МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Київський національний університет будівництва і архітектури

О.Л. Соловей

Вища математика

Конспект лекцій
для студентів спеціальності
131 Прикладна механіка, 133 Галузеве машинобудування

Київ 2024

МОДУЛЬ 1. ЕЛЕМЕНТИ ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ

Тема 1. Визначники, їх обчислення

Теоретичні відомості до теми

1. Визначник та методи його розкриття
2. Властивості визначників
3. Мінори. Алгебраїчні доповнення

1. Визначник та методи його розкриття

Озн. *Вираз виду* $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$ *називається* ***визначником*** *(детермінантом)* ***другого порядку***.

Озн. *Вираз виду* $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{matrix} a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + \cdot a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + \cdot a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - \\ - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33}. \end{matrix}$

називається ***визначником*** *(детермінантом)* ***третього порядку***.

Позначається Δ або det A. Поняття визначника ввів В. Лейбніц.

Для обчислення визначників третього порядку існує правило трикутника, яке схематично можна зобразити так (Рис.1.1.):

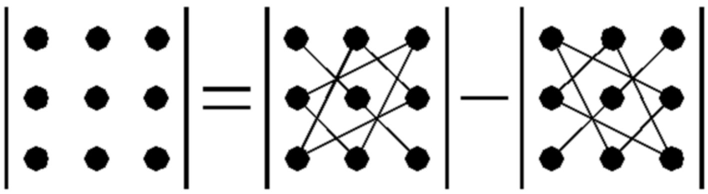


Рис.1.1. Правило трикутника

2. Властивості визначників

Значення визначника ***не змінюється****, якщо*

- його транспонувати, тобто замінити відповідними рядки відповідними стовпцями чи навпаки;
- до елементів деякого рядка (стовпця) додати елементи іншого рядка (стовпця), помножені на довільне число.

Значення визначника ***дорівнює нулю****, якщо:*

- визначник містить нульовий рядок (стовпчик);
- визначник має два однакових рядка (стовпця);

– всі елементи одного рядка (стовпця) визначника є пропорційними до елементів другого рядка (стовпця) цього визначника.

*Значення визначника **зміниться на протилежне**, якщо:*

– переставити місцями два довільних рядка (стовпчика).

3. Мінори. Алгебраїчні доповнення

Озн.: Мінором *M_{ij} елемента a_{ij} називається визначник, який дістають з визначника матриці A викреслюванням i-го рядка та j-го стовпця.*

Озн.: Алгебричним доповненням A_{ij} *елемента a_{ij} називається відповідний мінор, взятий зі знаком «плюс», якщо сума його індексів $(i+j)$ – парна, і зі знаком «мінус», якщо сума його індексів$(i+j)$ – непарна* $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

Озн. *Вираз виду* $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$ *називається визначником n-го порядку.*

Визначник вищого порядку обчислюють за допомогою визначників нижчого порядку розкладом за елементами якогось рядка або стовпця.

Теорема 1.1. *(Теорема розкладу). Визначник n-го порядку дорівнює сумі добутків елементів деякого рядка (стовпця) на їх алгебричні доповнення:*

$$detA = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij}$$

Метод розкладу визначника за елементами рядків чи стовпців є найшвидшим при обчисленні визначників великих розмірів.

Зразки розв'язування задач

Приклад. *Обчислити визначники:*

а) $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -6 & 2 \end{vmatrix}$***; б)*** $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix}$***; в)*** $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -5 & 3 \end{vmatrix}$.

Розв'язання:

а) Використовуючи формулу для обчислення визначника другого порядку, маємо:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -6 & 2 \end{vmatrix} = 1\cdot 2-(-6)\cdot 3 = 2+18 = 20$$

б) Користуючись правилом трикутника, знаходимо

$$\begin{vmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{-1} & \mathbf{3} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{3} & \mathbf{2} \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{5} \end{vmatrix} = \mathbf{2\cdot 3\cdot 5+(-1)\cdot 2\cdot 1+3\cdot(-2)\cdot 2-3\cdot 3\cdot 1-(-2)\cdot(-1)\cdot 5-2\cdot 2\cdot 2=}$$

$$\mathbf{=30-2-12-9-10-8=-11.}$$

в) Визначник четвертого порядку обчислимо за допомогою теореми розкладу. Для спрощення обчислень накопичимо нулі у другому стовпчику, для чого, використовуючи властивість визначника, додамо до відповідних елементів першого і другого рядків відповідні елементи третього рядка, а від елементів четвертого рядка віднімемо відповідні елементи третього рядка помножені на три.

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -5 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2+1 & -1+1 & 3+(-1) & 4-2 \\ 0+1 & -1+1 & 2+(-1) & 1+1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2-3\cdot 1 & 3-3\cdot 1 & -5-3\cdot(-1) & 3-3\cdot 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 & 6 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & -2 & -3 \end{vmatrix}.$$

Розкладемо визначник четвертого порядку за елементами другого стовпця:

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 & 6 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & -2 & -3 \end{vmatrix} = a_{12}\cdot A_{12}+a_{22}\cdot A_{22}+a_{32}\cdot A_{32}+a_{42}\cdot A_{42} =$$

$$=0\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & -3 \end{vmatrix}+0\cdot(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & -3 \end{vmatrix}+1\cdot(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & -3 \end{vmatrix}+0\cdot(-1)^{4+2}\begin{vmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & -3 \end{vmatrix} =$$

$$=-[3\cdot 1\cdot(-3)+2\cdot 3\cdot 1+1\cdot(-2)\cdot 6-6\cdot 1\cdot 1-3\cdot(-2)\cdot 3-2\cdot 1\cdot(-3)]=-3.$$

Завдання для практичних занять та самостійного виконання

Завдання № 1-20. Обчислити визначники третього порядку:

1. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 6 & -2 & 2 \\ 4 & -1 & 1 \end{vmatrix}$. 6. $\begin{vmatrix} 1 & -4 & 7 \\ -2 & 5 & -8 \\ 3 & -6 & 9 \end{vmatrix}$. 11. $\begin{vmatrix} -5 & 2 & 1 \\ 7 & -7 & -3 \\ 11 & 14 & 1 \end{vmatrix}$. 16. $\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & -1 \\ 5 & 1 & 3 \end{vmatrix}$.

2. $\begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & -1 \end{vmatrix}$.   7. $\begin{vmatrix} 29 & 22 & 17 \\ -16 & -4 & 25 \\ 13 & -3 & -6 \end{vmatrix}$.   12. $\begin{vmatrix} 10 & 1 & -5 \\ -13 & -4 & 12 \\ 8 & 1 & -7 \end{vmatrix}$.   17. $\begin{vmatrix} 11 & 12 & -21 \\ 10 & -18 & 3 \\ 13 & 16 & -7 \end{vmatrix}$.

3. $\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 5 \\ 4 & -2 & 3 \end{vmatrix}$.   8. $\begin{vmatrix} -30 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -12 \\ 1 & -1 & 7 \end{vmatrix}$.   13. $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 \\ -3 & 4 & -2 \\ -9 & 12 & 4 \end{vmatrix}$.   18. $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 9 \\ -3 & -5 & 2 \\ -5 & -3 & 4 \end{vmatrix}$.

4. $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & -2 \end{vmatrix}$.   9. $\begin{vmatrix} 1 & -5 & -8 \\ 2 & -6 & 3 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix}$.   14. $\begin{vmatrix} 3 & 7 & 3 \\ 1 & -4 & 5 \\ 4 & 4 & 1 \end{vmatrix}$.   19. $\begin{vmatrix} -16 & 3 & -5 \\ 21 & 8 & 2 \\ -4 & -6 & 1 \end{vmatrix}$.

5. $\begin{vmatrix} -8 & -3 & 2 \\ -9 & -2 & 4 \\ -7 & 8 & 5 \end{vmatrix}$.   10. $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 5 & 1 & 7 \end{vmatrix}$.   15. $\begin{vmatrix} -3 & 1 & 10 \\ 4 & 2 & -9 \\ 2 & -7 & 3 \end{vmatrix}$.   20. $\begin{vmatrix} 4 & 3 & -2 \\ 1 & -6 & 3 \\ 2 & 9 & 4 \end{vmatrix}$.

Завдання № 21-40. Обчислити визначники четвертого порядку:

21. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$.   28. $\begin{vmatrix} 2 & -4 & 7 & -4 \\ -1 & 4 & -5 & 3 \\ 3 & -7 & 9 & -7 \\ -7 & 14 & -21 & 14 \end{vmatrix}$.   35. $\begin{vmatrix} 4 & 5 & 1 & -9 \\ 9 & -6 & 1 & -7 \\ -2 & 3 & -1 & 2 \\ 3 & 7 & -1 & -5 \end{vmatrix}$.

22. $\begin{vmatrix} -1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & -3 & 4 & -1 \\ 3 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -2 & -3 \end{vmatrix}$.   29. $\begin{vmatrix} 2 & 0 & -4 & 0 \\ -1 & 2 & -3 & 4 \\ 1 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & 6 & -1 & 2 \end{vmatrix}$.   36. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & -3 & 2 & 1 \\ 4 & 6 & -8 & 0 \\ -6 & 9 & -2 & 1 \end{vmatrix}$.

23. $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 8 & 9 \\ 2 & -1 & -4 & 12 \\ -1 & 1 & -1 & 16 \\ 3 & 1 & 0 & -7 \end{vmatrix}$.   30. $\begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 3 \end{vmatrix}$.   37. $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$.

24. $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & -1 \\ 3 & -2 & 3 & -4 \\ 4 & -4 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 2 & -3 \end{vmatrix}$.   31. $\begin{vmatrix} -1 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 4 & -4 \end{vmatrix}$.   38. $\begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & -4 & -8 \\ -1 & -3 & -9 & -27 \\ -1 & -4 & -16 & -64 \end{vmatrix}$.

25. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & 4 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 4 & -1 \end{vmatrix}$.   32. $\begin{vmatrix} 6 & 3 & 0 & -3 \\ 3 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & -3 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 6 \end{vmatrix}$.   39. $\begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 & 12 \\ 9 & 2 & -11 & 3 \\ -9 & 5 & 10 & 4 \\ 2 & -2 & 2 & -3 \end{vmatrix}$.

26. $\begin{vmatrix} -1 & -1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & -1 & 7 \\ 6 & 3 & -1 & -1 \\ 9 & 5 & 8 & -1 \end{vmatrix}$. 33. $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 & 4 \\ 2 & -5 & 9 & 1 \\ 1 & 25 & -1 & 2 \\ 4 & 125 & -5 & 3 \end{vmatrix}$. 40. $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$.

27. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}$. 34. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -64 & -27 \\ -4 & 8 & 2 & -81 \\ 9 & -36 & -1 & -9 \\ -25 & 1 & -5 & 3 \end{vmatrix}$.

Тема 2. Матриці та дії над ними

Теоретичні відомості до теми

1. Поняття матриці
2. Дії над матрицями

1. Поняття матриці.

Озн.: ***Матрицею*** *розміру* $\mathbf{m\times n}$ *називається сукупність елементів* $\boldsymbol{a_{ij}}$*, розміщених у вигляді прямокутної таблиці, що має* $\boldsymbol{m}$ *рядків і* $\boldsymbol{n}$ *стовпців:*

$$A_{m\times n}=(a_{ij})=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Поняття матриці вперше ввели англійські математики У. Гамільтон і Д. Келі.

Перший індекс i кожного елемента a_{ij} вказує на номер рядка, в якому цей елемент розміщений, другий j – на номер стовпця. Матриці позначають прописними буквами латинського алфавіту: **A, B, C,…**В позначенні також використовують розмірність матриці $A_{m\times n}, B_{m\times n}, C_{m\times n}, \dots$

Озн.: *Матриця називається* ***числовою****, якщо її елементи* a_{ij}*– числа.*

Озн.: *Матриця називається* ***функціональною****, якщо* a_{ij} *– функції.*

Ми будемо розглядати, в основному, числові матриці.

Кажуть, що матриці А і В однакової розмірності, якщо у них однакова кількість рядків і однакова кількість стовпців.

Озн.: *Матриці $A_{m\times n}$=(a_{ij}) та $B_{m\times n}$=(b_{ij}) називаються* ***рівними (однаковими)****, якщо вони мають однакову кількість рядків та стовпців і всі їхні елементи, розташовані на однакових місцях, є рівними (тобто a_{ij}=b_{ij} для всіх значень і та j).*

Озн.: *Матриця, у якої кількість рядків дорівнює кількості стовпців (тобто* ***m = n****), називається* ***квадратною*** *матрицею порядку* ***n.***

Квадратна матриця порядку **n** має вигляд: $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$.

Елементи a_{11}, a_{22},..., a_{nn} утворюють головну діагональ матриці, а елементи a_{1n}, $a_{2(n-1)}$,..., a_{n1} – допоміжну.

Деякі квадратні матриці мають власні назви. Зокрема, до них відносяться нульова, діагональна та одинична матриці.

Озн.: Нульовою *називається матриця* ***O****, всі елементи якої – нулі.*

Озн.: *Якщо всі елементи квадратної матриці, окрім розташованих на головній діагоналі, дорівнюють нулю, то в цьому випадку матриця називається* ***діагональною****.*

Озн.*: Якщо всі елементи діагональної матриці дорівнюють одиниці, то вона називається* ***одиничною*** *матрицею.*

Одинична матриця має вигляд: $\boldsymbol{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$.

Озн.: *Матрицю, яку одержують із матриці* ***A*** *заміною її рядків відповідними стовпцями, називають* ***транспонованою*** *і позначають* $\boldsymbol{A^T}$**.**

Транспонована матриця має вигляд: $\boldsymbol{A^T} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$.

2. Дії над матрицями

Озн.: Сумою (різницею) *матриць A=(a_{ij}) та B=(b_{ij}) однакової розмірності (кількістю рядків та стовпців матриці A дорівнює кількості стовпців і рядків матриці B) називається матриця C=A+B, де c_{ij}=a_{ij}+b_{ij} (i=1,…,m; j=1,…,n).*

Зауваження*. Додавати або віднімати можна тільки матриці однакової розмірності!*

Озн.:* *Добутком *матриці* ***А*** *на число* $A=(a_{ij})$ *на число* k *називається матриця* $B=k\cdot A$ *кожен елемент якої утворюється за правилом* $b_{ij}= k\cdot a_{ij}$, $(i=1,\dots,m;\ j=1,\dots,n)$..

Тобто при множенні матриці на число (числа на матрицю) треба всі елементи матриці помножити на це число.

***Властивості додавання матриць*:**

Для довільних матриць **А, В, С** однакової розмірності і довільних чисел **α** та **β** справджуються рівності:

$A+B = B+A$ *(комутативна властивість додавання);*

$A+(B+C)=(A+B)+C$ *(асоціативна властивість додавання);*

$(\alpha+\beta)A = \alpha A+\beta A;$

$\alpha(AB) =(\alpha A)B;$

$k\cdot O = O\cdot k = O\ A+O = O+A =A;$

$\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A; \quad (A\alpha)\beta = A(\alpha\beta);$

Озн.:* *Добутком *матриці* $\boldsymbol{A_{m\times n}}=(a_{ij})$ *на матрицю* $\boldsymbol{B_{n\times p}}=(b_{ij})$ *називається матриця* $\boldsymbol{C_{m\times p}=AB}$, *елементи якої* $\boldsymbol{c_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}}$.

Зауваження. *Перемножати можна тільки узгоджені матриці, в яких кількість стовпців першої матриці дорівнює кількості рядків другої. Тобто, з існування добутку* ***АВ*** *не означає, що існує добуток* ***ВА***.

Озн.: *Якщо* ***АВ = ВА*** *, то матриці* ***А*** *і* ***В*** *називаються* ***комутативними.***

Комутативними завжди будуть квадратні матриці однакової розмірності.

***Властивості множення матриць*:**

$E\cdot A = A\cdot E = A$ *(властивість множення на одиничну матрицю);*

$O\cdot A = A\cdot O = O$ *(властивість множення на нульову матрицю);*

$(A+B)C = AC+BC\ ; \quad C(A+B) = CA+CB.$

$A\cdot B\neq B\cdot A$ *(комутативна властивість множення матриць не виконується).*

Зразки розв'яування задач

Приклад 1. *Задано матриці* $A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}5&6\\7&8\end{pmatrix}$ *та* $C=\begin{pmatrix}1&3\\2&4\\5&6\end{pmatrix}$.

Обчислити:

а) усі можливі суми матриць;

б) -5·А;

в) усі можливі добутки матриць;

г) протранспонувати всі матриці.

Розв'язання:

а) Додавати можна лише матриці А та В, так як вони однакової розмірності: $A+B=\begin{pmatrix}1+5 & 2+6\\ 3+7 & 4+8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & 8\\ 10 & 12\end{pmatrix}$. Вести мову про суми виду А+С та В+С не має сенсу.

б) $-5\cdot A=\begin{pmatrix}-5\cdot 1 & -5\cdot 2\\ -5\cdot 3 & -5\cdot 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5 & -10\\ -15 & -20\end{pmatrix}$.

в) Так як матриці А та В квадратні однакової розмірності, то можна виконувати їх множення:

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5 & 6\\ 7 & 8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot 5+2\cdot 7 & 1\cdot 6+2\cdot 8\\ 3\cdot 5+4\cdot 7 & 3\cdot 6+4\cdot 8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}19 & 22\\ 43 & 50\end{pmatrix},$$

$$B\cdot A=\begin{pmatrix}5 & 6\\ 7 & 8\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\cdot 1+6\cdot 3 & 5\cdot 2+6\cdot 4\\ 7\cdot 1+8\cdot 3 & 7\cdot 2+8\cdot 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}23 & 34\\ 31 & 46\end{pmatrix}.$$

Аналогічно так як кількість стовпців матриці С дорівнює кількості рядків матриць А та В, то можна виконати множення:

$$C\cdot A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\\ 5 & 6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot 1+3\cdot 3 & 1\cdot 2+3\cdot 4\\ 2\cdot 1+4\cdot 3 & 2\cdot 2+4\cdot 4\\ 5\cdot 1+6\cdot 3 & 5\cdot 2+6\cdot 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10 & 14\\ 14 & 20\\ 23 & 34\end{pmatrix},$$

$$C\cdot B=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\\ 5 & 6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5 & 6\\ 7 & 8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot 5+3\cdot 7 & 1\cdot 6+3\cdot 8\\ 2\cdot 5+4\cdot 7 & 2\cdot 6+4\cdot 8\\ 5\cdot 5+6\cdot 7 & 5\cdot 6+6\cdot 8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}26 & 30\\ 38 & 44\\ 67 & 78\end{pmatrix}.$$

Множення матриць А·С та В·С не має сенсу.

г) $A^T=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\end{pmatrix}, B^T=\begin{pmatrix}5 & 7\\ 6 & 8\end{pmatrix}, C^T=\begin{pmatrix}1 & 2 & 5\\ 3 & 4 & 6\end{pmatrix}$.

***Приклад** 2. Обчислити обернену матрицю A^{-1} до заданої* $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 1 & -2 & 3\\ 3 & 1 & 3\end{pmatrix}$

Зробити перевірку, обчисливши добуток $A\cdot A^{-1}$.

Розв'язання:

Знайдемо головний визначник матриці А: $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 10 \neq 0,$ отже A^{-1} існує.

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = (-2)\cdot 3 - 3\cdot 1 = -9, \qquad A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = -[1\cdot 3 - 3\cdot 3] = 6,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot 1 - (-2)\cdot 3 = 7, \qquad A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -[2\cdot 3 - 1\cdot 1] = -5,$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 1\cdot 3 - 3\cdot 1 = 0, \qquad A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -[1\cdot 1 - 2\cdot 3] = 5,$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 2\cdot 3 - (-2)\cdot 1 = 8, \qquad A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -[1\cdot 3 - 1\cdot 1] = -2,$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 1\cdot(-2) - 2\cdot 1 = -4,$$

За правилом записуємо обернену матрицю:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\cdot\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \frac{1}{10}\cdot\begin{pmatrix} -9 & -5 & 8 \\ 6 & 0 & -2 \\ 7 & 5 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,9 & -0,5 & 0,8 \\ 0,6 & 0 & -0,2 \\ 0,7 & 0,5 & -0,4 \end{pmatrix}.$$

Виконаємо перевірку, для цього обчислимо добуток $A \cdot A^{-1}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -0,9 & -0,5 & 0,8 \\ 0,6 & 0 & -0,2 \\ 0,7 & 0,5 & -0,4 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1\cdot(-0,9)+2\cdot 0,6+1\cdot 0,7 & 1\cdot(-0,5)+2\cdot 0+1\cdot 0,5 & 1\cdot 0,8+2\cdot(-0,2)+1\cdot(-0,4) \\ 1\cdot(-0,9)+(-2)\cdot 0,6+3\cdot 0,7 & 1\cdot(-0,5)+(-2)\cdot 0+3\cdot 0,5 & 1\cdot 0,8+(-2)\cdot(-0,2)+3\cdot(-0,4) \\ 3\cdot(-0,9)+1\cdot 0,6+3\cdot 0,7 & 3\cdot(-0,5)+1\cdot 0+3\cdot 0,5 & 3\cdot 0,8+1\cdot(-0,2)+3\cdot(-0,4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

Так як $A\cdot A^{-1} = E$, то A^{-1} знайдена правильно.

Завдання для практичних занять та самостійного виконання

Завдання № 41-60. Виконати дії над матрицями.

41. $A\cdot B - C^{т}$, де $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & -4 & 5 \end{pmatrix}.$

42. $A\cdot B - B\cdot A$, де $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$

43. A^2, де $A=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 2 & -1\end{pmatrix}$.

44. 3A+2B, де $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}2 & 3 & 1\\ 1 & 1 & 2\\ 3 & 2 & 3\end{pmatrix}$.

45. $3A^2-EA^3$, де $A=\begin{pmatrix}2 & 5\\ 1 & 3\end{pmatrix}, E=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ – одинична матриця.

46. A·B·C, де $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$.

47. C^3, де $C=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$.

48. B^2-4A, де $B=\begin{pmatrix}3 & 5\\ 5 & 9\end{pmatrix}, A=\begin{pmatrix}3 & -2\\ 5 & -4\end{pmatrix}$.

49. A·(B+C), де $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 3 & 1 & 1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 3\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}4\\ 5\\ 6\end{pmatrix}$.

50. $A\cdot B^T$, де $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 2 & 1 & -1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$.

51. $A\cdot(B+C^T)$, де $A=\begin{pmatrix}2 & 2 & 4\\ -4 & 1 & -2\\ 3 & -1 & 1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}4 & -1\\ 8 & 0\\ 1 & 9\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}-3 & 8 & 12\\ 1 & 6 & 7\end{pmatrix}$.

52. B – B·A, де $A=\begin{pmatrix}1 & 3 & -2\\ 2 & -1 & 1\\ 1 & 2 & 2\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}4 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 3\\ -2 & 1 & -1\end{pmatrix}$.

53. $3A^2$, де $A=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 2\\ 3 & 1 & -4\\ 5 & 2 & -1\end{pmatrix}$.

54. $3A^T$-7B, де $A=\begin{pmatrix}2 & 4 & 5\\ -1 & 1 & 6\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}-3 & 5 & 1\\ 4 & 2 & 3\\ 1 & -1 & 2\end{pmatrix}$.

55. $5A^2$, де $A=\begin{pmatrix}2 & 4 & 1\\ -1 & 0 & 6\\ 3 & 2 & 8\end{pmatrix}$, .

56. A·B·C, де $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 4 & -3\\ -6 & 5\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ 7 & 1 & 1\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}-1 & 4 & 1\\ 2 & 0 & 3\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$.

57. B – A·B, де $A=\begin{pmatrix}1 & 5 & 1\\ 3 & -2 & 3\\ -4 & 6 & -8\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}-3\\ 2\\ 1\end{pmatrix}$.

58. B^2-A·B, де $B=\begin{pmatrix}3 & -4\\ 2 & 5\end{pmatrix}, A=\begin{pmatrix}2 & -2\\ 1 & -1\end{pmatrix}$.

59. 2A·B, де $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 3 & 1 & 1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}2 & 6 & 5\\ -1 & 5 & 7\\ 3 & -3 & -1\end{pmatrix}$, .

60. $B\cdot A^T$, де $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 2 & 1 & -1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$.

Завдання № 61-80. Знайти обернену матрицю A^{-1} до заданої A. Зробити перевірку, обчисливши добуток $A \cdot A^{-1}$.

61. $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$. 62. $A=\begin{pmatrix}2 & 2 & 3\\ 1 & -1 & 0\\ -1 & 2 & 1\end{pmatrix}$. 63. $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ -1 & 1 & 3\\ 3 & -1 & -1\end{pmatrix}$. 64. $A=\begin{pmatrix}3 & 2 & 4\\ 0 & 3 & 1\\ 1 & 1 & 3\end{pmatrix}$.

65. $A=\begin{pmatrix}-1 & 2 & -3\\ 5 & 3 & -1\\ 2 & 4 & 1\end{pmatrix}$. 66. $A=\begin{pmatrix}7 & 5 & 3\\ 0 & 7 & 5\\ 0 & 0 & 7\end{pmatrix}$. 67. $A=\begin{pmatrix}-1 & -2 & 3\\ 0 & 2 & -1\\ 3 & 2 & 2\end{pmatrix}$. 68. $A=\begin{pmatrix}2 & 3 & -1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 3 & 1\end{pmatrix}$.

69. $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 3\\ 6 & 2 & -2\\ 4 & 0 & -1\end{pmatrix}$. 70. $A=\begin{pmatrix}0 & 2 & -1\\ -2 & -1 & 2\\ 3 & -2 & -1\end{pmatrix}$. 71. $A=\begin{pmatrix}2 & 3 & 4\\ 1 & 0 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{pmatrix}$. 72. $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ -1 & 2 & 1\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix}$.

73. $A=\begin{pmatrix}1 & 5 & -5\\ 4 & 0 & 3\\ 2 & -10 & 7\end{pmatrix}$. 74. $A=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 2\\ 13 & -4 & 15\\ 7 & 0 & -4\end{pmatrix}$. 75. $A=\begin{pmatrix}0 & 5 & 6\\ 1 & 0 & 2\\ 7 & 8 & 0\end{pmatrix}$. 76. $A=\begin{pmatrix}0 & 2 & 0\\ 3 & 4 & 5\\ 6 & 7 & 8\end{pmatrix}$.

77. $A=\begin{pmatrix}2 & 4 & 5\\ 1 & 1 & 2\\ 2 & 4 & 3\end{pmatrix}$. 78. $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & -3\\ 2 & -3 & 4\\ 1 & -1 & 2\end{pmatrix}$. 79. $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ -1 & 0 & 4\\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix}$. 80. $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 4\\ -1 & 1 & 2\\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix}$.

Тема 3. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь

Теоретичні відомості до теми

1. Системи лінійних рівнянь
2. Матричний метод розв'язування системи лінійних рівнянь
3. Розв'язування систем лінійних рівнянь за формулами Крамера
4. Розв'язування систем лінійних рівнянь методом Гаусса

1. Системи лінійних рівнянь

Озн.: *Системою m лінійних рівнянь з n змінними x_1, x_2, ..., x_n називається система, яка має наступний вигляд:*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \tag{1.1}$$

де a_{ij} – коефіцієнти при змінних; b_i – вільні члени, $1 \le i \le m, \quad 1 \le j \le n.$

Озн.: *Упорядкована сукупність чисел $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$, називається* ***розв'язком системи****, якщо при заміні x_1 на a_1, x_2 на a_2, ... , x_n на a_n у кожному рівнянні системи дістанемо n правильних числових рівностей.*

Озн.: *Система, що має розв'язок, називається* ***сумісною****.*

Озн.: *Система, що не має жодного розв'язку, називається* ***несумісною****.*

Озн.: *Система з єдиним розв'язком називається* ***визначеною****.*

Озн.: *Система, що має більше, ніж один розв'язок називається* ***невизначаною****.*

Система двох лінійних рівнянь з двома змінними має вигляд:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2, \end{cases} \tag{1.2}$$

а систему трьох лінійних рівнянь з трьома змінними записують у вигляді:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_3, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases} \tag{1.3}$$

2. Матричний метод розв'язування системи лінійних рівнянь

Матричний метод роз'язання лінійних систем.

Нехай дано систему: $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_3, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases}$

Розглянемо три матриці:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

Перша матриця називається матрицею системи, друга матрицею-стовпцем змінних, третя – матрицею-стовпцем вільних членів. Тоді систему можна записати у матричному вигляді: $A \cdot X = B$. Якщо матриця системи рівнянь невироджена $(\Delta \neq 0)$, то розв'язок системи знаходимо у вигляді $X = A^{-1}B$, або

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

Зауваження: *матричний метод розв'язування систем лінійних рівнянь можна застосовувати лише тоді, коли кількість рівнянь дорівнює кількості невідомих.*

3. Розв'язування систем лінійних рівнянь за формулами Крамера

Цей метод розв'язування систем лінійних рівнянь зводиться до обчислення визначників. Так, розв'язок системи (1.2) можна знайти за формулами Крамера:

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta},$$

де $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{12} & b_2 \end{vmatrix}$, за умови, що $\Delta \neq 0.$

$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ – називається визначником системи (1.2), а $\Delta_{x_1}, \Delta_{x_2}$ – визначники, які дістають з визначника Δ заміною першого, другого стовпців відповідно стовпцем вільних членів.

Формули Крамера для системи (1.3) мають вигляд:

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta}, \quad x_3 = \frac{\Delta_{x_3}}{\Delta},$$

де $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$ - визначник системи (1.3) , а

$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$, $\Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}$, $\Delta_{x_3} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$ – визначники, які дістають з визначника Δ заміною першого, другого і третього стовпців відповідно стовпцем вільних членів.

Системи (1.2) і (1.3) мають:

а) єдиний розв'язок, коли $\Delta \neq 0$;

б) безліч розв'язків, коли $\Delta = \Delta_{x_1} = \Delta_{x_2} = 0$ $(\Delta = \Delta_{x_1} = \Delta_{x_2} = \Delta_{x_3} = 0)$;

в) не мати жодного розв'язку, коли $\Delta = 0$ і хоча б один із визначників $\Delta_{x_1}, \Delta_{x_2}$ $(\Delta_{x_1}, \Delta_{x_2}, \Delta_{x_3})$ відмінний від нуля.

Зауваження*. Формули Крамера для розв'язування систем лінійних рівнянь можна застосовувати лише тоді, коли кількість рівнянь дорівнює кількості невідомих.*

4. Розв'язування систем лінійних рівнянь методом Гауса

Метод Гауса використовують при будь-якій кількості невідомих і рівнянь. Цей спосіб полягає у послідовному виключенні невідомих з рівнянь системи. Для зручності виконання перетворень для системи (1.1) n лінійних рівнянь з m невідомими утворюють відповідну їй розширену матрицю, виписуючи коефіцієнти біля невідомих та стовпчик вільних членів:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots a_{1n} & b_1, \\ a_{21} & a_{22} & \cdots a_{2n} & b_2, \\ \cdots & \cdots & \cdots \;\; \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots a_{mn} & b_n. \end{pmatrix} \tag{1.4}$$

Матрицю (1.4) за допомогою елементарних перетворень матриці зводять до трикутного або трапецевидного виду.

При розв'язуванні системи лінійних рівнянь методом Гауса можливі наступні випадки:

– розширена матриця зведена до трикутного виду – (1.1) має єдиний розв'язок;

– розширена матриця зведена до трапецевидного виду – (1.1) має безліч розв'язків;

– зустрівся рядок виду (0 0 … 0 | $b_i \neq 0$) – (1.1) розв'язків не має.

Зразки розв'язування задач

Приклад. *Розв'язати систему лінійних рівнянь* $\begin{cases} 5x+4y-z=4 \\ -2x+y+3z=1 \\ 7x+y-2z=9 \end{cases}$ *трьома методами:*

а) за формулами Крамера,

б) матричним методом,

в) методом Гауса.

Розв'язання:

а) Обчислюємо головний визначник системи:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 4 & -1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 7 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 5\cdot 1\cdot(-2)+4\cdot 3\cdot 7+(-1)\cdot 1\cdot(-2)-(-1)\cdot 1\cdot 7-4\cdot(-2)\cdot(-2)-5\cdot 3\cdot 1=$$
$$=-10+84+2+7-16-15=52$$

Так як $\Delta \neq 0$, то можна застосовувати формули Крамера. Для цього обчислимо ще три визначники, які отримуємо із головного визначника системи послідовною заміною стовпчика з коефіцієнтів при змінних ***x, y, z*** стовпчиком вільних членів:

$$\Delta_X = \begin{vmatrix} 4 & 4 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 9 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 4\cdot 1\cdot(-2)+4\cdot 3\cdot 9+(-1)\cdot 1\cdot 1-(-1)\cdot 1\cdot 9-4\cdot 1\cdot(-2)-4\cdot 3\cdot 1=$$
$$=-8+108-1+9+8-12=104$$

$$\Delta_Y = \begin{vmatrix} 5 & 4 & -1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 7 & 9 & -2 \end{vmatrix} = 5\cdot 1\cdot(-2)+4\cdot 3\cdot 7+(-1)\cdot 9\cdot(-2)-(-1)\cdot 1\cdot 7-4\cdot(-2)\cdot(-2)-5\cdot 3\cdot 9=$$
$$=-10+84+18+7-16-135=-52$$

$$\Delta_Z = \begin{vmatrix} 5 & 4 & 4 \\ -2 & 1 & 1 \\ 7 & 1 & 9 \end{vmatrix} = 5\cdot 1\cdot 9+4\cdot 1\cdot 7+4\cdot 1\cdot(-2)-4\cdot 1\cdot 7-4\cdot(-2)\cdot 9-5\cdot 1\cdot 1=$$
$$=45+28-8-28+72-5=104$$

Тепер скористаємося формулами Крамера

$$x=\frac{\Delta_X}{\Delta}=\frac{104}{52}=2; \quad y=\frac{\Delta_Y}{\Delta}=\frac{-52}{52}=-1; \quad z=\frac{\Delta_Z}{\Delta}=\frac{104}{52}=2;.$$

б) Позначимо через А основну матрицю системи, через В - матрицю-стовпчик вільних членів, через Х - матрицю-стовпчик невідомих:

$$A=\begin{pmatrix} 5 & 4 & -1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 7 & 1 & -2 \end{pmatrix}; \quad B=\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix}; \quad X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Початкову систему можна записати в матричній формі у такому вигляді: $A\cdot X=B$. Так як $\det(A)\neq 0$, то для матриці A існує обернена матриця A^{-1} і розв'язок заданої системи можна записати у вигляді $X = A^{-1} \cdot B.$ Знайдемо спочатку A^{-1}:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -2-3 = -5; \qquad A_{12} = -\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 7 & -2 \end{vmatrix} = -(4-21) = 17; \qquad A_{13} = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} = -2-7 = -9;$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -(-8+1) = 7; \qquad A_{22} = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 7 & -2 \end{vmatrix} = -10+7 = -3; \qquad A_{23} = -\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} = -(5-28) = 23;$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 12+1 = 13; \qquad A_{32} = -\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = -(15-2) = -13; \qquad A_{33} = \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 5+8 = 13.$$

Запишемо обернену матрицю:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \frac{1}{52} \cdot \begin{pmatrix} -15 & 7 & 13 \\ 17 & -3 & -13 \\ -9 & 23 & 13 \end{pmatrix};$$

$$X = A^{-1} \cdot B = \frac{1}{52} \cdot \begin{pmatrix} -5 & 7 & 13 \\ 17 & -3 & -13 \\ -9 & 23 & 13 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix} = \frac{1}{52} \cdot \begin{pmatrix} -5 \cdot 4 + 7 \cdot 1 + 13 \cdot 9 \\ 17 \cdot 4 - 3 \cdot 1 - 13 \cdot 9 \\ -9 \cdot 4 + 23 \cdot 1 + 13 \cdot 9 \end{pmatrix} = \frac{1}{52} \cdot \begin{pmatrix} 104 \\ -52 \\ 104 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

в) Утворюємо для заданої системи розширену матрицю, яку поступово будемо зводити до трикутного вигляду за допомогою елементарних перетворень матриці. Проілюструємо це на прикладі:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 4 & -1 & 4 \\ -2 & 1 & 3 & 1 \\ 7 & 1 & -2 & 9 \end{array}\right) \xrightarrow{i_1:5} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0{,}8 & -0{,}2 & 0{,}8 \\ -2 & 1 & 3 & 1 \\ 7 & 1 & -2 & 9 \end{array}\right) \xrightarrow[i_3-7*i_1]{i_2+2*i_1}$$

$$\xrightarrow[i_3-7*i_1]{i_2+2*i_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0{,}8 & -0{,}2 & 0{,}8 \\ -2+2*1 & 1+2*0{,}8 & 3+2*(-0{,}2) & 1+2*0{,}8 \\ 7-7*1 & 1-7*0{,}8 & -2-7*(-0{,}2) & 9-7*0{,}8 \end{array}\right) \to$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0{,}8 & -0{,}2 & 0{,}8 \\ 0 & 2{,}6 & 2{,}6 & 2{,}6 \\ 0 & -4{,}6 & -0{,}6 & 3{,}4 \end{array}\right) \xrightarrow{i_2:2{,}6} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0{,}8 & -0{,}2 & 0{,}8 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -4{,}6 & -0{,}6 & 3{,}4 \end{array}\right) \xrightarrow{i_3+4{,}6*i_2}$$

$$\xrightarrow{i_3+4{,}6*i_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0{,}8 & -0{,}2 & 0{,}8 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -4{,}6+4{,}6*1 & -0{,}6+4{,}6*1 & 3{,}4+4{,}6*1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0{,}8 & -0{,}2 & 0{,}8 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 8 \end{array}\right)$$

За допомогою елементарних перетворень розширена матриця звелася до трикутного виду. Отже, відповідна для трикутної матриці система лінійних рівнянь має єдиний розв'язок:

$$\begin{cases} x + 0{,}8y - 0{,}2z = 0{,}8, \\ y + z = 1, \\ 4z = 8. \end{cases}$$

Піднімаючись із останнього рівняння вгору, отримуємо очевидний розв’язок:

$$\begin{cases} z = 8 : 4 \Rightarrow z = 2, \\ y + 2 = 1 \Rightarrow y = 1 - 2 \Rightarrow y = -1, \\ x + 0{,}8 * (-1) - 0{,}2 * 2 = 0{,}8 \Rightarrow x = 0{,}8 + 0{,}8 + 0{,}4 \Rightarrow x = 2. \end{cases}$$

Відповідь: $x = 2, \quad y = -1, \quad z = 2.$

Завдання для практичних занять та самостійного виконання

Завдання № 81-120. Розв’язати систему лінійних рівнянь трьома способами:

а) за формулами Крамера,

б) матричним способом,

в) методом Гауса.

81. $\begin{cases} 2x - 3y + z = -7, \\ x + 2y - 3z = 0, \\ 3x - y + 4z = -1. \end{cases}$

82. $\begin{cases} x + y + 2z = 2, \\ 2x - y + 3z = 2, \\ 4x + y + 4z = 7. \end{cases}$

83. $\begin{cases} 6x - 2y + z = -13, \\ 2x + y - 3z = 4, \\ x - 2y + 5z = -15. \end{cases}$

84. $\begin{cases} 3x - 5y - 6z = -13, \\ 2x + 3y - 4z = 4, \\ x - 9y + z = -19. \end{cases}$

85. $\begin{cases} 2x - 4y + 3z = -1, \\ 3x - y + 4z = -10, \\ x + 5y - z = -7. \end{cases}$

86. $\begin{cases} 7x + y - z = 2, \\ 3x + 4y + 2z = -5, \\ 6x + 2y - z = -2. \end{cases}$

87. $\begin{cases} 3x - 7y - 2z = -4, \\ 4x - 2y + 5z = 3, \\ x - 8y - 6z = -6. \end{cases}$

91. $\begin{cases} 2x + 7y + 5z = 3, \\ 2x + y + 4z = 10, \\ 3x + 2y + 6z = 9. \end{cases}$

92. $\begin{cases} 2x - 3y + 6z = 10, \\ 7x + 2y - 5z = -9, \\ 3x + 2y - z = 15. \end{cases}$

93. $\begin{cases} 2x + y + 4z = 3, \\ 3x - 4y - z = -17, \\ x - y - z = -6. \end{cases}$

94. $\begin{cases} 6x - y - z = 9, \\ 2x + 7y - 2z = 2, \\ 3x - 4y + z = -7. \end{cases}$

95. $\begin{cases} 25x - 3y - 2z = 12, \\ 13x + 4y - 2z = 16, \\ -3x - 5y + z = -13. \end{cases}$

96. $\begin{cases} x + y - z = 8, \\ x - 2y + z = -2, \\ 3x - 2y + 3z = 2. \end{cases}$

97. $\begin{cases} 3x + 2y - z = 3, \\ 12x + 6y - 11z = 7, \\ 5x - 3y + z = 14. \end{cases}$

101. $\begin{cases} x + 2y - 4z = 7, \\ -2x - y + 3z = -5, \\ 5x - 3y - z = 6. \end{cases}$

102. $\begin{cases} 3x - y + 5z = -5, \\ x + 2y + 4z = 3, \\ 3x + y + z = 5. \end{cases}$

103. $\begin{cases} 4x - 3y + z = -11, \\ 2x + y + 3z = -3, \\ x - 3y + 2z = -9. \end{cases}$

104. $\begin{cases} 2x - 3y - 3z = 12, \\ x + y + 5z = -3, \\ 3x - 2y + 3z = 8. \end{cases}$

105. $\begin{cases} 2x - y + 3z = -4, \\ x + 4y + 2z = -6, \\ 3x - 2y + z = -9. \end{cases}$

106. $\begin{cases} 2x + 3y + 3z = -10, \\ 3x + 2y - 5z = 11, \\ x + 2y - z = 3. \end{cases}$

107. $\begin{cases} 6x - 5y + z = -1, \\ 3x + 2y + 4z = -6, \\ 5x + 5y + 7z = -13. \end{cases}$

88. $\begin{cases} x-2y-4z=-5, \\ 2x-7y-6z=3, \\ 4x-5y-9z=-15. \end{cases}$

98. $\begin{cases} x-y+z=-1, \\ 2x+y-3z=-6, \\ 5x-y+2z=19. \end{cases}$

108. $\begin{cases} 2x+2y+3z=-6, \\ x-7y-8z=19, \\ 3x-2y-3z=11. \end{cases}$

89. $\begin{cases} -3x-y+2z=1, \\ 4x+3y-5z=6, \\ -9x+2y+6z=18. \end{cases}$

99. $\begin{cases} x-3y+3z=16, \\ 2x+4y-7z=-42, \\ 7x-5y+2z=8. \end{cases}$

109. $\begin{cases} x+2y+2z=4, \\ 6x+9y-2z=-7, \\ 6x+8y+3z=2. \end{cases}$

90. $\begin{cases} 2x+2y+3z=6, \\ 7x+y+4z=20, \\ 5x+2y+6z=18. \end{cases}$

100. $\begin{cases} 2x+y+4z=14, \\ 3x-4y-z=-4, \\ x-y+2z=4. \end{cases}$

110. $\begin{cases} x-3y-3z=-1, \\ 2x+8y+7z=-4, \\ 7x+6y+5z=-9. \end{cases}$

111. $\begin{cases} 2x+3y+z=10, \\ 3x+2y-5z=-9, \\ 3x+2y-z=15. \end{cases}$

116. $\begin{cases} 9x+12y+13z=-5, \\ 4x-2y+z=0, \\ 3x+5y+2z=4. \end{cases}$

112. $\begin{cases} x+y+z=7, \\ 2x+3y+z=6, \\ x-2y-z=1. \end{cases}$

117. $\begin{cases} 2x+y+8z=-5, \\ 3x+6y+2z=7, \\ 4x+7y+3z=8. \end{cases}$

113. $\begin{cases} x+y+z=7, \\ 2x+3y+z=6, \\ x-2y-z=1. \end{cases}$

118. $\begin{cases} 2x+y-z=-2, \\ 4x-2y+6z=36, \\ 5x+3y-z=5. \end{cases}$

114. $\begin{cases} 5x+6y+10z=6, \\ -4x+8y+2z=-2, \\ 3x-4y-6z=8. \end{cases}$

119. $\begin{cases} x+7y-5z=-51, \\ 3x-y+4z=20, \\ 3x+2y+6z=1. \end{cases}$

115. $\begin{cases} 2x+3y-z=3, \\ x-2y+z=2, \\ 3x+y+z=10. \end{cases}$

120. $\begin{cases} x+y+6z=14, \\ 14x+7y+12z=22, \\ 15x+8y+3z=-9. \end{cases}$

Застосування елементів лінійної алгебри в економіці

Елементи лінійної алгебри широко застосовують в економіці. Так, наприклад, за допомогою матриць зручно описувати різні економічні процеси, об’єкти і закономірності. Матриці мають ряд переваг: дозволяють в досить простій і зрозумілій формі записувати різні економічні процеси і закономірності, дають можливість вирішувати складні завдання. Також за допомогою матриць можна з мінімальною кількістю витрат праці і часу обробити великий статистичний матеріал, різні дані, які характеризують структуру та особливості соціально-економічного комплексу.

Одним із прикладів може послужити таблиця розподілу ресурсів з різних галузей.

РЕСУРСИ	ГАЛУЗІ ЕКОНОМІКИ		
	Промисловість	Сільське господарство	Торгівля
Трудові ресурси	6,8	4,7	6,1
Водні ресурси	3,5	3,2	5,3
Електроенергія	4,8	4,3	2,7

Дана таблиця може бути записана у вигляді матриці: $\begin{pmatrix} 6,8 & 4,7 & 6,1 \\ 3,5 & 3,2 & 5,3 \\ 4,8 & 4,3 & 2,7 \end{pmatrix}$, де, наприклад, другий стовпчик цієї матриці показує, скільки і яких ресурсів споживає сільське господарство, а третій рядок матриці показує, скільки електроенергії споживає кожна галузь економіки.

Розглянемо наступну задачу: нехай підприємство випускає продукцію трьох видів: P1, P2, P3 і використовує сировину двох типів: S1 і S2. Норми витрати сировини характеризуються матрицею: $\mathrm{A}_{[3\times2]} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 7 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, кожен елемент якої a_{ij} показує, скільки одиниць сировини j-го типу витрачається на виробництво одиниці продукції i-го виду. План випуску продукції заданий матрицею-рядком C = (30 40 70), вартість одиниці кожного типу сировини – матрицею стовпцем: $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 25 \\ 40 \end{pmatrix}$.

Необхідно обчислити загальну вартість сировини прри заданих умовах задачі.

Позначимо через S_1 та S_2 витрати 1-го та 2-го типу сировини, відповідно. Тоді:

$S_1 = 2\cdot30 + 7\cdot40 + 1\cdot70 = 410$ од.;

$S_2 = 5\cdot30 + 2\cdot40 + 3\cdot70 = 440$ од.;

Матриця-рядок витрат сировини S може бути записана як добуток матриць плану випуску та норм витрат сировини:

$$S = C \cdot A = (30 \quad 40 \quad 70) \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 7 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = (410 \quad 440)$$

Тоді загальна вартість сировини Q = 410 • 25 + 440 • 40 = 27850 грош. од. може бути записана в матричному вигляді: Q = S • B = (CA) B = (27850).

Загальну вартість сировини можна обчислити інакше: спочатку обчислимо матрицю вартості витрат сировини на одиницю продукції, тобто матрицю: $R = A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 7 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 25 \\ 40 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 250 \\ 255 \\ 145 \end{pmatrix}$, а потім обчислити загальну вартість сировини як добуток матриць випуску продукції та вартості витрат сировини на одиницю продукції: $Q = C \cdot R = (30 \quad 40 \quad 70) \cdot \begin{pmatrix} 250 \\ 255 \\ 145 \end{pmatrix} = (27850)$

На цьому прикладі ми переконалися у виконанні асоціативного закону множення матриць, тобто: (СА) В = С (АВ).

З вищевикладеного випливає, що застосування елементів лінійної алгебри, зокрема матриць та матричного метододу розв'язування систем лінійних рівнянь, в економіці з одного боку дозволяє використовувати широкий набір стратегічно значущих змінних, вказувати напрям руху ресурсів, з мінімальними витратами праці і часу обробляти величезний і дуже різноманітний статистичний матеріал, різні вихідні дані, що характеризують рівень, структуру, особливості соціально-економічного комплексу, проте, з іншого боку, не забезпечує реальних рекомендацій з розробки специфічних стратегій.

Тестові завдання до модуля «Елементи лінійної алгебри»

№ з/п	УМОВА:	ВАРІАНТИ ВІДПОВІДЕЙ:
1.	*Визначник – це*	1) матриця; 2) число; 3) вектор; 4) поняття, якому визначення не подано.
2.	*Що буде з визначником, якщо поміняти місцями будь-які два стовпці?*	1) визначник від цього не зміниться; 2) абсолютна величина визначника збільшиться; 3) абсолютна величина визначника зменшиться; 4) абсолютна величина визначника залишиться без змін.
3.	*Чому дорівнює визначник третього порядку, в якому будь-які 2 рядки співпадають?*	1) нулю; 2) добутку елементів, що не співпадають; 3) добутку елементів головної діагоналі; 4) добутку елементів додаткової діагоналі.
4.	*Чому дорівнює визначник третього порядку, усі елементи третього рядка якого дорівнюють нулю?*	1) добутку елементів головної діагоналі; 2) сумі добутку елементів першого та другого рядка; 3) нулю; 4) серед перерахованих відповідей правильного немає.

5.	*Мінор M_{12} визначника* $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 0 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$ *дорівнює*	1) -6; 2) 2; 3) 4; 4) 36.
6.	*Алгебраїчне доповнення A_{23} визначника* $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 0 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$ *дорівнює*	1) -6; 2) 6; 3) -12; 4) 12.
7.	*Чому дорівнює алгебраїчне доповнення A_{32} визначника* $\begin{vmatrix} -1 & 2 & -3 & 4 \\ 5 & -6 & 7 & -8 \\ 1 & -2 & 3 & -4 \\ -5 & 6 & -7 & 8 \end{vmatrix}$ *?*	1) $2\cdot\begin{vmatrix} -1 & -3 & 4 \\ 5 & 7 & -8 \\ -5 & -7 & 8 \end{vmatrix}$; 3) $7\cdot\begin{vmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 1 & -2 & -4 \\ -5 & 6 & 8 \end{vmatrix}$; 2) $-2\cdot\begin{vmatrix} -1 & -3 & 4 \\ 5 & 7 & -8 \\ -5 & -7 & 8 \end{vmatrix}$; 4) $-7\cdot\begin{vmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 1 & -2 & -4 \\ -5 & 6 & 8 \end{vmatrix}$.
8.	*Визначник* $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -1 & 5 & -2 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix}$ *дорівнює*	1) -62; 2) -60; 3) 20; 4) 26.
9.	*Визначник* $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ *дорівнює*	1) 0; 2) 1; 3) -8; 4) -16.
10.	*Який з наступних визначників дорівнює 0?*	1) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -2 & 6 & -8 \\ 1 & 3 & -4 \end{vmatrix}$; 3) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -2 & 6 & 8 \\ 1 & 3 & -4 \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 6 & -8 \\ 1 & -3 & 4 \end{vmatrix}$; 4) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -2 & -6 & 8 \\ 1 & 3 & -4 \end{vmatrix}$.
11.	*Що можна сказати про дві матриці, якщо рядки першої є стовпцями другої?*	1) визначник другої матриці є величиною зворотною по відношенню до визначника першої; 2) ці матриці не відрізняються одна від одної; 3) їх визначники рівні між собою; 4) серед перерахованих відповідей правильної немає.
12.	*Як називається матриця, елементи головної діагоналі якої одиниці, а всі інші елементи – нулі?*	1) нульова; 2) одинична; 3) кутова; 4) трикутна.

13.	*Матрицю* $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 7 \end{pmatrix}$ *можна помножити на матрицю*	1) $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.
14.	*Скільки рядків буде мати матриця A =* $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	1) 1; 2) 2; 3) 3; 4) 4.
15.	*Елемент* a_{12} *матриці* $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 5 & 3 & 8 \end{pmatrix}$ *дорівнює*	1) 1; 2) 2; 3) 5; 4) 3.
16.	*Яка з поданих матриць є оберненою* A^{-1} *для матриці* $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$?	1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
17.	*Яка з поданих матриць є транспонованою* A^T *для матриці* $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$?	1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
18.	*Які перетворення виконали над матрицею* $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 7 & 3 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$, *якщо в результаті було отримано матрицю* $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ -2 & 7 & 3 \\ -9 & 4 & 5 \end{pmatrix}$	1) відняли від першого рядка третій, помножений на 2; 2) відняли від першого стовпчика третій, помножений на 2; 3) розділили другий рядок на (-2), а третій помножили на (-9); 4) відняли від першого стовпчика третій, помножений на 2 та розділили другий рядок на (-2), а третій помножили на (-9).
19.	*Яка з матриць є узгодженою для матриці A розміром* 4×3	1) $B_{4\times3}$; 2) $B_{3\times4}$ 3) $B_{4\times4}$ 4) $B_{1\times3}$
20.	*Обчислити матрицю C = 2A – 3B,* $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$	1) $C = \begin{pmatrix} -1 & 12 & -7 \\ 8 & -5 & -1 \end{pmatrix}$; 3) $C = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 11 \\ -16 & 13 & 5 \end{pmatrix}$; 2) $C = \begin{pmatrix} -1 & -13 & 3 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$; 4) $C = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 9 \\ -14 & 12 & 5 \end{pmatrix}$.

21.	*Коли головний визначник системи лінійних рівнянь $\Delta=0$ і хоча б один із визначників, утворених із головного заміною стовпчика коефіцієнтів при x_i на стовпчик вільних членів $\Delta x_i \neq 0$, то, відповідно до формул Крамера, система лінійних рівнянь має*	1) єдиний розв'язок; 2) безліч розв'язків; 3) жодного розв'язку; 4) кількість розв'язків залежить від вільних членів.
22.	*Якщо в системі лінійних рівнянь, кількість рівнянь не співпадає з кількістю невідомих, то для відшукання розв'язку можна застосовувати*	1) формули Крамера; 2) метод Гаусса; 3) матричний метод; 4) всі три способи.
23.	*Дана система лінійний рівнянь* $\begin{cases} 2x+3z=2 \\ x-y-z=1 \\ x+2y+z=3 \end{cases}$ *Вкажіть вільні члени:*	1) (2; 1; 1); 2) (0; -1; 2); 3)(3; -1; 1); 4) (2; 1; 3).
24.	*(2; 1; -1) є розв'язком системи*	1) $\begin{cases} 3x+y+2z=5, \\ 2x-3y-2z=3, \\ x+y+z=4. \end{cases}$; 2) $\begin{cases} x+2y-z=5, \\ 2x-3y+z=0, \\ x+2y+2z=2. \end{cases}$; 3) $\begin{cases} x+2y-3z=7, \\ 4x-y+5z=2, \\ 2x-8y+z=-1. \end{cases}$; 4) $\begin{cases} x+y+z=2 \\ 2x-y+z=5, \\ x+5y-z=8. \end{cases}$
25.	*(1; 2; 3) є розв'язком системи*	1) $\begin{cases} 3x+y+2z=11, \\ 4x+2y-2z=3, \\ 5x+6y-5z=4. \end{cases}$; 2) $\begin{cases} 5x+3y+z=14, \\ -3x+12y-8z=1, \\ 2x+3y+5z=8. \end{cases}$; 3) $\begin{cases} x+y+z=6, \\ -x-y+z=0, \\ 2x+y-z=-1. \end{cases}$; 4) $\begin{cases} x+2y-z=2, \\ 2x-3y+2z=2, \\ 3x+y+z=8. \end{cases}$
26.	*Яка з поданих систем лінійних рівнянь має безліч розв'язків?*	1) $\begin{cases} x+y+z=2, \\ 2x-3y-2z=3, \\ x+y-z=4. \end{cases}$; 2) $\begin{cases} x+2y-z=5, \\ 2x-3y+z=0, \\ x+2y+2z=2. \end{cases}$; 3) $\begin{cases} x+y+z=2, \\ x-3y+4z=7, \\ 2x+2y+2z=4. \end{cases}$; 4) $\begin{cases} x+y+z=2 \\ 2x-y+z=5, \\ x+5y-z=8. \end{cases}$
27.	*Яка з поданих систем лінійних рівнянь має безліч розв'язків?*	1) $\begin{cases} x-y+z=2, \\ x+y+z=1, \\ 2x-2y+2z=3. \end{cases}$; 2) $\begin{cases} x+y+z=2, \\ x+y-z=1, \\ 2x-2y+2z=3. \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x-y-z=2, \\ x+y+z=1, \\ 2x-2y+2z=3. \end{cases}$; 4) $\begin{cases} x-y+z=2, \\ x+y+z=1, \\ 2x-2y+2z=4. \end{cases}$

28.	*Яка з поданих систем лінійних рівнянь не має жодного розв’язку?*	1) $\begin{cases}3x-3y+2z=2,\\4x-5y+2z=1,\\5x-6y+4z=3.\end{cases}$; 3) $\begin{cases}x-y+2z=2,\\x+y-3z=3,\\x-2y+4z=1.\end{cases}$; 2) $\begin{cases}x-y+2z=2,\\2x+y-3z=3,\\2x-2y+4z=1.\end{cases}$ 4) $\begin{cases}x-3y+5z=1,\\2x-y+3z=7,\\3x-2y+4z=8.\end{cases}$
29.	*Яка з поданих систем лінійних рівнянь не має жодного розв’язку?*	1) $\begin{cases}x-y+z=2,\\x+y+z=1,\\2x-2y+2z=3.\end{cases}$; 3) $\begin{cases}x-y-z=2,\\x+y+z=1,\\2x-2y+2z=3.\end{cases}$ 2) $\begin{cases}x+y+z=2,\\x+y-z=1,\\2x-2y+2z=3.\end{cases}$ 4) $\begin{cases}x-y+z=2,\\x+y+z=1,\\2x-2y+2z=4.\end{cases}$
30.	*Яка з поданих систем лінійних рівнянь має єдиний розв’язок?*	1) $\begin{cases}x+y+z=1,\\2x+2y+2z=2,\\3x+3y+3z=3.\end{cases}$ 3) $\begin{cases}x+y+z=1,\\x+2y+2z=2,\\3x+3y+3z=2.\end{cases}$ 2) $\begin{cases}4x+2y+3z=1,\\2x+2y+2z=2,\\3x+3y+3z=3.\end{cases}$ 4) $\begin{cases}x+3y+z=1,\\x+2y+2z=2,\\3x+3y+3z=2.\end{cases}$

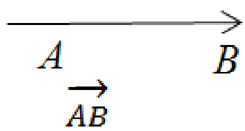
МОДУЛЬ 2. ЕЛЕМЕНТИ АНАЛІТИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ

Тема 4. Елементи векторної алгебри

Теоретичні відомості до теми

1. Вектори в просторі
2. Лінійні операції з векторами
3. Прямокутна система координат у просторі
4. Правила дій над векторами, заданими своїми координатами
5. Довжина вектора. Напрямлені косинуси вектора
6. Скалярний добуток векторів, його застосування
7. Векторний добуток векторів, його застосування
8. Мішаний добуток векторів, його застосування

1. Вектори в просторі



Розглянемо напрямлений відрізок $\bar{\boldsymbol{a}} = \overline{\boldsymbol{AB}}$,

де A – початок, B – кінець. Будемо називати його вектором.

Довжину вектора будемо позначати таким чином: $|\bar{\boldsymbol{a}}| = |\overline{\boldsymbol{AB}}|$.

2. Лінійні операції з векторами

Додавання векторів.

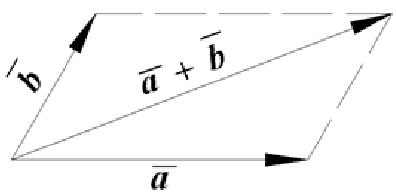


Рис. 2.1

Щоб побудувати суму даних векторів $\bar{\boldsymbol{a}}$ і $\bar{\boldsymbol{b}}$, треба відкласти ці вектори від довільної точки та побудувати на них паралелограм. Сумою векторів буде діагональ, що виходить з початку векторів $\bar{\boldsymbol{a}}$ і $\bar{\boldsymbol{b}}$ (рис. 2.1).

Цей спосіб побудови називається правилом паралелограма.

Суму двох векторів можно побудувати ще й за правилом трикутника.

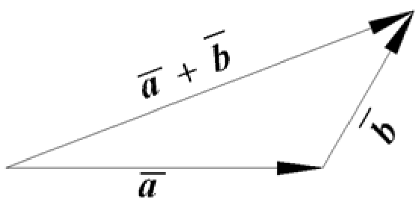


Рис. 2.2

Відкласти вектор $\bar{\boldsymbol{b}}$ від кінця вектора $\bar{\boldsymbol{a}}$. Сумою векторів $\bar{\boldsymbol{a}}$ і $\bar{\boldsymbol{b}}$ буде вектор, що з'єднує початок $\bar{\boldsymbol{a}}$ з кінцем $\bar{\boldsymbol{b}}$ (рис. 2.2).

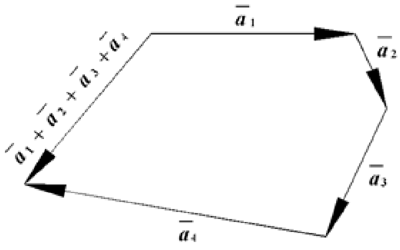


Рис.2.3.

Щоб побудувати суму n даних векторів $\bar{\boldsymbol{a}}_1, \bar{\boldsymbol{a}}_2, \ldots, \bar{\boldsymbol{a}}_n$, треба від довільної точки відкласти $\bar{\boldsymbol{a}}_1$, потім від його кінця відкласти $\bar{\boldsymbol{a}}_2$ і т.д., нарешті від кінця $\bar{\boldsymbol{a}}_{n-1}$ відкласти $\bar{\boldsymbol{a}}_n$. Сумою векторів буде вектор, напрямлений від початку $\bar{\boldsymbol{a}}_1$ до кінця $\bar{\boldsymbol{a}}_n$ (рис. 2.3).

Віднімання векоторів.

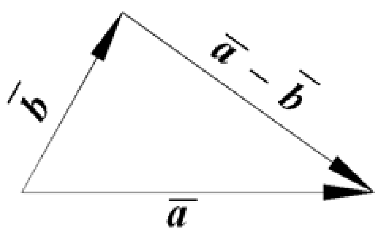


Рис. 2.4

Щоб побудувати різницю векторів $\bar{\boldsymbol{a}} - \bar{\boldsymbol{b}}$, треба відкласти ці вектори від довільної точки, з'єднати їх кінці та вибрати на цьому відрізку напрямок від кінця $\bar{\boldsymbol{b}}$ до кінця $\bar{\boldsymbol{a}}$ (рис. 2.4). Множення вектора на число.

Добутком ненульового вектора $\bar{\boldsymbol{a}}$ на число k називається вектор, який має напрям вектора $\bar{\boldsymbol{a}}$, якщо $\boldsymbol{k} > \boldsymbol{0}$, і протинапрям, якщо $\boldsymbol{k} < \boldsymbol{0}$ (при $\boldsymbol{k} = \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{0} \cdot \bar{\boldsymbol{a}} = \bar{\boldsymbol{0}}$).

Ці три операції називаються лінійними операціями з векторами.

Проекція вектора на вісь. Проекцією вектора на вісь називається довжина

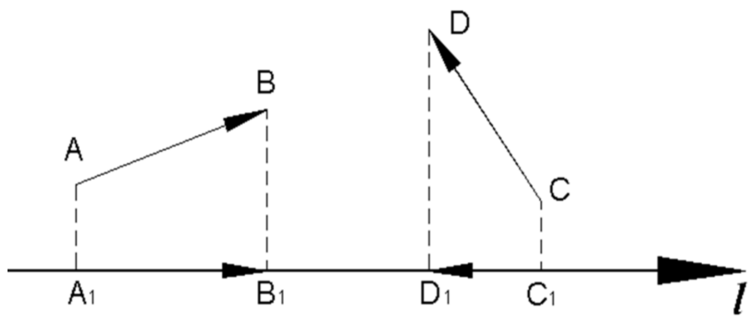


Рис.2.5.

направленого відрізка, початок якого є проекція початку вектора і кінець – проекція його кінця, яка береться із знаком плюс, якщо напрями відрізка і осі збігаються, і зі знаком мінус, якщо їх напрями протилежні (рис.2.5).

$np_{\bar{l}}\overline{AB} = \left|\overline{A_1B_1}\right|$, $np_{\bar{l}}\overline{CD} = \left|\overline{C_1D_1}\right|$.

Властивості проекції.

а) $np_{\bar{l}}\bar{a} = \left|\bar{a}\right| \cdot \cos\varphi$;

б) $np_{\bar{l}}\left(\bar{a} + \bar{b}\right) = np_{\bar{l}}\bar{a} + np_{\bar{l}}\bar{b}$;

в) $np_{\bar{l}}\left(k \cdot \bar{a}\right) = k \cdot np_{\bar{l}}\bar{a}$.

3. Прямокутна система координат у просторі

Нехай у просторі задано три попарно перпендикулярні осі OX, OY, OZ. Координатами вектора $\bar{a} = \left(a_x; a_y; a_z\right)$ на осі називаються проекції вектора на ці осі: $a_x = np_{ox}\bar{a}$, $a_y = np_{oy}\bar{a}$, $a_z = np_{oz}\bar{a}$.

Якщо $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$- одиничні вектори, що напрямлені по *OX, OY, OZ*, то $\bar{a} = a_x\bar{i} + a_y\bar{j} + a_z\bar{k}$.

Якщо $A\left(x_1, y_1, z_1\right)$, $B\left(x_2, y_2, z_2\right)$ то координати вектора $\overline{AB} = \left(x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\right)$ або $\{x_2 - x_1;\ y_2 - y_1;\ z_2 - z_1\}$

4. Правила дій над векторами, заданими своїми координатами

Якщо $\bar{a} = \left(a_x, a_y, a_z\right)$, $\bar{b} = \left(b_x, b_y, b_z\right)$, то

$\bar{a} + \bar{b} = \left(a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z\right)$;

$\bar{a} - \bar{b} = \left(a_x - b_x, a_y - b_y, a_z - b_z\right)$;

$k \cdot \bar{a} = \left(k \cdot a_x, k \cdot a_y, k \cdot a_z\right)$.

5. Довжина вектора. Напрямлені косинуси вектора

$$|\bar{a}| = \sqrt{a_x^{\ 2} + a_y^{\ 2} + a_z^{\ 2}};$$

$\cos\alpha = \dfrac{a_x}{|\bar{a}|}$; $\cos\beta = \dfrac{a_y}{|\bar{a}|}$; $\cos\gamma = \dfrac{a_z}{|\bar{a}|}$, де α, β, γ - кути між $\bar{a}$ та осями *OX, OY, OZ.*

Для напрямлених конусів справедливо співвідношення: $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$

Нехай точки *A, B* мають координати $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$.

Якщо відрізок *AB* поділимо точкою *M* у відношенні: $AB : AM = \lambda$, то координати точки *M* знаходять за формулами:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}; \qquad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda} \qquad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}.$$

Якщо $\lambda = 1$, то отримуємо формули для знаходження координат середини відрізка.

6. Скалярний добуток двох векторів, його застосування

Озн. *Скалярним добутком векторів* $\bar{a}$ *і* $\bar{b}$ *називається число* $\bar{a}\cdot\bar{b}$, *що дорівнює добутку модулів цих векторів на косинус кута* φ *між цими векторами:* $\bar{a}\cdot\bar{b} = |\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cdot\cos\varphi$.

Якщо відомі координати векторів $\bar{a} = (x_1;\ y_1;\ z_1)$, $\bar{b} = (x_2;\ y_2;\ z_2)$,

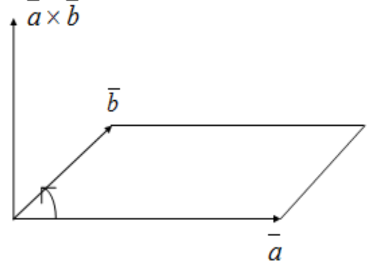
то $\bar{a}\cdot\bar{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$,

кут φ між векторами визначається за формулою

$$\cos\varphi = \frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}.$$

Примітка*: Якщо вектори* $\bar{a}$ *і* $\bar{b}$ *перпендикулярні, то їх скалярний добуток дорівнює 0, оскільки* $\cos 90^o = 0$.

7. Векторний добуток векторів, його застосування



Озн. Векторним добутком *векторів* $\bar{a}$ *та* $\bar{b}$ *називається вектор* $\bar{a}\times\bar{b}$, *що перпендикулярний до векторів* $\bar{a}$ *та* $\bar{b}$, *модуль якого дорівнює площі паралелограма, побудованого на векторах* $\bar{a}$ *і* $\bar{b}$, *і направлений так, що при спогляданні з його кінця найменший оберт від вектора* $\bar{a}$ *до вектора* $\bar{b}$

здійснюється проти годинникової стрілки.

Якщо відомі координати векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$:

$\bar{a}=(x_1;\ y_1;\ z_1)$, $\bar{b}=(x_2;\ y_2;\ z_2)$, то векторний добуток обчислюється при допомозі визначника третього порядку:

$$\bar{a}\times\bar{b}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}.$$

Площі паралелограма і трикутника, побудованих на векторах $\bar{a}$ і $\bar{b}$:

$S=\left|\bar{a}\times\bar{b}\right|$, $S_{\Delta}=\frac{1}{2}\left|\bar{a}\times\bar{b}\right|$.

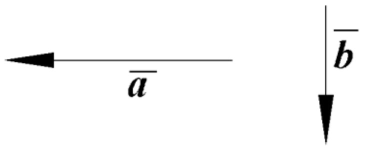
8. Мішаний добуток векторів, його застосування

Озн. Мішаним добутком *векторів* $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ *називається число* $(\bar{a}\times\bar{b})\cdot\bar{c}$.

Якщо відомі координати векторів

$\bar{a}=(x_1;\ y_1;\ z_1)$, $\bar{b}=(x_2;\ y_2;\ z_2)$, $\bar{c}=(x_3;\ y_3;\ z_3)$,

то
$$(\bar{a}\times\bar{b})\cdot\bar{c}=\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\\ x_3 & y_3 & z_3\end{vmatrix}.$$



Абсолютна величина мішаного добутку дорівнює об'єму паралелепіпеда, побудованого на векторах $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$. Об'єм піраміди, побудованої на цих векторах, дорівнює шостій частині об'єму паралелепіпеда.

$$V_{\text{паралелепіпеда}}=\left|(\bar{a}\times\bar{b})\cdot\bar{c}\right|,$$

$$V_{\text{піраміди}}=\frac{1}{6}\left|(\bar{a}\times\bar{b})\cdot\bar{c}\right|.$$

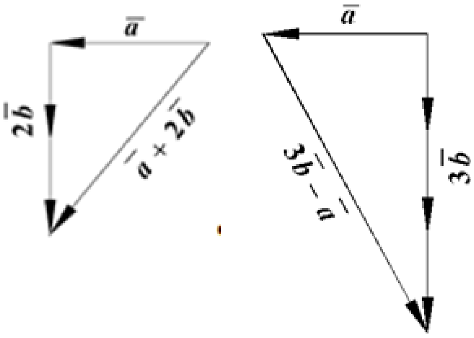
Зразки розв'язування задач

Приклад 1*. Дано ненульові вектори* $\bar{\boldsymbol{a}}$ *і* $\bar{\boldsymbol{b}}$.

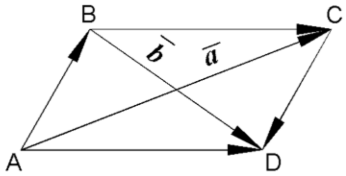
Побудувати вектори $\bar{\boldsymbol{a}}+2\bar{\boldsymbol{b}}$, $3\bar{\boldsymbol{b}}-\bar{\boldsymbol{a}}$.

Розв'язання:

Знайдемо суму за правилом трикутника $\bar{\boldsymbol{a}}+2\bar{\boldsymbol{b}}$ і різницю $3\bar{\boldsymbol{b}}-\bar{\boldsymbol{a}}$:



Приклад 2. *Вектори* $\overline{AC}=\overline{a}$, $\overline{BD}=\overline{b}$ *- діагоналі паралелограма ABCD. Запишіть вектори* $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}$ *і* $\overline{DA}$ *через* $\overline{a}$ *і* $\overline{b}$.



Розв'язання:

За означенням суми і різниці векторів маємо: $\overline{BC}+\overline{CD}=\overline{b}$, $\overline{BC}-\overline{CD}=\overline{a}$. Додавши ці рівності, дістанемо $\overline{BC}=\dfrac{\overline{a}+\overline{b}}{2}$. Далі знайдемо $\overline{CD}=\overline{b}-\overline{BC}=\overline{b}-\dfrac{\overline{a}+\overline{b}}{2}=\dfrac{\overline{b}-\overline{a}}{2}$; $\overline{AB}=-\overline{CD}=\dfrac{\overline{a}-\overline{b}}{2}$, $\overline{DA}=-\overline{BC}=-\dfrac{\overline{a}+\overline{b}}{2}$.

Приклад 3. *Дано:* $\mathbf{пр}_{\bar{l}}\overline{\mathbf{a}}=3$; $\mathbf{пр}_{\bar{l}}\overline{\mathbf{b}}=-1$.

Обчислити: 1) $\mathbf{пр}_{\bar{l}}\left(3\overline{\mathbf{a}}+2\overline{\mathbf{b}}\right)$; 2) $\mathbf{пр}_{\bar{l}}\left(\overline{\mathbf{a}}-2\overline{\mathbf{b}}\right)$.

Розв'язання:

Використавши властивості проекцій, дістанемо:

1) $пр_{\bar{l}}\left(3\overline{a}+2\overline{b}\right)=3пр_{\bar{l}}\overline{a}+2пр_{\bar{l}}\overline{b}=3\cdot 3+2(-1)=7$.

2) $пр_{\bar{l}}\left(\overline{a}-2\overline{b}\right)=пр_{\bar{l}}\overline{a}-2пр_{\bar{l}}\overline{b}=3-2(-1)=5$.

Приклад 4. *Відрізок AB, де* $A(7;2;-3)$, . $B(-5;0;4)$, *поділений точкою M у відношенні* $\lambda=AB:AM=1:5$. *Знайти координати точки M.*

Розв'язання:

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}=\frac{7+\frac{1}{5}(-5)}{1+\frac{1}{5}}=\frac{6}{\left(\frac{6}{5}\right)}=5;\quad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}=\frac{2+\frac{1}{5}\cdot 0}{1+\frac{1}{5}}=\frac{2}{\left(\frac{6}{5}\right)}=\frac{10}{6}=\frac{5}{3};$$

$$z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}=\frac{-3+\frac{1}{5}\cdot 4}{1+\frac{1}{5}}=\frac{\left(-\frac{11}{5}\right)}{\left(\frac{6}{5}\right)}=-\frac{11}{6}.$$

Отже, $M\left(5;\frac{5}{3};-\frac{11}{6}\right)$.

Приклад 5. *Знайти напрямні косинуси вектора* $\overline{a}$, *а також кути, що утворює вектор з осями координат, якщо* $\overline{a}=\overline{i}-\overline{k}$.

Розв'язання:

Знайдемо координати вектора $\bar{a}=(1;0;-1)$ та його довжину $|\bar{a}|=\sqrt{1^2+0^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$.

Напрямні косинуси дорівнюють:

$$\cos\alpha=\frac{a_x}{|\bar{a}|}=\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2};\qquad \cos\beta=\frac{a_y}{|\bar{a}|}=\frac{0}{2}=0;\quad \cos\gamma=\frac{a_z}{|\bar{a}|}=\frac{-1}{2}=-\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Тоді $\alpha=\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\pi}{4}$; $\beta=\arccos(0)=\frac{\pi}{2}$; $\gamma=\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{3\pi}{4}$.

Приклад 6*. Дано вектори* $\bar{a}=\overline{AB}$, $A(2;3;-1)$, $B(1;1;0)$; $\bar{b}=2\bar{i}-\bar{j}+\bar{k}$; $\bar{c}=(1;2;1)$. *Знайти:*

а) координати та довжини цих векторів;

б) скалярний добуток векторів $\bar{a}\cdot\bar{b}$*;*

в) кут між векторами $\bar{a}$, $\bar{b}$*;*

г) векторний добуток векторів $\bar{a}\times\bar{b}$*;*

д) площу трикутника, побудованого на векторах $\bar{a}$, $\bar{b}$*;*

є) мішаний добуток векторів $(\bar{a}\times\bar{b})\cdot\bar{c}$*;*

е) об'єм піраміди, побудованої на векторах $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$.

Розв'язання:

На основі вищевказаних формул та умови маємо,

а) $\bar{a}=(1-2;\ 1-3;\ 0+1)=(-1;-2;\ 1)$, $\Rightarrow |\bar{a}|=\sqrt{(-1)^2+(-2)^2+1^2}=\sqrt{1+4+1}=\sqrt{6}$,

$\bar{b}=(2;-1;1)$, $\Rightarrow$ $|\bar{b}|=\sqrt{2^2+(-1)^2+1^2}=\sqrt{4+1+1}=\sqrt{6}$,

$\bar{c}=(1;2;1)$ $\Rightarrow$ $|\bar{c}|=\sqrt{1^2+2^2+1^2}=\sqrt{1+4+1}=\sqrt{6}$.

б) $\bar{a}\cdot\bar{b}=(-1)*2+(-2)*(-1)+1*1=-2+2+1=1;$.

в) $\cos\varphi=\frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|}=\frac{1}{\sqrt{6}\sqrt{6}}=\frac{1}{6}$.

г) $\bar{a}\times\bar{b}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ -1 & -2 & 1\\ 2 & -1 & 1\end{vmatrix}=\bar{i}(-2+1)-\bar{j}(-1-2)+\bar{k}(1+4)=-\bar{i}+3\bar{j}+5\bar{k}=(-1;3;5)$.

д) $S_\Delta=\frac{1}{2}|\bar{a}\times\bar{b}|=\frac{1}{2}\sqrt{1+9+25}=\frac{\sqrt{35}}{2}$.

є) $(\bar{a}\times\bar{b})\cdot\bar{c}=\begin{vmatrix}-1 & -2 & 1\\ 2 & -1 & 1\\ 1 & 2 & 1\end{vmatrix}=-1(-1-2)+2(2-1)+1(4+1)=10$.

е) $V_{пір.}=\frac{1}{6}\left|\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\cdot\bar{c}\right|=\frac{1}{6}\cdot 10=\frac{5}{3}$.

Завдання для практичних занять та самостійного виконання

Завдання № 121-160. Дано вектори $\bar{a}$, $\bar{b}$ і $\bar{c}$. Знайти :

а) координати та довжини цих векторів;

б) скалярний добуток векторів $\bar{a}\cdot\bar{b}$;

в) кут між векторами $\bar{a}$, $\bar{b}$;

г) векторний добуток векторів $\bar{a}\times\bar{b}$;

д) площу трикутника, побудованого на векторах $\bar{a}$, $\bar{b}$;

є) мішаний добуток векторів $\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\cdot\bar{c}$;

е) об'єм піраміди, побудованої на векторах $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$.

121. $\bar{a}=\overline{AB}$, A(1; 2; 21), B(21; 0; 1), $\bar{b}=2\bar{i}-\bar{j}+\bar{k}$, $\bar{c}=(1;2;0)$.
122. $\bar{a}=(1;1;1)$, $\bar{b}=\overline{BC}$, B(0; 1; 2), C(2; 21; 0), $\bar{c}=2\bar{j}-\bar{k}$.
123. $\bar{a}=-\bar{i}+2\bar{j}$, $\bar{b}=(-1;2;-1)$, $\bar{c}=\overline{CD}$, C(0; 2; 21), D(21; 22; 21).
124. $\bar{a}=\overline{LN}$, L(1; 2; 3), N(21; 2; 0), $\bar{b}=-\bar{i}+2\bar{j}+\bar{k}$, $\bar{c}=(2;3;-1)$.
125. $\bar{a}=(-2;0;3)$, $\bar{b}=\bar{j}-2\bar{k}$, $\bar{c}=\overline{AB}$, A(0; 22; 1), B(1; 2; 21).
126. $\bar{a}=3\bar{i}+2\bar{j}-\bar{k}$, $\bar{b}=(2;-1;0)$, $\bar{c}=\overline{CD}$, C(0; 2; 3), D(2; 21; 21).
127. $\bar{a}=\overline{AB}$, A(2; 22; 2), B(1; 0; 21), $\bar{b}=-2\bar{j}+3\bar{k}$, $\bar{c}=(1;1;-1)$.
128. $\bar{a}=-\bar{i}+2\bar{j}+4\bar{k}$, $\bar{b}=\overline{MN}$, M(3; 1; 22), N(0; 21; 22), $\bar{c}=(0;-1;-3)$.
129. $\bar{a}=(-1;3;4)$, $\bar{b}=\overline{AB}$, A(22; 1; 3), B(1; 0; 23), $\bar{c}=-\bar{i}-\bar{j}+2\bar{k}$.
130. $\bar{a}=\overline{MN}$, M(22; 3; 4), N(0; 22; 3), $\bar{b}=-2\bar{i}+3\bar{j}$, $\bar{c}=(2;3;-4)$.
131. $\bar{a}=-\bar{i}-2\bar{j}+5\bar{k}$, $\bar{b}=(-4;-2;5)$, $\bar{c}=\overline{CD}$, C(7; 7; 3), D(8; 4; 1).
132. $\bar{a}=\bar{i}-3\bar{j}-2\bar{k}$, $\bar{b}=\overline{BC}$, B(3; 5; 8), C(2; 2; 1), $\bar{c}=(4;2;-5)$.
133. $\bar{a}=4\bar{i}+2\bar{j}+5\bar{k}$, $\bar{b}=\overline{MN}$, M(0; 7; 2), N(0; 2; 7), $\bar{c}=(1;5;0)$.
134. $\bar{a}=\overline{AB}$, A(2; 2; 5), B(2; 5; 1), $\bar{b}=-\bar{i}+2j-3\bar{k}$, $\bar{c}=(9;6;4)$.
135. $\bar{a}=(3;-1;4)$, $\bar{b}=\overline{KL}$, K(1; 5; 5), L(6; 9; 4), $\bar{c}=-3\bar{i}+2\bar{j}-\bar{k}$.
136. $\bar{a}=5\bar{i}+2\bar{j}$, $\bar{b}=(2;5;0)$, $\bar{c}=\overline{CD}$, C(3; 5; 4), D(4; 7; 8).
137. $\bar{a}=-2\bar{i}+\bar{j}+7\bar{k}$, $\bar{b}=3\bar{i}-2\bar{j}+8\bar{k}$, $\bar{c}=(1;2;0)$.
138. $\bar{a}=(2;3;4)$, $\bar{b}=\bar{i}+2\bar{j}+5\bar{k}$, $\bar{c}=\overline{MN}$, M(1; 2; -1), N(2; 8; -3).
139. $\bar{a}=3\bar{i}+\bar{j}-4\bar{k}$, $\bar{b}=(6;8;5)$, $\bar{c}=\overline{CD}$, C(1; 4; 8), D(3; 7; 1).
140. $\bar{a}=\overline{AB}$, A(2; 5; 1), B(5; 6; -3), $\bar{b}=7\bar{i}+4\bar{j}+\bar{k}$, $\bar{c}=(2;3;-7)$.
141. $\bar{a}=\overline{A_1A_2}$, $\bar{b}=\overline{A_1A_3}$, $\bar{c}=\overline{A_1A_4}$, A_1 (4; 4; 10), A_2 (4; 10; 2), A_3 (2; 8; 4), A_4 (9; 6; 4).
142. $\bar{a}=\overline{A_1A_2}$, $\bar{b}=\overline{A_1A_3}$, $\bar{c}=\overline{A_1A_4}$, A_1(1; 1; 0), A_2(0; 1; 2), A_3(1; 0; 21), A_4(21; 2; 1).
143. $\bar{a}=\overline{A_1A_2}$, $\bar{b}=\overline{A_1A_3}$, $\bar{c}=\overline{A_1A_4}$, A_1 (4; 6; 5), A_2 (6; 9; 4), A_3(2; 10; 10), A_4 (7; 5; 9).

144. $\bar{a}=\overline{A_1A_2}$, $\bar{b}=\overline{A_1A_3}$, $\bar{c}=\overline{A_1A_4}$, $A_1(3; 5; 4)$, $A_2(8; 7; 4)$, $A_3(5; 10; 4)$, $A_4(4; 7; 8)$.

145. $\bar{a}=\overline{A_1A_2}$, $\bar{b}=\overline{A_1A_3}$, $\bar{c}=\overline{A_1A_4}$, $A_1(7; 7; 3)$, $A_2(6; 5; 8)$, $A_3(3; 5; 8)$, $A_4(8; 4; 1)$.

146. $\bar{a}=\overline{A_2A_3}$, $\bar{b}=\overline{A_2A_4}$, $\bar{c}=\overline{A_2A_1}$, A_1 (4; 4; 10), A_2 (4; 10; 2), A_3 (2; 8; 4), A_4 (9; 6; 4).

147. $\bar{a}=\overline{A_2A_3}$, $\bar{b}=\overline{A_2A_4}$, $\bar{c}=\overline{A_2A_1}$, $A_1(1; 1; 0)$, $A_2(0; 1; 2)$, $A_3(1; 0; 21)$, $A_4(21; 2; 1)$.

148. $\bar{a}=\overline{A_2A_3}$, $\bar{b}=\overline{A_2A_4}$, $\bar{c}=\overline{A_2A_1}$, A_1 (4; 6; 5), A_2 (6; 9; 4), $A_3(2; 10; 10)$, A_4 (7; 5; 9).

149. $\bar{a}=\overline{A_2A_3}$, $\bar{b}=\overline{A_2A_4}$, $\bar{c}=\overline{A_2A_1}$, $A_1(3; 5; 4)$, $A_2(8; 7; 4)$, $A_3(5; 10; 4)$, $A_4(4; 7; 8)$.

150. $\bar{a}=\overline{A_2A_3}$, $\bar{b}=\overline{A_2A_4}$, $\bar{c}=\overline{A_2A_1}$, $A_1(7; 7; 3)$, $A_2(6; 5; 8)$, $A_3(3; 5; 8)$, $A_4(8; 4; 1)$.

151. $\bar{a}=\overline{A_4A_1}$, $\bar{b}=\overline{A_4A_2}$, $\bar{c}=\overline{A_4A_3}$, $A_1(1; 1; 0)$, $A_2(0; 1; 2)$, $A_3(1; 0; 21)$, $A_4(21; 2; 1)$.

152. $\bar{a}=\overline{A_4A_1}$, $\bar{b}=\overline{A_4A_2}$, $\bar{c}=\overline{A_4A_3}$, A_1 (4; 4; 10), A_2 (4; 10; 2), A_3 (2; 8; 4), A_4 (9; 6; 4).

153. $\bar{a}=\overline{A_4A_1}$, $\bar{b}=\overline{A_4A_2}$, $\bar{c}=\overline{A_4A_3}$, A_1 (4; 6; 5), A_2 (6; 9; 4), $A_3(2; 10; 10)$, A_4 (7; 5; 9).

154. $\bar{a}=\overline{A_4A_1}$, $\bar{b}=\overline{A_4A_2}$, $\bar{c}=\overline{A_4A_3}$, $A_1(3; 5; 4)$, $A_2(8; 7; 4)$, $A_3(5; 10; 4)$, $A_4(4; 7; 8)$.

155. $\bar{a}=\overline{A_4A_1}$, $\bar{b}=\overline{A_4A_2}$, $\bar{c}=\overline{A_4A_3}$, $A_1(7; 7; 3)$, $A_2(6; 5; 8)$, $A_3(3; 5; 8)$, $A_4(8; 4; 1)$.

156. $\bar{a}=\overline{A_3A_1}$, $\bar{b}=\overline{A_3A_2}$, $\bar{c}=\overline{A_3A_4}$, A_1 (4; 4; 10), A_2 (4; 10; 2), A_3 (2; 8; 4), A_4 (9; 6; 4).

157. $\bar{a}=\overline{A_3A_1}$, $\bar{b}=\overline{A_3A_2}$, $\bar{c}=\overline{A_3A_4}$, A_1 (4; 6; 5), A_2 (6; 9; 4), $A_3(2; 10; 10)$, A_4 (7; 5; 9).

158. $\bar{a}=\overline{A_3A_1}$, $\bar{b}=\overline{A_3A_2}$, $\bar{c}=\overline{A_3A_4}$, $A_1(3; 5; 4)$, $A_2(8; 7; 4)$, $A_3(5; 10; 4)$, $A_4(4; 7; 8)$.

159. $\bar{a}=\overline{A_3A_1}$, $\bar{b}=\overline{A_3A_2}$, $\bar{c}=\overline{A_3A_4}$, $A_1(7; 7; 3)$, $A_2(6; 5; 8)$, $A_3(3; 5; 8)$, $A_4(8; 4; 1)$.

160. $\bar{a}=\overline{A_3A_1}$, $\bar{b}=\overline{A_3A_2}$, $\bar{c}=\overline{A_3A_4}$, $A_1(1; 1; 0)$, $A_2(0; 1; 2)$, $A_3(1; 0; 21)$, $A_4(21; 2; 1)$.

Тема 5. Пряма на площині.

Теоретичні відомості до теми

1. Загальне рівняння прямої
2. Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом
3. Рівняння прямої, що проходить через дві дані точки
4. Рівняння прямої, яка проходить через дану точку і має заданий направляючий вектор
5. Рівняння прямої у відрізках
6. Взаємне розміщення двох прямих
7. Відстань від точки до прямої

1. Загальне рівняння прямої

Розглянемо на площині прямокутну систему координат і знайдемо рівняння прямої, коли відомий вектор її нормалі **n**=*(A;B)* і задано точку $M_0(x_0;y_0)$ на цій прямій. Нехай *M(x;y)* – довільна точка шуканої прямої (рис. 2.6.).

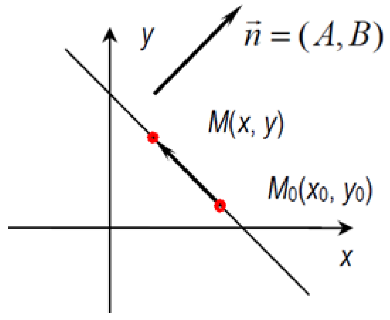


Рис. 2.6.

За умовою вектор $M_0M = (x_0 - x_0; y - y_0)$ перпендикулярний до вектора n $=(A,B)$. Тому їх скалярний добуток $nM_0M=0$. Звідси маємо рівняння:

$$A(x-x_0) + B(y-y_0) = 0 \qquad (2.1)$$

$$\text{або } Ax + By + C = 0, \text{ де } C = -Ax_0 - By_0 \qquad (2.2)$$

Озн. *Рівняння (2.2) називають* ***загальним рівнянням прямої.***

На відміну від рівняння виду (2.1) змінні *x, y* входять до рівняння (2.2) рівноправно. Рівняння (2.1) завжди можна подати у вигляді (2.2)

Рівняння прямої (2.2) можна записати у вигляді $(y = kx + b)$ лише за умови $B \neq 0$.

Коефіцієнти *A, B* при *x, y* у загальному рівнянні прямої є проекціями на координатні осі вектора її нормалі **n** Справджується теорема.

Теорема 2.1. *Будь-яка пряма на площині може бути задана лінійним рівнянням виду (2.2). Кожне лінійне рівняння виду (2.2), де $A^2 + B^2 > 0$, визначає деяку пряму.*

Доведення. Перше твердження теореми було доведено раніше при виведенні рівняння (2.1). Доведемо друге твердження. Візьмемо довільне лінійне рівняння

$Ax + By + C = 0,\ A^2 + B^2 > 0.$

Оскільки коефіцієнти при *x, y* не перетворюються одночасно на нуль, завжди знайдуться значення $x = x_0$, $y = y_0$, при яких виконується рівність

$Ax_0 + By_0 + C = 0.$

Віднімаючи ці рівняння почленно, дістаємо рівність

$A(x-x_0) + B(y-yo) = 0$

За допомогою векторів

$n=(A,B)$, $M_0M = (x-x_0, y-y_0)$

рівність (2.1) можна записати у вигляді $n \cdot M_0M=0$.

Вектор M_0M тоді і тільки тоді буде перпендикулярним до ненульового вектора n, коли точка $M(x, y)$ лежить на прямій, що проходить через точку $M_0\ (x_0,; y_0)$ перпендикулярно до цього вектора. Звідси випливає рівняння (2.1), що визначає деяку пряму. Отже, теорему доведено.

Нехай *x, y* – координати довільної точки на площині. Пряма (2.2) поділяє всю площину на дві півплощини. В одній півплощині виконується нерівність $Ax + By + C > 0$, а в іншій – нерівність $Ax + By + C < 0$. На самій прямій маємо: $Ax + By + C = 0$.

Розглянемо частинні випадки рівняння (2.2):

– якщо $A = 0$, то пряма паралельна осі *x;*
– якщо $B = 0$, то пряма паралельна осі *y;*
– якщо $C = 0$, то пряма проходить через початок координат;

– якщо A - 0, С = 0, то пряма збігається з віссю д:;

– якщо B - 0, C = 0, то пряма збігається з віссю y.

Нагадаємо, що пряма проходить перпендикулярно до вектора $n = (A,B)$.

Зауваження. *Якщо пряма задана загальним рівнянням $Ax + By + C = 0$, то $\vec{p} = (-B; A)$ - напрямлений вектор, $\vec{n} = (A; B)$ - нормальний вектор цієї прямої.*

2. Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом

Нехай на площині задано пряму в прямокутній системі координат Oxy.

Озн. Кут φ між віссю Ox і цієї прямої називається ***кутом нахилу прямій*** *до осі.*

Озн. Тангенс кута нахилу $k = tg\varphi$ називається ***кутовим коефіцієнтом*** *прямої.*

Якщо ця пряма перетинає вісь Oy в точці B з координатами (0;b), то число b називається ***початковою ординатою.***

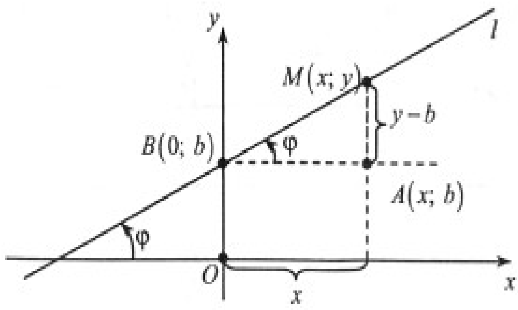


Рис. 2. 7

Візьмемо довільну точку M(x;y) на прямій (рис. 2.7).

Якщо пряма паралельна вісі Ox, то φ= 0 і tgφ=0. При цьому пряма має рівняння виду $y = b$.

Якщо пряма паралельна вісі Oy, то φ= π/2 і tgφ не існує. При цьому пряма має рівняння виду $x=a$ (рис. 2.8).

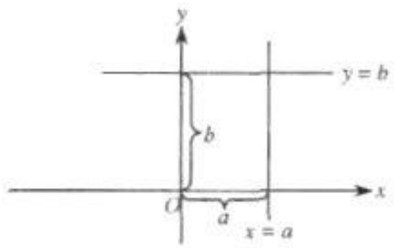


Рис. 2.8

З прямокутного трикутника MAB (рис 2.7) знаходимо рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом $\frac{y-b}{x} = tg\varphi$, яке можна подати у вигляді

$$y = kx + b, \text{ де } k = tg\varphi. \qquad (2.3)$$

Озн. *Рівняння (2.3) називається* ***рівнянням прямої з кутовим коефіцієнтом.***

Координати (x, у) будь-якої точки $M(x;y)$, що належить прямій, задовольняють рівняння (2.3). Якщо пряма проходить через точку $M(x_1;y_1)$, то справджується рівність $y_1 = kx_1 + b$,

Віднімаючи почленно цю рівність від рівності (2.3), дістаємо *рівняння прямої, що проходить через точку $M(x_1;y_1)$ з кутовим коефіцієнтом k:*

$$y - y_1 = k(x - x_1). \qquad (2.4)$$

Зі зміною кутового коефіцієнта k в рівнянні (2.4) утворюються різні прямі, що проходять через точку M_1 $(x_1;y_1)$.

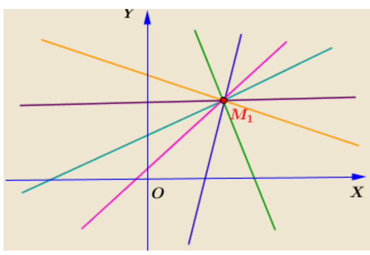


Рис. 2.9.

Озн. *Рівняння (2.4) називається* ***рівнянням пучка (в'язки) прямих*** *(рис. 2.9.)*

3. Рівняння прямої, що проходить через дві дані точки

Нехай дано дві різні точки $M_1(x_1;y_1)$, $M_2\ (x_2,y_2)$, де $x_2 \neq x_1$. З рівняння (2.4) випливає рівняння для кутового коефіцієнта прямої, що проходить через дві точки $M(x_1;y_1)$ та $M(x_2;y_2)$:

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \qquad (2.5)$$

Підставляючи в (2.5) рівняння (2.4) знаходимо *рівняння прямої, що проходить через дві задані точки* $M(x_1;y_1)$ *та* $M(x_2;y_2)$:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \qquad (2.6)$$

Озн. *Рівняння (2.6) називають* ***рівнянням прямої, що проходе через дві задані точки***.

4. Рівняння прямої , яка проходить через дану точку і має заданий направляючий вектор

Якщо задано напрямлений вектор $\vec{p} = (\alpha; \beta)$, паралельній деякій прямій, і точку $M(x_1;y_1)$ на цій прямій, то рівняння прямої можна записати у вигляді:

$$\frac{x - x_1}{\beta} = \frac{y - y_1}{\alpha} \qquad (2.7)$$

Озн. *Рівняння (2.7) називають* ***канонічним рівнянням прямої****, задане точкою та напрямленим вектором.*

5. Рівняння прямої у відрізках

Щоб побудувати графік прямої, достатньо дві її різні точки і через них провести пряму. Якщо пряма перетинає осі координат у точках $M_1(a;0)$, $M_2(0;b)$, $a \neq 0$, $b \neq 0$, то її можна записати рівнянням

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \qquad (2.8)$$

Озн. *Рівняння (2.8) називають* ***рівнянням прямої у відрізках.***

6. Взаємне розміщення двох прямих

Нехай дві прямі задано їх загальними рівняннями: $A_1x+B_1y+C_1 = 0$ та $A_2x + B_2y+C_2=0$.

Точку перетину $M(x_0, y_0)$ цих прямих знаходимо, розв'язуючи систему, що складається із їх рівнянь, оскільки координати (x_0, y_0) точки M задовольняють одночасно обидва ці рівняння.

Кут θ між даними прямими дорівнює куту між їх нормалями $n_1 = (A_1; B_1)$, $n_2 = (A_2, B_2)$, (рис. 2.10.).

Отже, маємо такі залежності:

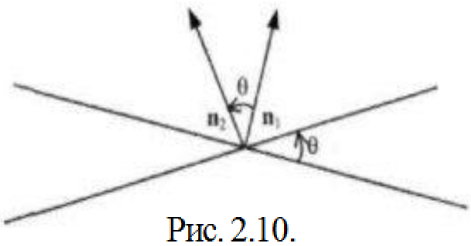


Рис. 2.10.

$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}$ *– умова паралельності прямих.*

$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$ *– умова збіжності прямих*

$k_1k_2=-1$ *або* $A_1 \cdot B_1 + A_2 \cdot B_2 = 0$ *– умова перпендикулярності прямих.*

Скориставшись формулою скалярного добутку векторів, знайдемо кут φ між прямими, заданими загальним рівнянням:

$$\cos\varphi=\frac{A_1\cdot A_2+B_1\cdot B_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2}} \qquad (2.9)$$

7. Відстань від точки до прямої

Нехай дано загальне рівняння прямої $Ax + By + C = 0$ і точку $M_1(x_1, y_1)$. Знайдемо відстань d від точки M_1 до прямої. Візьмемо точку $M_0(x_0, y_0)$ на цій прямій.

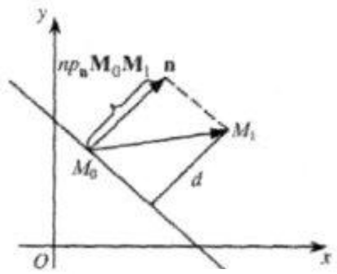


Рис. 2.11.

Тоді відстань від точки M_1 до прямої дорівнює проекції вектора M_0M_1 на вектор нормалі $\mathbf{n} = (A, B)$ (рис. 2.11).

Записуємо аналітичний вираз для шуканої відстані:

$$d=\left|np_n M_0M_1\right|=\frac{\left|n\cdot M_0M_1\right|}{|n|}=\frac{\left|A(x_1-x_0)+B(y_1-y_0)\right|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

Оскільки $-Ax_0 - By_0 = C$, то остаточно маємо формулу для обчислення відстані від точки до прямої:

$$d=\frac{\left|Ax_0+By_0+C\right|}{\sqrt{A^2+B^2}}. \qquad (2.10)$$

Зразки розв'язування задач

Приклад 1*. Перевірити, чи належать точки* $\boldsymbol{A(-3;\ 0)}$, $\boldsymbol{B(14;\ -13)}$, $\boldsymbol{C(1;\ 0)}$, $\boldsymbol{D(2;\ 2)}$ *прямій* $\boldsymbol{2x-5y+6=0}$.

Розв'язання:

Якщо координати точки задовольняють рівнянню, тобто перетворюють його в тотожність, то ця точка належить заданій прямій; якщо координати точки не задовольняють рівнянню, то точка не належить прямій.

Підставивши замість змінних $\boldsymbol{x}$ і $\boldsymbol{y}$ в рівняння $\boldsymbol{2x-5y+6=0}$ координати точки $\boldsymbol{A}$, дістанемо тотожність $\boldsymbol{2\cdot(-3)-5\cdot 0+6=0}$, отже точка

$\boldsymbol{A(-3;\ 0)}$ належить заданій прямій. Аналогічно переконуємося у тому, що точка $\boldsymbol{D}$ належить прямій, а точки $\boldsymbol{B}$ і $\boldsymbol{C}$ не належать.

Приклад 2. *Побудувати графік прямих, заданих загальним рівнянням:*
а) $\mathbf{3x+4y+12=0}$*; б)* $\mathbf{5x+12=0}$*; в)* $\mathbf{2y-7=0}$.

Розв'язання:

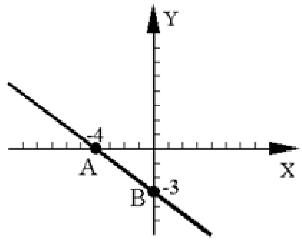


Рис. 2.12

а) Щоб побудувати пряму, знайдемо координати точок перетину з осями $\boldsymbol{Ox}$ і $\boldsymbol{Oy}$. Припустивши, що $\mathbf{y=0}$, дістанемо $\mathbf{3x+12=0}$, $\mathbf{x=-4}$, $\boldsymbol{A(-4;\ 0)}$. При $\mathbf{x=0}$ дістанемо $\mathbf{4y+12=0}$, $\mathbf{y=-3}$, $\boldsymbol{B(0;\ -3)}$. Через точки $\boldsymbol{A}$ і $\boldsymbol{B}$ проводимо шукану пряму (рис. 2.12).

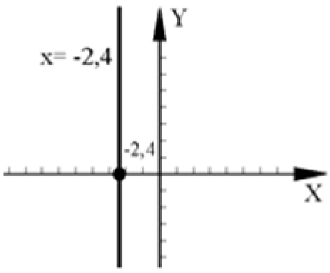


Рис.2.13¶

б) Знайдемо змінну $\boldsymbol{x}$ з рівняння $\mathbf{5x+12=0}$: $\mathbf{x=-\frac{12}{5}=-2{,}4}$. На осі $\boldsymbol{Ox}$ візьмемо точку $\mathbf{x=-2{,}4}$ і проведемо пряму паралельно осі $\boldsymbol{Oy}$ (рис. 2.13).

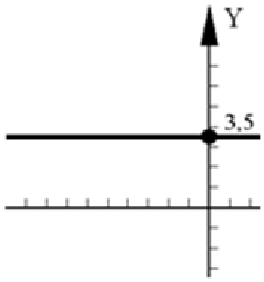


Рис. 2.14

в) Знайдемо змінну $\boldsymbol{y}$ з рівняння $\mathbf{2y-7=0}$: $\mathbf{y=\frac{7}{2}=3{,}5}$.

На осі $\boldsymbol{Oy}$ візьмемо точку $\mathbf{y=3{,}5}$ і проведемо пряму паралельно осі $\boldsymbol{Ox}$ (рис. 2.14)

Приклад 3. *Складіть рівняння прямої, що проходить через точку $M_0(2;-3)$ паралельно вектору* $\vec{p}=(2;\ -2)$.

Розв'язання:

Використовуючи канонічне рівняння прямої (2.7), маємо $\mathbf{\frac{x-2}{2}=\frac{y+3}{-2}}$.

Зведемо дане рівняння до загального рівняння прямої (2.2):

$$\mathbf{-2(x-2)=2(y+3);\quad -x+2=y+3;\quad x+y+1=0}.$$

Приклад 4. *Загальне рівняння прямої 3x – 4y + 12 =0 перетворіть в рівняння у відрізках на осях та побудувати її графік.*

Розв'язання:

Зведемо загальне рівняння прямої $\mathbf{3x-4y=-12}$ до рівняння типу (2.8). Для цього праву та ліву частини рівняння розділимо на $\mathbf{(-12)}$: $\mathbf{\frac{3x}{-12}-\frac{4y}{-12}=1}$.

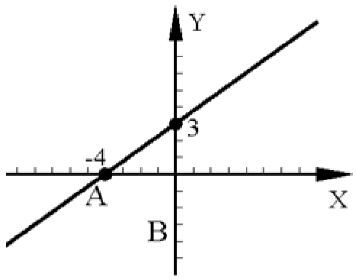


Рис. 2.15

Тоді $\frac{x}{-4}+\frac{y}{3}y=1$ – рівняння у відрізках на осях.

Тобто $a=-4$ і $b=3$. Отже дістанемо точки $A(-4;\ 0)$ і $B(0;\ 3)$. Пряма, яка проведена через точки A і B – шукана (рис. 2.15).

Приклад 5. *Обчислить кутовий коефіцієнт прямої 3x + 2y + 6 =0.*

Розв'язання:

Зведемо загальне рівняння прямої *3x + 2y + 6 =0* до рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом (2.3). Для цього розв'яжемо його відносно y, дістанемо $y=-\frac{3}{2}x-3$, звідки $k=tg(\alpha)=-1{,}5$.

Приклад 6. *Складіть рівняння прямої, яка проходить через точку (-1; -4) і утворює з віссю Ох кут* 135^0.

Розв'язання:

Щоб скласти шукане рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом (2.3), треба знайти k і b. Знайдемо кутовий коефіцієнт $k=tg\left(135^0\right)=-1$. Для знаходження b підставимо в рівняння з кутовим коефіцієнтом $y=kx+b$ координати даної точки *(-1; -4)* і значення k. Дістанемо: $-4=(-1)\cdot 1+b$, звідки $b=-5$. Шукане рівняння має вигляд $y=-x-5$.

Приклад 7. *Складіть рівняння прямої, яка проходить через точки* $A(3;\ -2)$ і $B(4;\ -3)$.

Розв'язання:

За умовою задачі: $x_1=3$, $x_2=4$, $y_1=-2$, $y_2=-3$. Підставивши ці значення в рівняння прямої, яка проходить через дві точки (2.6), дістанемо: $\frac{x-3}{4-3}=\frac{y+2}{-3+2}$; або $-x+3=y+2$ та $x+y+1=0$ – загальне рівняння прямої.

Приклад 8. *Трикутник задано вершинами: A(2; 5), B(-6; -4) і C(6; -3). Складіть рівняння медіани BD.*

Розв'язання:

Знайдемо координати точки *D* – середини сторони *AC*:

$$x_D=\frac{x_A+x_C}{2}; \qquad y_D=\frac{y_A+y_C}{2};$$

$$x_D=\frac{2+6}{2}=4; \qquad y_D=\frac{5-3}{2}=2.$$

Отже, координати точки дорівнюють *D(4; 2)*. Тоді рівняння сторони *BD*, де *B(-6;-4)*, має вигляд:

$$\frac{x-4}{-6-4}=\frac{y+2}{-4-2};$$

$$\frac{x-4}{-10}=\frac{y+2}{-6};$$

$$-6(x-4)=-10(y-2);$$

$$-6x+24=-10y+20;$$

$$6x-10y-4=0;$$

$$3x-5y-2=0.$$

Приклад 9*. Знайдіть вершини трикутника, якщо його сторони задано рівняннями* . $3x-4y+11=0$; $4x-y-7=0$; $y=-3x$.

Розв'язання:

Щоб знайти координати вершин трикутника, треба розв'язати три системи рівнянь:

$$\begin{cases}3x-4y+11=0\\ 4x-y-7=0\end{cases}\qquad \begin{cases}4x-y-7=0\\ y=-3x\end{cases}\qquad \begin{cases}3x-4y+11=0\\ y=-3x\end{cases}.$$

Перша система має розв'язок:

$$\begin{cases}y=4x-7\\ 3x-4(4x-7)+11=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=4x-7\\ 3x-16x+28+11=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=4x-7\\ -13x=-39\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=3\\ y=4\cdot3-7=5\end{cases}$$

Друга система має розв'язок:

$$\begin{cases}y=-3x\\ 4x+3x-7=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=-3x\\ 7x=7\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=1\\ y=-3\end{cases}.$$

Третя система має розв'язок:

$$\begin{cases}y=-3x\\ 3x-4(-3x)+11=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=-3x\\ 15x=-11\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=-\dfrac{11}{15}.\\ y=\dfrac{11}{5}\end{cases}$$

Отже, вершинами трикутника є точки $(3;\ 5)$; $(1;\ -3)$; $\left(-\frac{11}{15};\ \frac{11}{5}\right)$.

Завдання для практичних занять та самостійного виконання

Завдання № 161-200.

161. Точка С(-1; 3) – вершина прямого кута рівнобедреного прямокутного трикутника, гіпотенуза якого задана рівнянням $3x-4y-12=0$. Знайдіть рівняння катетів цього трикутника. Зробити малюнок.

162. Задано рівняння сторони прямокутника $3x-4y+5=0$ та дві його вершини A(1; -3) і C(1; 2). Знайдіть рівняння всіх інших сторін прямокутника. Зробити малюнок.

163. Задана точка A(1; 3) – вершина трикутника ABC та рівняння двох медіан $x-2y+1=0$ і $y-1=0$. Знайдіть рівняння сторін трикутника. Зробити малюнок.

164. Складіть рівняння прямих, що проходять через точку M(2; -3) і утворюють кут 45° з прямою $2x-3y+6=0$. Зробити малюнок.

165. Точки A(-3; -2), B(4; -1), C(1; 3) – вершини трапеції ABCD (AD||BC). Діагоналі трапеції взаємно перпендикулярні. Знайдіть координати вершини D цієї трапеції. Зробити малюнок.

166. Точки A(3; 4), B(-1; 2), C(2; -1) – вершини трикутника. Знайдіть рівняння медіани, яка проведена з вершини A, та рівняння середньої лінії, яка паралельна стороні BC. Зробити малюнок.

167. Задано рівняння двох сторін паралелограма $x-2y=0$, $x-y-1=0$ та точка перетину їх діагоналей A(3; -1). Знайдіть рівняння двох інших сторін. Зробити малюнок.

168. Знайдіть координати центру та радіус кола, що проходе через точки A(1; 5), B(-4; 0), C(4; -4). Зробити малюнок.

169. У трикутнику ABC задано рівняння сторони AB $x+7y-6=0$ та бісектрис AD $x+y-2=0$ і BE $x-3y-6=0$. Знайдіть координати вершин. Зробити малюнок.

170. Знайдіть координати точки A, що симетрична точці B(-3; 1) відносно прямої $2x-y+1=0$. Зробити малюнок.

171. Прямі 2x+y-1 = 0 та 4x-y-11=0 є сторонами трикутника точка P(1; 2) – точка перетину третьої сторони з висотою, опущеною на неї. Скласти рівняння третьої сторони. Зробити малюнок.

172. Пряма 5x-3y+4 = 0 є однією із сторін трикутника. Прямі 4x-3y+2 = 0 та 7x+2y-13 = 0 є його висотами. Скласти рівняння двох інших сторін трикутника. Зробити малюнок.

173. Точки A (3; -1) та B (4; 0) є вершинами трикутника, точка D (2; 1) - точка перетину його медіан. Скласти рівняння висоти, опущеної з третьої сторони. Зробити малюнок.

174. Прямі 3x-4y+17 = 0 та 4x-y-12 = 0 є сторонами паралелограма, а точка P (2; 7) – точка перетину його діагоналей. Скласти рівняння двох інших сторін паралелограма. Зробити малюнок.

175. Прямі x-2y+10 = 0 та 7x+y-5 = 0 є сторонами трикутника, точка D (1; 3) – точка перетину його медіан. Скласти рівняння третьої сторони. Зробити малюнок.

176. Прямі $5x-3y+14 = 0$ та $5x-3y-20 = 0$ є сторонами ромба, а пряма $x-4y-4 = 0$ – рівняння його діагоналі. Скласти рівняння двох інших сторін ромба. Зробити малюнок.

177. На прямій $4x+3y-6=0$ знайти точку, рівновіддалену від точок A (1; 2) та B (-1; -4). Зробити малюнок.

178. Знайти координати точки, яка симетрична точці A (5; 2) відносно прямої $x+3y-1=0$. Зробити малюнок.

179. Прямі $x-3y+3=0$ та $3x+5y+9=0$ є сторонами паралелограма, а точка P (34 –1) – точка перетину його діагоналей. Скласти рівняння двох інших сторін паралелограма. Зробити малюнок.

180. Точки A (4; 5) та C (2; -1) є двома протилежними вершинами ромба, а пряма $x-y+1=0$ – одна з його сторін. Скласти рівняння інших сторін ромба. Зробити малюнок.

181. У паралелограмі ABCD відомі координати трьох його вершин: A(1;1), B(-3;2), C(2; 6). Знайти координати вершини D. Зробити малюнок.

182. У квадраті ABCD відомі координати вершини A(-2;-1) і точка перетину діагоналей O(1;1). Знайти рівняння сторін квадрата. Зробити малюнок.

183. У трикутнику ABC задані рівняння сторін AB: $-3x-2y+5=0$ та BC: $-5x+2y-13=0$ і відомі координати середин цих сторін K(-1;1) і M(3;-1). Знайти рівняння третьої сторони. Зробити малюнок.

184. Дано координати вершин трикутника: A(2;1), B(7;2) і C(-3;3). Знайти рівняння його висот. Зробити малюнок.

185. Знайти координати вершин A, B и C прямокутника ABCD, якщо відоме рівняння сторони AB: $-2x - y + 9 = 0$ і координати точки D(1;-1). Зробити малюнок.

186. Відомі рівняння сторін трикутника AB: $- 3x + y + 4 = 0$, BC: $- 3x - 4y - 1 = 0$ і AC: $- y - 2 = 0$. Знайти рівняння медіани AL. Зробити малюнок.

187. У трикутнику з вершинами A(3;1); B(2;0) та C(1;1) знайти кут, утворений стороною CB і медіаною CM цього трикутника. Зробити малюнок.

188. Скласти рівняння прямої, що проходить через точку K(-5;-1) та відтинає на вісі ординат відрізок, рівний 4. Зробити малюнок.

189. Скласти рівняння прямої, що проходить через точку K(5;-4) перпендикулярно до прямої $3x+2y-7=0$. Зробити малюнок.

190. Обчисліть площу трикутника, який міститься між осями координат та прямою $x+2y-6=0$. Зробити малюнок.

191. Скласти рівняння прямої, що проходить через точку B(2;1) паралельно прямій $y=3x-4$. Зробити малюнок.

192. Обчисліть кут між прямою $2x + y – 1 = 0$ та прямою, що проходить через точки A(1;3) та B(-1;-3).Зробити малюнок.

193. Дано рівняння сторін трикутника $4x-3y-9=0$, $3x+4y+12=0$, $x-2y+4=0$. Обчисліть координати вершин цього трикутника. Зробити малюнок.

194. Скласти рівняння прямої, що проходить через середину відрізка СК перпендикулярно до нього, якщо С(-5;2), К(1;-6).Зробити малюнок.

195. Обчислить координати точок перетину прямої АВ з осями координат, якщо А(4;1), В(-1;-4). Зробити малюнок.

196. Обчислити довжину відрізка прямої $4x+3y-12=0$, який міститься між точками перетину цієї прямої з осями координат. Зробити малюнок.

197. Дано вершини трикутника А(2;4), В(0;2), С(4;-2). Скласти рівняння середньої лінії цього трикутника, яка паралельна стороні АВ. Зробити малюнок.

198. Скласти рівняння прямої, що проходить через точку К(3;4) на однакових відстанях від точок А(-7;3) та В(11;-15).Зробити малюнок.

199. Дано дві точки Р(2;3) та К(-1;0). Скласти рівняння прямої, що проходить через точку К перпендикулярно відрізку РК. Зробити малюнок.

200. Скласти рівняння прямої, якщо точка С(2;3) є основою перпендикуляра, опущеного з початку координат на цю прямую. Зробити малюнок.

Тема 6. Пряма і площина в просторі

Теоретичні відомості до теми

1. Площина в просторі
   1.1. Загальне рівняння площини
   1.2. Рівняння площини у відрізках на осях
   1.3. Рівняння площини, що проходить через три точки
   1.4. Кут між двома площинами
   1.5. Відстань від точки до площини
2. Пряма в просторі
   2.1. Канонічне рівняння прямої
   2.2. Параметричні рівняння прямої
   2.3. Рівняння прямої у просторі, яка проходить через дві задані точки
   2.4. Загальне рівняння прямої у просторі
   2.5. Кут між двома прямими
3. Пряма і площина в просторі
   3.1. Кут між прямою і площиною. Умови паралельності і перпендикулярності прямої і площини
   3.2. Точка перетину прямої і площини

1. *Площина у просторі*

1.1. Загальне рівняння площини

Нехай у просторі, тобто у прямокутній системі координат *Oxyz*, задано площину Р (рис.2.16) її довільною точкою $M_o(x_o y_o z_o)$ і ненульовим вектором $\vec{n}$ = *(A; B; C)* , перпендикулярним до цієї площини.

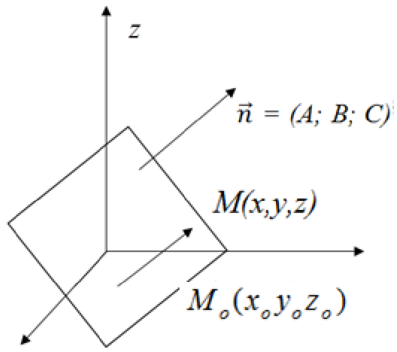


Рис. 2.16

Озн. *Ненульовий вектор* $\vec{\boldsymbol{n}} = (\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C})$, *перпендикулярний до площини, називається нормальним вектором площини.*

Візьмемо на площині Р будь-яку точку *M(x,y,z)* і утворимо вектор $\overrightarrow{M_oM}=(x\text{-}x_0;\ y\text{-}y_0;\ z\text{-}z_0)$. Очевидно, що при будь-якому розташуванні точки М на площині Р вектори $\vec{n}$ і $\overrightarrow{M_oM}$ будуть взаємно перпендикулярні, а значить їх скалярний добуток буде дорівнювати нулю, тобто:

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0 \text{, або}$$

$$Ax + By + Cz + D = 0, \text{ де } D= -Ax_0-By_0-Cz_0 \ . \qquad (2.11)$$

Озн. *Рівняння типу (2.11) називається* ***загальним рівнянням площини***.

В залежності від значень A,B,C,D площина може займати різні положення в системі координат *Oxyz* .

Розглянемо окремі випадки загального рівняння площини.

1) Нехай *D=0*. Тоді рівняння площини має вигляд $\boldsymbol{Ax+By+Cz=0}$ і площина проходить через початок координат.

2) Нехай *C* = 0. Тоді рівняння площини має вигляд $\boldsymbol{Ax+By+D=0}$ і площина паралельна осі *Oz*. Аналогічно при *A*=0 і *B* = 0 дістанемо площини $\boldsymbol{By+Cz+D=0}$ і $\boldsymbol{Ax+Cz+D=0}$, паралельні відповідно осям *Ox* і *Oy*.

3) Нехай *C* = *D* = 0. Тоді рівняння площини має вигляд $\boldsymbol{A\ x+By=0}$ і площина проходить через початок координат і паралельна осі *Oz*. Аналогічно при *A* = *D* = 0 і *B* = *D* = 0 дістанемо площини $\boldsymbol{By+Cz=0}$ і $\boldsymbol{Ax+Cz=0}$, які проходять відповідно через осі *Ox* і *Oy*.

4) Нехай *B* = *C* = 0. Тоді рівняння площини має вигляд $\boldsymbol{Ax+D=0}$ і площина паралельна осям *Oy* і *Oz*, тобто перпендикулярна до осі *Ox*. Аналогічно при *A* = *B* = 0 і *A*=*C*=0 дістанемо площини $\boldsymbol{Cz+D=0}$ і $\boldsymbol{By+D=0}$, які перпендикулярні відповідно до осей *Oz* і *Oy*.

5) Нехай *B=C=D=0*. Тоді рівняння площини має вигляд $\boldsymbol{Ax=0}$, тобто *x=0*; площина збігається з площиною *Oyz*.

Аналогічно при $A=B=D=0$ і $A=C=D=0$ дістанемо площини $z=0$ і $y=0$, які збігаються відповідно з координатними площинами Oxy і Oxz.

1.2. Рівняння площини у відрізках на осях

Рівняння (2.11) зводиться до рівняння у відрізках:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1, \tag{2.12}$$

де $a=-\frac{D}{A}; b=-\frac{D}{B}; c=-\frac{D}{C}$ — відрізки, які відтинає площина на координатних осях.

Озн**. Рівняння типу (2.11) називається **рівнянням площини у відрізках на осях.

1.3. Рівняння площини, що проходить через три точки.

Нехай на площині Р задано три точки $M_1\ (x_1 y_1 z_1)$, $M_2\ (x_2 y_2 z_2)$, і $M_3\ (x_3 y_3 z_3)$, що не лежать на одній прямій. Будь-які три точки однозначно визначають площину.

Розглянемо на площині Р довільну точку $M\ (x, y, z)$ і утворимо вектори:

$\overrightarrow{M_1M}=(x-x_1;\ y-y_1;\ z-z_1)$, $\overrightarrow{M_1M_2}=(x_2-x_1;\ y_2-y_1;\ z_2-z_1)$, $\overrightarrow{M_1M_3}=(x_3-x_1;\ y_3-y_1;\ z_3-z_1)$,

Ці вектори лежать на площині Р, отже їх мішаний добуток дорівнює нулю:

$$\left(\overrightarrow{M_1M}\times\overrightarrow{M_1M_2}\right)\cdot\overrightarrow{M_1M_3}=0, \quad \text{або} \quad \begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0, \tag{2.13}$$

що і визначає рівняння площини, яка проходить через три точки.

***Озн**. Рівняння типу (2.13) називається **рівнянням площини, що проходить через три точки**.*

1.4. Кут між двома площинами

Кут між двома площинами $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ та $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ визначається як кут між їх нормальними векторами $\overrightarrow{n_1}=(A_1;\ B_1;\ C_1)$ та $\overrightarrow{n_2}=(A_2;\ B_2;\ C_2)$ за формулою (2.14), тобто

$$\cos\varphi=\pm\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}} \tag{2.14}$$

Умови паралельності і перпендикулярності двох площин визначаються умовами паралельності і перпендикулярності їх нормальних векторів $\overrightarrow{n_1}$ і $\overrightarrow{n_2}$, тобто:

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2} \text{ — \textit{умова паралельності}},$$

$$A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0 - \text{\textit{умова перпендикулярності}}.$$

1.5. Відстань від точки до площини

Якщо задано рівняння площини Ax+By+Cz+D=0 і точка M_0 (x_0, y_0, z_0) поза нею, то відстань *d* від точки M_0 до цієї площини визначається за формулою:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D_0|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \qquad (2.15)$$

2. Пряма у просторі

2.1. Канонічне рівняння прямої

Пряма *l* у просторі однозначно визначається точкою $M_0(x_0;y_0z_0)$ і напрямним вектором $\vec{s} = (m, n, p)$, паралельним прямій *l*. Візьмемо на прямій *l* будь-яку точку $M(x, y, z)$ і утворимо вектор $\overrightarrow{M_oM}$=(x-x_0; y-y_0; z-z_0).. За умовою вектор $\overrightarrow{M_0M}$ паралельний вектору $\vec{S}$, тоді їх координати мають бути пропорційними – умова паралельності двох векторів:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p} \qquad (2.16)$$

***Озн**. Рівняння типу (2.16) називається **канонічним рівнянням прямої**.*

2.2. Параметричні рівняння прямої

Якщо в (2.16) кожне із співвідношень прирівняти параметру t і виразити x, y, z, то одержимо параметричні рівняння прямої:

$$\begin{cases} x = mt + x_0 \\ y = nt + y_0 \\ z = pt + z_0 \end{cases} \qquad (2.17)$$

***Озн**. Рівняння типу (2.17) називається **параметричним рівнянням прямої**.*

2.3. Рівняння прямої у просторі, яка проходить через дві задані точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$, $M_1(x_1, y_1, z_1)$. Така пряма має вигляд:

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0} \qquad (2.18)$$

2.4. Загальне рівняння прямої у просторі.

Загальне рівняння прямої у просторі визначається системою рівнянь двох непаралельних площин:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \end{cases} \qquad (2.19)$$

з нормальними векторами $\overrightarrow{n_1}$ = (A_1; B_1; C_1) та $\overrightarrow{n_2}$ = (A_2; B_2; C_2). Такі площини перетинаються по прямій, рівняння якої є (2.19).

Озн. *Рівняння типу (2.19) називається* ***загальним рівнянням прямої в просторі.***

Якщо із (2.19) виключити послідовно один раз y, другій раз x (вважаючи z довільною сталою), то одержимо систему рівнянь:

$$\begin{cases} x = mz + a \\ y = nz + b \end{cases}, \qquad (2.20)$$

що визначає рівняння прямої у проекціях. Це рівняння можна записати в канонічній формі

$$\frac{x-a}{m} = \frac{y-b}{n} = \frac{z-0}{1}.$$

2.5. Кут між двома прямими

Якщо дві прямі задані своїми канонічними рівняннями

$$\frac{x-x_1}{m_1} = \frac{y-y_1}{n_1} = \frac{z-z_1}{p_1}, \quad \frac{x-x_2}{m_2} = \frac{y-y_2}{n_2} = \frac{z-z_2}{p_2},$$

з напрямними векторами $\overrightarrow{s_1} = (m_1,\ n_1, p_1)$ та $\overrightarrow{s_2} = (m_2,\ n_2, p_2)$, то кут φ між цими прямими визначається як кут між їхніми напрямними векторами:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2}{|\vec{S}_1| \cdot |\vec{S}_2|} = \frac{m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}. \qquad (2.21)$$

Умови паралельності і перпендикулярності двох прямих визначаються умовами паралельності і перпендикулярності їх напрямних векторів, тобто

$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}$ — *умова паралельності прямих.*

$m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0$ — *умова перпендикулярності прямих.*

3. Пряма і площина в просторі

3.1. Кут між прямою і площиною. Умови паралельності і перпендикулярності прямої і площини

Нехай площина P і пряма l, що її перетинає, задані своїми рівняннями Ax+By+Cz+D=0 і $\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}$. Відомо, що гострий кут φ між прямою l і площиною P є кут між прямою l і її проекцією l_1 на площину P. Позначимо через θ гострий кут між нормальним вектором $\vec{n}$ = *(A; B; C)* площини P і напрямним вектором $\vec{s} = (m, n, p)$ прямої l. Оскільки $\varphi + \theta = 90°$, то $\varphi = 90° - \theta$, тому $\sin\varphi = \sin(90° - \theta) = \cos\theta$. Якщо $\theta > 90°$, тоді $\sin\varphi = -\cos\theta$, або $\sin\varphi = |\cos\theta|$ в будь якому випадку кут між прямою і площиною визначається за формулою

$$\sin\varphi = \frac{|Am + Bn + Cp|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}. \qquad (2.22)$$

Якщо пряма l паралельна площині P, тоді вектори $\vec{n}$ і $\vec{s}$ перпендикулярні, тобто $\vec{n} \cdot \vec{s} = 0$, або

$$Am + Bn + Cp = 0, \qquad (2.23)$$

що визначає *умову паралельності прямої і площини*.

Якщо ж пряма l перпендикулярна до площини P, то вектори $\vec{n}$ і $\vec{s}$ паралельні і має місце співвідношення

$$\frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}, \qquad (2.24)$$

що є *умовою перпендикулярності прямої і площини*.

3.2. Точка перетину прямої і площини

Щоб знайти точку перетину прямої і площини, потрібно параметричні рівняння прямої (2.17) підставити в загальне рівняння площини (2.11) і розв'язати його відносно невідомого параметра t. Знайдене значення $t=t_0$ потрібно підставити в (2.17). Одержані значення x_0, y_0, z_0 є координатами точки перетину прямої і площини.

Зразки розв'язування задач

Приклад 1. *Скласти рівняння прямої, яка паралельна вектору* $\bar{l} = (2;3;1)$ *і проходить через точку* $M(-1;4;-2)$ *.*

Розв'язання:

Використовуючи канонічне рівняння прямої (2.16), маємо:

$$\frac{x+1}{2} = \frac{y-4}{3} = \frac{z+2}{1}.$$

Якщо ці рівняння записати у вигляді системи, то дістанемо загальне рівняння прямої (2.19): $\begin{cases} \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-4}{3}, \\ \dfrac{y-4}{3} = \dfrac{z+2}{1}; \end{cases}$ або $\begin{cases} 3x - 2y + 11 = 0, \\ y - 3z - 10 = 0. \end{cases}$

Приклад 2. *Довести, що прямі* $\dfrac{x-2}{-2} = \dfrac{y+6}{3} = \dfrac{z-1}{-4}$ *і* $\dfrac{x+3}{5} = \dfrac{y-2}{6} = \dfrac{z+1}{2}$ *взаємно перпендикулярні.*

Розв'язання:

Перевіримо умову перпендикулярності $m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0$ для заданих прямих, де $m_1=-2, n_1=3, p_1=-4$ і $m_2=5, n_2=6, p_2=2$, маємо: $-2\cdot 5+3\cdot 6+(-4)\cdot 2=0$.

Приклад 3. *Обчислити гострий кут між двома прямими* $\frac{x-2}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-3}{2}$ і $\frac{x+1}{12}=\frac{y-4}{3}=\frac{z+2}{4}$.

Розв'язання:

Припустивши в рівності (2.21) $m_1=2,\ n_1=1,\ p_1=2$ і $m_2=12,\ n_2=3,\ p_2=4$, знаходимо:

$$\cos\varphi = \frac{2\cdot 12+1\cdot 3+2\cdot 4}{\sqrt{2^2+1^2+2^2}\cdot\sqrt{2^2+1^2+2^2}} = 0{,}8974,\ \ \varphi = 26^0 11'.$$

Приклад 4. *Обчислити кут між прямою* $\frac{x+3}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z+4}{-3}$ *і площиною* $3x+4y+2z-5=0$.

Розв'язання:

Скористаємось формулою (2.22). Оскільки

$A=3, B=4, C=2, m=1, n=2, p=-3$, то маємо:

$$\sin\varphi = \frac{|3\cdot 1+4\cdot 2+2\cdot(-3)|}{\sqrt{3^2+4^2+2^2}\cdot\sqrt{1^2+2^2+(-3)^2}} = 0{,}2482,\ \ \varphi = 14^0 22'.$$

Приклад 5. *Знайти гострий кут між площинами* $2x-3y+4z-1=0$ *і* $3x-4y-z+3=0$.

Розв'язання:

Щоб обчислити гострий кут φ між площинами, скористаємось формулою (7.3), причому праву частину рівності беремо за абсолютною величиною, бо $\cos\varphi>0$. Маємо:

$A_1=2,\ \ B_1=-3,\ \ C_2=4$ і

$A_2=3,\ \ B_2=-4,\ \ C_2=-1$.

Отже $$\cos\varphi = \left|\frac{2\cdot 3+(-3)\cdot(-4)+4\cdot(-1)}{\sqrt{2^2+(-3)^2+4^2}\cdot\sqrt{3^2+(-4)^2+(-1)^2}}\right| = \frac{14}{\sqrt{29}\sqrt{26}} = 0{,}5098 .$$

Тоді, використовуючи таблиці Брадіса, маємо $\varphi=59^0 21'$.

Приклад 6. *Знайти відстань між паралельними площинами* $2x-3y+z-2=0$ *і* $4x-6y+2z+7=0$.

Розв'язання:

Щоб знайти шукану відстань, треба визначити точку, яка належить одній з двох даних площин. Розглянемо площину $4x-6y+2z+7=0$. Якщо $x=0,\ y=0$, то *z=-3,5*, тобто точка *A(0;0;-3,5)* належить площині. Тоді треба знайти відстань від точки *A* до площини *2x-3y+z-2=0*. За формулою (2.15) маємо:

$$\boldsymbol{d=\frac{|2\cdot 0-3\cdot 0-3{,}5-2|}{\sqrt{2^2+(-3)^2+1^2}}=\frac{5{,}5}{\sqrt{14}}\approx 1{,}47}\ \ (од.).$$

Приклад 7*. Задано координати вершини піраміди ABCD: A(2;4;-3); B(-1;0;3); C (1;-1;3); D(2;1;3). Знайти:*

1) *довжину ребра AB;*
2) *кут між ребрами AB і AD*
3) *рівняння площини ABC*
4) *кут між ребром AD і гранню ABC*
5) *площу грані ABC*
6) *об'єм піраміди*
7) *рівняння прямої AB*
8) *рівняння висоти, опущеної із вершини D на грань ABC*
9) *відстань від вершини D до гарні ABC*

Розв'язання:

Знайдемо координати векторів $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}$, які будуть використані в обчисленнях:

$\overrightarrow{AB}=(-3;-4;6);\ \overrightarrow{AC}=(-1;-5;6);\ \overrightarrow{AD}=(0;-3;6)$. Тоді:

1) довжина ребра обчислюється як довжина вектора, тобто

$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{9+16+36}=\sqrt{61};\ |\overrightarrow{AC}|=\sqrt{1+25+36}=\sqrt{62};\ |\overrightarrow{AD}|=\sqrt{9+36}=\sqrt{45}$.

2) кут між ребрами $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AD}$ обчислюється як кут між векторами. Отже:

$$\cos\varphi=\frac{\overline{AB}\cdot\overline{AD}}{|\overline{AB}|\cdot|\overline{AD}|}=\frac{(-3)\cdot 0+(-4)(-3)+6\cdot 6}{\sqrt{61}\cdot\sqrt{45}}=\frac{12+36}{3\sqrt{305}}=\frac{48}{3\sqrt{305}}=\frac{16}{\sqrt{305}},$$

а звідси $\varphi=\arccos\frac{16}{\sqrt{305}}$

3) рівняння площини ABC знайдемо згідно з (2.13), як рівняння площини, що проходить через три точки A, B, C, або три компланарні вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{AM}=\{x-2;y-4;z+3\}$; де M(x, y, z)– біжуча точка площини ABC. Отже,

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-4 & z+3 \\ -1-2 & 0-4 & 3+3 \\ 1-2 & -1-4 & 3+3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x-2 & y-4 & z+3 \\ -3 & -4 & 6 \\ -1 & -5 & 6 \end{vmatrix}=(x-2)(-24+30)-(y-4)(-18+6)+$$

$+(z+3)(15-4)=6x-12+12y-48+11z+33=6x+12y+11z-27=0$ - рівняння площини ABC.

4) кут між ребром $\overrightarrow{AD}$ і гранню ABC визначається за формулою (2.22), в якій $\vec{n}$ =(6; 12; 11) – нормальний вектор площини ABC, а $\vec{S}=\overrightarrow{AD}$. Отже,

$\sin\varphi = \dfrac{\vec{N}\cdot\overrightarrow{AD}}{|\vec{N}|\cdot|\overrightarrow{AD}|} = \dfrac{6\cdot 0+(-3)\cdot 12+6\cdot 11}{\sqrt{36+144+121}\cdot\sqrt{45}} = \dfrac{30}{3\sqrt{5}\cdot\sqrt{301}} = \dfrac{10}{\sqrt{1505}} =$ 0,25777, звідки, використовуючи таблиці Брадіса, маємо φ=arcsin$\dfrac{10}{\sqrt{1505}}$≈arcsin025777≈14°57′.

5) площа грані ABC обчислюється через векторний добуток векторів $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$, тобто:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{\begin{vmatrix}-4 & 6\\ -5 & 6\end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix}-3 & 6\\ -1 & 6\end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix}-3 & -4\\ -1 & -5\end{vmatrix}^2} = \frac{1}{2}\sqrt{36+144+121} = \frac{1}{2}\sqrt{301}\ \text{кв.од.}$$

6) об'єм піраміди DABC обчислюємо як мішаний добуток векторів $\overrightarrow{AB} = (-3;-4;6)$; $\overrightarrow{AC} = (-1;-5;6)$; $\overrightarrow{AD} = (0;-3;6)$., тобто:

$$V = \pm\frac{1}{6}\begin{vmatrix}-3 & -4 & 6\\ -1 & -5 & 6\\ 0 & -3 & 6\end{vmatrix} = \pm\frac{1}{6}(90+18-54-24) = \frac{1}{6}\cdot 30 = 5\ \text{куб.од.}$$

7) рівняння прямої AB знаходимо згідно з формулою (2.18) як рівняння прямої, що проходить через дві точки *A(2;4;-3) і B(-1;0;3)*, отже:

$$\frac{x-2}{-1-2} = \frac{y-4}{0-4} = \frac{z+3}{3+3} \Rightarrow \frac{x-2}{-3} = \frac{y-4}{-4} = \frac{z+3}{6}.$$

8) канонічне рівняння пучка прямих що проходять через точку D згідно з (2.16) матимуть вигляд

$$\frac{x-2}{m} = \frac{y-1}{n} = \frac{z-3}{p}.$$

Із цього пучка прямих виділимо ту, яка буде перпендикулярна до площини ABC. Умова перпендикулярності прямої і площини – це умова паралельності напрямного вектора прямої $\vec{s} = (m, n, p)$ і нормального вектора $\vec{n} = (A;\ B;\ C)$ площини ABC. Отже, згідно з (2.24)

$\dfrac{6}{m} = \dfrac{12}{n} = \dfrac{11}{p}$, або m=6, n=12, p=11. Тоді $\dfrac{x-2}{6} = \dfrac{y-1}{12} = \dfrac{z-3}{11}$ – буде рівняння висоти, опущеної із вершини D на грань ABC.

9) відстань від точки D до грані ABC знаходиться за формулою (2.15)

$$d = \frac{|2\cdot 6+1\cdot 12+3\cdot 11-27|}{\sqrt{301}} = \frac{|12+12+33-27|}{\sqrt{301}} = \frac{30}{\sqrt{301}}$$

Завдання для практичних занять та самостійного виконання

Завдання № 201-240. Задано координати вершини піраміди ABCD. Знайти:

1) довжину ребра AB;

2) кут між ребрами AD і AB;

3) рівняння площини ABC;

4) кут між ребром AD і гранню ABC;

5) площу грані ABC;

6) об'єм піраміди;

7) рівняння прямої AB;

8) рівняння висоти, опущеної з вершини D на грань ABC;

9) відстань від вершини D до грані ABC.

201. A (7; 7; 3),	B (6; -5; 8),	C (-3; 5; 8),	D (8; 4; -1).
202. A (5; 6; 8),	B (6; 10; 7),	C (8; 3; -2),	D (3; -4; 7).
203. A (7; -2; 2),	B (-5; 7; 7),	C (3; 2; 5),	D (1; 1; -5).
204. A (6; 5; 5),	B (-1; -3; 4),	C (2; 5; -8),	D (-2; 3; 4).
205. A (1; 8; 2),	B (-5; -2; -6),	C (-2; 4; 4),	D (1; 1; -3).
206. A (-3; 4; 5),	B (4; -3; 1),	C (3; -3; 0),	D (2; -3; -4).
207. A (1; 7; 2),	B (2; -5; 7),	C (0; 5; -3),	D (4; -3; 2).
208. A (4; -5; 5),	B (5; 2; 6),	C (-1; -3; -4),	D (-2; 5; 7).
209. A (3; -4; 5),	B (8; 7; 4),	C (5; 9; -3),	D (-4; -3; -2).
210. A (1; 8; 2),	B (-5; 7; 4),	C (3; -2; 6),	D (-4; -3; -2).
211. A (1; 0; 2),	B (2; -1; 3),	C (-1; 7; 2),	D (-3; 4; 8).
212. A (0; 1; 1),	B (-1; 2; 3),	C (1; 5; 0),	D (2; 4; -8).
213. A (1; 2; -1),	B (3; 5; -2),	C (2; 0; -1),	D (-3; 0; -1).
214. A (-2; 5; 3),	B (10; -4; 1),	C (5; 3; 1),	D (4; 2; -1).
215. A (4; 2; -1),	B (2; 0; 2),	C (5; 3; 1),	D (-3; -7; 8).
216. A (3; 1; 2),	B (5; -7; 9),	C (2; 0; -1),	D (-3; 2; 7).
217. A (1; 1; 2),	B (-5; 1; -1),	C (3; -2; 4),	D (-1; -4; 5).
218. A (7; -2; -3),	B (-4; 2; 1),	C (2; 4; 6),	D (3; 2; -5).
219. A (2; 3; -4),	B (5; 7; 9),	C (2; -2; 4),	D (9; 1; 2).
220. A (5; -2; 0),	B (4; 3; -2),	C (-1; -2; -3),	D (5; -3; 2).
221. A (0; 2; -3),	B (-1; 5; 7),	C (2; -3; 4),	D (4; 5; -2).
222. A (-2; 3; 4),	B (1; 1; 1),	C (4; -3; 2),	D (0; 5; -6).
223. A (1; -5; 4),	B (0; 6; -3),	C (3; 2; 1),	D (2; 7; -3).
224. A (2; 4; -3),	B (-4; 2; 3),	C (0; 2; -5),	D (1; 5; -7).
225. A (1; -1; 0),	B (2; 5; 7),	C (-7; 1; 2),	D (4; 3; -3).
226. A (3; 1; -2),	B (5; -4; 0),	C (3; 4; -2),	D (1; -5; 3).

227. A (5; -3; 0),	B (0; -1; 3),	C (7; 2; 1),	D (3; -2; 4).
228. A (7; 1; 1),	B (2; 0; -1),	C (1; -2; 5),	D (3; 4; 5).
229. A (3; 5; 1),	B (2; -4; 3),	C (4; -3; 2),	D (-1; 7; 3).
230. A (4; -3; 2),	B (1; 1; -1),	C (0; 2; -3),	D (2; 2; -4).
231. A(3; 5; 4),	B(8; 7; 4),	C(5; 10; 4),	D(4; 7; 8).
232. A(2; 0; 0),	B(1; 0; 1),	C(0; 21; 0),	D(1; 21; 1).
233. A(7; 7; 3),	B(6; 5; 8),	C(3; 5; 8),	D(8; 4; 1).
234. A(0; 1; 0),	B(1; 0; 0),	C(21; 21; 1),	D(2; 2; 1).
235. A(10; 6; 6),	B(22; 8; 2),	C(6; 8; 9),	D(7; 10; 3).
236. A(4; 2; 5),	B(0; 7; 2),	C(0; 2; 7),	D(1; 5; 0).
237. A(4; 4; 10),	B(4; 10; 2),	C(2; 8; 4),	D(9; 6; 4).
238. A(1; 1; 0),	B(0; 1; 2),	C(1; 0; 21),	D(21; 2; 1).
239. A(21; 2; 21),	B(1; 1; 2),	C(0; 2; 1),	D(2; 21; 22).
240. A(1; 8; 2),	B(5; 2; 6),	C(5; 7; 4),	D(4; 10; 9).

Застосування елементів аналітичної геометрії в економіці

Лінійна модель витрат. Точка беззбитковості.

При виробництві х одиниць будь-якої продукції ***сукупні витрати*** (витрати) С (х) складаються з двох складових − постійних (фіксованих) витрат F та змінних витрат V: C = F +V.

Постійні витрати *F – це витрати, які не залежать від числа одиниць виробленої продукції.*

Постійні витрати включають в себе амортизацію, оренду приміщення, відсотки за позиками і т.п.

Змінні витрати *V – це витрати, що прямо залежать від кількості виробленої продукції.*

Змінні витрати включають в себе вартість сировини, робочої сили і т.п.

У найпростішому випадку змінні витрати прямо пропорційні х – кількості виробленої продукції. Коефіцієнт пропорційності a – це змінні витрати на виробництво однієї одиниці продукції (V = a x).

Якщо позначити через b фіксовані витрати, то вийде рівняння, яке називають лінійної моделлю витрат: a С(х)=b+ a х.

Сукупний дохід*, або виручка, R (x), що одержує підприємством від продажу х одиниць продукції, визначається формулою R (x) = px, де p – ціна одиниці товару.*

Очевидно, що область визначення цієї функції$\{$х: $x \geq 0\}$ і R (0) = 0.

Якщо вироблено і продано x одиниць продукції, то прибуток P (x) визначається формулою P (x) = R (x) – C (x).

Точка, в якій прибуток звертається в нуль, називається ***точкою беззбитковості***.

Задача 1. *Відомо, що фіксовані витрати виробництва складають 10 тис. грн. в місяць, змінні витрати – 30 грн. за одиницю продукції, виручка – 50 грн. за одиницю продукції. Потрібно скласти функцію прибутку і побудувати її графік.*

Розв'язання:

За умовою завдання фіксовані або постійні витрати F = 10000. Так як змінні витрати з виробництва однієї одиниці продукції за умовою задачі рівні 30 грн. (a = 30), То змінні витрати, що залежать від кількості виробленої продукції, V = 30·x, де x – кількість виробленої продукції. Таким чином, сукупні витрати складають C (x) =10000 + 30x. Сукупний дохід, що отримується від продажу x одиниць продукції, визначається в та кий спосіб R (x) = 50·x.

Побудуємо графіки функцій доходу і витрат (рис. 2.16).

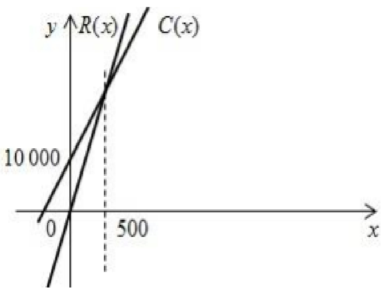


Рис. 2.16

Точку перетину прямих C (x) =10000 + 30x і R (x) = 50 x знайдемо наступним чином:

C (x) = R (x), тоді 10000+30x = 50x.

Отже, x = 500, C (x) = R (x) =25000.

Прибуток, що отримується підприємством, можна знайти за формулою P (x) = R (x) – C (x) = 50 x – (10000 + 30 x) = 20 x – 10000, P (x) = 20 x –10000.

Побудуємо графік функції прибутку. При x = 500 P (x) = 0. Отже, координати першої точки (500; 0). При x = 600 P (x) = 2000; отримали другу точку (600; 2000) . Через дві точки на площині проведемо пряму, яка є графіком функції P (x) (рис 2.17).

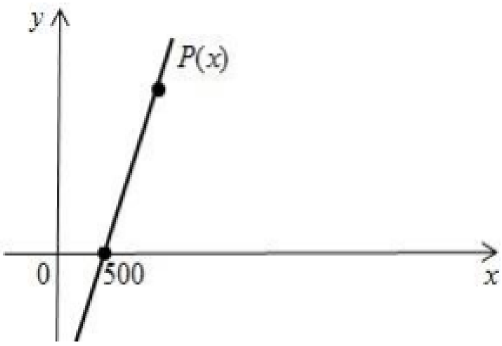


Рис 2.17

Як видно з графіка, при малих значеннях x прибуток від'ємний (графік P (x) розташований нижче осі Ox), тобто виробництво збиткове. При збільшенні x прибуток зростає, в точці з абсцисою x = 500 вона перетворюється в нуль (точка беззбитковості) і після цього стає додатною (рис. 2.17).

Тестові завдання до модуля «Елементи аналітичної геометрії»

№ з/п	УМОВА:	ВАРІАНТИ ВІДПОВІДЕЙ:
1.	$\vec{a}$ *(0,1,0),* $\vec{b}$ *(1,1,0),* $\vec{c}$ *(0,1,1). Які координати має вектор* $\vec{f}=(\vec{a}+\vec{b})-2\vec{c}$ *?*	1) (1,0,2); 3) (1,0,–2); 2) (–1,0,2); 4) (–1,0,–2).
2.	$\vec{a}$ *(–1,–1,0),* $\vec{b}$ *(0,1,1), λ=2, β=3. Які координати має вектор* $\vec{c}=\lambda\vec{a}+\beta\vec{b}$ *?*	1) (-2,1,3); 3) (-2,1,-3); 2) (2,-1,3); 4) (2,1,3).
3.	*Довжина вектора* $\bar{a}$ *(1,2,–2) дорівнює*	1) 1; 3) 3; 2) $\sqrt{3}$; 4) 9.
4.	$\lvert\vec{a}\rvert=3$, $\lvert\vec{b}\rvert=4$, $\angle(\vec{a},\vec{b})=60^{o}$. *Скалярний добуток (*$\vec{a}\cdot\vec{b}$*) дорівнює*	1) 6; 3) $6\sqrt{3}$; 2) 12; 4) 24.
5.	$\lvert\vec{a}\rvert=2$, $\lvert\vec{b}\rvert=3$, $\angle(\vec{a},\vec{b})=45^{o}$ *. Векторний добуток [*$\vec{a}\cdot\vec{b}$*] дорівнює*	1) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$; 2) $3\sqrt{2}$; 4) $\sqrt{2}$.
6.	*Задано координати векторів:* $\vec{a}$ *(–1,2,0),* $\vec{b}$ *(1,–2,0),* $\vec{c}$ *(2,1,0). Обчислити мішаний добуток(*$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$*)*	1) 0; 3) 2; 2) 1; 4) 3.
7.	*Обчислити кут між векторами* $\vec{a}$ *(1,0,1) та* $\vec{b}$ *(1,1,2)*	1)0º; 3) 45º; 2) 30º; 4) 60º.
8.	$\lvert\vec{a}\rvert=2$, $\lvert\vec{b}\rvert=4$, $\angle(\vec{a},\vec{b})=60^{\circ}$. *Площа паралелограма, побудованого на векторах* $\vec{a}$ *та* $\vec{b}$ *як на сторонах, дорівнює*	1) 4; 3) $4\sqrt{3}$; 2) $4\sqrt{2}$; 4) 8.
9.	$\lvert\vec{c}\rvert=1$, $\lvert\vec{d}\rvert=2$, $\angle(\vec{c},\vec{d})=30^{\circ}$. *Площа трикутника, побудованого на векторах* $\vec{c}$ *та* $\vec{d}$ *як на сторонах, дорівнює*	1) 1; 3) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $\frac{1}{2}$; 4) $\sqrt{3}$.
10.	*Обчислити об'єм піраміди, побудованої на векторах:* $\vec{a}$ *(–1,1,2),* $\vec{b}$ *(2,1,1),* $\vec{c}$ *(1,2,-1).*	1) 2; 3) 6; 2) 4; 4) 12.
11.	*Точка A(1,–2) належить прямій*	1) 2x+y–1=0; 3) 4x+3y+2=0; 2) –x+2y=0; 4) 2x–y=0.
12.	*Точка C(*$\frac{1}{2}$*,–1) належить прямій*	1) x+y–1=0; 3) 4x–5y–7=0; 2) $-3x+\frac{3}{2}y=0$; 4) 8x+7y–3=0.
13.	*Прямі x–y+2=0 и 2x–y–3=0 перетинаються в точці з координатами*	1) A(-5; 7); 3) C(7; 9); 2) B(-7; -9); 4) D(5; 7).

14.	*Пряма –2x+3y–4=0 проходе через точку*	1) A(2,3); 3) C(–1/2,1); 2) B(–3,2); 4) D(0,1).
15.	*Пряма 8x–y+3=0 проходе через точку*	1) A(-2; 7); 3) C(-1; -5); 2) B($\frac{1}{4}$; -1); 4) D($\frac{1}{2}$,1).
16.	*Прямі задані своїми рівняннями:* ℓ_1: $y=\frac{1}{8}x+2$; ℓ_2: $y=8x-3$; ℓ_3: $y=-8x+3$; ℓ_4: $y=8x+5$. *З них паралельними є:*	1) ℓ_3 та ℓ_4; 3) ℓ_2 та ℓ_3; 2) ℓ_1 та ℓ_2; 4) ℓ_2 та ℓ_4.
17.	*Прямі задані своїми рівняннями:* ℓ_1: $y=7x+5$; ℓ_2: $y=\frac{1}{7}x+5$; ℓ_3: $y=-7x+5$ ℓ_4: $y=7x-2$. *З них паралельними є:*	1) ℓ_1 та ℓ_4; 3) ℓ_1 та ℓ_3; 2) ℓ_1 та ℓ_2; 4) ℓ_2 та ℓ_4.
18.	*Прямі задані своїми рівняннями:* ℓ_1: $y=-5x-5$; ℓ_2: $y=5x+5$; ℓ_3: $y=\frac{1}{5}x-1$; ℓ_4: $y=1{,}5x-1$. *З них перпендикулярними є:*	1) ℓ_3 та ℓ_4; 3) ℓ_1 та ℓ_3; 2) ℓ_1 та ℓ_2; 4) ℓ_2 та ℓ_3.
19.	*Відстань від точки A(1,1) до прямої 3x+4y+3=0 дорівнює*	1) 2; 3) 6; 2) 3; 4) 10.
20.	*Відстань від точки C(1,2) до прямої 3x–4y+5=0 дорівнює*	1) 0; 3) 2; 2) 1; 4) 3.
21.	*Точка B(1,0,1) належить площині*	1) 3x+2y+z–4=0; 2) x–y–z+2=0; 3) 2x+y+z+3=0; 4) 5x+8y–2z–2=0.
22.	*Координати нормального вектора площини 3x+4y–6=0*	1) (3,4,–6); 3) (4,3,0); 2) (3,4,0); 4) (–6,4,3).
23.	*Площини задані своїми рівняннями:* α: $x+y+2z-1=0$, β: $3x-2y-5z+4=0$, γ: $2x+2y+4z+3=0$, σ: $-x-4y+7z+6=0$. *З них паралельними є*	1) α та β; 3) β та σ; 2) γ та β; 4) α та γ.
24.	*Площини задані своїми рівняннями:* α: $x-6y+2z+3=0$, β: $3x-5z+4=0$, γ: $4x+y+z-2=0$, σ: $-7x+4y+8z+14=0$. *З них перпендикулярними є*	1) α та β; 3) β та σ; 2) α та γ; 4) γ та β.
25.	*Прямі задані своїми рівняннями:* ℓ_1: $\frac{x-3}{2}=\frac{y-2}{7}=\frac{z+4}{-1}$; ℓ_2: $\frac{x-1}{3}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-5}{-2}$; ℓ_3: $\frac{x}{-5}=\frac{y+6}{8}=\frac{z-1}{4}$; ℓ_4: $\frac{x+3}{-6}=\frac{y-4}{-2}=\frac{z}{4}$. *З них паралельними є:*	1) ℓ_3 та ℓ_4; 3) ℓ_1 та ℓ_3; 2) ℓ_1 та ℓ_2; 4) ℓ_2 та ℓ_4.

26.	*Прямі задані своїми рівняннями:* $\ell_1: \frac{x-2}{3}=\frac{y+3}{7}=\frac{z-2}{2}$; $\ell_2: \frac{x+6}{0}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-1}{1}$; $\ell_3: \frac{x}{1}=\frac{y+1}{8}=\frac{z-3}{2}$; $\ell_4: \frac{x-3}{2}=\frac{y-4}{3}=\frac{z}{-3}$. *З них паралельними є:*	1) ℓ_3 та ℓ_4; 3) ℓ_1 та ℓ_3; 2) ℓ_1 та ℓ_2; 4) ℓ_2 та ℓ_4.
27.	*Пряма* ℓ *та площини* α, β, γ, σ *задані своїми рівняннями:* $\ell: \frac{x-3}{0}=\frac{y-4}{2}=\frac{z}{-1}$, $\alpha: 3x+7y+z-4=0$, $\beta: -2x-5y+3z+5=0$, $\gamma: 4x+3y+6z-12=0$, $\sigma: -6x-y+4z-2=0$. *Якій площині паралельна пряма* ℓ?	1) α; 3) γ; 2) β; 4) σ.
28.	*Пряма* ℓ *та площини* α, β, γ, σ *задані своїми рівняннями:* $\ell: \frac{x-8}{3}=\frac{y-2}{2}=\frac{z+4}{-1}$, $\alpha: -2x+3y-2=0$, $\beta: x+6y-z+1=0$, $\gamma: 4x-z+3=0$, $\sigma: -6x-4y+2z-5=0$. *Якій площині перпендикулярна пряма* ℓ?	1) α; 3) γ; 2) β; 4) σ.
29.	*Обчислити кут між прямими* ℓ_1: $\frac{x-2}{1}=\frac{y+1}{1}=\frac{z+2}{2}$; $\ell_2: \frac{x-3}{1}=\frac{y+1}{0}=\frac{z-1}{1}$	1) 0^o; 3) 45^o; 2) 30^o; 4) 60^o.
30.	*Обчислити кут між прямою* ℓ: $\frac{x+1}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z-2}{2}$ *та площиною* $\alpha: x+z-7=0$	1) 0^o; 3) 45^o; 2) 30^o; 4) 60^o.

Модуль 3. ВСТУП ДО МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

Тема 7. Границя функції

Теоретичні відомості до теми

1. Нескінченна числова послідовність
2. Границя числової послідовності і її властивості
3. Нескінченно малі і нескінченно великі послідовності
4. Поняття границі функції

5. Основні теореми про границі функції

6. Невизначеності і способи їх розкриття

1. Нескінченна числова послідовність

Озн. Нескінченною числовою послідовністю *називається числова функція, визначена на множині N натуральних чисел.*

Озн. *Послідовність* $\{x_n\}$ *називається* ***зростаючою (спадною)****, якщо для будь-якого n виконується нерівність* $x_{n+1} > x_n$ $(x_{n+1} < x_n)$.

Озн. *Послідовність* $\{x_n\}$ *називається* ***незростаючою (неспадною)****, якщо для будь-якого n виконується нерівність* $x_{n+1} \geq x_n$ $(x_{n+1} \leq x_n)$.

Озн. *Спадні, зростаючі, неспадні і незростаючі послідовності називаються* ***монотонними***.

Звичайно послідовність задається формулою, яка виражає загальний член послідовності через *n*.

2. Границя числової послідовності і її властивості

Озн. *Число a називається* ***границею послідовності*** $\{x_n\}$*, якщо для будь-якого додатного числа ε знайдеться натуральне число N, що буде виконуватися нерівність* $|x_n - a| < \varepsilon$. *Записується таким чином:* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

Послідовність може мати лише одну границю.

Озн. *Якщо послідовність має границю, то таку послідовність називають збіжною.*

Озн. *Якщо послідовність не має границі, то таку послідовність називаються розбіжною.*

Властивості числових границь:

1. *Якщо послідовності* $\{x_n\}$ *і* $\{y_n\}$ *збігаються, то* $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n + \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

2. *Якщо послідовності* $\{x_n\}$ *і* $\{y_n\}$ *збігаються, то* $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

3. *Сталий множник можна винести за знак границі, якщо послідовність* $\{x_n\}$ *збігається:* $\lim\limits_{n\to\infty}(k \cdot x_n) = k \cdot \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

4. Якщо послідовності $\{x_n\}$ *і* $\{y_n\}$ *збігаються і границя послідовності* $\{y_n\}$ *відмінна від нуля, то* $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}x_n}{\lim\limits_{n\to\infty}y_n}$.

3. Нескінченно малі і нескінченно великі послідовності

Озн. *Послідовність називається* ***нескінченно малою****, якщо її границя дорівнює нулю.*

Для нескінченно малих послідовностей справедливі наступні теореми:

Теорема 3.1. *Сума двох нескінченно малих послідовностей є нескінченно малою.*

Теорема 3.2. *Добуток обмеженої послідовності на нескінченно малу є нескінченно малою.*

Теорема 3.3. *Щоб виконувалася рівність* $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$, *необхідно і достатньо, щоб* $x_n=a+\alpha_n$, *де* α_n *- нескінченно мала послідовність.*

Озн. *Послідовність називається нескінченно великою, якщо* $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\infty$.

4. Поняття границі функції.

Озн. *Число А називається* ***границею функції f(x) при*** $x\to x_0$, *якщо для будь-якого як завгодно малого ε>0, знайдеться таке δ>0, що нерівність* $|f(x)-A|<\varepsilon$ *виконується при* $0<|x-x_0|<\delta$, *скорочено позначають* $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$.

Озн. *Число А називається* ***границею функції f(x) при*** $x\to\infty$, *якщо для будь-якого як завгодно малого ε>0, знайдеться таке велике число N>0, що нерівність* $|f(x)-A|<\varepsilon$ *виконується при* $|x|>N$, *скорочено позначають* $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$.

Озн. Нескінченність *називається границею функції f(x) при* $x\to x_0$, *якщо для будь-якого як завгодно великого додатного числа M>0, знайдеться таке δ>0, що нерівність* $|f(x)|>M$ *виконується при* $0<|x-x_0|<\delta$, *скорочено позначають* $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$.

Озн. *Якщо* $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$, *то функція f(x) називається* ***нескінченно великою*** *при* $x\to x_0$.

Озн. *Якщо* $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$, *то функція α(x) називається* ***нескінченно малою*** *при* $x\to x_0$.

До точки x_0 можна рухатися справа, що позначається $x\to x_0+0$ або зліва - $x\to x_0-0$. Відповідно отримують правосторонню $\lim\limits_{x\to x_0+0}f(x)$ і лівосторонню $\lim\limits_{x\to x_0-0}f(x)$ границі.

Теорема 3.4. *Для існування границі функції f(x) при $x \to x_0$ необхідно і досить, щоб* $\lim\limits_{x \to x_0+0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0-0} f(x)$.

5. Основні теореми про границі функції.

Теорема 3.5. *Якщо існують границі функцій $f(x)$ та $g(x)$ в точці x_0* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ *та* $\lim\limits_{x \to x_0} g(x)$, *то сума, добутокі частка цих функцій також мають у цій точці границю, причому:*

$$\lim_{x \to x_0}[f(x)+g(x)] = \lim_{x \to x_0} f(x) + \lim_{x \to x_0} g(x);$$

$$\lim_{x \to x_0}[f(x)\cdot g(x)] = \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim_{x \to x_0} g(x);$$

$$\lim_{x \to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)},$$ *при умові* $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) \neq 0$.

На практиці використовують наступні границі:

$\lim\limits_{x \to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$ - I чудова границя.

$\lim\limits_{x \to \infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim\limits_{\alpha \to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = \mathrm{e} = 2{,}71828\ldots$ - II чудова границя.

Наслідки з важливих границь

1. $\lim\limits_{\alpha \to 0}\frac{\sin k\alpha}{\alpha} = k$. **2.** $\lim\limits_{\alpha \to 0}\frac{\mathrm{tg}\, k\alpha}{\alpha} = k$.

3. $\lim\limits_{\alpha \to 0}\frac{\arcsin k\alpha}{\alpha} = k$. **4.** $\lim\limits_{\alpha \to 0}\frac{\mathrm{arctg}\, k\alpha}{\alpha} = k$.

5. $\lim\limits_{\alpha \to 0}(1+k\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e^k$. **6.** $\lim\limits_{\beta \to \infty}\left(1+\frac{k}{\beta}\right)^{\beta} = e^k$.

5. Невизначеності і способи їх розкриття

Озн. *Умовні вирази* $\left[\frac{0}{0}\right]$, $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$, $[\infty-\infty]$, $[1^{\infty}]$ *характеризують* ***типи невизначеностей*** *і застосовуються для позначення змінних величин, при обчисленні границі яких не можна зразу застосувати загальні властивості границь.*

Для розкриття невизначеності типу $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$, коли чисельник і знаменник многочлени відносно змінної х користуються правилом знаходження границі дробово-раціональної функції при x→∞: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+...+b_m}=\begin{cases}\dfrac{a_0}{b_0}, n=m,\\ 0, n<m,\\ \infty, n>m.\end{cases}$

В деяких прикладах для розкриття невизначеностей типу $\left[\dfrac{0}{0}\right]$ чисельник і знаменник розкладають на множники і дріб скорочують або застосовують першу чудову границю.

У випадку невизначеності виду $\left[1^\infty\right]$ використовують другу чудову границю.

Зразки розв’язування задач

***Приклад**. Обчислити границі таких послідовностей:*

1) $lim_{n\to\infty}\dfrac{2n-1}{3n+2}$; 2) $lim_{n\to\infty}\dfrac{5n^2-2n+4}{3n^2+4n-2}$; 3) $lim_{n\to\infty}\dfrac{2-3n}{7n^2-4n+1}$;

4) $lim_{n\to\infty}\dfrac{2n^3-3n^2+2}{6n^2-1}$; 5) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{4n^2+3n+2}+5n}{3n+7}$; 6) $\lim\limits_{n\to\infty}(n-\sqrt{n^2+4n}$;

7) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+3n-2}-\sqrt{n^2+7})$; 8) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{3n+2}-\sqrt{3n+7})$;

9) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+3+...+n}{1+3+5+...+(2n-1)}$.

Розв’язання:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n-1}{3n+2}$.

Чисельник і знаменник не мають границі, бо це необмежені послідовності, отже теорему про границю частки безпосередньо застосувати не можна. Поділивши чисельник і знаменник на n і застосувавши потім теорему про границю частки, дістанемо:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{3n+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{2-1/n}{3+2/n}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}(2-1/n)}{\lim\limits_{n\to\infty}(3+2/n)}=\frac{2-\lim\limits_{n\to\infty}(1/n)}{3+\lim\limits_{n\to\infty}(2/n)}=\frac{2-0}{3+0}=\frac{2}{3}.$$

Решта границь 2-5 обчислюється аналогічно (чисельник і знаменник ділимо на n у старшому ступені):

2) $$\lim_{n\to\infty}\frac{5n^2-2n+4}{3n^2+4n-2}=\lim_{n\to\infty}\frac{5-2/n+4/n^2}{3+4/n-2/n^2}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}(5-2/n+4/n^2)}{\lim\limits_{n\to\infty}(3+4/n-2/n^2)}=\frac{5-0+0}{3+0-0}=\frac{5}{3}.$$

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2-3n}{7n^2-4n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2/n^2-3/n}{7-4/n+1/n^2} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty}(2/n^2-3/n)}{\lim\limits_{n\to\infty}(7-4/n+1/n^2)} = \dfrac{0-0}{7-0+0} = \dfrac{0}{7} = 0$.

4) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^3-3n^2+2}{6n^2-1} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2-3/n^2+2/n^3}{6/n-1/n^3} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty}(2-3/n^2+2/n^3)}{\lim\limits_{n\to\infty}(6/n-1/n^3)} = \dfrac{2-0+0}{0-0} =$

$= \dfrac{2}{0} = \infty$

5) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{4n^2+3n+2}+5n}{3n+7} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{4+3/n+2/n^2}+5}{3+7/n} = \dfrac{\sqrt{4}+5}{3} = \dfrac{7}{3}$.

6) $\lim\limits_{n\to\infty}(n-\sqrt{n^2+4n})$;

При $n\to\infty$ послідовність $n-\sqrt{n^2+4n}$ є різницею двох нескінченно великих послідовностей $(\infty-\infty)$. Помноживши і поділивши послідовність на вираз $n+\sqrt{n^2+4n}$, дістанемо:

$$\lim\limits_{n\to\infty}(n-\sqrt{n^2+4n}) = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n-\sqrt{n^2+4n})(n+\sqrt{n^2+4n})}{(n+\sqrt{n^2+4n})} =$$

$$= \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2-n^2-4n}{n+\sqrt{n^2+4n}} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{-4}{1+\sqrt{1+4/n}} = \frac{4}{1+1} = -2.$$

Решта границь 7,8 обчислюється аналогічно.

7) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+3n-2}-\sqrt{n^2+7}) =$

$$= \lim\limits_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n^2+3n-2}-\sqrt{n^2+7})\cdot(\sqrt{n^2+3n-2}+\sqrt{n^2+7})}{(\sqrt{n^2+3n-2}+\sqrt{n^2+7})} =$$

$$= \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2+3n-2-n^2-7}{(\sqrt{n^2+3n-2}+\sqrt{n^2+7})} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n-9}{(\sqrt{n^2+3n-2}+\sqrt{n^2+7})} =$$

$$= \lim\limits_{n\to\infty}\frac{3-9/n}{(\sqrt{1+3/n-2/n^2}+\sqrt{1+7/n^2})} = \frac{3}{1+1} = \frac{3}{2}.$$

8) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{3n+2}-\sqrt{3n+7}) = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(\sqrt{3n+2}-\sqrt{3n+7})\cdot(\sqrt{3n+2}+\sqrt{3n+7})}{(\sqrt{3n+2}+\sqrt{3n+7})} =$

$$= \lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n+2-3n-7}{(\sqrt{3n+2}+\sqrt{3n+7})} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{-5}{(\sqrt{3n+2}+\sqrt{3n+7})} = 0.$$

9) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+3+\ldots+n}{1+3+5+\ldots+(2n-1)}$;

Чисельник і знаменник не мають границі, бо це необмежені послідовності, які утворюють суми арифметичних прогресій. У чисельнику така сума S_n дорівнює $S_n = \frac{1+n}{2} \cdot n$. У знаменнику така сума $\sigma_n = \frac{1+2n-1}{2} \cdot (2n-1)$, або $\sigma_n = n \cdot (2n-1)$. Тоді дана границя має вигляд:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1+2+3+\ldots+n}{1+3+5+\ldots+(2n-1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{(1+n)\cdot n}{2n\cdot(2n-1)} = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n-1} =$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty} \frac{1+1/n}{2-1/n} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

Завдання для практичних занять та самостійного виконання

Завдання № 241-280. Знайти границі функції.

241. а) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x^2-3x+1}{3x^2+x+4}$; б) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{3x^2-5x-2}{2x^2-x-6}$; в) $\lim\limits_{x\to 4} \frac{2-\sqrt{x}}{\sqrt{6x+1}-5}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos 6x}{1-\cos 4x}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{2x-3}{2x+5}\right)^{x-1}$.

242. а) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{5x^2-2x+1}{2x^2+x-3}$; б) $\lim\limits_{x\to -5} \frac{2x^2+15x+25}{5-4x-x^2}$; в) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{9+x}-\sqrt{9-x}}{x^2+6x}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 3x+\sin 5x}{6x}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{3x+2}{3x-4}\right)^{2-x}$.

243. а) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{3-2x-x^2}{x^2+4x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to -1} \frac{4x^2+7x+3}{2x^2+x-1}$; в) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{3x-3}{\sqrt{8+x}-3}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{10x^2}{1-\cos x}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{4x+3}{4x-1}\right)^{2x-3}$.

244. а) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{3x^2-5x+4}{x^3-x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to 3} \frac{2x^2-9x+9}{x^2-5x+6}$; в) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sqrt{5-x}-\sqrt{3+x}}{x-x^2}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{3xtgx}{\sin^2 x}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{2x+5}{2x-1}\right)^{3-x}$.

245. а) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x^2+x-4}{3+x-4x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to 4} \frac{5x-x^2-4}{x^2-2x-8}$; в) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{7+x}-\sqrt{7-x}}{5x}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{xtgx}{1-\cos x}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{5x-1}{5x+4}\right)^{2x+1}$.

246. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-7x+1}{3x^2+x+3}$; б) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^2-2x+8}{2x^2+5x+2}$; в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{4+x}-\sqrt{4-x}}{3x^2+x}$;

г) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x-\cos^5 x}{4x^2}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x+2}\right)^{7x-5}$.

247. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+5x+4}{2x^2-x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{3x^2-2x-1}{x^2-4x+3}$; в) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{\sqrt{x^2-7}-3}{x^2-4x}$;

г) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{4x^2}{1-\cos 4x}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-7}{2x-3}\right)^{4x+1}$.

248. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3-2x+1}{3x^2+4x+2}$ б) $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{6-x-x^2}{3x^2+8x-3}$; в) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{3x-3}{\sqrt{8+x}-3}$;

г) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{8x^2}{\sin^2 5x}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x+1}{4x-3}\right)^{1-2x}$.

249. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5-2x-3x^2}{x^2+x+3}$; б) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-1}{5x^2-4x-1}$; в) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{\sqrt{4x}-x}{x^2-16}$;

г) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{tg^2 3x}{10x^2}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x-2}{5x+3}\right)^{3-2x}$.

250. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-3x+4}{2x^3+5x-1}$; б) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2+2x-8}{8-x^3}$; в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2x}{\sqrt{10+x}-\sqrt{10-x}}$;

г) $\lim\limits_{x\to0}x^2ctg^2 3x$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-2}{x+3}\right)^{4-x}$.

251. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+1}{1+2x^3}$; б) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^3-x^2+2x}{x^2+x}$; в) $\lim\limits_{x\to7}\dfrac{\sqrt{2+x}-3}{x-7}$;

г) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 7x}{\sin 3x}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-1}{2x+1}\right)^{2x+1}$.

252. а) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^2-4}{x+2}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+x^2-5}{x^3+x^2-2}$; в) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-\sqrt{x}}{x^2-x}$; г) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{tg 6x}{\sin 8x}$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x+1}{4x}\right)^{4x}$.

253. а) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{3-x}{x^3-27}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4+x^2-6}{2x^4-x+2}$; в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{\sqrt{1+3x}-1}$; г) $\lim\limits_{x\to0}xctg 7x$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+5}{x+2}\right)^{x+2}$.

254. а) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-4x-5}{x^2-2x-3}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+6x-5}{5x^2-x-1}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos^2 x}{x^2}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-4}{x+2}\right)^{x+2}$.

255. а) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{3x^2+2x-1}{x-x^2+2}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^4+x+3}{x^4-12x+1}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+3x}-\sqrt{1-2x}}{x+x^2}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2 ctg\, 2x}{\sin 3x}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-2}{x+3}\right)^{x+3}$.

256. а) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{16-x^2}{x^3-64}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-2x^2+5x^4}{x^4+3x^2+2}$; в) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{2x-1}-\sqrt{5}}{x-3}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg^2\dfrac{x}{2}}{x^2}$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+5}{2x+1}\right)^{2x+1}$.

257. а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{x^2+x-6}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2-3x+1}{3x^2-x+5}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+3x^2}-1}{x^2+x^3}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 6x}{x^2}$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-1}{3x+4}\right)^{3x+4}$.

258. а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-2x}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^4+2}{x^4+3x}$; в) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{1+3x}-\sqrt{2x+6}}{x^2-2x}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{x^2}$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x+3}{5x+1}\right)^{5x+1}$.

259. а) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x^3-2x^2+x+1}{x^3-x^2+3x-1}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^5+9x}{2x^5-1}$; в) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{\sqrt{2x}-2}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}5x ctg\, 3x$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+5}{2x+1}\right)^{2x+1}$.

260. а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-3x+2}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-2x^2}{3x^2-2}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{3x}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{5x^2}$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x-2}\right)^{x-2}$.

261. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x-1}{x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-6x+8}{x^2-8x+12}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{5-\sqrt{2x+25}}$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^{x}$.

262. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-x-3}{x^3-8x+5}$; б) $\lim\limits_{x\to 10}\dfrac{x^3-1000}{x^3-20x^2+100x}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}x(\sqrt{x^2+1}-x)$;

г) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{\sin(x+3)}{9-x^2}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-4}{3x+1}\right)^{x-2}$.

263. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-6x+1}{2x-7}$; б) $\lim\limits_{x\to3}\frac{x^3-27}{x^3+x^2-12x}$; в) $\lim\limits_{x\to-8}\frac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}$; г) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{x(1-tgx)}{2\cos 2x}$;

д) $\lim\limits_{x\to0}\sqrt[x]{1+\sin x}$.

264. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3-90x^2+10}{25x^3+13x}$; б) $\lim\limits_{x\to1}\frac{2x^2+x-3}{x^3+x^2-2x}$; в) $\lim\limits_{x\to1}\frac{1-\sqrt{x}}{1-\sqrt[3]{x}}$; г) $\lim\limits_{x\to0}\frac{2-\sqrt{4-x}}{\sin 4x}$;

д) $\lim\limits_{x\to\pi}(1+2tgx)^{ctgx}$.

265. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2-x}{x^2+5}$; б) $\lim\limits_{x\to0}\frac{x^3+2x^2-3x}{x^4+4x^3-8x^2+7x}$; в) $\lim\limits_{x\to4}\frac{2-\sqrt{x}}{3-\sqrt{2x+1}}$; г) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos 2x}{\sin x-\cos x}$;

д) $\lim\limits_{x\to0}\sqrt[x]{1-5x}$.

266. а) $\lim\limits_{x\to2}\frac{x^2+4x-12}{x^2-4}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt[3]{x^3-9}}$; в) $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\sqrt{1-x}}{\sin 3x}$; г) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 2x}{1-\sqrt{1+tgx}}$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2-3}\right)^{x^2}$.

267. а) $\lim\limits_{x\to4}\frac{x^2+5x-36}{x^2-16}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3-10x-1}{x+10^5}$; в) $\lim\limits_{x\to0}\frac{x}{3-\sqrt{x+9}}$; г) $\lim\limits_{x\to0}\frac{tgx-\sin x}{\sin^3 x}$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+8}{x-2}\right)^{x}$.

268. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3+3x}{7x^4+2x}$ б) $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^3-x^2-x+1}{x^3+x^2-x-1}$; в) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{x+4}-2}{x}$; г) $\lim\limits_{x\to0}\frac{tgx}{\sqrt[3]{(1-\cos x)^2}}$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x}{3x-5}\right)^{4x}$.

269. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{1+3x^2}}{x-1}$; б) $\lim\limits_{x\to7}\frac{2x^2-11x-21}{6x^2-43x+7}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}(x-\sqrt{x^2+4x})$; г) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos 7x-\cos 3x}{1-\cos 2x}$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+5x+4}{x^2+5x-6}\right)^{2x^2-1}$.

270. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^4-1}{(2x+1)(3x-7)}$; б) $\lim\limits_{x\to0}\frac{x-2x^2}{3x^2-x}$; в) $\lim\limits_{x\to2}\frac{\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{7+2x-x^2}}{x^2-2x}$;

г) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{1+tgx}{2+\cos 2x}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2-8}\right)^{x+2}$.

271. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3-12x-14x^2}{8x^2+4x+5}$; б) $\lim\limits_{x\to-3}\frac{2x^2+9x+9}{12x^3+21x^2-45x}$; в) $\lim\limits_{x\to2}\frac{x-2}{\sqrt{5+x^2}-3}$;

г) $\lim\limits_{x\to0}\frac{5xtg 2x}{\sin^2 x}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^3-3x^2+2}{x^3-3x-4}\right)^{-x}$.

272. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^2-6x+3}{x^3-2x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\dfrac{4x^2+8x-5}{8x^2+24x-14}$; в) $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{x+3}{1-\sqrt{x^2+6x+10}}$;

г) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 4x+\sin 6x}{9x}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{11x+3}{11x-1}\right)^{7x+6}$.

273. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2-3x-5x^2}{6x^2+4x+7}$; б) $\lim\limits_{x\to9}\dfrac{x^2-4x-45}{81-x^2}$; в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{4-\sqrt{x+16}}{x^2}$; г) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{6x\,tg\,3x}{\sin^2 4x}$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-x-1}{x^2+x+4}\right)^{2x+1}$.

274. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+3}{1+5x^2-2x^3}$; б) $\lim\limits_{x\to-8}\dfrac{6x^2+38x-80}{72-87x-12x^2}$; в) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{8+x}-3}{x-1}$; г) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{12x^2}{\sin 5x}$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+2x+5}{x^2+2x-1}\right)^{2x}$.

275. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+8}{5+8x^2-x^4}$; б) $\lim\limits_{x\to-6}\dfrac{3x^2+19x+6}{x^2-36}$; в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{4+x^2}-2}{x^2}$; г) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{tg\,8x}{\sin 2x}$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-4x+3}{x^2-4x-1}\right)^{x+1}$.

276. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+1}{7+2x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{2x^2+7x+6}{4x^3+3x^2-10x}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+2}+\sqrt{x+1}}{\sqrt[4]{x^3+3x^2-1}+x}$; г) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-3x-4}\right)^{x}$.

277. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+7x-14}{3+9x-8x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to-6}\dfrac{x^2+4x-12}{8x^2+20x-168}$; в) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^3+8}{\sqrt[3]{x-6}+2}$;

г) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{6x^2}{1-\cos 2x}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{21x+19}{21x-1}\right)^{3-2x}$.

278. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{13x^2-7x+11}{4x^3+8x-5}$; б) $\lim\limits_{x\to-\frac{3}{2}}\dfrac{2x^2+x-3}{4x^2-9}$; в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2-\sqrt{4-x^2}}{x}$; г) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2}{1-\cos 7x}$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{17x-5}{17x+4}\right)^{12x-3}$.

279. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-12x+8}{5+6x-11x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to\frac{5}{2}}\dfrac{6x^2-11x-10}{4x^2+25}$; в) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{1+2x}-3}$; г) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos 3x}{1-\cos 7x}$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{9x+7}{9x-8}\right)^{x-6}$.

280. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1-3x+7x^2-2x^3}{2x^4+6x^2-3}$; б) $\lim\limits_{x\to-1}\frac{2x^2-x-21}{x^3+27}$; в) $\lim\limits_{x\to0}\frac{3-\sqrt{x^2+9}}{\sqrt{x^2+1}-1}$;

г) $\lim\limits_{x\to0} x^3 ctg^3(4x)$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+13}{2x+21}\right)^{x-19}$.

Тема 8. Неперервність функції

Теоретичні відомості до теми

1. Поняття неперервності функції в точці
2. Дослідження функції на неперервність
3. Одностороння неперервність функції в точці
4. Точки розриву, їх типи

1. Поняття неперервності функції в точці

Озн. *Якщо кожному числу $x\in X$ за певним правилом або законом поставлено у відповідність одне дійсне число y, з множини Y $(y\in Y)$, то говорять, що на множені X визначено* ***функцію*** *і записують $y=f(x)$.*

Озн. *Функція $y=f(x)$ називається* ***неперервною в точці*** $\boldsymbol{x_0}\in(\boldsymbol{a};\boldsymbol{b})$, *якщо існує границя функції в цій точці і вона дорівнює значенню функції в точці x_0: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$*

Теорема 3.6. *Функція $y=f(x)$ в точці x_0 буде неперервною тоді і тільки тоді, коли виконуються умови:*

1. *функція $f(x)$ визначена в околі точки x_0;*

2. *існує границя $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ функції в точці x_0;*

3. *границя функції дорівнює значенню функції в цій точці, тобто*

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0). \qquad (3.1)$$

Примітка. *Усі ці умови разом є необхідними й достатніми для того, щоб функція $f(x)$ була неперервною в точці x_0.*

2. Дослідження функції на неперервність

На практиці при дослідженні функцій на неперервність користуються ознаками, які безпосередньо випливають із співвідношення (3.1), а саме:

для того, щоб функція $f(x)$ була неперервною в точці x_0, треба щоб:

1. $f(x)$ була визначеною в околі точки x_0;

2. існувала лівостороння границя функції в точці, тобто існувало число $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$;

3. існувала правостороння границя функції в точці – число $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$;

4. лівостороння й правостороння границя були рівні

5. $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$;

6. правостороння й лівостороння границя в точці x_0 дорівнювали значенню функції в цій точці, тобто

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0)$$

***Примітка**. Якщо хоч одна з шести умов не виконується в точці, яка є внутрішньою точкою проміжку, в якому визначена функція, то функція в цій точці називається **розривною**.*

3. Одностороння неперервність функції в точці

Якщо функція $y = f(x)$ визначена на відрізку $[a;b]$, то в точках a і b можна говорити тільки про односторонню неперервність, а саме, в точці a – про неперервність справа, а в точці b – зліва. Тому природно постає питання про введення таких понять, як неперервність функції в точці зліва і справа.

***Озн.** Функція $y = f(x)$ називається **неперервною в точці $x_0 \in (a;b)$ зліва**, якщо виконуються умови:*

***1.** $f(x)$ визначена в точці x_0 (існує число $f(x_0)$);*

***2.** в точці x_0 існує лівостороння границя функції;*

***3.** лівостороння границя функції дорівнює значенню функції в точці x_0.*

Отже, якщо $f(x)$ неперервна в точці x_0 зліва, то виконується співвідношення

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0),$$

де $f(x_0 - 0)$ – лівостороння границя функції в точці x_0.

***Озн.** Функція $y = f(x)$ називається **неперервною в точці $x_0 \in (a;b)$ справа**, якщо виконуються умови:*

***1.** $f(x)$ визначена в точці x_0 (існує число $f(x_0)$);*

***2.** в точці x_0 існує правостороння границя функції;*

3. *правостороння границя функції дорівнює значенню функції в точці* x_0.

Отже, для неперервної функції справа повинно виконуватися співвідношення

$$\lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0),$$

де $f(x_0 + 0)$ – правостороння границя функції $f(x)$ в точці x_0.

4. Точки розриву, їх типи

Озн. Точкою розриву функції $f(x)$ *називають точку* x_0 *в околі якої функція визначена, але в самій точці не задовольняє умові неперервності, що* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Озн. *Точка* x_0 *є точкою* ***усувного розриву****, якщо існує* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$*, проте* $f(x)$ *не визначена в точці* x_0*, або* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$.

Даний розрив можна усунути, для цього до визначають певним чином функцію в точці x_0.

Озн. *Точка* x_0 *є точкою* ***розриву першого роду****, якщо існують скінченні ліва* $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$ *та права* $\lim\limits_{x \to x_0 + 0}$ *границі функції, але* $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) \neq \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$.

Озн. *Різницю* $\Delta f(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) - \lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$ *називають* ***стрибком функції*** $f(x)$ *в точці* x_0

Озн. *Точка* x_0 *є точкою* ***розриву другого роду*** *функції* $f(x)$*, якщо в точці* x_0 *не існує принаймні одна з односторонніх границь функції.*

Зразки розв'язування задач

Приклад 1*. Дослідити точки розриву функції* $f(x) = \dfrac{x-4}{|x-4|}$.

Розв'язання:

В точці $x = 4$ функція не визначена. Знайдемо при $x \to 4$ границі даної функції зліва та справа:

$$\lim_{x \to 4-0} \frac{x-4}{|x-4|} = \lim_{x \to 4-0} \frac{x-4}{-(x-4)} = -1,$$

$$\lim_{x \to 4+0} \frac{x-4}{|x-4|} = \lim_{x \to 4+0} \frac{x-4}{x-4} = 1.$$

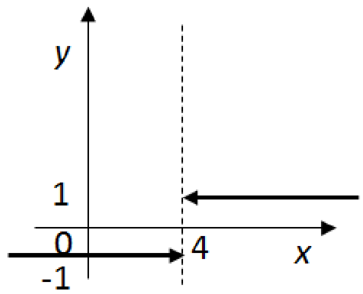


Рис.3.1.

Оскільки односторонні границі скінченні, але $\lim\limits_{x\to 4-0} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 4+0} f(x)$,

то $x=4$ є точкою розриву першого роду.

Стрибок в даному випадку в точці $x=4$ дорівнює 2 (рис.3.1.).

Приклад 2. *Дослідити на неперервність функцію* $y=\dfrac{\sin x}{x}$.

Розв'язання:

Дана функція визначена у всіх точках за винятком $x = 0$. Знайдемо односторонні границі функції в цій точці:

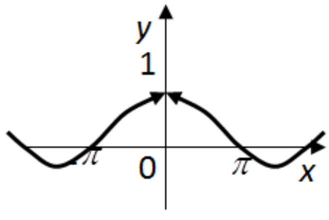


Рис. 3.2.

$$\lim_{x\to 0-0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0+0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

Рівність $\lim\limits_{x\to 0-0} y=\lim\limits_{x\to 0+0} y$ означає, що $x = 0$ є точкою усувного розриву (рис.3.2.).

Приклад 3. *Визначити характер розриву функції* $f(x)=\dfrac{3}{(x-1)^3}$.

Розв'язання:

Функція в точці $x=1$ не визначена.

При $x<1$ маємо $f(x)<0$, при $x>1$ $f(x)>0$.

Отже, $\lim\limits_{x\to 1-0} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to 1+0} f(x)=-+\infty$.

Тому точка $x=1$ є точкою розриву другого роду (Рис. 3.3.)

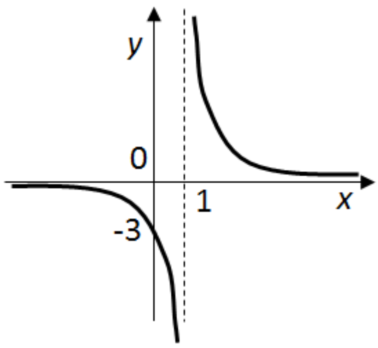


Рис.3.3.

Приклад 4. *Задана функція* $f(x)=\begin{cases} x, & \text{якщо} \quad x\le 0; \\ x^2+1, & \text{якщо} \quad 0<x\le 2; \\ \dfrac{1}{x-2}, & \text{якщо} \quad x>2. \end{cases}$ *Знайти точки розриву функції, якщо вони існують та встановити їх вид. Знайти границі функції при наближенні аргументу x до точки розриву зліва і справа. Побудувати схематично графік функції.*

Розв'язання:

Раціональна і дробово-раціональна функції є неперервними в області визначення, отже дана функція є неперервною на всій числовій осі за винятком точок x=0 і x=2.

Досліджуємо поведінку функції в точці x = 0:

$$\lim_{x\to -0} f(x)=\lim_{x\to -0} x=0;\quad \lim_{x\to +0} f(x)=\lim_{x\to +0}\left(x^2+1\right)=1;\quad f(0)=0.$$

Так як існують скінчені границі зліва і справа від точки x=0 та функція визначена в самій точці x=0, але всі ці три числа не рівні між собою, то в точці x = 0 функція має розрив першого роду.

δ = $|\lim\limits_{x\to -0} f(x) - \lim\limits_{x\to +0} f(x)|=|0-1|=1$ – стрибок функції *f(x)* в точці x = 0.

Досліджуємо поведінку функції в точці

x = 2: $f(2)=5; \lim\limits_{x\to 2-0}\left(x^2+1\right)=5; \lim\limits_{x\to 2+0}\frac{1}{x-2}=+\infty;$.

Так як границя функції справа від цієї точки дорівнює нескінченості, то в точці x = 2 функція має розрив другого роду.

Схематично графік функції зображено на рис. 3. 4.

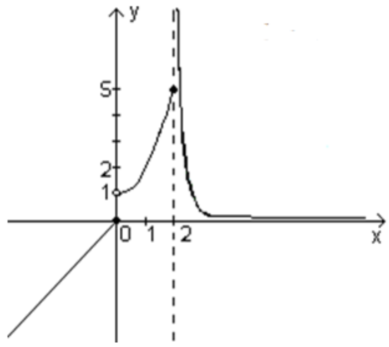


Рис. 3.4.

Завдання для практичних занять та самостійного виконання

Завдання № 281-320. Задана функція y = f(x). Знайти точки розриву функції, якщо вони існують та встановити їх вид. Знайти границі функції при наближенні аргументу x до точки розриву зліва і справа. Побудувати схематично графік функції.

281. $f(x)=\begin{cases} x^3+1, \ -3\le x<0, \\ x^2, \ 0\le x\le 3. \end{cases}$

282. $f(x)=\frac{2}{3x-1}+1$

283. $f(x)=\begin{cases} 2x+1, x\le -1, \\ x^2, -1<x\le 2, \\ 6+x, x>2. \end{cases}$

284. $f(x)=2+\frac{1}{1-x}$

285. $f(x)=\begin{cases} -x, x<0, \\ x^2, 0\le x\le 2, \\ x+1, x>2. \end{cases}$

301. $f(x)=\begin{cases} -2x, x\le 0, \\ \sqrt{x}, 0<x<4, \\ 1, x\ge 4. \end{cases}$

302. $f(x)=\begin{cases} -2x, x\le 0, \\ x^2+1, 0<x\le 1, \\ 2, x>1. \end{cases}$

303. $f(x)=\begin{cases} 2\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right), x<\frac{\pi}{6} \\ 4, x\ge\frac{\pi}{6} \end{cases}$

304. $f(x)=\begin{cases} x+4, x<-1, \\ x^2+2, -1\le x<1, \\ 2x, x\ge 1. \end{cases}$

305. $f(x)=\begin{cases} -x, x\le 0, \\ -\left(x-1\right)^2, 0<x<2, \\ x-3, x\ge 2. \end{cases}$

286. $f(x)=\begin{cases} -x, x \le 0, \\ x^2+3, 0<x<3, \\ 5x-3, x \ge 3. \end{cases}$

287. $f(x)=\begin{cases} \cos x,\ x<0 \\ x^2,\ 0<x\le 1 \\ \dfrac{1}{x-3},\ x>1 \end{cases}$

288. $f(x)=\begin{cases} 4\cos\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right),\ x<\dfrac{\pi}{3} \\ 4,\ x \ge \dfrac{\pi}{3} \end{cases}$

289. $f(x)=\begin{cases} x+2,\ x \le -1, \\ x^2+1, -1<x\le 1, \\ -x+3,\ x>1. \end{cases}$

290. $f(x)=\begin{cases} \cos x,\ x\le 0, \\ x^2+1, 0<x<1, \\ x,\ x\ge 1. \end{cases}$

291. $f(x)=\begin{cases} -x,\ x\le 0, \\ \sin x, 0<x\le \pi, \\ x-2,\ x>\pi. \end{cases}$

292. $f(x)=\begin{cases} -(x+1),\ x\le -1, \\ (x+1)^2, -1<x\le 0, \\ x,\ x>0. \end{cases}$

293. $f(x)=\begin{cases} -x^2,\ x\le 0, \\ tgx, 0<x\le \dfrac{\pi}{4}, \\ 2,\ x>\dfrac{\pi}{4}. \end{cases}$

294. $f(x)=\begin{cases} 2x+1, x\le -1, \\ x^2, -1<x<2, \\ 6-x, x\ge 2. \end{cases}$

306. $f(x)=\begin{cases} 2x,\ x\le 0, \\ x^3, 0<x\le 1, \\ x-1,\ x>1. \end{cases}$

307. $f(x)=\begin{cases} 1-x^2,\ x<0, \\ (x-1)^2, 0\le x\le 2, \\ 4-x,\ x>2. \end{cases}$

308. $f(x)=\begin{cases} (x+2)^2,\ x\le 0, \\ \cos x, 0<x\le \pi, \\ 5-x,\ x>\pi. \end{cases}$

309. $f(x)=\begin{cases} 2\sqrt{x}, 0\le x\le 1, \\ 4-2x, 1<x<2{,}5, \\ 2x-7,\ x\ge 2{,}5. \end{cases}$

310. $f(x)=\begin{cases} x-2,\ x<-1, \\ 1+x^2, -1\le x<1, \\ 2x,\ x\ge 1. \end{cases}$

311. $f(x)=\begin{cases} \sin x,\ x\le 0, \\ 2+x^2, 0<x<1, \\ 4-x,\ x\ge 1. \end{cases}$

312. $f(x)=\begin{cases} -2x,\ x\le 0, \\ 2\sqrt{x}, 0<x<1, \\ 3,\ x\ge 1. \end{cases}$

313. $f(x)=\begin{cases} -x,\ x\le -2, \\ x^2, -2<x\le 2, \\ 6-x,\ x>2. \end{cases}$

314. $f(x)=\begin{cases} x+2,\ x\le -\dfrac{\pi}{4}, \\ tgx, -\dfrac{\pi}{4}<x\le \dfrac{\pi}{4}, \\ 1,\ x>\dfrac{\pi}{4}. \end{cases}$

295. $f(x)=\begin{cases}-3x, x\le 1,\\ x^2-4, 1<x<3,\\ 2x-5, x\ge 3.\end{cases}$

296. $f(x)=\begin{cases}-3-x, x<-2,\\ x^2-5, -2\le x\le 3,\\ 7-2x, x>3.\end{cases}$

297. $f(x)=\begin{cases}x+2, x<-2,\\ 4-x,^2 -2\le x\le 1,\\ 3x-2, x>1.\end{cases}$

298. $f(x)=\begin{cases}x+2, x\le -1,\\ x^2+1, -1<x<1,\\ -x+3, x\ge 1.\end{cases}$

299. $f(x)=\begin{cases}-2x, x\le -1,\\ x^2+1, -1<x<2,\\ x-1, x\ge 2.\end{cases}$

300. $f(x)=\begin{cases}x+4, x<-1,\\ x^2+2, -1\le x\le 1,\\ 2x, x>1.\end{cases}$

315. $f(x)=\begin{cases}-4-x, x\le -4,\\ -(x+2)^2, -4<x\le 0,\\ x-4, x>0.\end{cases}$

316. $f(x)=\begin{cases}\cos x, x\le 0,\\ -x^2, 0<x\le 2,\\ x-6, x>2.\end{cases}$

317. $f(x)=\begin{cases}x^2-2, x\le 0,\\ \sqrt{x+3}, 0<x<1,\\ 2, x\ge 1.\end{cases}$

318. $f(x)=\begin{cases}3x, x\le 0,\\ \sin x, 0<x\le \pi,\\ x+1, x>\pi.\end{cases}$

319. $f(x)=\begin{cases}-x+4, x<-2,\\ 2x^2, -2\le x\le 0,\\ 2x-1, x>0.\end{cases}$

320. $f(x)=\begin{cases}x^3-1, x<-1,\\ x^2, -1\le x\le 1,\\ -x^3+1, x>1.\end{cases}$

Застосування елементів математичного аналізу в економіці

Теорія границь дуже широко застосовується в економічних розрахунках, наприклад, в доведеннях і розрахунках, які пов'язані з безперервними процесами; в обчисленні фінансових рент.

У практичних розрахунках в основному застосовують дискретні відсотки, тобто відсотки, що нараховуються за фіксовані однакові інтервали часу (рік, півріччя, квартал і т. д.). Час – дискретна змінна. У деяких випадках – в доведеннях і розрахунках, пов'язаних з безперервними процесами, виникає необхідність в застосуванні безперервних відсотків. Розглянемо ***формулу складних відсотків***:

$$S=P(1+i)^n$$

Тут P – початкова сума, i – ставка відсотків (у вигляді десяткового дробу), S – сума, що утворилася на кінець терміну позики в кінці n-го року. Зростання за складними відсотками являє собою процес, що розвивається по геометричній прогресії.

Приєднання нарахованих відсотків до суми, яка служила базою для їх визначення, часто називають ***капіталізацією відсотків****.*

У фінансовій практиці часто мають справу із зворотною задачею відносно визначення накопиченої суми: за заданою сумою S, яку слід сплатити через деякий час n, необхідно визначити суму отриманої позики P. У цьому випадку говорять, що сума S дисконтується, а відсотки у вигляді різниці $(S - P)$ називаються дисконтом. Величину P, знайдену дисконтуванням S, називають сучасною, або зведеноюї, величиною S. Маємо:

$$P = \frac{S}{(1+i)^n}; \quad \lim_{n\to\infty} P = \lim_{n\to\infty} \frac{S}{(1+i)^n} = 0.$$

Таким чином, при дуже великому терміні платежу теперішня величина останнього буде вкрай незначною. В практичних фінансово-кредитних операціях безперервні процеси нарощення грошових сум, тобто нарощення за нескінченно малі проміжки часу, застосовуються рідко. Істотно більшого значення безперервне нарахування має в кількісному фінансово-економічному аналізі складних виробничих і господарських об’єктів і явищ, наприклад, при виборі і обґрунтуванні інвестиційних рішень. Необхідність в застосуванні безперервних нарахувань (або безперервних відсотків) визначається перш за все тим, що багато економічних явищ за своєю природою неперервні, тому їх аналітичний опис у вигляді безперервних процесів більш адекватний, ніж на основі дискретних. Узагальнимо формулу складних відсотків для випадку, коли відсотки нараховуються m раз на рік:

$$S = P(1 + \frac{i}{m})^{mn}.$$

Накопичена сума при дискретних процесах знаходиться за цією формулою, тут m – число періодів нарахування на рік, i – річна або номінальна ставка. Чим більше m, тим менше проміжки часу між моментами нарахування відсотків. У границі при $m \to \infty$ маємо:

$$S = \lim_{m\to\infty} P(1 + \frac{i}{m})^{mn} = P \lim_{m\to\infty}((1 + \frac{i}{m})^m)^n.$$

Оскільки $\lim\limits_{m\to\infty}(1 + \frac{i}{m})^m = e^i$, то $\bar{S} = Pe^{in}$.

При безперервному накопиченні відсотків застосовують особливий вид процентної ставки – силу зростання, яка характеризує відносний приріст нарощеної суми в нескінченно малому проміжку часу. При безперервної капіталізації відсотків накопичена сума дорівнює кінцевій величині, що залежить від початкової суми, терміну накопичення і номінальній ставці відсотків. Для того, щоб відрізнити ставки безперервних відсотків від ставки дискретних відсотків, позначимо першу через δ, тоді $S = Pe^{\delta n}$.

Сила росту δ являє собою номінальну ставку відсотків при $m \to \infty$. Множник накопичення розраховується за допомогою компьютера або за таблицями функції.

Тестові завдання до модуля «Вступ до математичного аналізу»

№ з/п	УМОВА:	ВАРІАНТИ ВІДПОВІДЕЙ:
1.	*Обчислити границю функції* $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^2+1}{x+3}$	1) 1; 2) $\frac{1}{2}$; 3) $-\frac{1}{2}$; 4) -1.
2.	*Обчислити границю функції* $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x}{1-x}$	1) 0; 2) 1; 3) e; 4) ∞.
3.	*Обчислити границю функції* $\lim\limits_{x\to 3}\frac{(x-3)^2}{2x}$	1) 0; 2) $\frac{1}{6}$; 3) 6; 4) ∞.
4.	*Обчислити границю функції* $\lim\limits_{x\to 2}\frac{3-x}{\ln(x-1)}$	1) 0; 2) 1; 3) $\frac{2}{e}$; 4) ∞.
5.	*Обчислити границю функції* $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{5x+2}{2x+3}$	1)0; 2) $\frac{5}{2}$; 3) 2; 4) ∞.
6.	*Обчислити границю функції* $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{2x^2+3x-1}{4x^2-5}$	1)0; 2) $\frac{1}{2}$; 3) $\frac{1}{5}$; 4) ∞.
7.	*Обчислити границю функції* $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{x^4+6}{x^5-3x^3+1}$	1) 0; 2) 1; 3) 6; 4) ∞.
8.	*Обчислити границю функції* $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{x^4-5x}{x^2-3x+7}$	1) 0; 2) 1; 3) $\frac{5}{3}$; 4) ∞.
9.	*Обчислити границю функції* $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{x^2-x^3+7}{3x^3-x+10}$	1)0; 2) $-\frac{1}{3}$; 3) $\frac{1}{3}$; 4) ∞.
10.	*Обчислити границю функції* $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{x^3+2x^2+3x+4}{4x^3+3x^2+2x+1}$	1) 4; 2) $\frac{1}{3}$; 3) $\frac{1}{4}$; 4) ∞.

11.	*Обчислити границю функції* $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x^2-6x+9}$	1) 0; 2) -1; 3) 1; 4) ∞.
12.	*Обчислити границю функції* $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-x}$	1) 0; 2) -1; 3) 1; 4) ∞.
13.	*Обчислити границю функції* $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x^2-3x}$	1) 0; 2) 1; 3) 2; 4) ∞.
14.	*Обчислити границю функції* $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2}$	1) 0; 2) 2; 3) 4; 4) ∞.
15.	*Обчислити границю функції* $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-x^2}{x-1}$	1) 0; 2) -1; 3) 1; 4) ∞.
16.	*Обчислити границю функції* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg4x}{\sin 2x}$	1) 0; 2) $\frac{1}{2}$; 3) 2; 4) ∞.
17.	*Обчислити границю функції* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x+\sin 3x}{x}$	1) 0; 2) 2; 3) 8; 4) ∞.
18.	*Обчислити границю функції* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 2x}{3x}$	1) 0; 2) $\frac{2}{3}$; 3) $\frac{3}{2}$; 4) ∞.
19.	*Обчислити границю функції* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{\sin 6x}$	1) 0; 2) $\frac{1}{2}$; 3) 2; 4) ∞.
20.	*Обчислити границю функції* $\lim\limits_{x\to \infty}\left(1+\dfrac{3}{x}\right)^{\frac{x}{2}}$	1) e^6; 2) e^3; 3) $e^{\frac{3}{2}}$; 4) $e^{\frac{1}{2}}$.
21.	*Обчислити границю функції* $\lim\limits_{x\to \infty}\left(1+\dfrac{1}{2x}\right)^{5x}$	1) e^{10}; 2) $e^{\frac{5}{2}}$; 3) $e^{\frac{2}{5}}$; 4) 1.
22.	*Обчислити границю функції* $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{\sin x}}$	1) 0; 2) 1; 3) $\frac{1}{e}$; 4) e.
23.	*Обчислити границю функції* $\lim\limits_{x\to 0}(1+4x)^{\frac{2}{x}}$	1) 1; 2) e^2; 3) e^6; 4) e^8.

24.	*Обчислити границю функції* $\lim\limits_{x\to 0}(1-5x)^{\frac{4}{x}}$	1)e^{20}; 3) $e^{-\frac{5}{4}}$; 2) $e^{\frac{5}{4}}$; 4) e^{-20}.
25.	*Знайти точки розриву першого роду функції* $f(x)=\begin{cases}-3x, x\le 0,\\ \sqrt{x}, 0<x<4,\\ 4, x\ge 4.\end{cases}$	1) 0; 3) 4 2) 2; 4) немає.
26.	*Знайти точки розриву першого роду функції* $f(x)=\dfrac{-1}{3x-1}$	1) $\frac{1}{3}$; 3) -1; 2) $-\frac{1}{3}$; 4)немає.
27.	*Знайти точки розриву першого роду функції* $f(x)=\begin{cases}2x, x\le 0,\\ x^3, 0<x\le 1,\\ x-2, x>1.\end{cases}$	1) 0; 3) 1; 2) -1; 4)немає.
28.	*Знайти точки розриву другого роду функції* $f(x)=\begin{cases}\sin x, x<0\\ x^2, 0<x\le 1\\ \dfrac{1}{x-3}, x>1\end{cases}$	1) 0; 3) 3; 2) 1; 4) немає.
29.	*Знайти точки розриву другого роду функції* $f(x)=\begin{cases}x, x\le 0,\\ x^3, 0<x\le 1,\\ x-1, x>1.\end{cases}$	1) 0; 3) 1; 2) -1; 4) немає.
30.	*Знайти точки розриву другого роду функції* $f(x)=\begin{cases}-x^2, x\le 0,\\ tgx, 0<x\le \frac{\pi}{2},\\ 2, x>\frac{\pi}{2}.\end{cases}$	1) 0; 3) 2 2)$\frac{\pi}{2}$; 4) немає.

Модуль 4. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ

Тема 9. Похідна та диференціал

Теоретичні відомості до теми

1. Похідна: основні поняття та правила диференціювання
2. Диференціал: основні поняття та правила знаходження
3. Застосування диференціювання для наближених обчислень

4. Правило Лопіталя розкриття невизначеностей $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ та $\left[\frac{0}{0}\right]$

5. Частинні похідні та диференціали першого та другого порядку

1. Похідна: основні поняття та правила диференціювання

Озн. *Похідною функції* $f(x)$ *в точці* x_0 *називається границя відношення приросту функції* Δy *функції в цій точці до приросту аргументу, коли приріст аргументу прямує до нуля:*

$$y' = f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Наводимо таблицю похідних основних елементарних функцій.

1. $(x)' = 1$
2. $(x^n)' = nx^{n-1}$
3. $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$
4. $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
5. $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$
6. $(e^x)' = e^x$
7. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$
8. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$
9. $(\sin x)' = \cos x$
10. $(\cos x)' = -\sin x$
11. $(tg\, x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
12. $(ctg\, x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
13. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
14. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
15. $(arctg\, x)' = \frac{1}{1+x^2}$
16. $(arcctg\, x)' = -\frac{1}{1+x^2}$

При знаходженні похідної функції користуються також ***основними правилами диференціювання***:

1. $(c)' = 0$, де c – стала.
2. $(c \cdot u)' = c \cdot u'$, де u - функція.
3. $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$.
4. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$.

Озн. *Якщо* y *є функція від* u*:* $y = f(u)$, *де* u *– функція від аргументу* x*:* $u = \varphi(x)$, *тобто залежить від* x *через проміжний аргумент* u, *тоді* y *називається* ***складеною функцією від x*** *(функцією від функції):* $y = f[\varphi(x)]$.

Правило 1. *Похідна складеної функції дорівнює добутку її похідної за проміжним аргументом на похідну цього аргументу за незалежною змінною:* $y'_x = y'_u \cdot u'_x$.

Правило 2. Якщо функція y від x задана параметричними рівняннями $x = x(t)$, $y = y(t)$ (t – параметр), похідна y'_x обчисляється за формулою $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$.

Геометричний зміст похідної *полягає в тому, що похідна* $f'(x_0)$ *у точці* x_0 *дорівнює кутовому коефіцієнту дотичної до кривої* $y = f(x)$ *у точці з абсцисою* x_0.

Рівняння дотичної до кривої $y = f(x)$ в точці з абсцисою x_0 має вигляд:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

Економічний зміст похідної *полягає в тому, що похідна об'єму виробленої продукції по часу* $u'(t_0)$ *у точці* t_0 *дорівнює* ***продуктивності праці в момент*** t_0.

Озн. *Другою похідною функції* $y = f(x)$ *називається похідна від першої похідної цієї функції:* $y'' = (y')'$.

Правило 3. *Друга похідна параметрично заданої функції обчислюється за формулою:* $y''_x = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t}$.

2. Диференціал: основні поняття та правила знаходження.

Нехай дано функцію y = f(x), диференційовану в точці X. Це означає, що функція в точці X має похідну, тобто існує $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y'$. Отже, для функції f(x) виконується рівність $\frac{\Delta y}{\Delta x} = y' + \alpha$ де $\alpha \to 0$, якщо $\Delta x \to 0$.

Помножимо обидві частини рівності і отримаємо:

$$\Delta y = y'\Delta x + \alpha\Delta x \qquad (4.1).$$

Тут y' є функція від x і не залежить від Δx, отже, Δx входить в перший доданок в першому степені (тобто лінійно). Тому перший доданок являє собою лінійну частину приросту функції (про другий доданок цього сказати не можна, бо α також залежить від Δx).

Тоді при $\Delta x \to 0$ $\alpha\Delta x$ можна знехтувати, і перший доданок $y'\Delta x$ буде являти собою головну частину приросту функції.

Озн. *Головна частина приросту функції* $y'\Delta x$*, лінійна відносно приросту незалежної змінної, називається* ***диференціалом функції*** *і позначається знаком d, тобто dy =* $y'\Delta x$.

Отже, y' залежить від x, а Δy залежить від x та Δx (змінні незалежні одна від одної).

Розглянемо графік перервної функції y =f(x), похідна функції в точці з абсцисою x рівна тангенсу кута нахилу дотичної до додатного напряму осі Ox, тобто $y' = tg\alpha = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

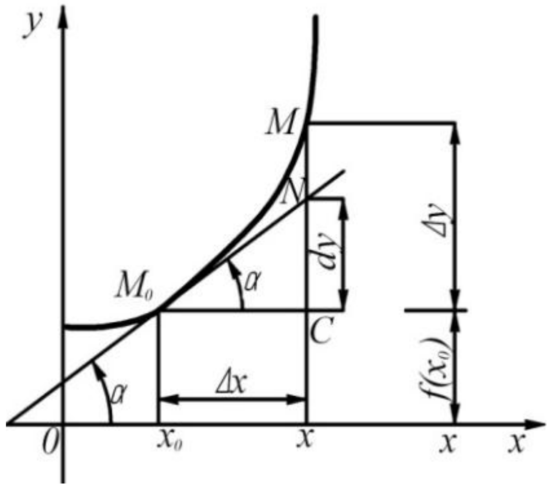


Рис. 4.1.

З рис.4.1. видно, що *диференціал функції y=f(x) геометрично зображається приростом ординати дотичної, проведеної в точці M(x,y) приданих значеннях x та* Δ *x .*

Примітка*. Правила знаходження диференціала залишаються тими ж, що і для знаходження похідної, потрібно тільки помножити похідну на* ***dx****.*

Якщо функції u(x), v(x) диференційовні в точці x, то^

1) $d(u \pm v) = du \pm dv$.

2) $d(u \cdot v) = v \cdot du + u \cdot dv$.

3) $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v \cdot du - u \cdot dv}{v^2}, (v \neq 0)$.

Таблиця диференціалів елементарних функцій аналогічна таблиці похідних.

1. $d(lnx) = \frac{dx}{x}$	6. $d(sinx) = cosxdx$
2. $d(\log_a x) = \frac{dx}{xlna}$	7. $d(cosx) = -sinxdx$
3. $d(x^n) = nx^{n-1}dx$	8. $d(tgx) = \frac{dx}{cos^2x}$
4. $d(a^x) = a^x \ln a \, dx$	9. $d(ctgx) = -\frac{dx}{sin^2x}$
5. $d(e^x) = e^x dx$	

3. Застосування диференціювання для наближених обчислень.

Нам вже відома формула $\Delta y = y'\Delta x + \alpha\Delta x = dy + \alpha\Delta x$, де Δy – приріст функції, dy – диференціал функції. Можна припустити, що $\Delta y \approx dy$, тоді при досить малому значені Δx: $f(x+\Delta x) \approx f(x) + dy$

Приклад. Обчислити зміну функції $y=x^3-7x^2+80$ при зміні аргументу x від 5 до 5,01.

Розв'язання:

Знайдемо $\Delta y \approx dy = y'\Delta x = (3x^2 - 14x)\Delta x$

При x=5, Δx=5,01-5=0,01 отримаємо $\Delta y\Big|_{\substack{x=5\\ \Delta x=0{,}01}} = (3\cdot 5^2 - 14\cdot 5)0{,}01 = 0{,}05$

4. Правило Лопіталя розкриття невизначеностей $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ **та** $\left[\frac{0}{0}\right]$**.** Нехай в деякому околі точки x_0, крім, можливо, самої точки x_0, функції f(x) та φ(x) диференційовані і $\varphi'(x) \neq 0$. Якщо $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x) = 0$ або $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x) = \infty$, тобто частка $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ в точці $x = x_0$ є невизначеність типу $\left[\frac{0}{0}\right]$ або $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$, то $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$. Якщо частка $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ в точці $x = x_0$ також є невизначеність типу $\left[\frac{0}{0}\right]$ або $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ та похідні $f'(x)$ і $\varphi'(x)$ задовольняють відповідним умовам, то необхідно перейти до відношення других похідних і так далі.

5. Частинні похідні та диференціали першого та другого порядку

Нехай маємо множини *X* та *Y* дійсних чисел.

Озн. *Якщо кожній парі чисел $x \in X$ та $y \in Y$ за певним правилом або законом поставлено у відповідність одне дійсне число z з множини $Z(z \in Z)$, то говорять, що на множені X* та *Y визначено* ***функцію від двох змінних*** *і записують* ***z=f(x;y)****.*

При цьому множини *X* та *Y* називаються **областю визначення** або **областю існування** функції; ***f(x;y)*** називають **значенням функції** в точці ***(x;y)***; Z – множина, до якої належить значення функції.

Нехай ***z=f(x;y) –*** функція від двох змінних, неперервна в околі $M_0(x_0; y_0)$.

Надамо x_0 будь-якого приросту Δx, y_0 – Δy.

Озн*. Різниця $\Delta z_x = f(x_0 + \Delta x; y_0) - f(x_0; y_0)$ називається* ***частковий приріст по змінній x****.*

Озн*. Різниця $\Delta z_y = f(x_0; y_0 + \Delta y) - f(x_0; y_0)$ називається* ***частковий приріст по змінній y****.*

Озн. Частинною похідною від функції z=f(x;y) по змінній x *називається скінчена границя відношення часткового приросту функції по змінній х до приросту змінної х, коли останній прямує до нуля, позначають* $f_x^{/}(x;y)=\dfrac{\partial z}{\partial x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta z_x}{\Delta x}$.

Озн. Частинною похідною від функції Z=f(x;y) по змінній y *називається скінчена границя відношення часткового приросту функції по змінній у до приросту змінної у, коли останній прямує до нуля, позначають* $f_y^{/}(x;y)=\dfrac{\partial z}{\partial y}=\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{\Delta z_y}{\Delta y}$.

Правила диференціювання функції двох змінних по одній із незалежних змінних співпадають з правилами диференціювання функції однієї змінної, при цьому інша змінна фіксується і вважається константою.

Озн. Повний диференціал першого порядку *функції* $z=f(x,y)$: $df=f_x^{'}(x,y)dx+f_y^{'}(x,y)dy$.

Якщо існують частинні похідні першого порядку $f_x^{/}(x;y)$ та $f_y^{/}(x;y)$ в околі точки $M_0(x_0;\ y_0)$, то кожна з них, в свою чергу, може мати частинні похідні по x і y, тобто $\dfrac{\partial z_x^{/}}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z_x^{/}}{\partial y}$, $\dfrac{\partial z_y^{/}}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z_y^{/}}{\partial y}$ і позначаються відповідно $\dfrac{\partial z_x^{/}}{\partial x}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=z_{x^2}^{//}$, $\dfrac{\partial z_x^{/}}{\partial y}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=z_{xy}^{//}$, $\dfrac{\partial z_y^{/}}{\partial x}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=z_{yx}^{//}$, $\dfrac{\partial z_y^{/}}{\partial y}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=z_{y^2}^{//}$.

Теорема 4.1. *Якщо в околі точки* $M_0(x_0;\ y_0)$ *похідні* z''_{xy} *та* z''_{yx} *існують і неперервні, то вони рівні між собою.*

Озн. Повний диференціал другого порядку *функції* $z=f(x,y)$: $d^2 f=f_{xx}^{''}(x,y)dx^2+2f_{xy}^{''}(x,y)dxdy+f_{yy}^{''}(x,y)dy^2$.

Зразки розв'язування задач

Приклад 1. *Знайти похідні функцій:*

1) $\boldsymbol{y=5x^4}$, 2) $\boldsymbol{y=10\sqrt[3]{x}}$, 3) $\boldsymbol{y=\dfrac{8}{x^4}}$.

Розв'язання:

1) Винесемо сталий множник за знак похідної, а потім застосуємо формулу 2 таблиці похідних

$$\boldsymbol{y'=5(x^4)'=5\cdot 4x^{4-1}=20\cdot x^3}.$$

Аналогічно дістанемо:

2) $\mathbf{y}'=10\left(\mathbf{x}^{\frac{1}{3}}\right)'=10\cdot\frac{1}{3}\cdot\mathbf{x}^{\frac{1}{3}-1}=\frac{10}{3}\cdot\mathbf{x}^{-\frac{2}{3}}=\frac{10}{3\cdot\sqrt[3]{\mathbf{x}^2}}$.

3) $y'=8\left(\frac{1}{x^4}\right)'=8\,(x^{-4})'=8\cdot(-4)\cdot x^{-4-1}=-\frac{32}{x^5}$.

***Приклад 2**. Знайти похідні складених функцій:*

1) $y=\ln\sin x+\sqrt{arctgx}$;

2) $y=e^{3tg\frac{1}{x}}+\cos^3 x$;

3) $y=\left(4x^2+1\right)^2\cdot 5^{\sqrt{x^3-1}}$;

Розв'язання:

1) Знайдемо похідну від першого доданку за формулою:

$y_x'=y_u'\cdot u_x'$, де $y=\ln u,\ u=\sin x$.

Тоді $y_x'=\ln u\cdot u_x'=\frac{1}{u}\cdot\left(\sin x\right)_x'=\frac{1}{\sin x}\cos x=ctgx$.

Похідну від другого доданку знайдемо аналогічно:

$y=\sqrt{u},\quad u=arctgx$

$y_u'=\frac{1}{2\sqrt{u}}\cdot u_x'=\frac{1}{2\sqrt{arctgx}}\cdot\left(arctgx\right)_x'=\frac{1}{2\sqrt{arctgx}}\cdot\frac{1}{1+x^2}$.

Загалом

$y_x'=ctgx+\frac{1}{2\sqrt{arctgx}}\cdot\frac{1}{1+x^2}$.

2) $y'=\left(e^{3tg\frac{1}{x}}\right)+\left(\cos^3 x\right)'=e^{3tg\frac{1}{x}}\left(3tg\,\frac{1}{x}\right)'+3\cos^2 x\left(\cos x\right)'=e^{3tg\frac{1}{x}}\cdot 3\cdot\frac{1}{\cos^2\frac{1}{x}}\cdot\left(\frac{1}{x}\right)'+$

$=3\cos^2 x\left(-\sin x\right)=e^{3tg\frac{1}{x}}\cdot\frac{3}{\cos^2\frac{1}{x}}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)-3\cos^2 x\sin x$.

3) $y'=\left(\left(4x^2+1\right)^2\right)'\cdot 5^{\sqrt{x^3-1}}-\left(4x^2+1\right)^2\cdot\left(5^{\sqrt{x^3-1}}\right)'=$

$=2\cdot\left(4x^2+1\right)\left(4x^2+1\right)'\cdot 5^{\sqrt{x^3-1}}+\left(4x^2+1\right)^2\cdot 5^{\sqrt{x^3-1}}\cdot\ln 5\cdot\left(\sqrt{x^3-1}\right)'=$

$=2\cdot\left(4x^2+1\right)^2\cdot 8x\cdot 5^{\sqrt{x^3-1}}+\left(4x^2+1\right)^2\cdot 5^{\sqrt{x^3-1}}\cdot\ln 5\cdot\frac{1}{2\sqrt{x^3-1}}\cdot 3x^2$.

***Приклад 3**. Обчислити значення похідної функції* $f\left(x\right)=\ln\frac{a-x}{a+x}$ *у точці x=2a.*

Розв'язання:

$$f(x)=\frac{1}{\frac{a-x}{a+x}}\cdot\frac{(a-x)'(a+x)-(a-x)(a+x)'}{(a+x)^2}=$$

$$=\frac{a+x}{a-x}\cdot\frac{-1\cdot(a+x)-(a-x)\cdot 1}{(a+x)^2}=\frac{-a-x-a+x}{(a-x)(a+x)}=-\frac{2a}{a^2-x^2};$$

$$f'(2a)=-\frac{2a}{a^2-(2a)^2}=-\frac{2a}{a^2-4a^2}=-\frac{2a}{-3a^2}=\frac{2a}{3a}.$$

Приклад 4. *Знайти похідну параметрично заданої функції:* $x=e^t\sin t$, $y=e^t\cos t$.

Розв'язання:

Знайдемо

$$y_t'=e^t\cdot\cos t+e^t\cdot(-\sin t)=e^t(\cos t-\sin t);$$

$$x_t'=e^t\cdot\sin t+e^t\cdot\cos t=e^t(\sin t+\cos t);$$

$$y_x'=\frac{y_t'}{x_t'}=\frac{e^t(\cos t-\sin t)}{e^t(\sin t+\cos t)}=\frac{\cos t-\sin t}{\sin t+\cos t}.$$

Приклад 5. *Скласти рівняння дотичних до кривих:*

1) $y=x\ln x$ у точці з абсцисою $x_0=e$;

2) $x=2e^t,\quad y=e^{-t}$ у точці де, $t_0=0$;

3) $\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{7}=1$ у точці $M_0\left(2;\sqrt{7}\right)$.

Розв'язання:

1) Знайдемо кутовий коефіцієнт дотичної до кривої:

$$y'(x)=1\cdot\ln x+x\cdot\frac{1}{x}=\ln x+1,\quad y'(x_0)=y'(e)=\ln e+1=2,$$

а також $y(x_0)=y(e)=e\ln e=e$.

Підставимо в рівняння дотичної:

$$y-e=2\cdot(x-e);$$

$$y=2x-2e+e;$$

$$y=2x-e.$$

2) $y_t'=-e^{-t},\quad x_t'=2e^t$.

$$y_x'=\frac{y_t'}{x_t'}=\frac{-e^t}{2e^t}=-\frac{1}{2e^{2t}};$$

$$y_0'(0)=-\frac{1}{2e^{2\cdot 0}}=-\frac{1}{2}.$$

Знайдемо координати точки М0, через яку проведена дотична: $x(0)=2e^{0}=2$, $y(0)=e^{-0}=1$.

Рівняння дотичної

$$y-1=-\frac{1}{2}(x-2);$$

$$y=-\frac{x}{2}+2.$$

3) Знайдемо похідну неявної функції:

$$\frac{1}{2}\cdot 2x-\frac{1}{7}\cdot 2y\cdot y'=0$$

$$\frac{yy'}{7}=\frac{x}{2}; \qquad y'=\frac{7x}{2y};$$

$$y'(M_0)=y'(2;\sqrt{7})=\frac{7\cdot 2}{2\cdot\sqrt{7}}=\sqrt{7}.$$

Рівняння дотичної:

$$y-\sqrt{7}=\sqrt{7}(x-2);$$

$$y=\sqrt{7}x-2\sqrt{7}+\sqrt{7};$$

$$y=\sqrt{7x}-\sqrt{7}.$$

Приклад 6. *Знайти похідну другого порядку функції* $y=\arcsin 3x$*;*

Розв'язання:

Знайдемо

$$y'=\frac{1}{\sqrt{1-(3x)^2}}\cdot 3=\frac{3}{\sqrt{1-9x^2}}=3\cdot\left(1-9x^2\right)^{-\frac{1}{2}};$$

$$y''=(y')'=3\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1-9x^2\right)^{-\frac{3}{2}}\cdot\left(-18x\right)=\frac{27x}{\sqrt{(1-9x^2)^3}}.$$

Приклад 7. *Знайти похідну функції* $f(x)=\ln(\mathrm{tg}(3^x)+x^3)$ *та записати її диференціал.*

Розв'язання:

Дану функцію можна представити у вигляді $f(x)=\ln u(x)$, де $u(x)=\mathrm{tg}(3^x)+x^3$, та скористатися формулою 9′) з Табл.1. Далі чисельник отриманого виразу диференціюємо за правилами похідної суми, а функцію $\mathrm{tg}(3^x)$ також розглядаємо, як складну і знаходимо її похідну за допомогою 4′):

$$f'(x)=\left(\ln(\mathrm{tg}(3^x)+x^3)\right)'=\frac{\left(\mathrm{tg}(3^x)+x^3\right)'}{\mathrm{tg}(3^x)+x^3}=\frac{\left(\mathrm{tg}(3^x)\right)'+(x^3)'}{\mathrm{tg}(3^x)+x^3}=$$

$$=\frac{\dfrac{(3^x)'}{\cos^2(3^x)}+3x^2}{\mathrm{tg}(3^x)+x^3}=\frac{\dfrac{3^x\ln 3}{\cos^2(3^x)}+3x^2}{\mathrm{tg}(3^x)+x^3}=\frac{3^x\ln 3+3x^2\cos^2(3^x)}{\cos^2(3^x)(\mathrm{tg}(3^x)+x^3)}.$$

Згідно означення диференціалу, так як $f'(x)=\dfrac{3^x\ln 3+3x^2\cos^2(3^x)}{\cos^2(3^x)(\mathrm{tg}(3^x)+x^3)}$, маємо

$$df=\frac{3^x\ln 3+3x^2\cos^2(3^x)}{\cos^2(3^x)(\mathrm{tg}(3^x)+x^3)}dx.$$

Приклад 8*. Знайти* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\ln(1+x)-3\sin x+x^2}{x}$, *використовуючи правило Лопіталя.*

Розв'язання:

При x=0 маємо невизначеність виду $\left[\dfrac{0}{0}\right]$. Скористатися чудовими границями та перейти до еквівалентних функцій не можна, так як в чисельнику – сума. Так як $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\varphi(x)=0$, $f(x),\varphi(x)$ диференційовані при всіх дійсних x та $\varphi(x)\neq 0$ при $x\neq 0$, то скористаємося правилом Лопіталя:

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\ln(1+x)-3\sin x+x^2}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(2\ln(1+x)-3\sin x+x^2)'}{(x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{2}{1+x}-3\cos x+2x}{1}=$$

$$\frac{\dfrac{2}{1+0}-3\cos 0+2\cdot 0}{1}=\frac{2-3}{1}=-1.$$

Приклад 9*. Знайти частинні похідні та диференціали першого та другого порядку функції* $f(x,y)=x\ln(5x-3y)$.

Розв'язання:

Щоб знайти $f'_x(x,y)$, необхідно зафіксувати змінну *y* (в даному випадку числовий коефіцієнт і змінна *y* виступають у ролі констант), маємо: $f_x'(x;y)$ =

$$(x\ln(5x-3y))_x'=(x)_x'\cdot\ln(5x-3y)+x\cdot(\ln(5x-3y))_x'=\ln(5x-3y)+x\cdot\frac{(5x-3y)_x'}{5x-3y}=$$

$$\ln(5x-3y)+x\cdot\frac{5}{5x-3y}=\ln(5x-3y)+\frac{5x}{5x-3y}.$$

Аналогічно робимо і з $f_y'(x,y)$, тільки тепер фіксуємо змінну *x*:

$f_y^{/}(x;y)$ = $(x\ln(5x-3y))_y^{/}$ = $(x)_y^{/}\cdot\ln(5x-3y)+x\cdot(\ln(5x-3y))_y^{/}$ = $0\cdot\ln(5x-3y)+x\cdot\dfrac{(5x-3y)_y^{/}}{5x-3y}$ = $x\cdot\dfrac{-3}{5x-3y}$ = $\dfrac{-3x}{5x-3y}$.

Згідно формули диференціалу першого порядку, маємо: *df(x;y)*= $f_x^{/}(x;y)dx+f_y^{/}(x;y)dy$ = $\left(\ln(5x-3y)+\dfrac{5x}{5x-3y}\right)dx$ + $\left(\dfrac{-3x}{5x-3y}\right)dy$.

Знаходимо частинні похідні другого порядку.

$f_{x^2}^{//}(x;y)$ = $\left(\ln(5x-3y)+\dfrac{5x}{5x-3y}\right)_x^{/}$ = $(\ln(5x-3y))_x^{/}+\left(\dfrac{5x}{5x-3y}\right)_x^{/}$ = $\dfrac{(5x-3y)_x^{/}}{5x-3y}+\dfrac{(5x)_x^{/}\cdot(5x-3y)-5x(5x-3y)_x^{/}}{(5x-3y)^2}$ = $\dfrac{5}{5x-3y}+\dfrac{5\cdot(5x-3y)-5x\cdot5}{(5x-3y)^2}$ = $\dfrac{5}{5x-3y}-\dfrac{15y}{(5x-3y)^2}$.

$f_{y^2}^{//}(x;y)$ = $\left(\dfrac{-3x}{5x-3y}\right)_y^{/}$ = $\dfrac{(-3x)_y^{/}\cdot(5x-3y)-(-3x)\cdot(5x-3y)_y^{/}}{(5x-3y)^2}$ = $\dfrac{0\cdot(5x-3y)-(-3x)\cdot(-3)}{(5x-3y)^2}$ = $\dfrac{-9x}{(5x-3y)^2}$.

$f_{xy}^{//}(x;y)$ = $\left(\ln(5x-3y)+\dfrac{5x}{5x-3y}\right)_y^{/}$ = $(\ln(5x-3y))_y^{/}+\left(\dfrac{5x}{5x-3y}\right)_y^{/}$ = $\dfrac{(5x-3y)_y^{/}}{5x-3y}+\dfrac{(5x)_y^{/}\cdot(5x-3y)-5x(5x-3y)_y^{/}}{(5x-3y)^2}$ = $\dfrac{-3}{5x-3y}+\dfrac{0\cdot(5x-3y)-5x\cdot(-3)}{(5x-3y)^2}$ = $\dfrac{-3}{5x-3y}+\dfrac{15x}{(5x-3y)^2}$ = $\dfrac{-3(5x-3y)+15x}{(5x-3y)^2}$ = $\dfrac{9y}{(5x-3y)^2}$.

Для перевірки можна знайти другу мішану похідну та впевнитися, що результати співпадають:

$f_{yx}^{//}(x;y)$ = $\left(\dfrac{-3x}{5x-3y}\right)_x^{/}$ = $\dfrac{(-3x)_x^{/}\cdot(5x-3y)-(-3x)\cdot(5x-3y)_x^{/}}{(5x-3y)^2}$ = $\dfrac{-3(5x-3y)-(-3x)\cdot5}{(5x-3y)^2}$ = $\dfrac{9y}{(5x-3y)^2}$.

Згідно формули диференціалу другого порядку, маємо: $d^2f(x;y)=f_{x^2}^{//}(x;y)dx^2+2f_{xy}^{//}(x;y)dxdy+f_{y^2}^{//}(x;y)dy^2$ = $\left(\dfrac{5}{5x-3y}-\dfrac{15y}{(5x-3y)^2}\right)dx^2$ + $\dfrac{18y}{(5x-3y)^2}dxdy$ - $\dfrac{9x}{(5x-3y)^2}dy^2$.

Приклад 10. *Знайти похідну функції* $y=(\sin x)^{\cos x}$.

Розв'язання:

Для знаходження похідної степенево-показникової функції використаємо наступну формулу: $y' = y(\ln y)'$. Цю формулу рекомендується використовувати в тих випадках, коли за допомогою властивостей логарифмів функцію $\ln y$ можна перетворити до більш зручного вигляду для диференціювання.

$y' = \left((\sin x)^{\cos x}\right)'$ $=$ $(\sin x)^{\cos x}(\cos x \cdot \ln\sin x)'$ $=$ $(\sin x)^{\cos x}\left(-\sin x \cdot \ln\sin x + \dfrac{\cos^2 x}{\sin x}\right)$ $=$ $(\sin x)^{\cos x-1}\left(\cos^2 x - \sin^2 x \cdot \ln\sin x\right)$.

Завдання для практичних занять та самостійного виконання

Завдання № 321-360. Знайти похідні наступних функцій.

321. а) $y = \dfrac{\arcsin x}{2^x}$; б) $y = \arcsin\dfrac{e^x}{x^2 - 3x}$; в) $y = (ctgx)^{\sin x}$.

322. а) $y = \dfrac{x^2 - 5x + 1}{3x^2 + x - 2}$; б) $y = \ln\dfrac{\sin x}{x}$; в) $y = (\sin x)^{x^2 - 3x + 2}$.

323. а) $y = (6^x + \cos x)(\sin x + e^x)$; б) $y = \left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^4$; в) $y = (\sin x)^{ctg\left(\frac{2x}{3}\right)}$.

324. а) $y = (x^3 - 7x^2 + 2x)\cdot e^x$; б) $y = \arccos\sqrt{1 - 2^x}$; в) $y = (tgx)^{\left(x^2 - \frac{x}{5}\right)}$.

325. а) $y = (\arccos x + arcctgx)\cdot(arctgx + \arcsin x)$; б) $y = \dfrac{x - e^{2x}}{x + e^{2x}}$; в) $y = (\sin x)^{ctgx}$.

326. а) $y = \dfrac{3x^2 + 2x + 4}{7x^2 - 3x - 1}$; б) $y = \ln\sqrt{\dfrac{1 + \sin x}{1 - \sin x}}$; в) $y = (\sin x)^{tgx}$.

341. а) $y = \dfrac{e^x \cdot \sin x}{tgx}$; б) $y = \arcsin\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$; в) $y = (\cos x)^{\sin x}$.

342. а) $y = \dfrac{e^x + \sin x}{x^2 - 2x + 5}$; б) $y = \ln tg\,\dfrac{2x+1}{4}$; в) $y = x^{ctgx + \sin x}$.

343. а) $y = arctgx \cdot \arcsin x$; б) $y = \ln\dfrac{x^5}{x^3 + 1}$; в) $y = (\cos x)^{\frac{x+1}{3}}$.

344. а) $y = \dfrac{3}{4}x\sqrt[3]{x}$; б) $y = \left(\dfrac{\sin x}{1 + \cos x}\right)^2$; в) $y = x^{x^3 - 5x^2}$.

345. а) $y = (\ln x + arcctgx)\cdot e^x$; б) $y = \sin(\ln x)\cdot\cos(\ln x)$; в) $y = (\cos x)^{tgx}$.

346. а) $y = \dfrac{\sin x - \cos x}{arctgx}$; б) $y = \dfrac{3}{2}\sin^2\sqrt{x}$; в) $y = (\cos x)^{ctgx}$.

327. а) $y=(3^x+\cos x)(5^x+e^x)$;
б) $y=tg^3(tgx)$; в) $y=x^{x^2}$.

328. а) $y=\dfrac{ctgx}{5^x+7^x}$; б) $y=\arccos(2e^{2x}-1)$;
в) $y=(tgx)^{cox\left(\frac{x-3}{2}\right)}$.

329. а) $y=\dfrac{e^x+4^x}{tgx}$; б) $y=\ln\dfrac{\sqrt{x^2+2x}}{x+1}$;
в) $y=(\cos x)^{\arccos x}$.

330. а) $y=(x^3-4x^2+7x-e^x)\cdot\dfrac{x-1}{x+2}$;
б) $y=ctg\,\dfrac{3x^3}{2-x^2}$; в) $y=(arctgx)^{\sin 3x}$.

331. а) $y=\dfrac{\log_3 x+5^x}{x^2-1}$; б) $y=arctg\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$;
в) $y=x^{tgx}$.

332. а) $y=\dfrac{\log_5 x}{\sin x-4^x}$; б) $y=(x-1)e^{x^2}$;
в) $y=(\arcsin x)^{x^2+3x}$.

333. а) $y=x\sqrt{x}(3\ln x-2)$; б) $y=\arccos\dfrac{1}{x^2}$;
в) $y=(ctgx)^{\cos x}$.

334. а) $y=x\sqrt[3]{x}(5tgx-x)$;
б) $y=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$; в) $y=x^{\arccos x+2}$.

335. а) $y=x^3e^x+x^2arctgx$; б) $y=\dfrac{1-\cos 3x}{1+\cos 3x}$;
в) $y=x^{\ln x}$.

336. а) $y=\left(\arcsin x+x^4\right)\cdot(4\sin x-e^4+4^x)$;
б) $y=\ln(\sin(2x))$; в) $y=x^{tg2x}$.

347. а) $y=\dfrac{2^x+5^x}{e^x}$; б) $y=\arcsin\dfrac{2x^3}{1+x^5}$;
в) $y=(\cos x)^{x^2-5x+1}$.

348. а) $y=\dfrac{\cos x+ctgx}{tgx+\sin x}$;
б) $y=\arccos\dfrac{9-x^2}{9+x^2}$; в) $y=x^{arcctgx}$.

349. а) $y=\dfrac{\arccos x+arcctgx}{arctgx+\arcsin x}$;
б) $y=\ln\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$; в) $y=(\sin x)^{\arccos x+x^2}$.

350. а) $y=\dfrac{\sin x}{arcctgx}\cdot\dfrac{x-2}{x+4}$;
б) $y=\ln\left(3x^2+\sqrt{9x^4+1}\right)$; в) $y=(\sin x)^{\frac{x-3}{2}}$.

351. а) $y=\dfrac{\cos x}{arcctgx-5^x}$;
б) $y=\ln\left(\sqrt{x}-\sqrt{x-2}\right)$; в)
$y=(\sin x)^{arctg(x+1)}$.

352. а) $y=\dfrac{\cos x+tgx-x+2}{\sin x-e^x-5}$;
б) $y=e^{\cos(3x)}$; в) $y=x^{arcctgx+x^3-4x}$.

353. а) $y=\left(\log_4 x+e^x-\sin x\right)\cdot\left(arctgx-3^x\right)$;
б) $y=\dfrac{1}{2}ctg^2x+\ln\sin x$;; в) $y=x^{ctgx}$.

354. а) $y=\left(tgx-x\sqrt[6]{x}\right)\cdot\left(2^x-\sqrt[5]{x}\right)$;
б) $y=x\cdot e^{\frac{1}{x}}$; в) $y=x^{\cos x}$.

355. а) $y=\dfrac{x^2+6x-9}{\arcsin x-5^x\cdot\cos x}$;
б) $y=\ln ctg\sqrt{x+2}$; в) $y=x^{\frac{x-1}{x+1}}$.

356. а) $y=\dfrac{e^x+1}{tgx-8^x}$; б) $y=\arccos\dfrac{x-1}{x+1}$;

в) $y = x^{\arccos(5x-1)}$.

337. а) $y = \dfrac{x^2+2x-3}{4x^3-6x^2+x-2}$;

б) $y = \dfrac{ctg^2(\sin x)}{2}$; в) $y = (\cos x)^{e^x}$.

338. а) $y = x^2 \sin x + 2x\cos x - 3tgx$;

б) $y = \dfrac{tg^3(2x)}{3}$; в) $y = (x-3)^{e^x}$.

339. а) $y = \dfrac{x^2+2x-3^x}{arctgx}$; б) $y = 2^{ctg^2 3x}$;

в) $y = (x+2)^{\cos x}$.

340. а) $y = \left(x^6 - arctgx\right)\cdot(tgx - 6^x)$;

б) $y = \ln\cos 2x - \ln\sin 2x$; в) $y = (x-1)^{e^x}$.

357. а) $y = \left(x^5 - 3x^4 + 2x^3 - 6x\right)\cdot(4^x - 9^x)$;

б) $y = arctg(e^{5x})$; в) $y = x^{\frac{x-5}{x+8}}$.

358. а) $y = \left(2x\sqrt[3]{x} + \dfrac{1}{5}x\sqrt[3]{x}\right)tgx$;

б) $y = e^{ctg\,2x}$; в) $y = x^{\cos 3x}$.

359. а) $y = \dfrac{-ctgx - x - 4}{2x^3+5x^2-7x}$;

б) $y = \ln ctg\dfrac{x}{3}$; в) $y = (\cos x)^{\frac{x-5}{x+2}}$.

360. а) $y = \dfrac{2e^x + 3x^2 - 9x}{5^x}$;

б) $y = \dfrac{1}{6}\ln\dfrac{x-3}{x+3}$; в) $y = (\cos x)^{tg(2x-1)}$.

Завдання № 361-400. Знайти частинні похідні та диференціали першого та другого порядку наступних функцій.

361. а) $z = 2xy - 5x^2y^3 + 7x^3y^4$; б) $z = x\cdot e^{y-2x}$.

362. а) $z = x^3 + xy^2 + 6x^2 + y^2$; б) $z = -\dfrac{x^2}{4} - y^2$.

363. а) $z = 2\sqrt{x}y + y^2 + 3x + 8y$; б) $z = x^2 + 2xy + y^2 - 4x + 8y$.

364. а) $z = x^2y + \dfrac{1}{3}y^3 + 4x - 5y - 1$; б) $z = y + \dfrac{x^2}{y}$.

365. а) $z = y^{\frac{3}{2}}\cdot x^{-\frac{1}{2}}$; б) $z = \arcsin\dfrac{x-y}{x+y}$.

366. а) $z = \ln(x^2 + 2x + y^2)$; б) $z = \sin(x + 2y)$

367. а) $z = \arcsin(xy)$; б) $z = \dfrac{x^2}{y}$.

381. а) $z = \dfrac{8}{x} - \dfrac{1}{y} + xy$; б) $z = \left(x^2 + 6y\right)e^{\frac{y}{3}}$.

382. а) $z = x^3 + xy^2 - 21x + 12y + 2$; б) $z = \left(y^2 - x\right)e^{\frac{x}{2}}$.

383. а) $z = x^2y + y^3 - x^2 - 6y^2$; б) $z = \ln(2x - 3y)$.

384. а) $z = 5arctg(xy)$; б) $z = 4y - \dfrac{x^2}{y}$.

385. а) $z = \sqrt{x-y}$; б) $z = x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - 3x + 7y$.

386. а) $z = \ln(3 - x^2 - y^2 + xy)$; б) $z = x^3 + y^3 + 6xy - 8$.

387. а) $z = x^3 - 5xy$; б) $z = e^{x-y^2}$.

368. а) $z=\dfrac{x^2+y^2}{x+2y}$; б) $z=e^{\frac{x}{y}}$.

369. а) $z=x+\dfrac{y^2}{x}$; б) $z=4x-\dfrac{y^2}{x}$.

370. а) $z=2y\sqrt{x}-\ln(y-5)$; б) $z=\dfrac{x+3}{y-x}$.

371. а) $z=(x^2+1)y-\sin 2y$; б) $z=\ln(x^5-2y^2)$.

372. а) $z=x^2-\ln(2y-5)$; б) $z=\sin(x^3-y^2)$.

373. а) $z=x\cos y-y\sin 2x$; б) $z=\sqrt{(x^3-y^2)}$.

374. а) $z=x-\ln(2y-5x^2)$; б) $z=\dfrac{x}{y+2x}$.

375. а) $z=x^2y^3-e^{y^2}$; б) $z=y\cdot\sin 2x^3-y^2$.

376. а) $z=\dfrac{xy}{x+y}$; б) $z=x^2+y^2-2e^y$.

377. а) $z=\cos y+y\sin y-x\sin y$; б) $z=\dfrac{x}{y}$.

378. а) $z=x^2y-e^{x^2-y}$; б) $z=x^2\cdot\ln(y+3x)$.

379. а) $z=x^3y^4-2x^2y^2+3xy$; б) $z=\sin(3xy)$.

380. а) $z=2xy-5x^2y^3+7x^3y^4$; б) $z=x\cdot e^{y-2x}$.

388. а) $z=x^7y^2-e^{x^2}$; б) $z=x^2\cdot\ln(y-1)$.

389. а) $z=x^3y-xy^2+7$; б) $z=x\cdot\ln y$.

390. а) $z=x^4y^3-15x^2y$; б) $z=\sin y\cdot\ln x$.

391. а) $z=xy-x^2y^3$; б) $z=x\cdot e^y$.

392. а) $z=x^2y-xy^2+7$; б) $z=\sin(x-4y)$.

393. а) $z=xy-\cos 2y$; б) $z=\ln(x^3-y^2)$.

394. а) $z=x^3y-tg 2y$; б) $z=arctg(xy)$.

395. а) $z=x^3y+2y^3x$; б) $z=x^2\cos 3y$.

396. а) $z=x^3y^3+2xy^2$; б) $z=x\cdot\ln(y-3)$.

397. а) $z=x^2y^4+y^7-3x$; б) $z=\cos(x+4y)$.

398. а) $z=x^7y-xy$; б) $z=\cos(x-2y)$.

399. а) $z=xy^3-5xy$; б) $z=e^{x-y}$.

400. а) $z=x^8y-xy^2+7$; б) $z=y\cdot\ln x$.

Тема 10. Дослідження функції за допомогою диференціального числення

Теоретичні відомості до теми

1. Функція. Область визначення функції
2. Парність, непарність функцій. Періодичність функцій
3. Основні елементарні функції та їх графіки
4. Перетворення графіків функцій
5. Схема повного дослідження функції

1. Функція. Область визначення функції

Нехай маємо множину X дійсних чисел.

Озн. *Якщо кожному числу $x \in X$ за певним правилом або законом поставлено у відповідність одне дійсне число y, з множини Y $(y \in Y)$, то говорять, що на множені X визначено* ***функцію*** *і записують $y = f(x)$.*

При цьому множина X називається **областю визначення** або **областю існування** функції; x називають **аргументом** або незалежною змінною; y називають залежною змінною або **функцією**; $f(x)$ називають **значенням функції** в точці x; Y – множина, до якої належить значення функції.

Озн. *Множину всіх значень функції, яких вона набуває при $x \in X$, називають* ***областю значень*** *функції.*

2. Парність, непарність функцій. Періодичність функцій

Нехай функцію $y = f(x)$ задано на проміжку $[a; b]$, який є симетричним відносно початку координат. Це може бути або нескінченний інтервал $(-\infty; +\infty)$, або скінчений інтервал $(-a; a)$, або відрізок $[-a; a]$, де a – будь-яке дійсне число.

Озн. *Функція $y = f(x)$, визначена на проміжку $[a; b]$, називається* ***парною****, якщо для будь-якого $x \in [a; b]$ виконується рівність $f(-x) = f(x)$.*

Графік парної функції симетричний відносно осі ординат.

Озн. *Функція $y = f(x)$, визначена на проміжку $[a; b]$, називається* ***непарною****, якщо для будь-якого $x \in [a; b]$ виконується рівність $f(-x) = -f(x)$.*

Графік непарної функції симетричний відносно початку координат.

Наприклад, нехай $f(x) = \sin x$, де $x \in (-\infty; +\infty)$. Згідно з відомою властивістю даної функції, $f(-x) = \sin(-x) = -\sin x = -f(x)$.

Отже, $\sin x$ є непарною функцією.

Аналогічно, нехай $f(x) = \cos x$, де $x \in (-\infty; +\infty)$. Відомо, що $\cos(-x) = \cos(x)$.

Отже, $\cos x$ є парною функцією.

Озн. *Функція $y = f(x)$, визначена на всій числовій осі, називається* ***періодичною****, якщо існує число $T \neq 0$ таке, що для всіх $x \in (-\infty; +\infty)$ виконується тотожність $f(x+T) \equiv f(x)$.*

Озн. *Число T при цьому називається* ***періодом функції*** *$f(x)$, а саму функцію називають* ***T-переодічною****.*

Якщо число T є періодом функції $f(x)$, то й число $-T$ є також періодом $f(x)$:

$f(x-T)=f((x-T)+T)=f(x)$.

Якщо $f(x)$ – періодична функція з періодом Т, то функція $f(ax+b)$, де $a>0$, є періодичною з періодом $\frac{T}{a}$.

Зокрема, якщо розглянути функцію $y=A\sin(\omega x+\phi)$, де A, ω, ϕ – сталі, то періодом цієї функції є число $\frac{2\pi}{\omega}$.

Примітка. *Функцію $y=A\sin(\omega x+\phi)$ у фізиці називають* ***гармонікою****, число $|A|$ називають* ***амплітудою****, ω –* ***циклічною частотою****, а ϕ –* ***початковою фазою гармоніки***.

3. Основні елементарні функції та їх графіки

Лінійна функція: $y=kx+b$.

Графік функції – пряма, досить знати дві точки, бажано точки перетину з осями координат:

$$x=0;\ y=b;\ y=0;\ x=-\frac{b}{k}.$$

Степенева функція: $y=x^n, (\neq 0)$.

Якщо $n\in N$, функція визначена на всій числовій осі, тобто $x\in R$.

Якщо $n=2k$ – функція парна, то приймає значення $y\in[0;+\infty]$. Її графіками будуть параболи відповідно другого, четвертого і т.д. порядків.

Якщо $n=2k+1$– графіки параболи третього, п'ятого і т.д. порядків.

Показникова функція: $y=a^x, \forall\ a>0, a\neq 1$.

Область її визначення $x\in R$, область значень $y\in(0;+\infty)$. Якщо $a>1$, функція $\uparrow$, якщо $0<a<1$, функція $\downarrow$.

Причому, для довільного a: $y(0)=a^0=1$, тобто графік довільної експоненти проходить через точку $(0;1)$.

Логарифмічна функція: $y=\log_a x, \forall a>0, a\neq 1$.

Це функція обернена до показникової, $x\in(0;+\infty)$, $y\in R$, $\log_a 1=0$. Тому графік довільної функції проходить через точку $(1;0)$.

Тригонометричні функції: $y=\sin x$; $y=\cos x$; $y=\mathrm{tg}\,x$; $y=\mathrm{ctg}\,x$.

Функції $\sin x$ та $\cos x$ визначені для всіх $x\in R$ та мають множину значень $[-1;1]$.

Функція $\operatorname{tg} x$ визначена всюди, крім $x = \pi/2(2n+1)$, $n \in N$, та монотонно зростає в кожному інтервалі області визначення.

Функція $y = \operatorname{ctg} x$ всюди визначена, крім $x = \pi n$, $n \in N$, та монотонно спадає в кожному інтервалі області визначення.

Множина значень $\operatorname{tg} x$ та $\operatorname{ctg} x$ – проміжок $(-\infty; +\infty)$.

Функції $\sin x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$ – непарні, їх графіки симетричні відносно початку координат, $\cos x$ – парна, її графік симетричний відносно OY.

Функції періодичні. Найменший період синуса та косинуса $T = 2\pi$, $\operatorname{tg} x$ та $\operatorname{ctg} x$ – $T = \pi$.

Обернені тригонометричні функції

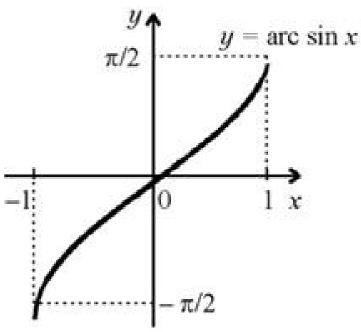
Тригонометричні функції в інтервалі монотонності мають обернені:

$y = \arcsin x$ – обернена до $y = \sin x$ на відрізку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$;

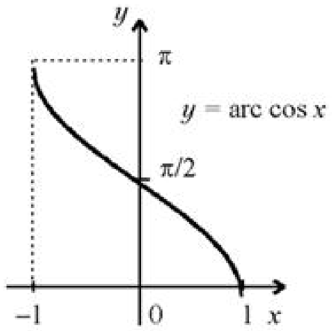
$y = \arccos x$ – обернена до $y = \cos x$ на відрізку $[0; \pi]$;

$y = \operatorname{arctg} x$ – обернена до $y = \operatorname{tg} x$ на відрізку $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$;

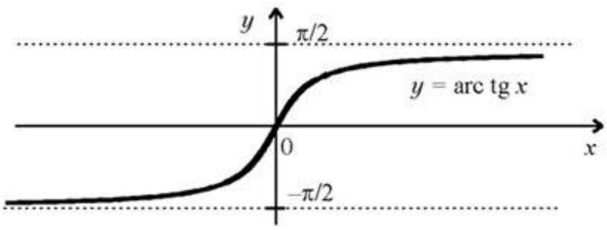
$y = \operatorname{arcctg} x$ – обернена до $y = \operatorname{ctg} x$ на відрізку $(0; \pi)$.



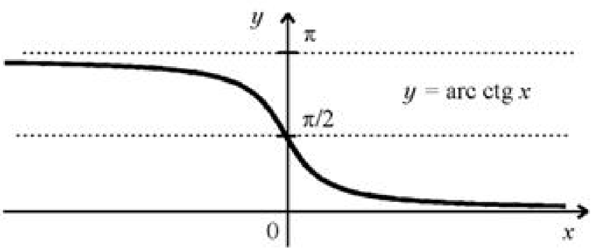
$x \in [-1; 1]; y \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$



$x \in [-1; 1]; y \in [0; \pi]$



$x \in [-\infty; \infty]; y \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$



$x \in [-\infty; \infty];\ y \in (0; \pi)$

4. Перетворення графіків функцій

При побудові графіків функцій часто використовують деформації та паралельне перенесення вздовж осі Ox та Oy.

Треба знати, що:

1) графік функції $y = -f(x)$ – дзеркальне відображення графіка $y = f(x)$ відносно осі Ox;

2) графік функції $y = f(-x)$ – дзеркальне відображення графіка $y = f(x)$ відносно осі Oy;

3) графік функції $y = f(x \pm a)$, де $a > 0$ – паралельне перенесення графіка $y = f(x)$ $\frac{\text{ліворуч}}{\text{праворуч}}$ на a одиниць масштабу вздовж осі Ox;

4) графік функції $y = f(x) \pm a$, де $a > 0$ – паралельне перенесення графіка $y = f(x)$ $\frac{\text{догори}}{\text{вниз}}$ на a одиниць масштабу вздовж осі Oy;

5) графік функції $y = f(kx)$ – стиснення в k разів $(k > 1)$, або розтягнення в $\frac{1}{k}$ разів $(k < 1)$ графіка $y = f(x)$ вздовж осі Ox;

6) графік функції $y = kf(x)$ – розтягнення в k разів $(k > 1)$, або стиснення в $\frac{1}{k}$ разів $(k < 1)$, графіка $y = f(x)$ вздовж осі Oy;

7) графік функції $y = |f(x)|$ – дзеркальне відображення від осі Ox від'ємної частини (під віссю Ox) графіка функції $y = f(x)$, додатна частина графіка залишається на місці.

8) графік функції $y = f(|x|)$ – дзеркальне відображення від осі Oy правої частини (з додатної півплощини) графіка $y = f(x)$ в ліву півплощину, додатна частина графіка залишається на місці.

5. Схема повного дослідження функції

Повне дослідження функції здійснюється за наступною схемою.

1. Знаходимо область визначення функції y=f(x).

2. Перевіряємо функцію на парність, непарність, періодичність:

f(-x) = f(x) – функція парна;

f(-x) = -f(x) – функція непарна;

f(x+T) = f(x) – функція періодична з періодом T ≠ 0;

3. Визначаємо координати точок перетину графіка функції з вісями координат:

– для знаходження точок перетину графіка функції з віссю OX розв'язуємо рівняння f(x)=0;

– для знаходження точок перетину графіка функції з віссю OY обчислюємо значення f(0).

4. Досліджуємо функцію f(x) на неперервність, встановлюємо точки розриву і знаходимо $\lim_{x \to x_0+0} f(x)$ та $\lim_{x \to x_0-0} f(x)$. Якщо хоча б одна з цих границь дорівнює нескінченості, то пряма $x=x_0$ є вертикальна асимптота графіка функції.

Асимптота – пряма, до якої графік функції необмежено близько наближається, але ніколи не перетинає.

5. Досліджуємо функцію f(x) на зростання, спадання та знаходимо її екстремуми (мінімум чи максимум функції):

– знаходимо $f'(x)$;

– знаходимо критичні точки - значення x при яких $f^{/}(x)=0$ або не існує;

– наносимо знайдені критичні точки x_0 на числову вісь і утворюємо проміжки;

– визначаємо знак $f^{/}(x)$ на кожному з проміжків:

– якщо на деякому проміжку $f^{/}(x)>0$, то на цьому проміжку функція f(x) зростає;

– якщо на деякому проміжку $f^{/}(x)<0$, то на цьому проміжку функція f(x) спадає;

– якщо при переході через критичну точку x_0 $f^{/}(x)$ змінює знак:

– з «+» на «-», то x_0 – максимальна точка, а $f(x_0)$ - максимум функції;

– з «-« на «+», то x_0 – мінімальна точка, а $f(x_0)$ - мінімум функції.

6. Досліджуємо функцію на опуклість і точки перегину:

– знаходимо $f^{//}(x)$;

– знаходимо критичні точки – точки в яких $f^{//}(x)=0$ або не існує;

– наносимо знайдені критичні точки x_0 на числову вісь і утворюємо проміжки;

– визначаємо знак $f^{/}(x)$ на кожному з проміжків:

– якщо на деякому проміжку $f^{//}(x)>0$, то на цьому проміжку функція f(x) опукла вниз U;

– якщо на деякому проміжку $f^{//}(x)<0$, то на цьому проміжку функція f(x) опукла вгору ∩;

– якщо при переході через критичну точку x_0 $f^{//}(x)$ змінює знак, то x_0 – точка перегину функції – точка, що відділяє опуклу вниз частину графіка функції від опуклої вгору.

7. Знаходимо похилі асимптот графіка, що задаються рівнянням y=kx+b, де $k=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$, $b=\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-kx)$ (при умові, що ці границі існують і скінчені).

8. Збираємо всю інформацію і будуємо ескіз графіка функції.

Зразки розв'язування задач

***Приклад 1**. Дослідити на парність чи непарність функцію* $y=\ln\frac{1+x}{1-x}$.

Розв'язання:

Знайдемо область визначення функції:

$\frac{1+x}{1-x}>0;\ x\in(-1;1).$

Знайдемо $f(-x)$:

$$f(-x)=\ln\frac{1-x}{1+x}=\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{-1}=-\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=-f(x).$$

Одержали, що $f(-x)=-f(x)$, тобто $f(x)$ – непарна.

***Приклад 2**. Знайти період функцій: а)* $y=\operatorname{tg}2x$*; б)* $y=\sin\frac{x}{2}$*; в)* $y=\sin 2\pi$

Розв'язання:

а) Функція $\operatorname{tg}x$ має період π, тому функція $\operatorname{tg}2x$ має період $T=\frac{\pi}{2}$.

б) Функція $\sin x$ має період 2π, тому $\sin\frac{x}{2}$ має період 4π.

в) Функція $\sin 2x$ має період $T=\pi$.

***Приклад 3**. Провести повне дослідження функції* $f(x)=\frac{x^2}{x+2}$ *і побудувати її графік.*

Розв'язання:

Будемо виконувати дослідження функції, дотримуючись запропонованої схеми дослідження.

1. Функція визначена на всій дійсній області чисел, крім *x* = -2: *x є (-∞; 2) U (2; +∞).*

2. Дана функція не є періодичною. Перевіряємо її на парність (непарність): $f(-x)=\dfrac{(-x)^2}{-x+2}=\dfrac{x^2}{-x+2}\neq -f(x), f(x)$. Отже, наша функція загального вигляду – ні парна, ні непарна.

3. у = 0: $\dfrac{x^2}{x+2}=0 \Rightarrow x=0$.

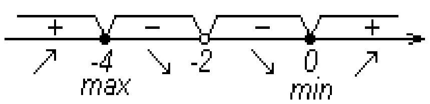
х = 0: $\dfrac{0^2}{0+2}=0$. Отже, графік функції перетинає вісі координат у точці (0,0).

4. Функція $f(x)=\dfrac{x^2}{x+2}$ неперервна в області свого визначення, тобто при всіх дійсних х, крім х = -2. Так як $\lim\limits_{x\to -2+0}\dfrac{x^2}{x+2}=+\infty$ і $\lim\limits_{x\to -2-0}\dfrac{x^2}{x+2}=-\infty$, то х = -2 – точка розриву другого порядку, а пряма х = -2 - вертикальна асимптота графіка функції.

5. Знаходимо похідну першого порядку: $\left(\dfrac{x^2}{x+2}\right)^{/}=\dfrac{(x^2)^{/}\cdot(x+2)-x^2\cdot(x+2)^{/}}{(x+2)^2}=$ $\dfrac{2x(x+2)-x^2}{(x+2)^2}=\dfrac{x^2+4x}{(x+2)^2}$.

Визначаємо критичні точки: $\dfrac{x^2+4x}{(x+2)^2}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x(x+4)=0 \\ x+2\neq 0 \end{cases} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-4 \end{array} \right. \\ x\neq -2 \end{array} \right.$ - критичні точки.

Наносимо критичні точки на числову вісь і визначаємо знак похідної на кожному із проміжків, очевидно, що знак похідної залежить лише від знаку її чисельника:



$x=-5: -5(-5+4)=5 \Rightarrow f^{/}(x)>0, \forall x(-\infty;-4)$;

$x=-3: -3(-3+4)=-3 \Rightarrow f^{/}(x)<0, \forall x(-4;-2)$;

$x=-1: -1(-1+4)=-3 \Rightarrow f^{/}(x)<0, \forall x(-2;0)$;

$x=1: 1(1+4)=5 \Rightarrow f^{/}(x)>0, \forall x(0;+\infty)$.

Функція має екстремум в точках: х = -4 та х = 0. $f(-4)=\dfrac{(-4)^2}{-4+2}=-8$ - максимум, $f(0)=0$ - мінімум функції.

6. Знаходимо похідну другого порядку: $f^{//}(x) = \left(f^{/}(x)\right)^{/} = \left(\frac{x^2+4x}{(x+2)^2}\right)^{/} =$

$$\frac{(x^2+4x)^{/}\cdot(x+2)^2-(x^2+4x)\cdot[(x+2)^2]^{/}}{(x+2)^4} = \frac{(2x+4)\cdot(x+2)^2-(x^2+4x)\cdot(2(x+2))}{(x+2)^4} =$$

$$\frac{2(x+2)\cdot[(x+2)^2-(x^2+4x)]}{(x+2)^4} = \frac{2[x^2+4x+4-x^2-4x]}{(x+2)^3} = \frac{8}{(x+2)^3}.$$

Очевидно, що знак другої похідної залежить лише від знака знаменника. При x>-2 $f''(x)>0$ і графік функції опуклий вниз, а при x>-2 $f''(x)<0$ і графік функції опуклий вгору.

7. Знаходимо асимптоти.

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x(x+2)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x+2}=1.$$

$$b=\lim_{x\to\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{x+2}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-x(x+2)}{x+2}=\lim_{x\to\infty}\frac{-2x}{x+2}=-2.$$

Пряма $y=1\cdot x-2=x-2$ – похила асимптота.

8. Ескіз отриманого графіка наведено на рис. 4.2.

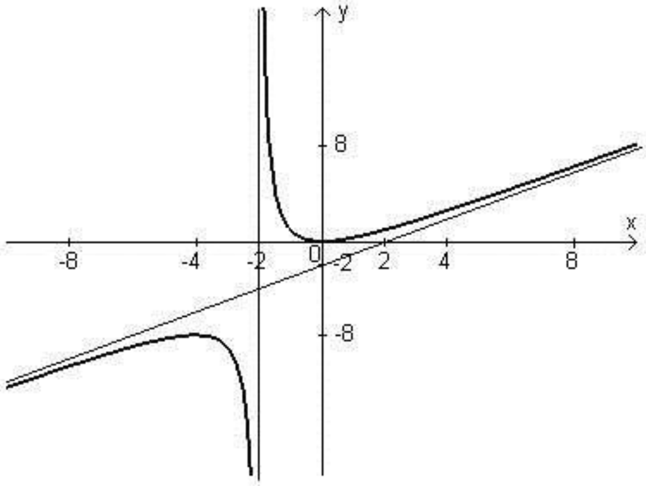


Рис.4.2

Завдання для практичних занять та самостійного виконання

Завдання № 401-440. Провести повне дослідження і побудувати графік функції.

401. $y=\frac{4x}{4+x^2}$.

402. $y=\frac{1}{x^2-4}$.

414. $y=\frac{x^2-5}{x-3}$.

415. $y=\frac{2-4x}{1-4x^2}$.

428. $y=\frac{x}{x-3}$.

429. $y=\frac{x}{4-x^2}$.

403. $y=\dfrac{1}{x^2-16}$.

404. $y=\dfrac{x}{x^2-9}$.

405. $y=\dfrac{1}{x(x^2-4)}$.

406. $y=\dfrac{x^2-4}{x^2+4}$.

407. $y=\dfrac{x^2}{x-1}$.

408. $y=\dfrac{x^2}{1+x^2}$.

409. $y=\dfrac{x^4}{x^3-1}$.

410. $y=\dfrac{x^2+4}{x^2-4}$.

411. $f(x)=\dfrac{1}{(x+1)^2}$.

412. $y=\dfrac{2}{x^2-3x+1}$.

413. $y=\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$.

416. $y=\dfrac{x^3}{x^2+1}$.

417. $y=\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$.

418. $y=\dfrac{1-x^2}{4-x^2}$.

419. $y=\dfrac{1}{x^2-3x+2}$.

420. $y=\dfrac{x^2+2x+1}{x-2}$.

421. $y=\dfrac{4x^2+5}{x}$.

422. $y=\dfrac{5x}{5+x^2}$.

423. $y=\dfrac{x^2-5}{x^2-3}$.

424. $y=\dfrac{1}{x^2-5x+6}$.

425. $y=\dfrac{x^2+2}{x+1}$.

426. $y=\dfrac{x+4}{x^2-1}$.

427. $y=\dfrac{x+2}{x^2-3}$.

430. $y=\dfrac{x}{5-x}$.

431. $y=\dfrac{x^3}{x^2-4}$.

432. $y=x(x-1)^3$.

433. $y=e^{\frac{1}{x}}$.

434. $y=x^2(1+\sqrt{x})$.

435. $y=\dfrac{2x^2}{x-3}$.

436. $f(x)=\dfrac{2}{3x-1}$.

437. $y=\dfrac{4x^3}{x^3-1}$.

438. $y=\dfrac{3}{x^2-2x}$.

439. $y=\dfrac{x^2+3}{x^2+2x+5}$.

440. $y=\dfrac{x^3+4}{x^2}$.

Застосування диференціального числення в економіці

Диференціальне числення широко застосовується в економіці, а похідна є найважливішим інструментом економічного аналізу, що дозволяє висловити ряд економічних законів за допомогою математичних формул.

Поява похідної обумовила перехід науково-економічного мислення у XIX ст. в галузі економічної теорії від середніх до граничних величин (граничні витрати, граничний дохід, гранична корисність, гранична продуктивність, гранична схильність до споживання і т.д.), що дозволило створити абсолютно новий інструмент дослідження і опису економічних явищ відносно зміни часу або стосовно іншого досліджуваного фактора.

Розглянемо зміст та характеристику основних граничних величин економіки в контексті диференціального числення.

Нехай q - кількість виробленої продукції, TC (q) - відповідні даному випуску сукупні витрати (total costs), тоді Δq - приріст продукції, а ΔTC - приріст витрат виробництва.

Граничні витрати MC (marginal costs) виражають додаткові витрати на виробництво кожної додаткової одиниці продукції, тобто $MC = TC(q + \Delta q) - TC(q)$, де Δq=1.

Використовуючи рівність $\Delta TC \approx dTC$, отримаємо $MC = \Delta TC \approx dTC = TC'(q) \cdot \Delta q = TC'(q)$/

Отже, граничні витрати є не що інше, як перша похідна від сукупних витрат, якщо останні представлені як функція від випущеної кількості продукції.

Аналогічним чином визначаються і багато інші економічні величини, що мають граничний характер.

Гранична виручка MR (marginal revenue) – це додатковий дохід, отриманий при переході від виробництва n-ної до (n +1)-ої одиниці продукту. Вона являє собою першу похідну від виручки: $MR = \frac{dTR}{dq} = \frac{TR'(q) \cdot \Delta q}{q' \Delta q} = TR'(q)$.

Для господарюючого суб’єкта, який діє в умовах досконалої конкуренції: TR = P * Q, де TR - виручка (total revenue); P - ціна (price). Таким чином $\frac{d(PQ)}{dQ} = P$, Þ MR = P. Це рівність вірно для ринку досконалої конкуренції.

Будь-який індивід використовує свій дохід Y після сплати податків на споживання C і заощадження S. Ясно, що особи з низьким доходом повністю використовують його на споживання, а на заощадження коштів не залишається. Із зростанням доходу суб’єкт не тільки більше споживає, але і більше зберігає. Як встановлено економічною наукою, споживання і заощадження залежать від розміру доходу: Y = C (Y) + S (Y).

Використання похідної дозволяє визначити таку категорію, як ***граничну схильність до споживання MPC*** (marginal property to consume), що показує частку приросту особистого споживання у прирості доходу:

$$MPC = \frac{dC}{dY} = \frac{C\prime(Y) \cdot \Delta Y}{Y\prime \cdot \Delta Y} = C'(Y).$$

У міру збільшення доходів *MPC* зменшується.

Частку приросту заощаджень у приросту доходу показує ***гранична схильність до заощадження MPS (marginal propensity to save):***

$$MPS = \frac{dS}{dY} = \frac{S\prime(Y) \cdot \Delta Y}{Y\prime \cdot \Delta Y} = S'(Y).$$

Зі збільшенням доходів MPS збільшується.

Оскільки обмеженість ресурсів принципово не усунена, то вирішальне значення набуває віддача від факторів виробництва. Тут також застосовується похідна, як інструмент дослідження. Нехай застосовуваний капітал постійний, а витрати збільшуються. Можна ввести в економічний аналіз наступну категорію - ***граничний продукт праці MP $_L$ (marginal product of labor)*** - *це додатковий продукт, отриманий у результаті додаткових вкладень праці при незмінній величині капіталу:* $MP_L = \frac{\Delta Y}{\Delta L}$.

Якщо вкладення здійснюються досить малими порціями, то $MP_L = \frac{dY}{dL}$, так як dY – результат, dL - витрати, то MP_L - гранична продуктивність праці.

Аналогічно, ***MP $_K$ (marginal product of capital)*** - ***граничний продукт капіталу*** – додатковий продукт, отриманий у результаті додаткових вкладень капіталу K при незмінній величині праці: $MP_К = \frac{\Delta Y}{\Delta К}$.

Якщо вкладення здійснюються малими порціями, то $MP_К = \frac{dY}{dК}$.

MP_k характеризує граничну продуктивність капіталу.

Категорія ***граничної корисності MU (marginal utility)*** *визначає додаткову корисність від кожної додаткової спожитої одиниці блага:*

$$MU = \frac{\Delta TU}{\Delta q}.$$

При нескінченно малих змінах гранична корисність є похідна від сукупної корисності, яка представлена як функція від споживаної кількості продукту: $MU = \frac{dTU}{dq} = \frac{TU'(q)\cdot\Delta q}{q'\Delta q} = TU'(q)$.

Часто для дослідження економічних процесів та задач використовується поняття еластичності функції.

Еластичністю функції E_x (y) називається границя відношення відносного приросту функції y до відносного приросту змінної x при $\Delta x \to 0$:

$$E_x(y) = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta y}{y} : \frac{\Delta x}{x}\right) = \frac{x}{y}\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x}{y}\cdot y'.$$

Коефіцієнт еластичності функції *y* по *x* показує наближено, на скільки відсотків зміниться функція $y = f(x)$, при зміні незалежної змінної *x* на 1%.

Властивості еластичності:

1) $E_x(f(x) \pm g(x)) = \frac{f(x)E_x\left(f(x)\right) \pm g(x)E_x\left(g(x)\right)}{f(x) \pm g(x)}$;

2) $E_x(f(x) \cdot g(x)) = E_x\left(f(x)\right) + E_x\left(g(x)\right)$;

3) $E_x\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = E_x\big(f(x)\big) - E_x\big(g(x)\big)$

Поняття еластичності дуже широко застосовується в економічному аналізі.

В економіці існує кілька видів еластичності.

Еластичність попиту за ціною (пряма)

$$\boldsymbol{E_p^D = \left(\frac{dq}{q}\right) \div \left(\frac{dp}{p}\right) = \frac{dq}{dp}\frac{p}{q} = \frac{q'(p)\cdot\Delta p}{p'\cdot\Delta p}\frac{p}{q} = q'(p)\cdot\frac{p}{q}}$$

показує відносну зміну (виражене у відсотках) величини попиту на будь-яке благо при зміні ціни цього блага на один відсоток і характеризує чутливість споживачів до зміни цін на продукцію.

Якщо $\boldsymbol{E_p^D = 0,}$ то попит на даний товар називається абсолютно нееластичним. При цьому незалежно від того чи ціна знижується, чи зростає – кількість товару, що купується також не змінюється. Це, як правило, характерно для товарів першої необхідності.

Якщо $0 \le \left|\boldsymbol{E_p^D}\right| \le \boldsymbol{1}$, то попит на даний товар називається нееластичним або відносно нееластичним. При цьому при зниженні ціни – темп зростання попиту стає нижче темпу зниження ціни, а при зростанні ціни – темп зниження попиту стає нижче темпу зростання ціни.

Якщо $\boldsymbol{E_p^D = 1}$, то кажуть, що товар має одиничну еластичність, тобто при зниженні ціни – темп зростання попиту дорівнює темпу зниження ціни, а при зростанні ціни – темп зниження попиту дорівнює темпу зростання ціни.

Якщо $\boldsymbol{E_p^D > 1}$, то попит на даний товар називається еластичним або відносно еластичним за цих умов при зниженні ціни – темп зростання попиту вище темпу зниження ціни, а при зростанні ціни – темп зниження попиту вище темпу росту ціни.

Якщо $\boldsymbol{E_p^D} = \infty$, то попит на даний товар називається абсолютно еластичним, тобто при зниженні ціни – обсяг покупок необмежено зростає, а при зростанні ціни – обсяг покупок падає майже до нуля.

Еластичність попиту за доходом

$$\boldsymbol{E_I^D = \left(\frac{dq}{q}\right) \div \left(\frac{dI}{I}\right) = \frac{dq}{dI}\frac{I}{q} = \frac{q'(p)\cdot\Delta I}{I'\cdot\Delta I}\frac{I}{q} = q'(I)\cdot\frac{I}{q}}$$

характеризує відносну зміну (у відсотках) величини попиту на будь-яке благо при зміні доходу споживача цього блага на один відсоток.

Позитивна еластичність попиту за доходом характеризує якісні (суперіорні) товари, негативна – неякісні (інферіорні) товари.

Так, високий позитивний коефіцієнт еластичності попиту по доходу у галузі вказує, що її внесок в економічне зростання більше, ніж частка в структурі економіки, і вона має шанси на розширення і процвітання в майбутньому. Навпаки, якщо коефіцієнт еластичності попиту на продукцію галузі має невелике позитивне чи негативне значення, то її може очікувати застій і перспектива скорочення виробництва.

Цінова еластичність ресурсів

$$E_p(R) = \left(\frac{dR}{R}\right) / \left(\frac{dp}{p}\right) = \frac{dR}{dp}\frac{p}{R} = \frac{R'(p) * \Delta p}{p' * \Delta p}\frac{p}{R} = R'(p) * \frac{p}{R},$$

характеризує відносну зміну (у відсотках) величини попиту на який-небудь ресурс (наприклад, працю) при зміні ціни цього ресурсу (відповідно, заробітної плати) на один відсоток.

Проаналізувавши економічний зміст похідної як швидкість зміни деякого економічного процесу з плином часу або щодо іншого досліджуваного фактора неважко помітити, що багато законів теорії виробництва та споживання, попиту і пропозиції виявляються прямими наслідками математичних теорем. Для прикладу розглянемо економічну інтерпретацію ***теореми Ферма.***

Нехай q - випуск продукції (у натуральних одиницях); $TR\ (q)$ - виручка від продажу; $TC\ \ (q)$ - витрати виробництва, пов’язані з випуском q одиниць продукції. Тоді прибуток $\pi(q) = TR(q) - TC(q)$.

Припустимо, що виконуються наступні умови:

1) Функції $TR(q)$ *та* $TC(q)$ визначені на півінтервалі $[0, +\infty)$ і диференційовані при $q > 0$.

2) Максимум прибутку досягається в деякій точці $q^* \neq 0$.

У випадку, коли максимум прибутку позитивний $\pi(q^*) > 0$, умова $q^* \neq 0$ природним чином виконується, оскільки $\pi(0) \leq 0$ (немає випуску – немає виручки, немає виручки – немає прибутку).

Отже, умови 1), 2) виконані. Тоді функція $\pi(q) = TR(q) - TC(q)$ диференційована і має на інтервалі (0;+∞) максимум в точці $q^* \neq 0$. По теоремі Ферма, $\pi(q^*)=0$. Так як $\pi'(q) = TR'(q) - TC'(q)$, то в точці $q = q^*$ отримуємо рівність $TR'(q^{*)} = TC'(q^{*)}$ *або* $MR = MC$.

В економічній теорії ця рівність ілюструє один з базових законів теорії виробництва, згідно з яким фірма, що максимізує свій прибуток, встановлює обсяг виробництва таким чином, щоб гранична виручка дорівнювала граничним витратам.

У випадку, коли обсяг виробництва q не впливає на ціну продукції p, маємо $TR(q) = p \cdot q$, $TR'(q) = p$. Рівність $TR'(q^{*}) = TC'(q^{*})$ приймає вигляд $p = TC'(q^{*})$.

Розглянемо приклади використання похідної при вирішенні завдань з економічної теорії.

Задача 1. *Функція попиту має вигляд* $q\,D = 100 - 20p$, *постійні витрати TFC (total fixed costs) складають 50 грошових одиниць, а змінні витрати TVC (total variable costs) на виробництво одиниці продукції - 2 грошові одиниці. Знайти об'єм випуску, що максимізує прибуток монополіста.*

Розв'язання:

Прибуток є виручка мінус витрати: $\Pi(q) = TR(q) - TC(q)$, де $TR = p \cdot q$; $TC = TFC + TVC$.

Знайдемо ціну одиниці продукції:

$20p = 100 - q \Rightarrow p = 5 - \frac{q}{20}$.

Тоді $\Pi(q) = \left(5 - \frac{q}{20}\right) \cdot q - (50 + 2q) = \frac{1}{20}(-q^2 + 60q - 1000) \rightarrow max$

Знайдемо похідну: $\Pi'(q) = -\frac{q}{10} + 3$.

Прирівняємо похідну до *нуля:* $-\frac{q}{10} + 3 = 0 \Rightarrow q = 30$.

При переході через точку $q = 30$ функція $\Pi(q)$ змінює свій знак з плюса на мінус, отже, ця точка є точкою максимуму, і в ній функція прибутку досягає свого максимального значення. Таким чином, обсяг випуску, що максимізує прибуток, дорівнює 30 одиницям продукції.

Задача 2. *Знайти оптимальний обсяг виробництва фірми, функція прибутку якої задана таким чином:* $\Pi(q) = TR(q) - TC(q) = q^2 - 8q + 10$.

Розв'язання:

Для знаходження обсягу виробництва фірми, обчислимо похідну від функції прибутку:$\Pi'(q) = TR'(q) - TC'(q) = 2q - 8$. Прирівняємо похідну до нуля і знайдемо точку екстремуму: :$\Pi'(q) = 2q - 8 = 0 \rightarrow q_{extr} = 4$.

Для того, щоб з'ясувати чи є обсяг випуску, рівний чотирьом одиницям продукції, оптимальним для фірми, треба проаналізувати характер зміни знака похідної при переході через точку екстремуму:

- при $q < q_{extr} = 4 \rightarrow \Pi'(q) < 0$ і прибуток зменшується.

- при $q > q_{extr} = 4 \rightarrow \Pi'(q) > 0$ і прибуток зростає.

Як бачимо, при переході через точку екстремуму похідна змінює свій знак з мінуса на плюс. Отже, в точці екстремуму $q_{extr} = 4$ прибуток приймає мінімальне значення, і таким чином, цей обсяг виробництва не є оптимальним для фірми.

Очевидно, що фірма не може виробляти за аналізований період більше 8 одиниць продукції, а відтак *П (q = 8) = П (q = 0) = 10,* тому оптимальним рішенням для фірми буде взагалі нічого не виробляти, а отримувати дохід від здачі в оренду приміщень і / або обладнання. Якщо ж фірма здатна виробляти за аналізований період більше 8 одиниць продукції, то оптимальним рішенням для фірми буде випуск на межі своїх виробничих можливостей.

Задача 3. *Нехай* $TC(q) = \frac{1}{2}q^2$ *– витрати фірми-монополіста,* $QD(p) = 40 - 2p$ *– функція попиту. Знайти оптимальний для даної монополії обсяг виробництва і відповідну ціну одиниці продукції.*

Розв'язання:

Виразимо залежність ціни від кількості виробленої продукції: $p = \frac{40-q}{2} \rightarrow p = 20 - \frac{1}{2}q$.

Тоді прибуток $\pi(q)$ становить: $\pi(q) = \left(20 - \frac{1}{2}q\right)q - \frac{1}{2}q^2 = 20q - \frac{1}{2}q^2 - \frac{1}{2}q^2 = 20q - q^2$.

У точці q_0 максимуму прибутку виконується рівність $\pi'(q_0) = 20 - 2q_0 = 0$ Звідси оптимальний для монополіста обсяг виробництва дорівнює $q_0 = 10$. Відповідно ціна буде: $p_0 = p(q_0) = 20 - \frac{1}{2}q_0 = 20 - \frac{1}{2} \cdot 10 = 15$.

При цьому граничні витрати $MC(q_0) = TC'(q_0) = 10$.

Таким чином, ціна, найбільш вигідна для даної монополії, в півтора рази вище її граничних витрат.

Задача 4. *Обсяг продукції U цеху протягом робочого дня представлено функцією* $U(t) = -t^3 - 5t^2 + 75t + 425$, *де t - час (год) . Знайти продуктивність праці через 2 години після початку роботи*.

Розв'язання:

За період часу від $t_0 = 2$ до $(t_0 + \Delta t)$ кількість виробленої продукції зміниться від $u_0 = u(t_0)$ до значення $u_0 + \Delta u = u(t_0 + \Delta t)$. Середня продуктивність праці за цей період часу складе $\Delta u / \Delta t$. Отже, продуктивність праці в момент t_0 можна визначити, як граничне значення середньої продуктивності праці за період часу від t 0 до (t 0 + Δt) при Δt → 0, тобто

$$ПТ = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta t} = u'(t).$$

$U'(t) = -3t^2 - 10t + 75\text{t}) \rightarrow \text{U}'(t_0) = -3 \cdot 2^2 - 10 \cdot 2 + 75 = 43$

Отже, продуктивність праці в момент часу через 2 години після початку роботи складе 43 одиниці продукції на годину.

Задача 5. *Нехай функція пропозиції на товар, який випускає деяка фірма, змодельована залежністю* $s(q) = -q_0 e^{-kp^2}$, *де* q_0 *і* k *– відомі величини. Визначити, за якої ціни p пропозиція буде еластичною.*

Розв'язання:

Обчислимо еластичність пропозиції:

$E_p(s) = \frac{P}{s} \cdot s' = \frac{2kpq_0 e^{-kp^2}}{q_0 e^{-kp^2}} \cdot p = 2kp^2.$

Для того, щоб пропозиція була еластичною, необхідно, щоб виконувалась нерівність $2kp^2 > 1$. Отже, $p > \frac{1}{\sqrt{2k}}$.

Як бачимо, похідна знаходить широке застосування в економічній теорії. Багато що, в тому числі базові закони теорії виробництва та споживання, попиту і пропозиції виявляються прямими наслідками математичних теорем (наприклад, економічна інтерпретація теореми Ферма, опуклості функції тощо).

Знаходження похідної дозволяє вирішувати численні завдання з економічної теорії. За допомогою похідної можна значно розширити коло розглянутих задач.

Тестові завдання до модуля «Диференціальне числення»

№ з/п	УМОВА:	ВАРІАНТИ ВІДПОВІДЕЙ:
1.	*Знайти похідну функції* $f(x)=\frac{3}{x}$.	1) 3lnx; 2) $\ln\frac{3}{x}$; 3) $-\frac{3}{x^2}$; 4) $\frac{3}{x^2}$.
2.	*Знайти похідну функції* $f(x)=2\sqrt{x}$.	1) $\frac{1}{2\sqrt{x}}$; 2) $-\frac{1}{2\sqrt{x}}$; 3) $\frac{1}{\sqrt{x}}$; 4) $-\frac{1}{\sqrt{x}}$.
3.	*Знайти похідну функції* $f(x)=3x-\ln x$.	1) $3-\frac{1}{x}$; 2) $3+\frac{1}{x}$; 3) $3x-\frac{1}{x}$; 4) $3-e^x$.
4.	*Знайти похідну функції* $f(x)=\arcsin x + \arccos x$.	1) $\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}$; 2) $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$; 3) $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$; 4) 0.
5.	*Знайти похідну функції* $f(x)=e^x+tgx$.	1) $e^x-\frac{1}{\cos^2 x}$; 2) $e^x+\frac{1}{\cos^2 x}$; 3) $e^x+\frac{1}{\sin^2 x}$; 4) $e^x-\frac{1}{\sin^2 x}$.

6.	*Знайти похідну функції* $f(x)=e^x \cdot x$.	1) e^x+1; 2) $e^x \cdot x+e^x$; 3) e^x-1; 4) $e^x \cdot x-e^x$.
7.	*Знайти похідну функції* $f(x)=\sin x \cdot \cos x$.	1) $\sin^2 x-\cos^2 x$; 3) $-\sin^2 x-\cos^2 x$; 2) $\cos^2 x-\sin^2 x$; 4) $\cos^2 x+\sin^2 x$.
8.	*Знайти похідну функції* $f(x)=x \cdot tgx$.	1) $x \cdot tgx+\frac{1}{\cos^2 x}$; 3) $tgx+\frac{x}{\cos^2 x}$; 2) $tgx-\frac{x}{\cos^2 x}$; 4) $tgx+\frac{1}{\cos^2 x}$.
9.	*Знайти похідну функції* $f(x)=\frac{\cos x}{x}$.	1) $\frac{x \cdot \sin x-\cos x}{x^2}$; 3) $\frac{-x \cdot \sin x+\cos x}{x^2}$; 2) $\frac{x \cdot \sin x+\cos x}{x^2}$; 4) $\frac{-x \cdot \sin x-\cos x}{x^2}$.
10.	*Знайти похідну функції* $f(x)=\frac{\ell nx}{x}$.	1) $\frac{1+\ell nx}{x^2}$; 2) $\frac{x+\ell nx}{x^2}$; 3) $\frac{1-\ell nx}{x^2}$; 4) $\frac{1-x \cdot \ell nx}{x^2}$.
11.	*Знайти похідну функції* $f(x)=\frac{e^x}{x}$.	1) $\frac{e^x x-e^x}{x^2}$; 2) $\frac{e^x x+e^x}{x^2}$; 3) $\frac{e^x-1}{x^2}$; 4) $\frac{e^x+1}{x^2}$.
12.	*Знайти похідну функції* $f(x)=(x^2-2)^3$.	1) $3(x^2-2)^2$; 3) $6x(x^2-2)^2$; 2) $3x(x^2-2)^2$; 4) $6x(x^2-2)$.
13.	*Знайти похідну функції* $f(x)=\cos^2 x$	1) $2\cos x \cdot \sin x$; 3) $2\cos x$; 2) $-2\cos x \cdot \sin x$; 4) $-\cos^2 x \cdot \sin x$.
14.	*Знайти похідну функції* $f(x)=e^{\sin x}$	1) $\cos x \cdot e^{\sin x}$; 3) $e^{\sin x}$; 2) $-\cos x \cdot e^{\sin x}$; 4) $\sin x \cdot e^{\sin x-1}$.
15.	*Знайти похідну функції* $f(x)=\ln(x^2+1)$	1) $\frac{1}{x^2+1}$; 2) $\frac{x}{x^2+1}$; 3) $\frac{1}{x^2}$; 4) $\frac{2x}{x^2+1}$.
16.	*Область визначення функції* $y=\sqrt{x^2-1}$	1) $x \neq \pm 1$; 3) $x \in R$; 2) $x \geq 1$ и $x \leq -1$; 4) $-1 \leq x \leq 1$.
17.	*Функція* $y=x^4-4x$	1) спадає при $x<1$, зростає при $x>1$; 2) зростає при $x<1$, спадає при $x>1$; 3) скрізь спадає; 4) скрізь зростає.
18.	*Функція* $y=e^{2x}$	1) зростає при $x>0$; 2) спадає при $x>0$; 3) скрізь спадає; 4) скрізь зростає.
19.	*Функція* $y=\sqrt{x+1}$	1) спадає при $x<-1$, зростає при $x>-1$; 2) зростає при $x<-1$, спадає при $x>-1$;

		3) зростає при x>-1; 4) спадає при x>-1.
20.	*Функція* $f(x)=x^4-x^2-7$ *є*	1) парною; 2) непарною; 3) загального вигляду; 4) періодичною.
21.	*Функція* $f(x)=x^3+\sin x$ *є*	1) парною; 2) непарною; 3) загального вигляду; 4) періодичною.
22.	*Для функції* $y=\frac{x^2}{2}-x$ *точкою тіп є точка з координатами*	1) (1,-1/2); 3) (1,1); 2) (0,0); 4) (0,1).
23.	*Для функції* $y=\frac{1}{2x^2+3}$ *точкою тіп є точка з координатами*	1) (0,0); 3) (-1,1/5); 2) (1,1/5); 4) (0,1/3).
24.	*Для функції* $y=x^3-6x^2+16$ *точкою перегибу є точка з координатами*	1) (0,2); 3) (2,16); 2) (0,3); 4) (2,0).
25.	*Для функції* $y=5(x-1)^3$ *точкою перегибу є точка з координатами*	1) (1,5); 3) (1,0); 2) (5,1); 4) (0,1).
26.	*Функція* $y=2x^3+3$	1) опукла при x<0, випукла при x>0; 2) випукла при x<0, опукла при x>0; 3) завжди опукла; 4) завжди випукла.
27.	*Для функції* $y=\ln(x^2+1)$ *точкою тіп є точка з координатами*	1) (0,1); 3) (0,e); 2) (1,0); 4) (0,0).
28.	*Горизонтальною асимптотою графіку функції* $y=\frac{4x^2}{2x^2+1}$ *є*	1) пряма y=1; 3) пряма y=0; 2) пряма y=1/2; 4) пряма y=2.
29.	*Горизонтальною асимптотою графіку функції* $y=\frac{3x^2-2}{1-x^2}$ *є*	1) пряма y=3; 3) пряма y= –3; 2) пряма y=1; 4) пряма y= –2.
30.	*Вертикальною асимптотою графіку функції* $y=\frac{e^x}{x+1}$ *є*	1) пряма x= 0; 3) пряма x= –1; 2) пряма x=1; 4) пряма y= –1.

Модуль 5. ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ

Тема 11. Визначений та невизначений інтеграл, методи їх обчислень

Теоретичні відомості до теми

1. Означення невизначеного інтеграла, його властивості
2. Таблиця інтегрування елементарних функцій
3. Методи знаходження невизначених інтегралів
4. Задача, що приводить до поняття визначеного інтеграла
5. Означення визначеного інтеграла, його властивості
6. Методи обчислення визначених інтегралів

1. Означення невизначеного інтеграла, його властивості

Озн. *Функція F(x) називається **первісною** для функції y=f(x) на деякому інтервалі [a,b], якщо* $F'(x) = f(x)$

Наприклад, якщо $f(x)=3x^2$, то $F(x)=x^3$, бо $F'(x) = 3x^2$, також $F(x)=x^3+2$, бо $F'(x)=3x^2$ і взагалі $F(x)=x^3+C$, C є R. Це є загальний вигляд первісної для $f(x,)=3x^2$

Теорема 5.1. *(про загальний вигляд усіх первісних). Якщо F(x) - первісна для f(x), то множина всіх первісних для функції f(x) має вигляд F(x)+C, де C є R.*

Озн. *Множина всіх первісних F(x)+C для функції f(x) називається **невизначеним інтегралом** і позначається:*

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

де f(x)-підінтегральна функція, f(x)dx - підінтегральний вираз.

Озн. *Операція знаходження невизначеного інтегралу від деякої функції називається **інтегруванням** цієї функції.*

Властивості невизначеного інтеграла.

$(\int f(x)dx)' = f(x);$ – похідна невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральній функції.

1. $d(\int f(x)dx) = f(x)dx;$ - диференціал невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральному виразу.

2. $\int cf(x)dx = c\int f(x)dx, \forall c \in R$ - сталий множник підінтегральної функції можна винести за знак інтеграла.

3. Якщо $\int f(x)dx = F(x) + C,$ то $\int f(kx+b)dx = \frac{1}{k}F(kx+b) + c.$

4. $\int (f(x) \pm \varphi(x))dx = \int f(x)dx \pm \int \varphi(x)dx$ - інтеграл від суми дорівнює сумі інтегралів.

2. Таблиця інтегрування елементарних функцій

На основі означення, властивостей невизначених інтегралів та таблиці похідних основних елементарних функцій створено ***таблицю невизначених інтегралів***, якщо $u = \varphi(x)$ – довільна диференційовна функція змінної x .

1. $\int u^n du = \dfrac{u^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1)$.
2. $\int \dfrac{du}{u} = \ln|u| + C$.
3. $\int a^u du = \dfrac{a^u}{\ln a} + C$.
4. $\int e^u du = e^u + C$.
5. $\int \sin u \; du = -\cos u + C$.
6. $\int \cos u \; du = \sin u + C$.
7. $\int \dfrac{du}{\cos^2 u} = \mathrm{tg} u + C$.
8. $\int \dfrac{du}{\sin^2 u} = -\mathrm{ctg} u + C$.
9. $\int \dfrac{du}{a^2 + u^2} = \dfrac{1}{a} \mathrm{arctg} \dfrac{u}{a} + C = -\dfrac{1}{a} \mathrm{arcctg} \dfrac{u}{a} + C \quad (a \neq 0)$.
10. $\int \dfrac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin \dfrac{u}{a} + C = -\arccos \dfrac{u}{a} + C \quad (a \neq 0)$.
11. $\int \dfrac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right| + C$.
12. $\int \dfrac{du}{u^2 - a^2} = \dfrac{1}{2a} \ln\left|\dfrac{u - a}{u + a}\right| + C$.
13. $\int \dfrac{du}{\cos u} = \ln\left|\mathrm{tg}\left(\dfrac{u}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right)\right| + C = \ln\left|\dfrac{1}{\cos u} + \mathrm{tg} u\right| + C$.
14. $\int \dfrac{du}{\sin u} = \ln\left|\mathrm{tg} \dfrac{u}{2}\right| + C = \ln\left|\dfrac{1}{\sin u} - \mathrm{ctg} u\right| + C$.
15. $\int \dfrac{u\, du}{u^2 \pm a^2} = \dfrac{1}{2} \ln\left|u^2 \pm a^2\right| + C$

3. Методи знаходження невизначених інтегралів

Знаходження невизначених інтегралів способом зведення їх до табличних за допомогою перетворення підінтегрального виразу та застосуванням властивостей називається способом безпосереднього інтегрування.

3.1. Спосіб підстановки (заміни змінної).

Суть цього способу: замінюють новою змінною таку частину підінтегральної функції, при диференціюванні якої отримуємо частину що залишилась від підінтегрального виразу (не враховуючи сталого множника, на який завжди можна помножити і розділити підінтегральний вираз.)

3.2. Спосіб інтегрування частинами.

При інтегруванні функції які містять добутки, логарифми і обернені тригонометричні функції буває корисно використовувати спосіб інтегрування частинами.

$$\int u dv = uv - \int v du \qquad (*)$$

За допомогою формули (1) інтегрування знаходження інтеграла $\int u dv$ зводиться до знаходження інтеграла $\int v du$

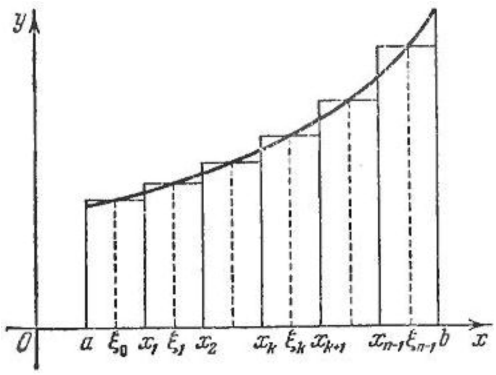
При практичному застосуванні формули (*) даний підінтегральний вираз представляють у вигляді добутку двох співмножників, які позначаються u і dv. Множник u намагаються вибрати так, щоб u' була простіша v.

4. Задача, що приводить до поняття визначеного інтеграла

Озн. Криволінійною трапецією *називається плоска фігура, що обмежена лініями:* $y = f(x) \geq 0$, *y=0, x=a, x=b.*

Задача*. Обчислити площу криволінійної трапеції S.*

Розв'язання:



Поділимо [a; b] на n відрізків однакової довжини точками x_i, $i = \overline{(0;n)}$, так що $x_0 = a < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$ і припустимо, що $\Delta x_i = \frac{b-a}{n} = x_i - x_{i-1}$. Вибираємо точки ε_i так: $x_{i-1} \leq \varepsilon_i \leq x_i$. Побудуємо прямокутники з основою $\Delta x_i = \frac{b-a}{n} = x_i - x_{i-1}$ і висотою $f(\varepsilon_i)$. Площа такого прямокутника $\Delta S_i = f(\varepsilon_i) \cdot \Delta x_i$, а сума площ усіх таких прямокутників $S_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta S_i = \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i) \cdot \Delta x_i$. Площа ступінчатої фігури $\boldsymbol{S_n}$ буде тим менше відрізнятися від площі криволінійної трапеції $\boldsymbol{S}$, чим менша довжина Δx_i, тобто чим більше n. Тому S_n=S, якщо $n \to \infty$. Позначимо $max\Delta x_i = \delta$, тобто $S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{\delta\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i) \cdot \Delta x_i$.

Озн. *Суму типу* $\sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i) \cdot \Delta x_i$ *називають* ***інтегральною сумою****.*

5. Означення визначеного інтеграла, його властивості

Озн. *Якщо існує скінчена границя інтегральних сум* S_n *при* $\delta \to 0$*, яка не залежить ні від способу розбиття* $[a; b]$ *на частини* Δx_i*, ні від вибору точок* ε_i*,* *то ця границя називається* ***визначеним інтегралом від функції*** *f(x) на проміжку [a; b] і позначається:* $\lim_{\delta\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\cdot\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx$, *де* a, b *- нижня та верхня межі інтегрування.*

Теорема 5.2. *Якщо функція f(x) неперервна на відрізку [a;b], то вона інтегрована на цьому відрізку.*

Геометричний зміст визначеного інтеграла. Якщо f(x)≥0, x є[a,b] , то $\int_a^b f(x)dx$ чисельно дорівнює площі відповідної криволінійної трапеції, яка обмежена графіком функції f(x), і прямими x=a, x=b, y=0. Тобто S=$\int_a^b f(x)dx$.

Властивості визначеного інтеграла.

1. Визначений інтеграл від алгебраїчної суми функцій дорівнює алгебраїчній сумі визначених інтегралів від функцій, що додаються:

$$\int_a^b \big(f_1(x) \pm f_2(x)\big)dx = \int_a^b f_1(x)dx \pm \int_a^b f_2(x)dx\,.$$

2. Сталий множник можна винести за знак визначеного інтеграла:

$$\int_a^b c\cdot f(x)dx = c\int_a^b f(x)dx, \text{ c=const.}$$

3. При перестановці меж інтегрування визначений інтеграл змінює знак на протилежний:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

4. Визначений інтеграл з однаковими межами інтегрування дорівнює 0:

$$\int_a^a f(x)dx = 0.$$

5. Відрізок інтегрування можна розбити на частини:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

6. Якщо $f(x)$, $g(x)$ – інтегровані та $f(x) \geq g(x)$ для $x \in [a;b]$,, то

$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx\,.$$

7. Якщо $f(x) \geq 0$і інтегрована для $x \in [a;b]$,, b>a , то:

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0.$$

8. Якщо $f(x)$ – інтегрована та $m \leq f(x) \leq M$ для $x \in [a;b]$, b>a, то

$$m(b-a) \leq \int_b^a f(x)dx \leq M(b-a).$$

9. Якщо $f(x)$= C, C = const, то $\int_b^a Cdx = C(b-a)$.

Теорема 5.3. (про середнє)*. Якщо функція f(x) – неперервна для* $x \in [a;b]$*,* $b>a$*, то знайдеться така точка* $x = c \in [a;b]$*, що* $\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$

6. *Методи обчислення визначених інтегралів*

Для обчислення визначеного інтеграла від функції в тому випадку, коли можна знайти відповідний невизначений інтеграл, застосовується ***формула Ньютона-Лейбніца***:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a)$$

тобто визначений інтеграл дорівнює різниці значень первісної при верхній і нижній межі інтегрування.

6.1. Метод заміни змінної.

При обчисленні визначеного інтеграла методом заміни змінної (способом підстановки) визначений інтеграл перетворюється за допомогою підстановки $x = \varphi(t)$ у визначений інтеграл відносно нової змінної t. При цьому старі мела інтегрування змінюють відповідно новими межами інтегрування $\alpha\ і\ \beta$, які знаходяться з вихідної підстановки.

Теорема 5.4*. Нехай потрібно обчислити інтеграл* $\int_a^b f(x)dx$ *, де* $f(x)$ *- неперервна на проміжку* $[a;b]$*функція. Візьмемо* $x = \varphi(t)$ *і вважатимемо, що функція* $\varphi(t)$ *задовольняє умови:*

1) $\varphi(t)$*визначена і неперервна в деякому проміжку* $[a;b]$*;*
2) $\varphi(t) \in [a;b]$*, коли* $t \in [\alpha;\beta]$*;*
3) $\varphi(\alpha)= a$*,* $\varphi(\beta)= b$*;*
4) *існує неперервна похідна* $\varphi(t)$*,* $t \in [\alpha;\beta]$*, то*

$$\int_a^b f(x)dx = \begin{vmatrix} x = \varphi(t) & x & a & b \\ dx = \varphi'(t)dt & t & \alpha & \beta \end{vmatrix} = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

Зауваження. *При заміні змінної інтегрування у визначеному інтегралі змінюються межі інтегрування, і тому немає потреби вертатись до початкової змінної.*

6.2. Інтегрування частинами у визначеному інтегралі.

Теорема 5.5. *Якщо функції* $u(x)$ *та* $v(x)$ *мають неперервні похідні для ,* $x \in [\alpha;\beta]$*, то* $\int_a^b udv = (uv)|_a^b - \int_a^b vdu$

Зразки розв'язування задач

Приклад 1. *Обчисліть інтеграл* $\int_0^{\pi} sinxdx$.

Розв'язання:

Для функції f(x) = sin x однією з первісних є F(x) = -cos x. Маємо за формулою Ньютона-Лейбніца

$\int_0^{\pi} sinxdx = -cosx|_0^{\pi} = -cos\pi - (-cos0) = -(-1) + 1 = 2.$

Приклад 2. *Обчисліть інтеграл* $\int_{-1}^{2}(2x + 3x^2 + 1)dx$.

Розв'язання:

Спочатку знайдемо первісну для функції f(x) = 2x $+3x^2$ + 1. Використовуючи правила обчислення первісних та таблицю первісних, маємо:

$$F(x) = 2 \cdot \frac{x^2}{2} + 3 \cdot \frac{x^3}{3} + x = x^2 + x^3 + x.$$

Матимемо

$\int_{-1}^{1}(2x + 3x^2 + 1)dx = (x^2 + x^3 + x)|_{-1}^{1} = (1^2 + 1^3 + 1) - ((-1)^2 + (-1)^3 + (-1)) = 3 - (-1) = 4$

Приклад 3. $\int \sqrt[3]{1-3x}dx$.

Розв'язання:

Ведемо заміну $t = 1 - 3x$, звідки $dt = -3dx$. Для введення заміни множимо і ділимо підінтегральну функцію на (-3), маємо: $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{1-3x}} = \int (1-3x)^{-\frac{1}{3}} \cdot dx = \begin{vmatrix} t = 1-3x \\ dt = -3dx \end{vmatrix} = -\frac{1}{3}\int (1-3x)^{-\frac{1}{3}}[-3dx] = -\frac{1}{3}\int t^{-\frac{1}{3}}dt$. У відповідності до табличного інтегралу $\int u^{\alpha}du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ \ \alpha \neq -1$ та повертаючись до початкової заміни $t = 1 - 3x$, отримуємо: $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{1-3x}} = -\frac{1}{3}\frac{t^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1} + C = -\frac{1}{2}t^{\frac{2}{3}} + C = \frac{\sqrt[3]{(1-3x)^2}}{-2} + C$

Приклад 4. *Застосовуючи формулу інтегрування за частинами, знайти наступні інтеграли:* 1) $\int (x^2 + 2x)e^x dx$; 2) $\int x\ln x dx$; 3) $\int e^{2x}\cos 3x dx$.

Розв'язання:

1) $\int (x^2 + 2x)e^x dx$.

Даний інтеграл відноситься до першого типу інтегралів, що інтегруються за частинами, тому введемо відповідні заміни: $u = x^2 + 2x \to du = (2x + 2)dx$ та $dv = e^x dx \to v = \int e^x dx = e^x$. Так як многочлен під знаком інтегралу 2-го порядку, то формулу інтегрування за частинами будемо використовувати два рази:

$$\int(x^2+2x)e^x dx=\begin{vmatrix} u=x^2+2x \\ du=(2x+2)dx \\ dv=e^x dx \\ v=e^x \end{vmatrix}=uv-\int vdu=(x^2+2x)\cdot e^x-\int(2x+2)e^x dx=\begin{vmatrix} u=2x+2 \\ du=2dx \\ dv=e^x dx \\ v=e^x \end{vmatrix}=$$

$$=(x^2+2x)\cdot e^x-[uv-\int vdu]=(x^2+2x)\cdot e^x-[2(x+1)e^x-\int 2e^x dx]=(x^2+2x)\cdot e^x-2(x+1)e^x+2e^x+C=$$

$$=(x^2+2x-2x-2+2)\cdot e^x+C=x^2e^x+C$$

2) Даний інтеграл $\int x\ln xdx$ відноситься до другого типу інтегралів, що інтегруються за частинами, тому маємо:

$$\int x\ln xdx=\begin{vmatrix} u=\ln x \\ du=\frac{dx}{x} \\ dv=xdx \\ v=\int xdx=\frac{x^2}{2} \end{vmatrix}=uv-\int vdu=\frac{x^2}{2}\ln x-\int\frac{x^2}{2}\cdot\frac{dx}{x}=\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{1}{2}\int xdx=\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{x^2}{4}+C$$

3) Зведемо обчислення інтегралу $\int e^{2x}\cos 3xdx$ до розв'язання рівняння відносно даного інтегралу:

$$\int e^{2x}\cos 3xdx=\begin{vmatrix} u=e^{2x} \\ du=2e^{2x} \\ dv=\cos 3xdx \\ v=\int\cos 3xdx=\frac{1}{3}\sin 3x \end{vmatrix}=uv-\int vdu=\frac{1}{3}e^{2x}\sin 3x-\frac{2}{3}\int e^{2x}\sin 3x=$$

$$=\begin{vmatrix} u=e^{2x} \\ du=2e^{2x}dx \\ dv=\sin 3xdx \\ v=\int\sin 3xdx=-\frac{1}{3}\cos 3x \end{vmatrix}=\frac{1}{3}e^{2x}\sin 3x-\frac{2}{3}[uv-\int vdu]=\frac{1}{3}e^{2x}\sin 3x-\frac{2}{3}\left[-\frac{1}{3}e^{2x}\cos 3x+\frac{2}{3}\int e^{2x}\cos 3x\right]=$$

$$=\frac{1}{3}e^{2x}\sin 3x+\frac{2}{9}e^{2x}\cos 3x-\frac{4}{9}\int e^{2x}\cos 3x,$$

$$\int e^{2x}\cos 3xdx=\frac{1}{3}e^{2x}\left(\sin 3x+\frac{2}{3}\cos 3x\right)-\frac{4}{9}\int e^{2x}\cos 3x,$$

$$\frac{13}{9}\int e^{2x}\cos 3xdx=\frac{1}{3}e^{2x}\left(\sin 3x+\frac{2}{3}\cos 3x\right),$$

$$\int e^{2x}\cos 3xdx=\frac{3}{13}e^{2x}\left(\sin 3x+\frac{2}{3}\cos 3x\right)$$

Завдання для практичних занять та самостійного виконання

Завдання № 441-480. Знайти або обчислити інтеграли:

441. *а)* $\int_0^2\frac{1}{(9-2x)^2}dx.$ *б)* $\int\sin^5 x\cos xdx.$ *в)* $\int\ln xdx.$

442. а) $\int_0^2 \frac{x^2}{\left(x^3+1\right)^4}dx.$ б) $\int \frac{1}{(3x-2)^7}dx.$ в) $\int (x^2+3x)\sin 2x dx.$

443. а) $\int_{-1}^1 \frac{1}{(2x+5)^4}dx.$ б) $\int x\sqrt{5x^2+2}dx.$ в) $\int \arcsin x dx.$

444. а) $\int_0^1 \frac{x^4}{x^5+1}dx.$ б) $\int \frac{x^2}{\sqrt{2-3x^3}}dx.$ в) $\int (x^2-3)\sin(3x-5)dx.$

445. а) $\int_1^4 (x^2-e^x+\frac{1}{x})dx.$ б) $\int (x+2)\cos(x^2+4x+1)dx.$ в) $\int e^x \sin x dx.$

446. а) $\int_0^1 \arcsin x dx.$ б) $\int \frac{1}{x\sqrt{1-4\ln x}}dx.$ в) $\int (3x^2-x+2)e^{2x-3}dx.$

447. а) $\int_1^e \frac{1+\ln x}{x}dx.$ б) $\int \frac{\sqrt[3]{arctgx}}{1+x^2}dx.$ в) $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$

448. а) $\int_0^7 \sqrt[3]{x+1}dx.$ б) $\int \frac{e^{tgx}}{\cos^2 x}dx.$ в) $\int arctgx dx.$

449. а) $\int_0^1 \frac{x}{1+x^4}dx.$ б) $\int \sqrt[4]{1-3\sin x}\cos x dx.$ в) $\int e^{2x}\sin x dx.$

450. а) $\int_0^8 \left(\sqrt{2x}+\sqrt[3]{x}\right)dx.$ б) $\int \frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}dx.$ в) $\int (x-2)\ln(x^2-4)dx.$

451. а) $\int_0^1 \left(e^x+4\right)^2 e^x dx.$ б) $\int \sqrt[4]{4+e^x}\cdot e^x dx.$ в) $\int (2x^2-1)\cos 2x dx.$

452. а) $\int_2^3 (x^3-4^x+1)dx.$ б) $\int \frac{e^{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}dx.$ в) $\int e^{x-2}\sin(4x+1)dx.$

453. а) $\int_0^1 e^{2x+1}dx.$ б) $\int \frac{e^x}{\sqrt{6-e^{2x}}}dx.$ в) $\int \sqrt{x}\ln x dx.$

454. а) $\int_0^1 \frac{1}{x^2+9}dx.$ б) $\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx.$ в) $\int x^2 \sin x dx.$

455. а) $\int_0^{\pi/6} \frac{\sin^2 x}{\cos x}dx.$ б) $\int xe^{-x^2}dx.$ в) $\int x\ln^2 x dx.$

456. а) $\int_1^2 \left(\frac{1}{x^4}+x^2\right)dx.$ б) $\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{3-\cos^4 x}}dx.$ в) $\int x\cdot \arcsin\frac{1}{x}dx.$

457. а) $\int_1^4 (x^2+x-e^x+\frac{1}{x})dx.$ б) $\int \left(2\sin\frac{x}{2}+3\right)^2 \cos\frac{x}{2}dx.$ в) $\int (x^2+2x+3)\cos x dx.$

458. а) $\int_0^{\pi/3} \sin^2 x\cos x dx.$ б) $\int \frac{e^{2x}}{e^{4x}-5}dx.$ в) $\int x\ln\left(x^2+1\right)dx.$

459. а) $\int_0^{\pi/2} x\cos x dx.$ б) $\int \frac{x}{x^2-1}dx.$ в) $\int x\cdot arctgx dx.$

460. а) $\int_0^1 \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$ б) $\int \frac{e^{2x}}{e^{4x}+5}dx.$ в) $\int (x+1)e^x dx.$

461. а) $\int_0^2 x^2\sqrt{x^3+1}dx.$ б) $\int \cos^3 x\sin x dx.$ в) $\int arctg 2x dx.$

462. а) $\int_2^3 (1+2x+3x^2)dx.$ б) $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx.$ в) $\int xe^{2x}dx.$

463. а) $\int_0^{\pi/3} \cos^2 x\sin x dx.$ б) $\int \frac{1}{(8-3x)^2}dx.$ в) $\int x\sin 2x dx.$

464. а) $\int_1^2 \frac{e^x}{e^x-1}dx.$ б) $\int \cos\left(\frac{5x+7}{2}\right)dx.$ в) $\int (3x+2)\ln x dx.$

465. а) $\int_0^1 xe^{-x}dx.$ б) $\int \frac{1}{\sqrt{1-3x}}dx.$ в) $\int (x^2-1)\cos(2x+3)dx.$

466. а) $\int_0^{\pi/6} \sin^4 x\cos x dx.$ б) $\int \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}dx.$ в) $\int (x^2+2x+3)e^{5x}dx.$

467. а) $\int_2^9 \sqrt[3]{x-1}dx.$ б) $\int \frac{\sin 3x}{\cos^4 3x}dx.$ в) $\int e^{2x}\cos(2x+7)dx.$

468. а) $\int_0^1 xe^{3x}dx.$ б) $\int \frac{tg^3 x}{\cos^2 x}dx.$ в) $\int \frac{\ln x}{x^3}dx.$

469. а) $\int_2^5 (2x+1)^3 dx.$ б) $\int \frac{e^x}{\sqrt[4]{1-e^{2x}}}dx.$ в) $\int e^{3x}\sin 2x dx.$

470. а) $\int_{-2}^{-1} \frac{1}{(11+5x)^3}dx.$ б) $\int \frac{\sin(\ln x)}{x}dx.$ в) $\int x^3\cos 2x dx.$

471. а) $\int_2^{13} \frac{1}{\sqrt[5]{(3-x)^4}}dx.$ б) $\int \frac{(2\ln x+3)^3}{x}dx.$ в) $\int e^x\cos x dx.$

472. а) $\int_0^{\pi/6} \cos^5 x\sin x dx.$ б) $\int \frac{\cos^2 x}{(1+2\sin^3 x)^5}dx.$ в) $\int x^3\sin x dx.$

473. а) $\int_1^e \ln x dx.$ б) $\int x\sqrt[3]{4x^2+7}dx.$ в) $\int (7x^2+2x-4)e^{2x}dx.$

474. а) $\int_0^{\pi/8} \cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)dx.$ б) $\int \frac{e^x}{(e^x+1)^3}dx.$ в) $\int x^3 e^{x-1}dx.$

475. а) $\int_0^{e-1} \ln(x+1)dx.$ б) $\int \frac{ctgx}{\sin^2 x}dx.$ в) $\int (2x^2-3)\sin x dx.$

476. *а)* $\int_2^3 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}dx.$ *б)* $\int \frac{x}{1+x^2}dx.$ *в)* $\int x^3 \sin 2x dx.$

477. *а)* $\int_1^e \frac{1}{x\ln x}dx.$ *б)* $\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt{1-\cos^4 x}}dx.$ *в)* $\int e^{3x}\cos 5x dx.$

478. *а)* $\int_{\pi/6}^{\pi/3}(2\sin x + 3\cos x)dx.$ *б)* $\int \frac{x^2}{(3+5x^3)^4}dx.$ *в)* $\int (2x+1)e^{3x-4}dx.$

479. *а)* $\int_0^{\pi/6}\cos^5 x \sin x dx.$ *б)* $\int \frac{(e^x+1)^2}{e^x}dx.$ *в)* $\int (4x^2-3x+1)e^x dx.$

480. *а)* $\int_0^{\pi/3} e^{3\cos x}\sin x dx.$ *б)* $\int \frac{2x-3}{x^2-3x+7}dx$ *в)* $\int x^2\ln(1+x)dx.$

Застосування інтегрального числення в економіці

У моделюванні економічних процесів роль інтеграла розглядається не так часто, але, не зважаючи на це, використання інтегрального числення для моделювання та дослідження процесів, що відбуваються в економіці, надає багатий математичний апарат. Зупинимося на деяких прикладах використання інтегрального числення в економіці. Для початку розглянемо поняття споживчого надлишку в ринковій економіці та відповідні економічні поняття і позначення.

Попит на даний товар – це сформована залежність між обсягом купівлі та ціною товару на певний момент часу. Графічно попит на окремий товар зображується у вигляді спадної кривої, що відображає взаємозв’язок між кількістю товару Q і ціною P одиниці цього товару, яку споживачі готові купити при кожній заданій ціні. Спадання кривої попиту обумовлено тим, що чим дорожче товар, тим меншу його кількість покупці готові купити, і навпаки.

Розглянемо ще одне важливе економічне поняття для моделюванні економічних процесів як ***ринкова рівновага***. Стан рівноваги характеризують: кількість і ціна, при яких обсяг попиту збігається з величиною пропозиції, а графічно це зображується точкою перетину кривих попиту і пропозиції (рис. 5.1).

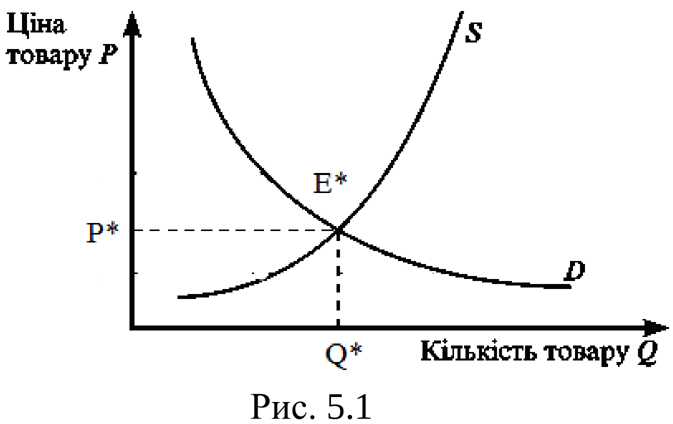


Рис. 5.1

Для зручності будемо розглядати зворотні функції попиту і пропозиції, які характеризують залежність $P = f(Q)$, а не залежність $Q = f(P)$.

Тепер для визначення споживчого надлишку розглянемо можливості інтегрального аналізу. Для цього на графіку зобразимо зворотну функцію попиту $P = f(Q)$. Припустимо, що в точці $E^*(Q^*, P^*)$ встановилася ринкова рівновага (на графіку відсутня крива пропозиції S для зручності подальшого аналізу) (рис. 5.2).

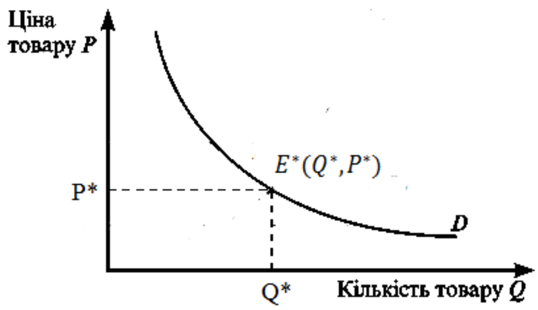


Рис. 5.2.

Якщо покупець по рівноважної ціною P*, купляє товар в кількості Q*, то, відповідно, що загальні витрати на покупку такого товару складуть P*×Q*, і це на графіку відповідає площі заштрихованої фігури A (рис. 5.3.).

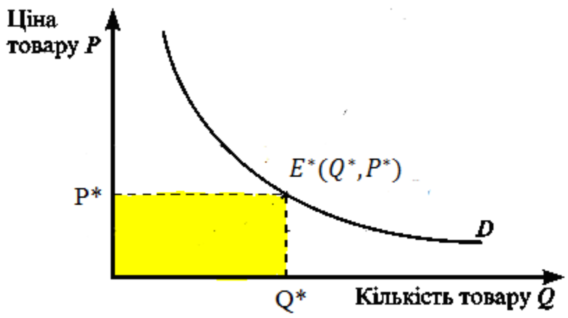


Рис. 5.3.

Проте, якщо припустити, що товар у кількості Q * продається не відразу, а невеликими партіями Q_i надходить на ринок, то це припущення з урахуванням безперервністю функції попиту і пропозиції стає основним при виведенні формули для розрахунку споживчого надлишку. Відзначимо, що дане припущення цілком виправдано, тому що така схема реалізації товару досить поширена на практиці і випливає з мети продавця підтримувати ціну на товар якомога вище.

Розрахунок споживчого надлишку – це різниця між максимальною сумою грошей, яку споживач готовий і згоден заплатити за певну кількість товару, і сумою грошей, яку фактично він заплатив за товар.

Тоді отримаємо, що спочатку пропонується товар в кількості $Q_1 = \Delta Q$ (рис. 11.6), який продається за ціною $P_1 = f\ (Q_1)$. Так як за припущенням величина ΔQ мала, то можна вважати, що вся перша партія товару реалізується за ціною P_1, при цьому витрати покупця на покупку такої кількості товару складуть $P_1\Delta Q$, що відповідає площі заштрихованого прямокутника S_1 (рис. 5.4).

Таким чином, розрахувати споживчий надлишок можна за такою формулою: $CS = \int_0^{Q^*} f(Q)dQ - P \cdot Q^*$ (*).

Розглянемо задачу на визначення надлишку споживача.

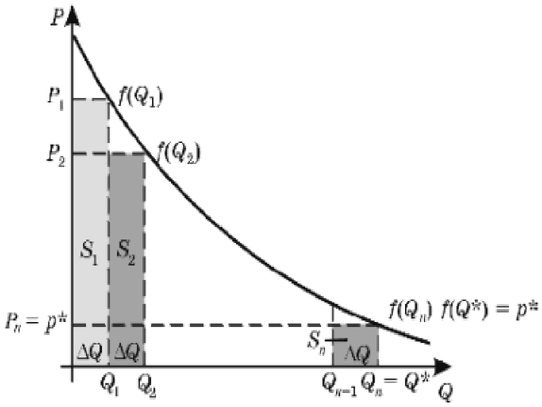


Рис. 5.4

Задача 1. *Нехай відомо, що на деякий товар попит задається функцією $p = 4 - q^2$, де q – кількість товару (в од.), p – ціна одиниці товару (у грн.), а при $p^* = q^* = 1$ досягається рівновага на ринку даного товару.*

Необхідно обчислити споживчий надлишок.

Розв'язання:

$$\mathrm{CS} = \int_0^{q^*} f(q)dq - p^* \cdot q^* = \int_0^1 (4 - q^2)dq - 1 \cdot 1 = \left(4q - \frac{q^3}{3}\right)\Big|_0^1 - 1 = 4 - \frac{1}{3} - 1 = 2\frac{2}{3}$$ (грн.).

Розглянемо оцінку наслідків введення потоварного податку.

Введення потоварного податку призводить до бажаного результату лише в тоді, коли існує єдино можлива технологія виробництва продукту, така що обсяг випуску і розмір зовнішнього ефекту однозначно пов'язані один з одним. Якщо ж при одному і тому ж обсязі випуску величина зовнішнього ефекту варіює (скажімо, фірма може будувати чи не будувати очисні споруди), то податок на продукт не спонукає фірму вибирати технологію, ефективну з суспільної точки зору. Це завдання можуть вирішити податки (штрафи), величина яких безпосередньо пов'язана з величиною зовнішнього ефекту.

У результаті введення потоварного податку скорочується обсяг як виробництва, так і споживання. Крім того, покупці платять більш високу ціну, а продавці отримують нижчу в порівнянні з початковою рівноважною ціною. Це означає, що податок погіршує економічне становище і покупців, і продавців.

Задача 2*. Дана крива попиту $p = 10 - \frac{1}{2}q$. Якими будуть грошові витрати споживача при введенні податку на даний товар з одиниці продажів в розмірі 1 грн, коли відомо, що при ціні $p^* = 2$ грн. спостерігалася початкова ринкова рівновага на цьому ринку.*

Розв'язання:

Проілюструємо два основних способи вирішення даного завдання засобами інтегрального числення.

Перший спосіб. Щоб визначити споживчі втрати при збільшенні рівноважної ціни товару від 2 до 3 грн., подивимося, як змінюється при цьому обсяг продажів. Якщо $P_1=2$, то $Q_1=16$, тоді при $P_2=3$, то $Q_2=14$. Отже,

$$\Delta CS = \int_0^{16}(10-0{,}5q)dq - 2\cdot 16 - \int_0^{14}(10-0{,}5q)dq - 3\cdot 14 = \int_{14}^{16}(10-0{,}5q)dq - 2\cdot 16 + 3\cdot 14 = \left(10q - \frac{q^2}{4}\right)\Big|_{14}^{16} + 10 = (160-64)-(140-49)+10 = 15$$ *(грн.).*

Другий спосіб. Оскільки функція попиту в даному випадку лінійна, то криву попиту легко зобразити графічно (рис. 5.5.).

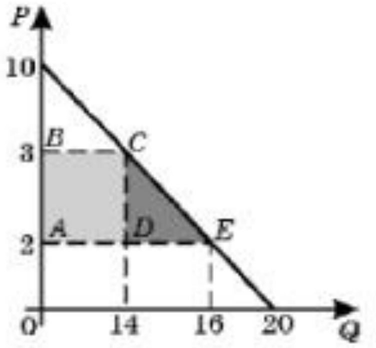


Рис. 5.5

Отримаємо, що $\Delta CS = S_{ABCD} + S_{CDE} = 14\cdot 1 + \frac{1}{2}\cdot 2\cdot 1 = 14 + 1 = 15$ *(грн.).*

Другий спосіб розв'язання легше першого і не потребує особливих знань математичного аналізу. Проте загальний метод знаходження зміни споживчого надлишку за допомогою визначеного інтеграла пояснює сутність функції попиту і пропозиції.

Тестові завдання до модуля «Інтегральне числення»

№ з/п	УМОВА:	ВАРІАНТИ ВІДПОВІДЕЙ:	
1.	*Знайти невизначений інтеграл* $\int \cos(5x+1)dx$	1) sin(5x+1)+C; 2) $\frac{1}{5}$ sin(5x+1)+C;	3) –5 sin(5x+1)+C; 4) $-\frac{1}{5}$ sin(5x+1)+C.
2.	*Знайти невизначений інтеграл* $\int \sin(2x-1)dx$	1) $-\frac{1}{2}$ cos(2x–1)+C; 2) 2 cos(2x–1)+C;	3) –2 cos(2x–1)+C; 4) cos(2x–1)+C.
3.	*Знайти невизначений інтеграл* $\int \frac{dx}{2x+1}$	1) $\frac{1}{2}\ell n\|2x+1\|+C$; 2) $2\ell n\|2x+1\|+C$;	3) $\ell n\|2x+1\|+C$; 4) $-\frac{1}{(2x+1)^2}+C$.
4.	*Знайти невизначений інтеграл* $\int \frac{dx}{(5x-7)^2}$	1) $-\frac{1}{5x-7}+C$; 2) $\frac{5}{(5x-7)^3}+C$;	3) $\frac{3}{(5x-7)^3}+C$; 4) $-\frac{1}{5(5x-7)}+C$.
5.	*Знайти невизначений*	1) arcsinx+C;	3) $\ell n\left\|x+\sqrt{4-x^2}\right\|+C$;

	інтеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$	2) $\arcsin\frac{x}{2}$+C; 4) $\frac{1}{2}\arcsin x$+C.
6.	*Знайти невизначений інтеграл* $\int \frac{dx}{x^2-16}$	1) $\frac{1}{2}\ell n\left\|\frac{x-4}{x+4}\right\|+C$; 3) $\frac{1}{4}$ arctgx+C; 2) $\frac{1}{8}\ell n\left\|\frac{x-4}{x+4}\right\|+C$; 4) $\frac{1}{4}\mathrm{arctg}\frac{x}{2}+C$.
7.	*Знайти невизначений інтеграл* $\int \frac{dx}{(x+5)^2+4}$	1) $\ell n\left\|(x+5)^2+4\right\|+C$; 2) $\frac{1}{2}$ arctgx+C; 3) $\frac{1}{2}\mathrm{arctg}\frac{x+5}{2}+C$; 4) $\ell n\left\|(x+5)+\sqrt{(x+5)^2+4}\right\|+C$.
8.	*Знайти невизначений інтеграл* $\int \mathrm{ctg}(x+1)dx$	1) ℓn | sin(x+1) | +C; 2) ℓn | cos(x+1) | +C; 3) –ℓn | cos(x+1) | +C; 4) –ℓn | sin(x+1) | +C.
9.	*Знайти невизначений інтеграл* $\int \mathrm{tg}(2x-1)dx$	1) $\frac{1}{2}\ell n\left\|\cos(2x-1)\right\|+C$; 3) $2\ell n\left\|\cos(2x-1)\right\|+C$; 2) $\ell n\left\|\cos(2x-1)\right\|+C$; 4) $-\frac{1}{2}\ell n\left\|\cos(2x-1)\right\|+C$.
10.	*Знайти невизначений інтеграл* $\int e^{2x+1}dx$	1) $\frac{1}{2}e^{2x+1}$+C; 3) e^{2x+1}+C; 2) $(2x+1)e^{2x+1}$+C; 4) $2e^{2x+1}$+C.
11.	*Знайти невизначений інтеграл* $\int (5x+7)^3dx$	1) $\frac{1}{20}(5x+7)^4$+C; 3) $\frac{(5x+7)^4}{4}+C$; 2) $\frac{1}{5}(5x+7)^4$+C; 4) $\frac{(5x+7)^2}{2}+C$.
12.	*Знайти невизначений інтеграл* $\int (8x^2-4)dx$	1) 16x+C; 3) $\frac{8}{3}x^3$–4+C; 2) $8x^3$–4x+C; 4) $\frac{8}{3}x^3$–4x+C.
13.	*Знайти невизначений інтеграл* $\int xe^{x^2}dx$	1) $\frac{1}{2}e^{x^2}+C$; 3) $xe^{x^2}+C$; 2) $2xe^{x^2}+C$; 4) $e^{x^2}+C$.
14.	*Знайти невизначений інтеграл* $\int (3x-8x^2+4)dx$	1) 3-16x+C; 3) $\frac{3}{2}x^2-\frac{8}{3}x^3+4x+C$; 2) 3-16x+4+C; 4) $\frac{3}{2}x^2-16x+4x+C$.
15.	*Знайти невизначений інтеграл* $\int \frac{x^2}{1+x^3}dx$	1) $3\ell n\left\|1+x^3\right\|+C$; 3) $2\ell n\left\|1+x^3\right\|+C$; 2) $\frac{1}{3}\ell n\left\|1+x^3\right\|+C$; 4) $\ell n\left\|1+x^3\right\|+C$.
16.	*Обчислити визначений*	1) e^2; 2) e^7+C; 3) e^7; 4) e^7–1.

	інтеграл $\int_{-5}^{2} e^{x+5}dx$	
17.	*Обчислити визначений інтеграл* $\int_{0}^{\pi} \sin x dx$	1) 2; 2) -2; 3) 2 + C; 4) -2 + C.
18.	*Обчислити визначений інтеграл* $\int_{0}^{\pi/2} \cos x dx$	1) -1; 2) –1+C; 3) 1; 4) 0.
19.	*Обчислити визначений інтеграл* $\int_{0}^{1} \frac{1}{x+1}dx$	1) ℓn2+ℓn1; 2) ℓn2–ℓn1+C; 3) ℓn1; 4) ℓn2.
20.	*Обчислити визначений інтеграл* $\int_{0}^{\pi/4} \sin 4x dx$	1) $-\frac{\sqrt{2}}{8}$; 2) $-\frac{1}{4}$; 3) $\frac{1}{2}$; 4) $\frac{\sqrt{2}}{8}+\frac{1}{4}$.
21.	*Обчислити визначений інтеграл* $\int_{0}^{\pi/4} \frac{dx}{1+x^2}$	1) $\frac{\pi}{3}$; 2) $\frac{\pi}{2}$; 3) 0; 4) $\frac{\pi}{6}$.
22.	*Обчислити визначений інтеграл* $\int_{0}^{2} \frac{dx}{2x+1}$	1) ℓn5; 2) 2ℓn5; 3) $\frac{1}{2}$ℓn5; 4) $\ell n\frac{1}{5}$.
23.	*Обчислити визначений інтеграл* $\int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$	1) $\frac{\pi}{4}$; 2) $\frac{\pi}{2}$; 3) 0; 4) $\frac{\pi}{2}$+C.
24.	*Обчислити визначений інтеграл* $\int_{0}^{2} (3x^2-1)dx$	1) 6; 2) 5; 3) 4; 4) 7.
25.	*Обчислити визначений інтеграл* $\int_{0}^{1} \frac{x^3}{1+x^4}dx$	1) $\frac{1}{4}$ℓn2; 2) 4ℓn2; 3) ℓn2; 4) –ℓn2.
26.	*Обчислити визначений інтеграл* $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} tg\, x\, dx$	1) $\ell n\frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $\ell n\sqrt{2}$; 3) -1; 4) $\frac{1}{2}\ell n2$.
27.	*Обчислити визначений інтеграл* $\int_{-\infty}^{1} e^{x}dx$	1) $e-\frac{1}{e}$; 2) $-\frac{1}{e}$; 3) e; 4) $e+\frac{1}{e}$.
28.	*Обчислити визначений*	1) - ∞; 2) 1; 3) 0; 4) ∞.

	інтеграл $\int_0^{\infty} e^x dx$	
29.	*Обчислити визначений інтеграл* $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^3} =$	1) 0; 2) ∞; 3) - ∞; 4) не існує.
30.	*Обчислити визначений інтеграл* $\int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{x^2} =$	1) 0; 2) 1; 3) ∞; 4) не існує.

Модуль 6. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

Тема 12. Поняття та види диференціальних рівнянь, методи знаходження їх розв'язків

Теоретичні відомості до теми

1. Диференціальні рівняння, основні поняття і означення. Задача Коші
2. Диференціальні рівняння першого порядку та методи їх розв'язання
3. Диференціальні рівняння другого порядку методи їх розв'язання

1. Диференціальні рівняння, основні поняття і означення. Задача Коші

Озн. *Рівняння виду* $F(x; y(x); y^{/}(x);...; y^{(n)}(x)) = 0$*, в якому невідомою є функція, яка міститься в рівняння разом зі своїми похідними називається* ***диференціальним рівнянням***.

Озн. Порядок диференціального рівняння *– найвищий порядок похідної функції, що входить в це рівняння.*

Озн. Розв'язком диференціального рівняння *називається всяка функція* $y = \varphi(x)$*, яка при підстановці в рівняння замість невідомої функції перетворює його у правильну рівність.*

Озн. Загальним розв'язком диференціального рівняння n-го порядку *називається функція* $y = \varphi(x; C_1; C_2;...; C_n)$*, що залежить від x та n довільних незалежних постійних* $C_1, C_2, \dots, C_n$ *і перетворює дане рівняння в тотожність.*

Озн. *Розв'язок, отриманий у вигляді неявної функції* $F(x; C_1^0; C_2^0;...; C_n^0) = 0$ *називається* ***загальним інтегралом***.

Озн. Частковим розв'язком диференціального рівняння *називають розв'язок, який отримується із загального, коли постійним надати певні значення, тобто* $y=\varphi(x;C_1^0;C_2^0;...;C_n^0)$.

Озн. *Розв'язок, що задовольняє початкову умову* $y_0=\varphi(x_0)$, *отриманий у вигляді неявної функції* $F(x;y;C_1^0;C_2^0;...;C_n^0)=0$ *називається* ***частинним інтегралом***.

Озн. *Задача знаходження часткового розв'язку диференціального рівняння, який задовольняє початкову умову* $y_0=\varphi(x_0)$ *називається* ***задачею Коші***.

Озн. *Частковий розв'язок диференціального рівняння, що не витікає із загального його розв'язку, називається* ***особливим***.

2. Диференціальні рівняння першого порядку та методи їх розв'язання

Озн. *Рівняння виду* $F(x;y(x);y^{/}(x))=0$ *називається* ***диференціальним рівнянням 1-го порядку***.

Для розв'язання диференціального рівняння 1-го порядку необхідно спочатку визначити його тип, щоб вибрати правильний метод розв'язання. Розглянемо методи розв'язання трьох основних типів рівнянь 1-го порядку.

Озн. *Рівняння виду* $y'=P(x)\cdot Q(y)$ *або* $M_1(x)N_1(y)dx+M_2(x)N_2(y)dy=0$ *називається* ***диференціальним рівнянням з відокремлювальними змінними***.

Метод розв'язання:

1. Відокремлюємо змінні.

$y'=P(x)\cdot Q(y)\Leftrightarrow \frac{dy}{dx}=P(x)\cdot Q(y)\Leftrightarrow \frac{1}{Q(y)}dy=P(x)dx$ *або для* $M_1(x)N_1(y)dx+M_2(x)N_2(y)dy=0$ *ділимо обидві частини рівняння на* $N_1(y)\cdot M_2(x)$, *маємо:* $\frac{M_1(x)N_1(y)dx}{N_1(y)M_2(x)}+\frac{M_2(x)N_2(y)dy}{N_1(y)M_2(x)}=0\Leftrightarrow \frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx+\frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy=0$

2. Інтегруємо обидві частини отриманих рівнянь.

$\int\frac{1}{Q(y)}dy=\int P(x)dx$ *або* $\int\frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx+\int\frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy=C$.

Озн. *Рівняння виду* $y'=f\left(\frac{y}{x}\right)$ *називається* ***однорідним диференціальним рівнянням 1-го порядку.***

Метод розв'язання:

1. Вводимо заміну - нову функцію $z(x)=\dfrac{x}{y}$*, звідки* $y=z(x)\cdot x,\;\; y'=z'(x)\cdot x+z(x)$.

Озн. *Рівняння виду* $y'+p(x)y=g(x)$ *називається* ***лінійним диференціальним рівнянням 1-го порядку.***

Метод роз'язання:

1. Вводимо заміну – нову функцію у вигляді добутку двох функцій $y=uv$*, звідки* $y'=u'v+uv'$ *і тоді рівняння приймає вид* $u'v+uv'+p(x)uv=g(x)$ *або* $u'v+u(v'+p(x)v)=g(x)$.

2. Функцію $v=v(x)$ *шукають при умові* $v'+p(x)v=0$*, тоді функцію* u *знаходимо з рівняння* $u'v(x)=g(x)$*. Якщо* $u=u(x,C)$ *– його загальний розв'язок, то його загальний розв'язок даного лінійного рівняння має вигляд* $y=u(x,C)v(x)$.

3. Диференціальні рівняння першого порядку та методи їх розв'язання

Озн. *Рівняння виду* $y''+py'+qy=0$*, де* $p,q\in R$ *називається* ***однорідним диференціальним рівнянням 2-го порядку зі сталими коефіцієнтами.***

Метод розв'язання:

1. Складаємо відповідне характеристичне рівняння $k^2+pk+q=0$ *та шукаємо його корені* $k_1,k_2=-\dfrac{p}{2}\pm\sqrt{\dfrac{p^2}{4}-q}.$

2. Розв'язки даного диференціального рівняння записуються в залежності від k_1,k_2*.:*

якщо $k_1\neq k_2$ *- дійсні і різні корені, то* $y=C_1e^{k_1x}+C_2e^{k_2x}$*, де* C_1,C_2 *- довільні сталі;*

якщо $k_1=k_2$ *- дійсні і рівні корені, то* $y=e^{k_1x}(C_1+xC_2)$*, де* C_1,C_2 *- довільні сталі;*

якщо $k_1,k_2=\alpha\pm\beta i$ *- комплексні корені, де* $\alpha=-\dfrac{p}{2}$ *і* $\beta=\sqrt{q-\dfrac{p^2}{4}}$*, то* $y=C_1e^{\alpha x}\cos\beta x+C_2e^{\alpha x}\sin\beta x$*,* C_1,C_2 *- довільні сталі.*

Озн. *Рівняння виду* $y''+py'+qy=f(x)$*, де* $p,q\in R$*, називається* ***неоднорідним лінійним диференціальним рівнянням 2-го порядку.***

Метод розв'язання:

1. Знаходимо загальний розв'язок $y=C_1y_1+C_2y_2$ *відповідного однорідного диференціального рівняння* $y''+py'+qy=0$.

2. Обчислюємо ***вронскіан*** $W=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}\neq 0$.

3. Знаходимо сталі $C_1(x)$ *та* $C_2(x)$*, як функції незалежних змінних:*

$$C_1(x) = -\int \frac{y_2 \cdot f(x)}{W} dx + C_1;$$

$$C_2(x) = \int \frac{y_1 \cdot f(x)}{W} dx + C_2.$$

4. Підставляємо значення $C_1(x)$ та $C_2(x)$ в формулу $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$ *і отримуємо шуканий розв'язок:* $y = \left(-\int \frac{y_2 \cdot f(x)}{W} dx + C_1\right) y_1 + \left(\int \frac{y_1 \cdot f(x)}{W} dx + C_2\right) y_2.$

Зразки розв'язування задач

Приклад 1. *Розв'язати задачу Коші:* $y' - y\cos x = 2\cos x$, *y(0) = 3*

Розв'язання:

$y' - y\cos x = 2\cos x$ - рівняння з відокремлювальними змінними.

Відокремимо змінні:

$y' - y\cos x = 2\cos x \Rightarrow y' = 2\cos x + y\cos x \Rightarrow y' = \cos x \cdot (y+2)$. Запишемо y' як відношення диференціалів $\frac{dy}{dx}$, маємо $\frac{dy}{dx} = \cos x \cdot (y+2) \Rightarrow dy = \cos x (y+2) dx$. Для того, щоб відокремити змінні, поділимо обидві частини рівняння на $y+2$, покладаючи $y + 2 \neq 0$, маємо: $\frac{dy}{y+2} = \cos x dx$

Інтегруємо обидві частини рівняння: $\int \frac{dy}{y+2} = \int \cos x dx + C \Rightarrow \ln|y+2| = \sin x + C$

Позначимо $C = \ln|C_1|$ та пропотенціюємо рівність:

$\ln|y+2| = \sin x + \ln|C_1| \Rightarrow |y+2| = e^{\sin x + \ln|C_1|} = |C_1| e^{\sin x} \Rightarrow y + 2 = C_1 e^{\sin x} \Rightarrow y = C_1 e^{\sin x} - 2$.

Якщо $y + 2 = 0$, то $y = -2$ і $y' = (-2)' = 0$. Підставимо $y = -2$ у початкове рівняння, отримуємо $0 = 0 \Rightarrow y = -2$ - розв'язок диференціального рівняння, який можна отримати із рівності $y = C_1 e^{\sin x} - 2$, поклавши $C_1 = 0$.

Отже, загальний розв'язок рівняння має вигляд $y = C_1 e^{\sin x} - 2$, де C_1 – довільна стала.

Знайдемо розв'язок задачі Коші. Поклавши у (0) = 3 в загальний розв'язок даного диференціального рівняння знаходимо: $3 = C_1 e^{\sin 0} - 2 \Rightarrow C_1 = 5.$. Отже, $y = 5e^{\sin x} - 2$ частковий розв'язок для у (0) = 3.

Приклад 2. *Визначити тип та розв'язати наступні диференціальні рівняння:*

1) $\left(y^2-xy\right)dx+\left(x^2-2xy\right)dy=0$;

2) $x^2y'=x^2+(2x-1)y$;

3) $y''+3y'-4y=0$;

4) $y''-4y'+4y=0$;

5) $y''-8y'+25y=0$;

6) $y''+4y=tgx$.

Розв'язання:

1) $\left(y^2-xy\right)dx+\left(x^2-2xy\right)dy=0$.

Для того, щоб визначити тип даного рівняння, розділимо його обидві частини на $(x^2-2xy)dx$, маємо: $y'=\dfrac{xy-y^2}{x^2-2xy}$ $\Rightarrow y'=\dfrac{x^2\left(\frac{y}{x}-\left(\frac{y}{x}\right)^2\right)}{x^2\left(1-2\frac{y}{x}\right)}$ $\Rightarrow y'=\dfrac{\frac{y}{x}-\left(\frac{y}{x}\right)^2}{1-2\frac{y}{x}}$

Права частина рівняння залежить лише від відношення $\dfrac{y}{x}$, тому $\left(y^2-xy\right)dx+\left(x^2-2xy\right)dy=0$ – однорідне рівняння 1-го порядку.

Введемо заміну $z=\dfrac{y}{x}$, звідки $y'=z'x+z$, маємо: $z'x+z=\dfrac{z-z^2}{1-2z}$.

Відокремимо в отриманому рівнянні змінні: $z'x=\dfrac{z-z^2}{1-2z}-z$ $\Rightarrow \dfrac{dz}{dx}x=\dfrac{z^2}{1-2z}$.

Поклавши z ≠ 0, поділимо обидві частини рівняння на z2: маємо $\dfrac{1-2z}{z^2}dz=\dfrac{dx}{x}$.

Інтегруємо обидві частини отриманого рівняння: $\int\dfrac{1-2z}{z^2}dz=\int\dfrac{dx}{x}+C$, звідки, замінюючи $C=\ln|C_1|$, знаходимо $-\dfrac{1}{z}-2\ln|z|=\ln|x|+\ln|C_1|$ $\Rightarrow \dfrac{1}{z}+\ln\left|C_1xz^2\right|=0$.

Підставивши $z=\dfrac{y}{x}$ та спростивши, отримуємо $x+y\ln\left|C_1\dfrac{y^2}{x}\right|=0$ - загальний інтеграл.

Якщо z = 0, то $\dfrac{y}{x}=0$, звідки $y=0$ та $y'=0$. Поклавши y = 0 у початкове рівняння, отримуємо $0=0$. Отже, $y=0$ особливий розв'язок даного рівняння.

Отже, $x + y\ln\left|\frac{C_1 y^2}{x}\right| = 0, \quad y = 0$ - розв'язки однорідного диференціального рівняння 1-го порядку $\left(y^2 - xy\right)dx + \left(x^2 - 2xy\right)dy = 0$.

2) $x^2 y' = x^2 + (2x-1)y$.

Визначимо тип даного рівняння, для цього перепишемо його у вигляді $x^2 y' - (2x-1)y = x^2$ $\Rightarrow y' + \frac{1-2x}{x^2}y = 1$ – лінійне диференціальне рівняння 1-го порядку. Будемо шукати його розв'язок у вигляді $y = uv$, звідки $y' = u'v + uv'$.

Підставляємо в рівняння вказані заміни, маємо: $u'v + uv' + \frac{1-2x}{x^2}uv = 1$

$\Rightarrow u'v + u\left(v' + \frac{1-2x}{x^2}v\right) = 1$ $\Rightarrow \begin{cases} v' + \frac{1-2x}{x^2}v = 0, \\ u'v + u = 1. \end{cases}$.

Для відшукання v в рівнянні $v' + \frac{1-2x}{x^2}v = 0$ ділимо змінні та інтегруємо отримане рівняння: $\frac{dv}{dx} = \frac{2x-1}{x^2}v$ $\Rightarrow \int\frac{dv}{v} = \int\frac{2x-1}{x^2}dx$ $\Rightarrow \ln|v| = \int\frac{2}{x}dx - \int\frac{1}{x^2}dx$

$\Rightarrow \ln|v| = 2\ln|x| + \frac{1}{x} + C$, поклавши С=0 та проекспонувавши обидві частини рівняння, маємо: $v = e^{2\ln|x| + \frac{1}{x}}$ або $v = x^2 e^{\frac{1}{x}}$.

Для функції u отримуємо рівняння: $u'x^2 e^{\frac{1}{x}} = 1$, звідки $du = \frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}dx$.

Інтегруємо обидві частини цієї рівності: $u = \int\frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}dx + C$ = $\int e^{-\frac{1}{x}}d\left(-\frac{1}{x}\right) + C$ = $e^{-\frac{1}{x}} + C$.

Враховуючи початкову заміну, отримуємо $y = uv$ = $\left(e^{-\frac{1}{x}} + C\right)x^2 e^{\frac{1}{x}}$ = $\left(1 + Ce^{\frac{1}{x}}\right)x^2$.

3) $y'' + 3y' - 4y = 0$ - однорідне диференціальне рівняння 2-го порядку із сталими коефіцієнтами.

$k^2 + 3k - 4 = 0$ - відповідне йому характеристичне рівняння з дійсними різними коренями $k_1 = 1, k_2 = -4$, тому загальний розв'язок даного рівняння має вид: $y = C_1 e^{x} + C_2 e^{-4x}$.

4) $y^{//}-4y^{/}+4y=0$ є також однорідним диференціальним рівнянням 2-го порядку із сталими коефіцієнтами і має відповідне характеристичне рівняння $k^2-4k+4=0$ з дійсними рівними коренями $k_1=k_2=2$, тому $y=(C_1+C_2x)e^{2x}$.

5) $y^{//}-8y^{/}+25y=0$ - однорідне диференціальне рівняння 2-го порядку із сталими коефіцієнтами, якому відповідає характеристичне рівняння $k^2+3k-4=0$. Корені даного рівняння є комплексними, так як $\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}=\sqrt{\frac{(-8)^2}{4}-25}=\sqrt{-9}$. $\alpha=-\frac{-8}{2}=4$ та $\beta=\sqrt{25-\frac{(-8)^2}{4}}=\sqrt{9}=3$, тому загальний розв'язок даного рівняння приймає вид: $y=C_1e^{4x}\cos 3x+C_2e^{4x}\sin 3x.$.

6) $y^{//}+4y=tgx$ - є неоднорідним лінійним диференціальним рівнянням 2-го порядку. Застосуємо до його розв'язання відповідний алгоритм.

Складаємо відповідне однорідне рівняння $y^{//}+4y=0$ з відповідним йому характеристичним рівнянням $k^2+4=0 \Rightarrow k_{1,2}=\pm 2i$, тобто $\alpha=0$, $\beta=2$.

Отримали розв'язок відповідного однорідного диференціального рівняння $y=C_1e^{0\cdot x}\cos 2x+C_2e^{0\cdot x}\sin 2x \Rightarrow y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x$, звідки $y_1=\cos 2x$, $y_2=\sin 2x$.

Враховуючи, що $y_1^{/}=(\cos 2x)^{/}=-2\sin 2x$ та $y_2^{/}=(\sin 2x)^{/}=2\cos 2x$ складаємо вронскіан $W=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1^{/} & y_2^{/} \end{vmatrix}$ = $\begin{vmatrix} \cos 2x & \sin 2x \\ -2\sin 2x & 2\cos 2x \end{vmatrix}$ = $2\cos^2 2x+2\sin^2 2x$ = $2(\cos^2 2x+\sin^2 2x)$ = 2, так як $\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$ - тригонометрична одиниця.

Знаходимо сталі C1(x) та C2(x), як функції незалежних змінних:

$$C_1(x)=-\int\frac{y_2\cdot f(x)}{W}dx+C_1 = -\int\frac{\sin 2x\cdot tgx}{2}dx+C_1 = -\int\frac{2\sin x\cos x\cdot\frac{\sin x}{\cos x}}{2}dx+C_1 =$$

$$-\int\sin^2 xdx+C_1 = -\int\frac{1-\cos 2x}{2}dx+C_1 = \frac{1}{2}\int(\cos 2x-1)dx+C_1 = \frac{1}{4}\sin 2x-\frac{x}{2}+C_1.$$

$$C_2(x)=\int\frac{y_1\cdot f(x)}{W}dx+C_2 = \int\frac{\cos 2x\cdot tgx}{2}dx+C_2 = \int\frac{(2\cos^2 x-1)tgx}{2}dx+C_2 =$$

$$=\frac{1}{2}\int(2\sin x\cos x-tgx)dx+C_2 = \frac{1}{2}\int\sin 2xdx-\frac{1}{2}\int tgxdx+C_2 = -\frac{1}{4}\cos 2x+\frac{1}{2}\ln(\cos x)+C_2.$$

При обчисленні інтегралів було використано наступні тригонометричні формули:

$tgx=\frac{\sin x}{\cos x}$; $\sin 2x=2\sin x\cos x$; $\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}$; $\cos 2x=2\cos^2 x-1$.

Шуканий розв'язок є $y=\left(\frac{1}{4}\sin 2x-\frac{x}{2}+C_1\right)\cos 2x+\left(\frac{1}{2}\ln(\cos x)-\frac{1}{4}\cos 2x+C_2\right)\sin 2x$.

Завдання для практичних занять та самостійного виконання

Завдання № 481-520. Знайти розв'язок задачі Коші.

481. $\left(x^2+1\right)y'+2xy^2=0$, y (0) = -1.

482. $\left(x^2+1\right)y'+4xy=3$, y (0) = 1.

483. $x\cdot y'+y=3x^2$, y(2) = 3.

484. $y\,dx-\mathrm{ctg}x\,dy=0$, $y\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

485. $(x+y)dx+(x-y)dy=0$, y(e) = 1.

486. $xy'=y(1+\ln\frac{y}{x})$, y(1) = $\frac{1}{\sqrt{e}}$.

487. (x - y)dy - ydx = 0, y(0) = 1.

488. $xdy=(x+y)dx$, y(-1) = 2.

489. $xy'-y=xtg\frac{y}{x}$, y(1)= $\frac{\pi}{2}$.

490. (x2 –3y2)dx + 2xydy = 0, y(2) = 1.

491. $xy'=y\ln\frac{y}{x}$, y(1) = 1.

492. $x^2y'=y^2-2x^2$, y(1)=0.

493. $x^2y'=y^2+xy$, y(1)= - 1.

494. $xdy-(5x+y)dx=0$, y(1) = 3.

495. $x(1+y^2)dx+(1+x^2)dy=0$, $y(0)=\frac{\pi}{4}$.

496. $xy'=y(\ln y-\ln x)$, $y(1)=e^2$.

501. $y''-3y'=e^{-x}$, $y(0)=-2,\ y'(0)=0$.

502. $y''-3y'+2y=x-1$, $y(0)=1,\ y'(0)=0$.

503. $y''-6y'+9y=5sin3x$, $y(0)=0,\ y'(0)=-1$.

504. $y''+2y'+10y=x^2$, $y(0)=-1,\ y'(0)=0$.

505. $y''-9y=-2cosx$, $y(0)=1,\ y'(0)=-1$.

506. $y''+4y=2e^{3x}$, $y(0)=3,\ y'(0)=0$.

507. $y''-4y'+5y=2x-3$, $y(0)=2,\ y'(0)=0$.

508. $y''-4y'+3y=e^{x}$, $y(0)=0,\ y'(0)=2$.

509. $y''-2y'=x+3$, $y(0)=1,\ y'(0)=0$.

510. $y''-2y'+2y=cosx$, $y(0)=0,\ y'(0)=0$.

511. $2x^2y'=y^2+x^2$, y (0) = 0.

512. $x^2(y^3+5)dx+(x^3+5)y^2dy=0$, y (0) = 1.

513. $y'+y=e^x$, y (0) = 1.

514. $y'=6x\cdot\sqrt[3]{y^2}$, y(1) = 8.

515. $\left(y+\sqrt{x^2+y^2}\right)dx-xdy=0$, $y\left(\frac{1}{2}\right)=0$.

516. $(2xy+3x)dy+(4x^2y^2-y^2)dx=0$,

497. $1+y'=e^x$, $y(0)=\ln 2$.

498. $(x+1)^3dy-2(y-2)^2dx=0$, y(0) = 3.

499. $xy'+y=(x+1)e^x$, $y(1)=e$.

500. $\cos x(y^3+2)dx+y^2\sin xdy=0$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right)=2$.

$y(1)=e^3$.

517. $y+\sqrt{x^2+y^2}-xy'=0$, y(1) = 0.

518. $x(y+1)dy+y(2x^2+1)dx=0$, y(1) = 1.

519. $\frac{y}{y'}=\ln y$, y(2) = 1.

520. $3x^2(y+1)dx+(x^3+1)dy=0$, y(0) = 1.

Завдання № 521-560. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння.

521. $y''+3y'-4y=e^{-x}$.

522. $(y+\sqrt{x^2+y^2})dx-xdy=0$.

523. $y''-3y'+2y=3x+2$.

524. $x(1+y^2)dx+(1+x^2)dy=0$.

525. $y''-3y'=9x^2-5x+2$

526. $y'=\frac{1+x^2}{1+y^2}$.

527. $(5x^6+3x^2)(y^2+1)dx+yx^3dy=0$.

528. $y''-6y'+9y=5sin2x$.

529. $xy'\cos\frac{y}{x}=y\cos\frac{y}{x}-x$.

530. $y''+2y'+10y=x^2-2x$.

531. $y'-2yctgx=\sin^3 x$.

532. $y''-6y'+9y=cos2x$.

533. $ydx+(2\sqrt{xy}-x)dy=0$.

534. $y'=\frac{-x-1}{2x-1}$.

535. $y''+4y=2e^{3x}$.

536. $(y^2+xy^2)y'+x^2-yx^2=0$.

537. $y''-4y'+3y=16e^x$.

538. $xy'+2y=x^2$.

541. $y'+\frac{y}{x+1}=3x-1$.

542. $(x^3-4x)(1+y)dx+x^2dy=0$.

543. $xy'-y\ln y=0$.

544. $xy'-y=e^xx^2$.

545. $y'-2ytgx=\sin x$.

546. $y'-\frac{e^x}{e^x+1}y=e^{-x}+1$.

547. $y'+ytgx=\sin 2x$.

548. $y'+\frac{1}{x}y=x^2$.

549. $xy'-3y+\frac{x^2}{2}=0$.

550. $4x^3(y^3+3y)dx+(y^2+1)(x^4-2)dy=0$.

551. $(x^2y-x^2)y'=xy^2+y^2$.

552. $y'=(2y+1)tgx$.

553. $y''-8y'+25y=2x+1$

554. $(xy-x)^2dy+y(1-x)dx=0$.

555. $y''-2y'+2y=4cosx$

556. $(x+1)y'+y=x+1$.

557. $(x^2y+2x^2)y'=xy^2-3y^2$.

558. $y''-4y'+5y=5x+3$

539. $y' + 2y \cdot ctgx = \frac{1}{\sin x}$.

540. $y'' - 9y = -2cosx.$

559. $(1+x^2)y' + 2xy = x^2$.

560. $y'' + 4y' - 12y = 8sin2x.$

Застосування диференціальних рівнянь в економіці

Диференційне рівняння досить широко застосовують у моделях економічної динаміки. У них відбивається не тільки залежність змінних від часу, але і їх взаємозв'язок у часі.

Розглянемо деякі (найпростіші) задачі макроекономічної динаміки.

Знаходження вираження для обсягу реалізованої продукції

Нехай y (t) – обсяг продукції деякої галузі, реалізованої до моменту часу t. Будемо вважати, що вся вироблена галуззю продукція реалізується за деякою фіксованою ціною ρ, тобто виконана умова насичуваності ринку. Тоді дохід до моменту часу t складе Y (t) = ρy (t). Позначимо через I (t) величину інвестицій, що спрямовуються на розширення виробництва. У моделі природного зростання вважають, що швидкість випуску продукції (акселерація) пропорційна величині інвестицій, тобто

$Y'(t) = l \cdot I(t)$ (6.1).

Зауважимо, що тут ми нехтуємо часом між закінченням виробництва продукції та її реалізацією, тобто вважаємо, що інвестиційний лаг дорівнює нулю.

Вважаючи, що величина інвестицій I(t) становить фіксовану частину доходу, отримаємо

$I(t) = m \cdot Y(t) = mpY(t)$ (6.2)

де коефіцієнт пропорційності m (так звана норма інвестицій) – постійна величина, 0<m<1.

Підставляючи останній вираз (6.2) для I (t) в (6.1) приходимо до рівняння $Y'(t) = ky$, де $k = m \cdot p \cdot l$.

Отримане рівняння – диференціальне рівняння з роздільними змінними. Розв’язуючи його, проходимо до функції

$Y(t) = Y_0 e^{kt}$, де $Y_0 = Y(t_0)$ (6.3).

Зауважимо, що рівняння (6.3) описує також зростання народонаселення (демографічний процес), динаміку зростання цін при постійній інфляції, процес радіоактивного розпаду і ін.

На практиці умова насичуваності ринку може бути прийнята тільки для досить вузького часового інтервалу. Загалом крива попиту, тобто залежність ціни ρ реалізованої продукції від її обсягу y є спадною функцією p = p (y) (зі збільшенням обсягу виробленої продукції її ціна спадає в результаті насичення ринку). Тому модель зростання в умовах конкурентного ринку набуває вигляду:

$Y'(t) = mlp(Y)Y$ (6.4)

Так як всі множники в правій частині рівняння (6.4) є додатними, то у"> 0, і це рівняння описує рівняння зростаючої функції у (t). При дослідженні функції у (t) на опуклість природно використовувати поняття еластичності функції. Дійсно, з (6.4) випливає, що $\mathrm{Y}''(t) = mlY'\left(\frac{dp}{dY}Y + p\right)$

Оскільки еластичність попиту (щодо ціни) визначається за формулою $E_p(Y) = \frac{p}{Y}\frac{dY}{dp}$, то для $\mathrm{Y}''(t)$' отримуємо: $\mathrm{Y}''(t) = mlY'p\left(\frac{1}{E_p(Y)}\right) + 1.$

При цьому умова $\mathrm{Y}''(t) = 0$ рівносильна рівності $E_p(Y) = -1.$

Таким чином, якщо попит еластичний, тобто $E_p(Y) = -1$ або $E_p(Y) < -1$, то $\mathrm{Y}''(t) > 0$ і функція $Y(t)$ опукла вниз; в разі, якщо попит не еластичний, тобто $\left|E_p(Y)\right| < 1$ або $-1 < E_p(Y) < 0$, то $\mathrm{Y}''(t) < 0$ і функція $Y(t)$ опукла вгору.

Задача 1. *Знайти рівняння для обсягу реалізованої продукції* $Y = Y(t)$, *якщо відомо, що крива попиту* $p(Y)$ *задана рівнянням* $p(Y) = 2 - Y$, *норма акселерації* $\frac{1}{l} = 2$, *норма інвестицій m = 0,5.*

Розв'язання:

Рівняння (4) в цьому випадку приймає вид

$Y'(t) = (2 - Y)Y$ або $\frac{dY}{(2-e)e} = dt.$

Виконуючи інтегрування по частинам, отримуємо $ln\left|\frac{Y-2}{Y}\right| = -2t = C_1$, або

$\frac{Y-2}{Y} = Ce^{-2t}$, де $\mathrm{C} = \pm \mathrm{eC}_1$ (6.5)

Враховуючи, що у (0) = 0,5, отримуємо, що C = -3. Виражаючи тепер у з (6.5), остаточно маємо $Y = \frac{2}{1+3e^{-2t}}$.

Графік цієї функції схематично зображено на рисунку 6.1. (У даному випадку еластичність попиту задається функцією $E_p(Y) = Y - \frac{2}{Y}$ і $E_p(Y) = \frac{p}{Y}\frac{dY}{dp} = Y - \frac{2}{Y}$, що визначає положення точки перегину на кривій, дає у = 1).

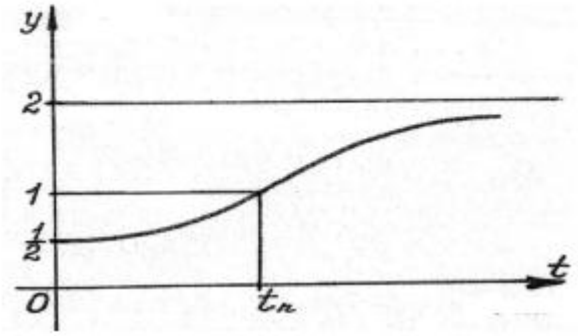


Рис. 6.1.

Крива, що зображена на рис.6.1, – це логістична крива. Такі криві, призначені для опису процесу рекламування інформації, динаміки, епідемій тощо.

Знаходження функції доходу

Дохід Y (t), отриманий до моменту t деякої галуззю, є сумою інвестицій I (t) і величини споживання C (t), тобто

Y (t) = I (t) + C (t) (6.6)

Аналогічно до вище викладеного, в моделі природного росту, будемо припускати, що швидкість збільшення доходу пропорційна величині інвестицій, тобто

$bY'(t) = I(t),$ (6.7)

Де b –коефіцієнт капіталомісткості приросту доходу, що рівносильно (6.1) при постійній ціні на продукцію P та $l = \frac{1}{pb}$.

Розглянемо поведінку функції доходу $Y(t)$ в залежності від функції $C(t)$.

Нехай $C(t)$ являє собою фіксовану частину одержтримуваного доходу:

$C(t) = (1 - m)Y(t),$

де m – норма інвестицій (задача 1). Тоді з (6.6) та (6.7) отримуємо $\left|\mathrm{E_p(Y)}\right| < 1$ або $-1 < \mathrm{E_p(Y)} < 0$, то $\mathrm{Y}''(\mathrm{t}) < 0$ і функція $Y(t)$ опукла вгору.

Задача 2. *Знаходження функції доходу* $Y = Y(t)$*, якщо відомо, що величина споживання задається функцією* $C(t) = 2t$*; коефіцієнт капіталомісткості приросту доходу* $b = \frac{1}{2}$,. $Y(0) = 2$.

Розв'язання:

Зі співвідношення (6.6) і (6.7) маємо рівняння

$$Y(t) = \frac{1}{2}Y'(t) + 2t$$

тобто функція доходу задовольняє лінійному неоднорідному рівняння першого порядку. Будемо шукати його розв'язки у вигляді $\mathrm{Y}(t) = u(t)v(t)$.

Тоді маємо:

$$u(t) = 2te^{-2t} + e^{-2t} + C, v(t) = e^{2t}$$

Значення постійної C знаходимо з початкових умов, оскільки $\mathrm{Y}(0) = u(0)v(0)$, то C = 1. Остаточно маємо:

$$Y(t) = 2t + e^{2t} + 1$$

Попит і пропозиція

Як відомо, попит і пропозиція – економічні категорії товарного виробництва, що виникають та функціонують на ринку, в сфері товарного обміну. При цьому попит – представлена на ринку потреба в товарах, а пропозиція – продукт, який є або може бути доставлений на ринок. Закон попиту і пропозиції, який полягає в єдності попиту і пропозиції і їх об'єктивному прагненні до рівноваги є одним з головних економічних законів товарного виробництва.

Розглянемо це на прикладі. Нехай протягом досить тривалого часу селянин продає на ринку яблука, причому продає їх після збирання врожаю, з тижневими перервами. Тоді, при наявних у селянина запасах яблук тижнева пропозиція буде залежати від очікуваної ціни на наступному тижні. Якщо на наступному тижні передбачається, що ціна впаде, а в через тиждень підвищиться, то пропозиція буде стримуватися за умови перевищення очікуваного підвищення цін над витратами зберігання. При цьому пропозиція товару в найближчий тиждень буде тим менше, чим більше передбачається збільшення ціни надалі. І навпаки, якщо в наступному тижні ціна буде високою, а потім очікується її падіння, то пропозиція збільшиться тим більше, чим більше передбачається зниження ціни надалі.

У разі якщо позначити через **p** ціну на фрукти на наступному тижні, а через p' – так звану тенденцію формування ціни (похідну ціни по часу), то як попит, так і пропозиція будуть функціями зазначених величин. При цьому, як показує практика, в залежності від різних факторів попит і пропозиція можуть бути різними функціями ціни і тенденціями формування ціни. Зокрема, одна з цих функцій задається лінійною залежністю, що математично описується співвідношенням – деякі дійсні постійні.

А тоді за цей час у разі якщо, наприклад, в розглянутій задачі вартість на яблука спочатку становила 1 грн. за 1 кг, через t тижнів вона вже p (t) грн. за 1кг, а попит q і пропозиція s визначалися відповідно співвідношеннями

$$q = 4p' - 2p + 39, s = 44p' + 2p - 1$$

то для того, щоб попит відповідав пропозиції, необхідно дотримуватися рівності $4p' - 2p + 39 = 44p' + 2p - 1$.

Отримуємо диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними:

$$\frac{dp}{p-10} = 10dt$$

Інтегруючи, знаходимо, що $p = Ce^{-10t} + 10$

Якщо ж врахувати початкові умови p = 1 при t = 0, то остаточно отримуємо

$$p = -9Ce^{-10t} + 10 \qquad (6.8)$$

Таким чином, в разі якщо вимагати, щоб між попитом і пропозицією весь час зберігалася рівновага, необхідно, щоб вартість змінювалася відповідно до цієї формулою (6.8).

Ефективність реклами

Покладемо, власне що торговими установами реалізується продукція B, про яку в момент часу t з числа потенційних покупців N розуміє тільки X клієнтів. Припустимо далі. Власне що для прискорення збуту продукції в були надані рекламні оголошення по радіо і телебаченню. Подальша інформація про продукцію поширюється між покупцями посредствам спілкування один з одним. З більшим ступенем достовірності можна вважати, власне що згодом маркетингових проголошень швидкістю зміни числа обізнаних про продукцію B пропорційна як числу знають про товар покупців, про нього ще не знають.

Якщо домовитися, що час відраховується після рекламних оголошень, коли про товар дізналося $\frac{N}{\gamma}$людей, то приходимо до диференціального рівняння:

$$\frac{dx}{dt} = kx(N - x) \qquad (6.9)$$

С початковими умовами $x = \frac{N}{\gamma}$ при t=0 в рівнянні (6.9) коефіцієнт k – це додатній коефіцієнт пропорційності. Інтегруючи рівняння (6.9), знаходимо, що

$$\frac{1}{N}\ln\frac{x}{N-x} = kt + C.$$

Поклавши $NC = C_1$, приходимо до рівності $\frac{x}{N-x} = Ae^{Nkt}, A = e^{C_1}$.

Якщо останнє рівняння розв'язати відносно x, то отримаємо співвідношення

$$x = N\frac{Ae^{Nkt}}{Ae^{Nkt}+1} = \frac{N}{1+Pe^{-Nkt}}, \text{ де } P = \frac{1}{A} \qquad (6.10)$$

Рівняння (6. 10) в економіці, зазвичай, називають ***рівняння логічної кривої***.

Якщо врахувати початкову умову, то рівняння (6.10) можна переписати у вигляді $x = \frac{N}{1+(y-1)e^{-Nkt}}$.

До рівняння (6.9) можна звести також і задачу про розповсюдження технологічних нововведень.

Тестові завдання до модуля «Диференціальні рівняння»

з/п	УМОВА	ВАРІАНТИ ВІДПОВІДЕЙ
1.	*Вкажіть метод розв'язання чи підстановку для рівняння:* *y'+p(x)y=q(x)*	1) y=uv; 2) y=ux; 3) скласти характеристичне рівняння; 4) відокремити змінні.
2.	*Вкажіть метод розв'язання чи підстановку*	1) y=uv;

	для рівняння: $f_1(x)\cdot\varphi_2(y)dx+f_2(x)\cdot\varphi_1(y)dy=0$	2) y=ux; 3) скласти характеристичне рівняння; 4) відокремити змінні.
3.	*Вкажіть метод розв'язання чи підстановку для рівняння:* $y''+p\cdot y'+q\cdot y=0$	1) y=uv; 2) y=ux; 3) скласти характеристичне рівняння; 4) відокремити змінні.
4.	*Вкажіть метод розв'язання чи підстановку для рівняння* $y'=f\left(\frac{y}{x}\right)$	1) y=uv; 2) y=ux; 3) скласти характеристичне рівняння; 4) відокремити змінні.
5.	*Вкажіть метод розв'язання чи підстановку для рівняння* $y'\cos x=(y+1)\sin x$	1) y=uv; 2) y=ux; 3) y′=t; 4) відокремити змінні.
6.	*Вкажіть метод розв'язання чи підстановку для рівняння* $(1+x^2)y'-2xy=(1+x^2)^2$	1) y=uv; 2) y=ux; 3) y′=t; 4) відокремити змінні.
7.	*Вкажіть підстановку до рівняння* $y''+y'tgx=\sin 2x$	1) y′=uv′+u′v; 2) y′=t; 3) y′=udx+xdu; 4) $y'=P\cdot\frac{dP}{dy}$.
8.	*Вкажіть метод розв'язання чи підстановку для рівняння* $(x^2+2xy)dx+xydy=0$	1) y=uv; 2) y=ux; 3) y′=t; 4) відокремити змінні.
9.	*Вкажіть підстановку до рівняння* $y'=\frac{y}{x}+\sin\frac{y}{x}$	1) y=uv; 2) y=ux; 3) y′=t; 4) y′=P(y).
10.	*Вкажіть підстановку до рівняння* $xy'=y\cdot(1+\ell n\ \frac{y}{x})$	1) y′=u′v+uv′; 2) y′=xu′+u; 3) y′=t; 4) y′=P(y).

11.	*Вкажіть підстановку до рівняння* $e^{x^2} y'+2xy e^{x^2} = x\cdot \sin x$	1) $y'=u'v+uv'$; 2) $y'=xu'+u$; 3) $y'=t$; 4) $y'=P(y)$.
12.	*Визначити тип диференціального рівняння:* $y'\cos x=(y+1)\sin x$	1) лінійне I порядку; 2) однорідне I порядку; 3) з відокремлювальними змінними; 4) однорідне II порядку.
13.	*Визначити тип диференціального рівняння:* $(1+x^2)y'-2xy=(1+x^2)^2$	1) лінійне I порядку; 2) однорідне I порядку; 3) з відокремлювальними змінними; 4) однорідне II порядку.
14.	*Визначити тип диференціального рівняння:* $(x^2+2xy)dx+xydy=0$	1) лінійне I порядку; 2) однорідне I порядку; 3) з відокремлювальними змінними; 4) з пониженням порядку.
15.	*Визначити тип диференціального рівняння:* $y'=\frac{y}{x}+\sin\frac{y}{x}$	1) лінійне I порядку; 2) однорідне I порядку; 3) з відокремлювальними змінними; 4) з пониженням порядку.
16.	*Визначити тип диференціального рівняння:* $F(x;y';y'')=0$	1) лінійне II порядку; 2) однорідне II порядку; 3) з відокремлювальними змінними; 4) з пониженням порядку.
17.	*Визначити тип диференціального рівняння:* $F(y;y';y'')=0$	1) лінійне II порядку; 2) однорідне II порядку; 3) з відокремлювальними змінними; 4) з пониженням порядку.
18.	*Визначити тип диференціального рівняння:* $y''+y'\mathrm{tg}x=\sin 2x$	1) неоднорідне II порядку; 2) однорідне II порядку; 3) з відокремлювальними змінними; 4) з пониженням порядку.
19.	*Визначити тип диференціального рівняння:* $y\cdot y''-2(y')^2=0$	1) однорідне I порядку; 2) однорідне II порядку; 3) з відокремлювальними змінними; 4) з пониженням порядку.
20.	*Визначити тип*	1) лінійне;

	диференціального рівняння: $y'+\frac{y}{x}=x^2$	2) однорідне; 3) з відокремлювальними змінними; 4) з пониженням порядку.
21.	*Визначити тип диференціального рівняння:* $y''-\frac{y'}{\sqrt{y}}=0$	1) однорідне I порядку; 2) однорідне II порядку; 3) з відокремлювальними змінними; 4) з пониженням порядку.
22.	*Запишіть загальний розв'язок рівняння:* $y''-4y'+3y=0$	1) $y_o=C_1e^x+C_2e^{3x}$; 2) $y_o=e^x(C_1\cos 3x+C_2\sin 3x)$; 3) $y_o=e^{3x}(C_1\cos x+C_2\sin x)$; 4) $y_o=e^{3x}(C_1+C_2x)$.
23.	*Запишіть загальний розв'язок рівняння:* $y''-4y'+13y=0$	1) $y_o=e^{2x}(C_1\cos 3x+C_2\sin 3x)$; 2) $y_o=e^{3x}(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)$; 3) $y_o=C_1e^{2x}+C_2e^{3x}$; 4) $y_o=e^{2x}(C_1+C_2 3x)$.
24.	*Запишіть загальний розв'язок рівняння:* $y''-y'=0$	1) $y_o=C_1e^x+C_2e^{-x}$; 2) $y_o=C_2-C_1e^x$; 3) $y_o=e^x(C_1+C_2x)$; 4) $y_o=C_1+C_2e^x$.
25.	*Запишіть загальний розв'язок рівняння:* $y''-y=0$	1) $y_o=C_1e^{-x}+C_2$; 2) $y_o=C_1+C_2e^x$; 3) $y_o=C_1e^{-x}+C_2e^x$; 4) $y_o=e^x(C_1+C_2x)$.
26.	*Запишіть загальний розв'язок рівняння:* $y''-2y'+y=0$	1) $y_o=C_1e^x+C_2e^x$; 2) $y_o=e^x(C_1+C_2x)$; 3) $y_o=e^{-x}(C_1+C_2x)$; 4) $y_o=e^x(C_1\cos x+C_2\sin x)$.
27.	*Запишіть загальний розв'язок рівняння:* $y''-3y'+2y=0$	1) $y_o=C_1e^x+C_2e^{2x}$; 2) $y_o=e^x(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)$; 3) $y_o=e^{2x}(C_1\cos x+C_2\sin x)$; 4) $y_o=C_1e^{-x}+C_2e^{-2x}$.
28.	*Запишіть загальний розв'язок рівняння:* $y''-8y'+7y=0$	1) $y_o=e^{7x}(C_1\cos x+C_2\sin x)$; 2) $y_o=e^x(C_1\cos 7x+C_2\sin 7x)$; 3) $y_o=C_1e^{-x}+C_2e^{-7x}$; 4) $y_o=C_1e^x+C_2e^{7x}$.
29.	*Які із наступних рівнянь є однорідним*	1) $\cos x\, y' - (1 - y)\, x = 0$; 2) $(x^2 + y^2)\, dy = (xy - y^2)\, dx$;

	диференціальним рівнянням II порядку?	3) $y''+3y'+2y=0$; 4) $y''+ \cos x\, y' + tg\, x\, y = \sin x$.
30.	*Які із наступних рівнянь є неоднорідним лінійним диференціальним рівнянням II порядку?*	1) $\cos x\, y' - (1 - y)\, x = 0$; 2) $(x^2 + y^2)\, dy = (xy - y^2)\, dx$; 3) $y''+3y'+2y=0$; 4) $y''+ \cos x\, y' + tg\, x\, y = \sin x$.

Модуль 7. РЯДИ

Тема 13. Ряди, їх види. Дослідження числових рядів на збіжність

Теоретичні відомості до теми

1. Числовий ряд та його сума
2. Основні властивості збіжних рядів
3. Достатні ознаки збіжності рядів з додатними членами
4. Знакозмінні ряди, їх збіжність
5. Степеневі ряди, область їх збіжності

1. Числовий ряд та його сума

Нехай маємо скінченний набір чисел $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ Існує число S, що являється сумою всіх чисел цього набору $S = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$

Нехай тепер маємо нескінченну послідовність чисел $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$

Цей вираз позбавлений будь-якого змісту, оскільки операція додавання нескінченної множини чисел безпосередньо невиконувана. Тому він представляє собою деякий символ, який ми і назвемо нескінченним рядом або просто рядом. Для позначення ряду використовується також і коротка форма запису $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (читається: сума a_n від 1 до ∞), що задає певний закон, за яким для кожного n можна знайти a_n.

Озн. *Вираз виду* $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{i=1}^{\infty} a_i$ *називається* ***рядом,*** a_n – *загальний член ряду.*

Розглянемо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ та надамо йому числового змісту. Будемо додавати підряд члени ряду, починаючи з першого.

Озн. *Сума перших n членів ряду* $S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$ ***- n-на частинна сума****.*

Очевидно, перша, друга, третя і т. д. частинні суми ряду матимуть вигляд:

$S_1 = a_1,$

$S_2 = a_1 + a_2,$

$S_3 = a_1 + a_2 + a_3,$

…………………………

$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n,$

....

І складають нескінченну послідовність.

Озн. *Ряд* $a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$ *називається збіжним, якщо послідовність його частинних сум* $S_1 + S_2 + \cdots + S_n + \cdots$ *має скінченну границю:* $lim_{n\to\infty} S_n = S$.

Значення $\boldsymbol{S}$ цієї границі називається сумою ряду.

Озн. *Якщо ж послідовність частинних сум ряду границі не має, то ряд називається* ***розбіжним***.

Із означення випливає що сума ряду не обов'язково існує. В цьому полягає основна відмінність нескінченних рядів від скінченних сум: у будь-якої скінченної сукупності чисел обов’язково існує сума, «додати» ж нескінченну множину чисел виявляється не завжди можливим.

З цієї точки зору ряди, що мають скінченну суму, представляють найбільший інтерес. Тому числові ряди діляться на два класи:

1) ряди, що мають скінченну суму. Такі ряди називаються збіжними;

2) ряди, що мають нескінченну суму або взагалі її не мають. Такі ряди називаються розбіжними

Якщо ряд збігається і сума його є $\boldsymbol{S}$, то говорять, що він збігається до суми $\boldsymbol{S}$ і пишуть $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$.

Якщо ряд має нескінченну суму, то іноді використовують вираз «ряд розбігається до плюс чи мінус нескінченності» і пишуть: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \pm\infty$.

Приклад 1. Ряд 1-1+1-1+... розбігається (не має суми). Дійсно, частинні суми цього ряду $S_n = 0$ при $\boldsymbol{n}$ парному $S_n = 1$ при $\boldsymbol{n}$ - непарному

і послідовність $S_1 + S_2 + \cdots + S_n + \cdots$ не має границі

Отже, цей ряд збігається і не має суми. Його можна назвати коливальним. Підкреслимо, що 0 і 1 в послідовності частинних сум зустрічаються нескінченну кількість разів, однак ні одне з цих чисел не є границею даної послідовності і не може вважатися сумою ряду.

Приклад 2. Для ряду $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots$

n-на частина суми $S_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^n}=1-\frac{1}{2^n}$,

і $S=\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}(1-\frac{1}{2^n})=1,$

так що цей ряд збігається і його сума рівна 1.

Приклад 3. Для ряду $1+2+3+\ldots+n+\ldots$

n-на частинна сума

$S_n=1+2+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}.$

Послідовність частинних сум

$S_1=1, S_2=3, S_3=6,\ldots, S_n=\frac{n(n+1)}{2},\ldots$

очевидно, необмежено зростає, так що цей ряд розбігається і про його суму говорити не можна.

До даних прикладів можна зробити два зауваження.

Зауваження 1. *Оцінка збіжності ряду за допомогою знаходження частинних сум є дуже незручним способом через труднощі явного обчислення частинних сум ряду і знаходження границі їх послідовності.*

Зауваження 2. *При дослідженні рядів значення частинних сум можуть взагалі не представляюти ніякого інтересу, оскільки всі дослідження ведуться лише заради встановлення самого факту збіжності чи розбіжності ряду.*

У зв’язку з цим представляють інтерес лише методи аналізу рядів, що дозволяють констатувати збіжність ряду без знаходження його суми.

Введемо ще одне поняття.

Озн. *n-м залишком ряду* $a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots$ *називається ряд, що отримується із даного в результаті відкидання перших n-членів, тобто ряд* $a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{n+m}+\cdots$

Теорема 7.1. *Якщо ряд* $a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots$ *збігається, то сума* r_n *його n-го залишку із зростанням n прямує до нуля.*

Доведення:

Очевидно, що сума ряду $a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots$ $S=S_n+r_n$

Оскільки ця рівність справедлива для будь-якого n, то ми можем перейти в ній до границі по n:

$S=\lim\limits_{n\to\infty}(S_n+r_n)=\lim\limits_{n\to\infty}S_n+\lim\limits_{n\to\infty}r_n.$

Але для збіжного ряду $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=S$, звідси випливає, що $\lim\limits_{n\to\infty}r_n=0.$

Необхідна умова збіжності ряду:

Якщо ряд $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$ *збігається, то* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Якщо $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0 \Rightarrow$, *то ряд розбігається.*

Зауваження. *Необхідна умова збіжності ряду необоротна, тобто із співвідношення* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ *збіжність ряду не випливає!*

Розглянемо деякі відомі числові ряди.

Озн. *Ряд виду* $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$ *називається* ***гармонійним рядом.*** *Гармонійний ряд завжди розбігається.*

Озн. *Ряд виду* $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \ldots + \frac{1}{n^p} + \ldots$ *називається* ***загальногармонійним рядом.*** *Загальногармонійний ряд збігається при p>1 та розбігається при p≤ 1.*

Озн. *Ряд* $a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \ldots$, *члени якого утворюють геометричну прогресію зі знаменником* $\boldsymbol{q}$ *називається* ***геометричним рядом.*** *Якщо* $|q|<1$, *то геометричний ряд збігається і його сума* $S = \frac{a_1}{1-q}$, *якщо* $|q|\geq 1$, *то геометричний ряд розбігається.*

2. Основні властивості збіжних рядів

Запишемо (без доведення) декілька властивостей числових рядів.

1. Відкидання скінченної кількості перших членів ряду не впливає на його збіжність; якщо вихідний ряд збіжний, то сума отриманого ряду буде менша суми початкового ряду на суму відкинутих членів.

2. Збіжні ряди можна почленно додавати і віднімати. Ця властивість означає, що із збіжності двох рядів $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ і $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ випливає збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n)$.

Крім того, якщо суми цих рядів позначити через A, B, C відповідно, то має місце рівність C=A±B.

Зауваження. *Слід відмітити, що із збіжності ряду* $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n)$ *збіжність рядів* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *і* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *не випливає.*

Наприклад, збіжний ряд 0+0+0+… отриманий в результаті почленного додавання розбіжних рядів 1+1+1+… і -1-1-1… .

3. Якщо члени збіжного ряду, не змінюючи їх порядку, об'єднати в групи, то отриманий при цьому ряд також збігається і сума його співпадає із сумою вихідного ряду.

Зокрема, якщо відомо, що ряд $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots$ збігається, то за даною властивістю буде збігатись і ряд $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{16}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^{n+1}}\right)+\ldots$

Зауваження. *Ця властивість необоротна, тобто розкриття дужок в збіжному ряді може привести до розбіжного ряду.*

Це видно на прикладі ряду(1-1)+(1-1)+ який збігається, оскільки кожний його член рівний нулю. В той же час, розкривши дужки, ми отримаємо розбіжний ряд 1-1+1-1+…

4. Нехай $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ – деякий збіжний числовий ряд, сума якого $\boldsymbol{S}$. Тоді ряд $\sum_{n=1}^{\infty} Ca_n$ (C – довільне число, відмінне від нуля) також збіжний і його сума дорівнює $\boldsymbol{CS}$.

5. Нехай ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ з невід'ємними членами збігається, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ отримується із даного ряду довільною перестановкою його членів. Тоді дані ряди збігаються одночасно і мають одну і ту ж суму.

3. Достатні ознаки збіжності рядів з додатними членами

1. Ознаки порівнянь для рядів з додатними членами:

$\sum_{i=1}^{\infty} a_i;\ a_i \geq 0 \quad (1)$

якщо збігається (2) $\Rightarrow$ збігається (1);

$\sum_{i=1}^{\infty} b_i;\ b_i \geq 0 \quad (2)$

якщо розбігається (1) $\Rightarrow$ розбігається (2).

$b_i \geq a_i \quad \forall i$

2. Ознака Д'Аламбера

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=D:\begin{cases} D<1 & - \quad \text{ряд збігається;} \\ D>1 & - \quad \text{ряд розбігається;} \\ D=1 & - \quad \text{необхідно провести додаткове дослідження.} \end{cases}$$

3. Ознака Коші

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=K:\begin{cases} K<1 & - \quad \text{ряд збігається;} \\ K>1 & - \quad \text{ряд розбігається;} \\ K=1 & - \quad \text{необхідно провести додаткове дослідження.} \end{cases}$$

4. Інтегральна ознака Коші

Нехай у ряді $a_1 + a_2 + a_3 + ...$ $(a_n > 0,\ a_1 > a_2 > a_3 > ...)$ з додатними членами, що утворюють спадну послідовність n-ий член ряду визначається за формулою , де $y = f(x)$ – неперервна, додатна і спадна функція на проміжку $[1; +\infty)$. Тоді невласний інтеграл $\int_1^{\infty} f(x)dx$ та числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ одночасно збігаються або одночасно розбігаються.

4. Знакозмінні ряди, їх збіжність

Озн. *Ряд виду* $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + ... = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ *називається* ***знакозмінним рядом.***

Озн. *Знакозмінний ряд* $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ *називається* ***абсолютно збіжним,*** *якщо збігається ряд* $|a_1| + |a_2| + |a_3| + ... = \sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$, *утворений із абсолютних величин його членів****.***

Озн. *Знакозмінний ряд* $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ *називається* ***умовно збіжним****, якщо ряд* $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ *збігається, а ряд* $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ *- розбігається.*

Теорема 7.2. *(Теорема Лейбниця). Якщо для знакозмінного ряду* $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n, \forall a_n \geq 0$ *виконуються умови:*

1) його члени утворюють спадну послідовність: $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \ldots$;

2) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, *то ряд збігається і його сума не перевищує першого члена* $S < a_1$.

5. Степеневі ряди, область їх збіжності

Озн. *Вираз виду* $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + ... = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *називають* ***степеневим рядом****, де* $a_0, a_1, a_2, a_3, ...$ *– постійні числа, коефіцієнти степеневого ряду.*

Озн. Областю збіжності степеневого ряду $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *є інтервал збіжності (-R; R), включаючи, можливо, і кінці цього інтервалу.*

$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ ***– радіус збіжності степеневого ряду****.*

Всередині інтервалу збіжності (-R; R) ряд збігається абсолютно, поза межами інтервалу $x \epsilon (-\infty; -R)\ U\ (R; \infty)$ – розбігається, на кінцях інтервалу, при $x = \pm R$, ряд треба досліджувати на збіжність окремо.

Якщо $R = \infty$, то ряд збігається абсолютно на всій числовій прямій, $x \epsilon (-\infty; \infty)$; якщо $R = 0$ ряд збігається в єдиній точці $x = 0$.

Зразки розв'язування задач

***Приклад 1**. Дослідити на збіжність ряди:*

1) $\frac{1}{7}+\frac{3}{10}+\frac{5}{13}+\frac{7}{16}+\ldots$;

2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{(2n-1)!}$;

3) $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\ldots$;

4) $1+\frac{1}{2\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 9}+\frac{1}{4\cdot 16}+\ldots$.

Розв'язання:

1) Для дослідження ряду $\frac{1}{7}+\frac{3}{10}+\frac{5}{13}+\frac{7}{16}+\ldots$ скористаємося необхідною умовою збіжності ряду.

Запишемо формулу n-го члена ряду. При виведенні формули скористаємось тим, що чисельник та знаменник дробу утворюють арифметичну прогресію.

n-ий член арифметичної прогресії $b_n = b_1 + d(n-1)$, де b_1 – її перший член, d– різниця прогресії.

Тому маємо n-ий член ряду $a_n = \frac{1+2(n-1)}{7+3(n-1)} = \frac{2n-1}{3n+4}$.

Перевіряємо необхідну ознаку збіжності ряду: $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{3n+4} = \frac{2}{3} \neq 0$.

Необхідна ознака збіжності ряду не виконується, тому ряд $\frac{1}{7}+\frac{3}{10}+\frac{5}{13}+\frac{7}{16}+\ldots$ розбігається.

2) Застосуємо ознаку Д'Аламбера для дослідження ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{(2n-1)!}$.

Так як $a_n = \frac{3^n}{(2n-1)!}$, то $a_{n+1} = \frac{3^{n+1}}{(2\cdot(n+1)-1)!} = \frac{3\cdot 3^n}{(2n+1)!}$. Знаходимо $D = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$ = $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3\cdot 3^n}{(2n+1)!} : \frac{3^n}{(2n-1)!}$ = $\frac{3\cdot 3^n\cdot(2n-1)!}{3^n\cdot(2n-1)!\cdot 2n\cdot(2n+1)}$ = $\frac{3}{2n\cdot(2n+1)}$ = $\frac{3}{4} < 1$.

Так як $\boldsymbol{D} < 1$, то за ознакою Д'Аламбера даний ряд збігається.

3) Для дослідження збіжності ряду $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\ldots$ застосуємо інтегральну ознаку Коші.

Загальний член числового ряду $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\ldots$ задається формулою $a_n = \frac{1}{n^2}$. Функція $f(x) = \frac{1}{x^2}$ є неперервною, додатною і спадною на $[1;+\infty)$, тому можна застосувати інтегральну ознаку Коші.

Обчислимо невласний інтеграл $\int\limits_1^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2} = \lim\limits_{a\to+\infty}\int\limits_1^{a}\frac{dx}{x^2} = \lim\limits_{a\to+\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)_1^a = \lim\limits_{a\to+\infty}\left(-\frac{1}{a}+1\right) = 1$. Так як невласний інтеграл $\int\limits_1^{+\infty} f(x)dx$ збігається, то і числовий ряд $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\ldots = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ також збігається.

Примітка. *Можна було провести інші міркування. Ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ *– загальногармонійний, він збіжний, так як p = 2.*

4) Використаємо для дослідження ряду $1+\frac{1}{2\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 9}+\frac{1}{4\cdot 16}+\ldots$ достатню ознаку порівнянь додатних числових рядів.

$a_n = \frac{1}{n\cdot n^2}$ – загальний член ряду $1+\frac{1}{2\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 9}+\frac{1}{4\cdot 16}+\ldots$ (1). Порівняємо члени даного ряду з членами збіжного загальногармонійного ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ (2).

Так як члени ряду (1) менші за члени ряду (2): $\frac{1}{n\cdot n^2} < \frac{1}{n^2}, \forall n\in N$, а ряд (2) – збіжний, то за достатньою ознакою порівнянь додатних числових рядів ряд (1) також збігається.

Приклад 2*. Дослідити на умовну та абсолютну збіжність ряд* $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots$.

Розв'язання:

$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+...=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ – знакозмінний ряд. Розглянемо ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, утворений із абсолютних величин ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$. Як відомо, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ - гармонійний ряд, а він є розбіжним.

Застосуємо теорему Лейбниця для дослідження збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$:

1) $1>\frac{1}{2}>\frac{1}{3}>\frac{1}{4}>...>\frac{1}{n}>...$ - члени ряду утворюють спадну послідовність;

2) $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$.

Так як ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ - розбіжний, але для ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ виконуються умови теореми Лейбниця, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ збігається умовно■

***Приклад 3**. Знайти область збіжності ряду* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{n\cdot 4^n}$.

Розв'язання:

Застосуємо ознаку Д'Аламбера $D=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}(x)}{a_n(x)}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x-1)^{n+1}}{(n+1)\cdot 4^{n+1}}:\frac{(x-1)^n}{n\cdot 4^n}\right|$
$=\lim_{n\to\infty}\frac{|(x-1)\cdot n|}{(n+1)\cdot 4}=\frac{|x-1|}{4}$.

Поставимо вимогу, щоб $\boldsymbol{D}<1$, тобто $\frac{|x-1|}{4}<1$.

Розв'язуємо цю нерівність. Маємо |x=1| < 4, - 4 < x - 1< 4, -3 < x <5.

Дослідимо збіжність ряду на кінцях інтервалу, тобто в точках x = - 3 і x = 5.

Підставляючи x = - 3 в даний ряд, маємо: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-3-1)^n}{n\cdot 4^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$.

В цьому ряді члени, взяті за абсолютною величиною, спадають і границя n-го члена дорівнює нулю. За ознакою Лейбниця одержаний ряд збігається. Таким чином, точка x = - 3 належить області збіжності ряду.

Підставляючи x = 5 в початковий ряд, маємо: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(5-1)^n}{n\cdot 4^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ - гармонійний ряд, який, як відомо, розбігається. Значить, точка x = 5 не належить області збіжності.

Таким чином, ряд збігається в області x є [-3;5).

Завдання для практичних занять та самостійного виконання

Завдання № 561-580. Дослідити на збіжність ряди

561. $\frac{1}{1\cdot 5}+\frac{1}{3\cdot 8}+\frac{1}{5\cdot 11}+\frac{1}{7\cdot 14}+\ldots.$

562. $\frac{1}{3}+\frac{2}{3^2}+\frac{3}{3^3}+\frac{4}{3^4}+\ldots.$

563. $\frac{1}{2}+\frac{3}{5}+\frac{5}{10}+\frac{7}{17}+\ldots.$

564. $\frac{1}{3}+\frac{2}{9}+\frac{3}{27}+\frac{4}{81}+\ldots.$

565. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{3n^n}.$

566. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{(n+2)!}.$

567. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{1+3^n}.$

568. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}.$

569. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7n}{2^{n-1}}.$

570. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+1}.$

571. $\frac{2}{5}+\frac{5}{9}+\frac{8}{13}+\frac{11}{17}+\frac{14}{21}+\ldots.$

572. $\frac{2}{3^2}+\frac{4}{3^4}+\frac{6}{3^6}+\frac{8}{3^8}+\ldots.$

573. $\frac{1}{2}+\frac{4}{4}+\frac{7}{8}+\frac{10}{16}+\frac{13}{32}+\ldots.$

574. $\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{5}{6}+\frac{7}{8}+\ldots.$

575. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!}{5^n n!}.$

576. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3+1}{3^{n+1}}.$

577. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n-1)^2}{n!}.$

578. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n^3+5}.$

579. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n!}{(n+1)!}.$

580. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n\cdot 2^n}.$

Завдання № 581-600. Дослідити ряд на абсолютну і умовну збіжність

581. $1-\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}-\frac{1}{4^3}+\ldots.$

582. $\frac{1}{2}-\frac{1}{5}+\frac{1}{10}-\frac{1}{17}+\frac{1}{26}-\frac{1}{37}+\ldots.$

583. $\frac{1}{1+1}-\frac{1}{4+2}+\frac{1}{9+3}-\frac{1}{16+4}+\ldots.$

584. $\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{8}}-\frac{1}{\sqrt{11}}+\ldots.$

585. $\frac{1}{2}-\frac{3}{4}+\frac{5}{8}-\frac{7}{16}+\frac{9}{32}-\ldots.$

586. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n+2}{n}.$

587. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n\sqrt[3]{n}}.$

591. $1-\frac{1}{\sqrt{6}}+\frac{1}{\sqrt{11}}-\frac{1}{4}+\frac{1}{\sqrt{21}}-\ldots.$

592. $\frac{2}{1!}-\frac{4}{2!}+\frac{8}{3!}-\frac{16}{4!}+\ldots.$

593. $1-\frac{3}{5}+\frac{5}{9}-\frac{7}{13}+\frac{9}{17}-\ldots.$

594. $\frac{2}{3}-\frac{4}{9}+\frac{8}{27}-\frac{16}{81}+\ldots.$

595. $2-\frac{5}{4}+\frac{8}{9}-\frac{11}{16}+\frac{14}{25}-\frac{17}{36}+\ldots.$

596. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^3}.$

597. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(2n+1)}{n(n+1)}.$

588. $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n \frac{\ln n}{n}$.

589. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(n-1)}{(2n-1)(2n+1)}$.

590. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2\sqrt[7]{n^3}}$.

598. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n^2}{2n^2+1}$.

599. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^{n-1}}{n^n}$.

600. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{n^2+1}$.

Завдання № 601-640. Знайти область збіжності степеневого ряду.

601. $x-\frac{x^3}{2^2}+\frac{x^5}{2^4}-\frac{x^7}{2^6}+\dots$.

602. $\frac{x}{\sqrt{2}}+\frac{x^2}{\sqrt{5}}+\frac{x^3}{\sqrt{8}}+\frac{x^4}{\sqrt{11}}+\dots$.

603. $3x-\frac{9x^2}{2!}+\frac{27x^3}{3!}-\frac{81x^4}{4!}+\dots$.

604. $x+\frac{4x^2}{2!}+\frac{7x^3}{3!}+\frac{10x^4}{4!}+\dots$.

605. $\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4}+\frac{x^6}{8}+\frac{x^8}{16}+\frac{x^{10}}{32}+\dots$.

606. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cdot x^n}{\sqrt{n}}$.

607. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n\cdot 5^n}$.

608. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$.

609. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cdot 2^n\cdot x^n}{\sqrt[3]{n}}$.

610. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n^3}$.

611. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{x^n}$.

612. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n(x+2)^n}{n^3}$.

613. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n-1)(x+1)^n}{n!}$.

614. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cdot x^n}{7^n}$.

615. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\cdot(x-3)^n}{(n+1)!}$.

621. $\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4\sqrt{2}}+\frac{x^3}{8\sqrt{3}}+\frac{x^4}{16\sqrt{4}}+\dots$.

622. $\frac{x}{3}-\frac{x^3}{2\cdot 9}+\frac{x^5}{3\cdot 27}-\frac{x^7}{4\cdot 81}+\dots$.

623. $\frac{x}{3}-\frac{x^2}{9}+\frac{x^3}{27}-\frac{x^4}{81}+\dots$.

624. $\frac{x}{2}-\frac{x^2}{4+\sqrt{2}}+\frac{x^3}{9+\sqrt{3}}-\frac{x^4}{16+\sqrt{4}}+\dots$.

625. $3x-\frac{9x^2}{4}+\frac{27x^3}{9}-\frac{81x^4}{16}+\dots$

626. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(x-1)^n}{n^2}$.

627. $\sum_{n=1}^{\infty}2^n(x-1)^n$.

628. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{3^n}$.

629. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n(x-1)^n}{\sqrt{n}}$.

630. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{3^n n}$.

631. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}\left(\frac{x}{2x+1}\right)^n$.

632. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n(x+1)^n}{n^3}$.

633. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2+n}$.

634. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(n-1)!x^n}{(n+2)!}$.

635. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!\cdot x^n}{3^n\cdot n!}$.

616. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^{n+1}x^n}{(n+1)^2}$.

617. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\left(\frac{x-1}{3}\right)^n$.

618. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n(x+2)^n}{(2n+1)(n+2)}$.

619. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n(2x+3)^n}{3^{n+1}\cdot n!}$.

620. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2n}{n+3}\left(\frac{x+2}{5}\right)^n$.

636. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{n+3}\left(\frac{x-1}{3}\right)^n$.

637. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n+1}(x-5)^n}{7^{n+2}}$.

638. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n-1)!(x-2)^n}{(n+2)!}$.

639. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{4\cdot 5^n}\left(\frac{x+1}{2}\right)^n$.

640. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5\sqrt[3]{n}(x-2)^n}{n^3}$.

Застосування рядів в економіці

В економіці ряди використовуються переважно для теоретичних досліджень, зокрема, отримання оцінок, що дозволяють співвіднести прибуток і витрати, які відносяться до різних моментів часу. Так, дисконтування, тобто знаходження теперішнього еквіваленту минулих чи майбутніх платежів, призводе до обчислення суми нескінченого ряду. Наприклад, розглянемо задачу про знаходження ринкової ціни безтермінової облігації номіналом 1000$ і 3% купоном, що забезпечує вкладнику отримання додаткових 30$ кожного року. Якщо передбачувана інфляція складає 2% в рік, то ціна облігації на момент випуску буде еквівалентна сумі ряду $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{30}{(1+0,02)^n}$.

Цей ряд є сумою нескінченної геометричної прогресії, у якої $b_1 = 30$, знаменник $q = \frac{1}{1+0,02} < 1$, а відтак даний ряд збіжний і його сума обчислюється наступним чином:

$$S = \frac{b_1}{1-q} = \frac{30}{1-\frac{1}{1,02}} = \frac{30\cdot 1,02}{0,02} = 1530.$$

Таким чином, ринкова вартість даної облігації дорівнює 1530$.

Розглянемо ще одне застосування рядів до задач про оцінку прибутку та інвестицій. Нехай інвестор хоче оцінити ефективність вкладу в підприємство капіталу об’ємом A грн. Відомо, що в результаті цього вкладу випуск підприємства буде збільшуватися в перший місяць на a_1 грн., в другий місяць – на a_2 грн. і т.д., в N-й місяць збільшення випуску складу a_N грн. Який прибуток отримає інвестор, якщо припустити, що банк, в якій він міг би вкласти свій капітал, виплачує p% річних та здійснює нарахування відсотків в кінці кожного місяця, виплачуючи по $\frac{p}{12}$%?

Використовуючи формулу нарахування складних відсотків, маємо, що для отримання доходу в a_N грн. за N-й місяць інвестор повинен покласти в банк на початку першого місяця капітал, що дорівнює

$$\frac{a_n}{\left(1+\frac{p}{1200}\right)^n}, n = 1, 2, \dots, N.$$

Вклавши в підприємство капітал, об'ємом А грн., інвестор отримує через N місяців сумарне збільшення випуску, що дорівнює

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_N) \text{ грн.}$$

Для того, щоб отримати таку ж суму за рахунок нарахувань відсотків у банку, необхідно було б на початку першого місяця вкласти в банк

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{a_n}{\left(1+\frac{p}{1200}\right)^n} \text{ грн.}$$

Відповідно, прибуток $v(N)$, отримана від інвестицій за N місяців, складає

$$v(N) = \sum_{n=1}^{N} \frac{a_n}{\left(1+\frac{p}{1200}\right)^n} - A.$$

З'ясуємо тепер, який буде прибуток $v(N)$ при $N \to \infty$. Для цього обчислимо

$$v(N) = \lim_{N\to\infty}\left(\sum_{n=1}^{N} \frac{a_n}{\left(1+\frac{p}{1200}\right)^n} - A\right) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\left(1+\frac{p}{1200}\right)^n} - A\right)$$

Це означає, що при даних умовах неможливо отримати прибуток більший, ніж

$$v = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\left(1+\frac{p}{1200}\right)^n} - A \text{ грн.} \qquad (*)$$

Для простого випадку, коли $a_n = a > 0$ при всіх n, ряд в правій частині формули (*) являє собою суму геометричної прогресії і є збіжним, оскільки його знаменник

$$q = \frac{1}{1+\frac{p}{1200}} < 1, b_1 = \frac{a}{1+\frac{p}{1200}}$$

і сума ряду

$$S = \frac{b_1}{1-q} = \frac{a}{(1+\frac{p}{1200})(1-\frac{p}{1200})}.$$

Таким чином, можна зробити висновок, що в умовах задачі прибуток від інвестицій не може бути більше, ніж

$$v = \frac{a}{1-\frac{p^2}{(1200)^2}} - A.$$

Тестові завдання до модуля «Ряди»

№ з/п	УМОВА:	ВАРІАНТИ ВІДПОВІДЕЙ:
1.	*Ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *називається збіжним, якщо*	1) $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$; 2) існує $\lim_{n\to\infty} u_n$; 3) $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} u_i = 0$; 4) існує $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} u_i$.
2.	*Вкажіть умову збіжності ряду* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *за ознакою Коші*	1) $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n} = 1$; 2) $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n} < 1$; 3) $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n} > 1$; 4) $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$.
3.	*Вкажіть умову збіжності ряду* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *за ознакою Д'Аламбера*	1) $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$; 2) $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n} < 1$; 3) $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n} > 1$; 4) $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$.
4.	*Запишіть п'ятий член ряду* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$	1) $\frac{1}{5}$; 2) $\frac{1}{125}$; 3) $\frac{24}{625}$; 4) $4\frac{4}{5}$.
5.	*Запишіть 20-й член ряду* $\frac{1}{2}+\frac{4}{4}+\frac{7}{8}+\frac{10}{16}+\frac{13}{32}+...$	1) $\frac{55}{2^{19}}$; 2) $\frac{58}{2^{20}}$; 3) $\frac{61}{2^{21}}$; 4) $\frac{20}{2^{20}}$.
6.	*Запишіть формулу n-го члену ряду* $\frac{1}{2}+\frac{2}{5}+\frac{3}{10}+\frac{4}{17}+\frac{5}{26}+\frac{6}{37}+....$	1) $\frac{n}{3n-1}$; 2) $\frac{n}{2n+3}$; 3) $\frac{n}{n^2+n}$; 4) $\frac{n}{n^2+1}$.
7.	*Вкажіть знаменник q та перший член a ряду геометричної прогресії* *5 + 15 + 45 + 135 + 405 + 1215 + …*	1) $a = 3$, $q = 5$; 2) $a = 3^n$, $q = 5$; 3) $a = 5$, $q = 3$; 4) $a = 5$, $q = 3^n$.
8.	*Запишіть формулу n-го члену ряду* *3 + 15 + 75 + 375 + 18755 + 9375 + …*	1) $a_n = 3\cdot 5^n$; 2) $a_n = 3^n\cdot 5^{n-1}$; 3) $a_n = 3+3\cdot 5^{n-1}$; 4) $a_n = 3^n+3\cdot 5^{n-1}$.
9.	*При якому значенні p загальногармонійний ряд* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ *збігається*	1) p > 1; 2) p < 1; 3) p = 0; 4) p = 1.
10.	*Який із вказаних рядів називається знакозмінним?*	1) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n q^n$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$; 4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$.

11.	*Який із вказаних рядів називається степеневим?*	1) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n q^n$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$; 4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$.
12.	*Який із вказаних рядів називається загальногармонійним?*	1) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n q^n$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$; 4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$.
13.	*В якому випадку ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ *називається умовно збіжним?*	1) якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ збігається; 2) якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ збігається, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \lvert a_n \rvert$ - розбігається; 3) якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \lvert a_n \rvert$ - збігається; 4) якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \lvert a_n \rvert$ - розбігається.
14.	*В якому випадку ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ *називається абсолютно збіжним?*	1) якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ збігається; 2) якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ збігається, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \lvert a_n \rvert$ - розбігається; 3) якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \lvert a_n \rvert$ - збігається; 4) якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \lvert a_n \rvert$ - розбігається.
15.	*Якщо радіус збіжності степеневого ряду R = 0, то цей ряд*	1) збігається абсолютно в єдиній точці x = 0; 2) збігається абсолютно на всій числовій прямій, x є (-∞; ∞); 3) збігається абсолютно в інтервалі x є (-∞; -0) U (0; ∞); 4) розбігається.
16.	*Якщо радіус збіжності степеневого ряду R = ∞, то цей ряд*	1) збігається абсолютно в єдиній точці x = 0; 2) збігається абсолютно на всій числовій прямій, x є (-∞; ∞); 3) збігається абсолютно в інтервалі x є (-∞; -0) U (0; ∞); 4) розбігається.

17.	*Який із заданих рядів є збіжним ?*	1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5^n n}{2^n}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4^n n}{3^n}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n n}{4^n}$; 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5^n n}{4^n}$.
18.	*Який із заданих рядів є збіжним ?*	1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5n+1}{3n+2}\right)^n$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+3}{3n-1}\right)^n$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{3^n}\left(\frac{3n+1}{n-2}\right)^n$; 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{7n+5}{2n-3}\right)^n$.
19.	*Який із заданих рядів є розбіжним ?*	1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{7^n n}{3^n}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n n}{5^n}$ 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n n}{3^n}$; 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n}$
20.	*Який із заданих рядів є розбіжним ?*	1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-3}{3n+5}\right)^n$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+1}{3n-2}\right)^n$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n+4}{7n-5}\right)^n$; 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n+1}{n-2}\right)^n$.
21.	*Дослідити на збіжність ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2n}{n+1}$	1) збігається; 2) абсолютно збігається; 3) умовно збігається; 4) розбігається.
22.	*Дослідити на збіжність ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$	1) збігається; 2) абсолютно збігається; 3) умовно збігається; 4) розбігається.
23.	*Дослідити на збіжність ряд* $1+\frac{3}{2}+\frac{3^2}{3}+\frac{3^3}{4}+\frac{3^4}{5}+\frac{3^5}{6}+...$	1) збігається; 2) абсолютно збігається; 3) умовно збігається; 4) розбігається.
24.	*Дослідити на збіжність ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4n-3}{5n+1}\right)^{n^3}$	1) збігається; 2) абсолютно збігається; 3) умовно збігається; 4) розбігається.
25.	*Знайти область збіжності ряду* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!(x+2)^n}$	1) (-2; 2); 3) (-∞;-2) U (-2; ∞); 2) (-∞;-2) U (2; ∞); 4) (-∞; ∞).
26.	*Знайти область збіжності ряду* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(n+1)x^n$	1) (-1; 1); 3) [-1; 1]; 2) (-∞;-1) U (1; ∞); 4) (-∞; ∞).
27.	*Знайти область збіжності ряду* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+1}}{3^n}(x+3)^n$	1) (-6; 0); 3) [-6; 0); 2) (-∞;-6) U (0; ∞); 4) (-6; 0].
28.	*Знайти область збіжності ряду* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^5}{(2n+1)(x+1)^{2n}}$	1) (-2; 0); 3) [-2; 0]; 2) (-∞;-2) U (0; ∞); 4) (-∞;-2] U [0; ∞).

29.	*Знайти область збіжності ряду* $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{3^n}{2^n\sqrt[3]{n}}x^n$	1) $(-\frac{2}{3};\frac{2}{3})$; 2) $(-\frac{2}{3};\frac{2}{3}]$;	3) $[-\frac{2}{3};\frac{2}{3})$; 4) $[-\frac{2}{3};\frac{2}{3}]$.
30.	*Знайти область збіжності ряду* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{3^n(n+1)}$	1) (-3; 3); 2) (-3; 3];	3) [-3; 3); 4) [-3; 3].