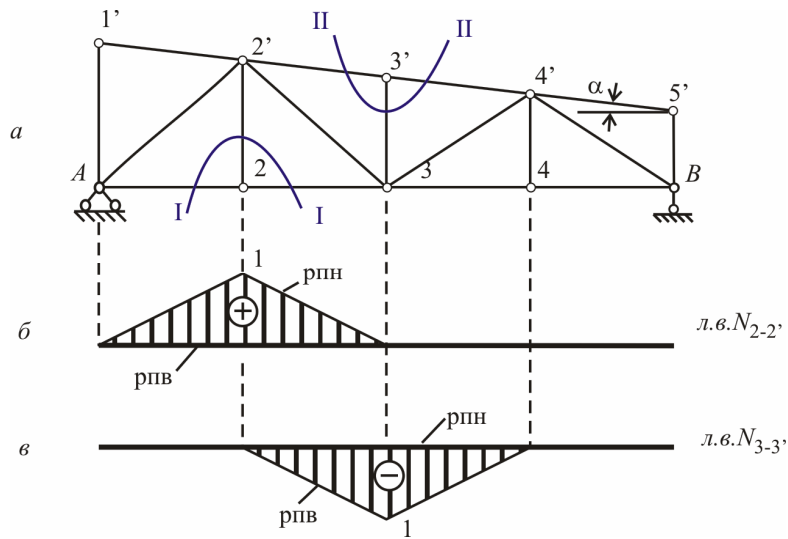


Рис.23.3

Перерізами I–I і II–II вирізаємо вузли 2 та 3' відповідно. Далі для кожного вузла складаємо рівняння проекцій, вибираючи для проєцирування вісь в такий спосіб, щоби на неї проєцирувалось лише одне невідоме – зусилля в стержні, що аналізується.

Сила $P=1$ поза вузлом 2	Сила $P=1$ у вузлі 2
$\sum F_y = 0 \Rightarrow N_{2-2'} = 0.$	$\sum F_y = 0 \Rightarrow N_{2-2'} - 1 = 0 \Rightarrow N_{2-2'} = 1.$
Сила $P=1$ поза вузлом 3'	Сила $P=1$ у вузлі 3'
$\sum F_u = 0 \Rightarrow N_{3-3'} = 0.$	$\sum F_u = 0 \Rightarrow -N_{3-3'} \cos \alpha - 1 \cdot \cos \alpha = 0.$ $N_{3-3'} = -1.$

Як випливає з розрахунку, зусилля $N_{2-2'}$ поза вирізаним вузлом 2, тобто за межами розрізаних панелей A-2 та 2-3, дорівнює нулю, а в самому вузлі дорівнює одиниці. Тому на розрізаних панелях необхідно провести передатні прямі, що з'єднують одиничну ординату у вузлі 2 з нулями

у вузлах A та 3 . Це й буде лінія впливу зусилля N_{2-2} . Причому, оскільки в процесі розрахунку розглядалось розташування одиничної сили у вузлі нижнього поясу, маємо графік для руху "по низу". Якщо ж сила рухається по верхньому поясу, то вона не може потрапити у вузол 2 . Тому лінія впливу зусилля N_{2-2} буде нульовою (рис.23.3.б).

Аналогічно будуватиметься лінія впливу зусилля N_{3-3} (рис.23.3.в). Проте в цьому випадку одиничне значення у вирізаному вузлі відповідає руху сили по верхньому, а нульове – по нижньому поясу.

Метод сумісних перерізів

Метод застосовують для визначення зусиль у стержнях, які неможливо обчислити за способами вирізання вузлів і наскрізних перерізів. Ідея методу полягає в тому, що шукане зусилля виражається через інше, яке можна знайти способом вирізання вузлів або способом наскрізних перерізів.

Побудуємо, наприклад, лінію впливу зусилля в стержні N_{3-6} (рис.23.4,а).

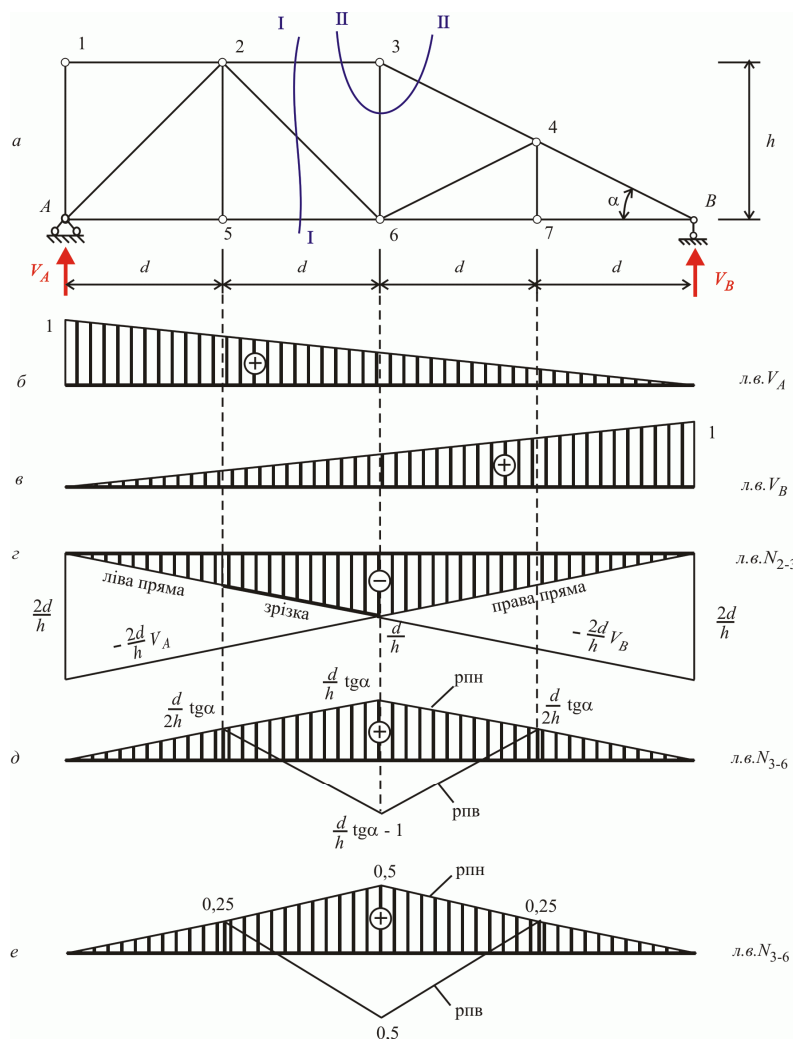


Рис.23.4

Лінії впливу опорних реакцій показано на рис.23.4,б та рис.23.4,в.

Як допоміжну побудуємо лінію впливу зусилля N_{2-3} , використовуючи метод наскрізних перерізів. Переріз I-I поділяє ферму на два незалежних диска. Визначимо зусилля N_{2-3} для двох випадків розташування одиичної сили: сила на лівому і сила на правому диску.

Сила $P=1$ на лівому диску	Сила $P=1$ на правому диску
$\sum M_6 = 0 \Rightarrow -N_{3-2}h - V_B \cdot 2d = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow N_{3-2} = -\frac{2d}{h}V_B.$	$\sum M_6 = 0 \Rightarrow N_{2-3}h + V_A \cdot 2d = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow N_{2-3} = -\frac{2d}{h}V_A.$

Лінія впливу зусилля в стержні N_{3-6} будувється шляхом множення ліній впливу опорних реакцій на коефіцієнт $-\frac{2d}{h}$ (рис.23.4,г). Ліва пряма штрихується в межах лівого, а права – в межах правого диска. Зрізка (передатна пряма), яка в межах розрізаної панелі з'єднує ліву та праву прямі, розташована на лівій прямій.

Далі проводимо переріз II-II, який виокремлює вузол 3, і складаємо рівняння рівноваги для двох випадків: сила $P=1$ поза вузлом, тобто за межами розрізаних стержнів 2-3 та 3-4, та сила $P=1$ у вузлі.

Сила $P=1$ поза вузлом 3	Сила $P=1$ у вузлі 3
$\sum F_x = 0 \Rightarrow N_{3-4} \cos \alpha - N_{3-2} = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow N_{3-4} = \frac{1}{\cos \alpha} N_{3-2}.$	$\sum F_x = 0 \Rightarrow N_{3-4} \cos \alpha - N_{3-2} = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow N_{3-4} = \frac{1}{\cos \alpha} N_{3-2}.$
$\sum F_y = 0 \Rightarrow -N_{3-6} - N_{3-4} \sin \alpha = 0 \Rightarrow$	$\sum F_y = 0 \Rightarrow -N_{3-6} - N_{3-4} \sin \alpha - 1 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow N_{3-6} = -N_{3-4} \sin \alpha \Rightarrow$ $\Rightarrow N_{3-6} = -N_{3-2} \operatorname{tg} \alpha .$	$\Rightarrow N_{3-6} = -N_{3-4} \sin \alpha - 1 \Rightarrow$ $\Rightarrow N_{3-6} = -N_{3-2} \operatorname{tg} \alpha - 1 .$
--	--

Отже, у випадку розташування одиничної сили поза вузлом 3, що належить верхньому поясу ферми, лінія впливу зусилля N_{3-6} може бути отримана множенням лінії впливу зусилля N_{3-2} на коефіцієнт $(-\operatorname{tg} \alpha)$. Таке розташування відповідає руху одиничної сили по нижньому поясу ферми. Тому заштрихований на [рис.23.4.д](#) графік являє собою лінію впливу зусилля N_{3-6} при пересуванні сили по нижньому поясу.

Розташування сили у вузлі 3 можливе лише за умови руху по верхньому поясу ферми. До того ж слід врахувати, що у разі розташування сили у вузлі 3 всі зусилля мають певні значення. Зокрема, $N_{3-2} = -\frac{d}{h}$ (див.[рис.23.4.г](#)). Так само, величина $N_{3-6} = \frac{d}{h} \operatorname{tg} \alpha - 1$ являє собою ординату лінії впливу N_{3-6} у вузлі 3. Провівши в межах розрізаних панелей прямолінійні відрізки від цієї ординати до лівої і до правої прямої, маємо передатні прямі для руху "по верху" ([рис.23.4.д](#)).

З урахуванням того, що $\operatorname{tg} \alpha = \frac{d}{2h}$, лінія впливу зусилля N_{3-6} набуває остаточного вигляду ([рис.23.4.е](#)).

23.2. Лінії впливу в шпренгельних фермах

Бувають випадки, коли у ферми, що мають великі відстані між вузлами вантажного поясу, вводять додаткові вузли, на які спиратимуться поперечні балки, що несуть навантаження від покриття або від проїзної частини мостів. Для збереження геометричної незмінюваності водночас із вузлами вводять додаткові стержні, які називаються **шпренгельними**. Ферми, які містять додаткові вузли вантажного поясу та відповідні додаткові стержні, називають **шпренгельними фермами**.

З точки зору геометричної структури шпренгельну ферму можна розглядати як таку, що складається з основної ферми, в панелі якої введено додаткові трикутні ферми, які спираються на вузли основної ферми. Такі додаткові однопанельні ферми називаються **шпренгелями**. Навантаження на шпренгелі передається лише через сили, прикладені в додаткових вузлах поясу. Якщо ці вузли не навантажені, то зусилля у відповідному шпренгелі відсутні. Таким чином, шпренгелі працюють лише на локальне навантаження панелей.

Деякі типові види шпренгелів розглянемо на прикладі шпренгельної ферми ([рис.23.5.а](#)).

Ферму можна розглядати як основну ферму з паралельними поясами 1-2-3-4-5-6 та 1'-2'-3'-4'-5'-6', в панелі якої вставлено додаткові вузли, трикутні шпренгелі та додаткові стійки, через які

навантаження передається на шпренгелі (рис.23.5,б). Схеми шпренгелів представлено на рис.23.5,в.

Шпренгель, який введено у першу панель, спирається на вузли 1 і 2 основної ферми. Завантажується шпренгель через додаткову стійку 7–7'. Навантаження з додаткового вузла 7 верхнього поясу через опорні реакції шпренгеля передаються на вузли 1 і 2 знов–таки верхнього поясу. Такого типу шпренгелі називаються **одноярусними**.

Шпренгель, введений в другу панель, спирається на вузли 2' і 3' нижнього поясу. Через стійку 8–8' навантаження з додаткового вузла 8, який розташовано в верхньому поясі, через шпренгель передається на вузли нижнього поясу основної ферми. Шпренгелі такого типу називаються **двоярусними**.

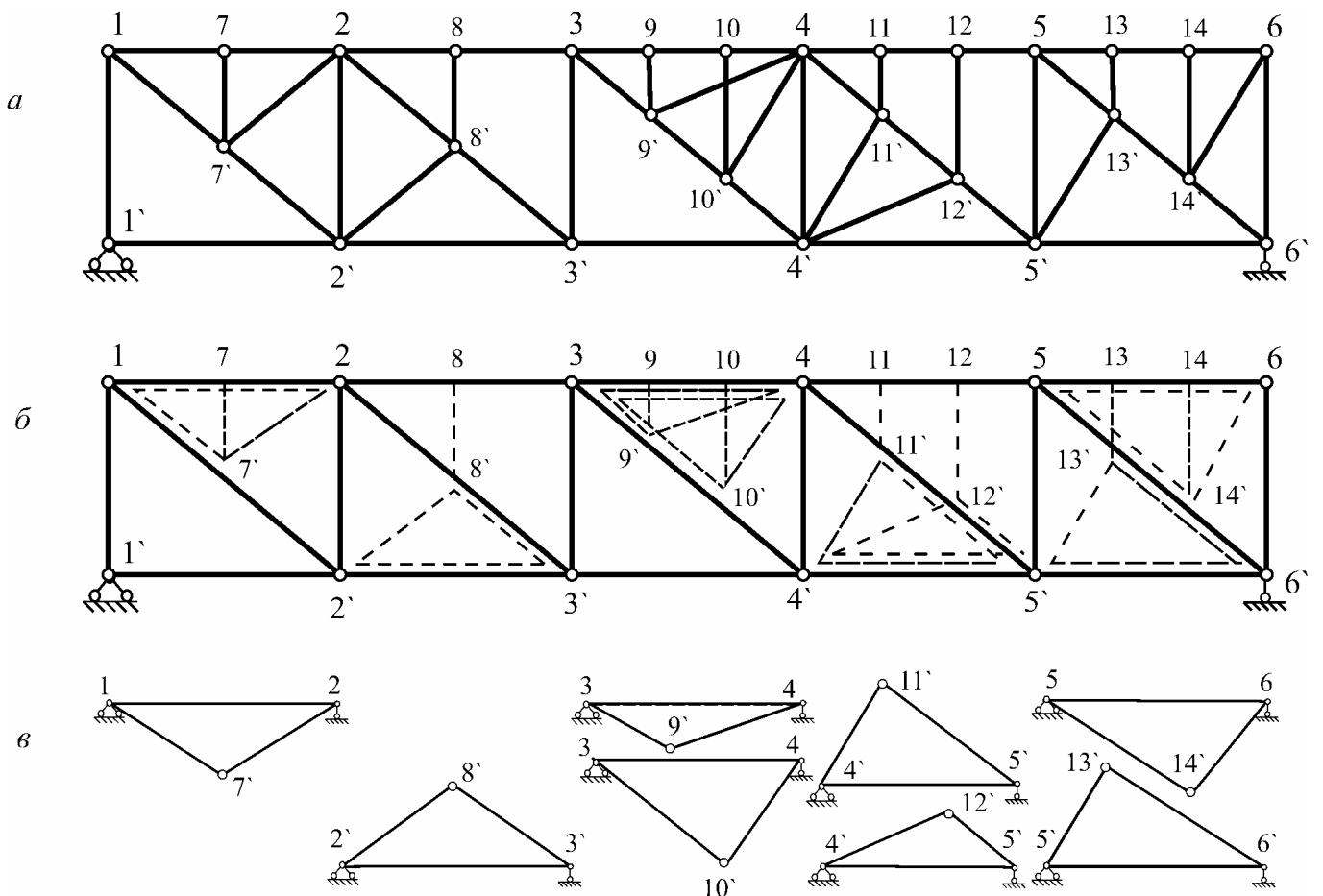


Рис.23.5

У третій панелі основної ферми показано два трикутні одноярусні шпренгелі 3–4–9', який навантажується через додаткову стійку 9–9', та шпренгель 3–4–10'. Останній навантажується через додаткову стійку 10–10'.

Аналогічно, в четверту панель введено два двоярусних шпренгеля 4'–5'–11' і 4'–5'–12', які через додаткові стійки 11–11' та 12–12' відповідно передають навантаження з додаткових вузлів верхнього поясу 11 та 12 на вузли 4' і 5' основної ферми.

П'ята панель містить два шпренгеля, причому шпренгель 5'-6'-13' є двоярусним, а шпренгель 5-6-14' – одноярусним.

Усі стержні шпренгельної ферми можна поділити на 4 категорії (рис.23.5.а):

1. Стержні які відносяться лише до основної ферми. Наприклад, 2-8, 8-3, 2-8', 3'-4' тощо.
2. Стержні, які належать лише шпренгелям та додаткові стійки, через які шпренгелі навантажуються (2-7', 7-7', 2'-8', 8-8' тощо).
3. Стержні, які водночас належать як основній фермі, так і шпренгелю (1-7, 7-2, 2'-3', 9'-10' тощо).
4. Стійки основної ферми за умови, що принаймні в одній, суміжній зі стійкою, панелі введено двоярусний шпренгель. Наприклад, 2-2', 3-3', 4-4', 5-5', але не стійка 1-1', бо в першій панелі, з якою межує зазначений стержень, немає двоярусного шпренгеля. Це стержень першої категорії.

23.2.1. Метод наскрізних перерізів

Для побудови ліній впливу в стержнях шпренгельних ферм можна безпосередньо використовувати метод перерізів. Так, якщо можна розділити шпренгельну ферму перерізом на два окремих диска, провівши розріз через три стержня, то використовується спосіб наскрізних перерізів. Якщо ж можна вирізати вузол шпренгельної ферми, провівши розріз через три стержня, так щоби два стержня були розташовані вздовж прямої, то використовується спосіб вирізання вузлів.

Побудуємо для ферми (рис.23.6.а) лінії впливу зусиль в стержнях 4'-7', 6'-7', 6-7 та 9-9'.

Лінії впливу опорних реакцій побудовано на рис.23.6.б та рис.23.6.в. Для визначення зусиль в стержнях 4'-7', 6'-7', 6-7 проводимо переріз I-I і розглядаємо рівновагу дисків при різних розташуваннях одиничної сили.

Сила $P=1$ на лівому диску	Сила $P=1$ на правому диску
$\sum M_4 = 0 \Rightarrow -N_{7-4'} \cdot h - V_B \cdot 9d = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow N_{7-4'} = -\frac{9d}{h} V_B.$	$\sum M_4 = 0 \Rightarrow N_{4'-7'} \cdot h + V_A \cdot 3d = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow N_{4'-7'} = -\frac{3d}{h} V_A.$

$\sum F_y = 0 \Rightarrow -N_{7-6'} \cdot \cos \alpha + V_B = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow N_{7-6'} = \frac{1}{\cos \alpha} V_B.$	$\sum F_y = 0 \Rightarrow N_{6'-7} \cdot \cos \alpha - V_A = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow N_{7-6'} = -\frac{1}{\cos \alpha} V_A.$
$\sum M_{7'} = 0 \Rightarrow N_{7-6'} h - V_B \cdot 6d = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow N_{7-6'} = \frac{6d}{h} V_B.$	$\sum M_{7'} = 0 \Rightarrow -N_{6-7} h + V_A \cdot 6d = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow N_{6-7} = \frac{6d}{h} V_A.$

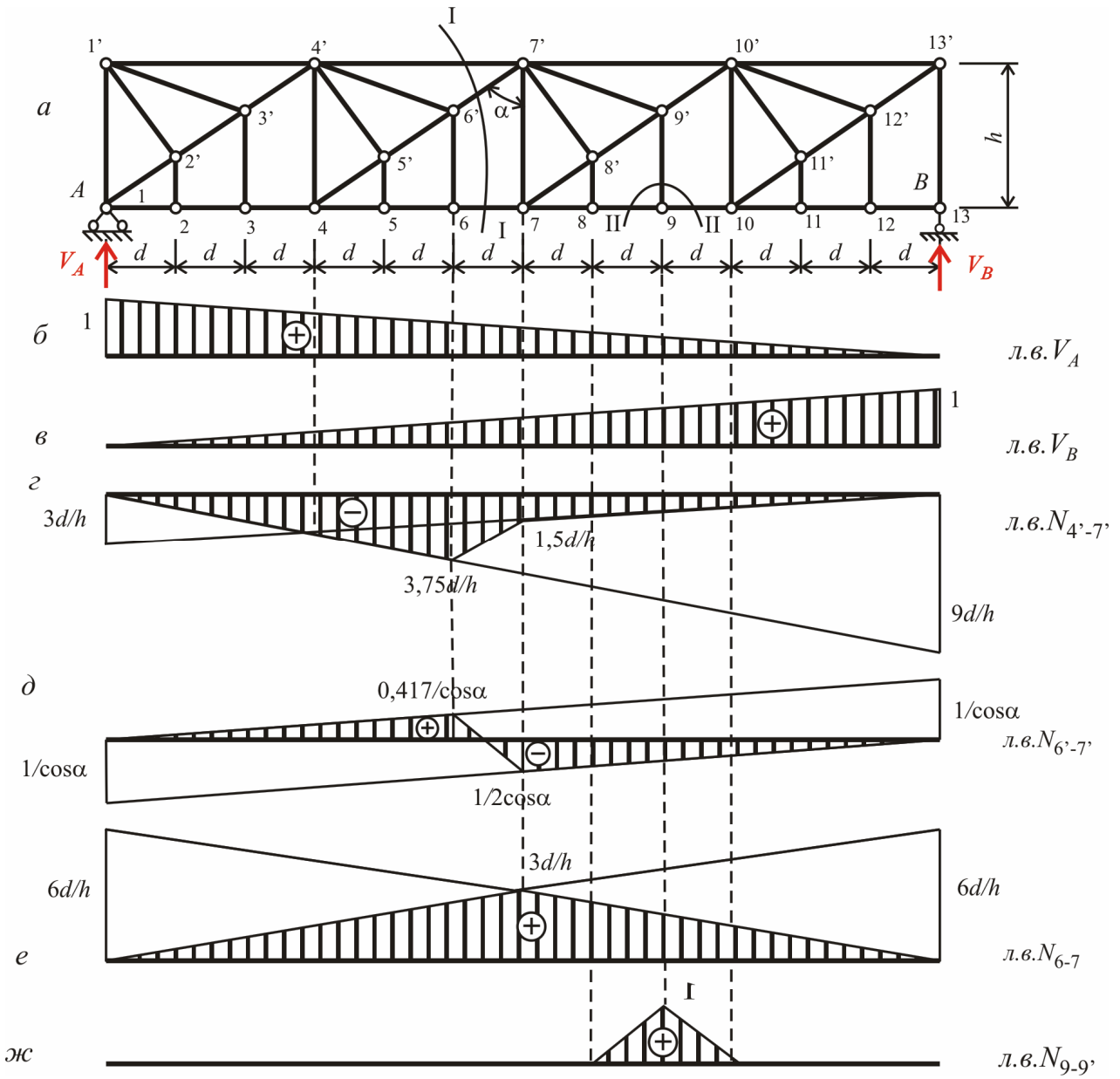
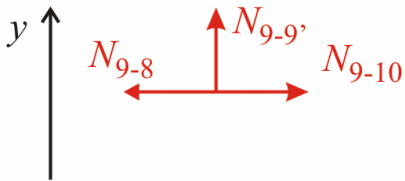
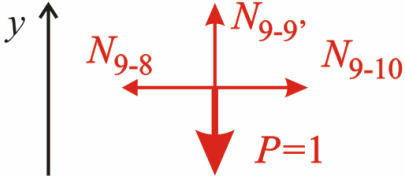


Рис.23.6

Лінії впливу, згідно до наведених розрахунків, побудовано на рис.23.6,в – 23.6,е. Слід звернути увагу, що на лініях впливу $N_{4'-7'}$, $N_{6'-7'}$ передатна пряма проведена в межах розрізаної панелі вантажного поясу (між вузлами 6 і 7), а на лінії впливу N_{6-7} – збігається з лівою прямою.

23.2.2. Метод вирізання вузлів

Метод застосовують у випадках, коли метод наскрізних перерізів незручний для використання. Так, для побудови лінії впливу зусилля в стержні 9–9' проводимо переріз II–II, який вирізає вузол 9 і розглядаємо два положення рухомої сили: сила поза вузлом і сила у вузлі.

Сила $P=1$ поза вузлом 9	Сила $P=1$ у вузлі 9
 <p>$\sum F_y = 0 \Rightarrow N_{9-9'} = 0.$</p>	 <p>$\sum F_y = 0 \Rightarrow N_{9-9'} - 1 = 0 \Rightarrow N_{9-9'} = 1.$</p>

Лінія впливу зусилля в стержні 9–9' побудовано на [рис.23.6,ж](#).

23.2.3. Практичні прийоми побудови ліній впливу в шпренгельних фермах

Якщо для побудови ліній впливу в шпренгельних фермах метод перерізів використати неможливо або надто складно, то можна застосовувати спеціальні прийоми, які базуються на представленні шпренгельної ферми як сукупності основної ферми та шпренгелів.

Розглянемо побудову ліній впливу в таких стержнях на прикладі шпренгельної ферми, зображеної на [рис.23.7,а](#).

Стержні I категорії

До першої категорії відносять стержні, які належать виключно основній фермі. Зусилля в таких стержнях можна визначати як зусилля в лише в основній фермі, яка залишається після вилучення шпренгельних вузлів і стержнів ([рис.23.7,б](#)).

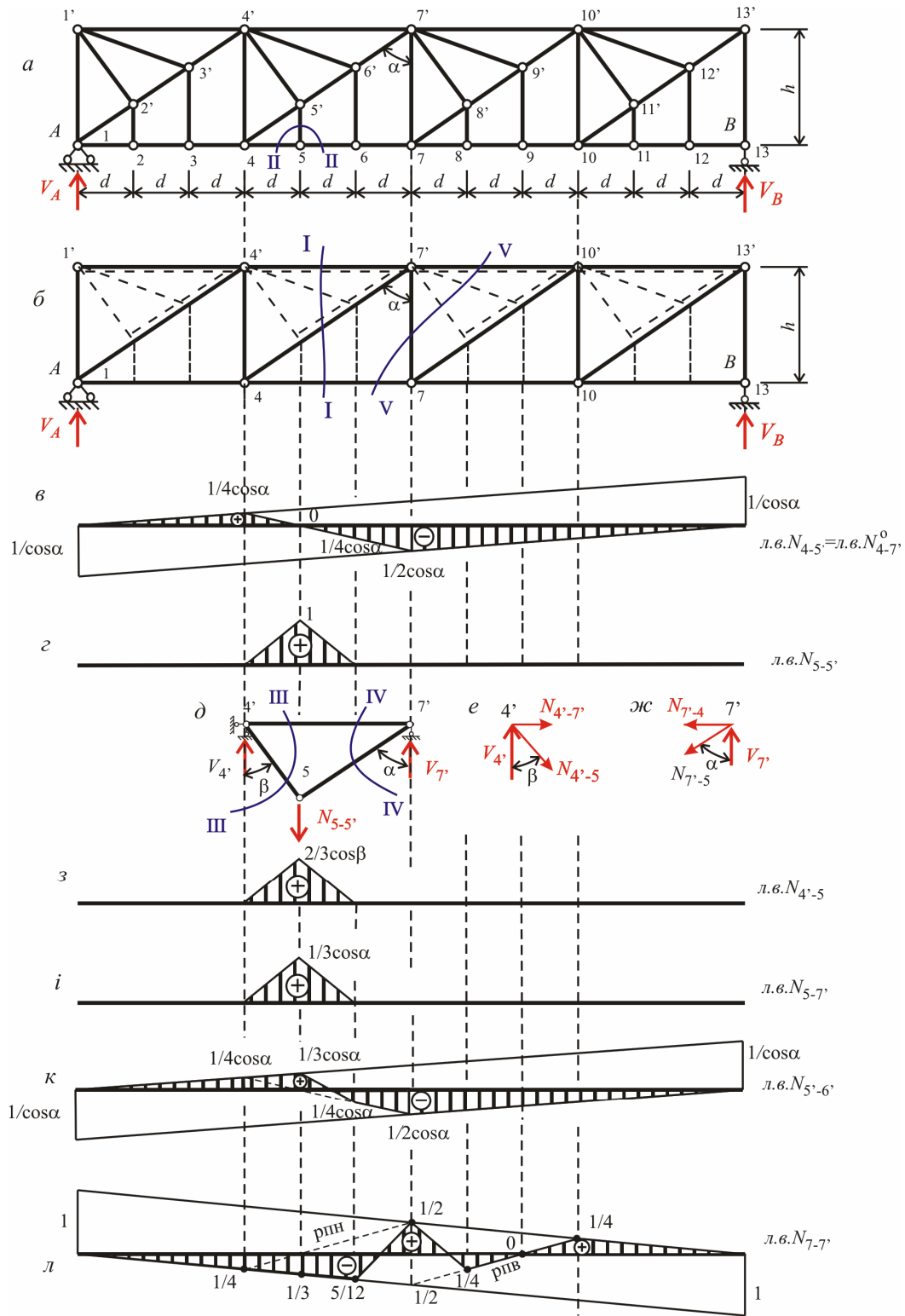
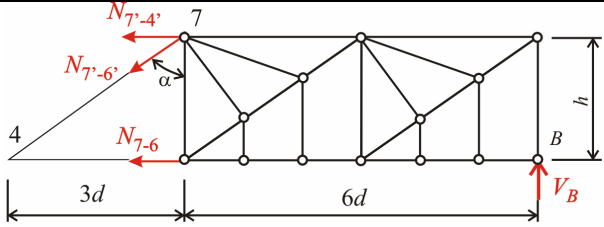
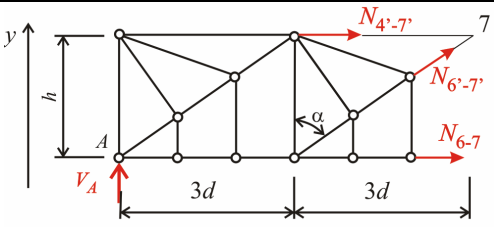


Рис.23.7

Так, стержень 4-5' шпренгельної ферми (рис.23.7,а) відноситься до першої категорії. Тому лінія впливу $N_{4-5'}$ еквівалентна лінії впливу $N_{4-7'}$ основної ферми:

$$\text{л.в. } N_{4-5'} = \text{л.в. } N_{4-7'}^0$$

Сила $P=1$ на лівому диску	Сила $P=1$ на правому диску
	
$\sum F_y = 0 \Rightarrow -N_{7-4} \cos \alpha + V_B = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow N_{7-4} = \frac{1}{\cos \alpha} V_B.$	$\sum F_y = 0 \Rightarrow N_{4-7} \cos \alpha + V_A = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow N_{4-7} = -\frac{1}{\cos \alpha} V_A.$

Отже, замість лінії впливу зусилля N_{4-5} , будемо лінію впливу зусилля N_{4-7}^0 для основної ферми (рис.23.7.6). Проводимо переріз I-I, який поділяє основну ферму на два диска і аналізуємо рівновагу при розташуванні одиничної сили на лівій і на правій половині ферми: якщо сила розташована на лівій половині ферми – рівновагу правого диска, а якщо на правій – лівого диска.

Ліва пряма лінії впливу будується множенням лінії впливу опорної реакції V_B на коефіцієнт $\frac{1}{\cos \alpha}$, а права – лінії впливу опорної реакції V_A на коефіцієнт $\left(-\frac{1}{\cos \alpha}\right)$. Ліва пряма заштрихована в межах лівого, а права – в межах правого диска. Обидві прямі в межах розрізаної панелі з'єднуються передатною прямою (рис.23.7.в).

Стержні II категорії

До II категорії відносяться стержні, які належать лише шпренгелю. Наприклад, до цієї категорії відноситься стержень $4'-5'$ (рис.23.7.а), який входить до складу шпренгеля $4'-5'-7'$. Навантаження на зазначений шпренгель передається через підвіску $5-5'$. Тому перш ніж аналізувати зусилля $N_{4'-5'}$, слід побудувати лінію впливу зусилля в підвісці $N_{5-5'}$. Це можна зробити, вирізавши перерізом II-II вузол 5 шпренгельної ферми (рис.23.7.а) і розглянувши два положення одиничної сили: сила поза вузлом 5 та сили у вузлі.

Сила $P=1$ поза вузлом 5	Сила $P=1$ у вузлі 5
$\sum F_y = 0 \Rightarrow N_{5-5} = 0.$	$\sum F_y = 0 \Rightarrow N_{5-5} - 1 = 0 \Rightarrow N_{5-5} = 1.$

Лінія впливу зусилля всюди за межами розрізаних панелей 4–5–6 шпренгельної ферми збігається з базовою прямою і дорівнює одиниці у вузлі 5 ([рис.23.7.г](#)).

Далі розглянемо лише самий шпренгель 4'–5'–7', який спирається на вузли 4' і 7' основної ферми та навантажується зусиллям N_{5-5} ([рис.23.7.д](#)).

Визначаємо опорну реакцію $V_{4'}$:

$$\sum M_{7'} = 0 \Rightarrow V_{4'} \cdot 3d - N_{5-5} \cdot 2d = 0 \Rightarrow V_{4'} = \frac{2}{3} N_{5-5}.$$

Тоді з рівноваги вузла 4' (переріз III–III) визначаємо зусилля $N_{4'-5'}$ ([рис.23.7.е](#)):

$$\begin{aligned} \sum F_y = 0 &\Rightarrow -N_{4'-5'} \cos \beta + V_{4'} = 0, \\ N_{4'-5'} &= \frac{1}{\cos \beta} V_{4'} = \frac{2}{3 \cos \beta} N_{5-5}. \end{aligned}$$

На [рис.23.7.з](#) показано лінію впливу зусилля $N_{4'-5'}$, яку одержано множенням раніше побудованої лінії впливу зусилля N_{5-5} на коефіцієнт $\frac{2}{3 \cos \beta}$.

Стержні III категорії

До III категорії належать стержні, що водночас входять до складу як основної ферми, так і шпренгеля. Наприклад, стержень 5'–6' ([рис.23.7.а](#)) можна трактувати як поєднання елемента 4–7' основної ферми та елемента 5'–7' шпренгеля ([рис.23.7.д](#)). Лінії впливу зусиль в таких стержнях можна отримати додаванням ліній впливу зусиль у стержнях основної ферми та у відповідних стержнях шпренгеля. Так, для зазначеного стержня

$$л.в. N_{5'-6'} = л.в. N_{4-7'}^0 + л.в. N_{5'-7'}^{\text{III}}.$$

Лінія впливу зусилля в основній фермі N_{4-7}^0 , уже побудована на [рис.23.7.в](#). Побудуємо тепер лінію впливу зусилля $N_{5'-7}^{\text{III}}$, яке виникає в стержні, що входить до складу шпренгеля 4'-5'-7' ([рис.23.7.д](#)).

Опорну реакцію у вузлі 7' обчислимо з умов рівноваги шпренгеля ([рис.23.7.д](#)):

$$\sum M_{4'} = 0 \Rightarrow V_{7'} \cdot 3d - N_{5-5'} \cdot d = 0 \Rightarrow V_{7'} = \frac{1}{3} N_{5-5'}$$

Визначимо зусилля $N_{4'-7'}$, із умов рівноваги опорного вузла 7' шпренгеля ([рис.23.7.ж](#)):

$$\begin{aligned} \sum F_y = 0 &\Rightarrow -N_{4'-7'} \cos \alpha + V_{7'} = 0, \\ N_{4'-7'} &= \frac{1}{\cos \alpha} V_{7'} = \frac{1}{3 \cos \alpha} N_{5-5'}. \end{aligned}$$

Отже, лінію впливу зусилля $N_{5'-7'}$, ([рис.23.7.и](#)) отримаємо, помноживши графік ([рис.23.7.г](#)) на числовий коефіцієнт $\frac{1}{3 \cos \alpha}$.

Сума лінії впливу зусилля N_{4-7}^0 , в основній фермі та лінії впливу зусилля $N_{5'-7'}$, у шпренгелі представлена на [рис.23.7.к](#). Це й буде остаточна лінія впливу в стержні III категорії 5'-6'.

Стержні IV категорії

До таких стержнів відносять стійки основної ферми, в яку введено двоярусні шпренгелі. Наприклад, стержень 7'-7' ([рис.23.7.а](#)).

Утворення ліній впливу зусилля в таких стержнях можна здійснити за два етапа:

1. Побудувати лінію впливу лише для основної ферми, показавши на ній дві передатні прямі (зрізки) – для руху одиничної сили по верхньому і по нижньому поясах. За межами обох розрізаних панелей лінія впливу має вже остаточний вигляд.
2. У межах розрізаних панелей необхідно передатні прямі, проведені для основної ферми, перетворити на зрізки для шпренгельної ферми. З цією метою одиничну силу у межах розрізаних панелей послідовно встановлюють у вузли вантажного поясу шпренгельної ферми і аналізують, на який пояс ферми передається навантаження через відповідний шпренгель. Якщо навантаження передається на верхній пояс, то вузлову точку проєцирують на передатну пряму для "руху по верху", якщо на нижній – то на передатну пряму для "руху по низу". Точки, які отримано на передатних прямих, з'єднують прямими відрізками.

Так, побудову лінії впливу зусилля $N_{7-7'}$, починаємо з лінії впливу для основної ферми. Переріз V-V поділяє ферму на два диска ([рис.23.7.б](#)). З умов рівноваги визначаємо зусилля $N_{7-7'}$, для двох випадків розташування одиничної сили: сила на лівому і сила на правому диску.

Сила $P=1$ на лівому диску	Сила $P=1$ на правому диску
$\sum F_y = 0 \Rightarrow N_{7-7} + V_B = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow N_{7-7} = -V_B.$	$\sum F_y = 0 \Rightarrow -N_{7-7} + V_A = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow N_{7-7} = V_A.$

Ліва і права прями заштриховано на [рис.23.7.л](#) між вузлами 1-4 та 10-13 відповідно. Передатна пряма для руху "по низу" з'єднує ліву й праву прями на ділянці 4-7, а для руху "по верху" – на ділянці 7'-10' ([рис.23.7.б](#)).

Далі визначаємо передатні прями для шпренгельної ферми в межах розрізаних панелей, тобто між вузлом 4 нижнього і вузлом 10' верхнього поясу. Очевидно, розташована у вузлах 5, 6, 8 та 9 сила через відповідні шпренгелі передається на вузли верхнього поясу. Тому ці вузли проєцируємо на передатну пряму для руху "по верху". Нарешті, якщо сила перебуває у вузлі 7, який розташовано на нижньому поясі основної ферми, то шпренгелі не працюють, і тому вузол 7 необхідно спроециувати на передатну пряму для руху "по низу".

Проводимо відрізки, які з'єднують заштриховані ділянки лівої і правої прямих з отриманими точками на зрізках, і маємо остаточну лінію впливу N_{7-7} . ([рис.23.7.л](#)).

23.3. Приклади визначення зусиль за допомогою ліній впливу

23.3.1. Проста ферма

Визначити зусилля в позначених стержнях ферми (рис.23.8 та 23.9) від заданого нерухомого навантаження за допомогою ліній впливу.

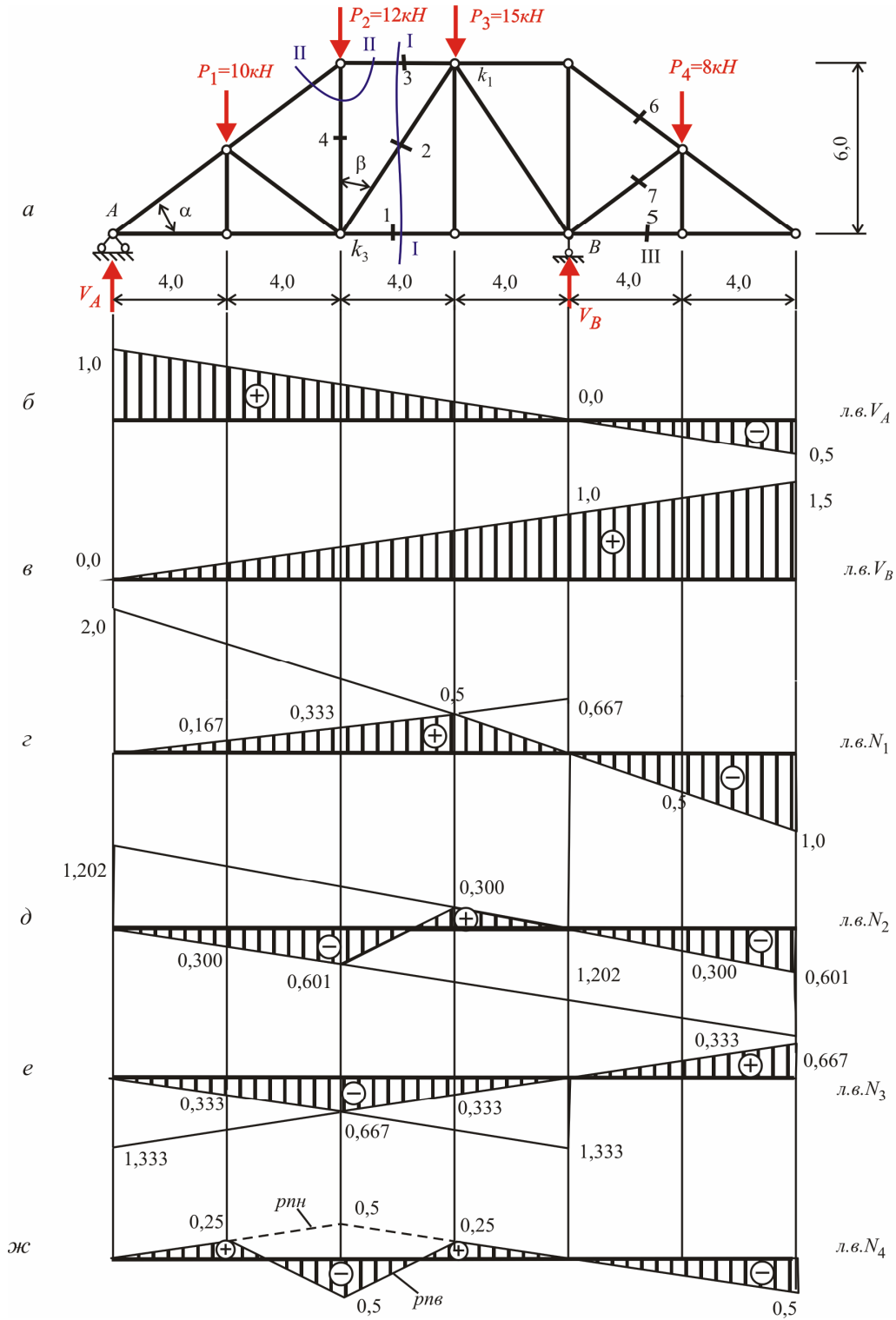


Рис.23.8

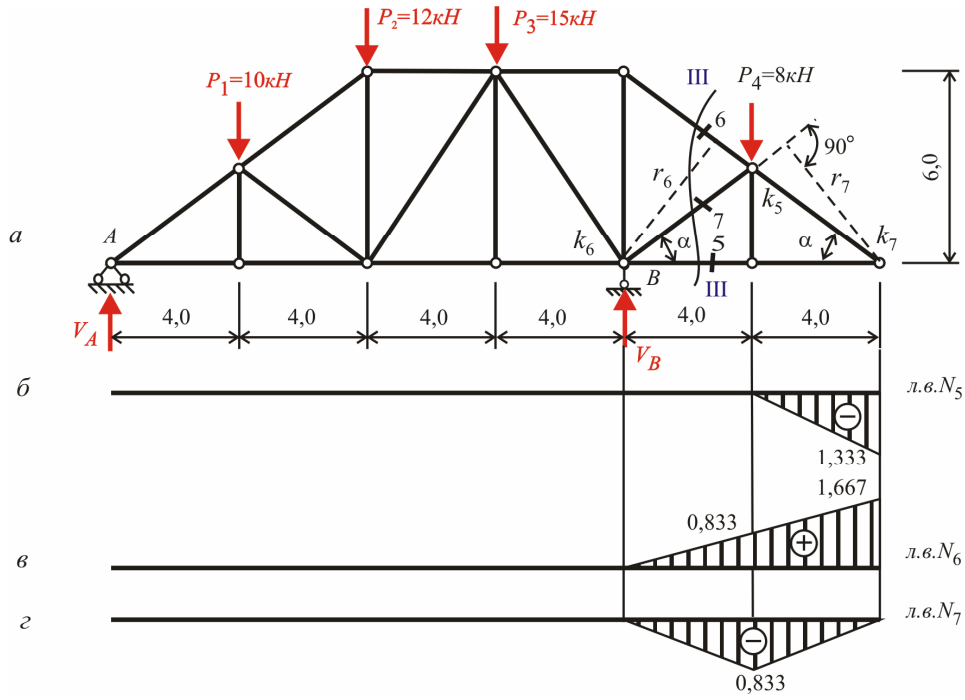


Рис.23.9

Побудова ліній впливу

Переріз I-I (рис.23.8,а)	
Сила $P=1$ на лівому диску	Сила $P=1$ на правому диску
$\sum M_{k1} = 0 \Rightarrow N_1 \cdot 6 - V_B \cdot 8 = 0 \Rightarrow N_1 = 0,667 V_B.$	$\sum M_{k1} = 0 \Rightarrow -N_1 \cdot 6 - V_A \cdot 12 = 0 \Rightarrow N_1 = 2 V_A.$
$\sum F_y = 0 \Rightarrow -N_2 \cos \beta + V_B = 0 \Rightarrow N_2 = \frac{1}{\cos \beta} V_B.$ $\cos \beta = 0,8320 \Rightarrow N_2 = 1,202 V_B.$	$\sum F_y = 0 \Rightarrow N_2 \cos \beta + V_A = 0 \Rightarrow N_2 = -\frac{1}{\cos \beta} V_A \Rightarrow N_2 = -1,202 V_A.$
$\sum M_{k3} = 0 \Rightarrow -N_3 \cdot 6 - V_B \cdot 8 = 0 \Rightarrow N_3 = -1,333 V_B.$	$\sum M_{k3} = 0 \Rightarrow N_3 \cdot 6 + V_A \cdot 8 = 0 \Rightarrow N_3 = -1,333 V_A.$

Переріз II-II (рис.23.8,а)	
Сила $P=1$ поза вузлом	Сила $P=1$ у вузлі
$\sum F_x = 0 \Rightarrow N_3 - N_8 \cos \alpha = 0 \Rightarrow N_8 = \frac{1}{\cos \alpha} N_3.$ $\sum F_y = 0 \Rightarrow -N_4 - N_8 \sin \alpha = 0 \Rightarrow N_4 = -N_8 \sin \alpha = -N_3 \operatorname{tg} \alpha \Rightarrow N_4 = -0,75 N_3.$	$\sum F_x = 0 \Rightarrow N_3 - N_8 \cos \alpha = 0 \Rightarrow N_8 = \frac{1}{\cos \alpha} N_3.$ $\sum F_y = 0 \Rightarrow -N_4 - N_8 \sin \alpha - 1 = 0 \Rightarrow N_4 = -N_8 \sin \alpha - 1 = -N_3 \operatorname{tg} \alpha - 1.$ $\Rightarrow N_4 = -0,75 N_3 - 1 \Rightarrow N_4 = -0,75(-0,667) - 1 = -0,5.$

Переріз III-III (рис.23.9,а)	
Сила $P=1$ на лівому диску	Сила $P=1$ на правому диску
$\sum M_{k_5} = 0 \Rightarrow N_5 \cdot 3 = 0 \Rightarrow N_5 = 0.$	$\sum M_{k_5} = 0 \Rightarrow N_5 \cdot 3 + 1 \cdot (4 - x) = 0 \Rightarrow N_5(x) = -\frac{4 - x}{3}.$ <p>При $x = 0$ $N_5(0) = -1,333.$ При $x = 4$ $N_5(4) = 0.$</p>

$\sum M_{k6} = 0 \Rightarrow -N_6 \cdot r_6 = 0 \Rightarrow N_6 = 0.$	$\sum M_{k6} = 0 \Rightarrow -N_6 \cdot r_6 + 1 \cdot (8-x) = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow N_6(x) = \frac{8-x}{r_6} = \frac{8-x}{4,8}.$ <p>При $x=0$ $N_6(0) = 1,667.$ При $x=4$ $N_6(0) = 0,833.$</p>
$\sum M_{k7} = 0 \Rightarrow -N_7 \cdot r_7 = 0 \Rightarrow N_7 = 0.$	$\sum M_{k7} = 0 \Rightarrow -N_7 \cdot r_7 - 1 \cdot x = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow N_7(x) = -\frac{x}{r_7} = -\frac{x}{4,8}.$ <p>При $x=0$ $N_7(0) = 0.$ При $x=4$ $N_7(0) = -0,833.$</p>

Навантаження ліній впливу

Визначаємо навантаження в позначених стержнях ферми від заданих нерухомих сил за допомогою побудованих ліній впливу. Для навантаження ліній впливу скористаємось формулою (22.4), яка була отримана в [п.22.3](#).

$$N_1 = 10 \cdot 0,167 + 12 \cdot 0,333 + 15 \cdot 0,5 + 8 \cdot (-0,5) = 9,17 \text{ кН};$$

$$N_2 = 10 \cdot (-0,3) + 12 \cdot (0,601) + 15 \cdot 0,3 + 8 \cdot (-0,3) = -8,1 \text{ кН};$$

$$N_3 = 10 \cdot (-0,333) + 12 \cdot (-0,667) + 15 \cdot (-0,333) + 8 \cdot (-0,3) = -13,67 \text{ кН};$$

$$N_4 = 10 \cdot 0,25 + 12 \cdot (-0,5) + 15 \cdot 0,25 + 8 \cdot (-0,25) = -1,75 \text{ кН};$$

$$N_5 = 8 \cdot 0 = 0;$$

$$N_6 = 8 \cdot 0,833 = 6,664 \text{ кН};$$

$$N_7 = 8 \cdot (-0,833) = -6,664 \text{ кН}.$$

23.3.2. Шпренгельна ферма

Визначити найбільше за абсолютною величиною зусилля в стержні 8–9 шпренгельної ферми ([рис.23.10,а](#)), яке спричиняється рухом системи сил (колона вантажівок), представленої на [рис.23.10,б](#)).

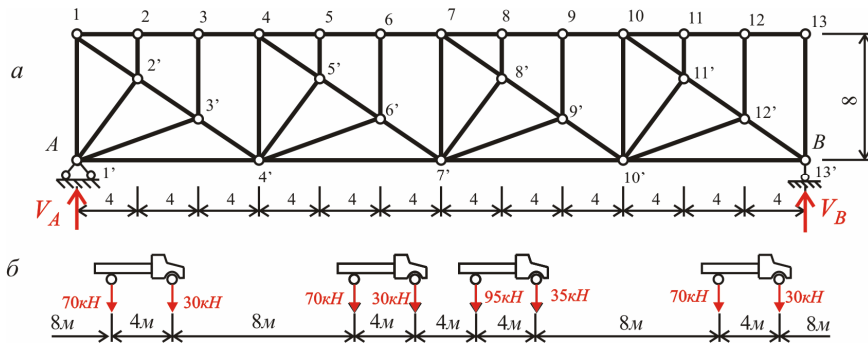


Рис.23.10

Побудова лінії впливу

Стержень 8–9 шпренгельної ферми (рис.23.11,а) є стержнем першої категорій, зусилля в якому дорівнює зусиллю в стержні 7–10 основної ферми (рис.23.11,б). Тому можна вважати, що лінію впливу N_{8-9} можна побудувати як лінію впливу зусилля N_{7-10} основної ферми.

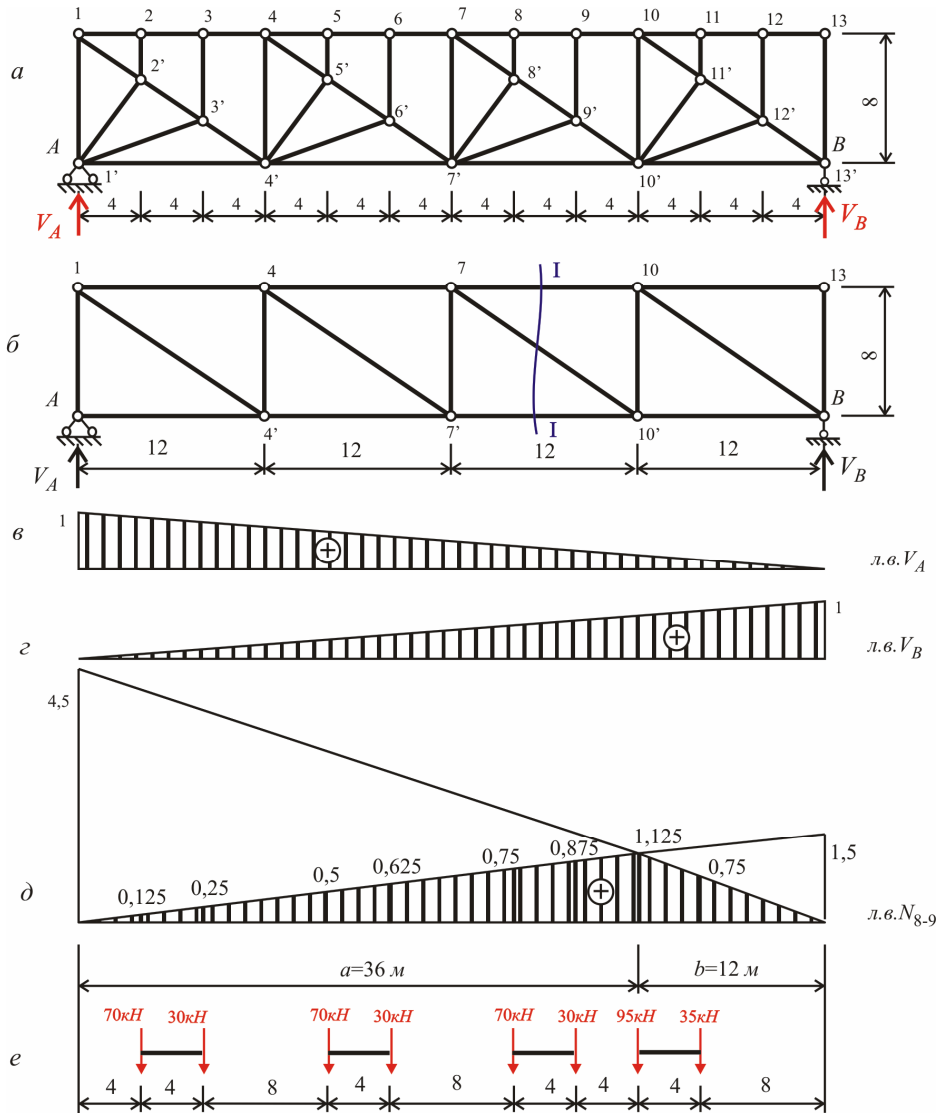


Рис.23.11

Лінії впливу опорних реакцій V_A і V_B представлені відповідно на [рис.23.11,в](#) та [23.11,г](#).

Переріз I-I поділяє основну ферму на два диска, з умов рівноваги яких визначимо зусилля N_{7-10} для двох випадків розташування одиничної рухомої сили: сила в межах лівого та сила в межах правого диска.

Сила $P=1$ на лівому диску	Сила $P=1$ на правому диску
$\sum M_7 = 0 \Rightarrow N_{10'-7} \cdot 8 - V_B \cdot 24 = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow N_{10'-7} = 3V_B.$	$\sum M_7 = 0 \Rightarrow N_{7'-10} \cdot 8 - V_A \cdot 24 = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow N_{7'-10} = 3V_A.$

Лінія впливу побудована на [рис.23.11,д](#).

Визначення найбільшого за величиною зусилля $N_{8,9}$

Установимо систему рухомих сил в положення, при якому найбільша за величиною сила розташована під найбільшою ординатою лінії впливу. Перевіримо, чи виконується система нерівностей (22.9), яка наведена в [п.22.3](#).

Згідно до [рис.23.11,е](#) можна записати:

$$a = 36 \text{ м}, \quad b = 12 \text{ м};$$

$$R_{\text{лів}} = 300 \text{ кН}, \quad R_{\text{прав}} = 35 \text{ кН}, \quad P_{\text{кр}} = 95 \text{ кН}.$$

Отже, маємо

$$\frac{300 + 95}{36} = 10,972 > \frac{35}{12} = 2,917.$$

$$\frac{300}{36} = 8,333 < \frac{35 + 95}{12} = 10,833.$$

Обидві нерівності справедливі. Таким чином, прийняте розташування системи сил є таким, що зусилля N_{8-9} сягає найбільшої за модулем величини:

$$N_{8-9}^{\text{max}} = 70 \cdot 0,125 + 30 \cdot 0,25 + 70 \cdot 0,5 + 30 \cdot 0,625 + 70 \cdot 0,75 +$$

$$+ 30 \cdot 0,875 + 95 \cdot 1,125 + 35 \cdot 0,75 = 281,875 \text{ кН}.$$