

Виберіть форму подання навчального матеріалу

✓ [Докладне подання](#)

[Скорочене подання](#)

2. Кінематичний аналіз і основи статичного розрахунку

Зміст глави

[2.1. Основні поняття кінематичного аналізу](#)

[2.1.1. Геометрично незмінювані розрахункові схеми](#)

[2.1.2. Геометрично змінювані розрахункові схеми](#)

[2.1.3. Миттєво змінювані розрахункові схеми](#)

[2.2. Конструктивні елементи розрахункових схем](#)

[2.2.1. Диски](#)

[2.2.2. З'єднувальні пристрої](#)

[2.2.3. Зв'язок між простими з'єднувальними пристроями](#)

[2.2.4. Опорні пристрої](#)

[2.3. Кількісний етап кінематичного аналізу](#)

[2.4. Якісний \(структурний\) етап кінематичного аналізу](#)

[2.4.1. Приєднання шарнірного вузла до диска \(спосіб “діад”\)](#)

[2.4.2. З'єднання двох дисків](#)

[2.4.3. З'єднання трьох дисків \(спосіб шарнірного трикутника\)](#)

[2.5. Послідовність виконання кінематичного аналізу](#)

[2.6. Приклади кінематичного аналізу розрахункових схем споруд](#)

[2.7. Статичний метод розрахунку](#)

[2.7.1. Визначення реакцій в'язей – зовнішня задача](#)

[2.7.2. Визначення зусиль в елементах споруди – внутрішня задача](#)

[2.8. Кінематичний метод](#)

[2.9. Матриця рівнянь рівноваги](#)

2.10. Особливості роботи геометрично змінюваних систем

Запитання для самоперевірки

2.1. Основні поняття кінематичного аналізу

Кожна споруда впродовж її експлуатації повинна зберігати свою первісну форму та положення при дії на неї будь-яких зовнішніх навантажень. Незначні зміни розмірів споруди та її елементів можуть відбуватись лише за рахунок їх деформації.

Дослідження відповідності споруди цій вимозі виконується за допомогою кінематичного аналізу. До того ж у багатьох випадках кінематичний аналіз споруди дозволяє визначити найбільш раціональну послідовність її розрахунку. Зазначимо, що під “спорудою” мається на увазі її розрахункова схема.

Усі сили, що діють на споруду, можна поділити на зовнішні та внутрішні. До зовнішніх належать як безпосередньо діючі на споруду навантаження, так і реакції опор, що прикріплюють її до землі. Всі сили, які виникають у тілі елементів і у в'язях, що з'єднують ці елементи, при розгляді всієї споруди вважаються внутрішніми силами.

Статичний розрахунок споруд полягає у визначенні сил, які виникають в її елементах під впливом різних прикладених до цієї споруди зовнішніх дій – навантажень.

Між тим, під час розрахунку споруд, які складаються з кількох елементів (дисків), виявляється зручнішим, а іноді й конче необхідним, розглядати окремі їх елементи або групи елементів. У такому випадку реакції в'язей, які з'єднують окремі елементи чи їх групи з відокремленою від них частиною споруди, також вважаються зовнішніми силами.

Проблему статичного розрахунку можна, таким чином, розділити на дві задачі:

1. Визначення реакцій в'язей, що виникають між елементами споруд, в тому числі й реакцій опорних пристроїв – **зовнішня задача.**
2. Визначення внутрішніх сил, до яких належать інтегральні характеристики напружень, що виникають в елементах споруди в процесі їхнього деформування, – **внутрішня задача.**

Зауважимо, що внутрішні сили в поперечному перерізі стержня можна розглядати також як реакції в'язей, якщо умовно вважати, що стержень складається з двох частин, розташованих по обидві сторони від цього перерізу, які з'єднуються за допомогою припайки.

У цій главі розглядається кінематичний аналіз і основи статичного розрахунку плоских стержневих систем.

2.1.1. Геометрично незмінювані розрахункові схеми

Геометрично незмінюваними розрахунковими схемами є такі, що не змінюють свого положення та форми, якщо припустити, що їхні елементи виготовлені з абсолютно твердого матеріалу (такого, що не деформується).

Приклад найпростішої геометрично незмінюваної системи у вигляді шарнірного трикутника наведено на рис.2.1. Справді, якщо стержні AB , AC і BC не деформуються, зміна положення шарніра C стосовно шарнірів A і B можлива лише за рахунок повороту стержнів AC і BC довкола шарнірів A і B , що неможливо через відсутність спільної ділянки шляху відповідних дуг.

2.1.2. Геометрично змінювані розрахункові схеми

Геометрично змінюваними розрахунковими схемами називаються такі, що можуть істотно змінити свою форму, якщо навіть припустити, що їх елементи виготовлено з абсолютно твердого матеріалу.

Приклад найпростішої геометрично змінюваної системи у вигляді шарнірного чотирикутника показано на рис.2.2. Пунктиром показано нову форму, яку може одержати розрахункова схема без будь-яких змін у розмірах її елементів.

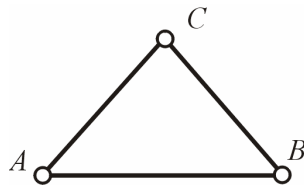


Рис.2.1



Рис.2.2

2.1.3. Миттєво змінювані розрахункові схеми

До миттєво змінюваних відносять такі розрахункові схеми, точки яких здатні переміщуватись без зміни геометричних розмірів їх елементів з точністю до малих вищого порядку.

Насправді, у миттєво змінюваній системі, зображеній на рис.2.3, дуги AC і BC , за якими можуть повернутись відповідні стержні довкола шарнірів A і B , мають спільну дотичну, і тому точка C може переміститися по вертикалі на деяку відстань без істотної зміни довжин цих стержнів.

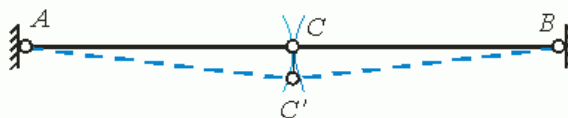


Рис.2.3

Як показано далі, розв'язання рівнянь для визначення зусиль в миттєво змінюваних системах призводить до одержання нескінченних або невизначених значень.

2.2. Конструктивні елементи розрахункових схем

Розрахункова схема споруди складається з конструктивних елементів, які можна поділити на два види: диски та з'єднувальні пристрої.

2.2.1. Диски

Диском може бути названо будь-який елемент чи частину розрахункової схеми, якщо задалегідь задана або доведена її геометрична незмінюваність. Диском можна назвати й усю систему, якщо вона напевно геометрично незмінювана.

Особливо слід відзначити поняття **простого диска**, до якого відносять геометрично незмінювану плоску однозв'язну фігуру, тобто таку фігуру, всі границі якої можна "обійти" вздовж однієї неперервної лінії, не перетинаючи тіло фігури.

На рис.2.4 зображено приклади простих плоских дисків, де пунктирними лініями показано неперервні лінії "обходу" їхніх границь. Окремими випадками простих плоских дисків є прямолінійний (рис.2.4,в), криволінійний (рис.2.4,г) і ламаний (рис.2.4,д) стержні, а також диск нескінченно малих розмірів, або матеріальна точка (рис.2.4,е).

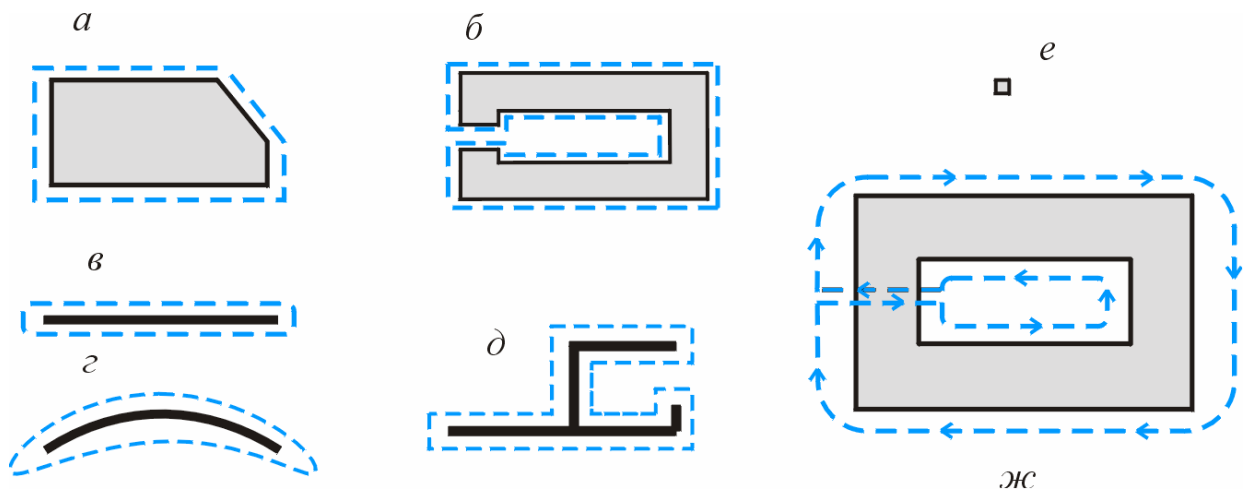


Рис.2.4

На рис.2.4,ж зображено диск, який не можна вважати простим, оскільки він не є однозв'язним. Насправді, і це випливає з рисунка, можна "обійти" всі його границі (і зовнішні і внутрішні), лише перетнувши його тіло хоча б один раз.

Простий плоский диск скінченних розмірів має три, а матеріальна точка – два **ступня вільності**. Нагадаємо, що ступнем вільності диска або системи дисків називається кількість незалежних геометричних параметрів, що визначають положення диска (системи дисків) стосовно будь-якої системи координат.

Кількість ступнів вільності диска або системи дисків характеризується кількістю незалежних переміщень (лінійних чи кутових), які можуть здійснювати елементи системи або вся система

стосовно системи координат. Можливість цих переміщень може бути усунена за допомогою з'єднувальних пристроїв.

2.2.2. З'єднувальні пристрої

З'єднувальний пристрій (з'єднання) – це елемент розрахункової схеми споруди, який певним чином обмежує взаємне переміщення дисків, що з'єднуються цим пристроєм, зменшуючи її ступінь вільності.

Водночас кожен з'єднувальний пристрій має певні статичні властивості, що характеризуються кількістю та видом реактивних сил, що виникають у ньому.

У плоских розрахункових схемах застосовують такі основні типи з'єднань: кінематичну в'язь, циліндричний шарнір, муфту, припайку.

Кінематична в'язь з'єднує два диски (елементи C_1 , C_2 і C_3 на рис.2.5,а,б,в) та перешкоджає поступальному переміщенню одного диска стосовно другого у напрямку осі, що проходить через точки шарнірного приєднання в'язі до дисків. Тобто в'язь усуває один ступінь вільності, проте допускає взаємний поворот Δ_1 дисків та взаємне поступальне переміщення Δ_2 по нормалі до осі цієї в'язі.

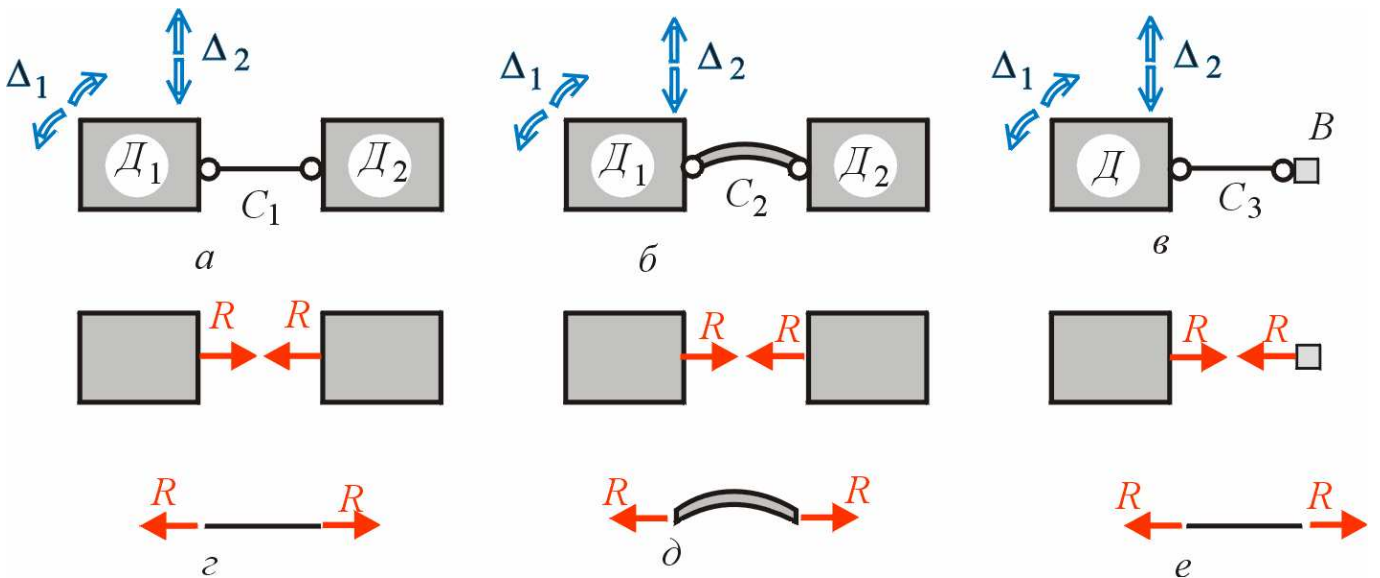


Рис.2.5

У кінематичній в'язі виникає реактивна сила (реакція) R , лінія дії якої проходять вздовж осі в'язі (рис.2.5,г,д,е).

Простий циліндричний шарнір ($Ш_1$ на рис.2.6,а) з'єднує два диски, усуваючи можливість їхніх взаємних поступальних переміщень. Але він допускає їх взаємний поворот Δ стосовно осі, яка проходить через центр шарніра. Отже, це з'єднання зменшує кількість незалежних параметрів руху дисків на два, тобто усуває два ступні вільності.

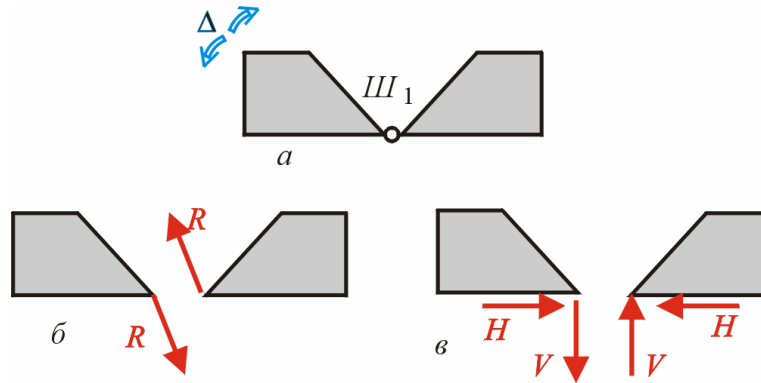


Рис.2.6

Реакція R (рис.2.6,б) у циліндричному шарнірі являє собою силу, яка проходить через його центр, але має заздалегідь невідомий напрямок, який може бути визначений у подальшому розрахунку. При аналітичному розрахунку її звичайно замінюють на дві складові V і H , які зручно обрати взаємно ортогональними (рис.2.6,в).

Муфта (M_i на рис.2.7,а) допускає лише одне взаємне переміщення – поступальне переміщення Δ двох дисків уздовж фіксованої прямої. Це з'єднання зменшує кількість незалежних параметрів руху дисків на два, тобто усуває два ступні вільності.

Реакція в муфті представляє силу R , нормальну до напрямку можливого взаємного поступального переміщення дисків і розміщену з ексцентриситетом e стосовно центра муфти O (рис.2.7,б). Звичайно цю реакцію замінюють на дві складові – силу R_1 і момент M , віднесши їх до центра муфти O (рис.2.7,в).

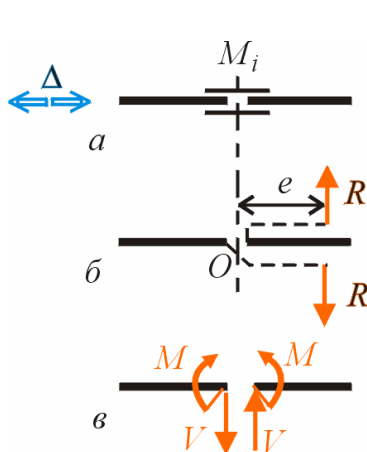


Рис.2.7

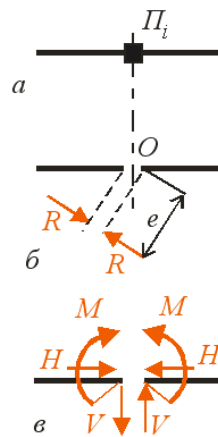


Рис.2.8

Проста припайка (Π_i на рис.2.8,а) повністю виключає взаємні поступальні та кутові переміщення двох дисків, які нею з'єднуються. Це з'єднання зменшує кількість незалежних параметрів руху дисків на три, тобто усуває три ступні вільності.

Реакція в припайці – це сила R , лінія дії та ексцентриситет e якої стосовно центра припайки O заздалегідь невідомі (рис.2.8,б). Цю реакцію зручно замінювати на три складові, віднесені до центра припайки O : двох взаємно перпендикулярних сил V і H , а також моменту M (рис.2.8,в).

2.2.3. Зв'язок між простими з'єднувальними пристроями

Між різними простими з'єднаннями існує взаємний зв'язок, який, якщо це необхідно або зручно для проведення аналізу, надає змогу замінювати одні з'єднання іншими, не змінюючи при цьому їх кінематичні та статичні властивості.

Так, простий циліндричний шарнір $Ш_{1,2}$ (рис.2.9,а), що усуває два взаємних поступальних переміщення дисків $Д_1$ і $Д_2$, можна замінити на дві кінематичні в'язі C_1 і C_2 (рис.2.9,б), що перетинаються в центрі шарніра, що замінюється.

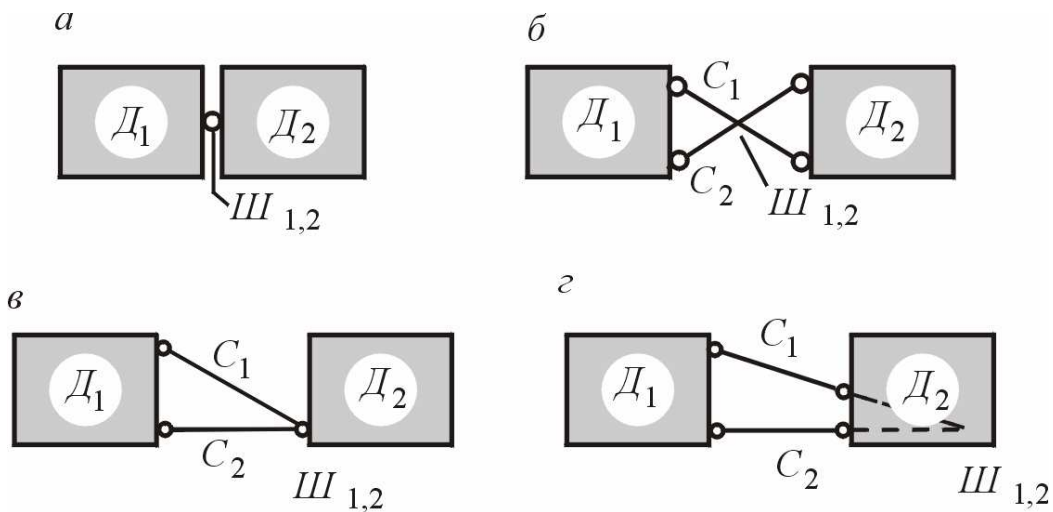


Рис.2.9

Навпаки, будь-які дві кінематичні в'язі C_1 і C_2 , які з'єднують пару дисків $Д_1$ і $Д_2$, можуть розглядатись як циліндричний шарнір $Ш_{1,2}$, розташований в точці перетину цих в'язей (рис.2.9,в,г). Такий уявний шарнір називають **фіктивним**.

Муфту $M_{1,2}$ (рис.2.10,а) може бути замінено на дві паралельні кінематичні в'язі C_1 і C_2 , осі яких перпендикулярні до можливого взаємного переміщення з'єднаних дисків $Д_1$ і $Д_2$ (рис.2.10,б). Очевидно, це з'єднання може розглядатись також як фіктивний шарнір, розташований на перетині паралельних в'язей C_1 і C_2 , тобто на нескінченному віддаленні.

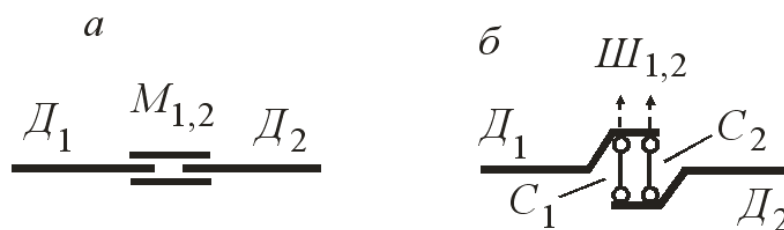


Рис.2.10

Просту припайку $\Pi_{1,2}$ (рис.2.11,а) можна замінити на три кінематичні в'язі C_1, C_2 і C_3 , осі яких не паралельні та не перетинаються в одній точці (рис.2.11,б), або на шарнір $\text{Ш}_{1,2}$ і кінематичну в'язь $C_{1,2}$, що не проходить через центр шарніра $\text{Ш}_{1,2}$ (рис.2.11,в).

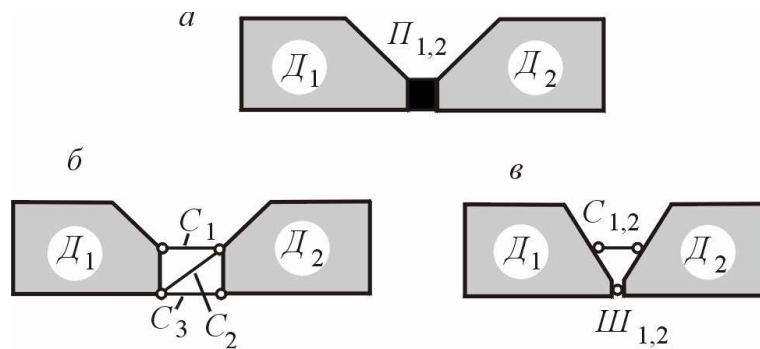


Рис.2.11

У розрахункових схемах споруд, окрім розглянутих простих з'єднувальних пристроїв, використовуються також **складні, або кратні шарніри** та **складні, або кратні припайки**.

Складним (кратним) вважається шарнір, що з'єднує більш ніж два диски. Такий шарнір може бути замінено на прості шарніри, кількість яких на одиницю менша від кількості з'єднаних дисків. Наприклад, складний шарнір Ш_i на рис.2.12,а, що з'єднує чотири диски D_1, D_2, D_3 і D_4 , еквівалентний трьом простим шарнірам.

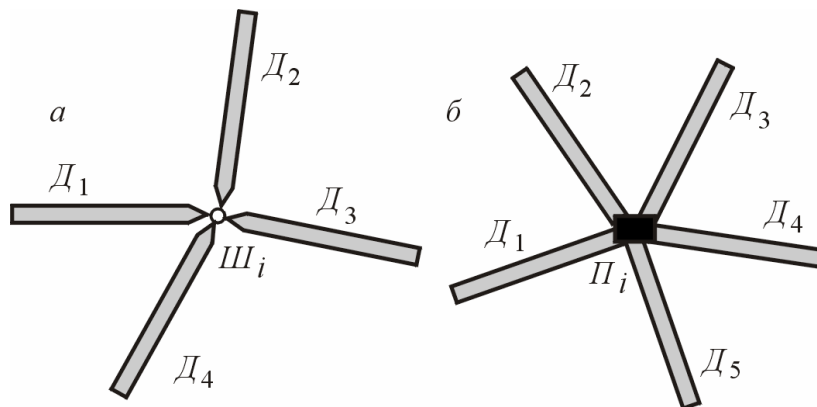


Рис.2.12

Аналогічно визначається складна (кратна) припайка. Так, на рис.2.12,б зображено складну припайку Π_i , що еквівалентна чотирьом простим припайкам.

2.2.4. Опорні пристрої

Якщо з'єднувальний пристрій приєднує споруду чи якийсь її елемент до опорного диска –“землі”, кажуть, що такий пристрій є опорним, або опорою. В плоских розрахункових схемах застосовують такі **типи опорних пристроїв (опор)**: **шарнірно-рухому** опору (рис. 2.13,а), яка еквівалентна простій кінематичній в'язі; **шарнірно-нерухому** опору (рис.2.13,б), що відповідає

простому циліндричному шарніру; **повзун** (рис.2.13,в), ідентичний до муфти, та **жорстке затиснення** (рис.2.13,г), яке є простою припайкою.

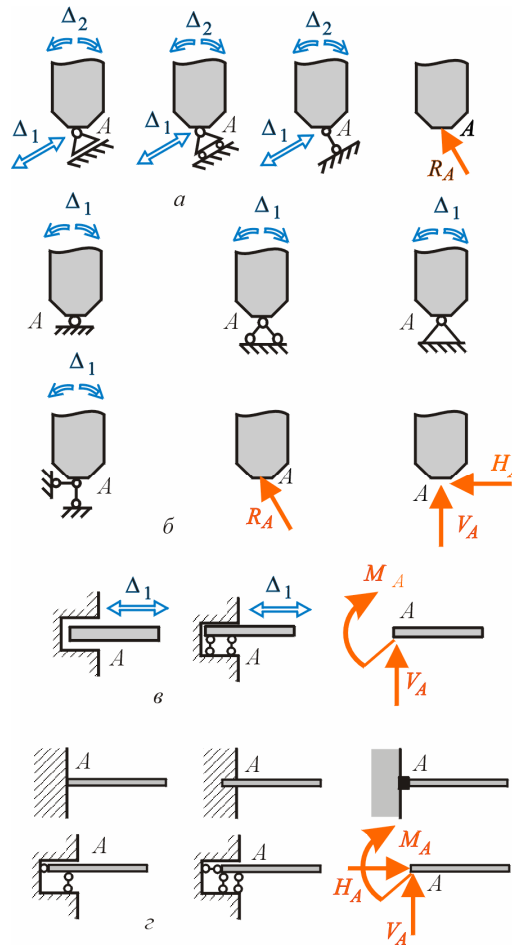


Рис.2.13

На наведених для кожної опори схемах показано різні способи їх зображення в розрахункових схемах, їхні кінематичні властивості, тобто можливі складові переміщень стосовно “землі”, та їхні статичні властивості, тобто складові реакцій, які передаються на елементи споруди з боку “землі”.

2.3. Кількісний етап кінематичного аналізу

Як уже зазначалось, з погляду кінематичного аналізу кожна споруда складається з дисків і матеріальних точок. Вони мають певну кількість ступнів вільності і з'єднувальних пристроїв, що обмежують можливості взаємних переміщень дисків, усуваючи відповідну кількість ступнів вільності.

Кількісний етап має за мету визначення кількості ступнів вільності всієї розрахункової схеми, тобто сумарної кількості ступнів вільності (кількість незалежних параметрів руху), які визначають положення елементів системи стосовно якоїсь нерухомої системи координат. Цю величину називають **ступнем геометричної змінюваності** системи.

Виходячи з викладених кінематичних властивостей елементів розрахункової схеми споруди, можна записати формулу (модифікацію формули Чебишова) для визначення ступня геометричної змінюваності Γ системи:

$$\Gamma = 3D + 2B - 3\Pi - 2Ш - C - 3, \quad (2.1)$$

де D – кількість простих дисків, включаючи опорний диск “землю”, якщо система прикріплена до неї; B – кількість вузлів в’язей, тобто кількість матеріальних точок (рис.2.14,а), тобто точок, в яких з’єднуються тільки кінематичні в’язі (рис.2.14,б); Π – кількість простих припайок; $Ш$ – кількість простих шарнірів; C – кількість простих в’язей (стержнів); 3 (три) – число ступнів вільності всієї плоскої розрахункової схеми як твердого тіла на площині.

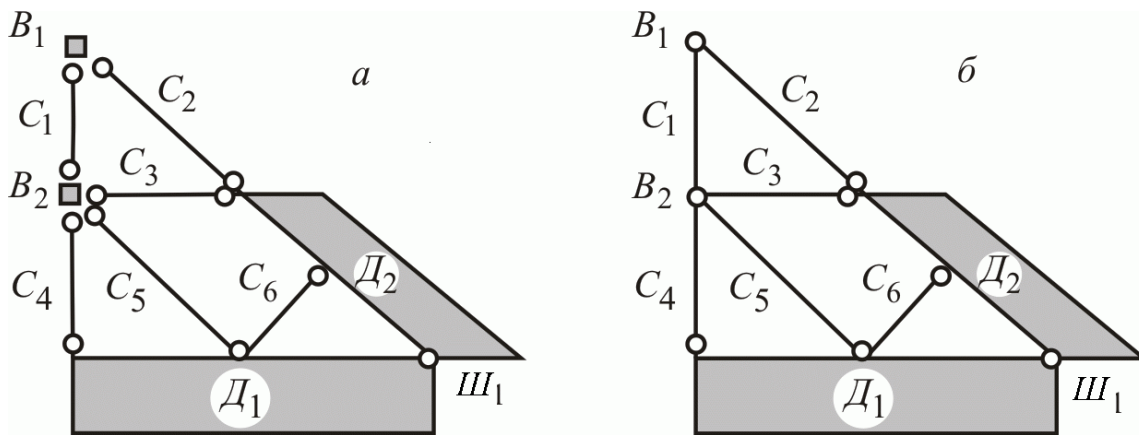


Рис.2.14

Опорні пристрої приймаються в формулі відповідно до еквівалентних з’єднувальних пристроїв. Складні шарніри та припайки зараховуються як відповідна до них кількість простих шарнірів і припайок.

Ступінь геометричної змінюваності розрахункової схеми, обчислену за формулою (2.1), дає змогу визначити її кінематичну характеристику:

– Якщо $\Gamma > 0$, розрахункова схема споруди безперечно є геометрично змінюваною. Цей результат засвідчує, що з’єднувальних пристроїв не вистачає для усунення можливості переміщень, які можуть робити окремі елементи системи або вся система в цілому.

Якщо $\Gamma \leq 0$, можна стверджувати, що виконується необхідна умова геометричної незмінюваності розрахункової схеми, бо з’єднувальні пристрої можуть забезпечити нерухомість усіх елементів і системи в цілому. Проте з’єднувальні пристрої можуть бути встановлені в такий спосіб, що в одних зонах конструкції кількість їх надмірна, а в інших – недостатня. Скажімо, дві розрахункові схеми, зображені на рисунках 2.15,а і 2.15,б, мають однакову кількість всіх елементів, і для обох систем обчислення за (2.1) досягається результат $\Gamma = 0$.

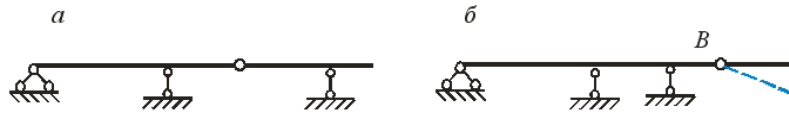


Рис.2.15

Проте очевидно, що система на рис.2.15,а геометрично незмінювана, а система на рис.2.15,б геометрично змінювана, оскільки правий її диск може повернутись довкола шарніра B . У деяких випадках розташування з'єднувальних пристроїв може приводити до появи миттєвого центра взаємного обертання елементів системи.

Таким чином, при $\Gamma \leq 0$ розрахункова схема може бути або геометрично незмінюваною, або геометрично змінюваною, або, нарешті, миттєво змінюваною залежно від розташування дисків і з'єднань. Належність до конкретного типу остаточно встановлюється на підставі виконання якісного етапу аналізу розрахункової схеми.

2.4. Якісний (структурний) етап кінематичного аналізу

Якісний (структурний) етап аналізу розрахункової схеми полягає у визначенні послідовності та способів утворення системи з елементів. З'єднання всієї системи або її фрагментів повинно виконуватись відповідно до способів правильного з'єднання елементів у геометрично незмінювані системи.

Далі наведені основні способи утворення найпростіших геометрично незмінюваних плоских систем при використанні **мінімальної** кількості з'єднувальних пристроїв. Для зручності подальшого викладу надамо цим способам певні назви.

При поданні цих способів і прикладів структурного аналізу зручно використовувати умовну “формулу”, яка буде розміщуватись поруч з відповідною схемою з'єднання. Така “формула” виглядає як дріб, де в чисельнику міститься перелік з'єднаних елементів, а у знаменнику – перелік з'єднувальних пристроїв, а після символу \Rightarrow – позначення нового укрупненого диска. Якщо з'єднання виконано за допомогою фіктивного шарніра, в знаменнику подається найменування двох в'язей, що утворюють цей шарнір, із символом “ \times ” між ними.

2.4.1. Приєднання шарнірного вузла до диска (спосіб “діад”)

Шарнірний вузол (матеріальну точку) B можна приєднати до диска D за допомогою двох кінематичних в'язей C_1 і C_2 , що не лежать на одній прямій (рис. 2.16,а). Якщо в'язі C_1 і C_2 розташовані на одній прямій (рис.2.16,б), утворюється, так звана, миттєво змінювана система, яку не можна використовувати в будівництві.

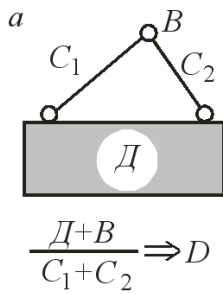


Рис.2.16

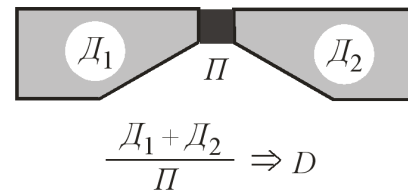
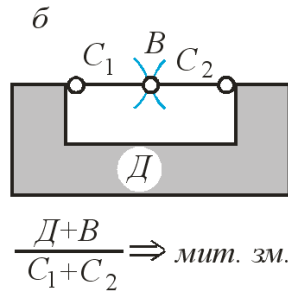


Рис.2.17

З'єднання трьох кінематичних в'язей трьома шарнірами (див.рис.2.1) можна розглядати як спосіб “діад”, якщо одну кінематичну в'язь, наприклад *AB*, розглядати як диск, до якого двома в'язями приєднується вузол *C*.

2.4.2. З'єднання двох дисків

Зручно розглядати три способи приєднання одного диска до іншого, хоча використання відповідності між різними з'єднувальними пристроями дає змогу привести їх один до одного.

За **способом припайки** два диски D_1 і D_2 можуть бути з'єднані між собою за допомогою припайки *П* (рис.2.17).

Спосіб Полонсо полягає в тому, що два диски D_1 і D_2 можна з'єднати шарніром *Ш* і кінематичною в'яззю *C*, що не проходить через центр шарніра *Ш* (рис.2.18,а). Якщо в'язь *C* проходить через центр шарніра *Ш* (рис.2.18,б), одержана таким чином система є миттєво змінюваною.

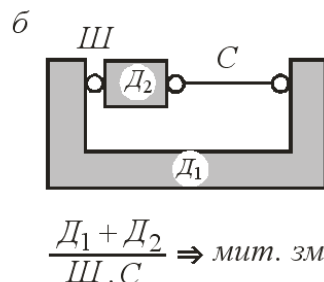
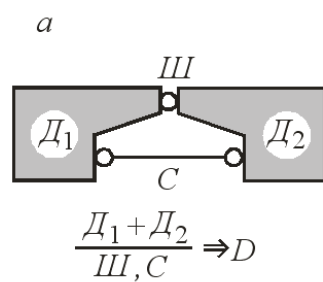


Рис.2.18

Як спосіб Полонсо можна трактувати попарне з'єднання трьох кінематичних в'язей трьома шарнірами (див.рис.2.1): два диски *AC* і *BC* з'єднуються кінематичною в'яззю *AB* та шарніром *C*.

Спосіб Шухова передбачає, що два диски D_1 і D_2 можуть бути з'єднані трьома кінематичними в'язями C_1 , C_2 і C_3 , які не перетинаються в одній точці, а отже, й не паралельні між собою (рис.2.19,а). Якщо три з'єднувальні в'язі C_1 , C_2 і C_3 одночасно перетинаються в одній точці *O* (рис.2.19,б) або всі вони паралельні одна щодо одної (рис.2.19,в), то утворена система буде миттєво змінюваною.

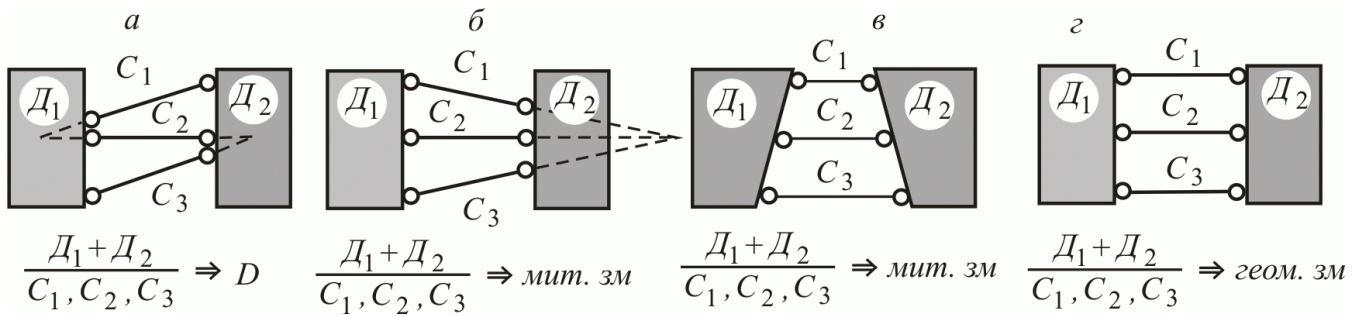


Рис.2.19

В останньому випадку якщо в'язі C_1 , C_2 і C_3 матимуть однакову довжину, система двох дисків буде геометрично змінюваною (рис.2.19,г).

2.4.3. З'єднання трьох дисків (спосіб шарнірного трикутника)

Три диски D_1 , D_2 і D_3 можна з'єднати за допомогою трьох шарнірів (реальних або фіктивних) $Ш_{1,2}$, $Ш_{1,3}$ і $Ш_{2,3}$, які не лежать на одній прямій (рис.2.20,а). Причому фіктивні шарніри (але не більш, ніж два з них) можуть бути і нескінченно віддаленими.

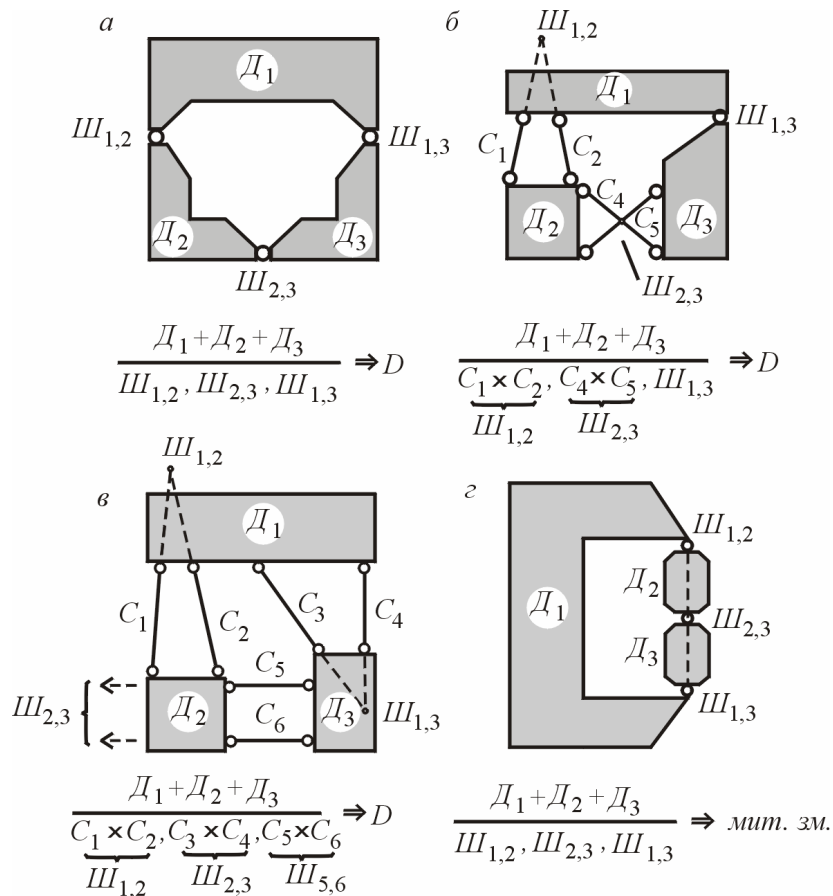


Рис.2.20

Так, усі три шарніри $Ш_{1,2}$, $Ш_{1,3}$ і $Ш_{2,3}$, які з'єднують три диски D_1 , D_2 і D_3 на рис.2.20,а, є дійсними. На рис.2.20,б диски D_1 і D_3 з'єднані дійсним шарніром $Ш_{1,3}$, диски D_1 і D_2 – фіктивним

шарніром $Ш_{1,2}$, розташованим у точці перетину в'язей C_1 і C_2 , що його утворили, а диски D_2 і D_3 – фіктивним шарніром $Ш_{2,3}$, утвореним в'язями C_3 і C_4 і розташованим на їх перетині. На рис.2.20,в всі три з'єднувальних шарніри є фіктивними: диски D_1 і D_2 з'єднані в'язями C_1 і C_2 , що утворюють шарнір $Ш_{1,2}$, розташований на їх перетині, в'язі C_3 і C_4 з'єднують диски D_1 і D_3 і утворюють на своєму перетині шарнір $Ш_{1,3}$, шарнір $Ш_{2,3}$, що з'єднує диски D_2 і D_3 через в'язі C_5 і C_6 , нескінченно віддалений.

Якщо три шарніри $Ш_{1,2}$, $Ш_{1,3}$ і $Ш_{2,3}$, дійсні чи фіктивні, розташовані на одній прямій (рис. 2.20,г) або всі нескінченно віддалені, то кажуть, що система з трьох дисків D_1 , D_2 і D_3 є миттєво змінюваною.

2.5. Послідовність виконання кінематичного аналізу

Виконання кінематичного аналізу розрахункової схеми споруди можна поділити на три етапи.

- **Кількісний аналіз.** На цьому етапі за допомогою формули Чебишова (2.1) обчислюють ступінь геометричної змінюваності розрахункової схеми споруди. Якщо одержано результат $\Gamma > 0$, можна відразу, не виконуючи другого етапу аналізу, дійти висновку щодо геометричної змінюваності розрахункової схеми внаслідок недостатньої кількості з'єднувальних пристроїв. Якщо $\Gamma \leq 0$, можна зробити попередній висновок, що необхідна умова геометричної незмінюваності системи задовільняється, тобто, інакше кажучи, система може бути геометрично незмінюваною. В цьому випадку треба перейти до виконання наступного етапу аналізу.
- **Якісний (структурний) аналіз** полягає в дослідженні послідовності з'єднання елементів відповідно до викладених вище способів утворення найпростіших геометрично незмінюваних систем. Якщо встановлено, що якісь два чи три елементи з'єднані правильно за одним із цих способів, такий фрагмент системи можна розглядати як новий укрупнений диск та використовувати сукупно з іншими елементами для утворення нових геометрично незмінюваних фрагментів. Цей процес потрібно продовжувати доти, поки не буде проаналізоване приєднання всіх елементів розрахункової схеми споруди.
- **Остаточний висновок про геометричну незмінюваність, геометричну або миттєву змінюваність розрахункової схеми споруди.** Якщо доведено правильне приєднання всіх елементів системи, вся розрахункова схема може вважатись геометрично незмінюваною. Якщо виявляється, що для з'єднання одних елементів використані зайві пристрої, а для інших їх бракує, всю розрахункову схему вважають геометрично змінюваною. Якщо ж хоча б одне

з'єднання виконується за винятком з якогось способу, що відповідає миттєвій змінюваності фрагмента, розрахункова схема вважається миттєво змінюваною.

Таким чином, для геометричної незмінюваності плоскої розрахункової схеми споруди необхідне задоволення двох умов: необхідна умова – $\Gamma \leq 0$; достатня умова – правильність утворення системи.

2.6. Приклади кінематичного аналізу розрахункових схем споруд

2.6.1. Кінематичний аналіз розрахункової схеми (рис. 2.21,а).

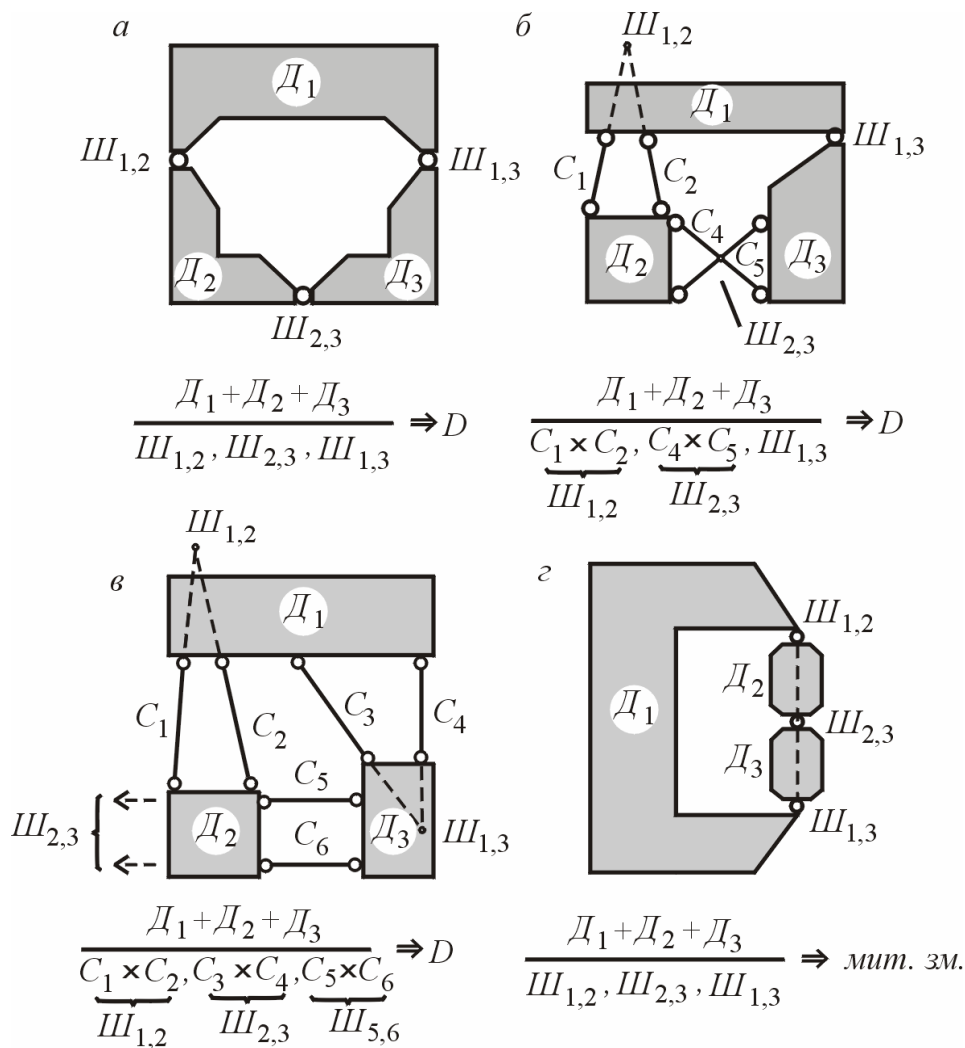


Рис.2.21

Перш, ніж розпочати кінематичний аналіз прикріпленої до “землі” розрахункової схеми споруди, доцільно:

- окремі ділянки “землі” об’єднати в єдиний опорний диск таким чином, щоб інша частина схеми залишалась за його межами (на рис.2.21,а це поєднання для шарнірно-нерухокої опори В і шарнірно-рухокої опори А подано пунктирною лінією);

- опорні пристрої показати у вигляді, зручному для проведення кінематичного аналізу.

Кількісний аналіз. При виконанні аналізу можливі різні варіанти трактування структури розрахункової схеми споруди. Для прикладу розглянемо два варіанти.

У першому варіанті (рис.2.21,б) розглянемо схему як сукупність трьох простих дисків D_1, D_2, D_3 , одного простого опорного шарніра $Ш_1$ і чотирьох кінематичних в'язей C_1, C_2, C_3 і C_4 .

Тоді параметри, що входять до формули Чебишова (2.1), набирають таких значень: $D = 3, B = 0, P = 0, Ш = 1, C = 4$; отже

$$\Gamma = 3 \cdot 3 + 2 \cdot 0 - 3 \cdot 0 - 2 \cdot 1 - 4 - 3 = 0.$$

У другому варіанті (рис.2.21,в) будемо вважати, що та ж сама схема складається з дисків $D_1, D_2, D_3, D_4, D_5, D_6$, простих шарнірів $Ш_2, Ш_3, Ш_4, Ш_5, Ш_6, Ш_7$ і опорних кінематичних в'язей C_4, C_5 і C_6 . Тобто $D = 6, P = 0, B = 0, Ш = 6, C = 3$ і, таким чином,

$$\Gamma = 3 \cdot 6 + 2 \cdot 0 - 3 \cdot 0 - 2 \cdot 6 - 3 - 3 = 0.$$

Отже, розрахункова схема може бути геометрично незмінюваною.

Як бачимо, результат кількісного аналізу не залежить від трактування опису структури розрахункової схеми.

Якісний аналіз. Визначаємо таку послідовність складання (монтажу) розрахункової схеми, щоб на кожному його етапі утворювалась геометрично незмінювана частина схеми за допомогою будь-якого з відомих п'яти способів з'єднання елементів.

Так, для даного прикладу можна визначити два етапи монтажу. На першому етапі (рис.2.21,г) диски D_1 і D_2 з'єднуються трьома кінематичними в'язями C_1, C_2 і C_3 , які не перетинаються в одній точці та не паралельні між собою (спосіб Шухова). Цю частину розрахункової схеми можна розглядати як укрупнений диск D_1 . Укрупнені диски позначатимемо латинською літерою D з індексом, що відповідає порядковому номеру його створення.

На другому етапі монтажу приєднання нового укрупненого диска D_1 до диска-”земля” D_3 можна трактувати двома способами, виходячи з відповідного варіанта опису розрахункової схеми (див. [рис.2.21,б,в](#)) – за способом Полонсо, тобто за допомогою шарніра $Ш_1$ і кінематичної в'язі C_4 , що не проходить через шарнір $Ш_1$ (рис.2.21,д), або за способом Шухова, тобто за допомогою трьох кінематичних в'язей C_4, C_5 і C_6 , що не перетинаються в одній точці та не паралельні між собою.

На другому етапі утворюється новий укрупнений диск D_2 , що являє собою всю розрахункову схему, яка досліджується.

Висновок. Розрахункова схема споруди геометрично незмінювана.

2.6.2. Кінематичний аналіз розрахункової схеми (рис. 2.22,а)

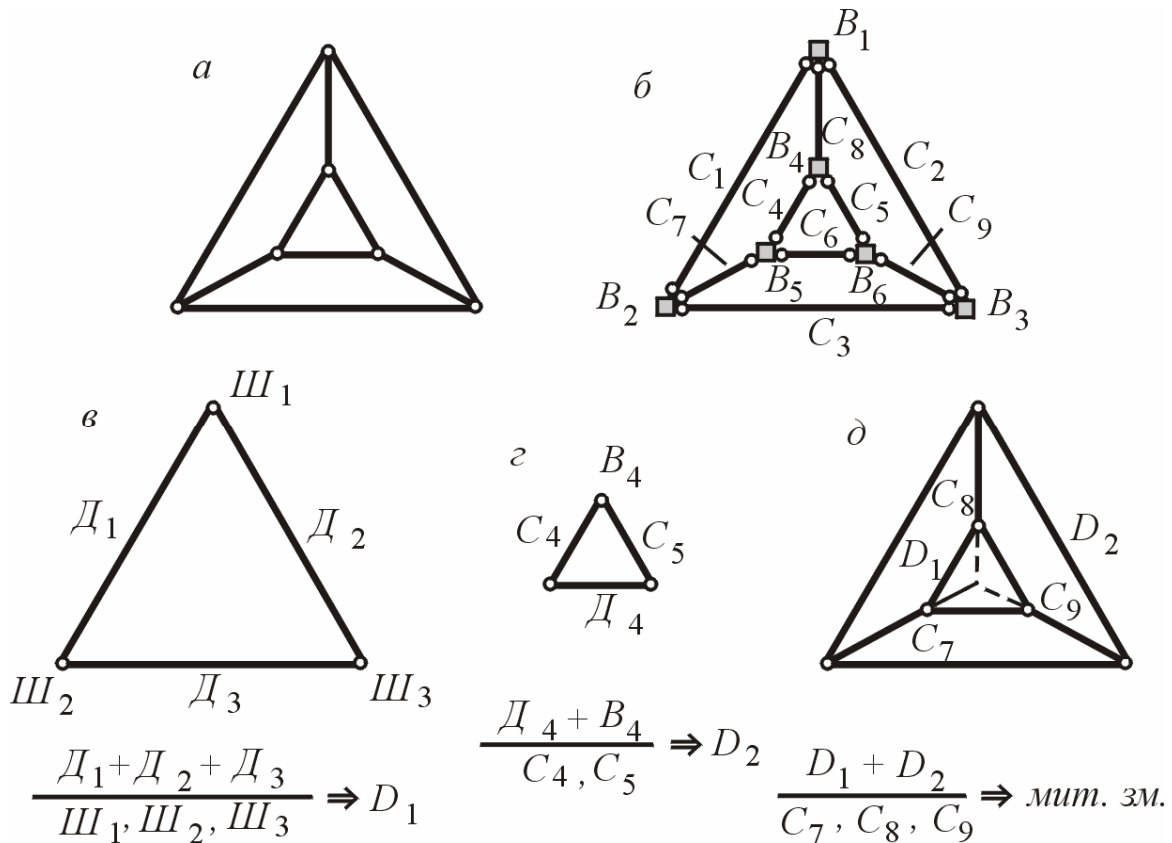


Рис.2.22

Кількісний аналіз. Усі шарніри цієї схеми можна вважати вузлами кінематичних в'язей. Тому її структуру можна розглядати як сукупність вузлів B і кінематичних в'язей C (рис.2.22,б), причому кількість таких вузлів $B = 6$, а кількість в'язей $C = 9$.

Тоді $G = 3 \cdot 0 + 2 \cdot 6 - 3 \cdot 0 - 9 - 3 = 0$.

Отже, розрахункова схема може бути геометрично незмінюваною.

Якісний аналіз. Створення цієї розрахункової схеми споруди можна представити у вигляді трьох етапів монтажу.

На першому етапі (рис.2.22,в) укрупнений диск D_1 утворюється з'єднанням трьох дисків D_1, D_2, D_3 трьома шарнірами $Ш_1, Ш_2$ і $Ш_3$, які не лежать на одній прямій (спосіб шарнірного трикутника).

На другому етапі можна довести попереднім способом створення нового укрупненого диска D_2 . Але для різноманітності уявімо цей диск (рис.2.22,г) як з'єднання диска D_4 і вузла B_4 двома кінематичними в'язями C_4 і C_5 , що не лежать на одній прямій (спосіб діад).

На третьому етапі (рис.2.22,д) укрупнені диски D_1 і D_2 з'єднуються за допомогою трьох кінематичних в'язей C_7, C_8 і C_9 . Однак ці в'язі перетинаються в одній точці.

Висновок. Розрахункова схема споруди, що розглядається, миттєво змінювана.

2.6.3. Кінематичний аналіз розрахункової схеми (рис. 2.23,а)

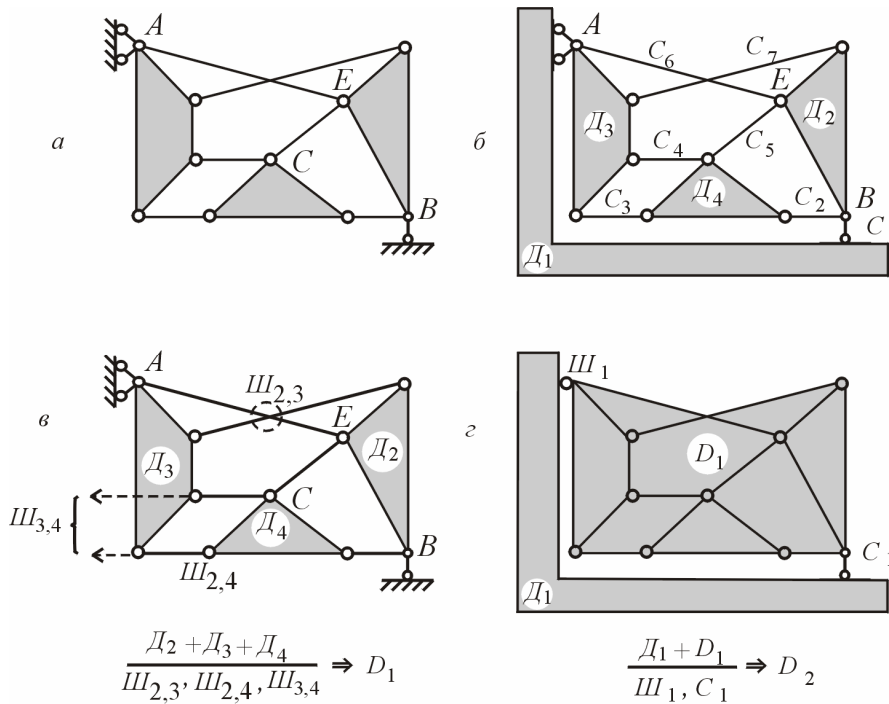


Рис.2.23

Кількісний аналіз. Значення величин, що використовуються в формулі Чебишова (2.1), визначаємо за схемою, поданою на рис.2.23,б, яку одержано з вихідної позначенням опорного диска-”землі” D_1 , заміною складних шарнірів A, B, C і E парами простих шарнірів, уявленням шарнірно-нерухомої опори A простим шарніром $Ш_1$, а шарнірно-рухомої опори B – кінематичною в’яззю C_1 .

Тоді одержуємо $D = 4, B = 0, П = 0, Ш = 1, C = 7$ і зрештою

$$Г = 3 \cdot 4 + 2 \cdot 0 - 3 \cdot 0 - 2 \cdot 1 - 7 - 3 = 0.$$

Отже, розрахункова схема може бути геометрично незмінюваною.

Якісний аналіз. Створення системи здійснюється в два етапи.

На першому етапі укрупнений диск D_1 складається з трьох дисків D_2, D_3, D_4 , з’єднаних трьома фіктивними шарнірами $Ш_{2,3}, Ш_{3,4}$ і $Ш_{2,4}$ (рис.2.23,в), які не лежать на одній прямій, причому шарнір $Ш_{3,4}$ розташований у нескінченності. Кожний фіктивний шарнір одержано на перетині двох кінематичних в’язей, що з’єднують відповідну пару дисків.

Другий етап (рис.2.23,г) полягає в приєднанні укрупненого диска D_1 до опорного диска D_1 способом Полонсо за допомогою шарніра $Ш_1$ і в’язі C_1 , яка не проходить через шарнір $Ш_1$. Таким чином, уся розрахункова схема являє собою диск D_2 .

Висновок. Розрахункова схема споруди, що розглядається, геометрично незмінювана.

2.6.4. Кінематичний аналіз розрахункової схеми, зображеної на рис.2.24,а

Кількісний аналіз. Для зручності дослідження перемалюємо розрахункову схему (рис.2.24,б).

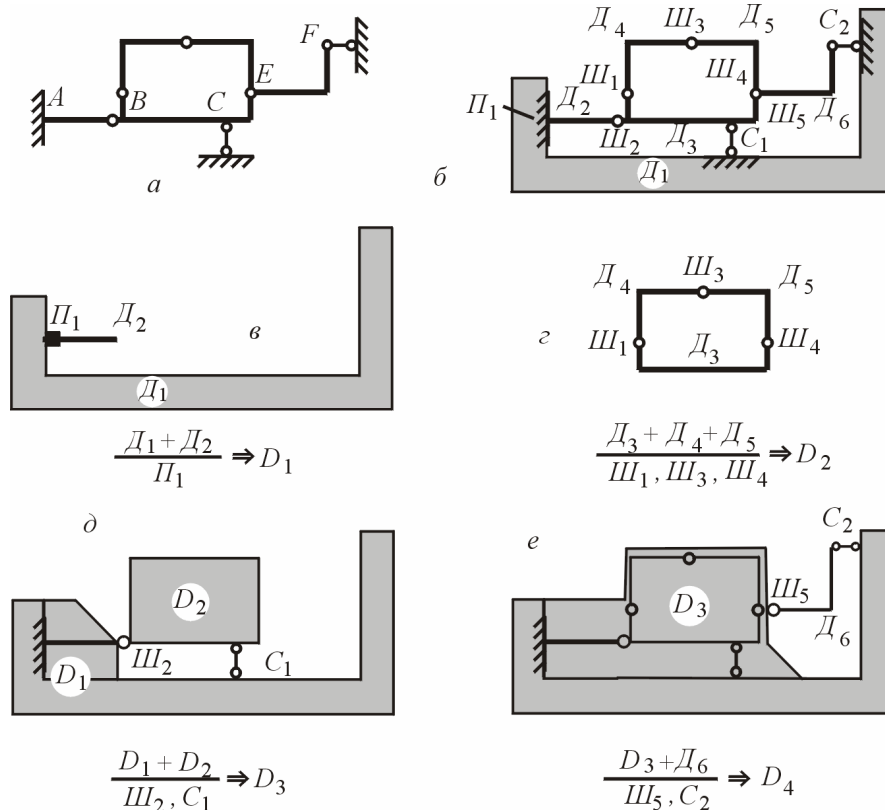


Рис.2.24

З цією метою покажемо диск-”земля” D_1 , прості диски D_2 – D_6 , прості шарніри $Ш_1, Ш_2, Ш_3$ і припайку $П_1$, замінимо шарнірно-рухомі опори C і F кінематичними в’язями C_1 і C_2 , а також замість складного шарніра E покажемо два еквівалентних щодо нього простих шарніри $Ш_4$ і $Ш_5$. Використовуючи одержану схему, визначимо геометричну змінюваність за формулою Чебишова (2.1):

$$\Gamma = 3 \cdot 6 + 2 \cdot 0 - 3 \cdot 1 - 2 \cdot 5 - 2 - 3 = 0.$$

Отже, розрахункова схема може бути геометрично незмінюваною.

Якісний аналіз. Розглянемо послідовність монтажу системи.

На першому етапі (рис.2.24,в) диск D_2 приєднаний до диска D_1 припайкою $П_1$, створюючи укрупнений диск D_1 .

Другий етап (рис.2.24,г) полягає в з’єднанні трьох дисків D_3, D_4 , і D_5 за допомогою трьох шарнірів $Ш_2, Ш_3$ і $Ш_4$, що не лежать на одній прямій. При цьому утворюється укрупнений диск D_2 .

Далі (рис.2.24,д) два укрупнених диски D_1 і D_2 з’єднуються способом Полонсо за допомогою шарніра $Ш_1$ і в’язі C_1 , яка не проходить через $Ш_1$, утворюючи новий укрупнений диск D_3 .

Нарешті на четвертому етапі (рис.2.24,е) до D_3 приєднується диск D_6 способом Полонсо за допомогою шарніра $Ш_5$ і в'язі C_2 , що не проходить через $Ш_5$. Таким чином утворюється новий диск D_4 , який являє собою всю досліджувану систему.

Висновок. Розрахункова схема споруди, що розглядається, геометрично незмінювана.

2.7. Статичний метод розрахунку

Найбільш поширеним і загальним способом розв'язання як зовнішньої, так і внутрішньої задачі статичної є використання **методу перерізів**. Цей метод полягає в тому, що від споруди наскрізним перерізом, який проходить через з'єднання, відокремлюється якийсь її фрагмент (елемент, група елементів). Розрізані в'язі (з'єднання) відкидаються і замінюються силами – реакціями цих в'язей. Таким чином, на відокремлений фрагмент діє система зовнішніх сил, яка складається з безпосередньо діючих на нього навантажень і реакцій відкинутих в'язей.

Фрагмент споруди під дією системи зовнішніх сил відповідно до аксіоми статичної може розглядатися як абсолютно тверде тіло. Тому до цієї системи сил можна застосувати умови її рівноваги, які дають змогу визначити невідомі реакції в'язей.

2.7.1. Визначення реакцій в'язей – зовнішня задача

Кількість реакцій в'язей, що з'єднують між собою елементи споруди і всю споруду до землі

$$R = C + 2Ш + 3П, \quad (2.2)$$

де C – кількість простих в'язей, $Ш$ – кількість простих шарнірів, $П$ – кількість простих припайок.

Кількість рівнянь рівноваги, що можна скласти для розрахункової схеми споруди, яка складається з $Д$ простих дисків і $В$ вузлів в'язей, визначається виразом

$$U = 3Д + 2В - 3. \quad (2.3)$$

При цьому беруть до уваги те, що до диска прикладається довільна система сил, для якої можна скласти три рівняння рівноваги; на вузол в'язів діє збіжна система сил, для якої можна записати два рівняння рівноваги; доданок "– 3" введено у цей вираз тому, що рівняння рівноваги складаються стосовно нерухомої системи координат, що зв'язана з одним із дисків, який вважається нерухомим (наприклад, із землею).

Якщо кількість невідомих реакцій в'язей R збігається з кількістю рівнянь рівноваги U , які можна вивести для всіх елементів системи, то всі реакції в'язей можуть бути визначені з одержаної системи рівнянь.

Розрахункові схеми споруд, для яких всі реакції в'язей можуть бути визначені з рівнянь рівноваги (рівняння статики), належать до **статично визначуваних систем**.

Якщо кількість невідомих реакцій в'язей R перевищує кількість рівнянь рівноваги U , для визначення реакцій самих цих рівнянь недостатньо і необхідно вдаватися до використання додаткових умов. Означені системи називаються **статично невизначуваними**.

Число, відповідне перевищенню кількості реакцій в'язей над кількістю рівнянь рівноваги, називається **ступнем статичної невизначуваності** системи:

$$n = R - U = (C + 2Ш + 3П) - (3Д + 2В - 3) = -Г. \quad (2.4)$$

Отже, для геометрично незмінюваних і статично визначуваних систем виконується будь-яке з двох співвідношень:

$$n = 0 \quad \text{або} \quad Г = 0. \quad (2.5)$$

Для геометрично незмінюваних і статично невизначуваних систем

$$n > 0 \quad \text{або} \quad Г < 0. \quad (2.6)$$

Для визначення реакцій в'язей геометрично незмінюваних і статично визначуваних систем, що задовольняють співвідношенню (2.5), застосовується метод перерізів.

При цьому замкненими перерізами можна відокремити всі диски та вузли в'язей, що складають систему. Для кожного диска, на який діє довільна система сил, і кожного вузла, що перебуває під дією збіжної системи сил, можна скласти рівняння рівноваги. Реакції в'язей можуть бути визначені з одержаної системи лінійних рівнянь.

Зазначимо, що рівність нулю визначника матриці коефіцієнтів цієї системи рівнянь засвідчує, що розрахункова схема споруди миттєво змінювана.

Між тим застосування системи сумісних рівнянь для визначення реакцій в'язей недоцільно через значну трудомісткість. Необхідно намагатись скласти рівняння рівноваги в такий спосіб, щоб кожна невідома реакція визначалася з одного незалежного рівняння, в крайньому випадку для їх визначення необхідно було б розв'язати систему двох рівнянь із двома невідомими.

Цієї мети можна досягти, якщо визначення реакцій в'язей пов'язувати зі способом з'єднання елементів у геометрично незмінювану систему, оскільки кожному способу з'єднання відповідає доцільний спосіб складання рівнянь рівноваги. Розглянемо ці способи.

Спосіб діад. Для визначення реакцій двох в'язей, що приєднують шарнірний вузол до диска (рис.2.25,а), вузол відокремлюється від диска замкненим перерізом 1-1 (рис.2.25,б).

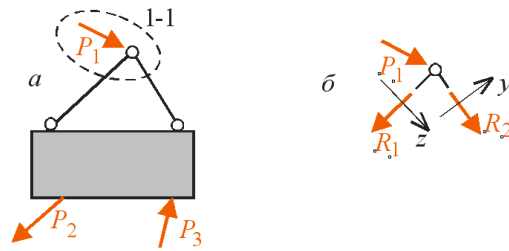


Рис.2.25

Для визначення реакцій в'язей R_1 і R_2 складаються два рівняння рівноваги одержаної таким чином системи збіжних сил. Кожне рівняння вміщуватиме тільки одне невідоме, якщо координатні осі спрямовувати перпендикулярно до кожної з двох в'язей:

$$\begin{aligned} \sum F_y &= 0 \Rightarrow R_1; \\ \sum F_z &= 0 \Rightarrow R_2. \end{aligned}$$

Якщо два диски з'єднуються **припайкою** (рис.2.26,а), доцільно провести замкнений переріз 1-1 через центр O припайки.

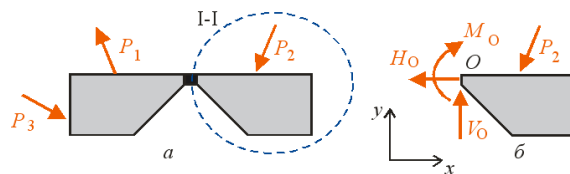


Рис.2.26

У місці розрізу прикладаються невідомі реактивні сили. Для однієї з відокремлених частин, наприклад, правої частини (рис.2.26,б), можна скласти три рівняння рівноваги, кожне з яких містить одну невідому величину:

$$\begin{aligned} \sum M_O &= 0 \Rightarrow M_o; \\ \sum F_x &= 0 \Rightarrow H_o; \\ \sum F_y &= 0 \Rightarrow V_o. \end{aligned}$$

У системах, що створені **способом Полонсо** (рис.2.27,а), необхідно визначити реакції в шарнірі C і кінематичній в'язі AB , що з'єднують два диски.

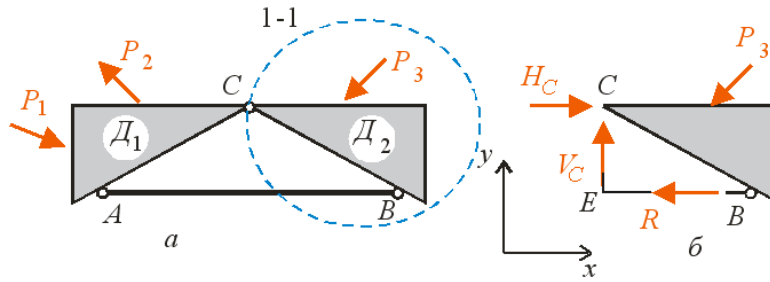


Рис.2.27

Для цього виконується замкнений переріз 1-1 через шарнір C і в'язь AB (рис.2.27,а). Цей переріз поділяє систему на дві частини. Реакція R у в'язі AB спрямована вздовж її осі. Невідома реактивна сила в шарнірі C відображається двома складовими, одну з яких H_c зручно спрямувати паралельно, а другу V_c – перпендикулярно до реакції R . Реакції R , V_c і H_c визначаються з рівнянь рівноваги будь-якої з відокремлених частин, наприклад, правої:

$$\begin{aligned} \sum M_C = 0 &\Rightarrow R; \\ \sum F_y = 0 &\Rightarrow V_c; \\ \sum M_E = 0 &\Rightarrow H_c. \end{aligned}$$

Для визначення реакцій трьох в'язей, що з'єднують два диски системи, утвореної **за способом Шухова** (рис.2.28,а), виконується наскрізний замкнений переріз 1-1 і розглядається рівновага будь-якого з дисків.

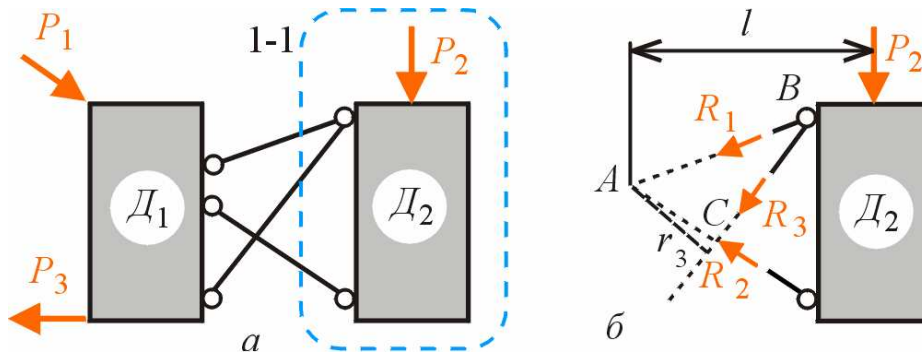


Рис.2.28

На рис.2.28,б показаний правий диск. На нього діє зовнішня сила P_2 і невідомі реакції в'язей R_1 , R_2 і R_3 . Можна скласти три рівняння рівноваги цього диска, що відповідає кількості невідомих. Для того щоб кожне рівняння містило лише одну невідому реакцію в якійсь кінематичній в'язі, запишемо рівняння у вигляді суми моментів сил стосовно точки перетину двох інших в'язей. Цей спосіб складання рівнянь називається **способом моментної точки** (спосіб Ріттера), а відповідні точки називаються **моментними точками** або **точками Ріттера**.

Наприклад:

$$\sum M_A = 0; \quad P_2 \cdot l + R_3 \cdot r_3 = 0; \quad R_3 = -P_2 \frac{l}{r_3}.$$

Реакції R_1 і R_2 визначаються відповідно з аналогічних рівнянь рівноваги

$$\sum M_B = 0 \Rightarrow R_2; \quad \sum M_C = 0 \Rightarrow R_1.$$

Якщо дві з трьох кінематичних в'язей системи, створеної за способом Шухова (рис.2.29,а), не паралельні одна одній (наприклад, в'язі C_1 та C_2) то реакцію третьої в'язі визначають таким самим чином, як і в попередньому випадку.

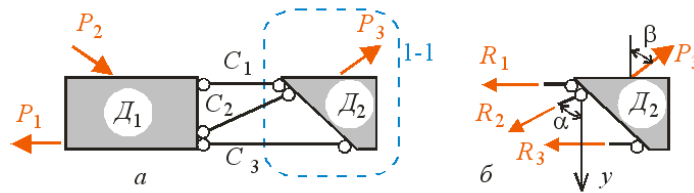


Рис.2.29

Моментна точка для кінематичної в'язі C_2 розташована на нескінченності. Тому для визначення реакції R_2 не може бути використано рівняння моментів, і рівняння рівноваги складається в формі суми проекцій сил, що діють на відокремлену частину, на вісь, що перпендикулярна до двох інших паралельних в'язей. Розглядаючи, наприклад, праву частину (рис.2.29,б), рівняння рівноваги можна записати у вигляді

$$\sum F_y = 0; \quad R_2 \cos \alpha - P_3 \cos \beta = 0; \quad R_2 = P_3 \frac{\cos \beta}{\cos \alpha}.$$

Розглянемо визначення реакцій у трьох шарнірах, що з'єднують три диски за **способом шарнірного трикутника** (рис. 2.30,а).

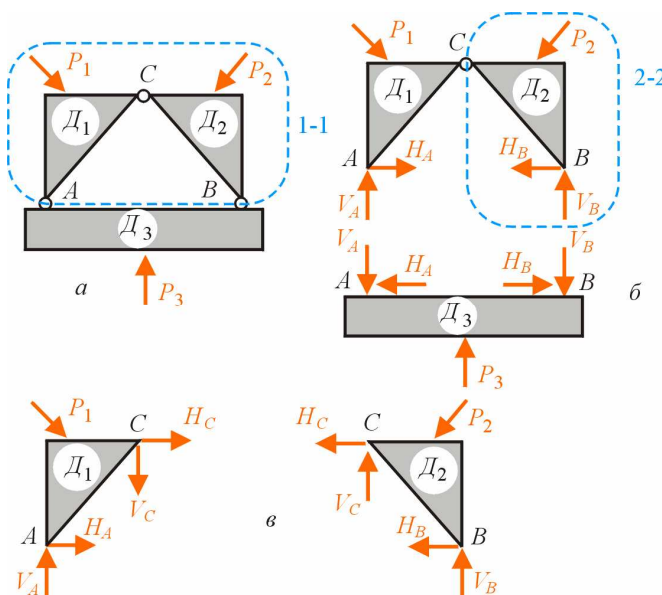


Рис.2.30

Наскрізним замкненим перерізом, що перетинає два будь-яких шарніри (наприклад перерізом 1-1 через шарніри A і B), розділяємо систему на дві частини і розглядаємо рівновагу частини, яка складається з двох дисків D_1 і D_2 (рис. 2.30,б). Реакцію в кожному розрізаному шарнірі зображуємо у вигляді двох взаємно перпендикулярних складових V_A і H_A (в шарнірі A) і V_B та H_B (в шарнірі B). При цьому складові H_A і H_B спрямовуємо по прямій, що з'єднує центри розрізаних шарнірів A і B . Складові V_A і V_B можуть бути визначені з рівнянь рівноваги:

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow V_B; \quad \sum M_B = 0 \Rightarrow V_A.$$

Виконаємо наскрізний переріз 2-2 через третій шарнір C відокремленої частини і розглянемо рівновагу одного з дисків, наприклад D_2 (рис. 2.30,в). Складові V_C і H_C реакції в шарнірі C спрямуємо паралельно до відповідних складових реакцій у шарнірах A і B .

Складові V_A і V_B вже відомі, тому з умов рівноваги диска одержуємо

$$\begin{aligned} \sum M_C = 0 &\Rightarrow H_A; \quad \sum M_E = 0 \Rightarrow H_C; \\ \sum F_y = 0 &\Rightarrow V_C. \end{aligned}$$

Нарешті, складову H_B можна обчислити з рівняння рівноваги системи дисків D_1 - D_2 :

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow H_B.$$

Якщо три диски з'єднані способом шарнірного трикутника шістьма кінематичними в'язями, що утворюють три фіктивних шарніри (рис.2.31,а), реакції в цих в'язях визначаються таким чином.

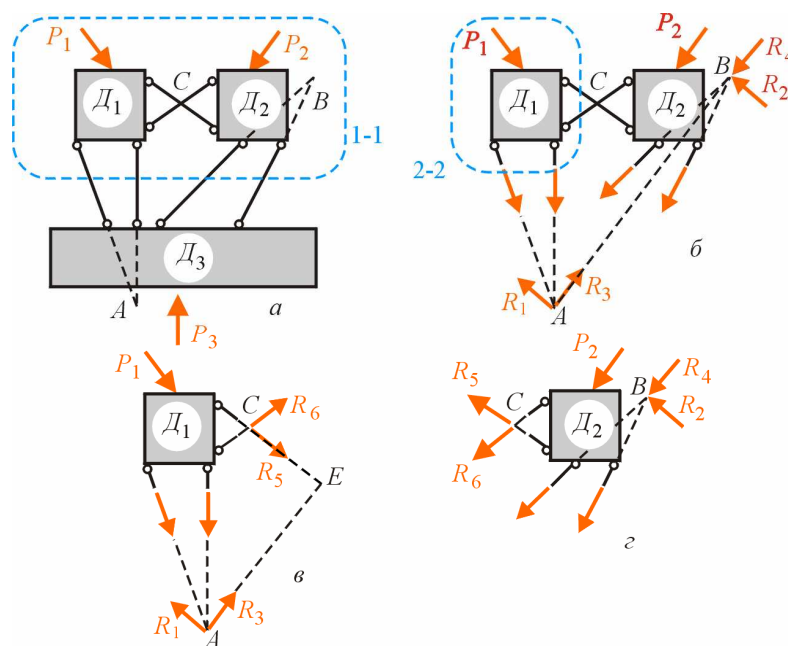


Рис.2.31

У кожному фіктивному шарнірі розташована точка прикладання рівнодіючої реакцій у в'язях, що складають цей шарнір. Означену рівнодіючу можна відобразити будь-якими двома складовими, наприклад R_1 і R_3 , R_2 і R_4 (рис.2.31,б), R_5 і R_6 (рис.2.31,в,г). Їхні напрямки визначаються лише зручністю розрахунку.

Розглядаючи рівновагу частини системи на рис.2.31,б, можна визначити R_1 і R_2 з рівнянь:

$$\sum M_B = 0 \Rightarrow R_1; \quad \sum M_A = 0 \Rightarrow R_2.$$

Переходячи до рівноваги диска D_1 (рис.2.31,в), можна визначити R_3 , R_5 і R_6 з рівнянь:

$$\sum M_C = 0 \Rightarrow R_3; \quad \sum M_E = 0 \Rightarrow R_6;$$

$$\sum F_z = 0 \Rightarrow R_5.$$

Нарешті, розглядаючи рівновагу диска D_2 (рис.2.31,г), одержимо R_4 :

$$\sum M_C = 0 \Rightarrow R_4.$$

Визначивши складові $R_1...R_6$, обчислимо реакції в кінематичних в'язях, розкладаючи $R_1...R_6$ по напрямках відповідних в'язей.

Розглянемо визначення реакцій кінематичних в'язей у двох окремих випадках розташування в'язей при з'єднанні трьох дисків за допомогою способу шарнірного трикутника. Ці окремі випадки зображено на рис. 2.32,а і 2.33,а.

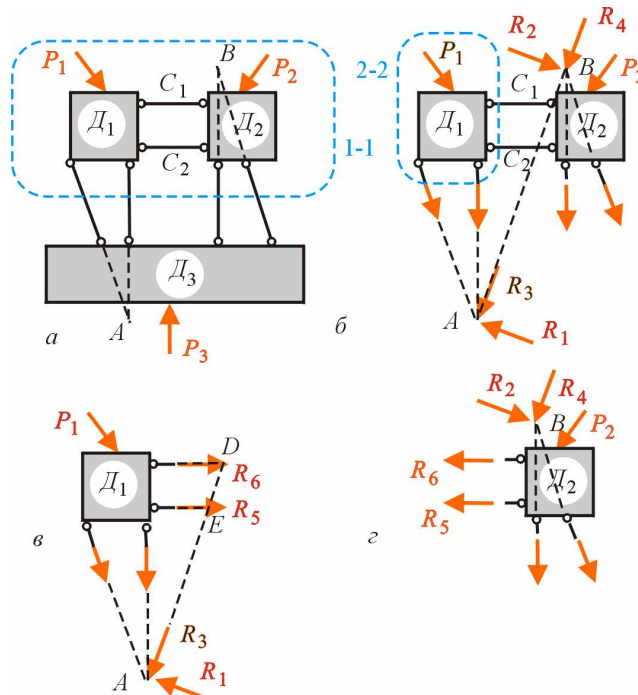


Рис.2.32

Система на рис.2.32,а відрізняється від розглянутої раніше тим, що дві кінематичні в'язі C_1 і C_2 паралельні і відповідний фіктивний шарнір розташований на нескінченності. Тому перерізи (рис.2.32,а,б,в), послідовність визначення реакцій у в'язях R_1, R_2 і R_6 та рівняння рівноваги, що використовуються для цього, аналогічні викладеним у попередньому випадку. Відмінність у рівняннях рівноваги, що застосовуються для визначення реакцій R_3, R_5 і R_4 :

на підставі рис.2.32,в

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow R_3; \quad \sum M_D = 0 \Rightarrow R_6;$$

на підставі рис. 2.32,г:

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow R_4.$$

У системі, що показана на рис.2.33,а, чотири кінематичні в'язі попарно паралельні: C_1 і C_2, C_5 і C_6 . Послідовність визначення реакцій у в'язях така.

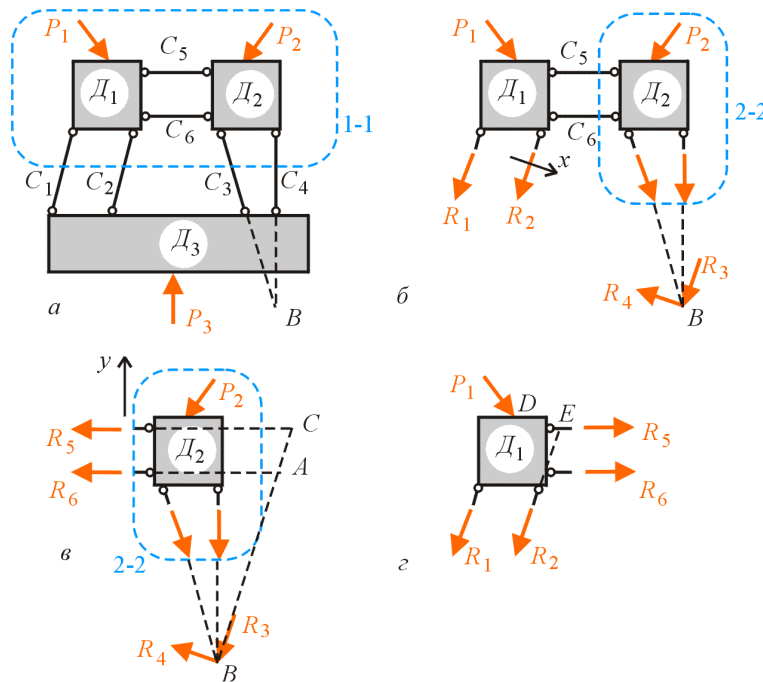


Рис.2.33

Для зрівноваженої частини системи, що відокремлена замкненим наскрізним перерізом 1-1 (рис.2.33,б), можна скласти рівняння рівноваги, з якого визначається реакція R_4 :

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow R_4,$$

попередньо зобразивши рівнодіючу реакції у в'язях C_3 і C_4 двома складовими, з яких одну, наприклад R_3 , спрямувавши паралельно до реакцій R_1 і R_2 .

Далі наскрізним замкненим перерізом 2-2 поділяємо схему на рис.2.33,б на дві частини, кожна з яких зображена на рис.2.33,в,г.

Розглядаючи рівновагу частини на рис.2.33,в, одержуємо

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow R_3; \quad \sum M_A = 0 \Rightarrow R_5;$$

$$\sum M_C = 0 \Rightarrow R_6.$$

З умов рівноваги частини на рис.2.33,г маємо

$$\sum M_E = 0 \Rightarrow R_1; \quad \sum M_{iD} = 0 \Rightarrow R_2.$$

Визначення реакцій в'язей **складеної розрахункової системи** базується на якісному етапі кінематичного аналізу. До складених належать такі розрахункові схеми, які побудовані як завершення кількох послідовних етапів приєднання елементів до раніше створених дисків.

У послідовності, протилежній приєднанню чергових елементів до дисків, тобто розпочинаючи з останнього приєднання, необхідно відокремлювати ці елементи, проводячи замкнені наскрізні перерізи через в'язі, що їх прикріплюють.

Розглядаючи умови рівноваги кожної відокремленої частини системи, можна визначити реакції перерізаних в'язей. Ці реакції необхідно прикладати як зовнішні сили до фрагментів, до яких прикріплено досліджену частину, у протилежному напрямі і враховувати їх у подальших розрахунках разом із навантаженням.

Якщо вважати, що створення геометрично незмінюваної системи відбувається як послідовний монтаж з окремих елементів, то визначення реакцій в'язей систем можна уявити як її демонтаж. Цілком природно, що послідовність демонтажу повинна бути протилежною послідовності монтажу.

Приклад 2.1. Визначити реакції в'язей розрахункової схеми споруди, яка зображена на рис.2.34,а, якщо $d=2$ м, $P_1=20$ кН, $P_2=40$ кН.

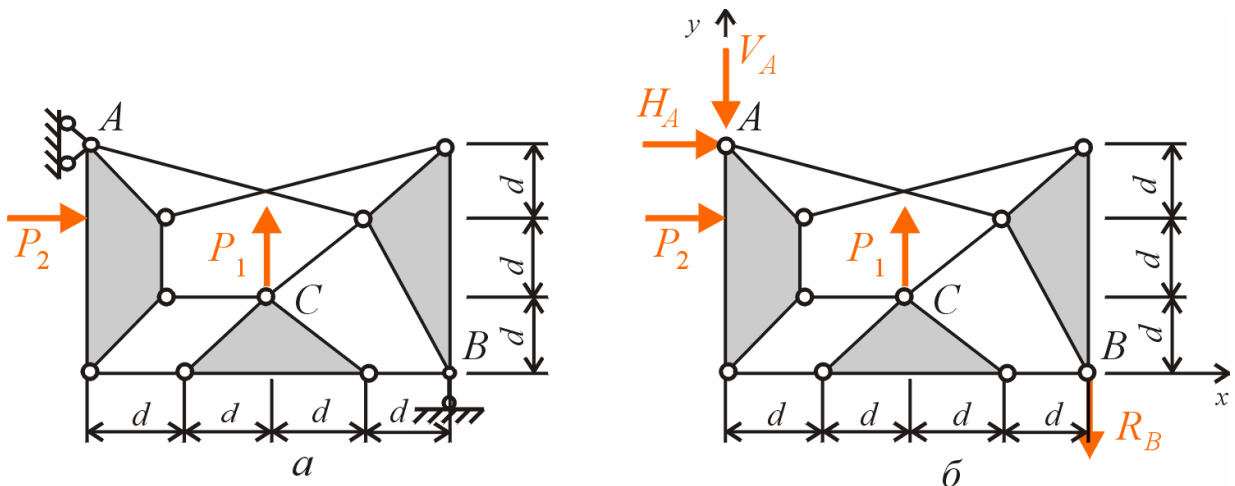


Рис.2.34

Кінематичний аналіз цієї розрахункової системи викладено в п.п. 2.6.3. Результат кількісного етапу $\Gamma = 0$, свідчить, що система статично визначувана, тобто всі реакції в'язей можуть бути визначені за допомогою рівнянь рівноваги, складених для всієї системи та її окремих частин.

Під час кінематичного аналізу встановлено, що останнім було приєднання всієї системи як диска до землі. Тому насамперед замкненим перерізом відокремлюємо диск D_1 від землі, перетинаючи при цьому опорний шарнір A , зображений у вигляді шарнірно-нерухомої опори, і опорну кінематичну в'язь B – шарнірно-рухому опору.

На диск D_1 (рис.2.34,б), окрім заданих зовнішніх сил P_1 і P_2 , з боку відкинутого диска–“землі” діють реакції шарнірно-нерухомої опори A і шарнірно-рухомої – B . Лінія дії реакції R_B перпендикулярна до можливого напрямку руху опори B : Лінія дії реакції шарнірно-нерухомої опори A невідома, тому зображуємо цю реакцію у вигляді двох складових – вертикальної V_A і горизонтальної H_A .

Складаючи три рівняння рівноваги довільної системи сил, що діють на диск, визначаємо три невідомі реакції:

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0; & \quad H_A + P_2 = 0; & \quad H_A = -40 \text{ кН}; \\ \sum M_A = 0; & \quad -P_2 d - P_1 \cdot 2d + R_B \cdot 4d = 0; & \quad R_B = 20 \text{ кН}; \\ \sum F_y = 0; & \quad V_A + P_1 - V_B = 0; & \quad V_A = 0. \end{aligned}$$

Зображуємо робочу схему (рис.2.35,а), на якій на відміну від рис. 2.34,б реакції V_A , H_A і R_B показано як відомі сили з урахуванням зміни напрямку H_A внаслідок набутого від'ємного значення.

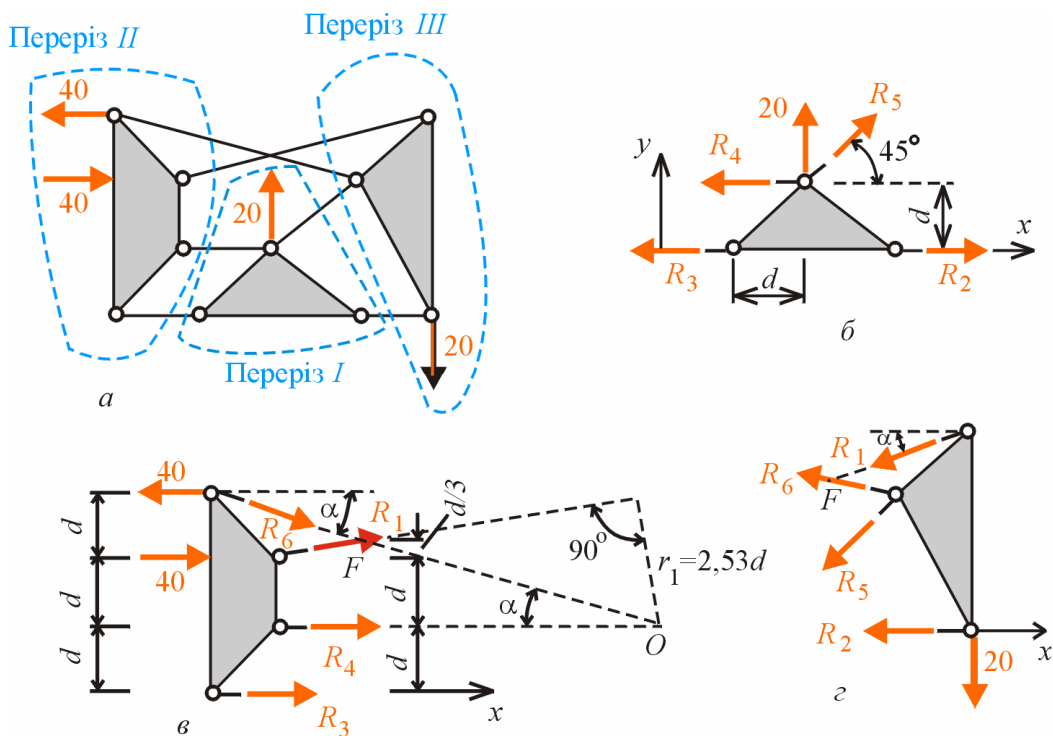


Рис.2.35

За цією робочою схемою виконуємо перевірку обчислень, використовуючи інше рівняння рівноваги

$$\sum M_B = 0; \quad -40 \cdot 3d + 40 \cdot 2d - 20 \cdot 2d + 20 \cdot 4d = 0.$$

Рівняння задовольняється, що свідчить про правильність визначення V_A , H_A і R_B .

Розглянемо диск D_1 (див. [рис.2.23,г](#)), утворений способом шарнірного трикутника. Відокремлюємо від нього замкненим перерізом I фрагмент ([рис.2.35,а](#)) і використовуємо рівняння рівноваги фрагмента ([рис.2.35,б](#)), з яких обчислюємо реакції в'язей R_4 і R_5 :

$$\sum F_y = 0; \quad 20 + R_5 \cdot \cos 45^\circ = 0; \quad R_5 = -28,29 \text{ кН};$$

$$\sum M_K = 0; \quad -20 \cdot d - R_4 \cdot d = 0; \quad R_4 = -20 \text{ кН}.$$

Реакцію R_3 обчислюємо з рівняння рівноваги фрагмента (рис. 2.35,в), відокремленого від диска D_1 замкненим перерізом II (рис.2.35,а):

$$\sum M_F = 0; \quad -40 \cdot d/3 - 40 \cdot 2d/3 - R_4 \cdot 4d/3 - R_3 \cdot 7d/3 = 0; \quad R_3 = -5,72 \text{ кН}.$$

Повернемось до фрагмента на [рис.2.35,б](#):

$$\sum F_x = 0; \quad -R_3 + R_2 - R_4 + R_5 \cdot \cos 45^\circ = 0; \quad R_2 = -5,72 \text{ кН}.$$

Знову розглянемо рівновагу фрагмента на [рис.2.35,в](#):

$$\sum M_O = 0; \quad 40 \cdot d - 40 \cdot 2d + 5,72 \cdot d + R_1 \cdot r_1 = 0; \quad R_1 = 13,56 \text{ кН};$$

$$\sum F_x = 0; \quad 40 - 40 + R_1 \cdot \cos \alpha + R_4 + R_3 + R_6 \cdot \cos \alpha = 0; \quad R_6 = 13,56 \text{ кН}.$$

Числові значення кута α і плеча r_1 , які входять у ці рівняння, визначаємо заздалегідь, виходячи з геометричних розмірів розрахункової схеми.

Визначені значення реакцій можна перевірити, складаючи додаткове рівняння рівноваги для фрагмента системи на [рис.2.35,г](#), яка відокремлена від диска D_1 перерізом III :

$$\sum F_y = 0; \quad -R_1 \cdot \sin \alpha + R_6 \cdot \sin \alpha - R_5 \cdot \cos 45^\circ - 20 = 0;$$

$$-13,56 \cdot \sin \alpha + 13,56 \cdot \sin \alpha + 28,29 \cdot \cos 45^\circ - 20 = 24,29 - 24,29 = 0.$$

Приклад 2.2. Визначити реакції в'язей розрахункової схеми споруди, що зображена на [рис.2.36,а](#).

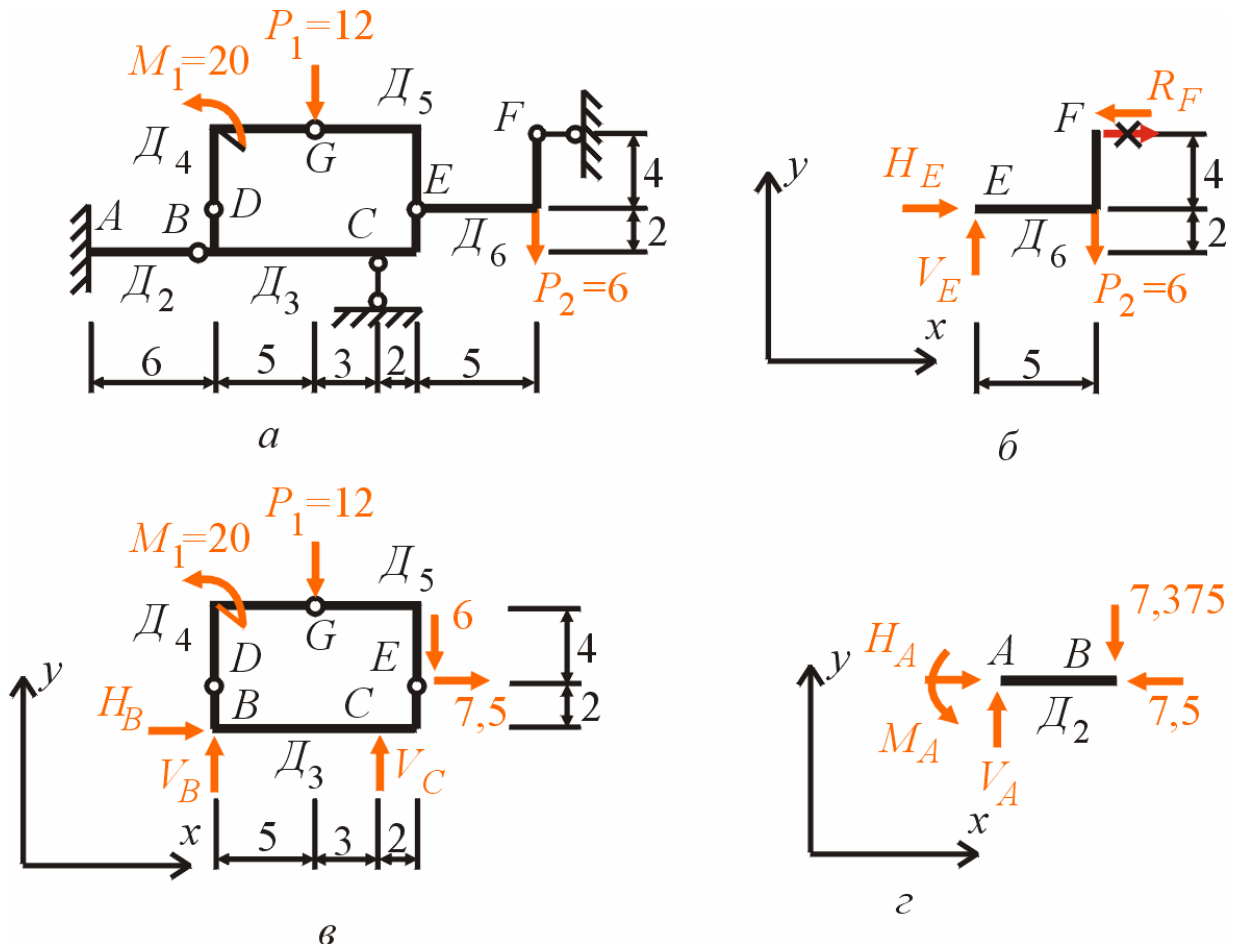


Рис.2.36

Кінематичний аналіз цієї розрахункової системи викладено в п.2.6.4. Результат кількісного етапу $\Gamma = 0$, свідчить, що система статично визначувана, тобто всі реакції в'язей можуть бути визначені за допомогою рівнянь рівноваги. Такі рівняння потрібно складати як для всієї системи, так і для її окремих частин. Нагадаємо, що ці частини повинні відокремлюватись у послідовності, зворотній щодо їх приєднання при створенні системи, яка встановлена при виконанні якісного етапу кінематичного аналізу.

У першу чергу визначимо реакції в шарнірі E і шарнірно рухомій опорі F, які останніми приєднували простий диск D_6 до системи. Для цього відокремлюємо диск замкненим перерізом по шарніру E і опорі F та зображуємо його окремо (рис.2.36.б). Для системи довільних сил, що діють на нього, складаємо три рівняння рівноваги, з яких визначаємо дві складові V_E і H_E реакції в шарнірі E і реакцію опори R_F :

$$\begin{aligned} \sum M_E = 0; & & 6 \cdot 5 + R_F \cdot 4 = 0; & & R_F = -7,5 \text{ кН}; \\ \sum F_x = 0; & & -7,5 + H_E = 0; & & H_E = 7,5 \text{ кН}; \\ \sum F_y = 0; & & -6 + V_E = 0; & & V_E = 6 \text{ кН}. \end{aligned}$$

Величини визначених реакцій для зручності подальшої роботи позначаємо на рисунку. При цьому змінюємо на протилежний напрям реакції R_F , яка в результаті обчислення виявилась від'ємною.

Для перевірки обчислень складаємо додаткове рівняння рівноваги

$$\sum M_F = -7,5 \cdot 4 + 6 \cdot 5 = 0.$$

Далі відокремлюємо перерізом складений диск, який було приєднано передостаннім (рис.2.36,в). При цьому перерізаються шарнір B і шарнірно рухома опора C . На складений диск діють зосереджені сила P_1 і момент M_1 , визначені складові реакції V_E і H_E приєданого диска з протилежним напрямом та невідомі складові V_B і H_B реакції шарніра B і реакція R_C в'язі C . Для визначення останніх скористуємось з трьох рівнянь рівноваги довільної системи сил:

$$\sum M_B = 0; \quad -20 + 12 \cdot 5 + 6 \cdot 10 - 7,5 \cdot 2 - R_C \cdot 8 = 0; \quad R_C = 10,625 \text{ кН};$$

$$\sum M_C = 0; \quad -20 - 12 \cdot 3 + 6 \cdot 2 - 7,5 \cdot 2 + V_B \cdot 8 = 0; \quad V_B = 7,375 \text{ кН};$$

$$\sum F_x = 0; \quad H_B - 7,5 = 0; \quad H_B = 7,5 \text{ кН}.$$

Записуємо обчислені величини реакцій на рис.2.36,в і виконуємо їх перевірку за допомогою додаткового рівняння рівноваги

$$\sum F_y = 0; \quad -12 - 6 + 7,375 + 10,625 = 0.$$

Розглянемо диск, який було приєднано до диска–“земля” першим за допомогою припайки (рис.2.36,г). До цього диска прикладені сили взаємодії між ним і диском, який спирається на нього, у вигляді реакцій V_B і H_B зі зворотним напрямом, та три невідомі складові V_A , H_A і M_A реакції затиснення A . Визначаємо ці складові, використовуючи рівняння рівноваги:

$$\sum F_x = 0; \quad H_A - 7,5 = 0; \quad H_A = 7,5 \text{ кН};$$

$$\sum F_y = 0; \quad V_A - 7,375 = 0; \quad V_B = 7,375 \text{ кН};$$

$$\sum M_A = 0; \quad -M_A + 7,375 \cdot 6 = 0; \quad M_A = 44,25 \text{ кН}.$$

Далі необхідно визначити реакції в'язей, за допомогою яких утворений складений диск на рис.2.36,в. Для цього наскрізним перерізом через шарніри D і E відокремлюємо два диски (рис.2.37,а). На ці два з'єднаних диски D_4 і D_5 діють зосереджені сила P_1 і момент M_1 , а також чотири складові V_D , H_D , V_{E1} і H_{E1} реакцій шарнірів D і E . Реакції V_E і H_E диска D_6 можуть бути прикладені як до диска D_5 , так і до диска D_3 . Будемо вважати їх віднесеними до диска D_3 , що уможливить вилучення їх з розгляду на даному етапі обчислень.

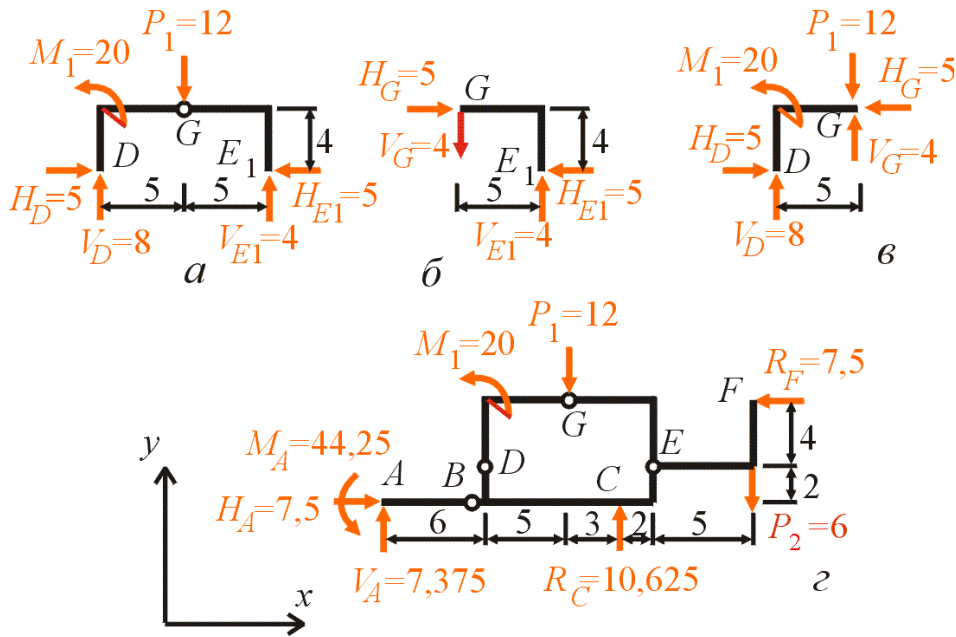


Рис.2.37

Для зображеної на рис.2.37,а довільної системи сил можна скласти три рівняння рівноваги, а невідомих сил діє чотири. Однак є можливість скласти два рівняння для визначення двох невідомих:

$$\begin{aligned} \sum M_D = 0; & & -20 + 12 \cdot 5 - V_{E1} \cdot 10 = 0; & & V_{E1} = 4 \text{ кН}; \\ \sum M_{E1} = 0; & & V_B \cdot 10 - 20 - 12 \cdot 5 = 0; & & V_B = 8 \text{ кН}. \end{aligned}$$

Відокремлюємо наскрізним перерізом через шарнір G диск D_5 (рис.2.37,б). До цього диска прикладені дві складові V_G і H_G реакції в шарнірі G і дві складові V_{E1} і H_{E1} реакції в шарнірі E_1 , одну з яких (V_{E1}) вже визначено. Три невідомі реакції визначаємо за допомогою трьох рівнянь рівноваги довільної системи сил:

$$\begin{aligned} \sum M_G = 0; & & 4 \cdot 5 + H_{E1} \cdot 4 = 0; & & H_{E1} = 5 \text{ кН}; \\ \sum F_x = 0; & & H_G - 5 = 0; & & H_G = 5 \text{ кН}; \\ \sum F_y = 0; & & -V_G + 4 = 0; & & V_G = 4 \text{ кН}. \end{aligned}$$

Складаючи раніше не використане третє рівняння рівноваги системи дисків на рис.2.37,а, визначаємо невідому складову H_D реакції шарніра D :

$$\sum F_x = 0; \quad H_D - 5 = 0; \quad H_D = 5 \text{ кН}.$$

Для перевірки правильності визначення реакцій у внутрішніх з'єднаннях складеного диска розглянемо окремо зображений диск D_4 (рис. 2.37,в), до якого прикладені зосереджені сила P_1 і M_1 та обчислені раніше складові реакцій у шарнірах D і E_1 . Перевіряємо, чи задовольняються рівняння рівноваги:

$$\begin{aligned}\Sigma F_x &= 0; & 5 - 5 &= 0; \\ \Sigma F_y &= 0; & 8 - 12 + 4 &= 0; \\ \Sigma M_D &= 0; & -20 + 12 \cdot 5 - 4 \cdot 5 - 5 \cdot 4 &= 0.\end{aligned}$$

Рівняння задовольняються. Отже, реакції в шарнірах обчислені правильно.

Виконуємо перевірку визначення реакцій опор. З цією метою відокремлюємо всю розрахункову схему від диска–“земля” (рис.2.36,г). Прикладаємо всі навантаження і обчислені реакції опор. Складаємо рівняння рівноваги:

$$\begin{aligned}\Sigma F_x &= 0; & 7,5 - 7,5 &= 0; \\ \Sigma F_y &= 0; & 7,375 - 12 + 10,625 - 6 &= 0; \\ \Sigma M_A &= 0; & -44,25 - 20 + 12 \cdot 11 - 10,625 \cdot 14 + 6 \cdot 21 - 7,5 \cdot 6 &= 0.\end{aligned}$$

Рівняння задовольняються. Отже реакції опор обчислені правильно.

2.7.2. Визначення зусиль в елементах споруди – внутрішня задача

Як уже зазначалося, при зовнішніх діях на споруди останні деформуються і в них виникають зовнішні та внутрішні сили. Якщо зовнішні сили, до яких належать безпосередньо прикладені до споруди силові фактори, в тому числі реакції в'язей, звичайно діють на неї дискретно, то внутрішні сили поширюються на все тіло елементів споруди.

У стержневих елементах покладено внутрішні сили відносити до кожного їх поперечного перерізу і прикладати до центра ваги перерізу. Внутрішні сили в перерізі стержня поділяють на згинальні моменти, поперечні та поздовжні сили.

Згинальним моментом у перерізі стержня називається головний момент усіх зовнішніх сил, розташованих з одного боку від перерізу. Згинальний момент є інтегральною характеристикою нормальних напружень.

Згинальний момент у перерізі стержня визначається як сума моментів усіх сил, розташованих по один бік від перерізу, стосовно центра ваги перерізу.

Загальне правило знаків для згинальних моментів у стержневих системах не визначено. На епюрах згинальних моментів ординати необхідно відкладати з боку розтягнутих волокон перерізу. Для балок і арок згинальний момент вважається додатним, якщо він розтягує нижнє волокно перерізу.

Поперечною силою в перерізі стержня, яка є інтегральною характеристикою зсуваючих напружень, називають проекцію головного вектора сил, розташованих з одного боку стержня, на площину перерізу.

Поперечна сила в перерізі стержня визначається як сума проєкцій всіх сил, розташованих по один бік від перерізу, на нормаль до осі стержня в цьому перерізі.

Поперечна сила вважається додатною, якщо вона намагається повернути відповідну частину стержня за годинниковою стрілкою стосовно перерізу.

Поздовжньою силою в перерізі стержня, яка є інтегральною характеристикою напружень поздовжньої деформації, називають проєкцію головного вектора сил, розташованих з одного боку стержня, на нормаль до площини перерізу.

Поздовжня сила в перерізі стержня визначається як сума проєкцій всіх сил, розташованих по один бік від перерізу, на дотичну до осі стержня в цьому перерізі.

Поздовжня сила вважається додатною, якщо вона розтягує переріз.

Так, внутрішні сили в перерізі $I-I$ стержня, зображеного на [рис.2.38,а](#), можна визначити, розглядаючи ліву від цього перерізу частину стержня. Тоді:

$$M_{I-I} = \sum M_{I-I}^{ni6.} = -P_1 \cdot r_1 - P_2 \cdot r_2 + P_3 \cdot r_3;$$

$$Q_{I-I} = \sum F_n^{ni6.} = -P_1 \sin \varphi - P_2 \cos \varphi + P_3 \sin(\varphi + \alpha_3);$$

$$N_{I-I} = \sum F_t^{ni6.} = -P_1 \cos \varphi + P_2 \sin \varphi + P_3 \cos(\varphi + \alpha_3).$$

Ті самі внутрішні сили можна визначити, розглядаючи праву від перерізу частину стержня:

$$M_{I-I} = \sum M_{I-I}^{np.} = P_4 \cdot r_4 - P_5 \cdot r_5 - M_1;$$

$$Q_{I-I} = \sum F_n^{np.} = -P_4 \cos(\varphi + \alpha_4) + P_5 \cos \varphi;$$

$$N_{I-I} = \sum F_t^{np.} = P_4 \sin(\varphi + \alpha_4) - P_5 \sin \varphi.$$

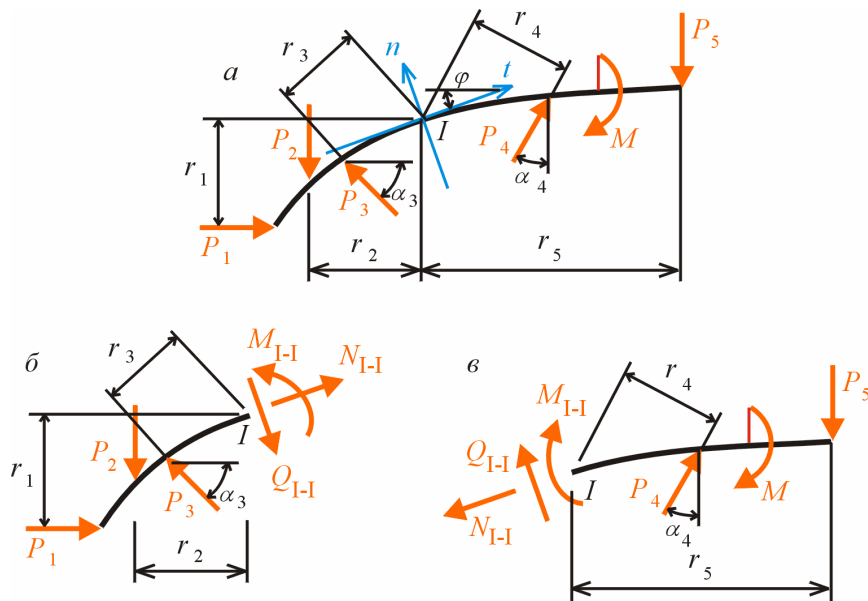


Рис.2.38

Слід зауважити, що при обчисленні величин Q і N знаки проекцій сил на осі n і t проставляються відповідно до правила знаків поперечних і поздовжніх сил, а не до напрямку координатних осей.

Визначення внутрішніх сил в перерізі стержня може бути зведено до розв'язання зовнішньої задачі, якщо розглядати стержень як два окремих стержні, з'єднаних в перерізі припайкою. У цьому випадку згинальний момент у перерізі може тлумачитись як реактивний момент у припайці, а поперечна і поздовжня сили – як складові реакції припайки, відповідно паралельна і перпендикулярна до осі стержня в перерізі. Для визначення складових реакції припайки стержень перерізається по припайці та складаються рівняння рівноваги лівої (рис. 2.38,б) або правої (рис.2.38,в) частини стержня.

2.8. Кінематичний метод

Кінематичний метод ґрунтується на принципі можливих переміщень, згідно з яким для будь-якої зрівноваженої системи сума робіт всіх сил на будь-яких можливих нескінченно малих переміщеннях дорівнює нулю:

$$A = 0. \quad (2.7)$$

Відповідно до цього принципу для визначення реакції якоїсь в'язі необхідно відкинути цю в'язь і натомість прикласти реакцію в'язі як зовнішню силу невідомої величини. Далі потрібно надати системі нескінченно мале переміщення в напрямі відкинутої в'язі, побудувати відхилений стан і прирівняти нулю суму робіт всіх зовнішніх сил на утворених переміщеннях. Шукана реакція визначиться із розв'язку цього рівняння.

Наприклад, обчислимо опорну реакцію V_B балки (рис.2.39,а).

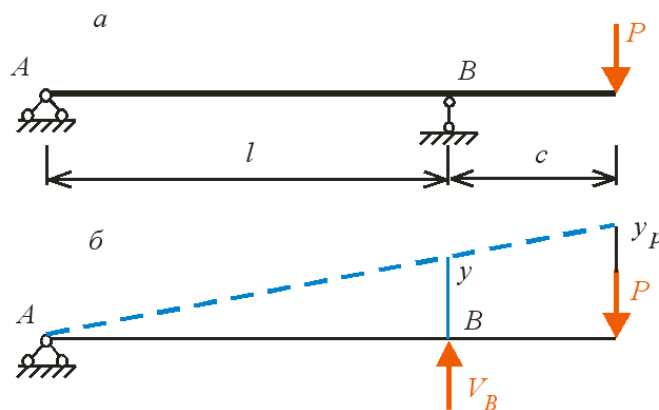


Рис.2.39

Відкинувши опору B (рис.2.39,б), одержимо механізм. Прикладемо реакцію опори V_B як зовнішню силу. Надамо переміщення в точці B у напрямку цієї сили. Сума робіт всіх сил становитиме

$$A = -Py_p + V_B y = 0,$$

звідки $V_B = Py_p / y$.

З подібності трикутників

$$\frac{y_p}{y} = \frac{l+c}{l}.$$

Остаточо маємо

$$V_B = \frac{l+c}{l} P.$$

2.9. Матриця рівнянь рівноваги

Усі елементи будівельних конструкцій повинні перебувати у стані рівноваги. Виходячи з умов рівноваги обчислюються опорні реакції і внутрішні зусилля в окремих елементах. Але і системи, складені з елементів, також повинні перебувати у стані рівноваги. Розглянемо складання рівнянь рівноваги для плоскої стержневої системи.

У будь-якій стержневій системі можна виділити два типи елементів: стержні і вузли. Під вузлами розумітимемо точки, де з'єднуються кілька стержнів. Сукупність рівнянь рівноваги, складених для кожного стержня і для кожного вузла, може розглядатися як система рівнянь рівноваги всієї стержневої системи. Оскільки в кожному стержні за невідомі величини можна прийняти 6 кінцевих зусиль (M, Q, N – на одному і M, Q, N – на протилежному кінці стержня), а також опорні реакції у вузлах, то для системи, яка містить S стержнів і R опорних реакцій, загальна кількість невідомих становитиме $k=6S+R$. З іншого боку, для кожного стержня і для кожного вузла можна скласти по три рівняння рівноваги. Отже, якщо система з S стержнями має u вузлів, то загальна кількість рівнянь становитиме $m=3S+3u$.

Рівняння рівноваги для вузлів доцільно записувати, використовуючи загальну систему координат усієї стержневої системи. При складанні рівнянь рівноваги для стержнів виявляється зручним обирати для кожного стержня свою власну систему координат $x'y'$. Початок такої системи координат розташовують на кінці стержня, який прилягає до вузла із меншим номером. Цю точку вважають початком, а протилежну – кінцем стержня. Вісь x' спрямовують вздовж стержня від його початку до кінця, а вісь y' – перпендикулярно до стержня. Таку систему

координат називають **місцевою** або **локальною**.

Розглянемо стержневу систему (рис.2.40,а), яка складається з трьох стержнів і чотирьох вузлів. Розкладання системи на стержні і вузли показано на рис.2.40,б.

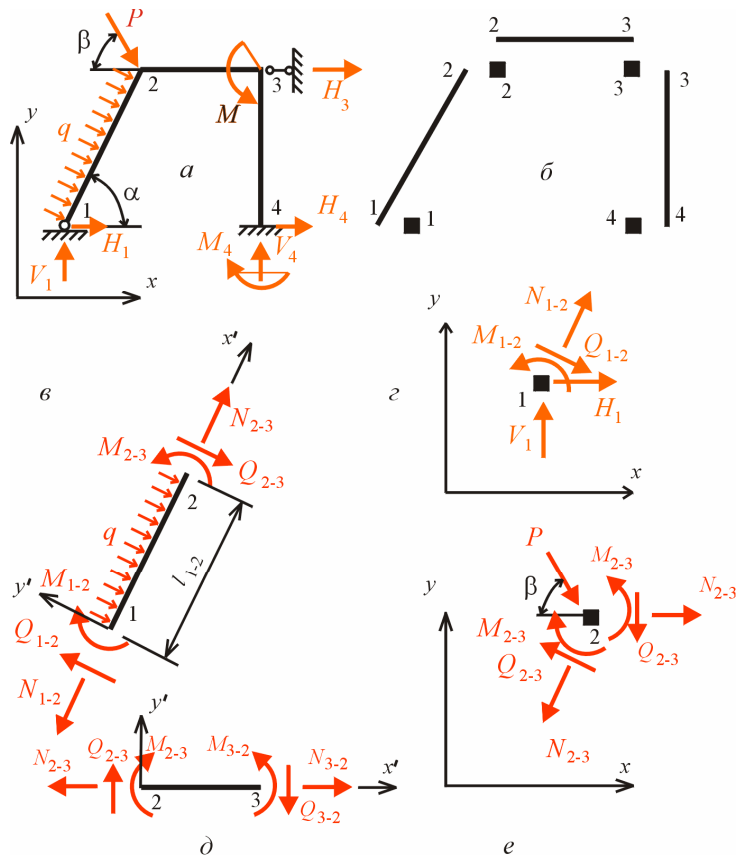


Рис.2.40

Внутрішні зусилля в перерізах стержня 1-2 (рис.2.40.,в) спрямовані відповідно до правила знаків для простих балок: додатні поздовжні сили викликають розтягування стержня, поперечні сили намагаються повернути стержень за годинниковою стрілкою, згинальні моменти викликають розтягнення в “нижньому” волокні стержня (розташування “верхнього” або “нижнього” волокна визначається напрямом осі y' місцевої системи координат стержня).

З умов рівноваги стержня 1-2 маємо:

$$\begin{aligned} \sum F_{x'} = 0 &\Rightarrow -N_{1-2} + N_{2-1} = 0; \\ \sum F_{y'} = 0 &\Rightarrow Q_{1-2} - Q_{2-1} - ql_{1-2} = 0; \\ \sum M_1 = 0 &\Rightarrow Q_{2-1}l_{1-2} + M_{1-2} - M_{2-1} + ql_{1-2}^2 / 2 = 0. \end{aligned}$$

Для вузла 1 (рис.2.40,г)

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0 &\Rightarrow H_1 + N_{1-2}\cos\alpha + Q_{1-2}\sin\alpha = 0; \\ \sum F_y = 0 &\Rightarrow V_1 + N_{1-2}\sin\alpha - Q_{1-2}\cos\alpha = 0; \\ \sum M_1 = 0 &\Rightarrow -M_{1-2} = 0. \end{aligned}$$

Для стержня 2-3 (рис.2.40,г)

$$\begin{aligned} \sum F_{x'} = 0 &\Rightarrow -N_{2-3} + N_{3-2} = 0; \\ \sum F_{y'} = 0 &\Rightarrow Q_{2-3} - Q_{3-2} = 0; \\ \sum M_2 = 0 &\Rightarrow Q_{3-2}l_{2-3} + M_{2-3} - M_{3-2} = 0. \end{aligned}$$

Для вузла 2 (рис.2.40,е)

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0 &\Rightarrow N_{2-3} - N_{2-1}\cos\alpha - Q_{2-1}\sin\alpha + P\cos\beta = 0; \\ \sum F_y = 0 &\Rightarrow -Q_{2-3} - N_{2-1}\sin\alpha + Q_{2-1}\cos\alpha - P\sin\beta = 0; \\ \sum M_2 = 0 &\Rightarrow -M_{2-3} + M_{2-1} = 0. \end{aligned}$$

Для стержня 3-4

$$\begin{aligned} \sum F_{x'} = 0 &\Rightarrow -N_{3-4} + N_{4-3} = 0; \\ \sum F_{y'} = 0 &\Rightarrow Q_{3-4} - Q_{4-3} = 0; \\ \sum M_3 = 0 &\Rightarrow Q_{4-3}l_{3-4} + M_{3-4} - M_{4-3} = 0. \end{aligned}$$

Аналогічні рівняння можна скласти для вузла 3:

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0 &\Rightarrow -N_{3-2} + Q_{3-4} + H_3 = 0; \\ \sum F_y = 0 &\Rightarrow -Q_{3-2} - N_{3-4} = 0; \\ \sum M_3 = 0 &\Rightarrow M_{3-2} - M_{3-4} - M = 0 \end{aligned}$$

і для вузла 4:

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0 &\Rightarrow Q_{4-3} + H_4 = 0; \\ \sum F_y = 0 &\Rightarrow N_{4-3} + V_4 = 0; \\ \sum M_4 = 0 &\Rightarrow M_{4-3} + M_4 = 0. \end{aligned}$$

Одержані рівняння можна записати у вигляді табл.2.1, де кожен рядок відповідає одному рівнянню, а кожен стовпець – невідомому зусиллю або опорній реакції.

Таблиця 2.1

N_{1-2}	Q_{1-2}	M_{1-2}	N_{2-1}	Q_{2-1}	M_{2-1}	V_1	H_1	N_{2-3}	...	1
-1	0	0	1	0	0	0	0	0	...	0
0	1	0	0	-1	0	0	0	0	...	ql_{1-2}
0	0	1	0	l_{1-2}	-1	0	0	0	...	$-ql_{1-2}^2/2$
$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	0	0	0	0	0	1	0	...	0
$\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	0	0	0	0	1	0	0	...	0
0	0	1	0	0	0	0	0	0	...	0
0	0	0	0	0	0	0	0	-1	...	0
...

У матричній формі рівняння рівноваги матимуть вигляд

$$\mathbf{A}\vec{\mathbf{S}} = \vec{\mathbf{F}}, \tag{2.8}$$

де \mathbf{A} – матриця коефіцієнтів рівнянь рівноваги:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & l_{1-2} & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \hline \cos\alpha & \sin\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \sin\alpha & -\cos\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & l_{2-3} & 0 & 0 & \dots \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}.$$

Сукупність внутрішніх зусиль на кінцях стержнів, а також опорних реакцій стержневої системи представлені вектором

$$\vec{\mathbf{S}}^T = \{N_{1-2} \quad Q_{1-2} \quad M_{1-2} \quad N_{2-1} \quad Q_{2-1} \quad M_{2-1} \quad V_1 \quad H_1 \quad N_{2-3} \quad \dots\}.$$

Вплив зовнішніх навантажень характеризується вектором

$$\vec{\mathbf{F}}^T = \{0 \quad ql_{1-2} \quad -ql_{1-2}^2/2 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \dots\}.$$

Залежно від кількості стержнів, вузлів і опорних в'язей можливі три випадки:

- $n = m$, тобто кількість рівнянь відповідає кількості невідомих.. У цьому випадку матриця коефіцієнтів рівнянь рівноваги \mathbf{A} є квадратною (рис.2.41,а).

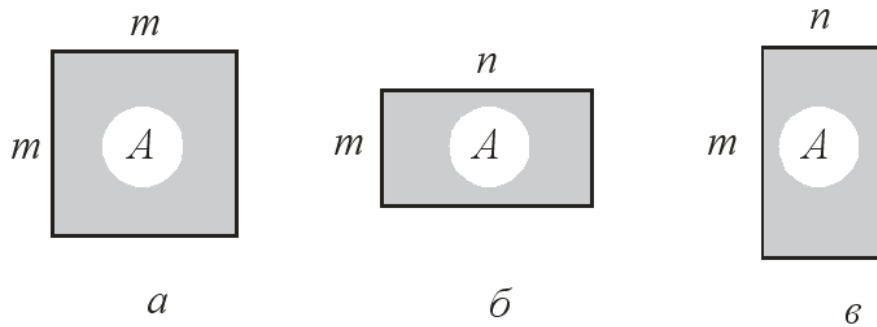


Рис.2.41

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kk} \end{bmatrix}.$$

Вектор зусиль визначається як розв'язок матричного рівняння

$$\vec{\mathbf{S}} = \mathbf{A}^{-1} \vec{\mathbf{F}}.$$

Наявність розв'язку означає, що система, яка розглядається, є геометрично незмінюваною і статично визначуваною.

Натомість, якщо матриця \mathbf{A} є особливою, тобто якщо її визначник дорівнює нулю, то обернена матриця \mathbf{A}^{-1} не існує, і, отже, рівняння не має розв'язку. Означений випадок відповідає миттєвій змінюваності системи.

- $n > m$. Матриця \mathbf{A} є прямокутною: кількість стовпців перевищує кількість рядків ([рис.2.41,б](#)), тобто кількість невідомих перевищує кількість рівнянь. Це означає, що вихідна система є геометрично незмінюваною і статично невизначуваною.
- $n < m$. Матриця \mathbf{A} є прямокутною: кількість стовпців менше ніж кількість рядків ([рис.2.41,в](#)), тобто кількість рівнянь перевищує кількість невідомих. Вихідна система є геометрично змінюваною.

Отже, вигляд матриці коефіцієнтів рівнянь рівноваги може розглядатись як статичний критерій геометричної незмінюваності споруди.

Різновидом статичного критерію геометричної незмінюваності є спосіб нульового навантаження, який полягає в розрахунку системи при відсутності зовнішніх навантажень.

Розглянемо, наприклад, геометрично незмінювану систему двох дисків, що пов'язані трьома стержнями (рис.2.42,а), що не паралельні і не перетинаються в одній точці, тобто за способом Шухова за відсутності зовнішніх сил.

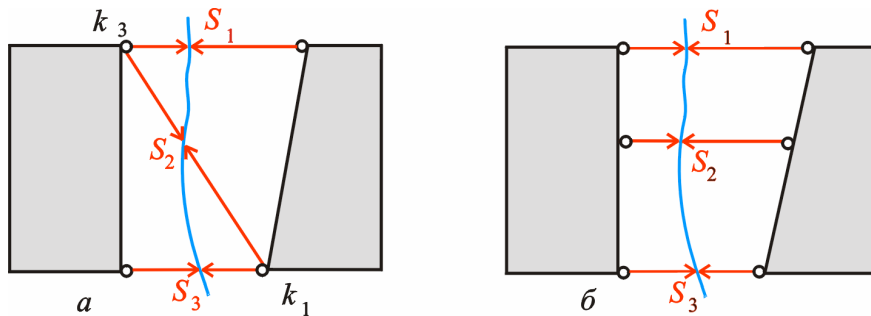


Рис.2.42

Реакції у стержнях обчислюють з трьох умов рівноваги:

$$\begin{aligned} \sum M_{k_1} = 0 &\Rightarrow S_1 = 0; \\ \sum M_{k_3} = 0 &\Rightarrow S_3 = 0; \\ \sum F_y = 0 &\Rightarrow S_2 = 0. \end{aligned}$$

Отже, в геометрично незмінюваній системі в разі відсутності зовнішнього навантаження всі реакції дорівнюють нулю.

У миттєво змінюваній системі (рис.2.42,б), що утворена з двох дисків, які поєднуються трьома паралельними стержнями, умова рівноваги $\sum F_y = 0$ виконується тотожно при будь-яких величинах реакцій розсічених в'язей, в тому числі і відмінних від нуля. Таким чином, неможливо довести дорівнювання нулю всіх реакцій в'язей.

Із розглянутих прикладів можна зробити висновок: якщо на базі рівнянь рівноваги можна довести, що за відсутності зовнішніх навантажень реакції всіх в'язей дорівнюють нулю, система геометрично незмінювана. Якщо це довести неможливо і відмінні від нуля реакції задовольняють умовам рівноваги, система миттєво змінювана.

2.10. Особливості роботи геометрично змінюваних систем

Як вже зазначалося, геометрично змінювані системи не зберігають своєї первісної форми при дії зовнішніх навантажень. Але це не означає, що зміна форми такої системи виключає можливість її використання. Характерним прикладом такої системи є гнучка нитка. Ступінь геометричної змінюваності гнучкої нитки нескінченно велика, оскільки положення її точок на площині

визначається нескінченною кількістю параметрів. Вона набуває тієї або іншої форми залежно від вигляду зовнішнього навантаження (рис.2.43).

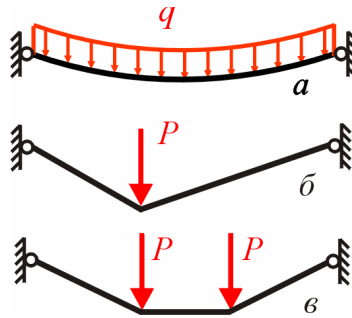


Рис.2.43

Проаналізуємо докладніше роботу таких систем. В процесі аналізу геометрично змінювані системи можуть розглядатися як такі, що мають мінімально необхідну кількість в'язей, але реакції в одній або в кількох в'язях дорівнюють нулю за будь-яких навантажень.

Розглянемо стержень *AB*, який прикріплено до основи за допомогою шарніра *A* і завантажено зовнішньою силою *P* (рис.2.44,а).

Дана система є геометрично змінюваною, оскільки диск *AB* поєднуються з диском –“земля” лише за допомогою шарніра. Отже в системі не вистачає однієї кінематичної в'язі. Умовно накладемо цю в'язь, аби система перетворилася на геометрично незмінювану (рис.2.44,б) – на кінці *B* додамо опорний стержень.

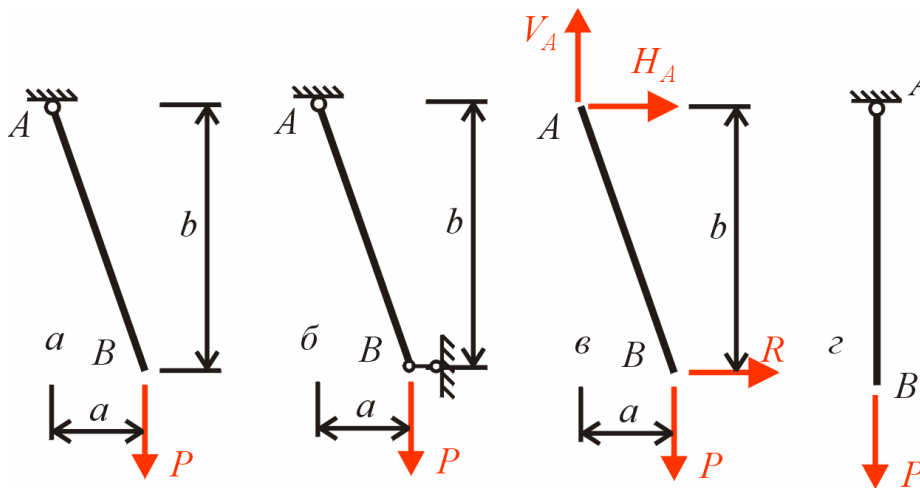


Рис.2.44

Опорна реакція у стержні може бути обчислена з рівняння рівноваги елемента *AB*, який відсічений від опор (рис.2.44,в):

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow P \cdot a - R \cdot b = 0$$

Тобто момент зовнішньої сили P зрівноважується моментом реактивної сили в додатковому опорному стержні.

Для еквівалентності заданої (рис.2.44,а) і перетвореної (рис.2.44,б) схем поставимо вимогу рівності нулю реакції в додатковому опорному стержні. Виходячи з цього момент зовнішньої сили буде невірноваженим. Під дією цього моменту елемент AB буде обертатись стосовно точки A , причому момент сили P змінюватиметься внаслідок зміни плеча a . Нарешті стержень дійде положення, коли плече a дорівнюватиме нулю (рис.2.44,г). В цьому положенні при навантаженні, що розглядається, рівняння моментів задовольняється тотожно. Отже система перебуватиме в стані рівноваги і може бути розрахована звичайними методами.

Наступний приклад. Розглянемо систему, зображену на рис.2.45,а.

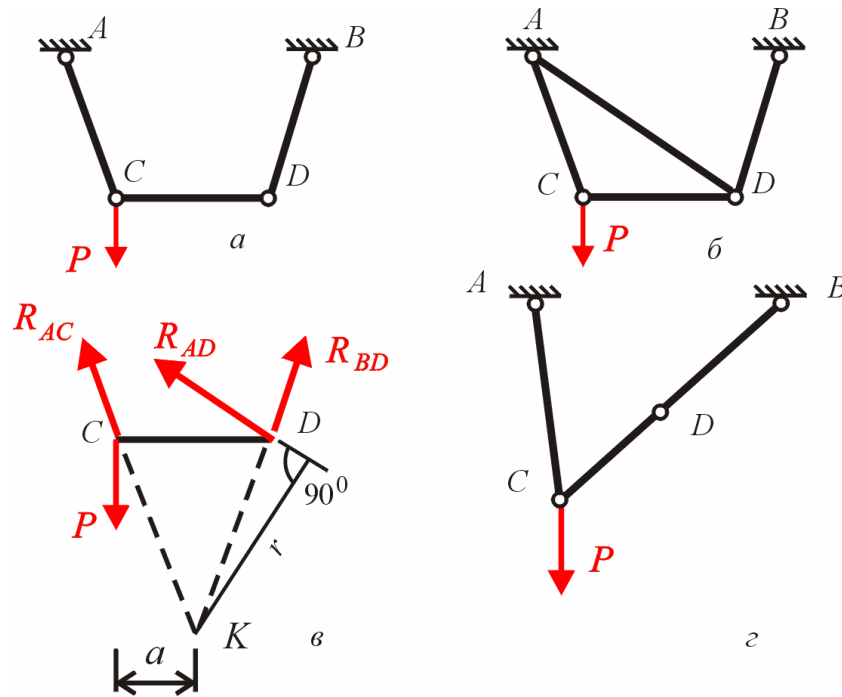


Рис.2.45

Система утворена з'єднанням диска CD із диском –“земля” за допомогою лише двох кінематичних в'язей AC і BD . Вона є геометрично змінюваною: не вистачає однієї кінематичної в'язі. Для перетворення її у геометрично незмінювану накладемо на систему додаткову в'язь – стержень AD (рис. 2.45,б). Отже, можна розглядати знов утворену систему як таку, що утворена способом Шухова: диск CD з'єднується з диском–“земля” за допомогою трьох кінематичних в'язей: AC , AD і BD . Для визначення реакцій в цих в'язях необхідно відокремити диск CD від “землі”, за допомогою перерізу, що розтинає ці в'язі (рис.2.45,в), і скласти три рівняння рівноваги. Так, для обчислення реакції R_{AD} необхідно скласти рівняння моментів стосовно точки K :

$$\sum M_K = 0 \Rightarrow P \cdot a + R_{AD} \cdot r = 0.$$

Якщо поставити вимогу рівності нулю реакції R_{AD} , то елемент CD знаходитиметься під дією незрівноваженого моменту $P \cdot a$. В результаті елемент CD , а також в'язі AC і BD будуть переміщуватися, причому плече сили P буде змінюватися. В той момент, коли стержні CD і BD розташовуватимуться на одній прямій (рис.2.45,г), моментна точка реакції R_{AD} буде збігатися з точкою C . Отже, плече зовнішньої сили P стане нульовим, зовнішній момент зникне, і рівняння моментів буде виконуватись тотожно. Таким чином, при зазначеному навантаженні геометрично змінювана система може умовно розглядатись як геометрично незмінювана.

На підставі наведених міркувань можна дійти такого висновку: **геометрично змінювані системи можуть змінювати свою форму, пристосовуючись до зовнішнього навантаження, і в такому стані розраховуватись як геометрично незмінювані.**