КУРС ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ (Короткий конспект лекцій). ЧАСТИНА 2.

Чорноіван Юрій

18 квітня 2022 р.

Зміст

1 Інтегральне числення функції однієї змінної

1.1 Первісна функція

__Означення:__ Функція $F(x)$ називається **первісною функцією** функції $f(x)$ на відрізку $[a,b]$, якщо в будь-якій точці цього відрізка виконується рівність:

$$F'(x) = f(x).$$

Слід відзначити, що первісних для однієї і тієї ж функції може бути нескінченно багато. Вони будуть відрізнятися одна від одної на будь-яке стале число.

$$F_1(x) = F_2(x) + C.$$

1.2 Невизначений інтеграл

__Означення:__ **Невизначеним інтегралом** функції $f(x)$ називається сукупність первісних функцій, які визначені співвідношенням:

$$F(x) + C.$$

Записують:

$$\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + C.$$

Умовою існування невизначеного інтеграла на деякому відрізку є неперервність функції на цьому відрізку.
__Властивості:__

1. $\left(\int f(x)\mathrm{d}x\right)' = (F(x)+C)' = f(x)$;
2. $\mathrm{d}\left(\int f(x)\mathrm{d}x\right) = f(x)\mathrm{d}x$;
3. $\int \mathrm{d}F(x) = F(x) + C$;
4. $\int (u+v-w)\,\mathrm{d}x = \int u\mathrm{d}x + \int v\mathrm{d}x - \int w\mathrm{d}x$; де u, v, w – деякі функції від x;
5. $\int C\cdot f(x)\mathrm{d}x = C\cdot\int f(x)\mathrm{d}x$.

__Приклад:__ $\int(x^2 - 2\sin x + 1)\,\mathrm{d}x = \int x^2\mathrm{d}x - 2\int\sin x\mathrm{d}x + \int\mathrm{d}x = \dfrac{1}{3}x^3 + 2\cos x + x + C$;

Знаходження значення невизначеного інтеграла пов'язане головним чином зі знаходженням первісної функції. Для деяких функцій це досить складна задача. Нижче будуть розглянуті способи знаходження невизначених інтегралів для основних класів функцій – раціональних, ірраціональних, тригонометричних, показникових тощо.

Для зручності значення невизначених інтегралів більшості елементарних функцій зібрані у спеціальні таблиці інтегралів, які бувають іноді досить об'ємними. У них включені різні найрозповсюдженіші комбінації функцій. Але більшість представлених у цих таблицях формул є наслідками одна одної, тому нижче приведемо таблицю основних інтегралів, за допомогою якої можна одержати значення невизначених інтегралів різних функцій.

	Інтеграл	Значення		Інтеграл	Значення
1	$\int \mathrm{tg}\, x\mathrm{d}x$	$-\ln\mid\cos x\mid + C$	9	$\int e^x\mathrm{d}x$	$e^x + C$
2	$\int \mathrm{ctg}\, x\mathrm{d}x$	$\ln\mid\sin x\mid + C$	10	$\int\cos x\mathrm{d}x$	$\sin x + C$
3	$\int a^x\mathrm{d}x$	$\dfrac{a^x}{\ln a} + C$	11	$\int\sin x\mathrm{d}x$	$-\cos x + C$
4	$\int\dfrac{\mathrm{d}x}{a^2+x^2}$	$\dfrac{1}{a}\,\mathrm{arctg}\,\dfrac{x}{a} + C$	12	$\int\dfrac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x$	$\mathrm{tg}\, x + C$
5	$\int\dfrac{\mathrm{d}x}{x^2-a^2}$	$\dfrac{1}{2a}\ln\left\lvert\dfrac{x+a}{x-a}\right\rvert + C$	13	$\int\dfrac{1}{\sin^2 x}\mathrm{d}x$	$-\mathrm{ctg}\, x + C$
6	$\int\dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2\pm a^2}}$	$\ln\left\lvert x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right\rvert + C$	14	$\int\dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}}$	$\arcsin\dfrac{x}{a} + C$
7	$\int x^\alpha\mathrm{d}x$	$\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha\neq -1$	15	$\int\dfrac{1}{\cos x}\mathrm{d}x$	$\ln\left\lvert\mathrm{tg}\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)\right\rvert + C$
8	$\int\dfrac{\mathrm{d}x}{x}$	$\ln\lvert x\rvert + C$	16	$\int\dfrac{1}{\sin x}\mathrm{d}x$	$\ln\left\lvert\mathrm{tg}\,\dfrac{x}{2}\right\rvert + C$

1.3 Методи інтегрування

Розглянемо три основних методи інтегрування.

1.3.1 Безпосереднє інтегрування

Метод безпосереднього інтегрування заснований на припущенні про можливе значення первісної функції з подальшою перевіркою цього значення диференціюванням. Взагалі, зазначимо, що диференціювання є потужним інструментом перевірки результатів інтегрування.

Розглянемо застосування цього методу на прикладі:

Потрібно знайти значення інтеграла $\int \frac{\mathrm{d}x}{x}$. На основі відомої формули диференціювання $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ можна зробити висновок, що шуканий інтеграл дорівнює $\ln x + C$, де C – деяке стале число. Однак, з іншого боку $(\ln(-x))' = -\frac{1}{x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}$. Таким чином, остаточно можна зробити висновок:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln|x| + C$$

Зазначимо, що на відміну від диференціювання, де для знаходження похідної використалися чіткі прийоми і методи, правила знаходження похідної, нарешті визначення похідної, для інтегрування такі методи недоступні. Якщо при знаходженні похідної ми користувалися, так би мовити, конструктивними методами, які, базуючись на певних правилах, приводили до результату, то при знаходженні первісної доводиться в основному опиратися на знання таблиць похідних і первісних.

Що стосується методу безпосереднього інтегрування, то він застосовний тільки для деяких досить обмежених класів функцій. Функцій, для яких можна з ходу знайти первісну, дуже мало. Тому в більшості випадків застосовуються способи, описані нижче.

1.3.2 Спосіб підстановки (заміни змінної)

Теорема: Якщо потрібно знайти інтеграл $\int f(x)\mathrm{d}x$, але складно відшукати первісну, то за допомогою заміни $x = \varphi(t)$ і $\mathrm{d}x = \varphi'(t)\mathrm{d}t$ виходить:

$$\int f(x)\ \mathrm{d}x = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t$$

Доведення: Продиференціюємо пропоновану рівність:

$$\mathrm{d}\int f(x)\mathrm{d}x = \mathrm{d}\left(\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t\right)$$

За розглянутою вище властивістю 2 невизначених інтегралів:

$$f(x)\mathrm{d}x = f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t,$$

що з урахуванням введених позначень і є вихідним припущенням. Теорему доведено.

Приклад Знайти невизначений інтеграл $\int \sqrt{\sin x}\cos x\mathrm{d}x$.

Зробимо заміну $t = \sin x$, $\mathrm{d}t = \cos x\mathrm{d}x$.

$$\int \sqrt{t}\mathrm{d}t = \int t^{1/2}\mathrm{d}t = \frac{2}{3}t^{3/2} + C = \frac{2}{3}\sin^{3/2} x + C.$$

Приклад $\int x(x^2+1)^{3/2}\mathrm{d}x$.

Заміна $t = x^2 + 1; \quad \mathrm{d}t = 2x\mathrm{d}x; \quad \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}t}{2x}$; Одержуємо:

$$\int t^{3/2}\frac{\mathrm{d}t}{2} = \frac{1}{2}\int t^{3/2}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}t^{5/2} + C = \frac{t^{5/2}}{5} + C = \frac{(x^2+1)^{5/2}}{5} + C;$$

Нижче будуть розглянуті інші приклади застосування методу підстановки для різних типів функцій.

1.3.3 Інтегрування частинами

Спосіб заснований на відомій формулі похідної добутку:

$$(uv)' = u'v + uv',$$

де u і v – деякі функції від x.

У диференціальній формі: $\mathrm{d}(uv) = u\mathrm{d}v + v\mathrm{d}u$.

Проінтегрувавши, одержуємо: $\int \mathrm{d}(uv) = \int u\mathrm{d}v + \int v\mathrm{d}u$, а відповідно до наведених вище властивостей невизначеного інтеграла:

$$uv = \int u\mathrm{d}v + \int v\mathrm{d}u \text{ або } \int u\mathrm{d}v = uv - \int v\mathrm{d}u.$$

Одержали формулу інтегрування частинами, що дозволяє знаходити інтеграли багатьох елементарних функцій.

Приклад $\int x^2 \sin x\mathrm{d}x = \left\{ \begin{array}{ll} u = x^2; & \mathrm{d}v = \sin x\mathrm{d}x; \\ \mathrm{d}u = 2x\mathrm{d}x; & v = -\cos x \end{array} \right\} = -x^2\cos x + \int \cos x \cdot 2x\mathrm{d}x =$

$$= \left\{ \begin{array}{ll} u = x; & \mathrm{d}v = \cos x\mathrm{d}x; \\ \mathrm{d}u = \mathrm{d}x; & v = \sin x \end{array} \right\} = -x^2\cos x + 2\left[x\sin x - \int \sin x\mathrm{d}x\right] = -x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x + C.$$

Як видно, послідовне застосування формули інтегрування частинами дозволяє поступово спростити функцію і звести інтеграл до табличного.

Приклад $\int e^{2x}\cos x\mathrm{d}x = \left\{ \begin{array}{ll} u = e^{2x}; & \mathrm{d}u = 2e^{2x}\mathrm{d}x; \\ \mathrm{d}v = \cos x\ \mathrm{d}x; & v = \sin x \end{array} \right\} = e^{2x}\sin x - \int \sin x \cdot 2e^{2x}\mathrm{d}x =$

$= \left\{ \begin{array}{ll} u = e^{2x}; & \mathrm{d}u = 2e^{2x}\mathrm{d}x; \\ \mathrm{d}v = \sin x\mathrm{d}x; & v = -\cos x; \end{array} \right\} = e^{2x}\sin x - 2\left[-e^{2x}\cos x - \int -\cos x \cdot 2e^{2x}\mathrm{d}x\right] = e^{2x}\sin x +$
$+2e^{2x}\cos x - 4\int \cos x e^{2x}\mathrm{d}x$

Видно, що в результаті повторного застосування інтегрування частинами функцію не вдалося спростити до табличного вигляду. Однак, останній отриманий інтеграл нічим не відрізняється від вихідного. Тому перенесемо його в ліву частину рівності.

$$5\int e^{2x}\cos x\mathrm{d}x = e^{2x}(\sin x + 2\cos x)$$

$$\int e^{2x}\cos x\mathrm{d}x = \frac{e^{2x}}{5}(\sin x + 2\cos x) + C.$$

Таким чином, інтеграл знайдений взагалі без застосування таблиць інтегралів.

Перш ніж розглянути докладно методи інтегрування різних класів функцій, наведемо ще кілька прикладів знаходження невизначених інтегралів приведенням їх до табличного.

Приклад

$$\int (2x+1)^{20}\mathrm{d}x = \{2x+1 = t; \quad \mathrm{d}t = 2\mathrm{d}x;\} = \int t^{20} \cdot \frac{1}{2}\mathrm{d}t = \frac{1}{21}t^{21} \cdot \frac{1}{2} + C = \frac{t^{21}}{42} + C = \frac{(2x+1)^{21}}{42} + C$$

Приклад

$$\int \frac{\sqrt{2-x^2}+\sqrt{2+x^2}}{\sqrt{4-x^4}}\mathrm{d}x = \int \frac{\sqrt{2-x^2}+\sqrt{2+x^2}}{\sqrt{2-x^2}\sqrt{2+x^2}}\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2+x^2}} + \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2-x^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2+2}\right| +$$
$$+ \arcsin\frac{x}{\sqrt{2}} + C$$

Приклад

$$\int \frac{\cos x}{\sqrt{\sin^3 x}}\mathrm{d}x = \int \sin^{-3/2} x\cos x\mathrm{d}x = \{\sin x = t; \mathrm{d}t = \cos x\mathrm{d}x\} = \int t^{-3/2}\mathrm{d}t = -2t^{-1/2} + C =$$

$$= -2\sin^{-1/2} x + C = -\frac{2}{\sqrt{\sin x}} + C.$$

Приклад

$$\int x^2 e^{5x}\mathrm{d}x = \left\{ \begin{array}{ll} u = x^2; & \mathrm{d}v = e^{5x}\mathrm{d}x; \\ \mathrm{d}u = 2x\mathrm{d}x; & v = \dfrac{e^{5x}}{5}; \end{array} \right\} = \frac{1}{5}e^{5x}x^2 - \int \frac{1}{5}e^{5x}2x\mathrm{d}x = \frac{x^2e^{5x}}{5} - \frac{2}{5}\int xe^{5x}\mathrm{d}x =$$
$$= \left\{ \begin{array}{ll} u = x; & \mathrm{d}v = e^{5x}\mathrm{d}x; \\ \mathrm{d}u = \mathrm{d}x; & v = \dfrac{1}{5}e^{5x}; \end{array} \right\} = \frac{x^2e^{5x}}{5} - \frac{2}{5}\left[\frac{xe^{5x}}{5} - \int \frac{1}{5}e^{5x}\mathrm{d}x\right] = \frac{x^2e^{5x}}{5} - \frac{2xe^{5x}}{25} + \frac{2}{25}\int e^{5x}\mathrm{d}x =$$
$$= \frac{x^2e^{5x}}{5} - \frac{2xe^{5x}}{25} + \frac{2e^{5x}}{125} + C = \frac{e^{5x}}{5}\left(x^2 - \frac{2x}{5} + \frac{2}{25}\right) + C$$

Приклад

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{-x^2-2x+8}} = \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{-x^2-2x-1+9}} = \{\mathrm{d}x = \mathrm{d}(x+1)\} = \int \frac{\mathrm{d}(x+1)}{\sqrt{9-(x+1)^2}} = \{x+1 = t\} =$$
$$= \int \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{3^2-t^2}} = \arcsin\frac{t}{3} + C = \arcsin\frac{x+1}{3} + C.$$

Приклад

$$\int \frac{\ln x}{x^3}\mathrm{d}x = \left\{ \begin{array}{ll} u = \ln x; & \mathrm{d}v = \dfrac{1}{x^3}\mathrm{d}x; \\ \mathrm{d}u = \dfrac{1}{x}\mathrm{d}x; & v = -\dfrac{1}{2x^2}; \end{array} \right\} = -\frac{\ln x}{2x^2} - \int \left(-\frac{1}{2x^2}\cdot\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x = -\frac{\ln x}{2x^2} + \frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}x}{x^3} = -\frac{\ln x}{2x^2} +$$
$$+\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2}x^{-2}\right] + C = -\frac{\ln x}{2x^2} - \frac{1}{4x^2} + C$$

Приклад

$$\int x\ln x\mathrm{d}x = \left\{ \begin{array}{ll} u = \ln x; & \mathrm{d}v = x\mathrm{d}x; \\ \mathrm{d}u = \dfrac{1}{x}\mathrm{d}x; & v = \dfrac{x^2}{2}; \end{array} \right\} = \frac{x^2}{2}\ln x - \int\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}\mathrm{d}x = \frac{x^2\ln x}{2} - \frac{1}{2}\int x\mathrm{d}x = \frac{x^2\ln x}{2} - \frac{x^2}{4} + C =$$
$$= \frac{x^2}{4}(2\ln x - 1) + C$$

Приклад

$$\int e^{\cos^2 x}\sin 2x\mathrm{d}x = \left\{t = e^{\cos^2 x}; \quad \mathrm{d}t = -e^{\cos^2 x}\cdot 2\cos x\sin x\mathrm{d}x = -\sin 2x\cdot e^{\cos^2 x}\mathrm{d}x;\right\} = -\int \mathrm{d}t =$$
$$= -t + C = -e^{\cos^2 x} + C$$

Приклад

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{(x+1)\sqrt{x}} = \left\{\sqrt{x} = t; \quad \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2t}\right\} = \int\frac{2t\mathrm{d}t}{(t^2+1)t} = 2\int\frac{\mathrm{d}t}{t^2+1} = 2\,\mathrm{arctg}\,t + C = 2\,\mathrm{arctg}\sqrt{x} + C.$$

Приклад

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2-6x+25} = \int\frac{\mathrm{d}x}{(x-3)^2+16} = \frac{1}{16}\int\frac{\mathrm{d}x}{\left(\dfrac{x-3}{4}\right)^2+1} = \frac{1}{16}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{x-3}{4}\right) + C.$$

1.4 Інтегрування елементарних дробів

Означення: **Елементарними** називаються дроби наступних чотирьох типів:

I. $\dfrac{1}{ax+b}$; III. $\dfrac{Mx+N}{ax^2+bx+c}$;

II. $\dfrac{1}{(ax+b)^m}$; IV. $\dfrac{Mx+N}{(ax^2+bx+c)^n}$

m, n – натуральні числа ($m \geqslant 2$, $n \geqslant 2$) і $b^2 - 4ac < 0$.

Перші два типи інтегралів від елементарних дробів досить просто приводяться до табличних підстановкою $t = ax + b$.

I. $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{ax+b} = \frac{1}{a}\int\frac{\mathrm{d}t}{t} = \frac{1}{a}\ln|t| + C = \frac{1}{a}\ln|ax+b| + C.$

II. $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{(ax+b)^m} = \frac{1}{a}\int\frac{\mathrm{d}t}{t^m} = -\frac{1}{a(m-1)t^{m-1}} + C = -\frac{1}{a(m-1)(ax+b)^{m-1}} + C;$

Розглянемо метод інтегрування елементарних дробів типу III.

Інтеграл дробу типу III може бути представлений у вигляді:

$$\int\frac{Ax+B}{x^2+px+q}\mathrm{d}x = \int\frac{\dfrac{A}{2}(2x+p) + \left(B - \dfrac{Ap}{2}\right)}{x^2+px+q}\mathrm{d}x = \frac{A}{2}\int\frac{2x+p}{x^2+px+q}\mathrm{d}x + \left(B - \frac{Ap}{2}\right)\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2+px+q} =$$
$$= \frac{A}{2}\ln\left|x^2+px+q\right| + \left(B - \frac{Ap}{2}\right)\int\frac{\mathrm{d}x}{\left(x+\dfrac{p}{2}\right)^2 + \left(q - \dfrac{p^2}{4}\right)} = \frac{A}{2}\ln\left|x^2+px+q\right| + \frac{2B-Ap}{\sqrt{4q-p^2}}\cdot$$
$$\cdot\,\mathrm{arctg}\,\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + C$$

Тут у загальному вигляді показане приведення інтеграла дробу типу III до двох табличних інтегралів.

Розглянемо застосування зазначеної вище формули на прикладах.

Приклад

$$\int \frac{7x-2}{3x^2-5x+4}\mathrm{d}x = \int \frac{84x-24}{36x^2-60x+48}\mathrm{d}x = \int \frac{84x-24}{(6x-5)^2+23}\mathrm{d}x = \left\{ \begin{array}{l} u=6x-5; \quad \mathrm{d}u=6\mathrm{d}x; \\ x=\dfrac{u+5}{6}; \end{array} \right\} =$$
$$= \frac{1}{6}\int \frac{14u+70-24}{u^2+23}\,\mathrm{d}u = \frac{7}{3}\int \frac{u\mathrm{d}u}{u^2+23} + \frac{23}{3}\int \frac{\mathrm{d}u}{u^2+23} = \frac{7}{6}\ln(u^2+23) + \frac{23}{3\sqrt{23}}\operatorname{arctg}\frac{u}{\sqrt{23}} + C =$$
$$= \frac{7}{6}\ln\left|36x^2-60x+48\right| + \frac{\sqrt{23}}{3}\operatorname{arctg}\frac{6x-5}{\sqrt{23}} + C$$

Загалом кажучи, якщо у тричлена ax^2+bx+c вираз $b^2-4ac>0$, то дріб за визначенням не є елементарним, однак, його можна інтегрувати зазначеним вище способом.

Приклад

$$\int \frac{5x-3}{x^2+6x-40}\mathrm{d}x = \int \frac{5x-3}{(x+3)^2-49}\mathrm{d}x = \left\{ \begin{array}{l} u=x+3; \quad \mathrm{d}u=\mathrm{d}x; \\ x=u-3; \end{array} \right\} = \int \frac{5u-15-3}{u^2-49}\mathrm{d}u = 5\int \frac{u\mathrm{d}u}{u^2-49} -$$
$$-18\int \frac{\mathrm{d}u}{u^2-49} = \frac{5}{2}\ln\left|u^2-49\right| - \frac{18}{14}\ln\left|\frac{u-7}{u+7}\right| + C = \frac{5}{2}\ln\left|x^2+6x-40\right| - \frac{9}{7}\ln\left|\frac{x-4}{x+10}\right| + C$$

Приклад

$$\int \frac{3x+4}{\sqrt{7-x^2+6x}}\mathrm{d}x = \int \frac{3x+4}{\sqrt{16-(x-3)^2}}\,\mathrm{d}x = \left\{ \begin{array}{l} u=x-3; \quad \mathrm{d}u=\mathrm{d}x; \\ x=u+3; \end{array} \right\} = \int \frac{3u+9+4}{\sqrt{16-u^2}}\mathrm{d}u = 3\int \frac{u\mathrm{d}u}{\sqrt{16-u^2}} +$$
$$+13\int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{16-u^2}} = -3\sqrt{16-u^2} + 13\arcsin\frac{u}{4} + C = -3\sqrt{7-x^2-6x} + 13\arcsin\frac{x-3}{4} + C$$

Розглянемо тепер методи інтегрування найпростіших дробів IV типу.

Спочатку розглянемо окремий випадок при $M=0$, $N=1$.

Тоді інтеграл типу $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{(ax^2+bx+c)^n}$ можна шляхом виділення в знаменнику повного квадрата представити у вигляді $\int \dfrac{\mathrm{d}u}{(u^2+s)^n}$. Зробимо наступне перетворення:

$$\int \frac{\mathrm{d}u}{(u^2+s)^n} = \frac{1}{s}\int \frac{s+u^2-u^2}{(u^2+s)^n}\mathrm{d}u = \frac{1}{s}\int \frac{\mathrm{d}u}{(u^2+s)^{n-1}} - \frac{1}{s}\int \frac{u^2\mathrm{d}u}{(u^2+s)^n}.$$

Другий інтеграл, що входить у цю рівність, будемо брати частинами.

Позначимо: $\left\{ \begin{array}{l} \mathrm{d}v_1 = \dfrac{u\mathrm{d}u}{(u^2+s)^n}; \quad u_1=u; \quad \mathrm{d}u_1=\mathrm{d}u; \\ v_1 = \int \dfrac{u\mathrm{d}u}{(u^2+s)^n} = -\dfrac{1}{2(n-1)(u^2+s)^{n-1}}; \end{array} \right\}$

$$\int \frac{u^2\mathrm{d}u}{(u^2+s)^n} = -\frac{u}{(2n-2)(u^2+s)^{n-1}} + \frac{1}{2n-2}\int \frac{\mathrm{d}u}{(u^2+s)^{n-1}};$$

Для вихідного інтеграла одержуємо:

$$\int \frac{\mathrm{d}u}{(u^2+s)^n} = \frac{1}{s}\int \frac{\mathrm{d}u}{(u^2+s)^{n-1}} + \frac{u}{s(2n-2)(u^2+s)^{n-1}} - \frac{1}{s(2n-2)}\int \frac{\mathrm{d}u}{(u^2+s)^{n-1}}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}u}{(u^2+s)^n} = \frac{u}{s(2n-2)(u^2+s)^{n-1}} + \frac{2n-3}{s(2n-2)}\int \frac{\mathrm{d}u}{(u^2+s)^{n-1}}.$$

Отримана формула називається **рекурентною**. Якщо застосувати її $n-1$ раз, то вийде табличний інтеграл $\int \dfrac{\mathrm{d}u}{u^2+s}$.

Повернемося тепер до інтеграла від елементарного дробу типу IV у загальному випадку.

$$\int \frac{Mx+N}{(ax^2+bx+c)^n}\mathrm{d}x = (4a)^n\int \frac{Mx+N}{\left[(2ax+b)^2+(4ac-b^2)\right]^n}\mathrm{d}x = \left\{ \begin{array}{l} u=2ax+b; \quad \mathrm{d}u=2a\mathrm{d}x; \\ x=\dfrac{u-b}{2a}; \quad s=4ac-b^2; \end{array} \right\} =$$
$$= \frac{(4a)^n}{2a}\int \frac{\dfrac{M(u-b)}{2a}+N}{(u^2+s)^n}\mathrm{d}u = \frac{(4a)^n}{2a}\left[\frac{M}{2a}\int \frac{u\mathrm{d}u}{(u^2+s)^n} + \frac{2aN-Mb}{2a}\int \frac{\mathrm{d}u}{(u^2+s)^n}\right]$$

В отриманій рівності перший інтеграл за допомогою підстановки $t=u^2+s$ приводиться до табличного $\int \dfrac{\mathrm{d}t}{t^n}$, а до другого інтеграла застосовується розглянута вище рекурентна формула.

Незважаючи на видиму складність інтегрування елементарного дробу типу IV, на практиці його досить легко застосовувати для дробів з невеликим степенем n, а універсальність і загальність підходу уможливлює дуже просту реалізацію цього методу на ЕОМ.

Приклад:

$$\int \frac{3x+5}{(x^2-4x+7)^2}\mathrm{d}x = \int \frac{3x+5}{((x-2)^2+3)^2}\mathrm{d}x = \left\{ \begin{array}{ll} u = x-2; & \mathrm{d}u = \mathrm{d}x; \\ x = u+2; & \end{array} \right\} = \int \frac{3u+6+5}{(u^2+3)^2}\mathrm{d}u =$$
$$= 3\int \frac{u\mathrm{d}u}{(u^2+3)^2} + 11\int \frac{\mathrm{d}u}{(u^2+3)^2} = \left\{ \begin{array}{l} t = u^2+3; \\ \mathrm{d}t = 2u\mathrm{d}u; \end{array} \right\} = \frac{3}{2}\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2} + 11\left[\frac{u}{3\cdot 2(u^2+3)} + \frac{1}{3\cdot 2}\int \frac{\mathrm{d}u}{u^2+3}\right] =$$
$$= -\frac{3}{2t} + \frac{11u}{6(u^2+3)} + \frac{11}{6\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{u}{\sqrt{3}} + C = -\frac{3}{2(x^2-4x+7)} + \frac{11(x-2)}{6(x^2-4x+7)} + \frac{11}{6\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x-2}{\sqrt{3}} + C$$

1.5 Інтегрування раціональних функцій

1.5.1 Інтегрування раціональних дробів

Для того, щоб проінтегрувати раціональний дріб слід розкласти його на елементарні дроби.

Теорема: Якщо $R(x) = \dfrac{Q(x)}{P(x)}$ – правильний раціональний дріб, знаменник $P(x)$ якого представлений у вигляді добутку лінійних і квадратичних множників (відзначимо, що будь-який многочлен з дійсними коефіцієнтами може бути представлений у такому вигляді: $P(x) = (x-a)^\alpha \ldots (x-b)^\beta (x^2+px+q)^\lambda \ldots (x^2+rx+s)^\mu$), то цей дріб може бути розкладений на елементарні за наступною схемою:

$$\frac{Q(x)}{P(x)} = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \ldots + \frac{A_\alpha}{(x-a)^\alpha} + \ldots + \frac{B_1}{(x-b)} + \frac{B_2}{(x-b)^2} + \ldots + \frac{B_\beta}{(x-b)^\beta} + \frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q} +$$
$$+ \frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^2} + \ldots + \frac{M_\lambda x+N_\lambda}{(x^2+px+q)^\lambda} + \ldots + \frac{R_1x+S_1}{x^2+rx+s} + \frac{R_2x+S_2}{(x^2+rx+s)^2} + \ldots + \frac{R_\mu x+S_\mu}{(x^2+rx+s)^\mu}$$

де A_i, B_i, M_i, N_i, R_i, S_i – деякі постійні величини.

При інтегруванні раціональних дробів вдаються до розкладу вихідного дробу на елементарні. Для знаходження величин A_i, B_i, M_i, N_i, R_i, S_i застосовують так званий **метод невизначених коефіцієнтів**, суть якого полягає у тому, що для того, щоб два многочлени були тотожно рівні, необхідно і достатньо, щоб були рівні коефіцієнти при однакових степенях x.

Застосування цього методу розглянемо на конкретному прикладі.

Приклад

$$\int \frac{9x^3-30x^2+28x-88}{(x^2-6x+8)(x^2+4)}\mathrm{d}x$$

Оскільки $\left(x^2-6x+8\right)\left(x^2+4\right) = (x-2)(x-4)\left(x^2+4\right)$, то

$$\frac{9x^3-30x^2+28x-88}{(x-2)(x-4)(x^2+4)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-4} + \frac{Cx+D}{x^2+4}$$

Приводячи до спільного знаменника і дорівнюючи відповідні чисельники, одержуємо:

$$A(x-4)(x^2+4) + B(x-2)(x^2+4) + (Cx+D)(x^2-6x+8) = 9x^3-30x^2+28x-88$$

$$(A+B+C)x^3 + (-4A-2B-6C+D)x^2 + (4A+4B+8C-6D)x + (-16A-8B+8D) =$$
$$= 9x^3-30x^2+28x-88$$

$$\left\{ \begin{array}{l} A+B+C=9 \\ -4A-2B-6C+D=-30 \\ 4A+4B+8C-6D=28 \\ -16A-8B+8D=-88 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} C=9-A-B \\ D=-30+4A+2B+54-6A-6B \\ 2A+2B+4C-3D=14 \\ 2A+B-D=11 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} C=9-A-B \\ D=24-2A-4B \\ 2A+2B+36-4A-4B-72+6A+12B=14 \\ 2A+B-24+2A+4B=11 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} C=9-A-B \\ D=24-2A-4B \\ 4A+10B=50 \\ 4A+5B=35 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} C=9-A-B \\ D=24-2A-4B \\ 4A+10B=50 \\ 50-10B+5B=35 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} C=9-A-B \\ D=24-2A-4B \\ 4A+10B=50 \\ B=3 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} A=5 \\ B=3 \\ C=1 \\ D=2 \end{array} \right.$$

Отже:

$$\int \frac{5}{x-2}\mathrm{d}x + \int \frac{3}{x-4}\mathrm{d}x + \int \frac{x+2}{x^2+4}\mathrm{d}x = 5\ln|x-2| + 3\ln|x-4| + \int \frac{x}{x^2+4}\mathrm{d}x + \int \frac{2}{x^2+4}\mathrm{d}x =$$
$$= 5\ln|x-2| + 3\ln|x-4| + \frac{1}{2}\ln(x^2+4) + \operatorname{arctg}\frac{x}{2} + C$$

Приклад

$$\int \frac{6x^5 - 8x^4 - 25x^3 + 20x^2 - 76x - 7}{3x^3 - 4x^2 - 17x + 6} \mathrm{d}x$$

Оскільки дріб неправильний, то попередньо слід виділити в ньому цілу частину:

$$\begin{array}{l}
\big(\ 6x^5 - 8x^4 - 25x^3 + 20x^2 - 76x \ - 7\big) \div \big(3x^3 - 4x^2 - 17x + 6\big) = 2x^2 + 3 + \dfrac{20x^2 - 25x - 25}{3x^3 - 4x^2 - 17x + 6} \\
\underline{-6x^5 + 8x^4 + 34x^3 - 12x^2} \\
\qquad\qquad 9x^3 \ + 8x^2 - 76x \ - 7 \\
\qquad\qquad \underline{-9x^3 + 12x^2 + 51x - 18} \\
\qquad\qquad\qquad 20x^2 - 25x - 25
\end{array}$$

$$\int \left[2x^2 + 3 + \frac{20x^2 - 25x - 25}{3x^3 - 4x^2 - 17x + 6}\right] \mathrm{d}x = \int 2x^2 \mathrm{d}x + \int 3\mathrm{d}x + 5\int \frac{4x^2 - 5x - 5}{3x^3 - 4x^2 - 17x + 6} \mathrm{d}x = \frac{2}{3}x^3 + 3x +$$
$$+5\int \frac{4x^2 - 5x - 5}{3x^3 - 4x^2 - 17x + 6} \mathrm{d}x$$

Розкладемо знаменник отриманого дробу на множники. Видно, що при $x = 3$ знаменник дробу перетворюється в нуль. Тоді:

$$\begin{array}{l}
\big(\ 3x^3 - 4x^2 - 17x + 6\big) \div \big(x - 3\big) = 3x^2 + 5x - 2 \\
\underline{-3x^3 + 9x^2} \\
\qquad 5x^2 - 17x \\
\qquad \underline{-5x^2 + 15x} \\
\qquad\qquad -2x + 6 \\
\qquad\qquad \underline{\ \ 2x - 6} \\
\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}$$

Таким чином $3x^3 - 4x^2 - 17x + 6 = (x - 3)(3x^2 + 5x - 2) = (x - 3)(x + 2)(3x - 1)$. Тоді:

$$\frac{4x^2 - 5x - 5}{(x - 3)(x + 2)(3x - 1)} = \frac{A}{x - 3} + \frac{B}{x + 2} + \frac{C}{3x - 1}$$

$$A(x + 2)(3x - 1) + B(x - 3)(3x - 1) + C(x - 3)(x + 2) = 4x^2 - 5x - 5$$

Для того, щоб уникнути при знаходженні невизначених коефіцієнтів розкриття дужок, групування і розв'язання системи рівнянь (яка у деяких випадках може виявитися досить великою) застосовують так званий **метод довільних значень**. Суть методу полягає у тому, що в отриманий вище вираз підставляються почергово декілька (за кількістю невизначених коефіцієнтів) довільних значень x. Для спрощення обчислень прийнято як довільні значення приймати точки, при яких знаменник дробу дорівнює нулю, тобто в нашому випадку -3, -2, $1/3$. Одержуємо:

$$\begin{cases} 40A = 16 \\ 35B = 21 \\ C = 1 \end{cases} \begin{cases} A = 2/5 \\ B = 3/5 \\ C = 1 \end{cases}$$

Остаточно одержуємо:

$$\int \frac{6x^5 - 8x^4 - 25x^3 + 20x^2 - 76x - 7}{3x^3 - 4x^2 - 17x + 6} \mathrm{d}x = \frac{2}{3}x^3 + 3x + 3\int \frac{\mathrm{d}x}{x + 2} + 2\int \frac{\mathrm{d}x}{x - 3} + 5\int \frac{\mathrm{d}x}{3x - 1} =$$
$$= \frac{2}{3}x^3 + 3x + 3\ln|x + 2| + 2\ln|x - 3| + \frac{5}{3}\ln|3x - 1| + C.$$

Приклад

$$\int \frac{3x^4 + 14x^2 + 7x + 15}{(x + 3)(x^2 + 2)^2} \mathrm{d}x = \int \frac{A}{x + 3} \mathrm{d}x + \int \frac{Bx + C}{(x^2 + 2)^2} \mathrm{d}x + \int \frac{Dx + E}{x^2 + 2} \mathrm{d}x$$

Знайдемо невизначені коефіцієнти:

$$A(x^2 + 2)^2 + (Bx + C)(x + 3) + (Dx + E)(x + 3)(x^2 + 2) = 3x^4 + 14x^2 + 7x + 15$$

$$Ax^4 + 4Ax^2 + 4A + Bx^2 + 3Bx + Cx + 3C + Dx^4 + 2Dx^2 + 3Dx^3 + 6Dx + Ex^3 + 2Ex + 3Ex^2 + 6E =$$
$$= (D + A)x^4 + (3D + E)x^3 + (A + B + 2D + 3E + 4A)x^2 + (3B + C + 6D + 2E)x + (2A + 3C + 6E + 4A)$$

$$\begin{cases} D + A = 3 \\ 3D + E = 0 \\ B + 2D + 3E + 4A = 14 \\ 3B + C + 6D + 2E = 7 \\ 3C + 6E + 4A = 15 \end{cases} \begin{cases} D = 3 - A \\ E = -9 + 3A \\ B + 6 - 2A - 27 + 9A + 4A = 14 \\ 3B + C + 18 - 6A - 18 + 6A = 7 \\ 3C - 54 + 18A + 4A = 15 \end{cases}$$

$$\begin{cases} D = 3 - A \\ E = -9 + 3A \\ B + 11A = 35 \\ 3B + C = 7 \\ 3C + 22A = 69 \end{cases} \quad \begin{cases} D = 3 - A \\ E = -9 + 3A \\ 11A = 35 - B \\ C = 7 - 3B \\ 21 - 9B + 70 - 2B = 69 \end{cases} \quad \begin{cases} A = 3 \\ B = 2 \\ C = 1 \\ D = 0 \\ E = 0 \end{cases}$$

Тоді значення заданого інтеграла:

$$3\int \frac{\mathrm{d}x}{x+3} + \int \frac{2x+1}{(x^2+2)^2}\mathrm{d}x = 3\int \frac{\mathrm{d}x}{x+3} + 2\int \frac{x}{(x^2+2)^2}\mathrm{d}x + \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+2)^2} = 3\ln|x+3| - \frac{1}{x^2+2} +$$
$$+ \frac{x}{4(x^2+2)} + \frac{1}{4\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}} + C$$

1.6 Інтегрування деяких тригонометричних функцій

Інтегралів від тригонометричних функцій може бути нескінченно багато. Більшість із цих інтегралів взагалі не можна обчислити аналітично, тому розглянемо деякі найголовніші типи функцій, які можуть бути проінтегровані завжди.

1.6.1 Інтеграл типу $\int R(\sin x, \cos x)\mathrm{d}x$

Тут R – позначення деякої раціональної функції від змінних $\sin x$ і $\cos x$.

Інтеграли цього типу обчислюються за допомогою підстановки $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$. Ця підстановка дозволяє перетворити тригонометричну функцію в раціональну.

$$\sin x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}, \cos x = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2};$$

Тоді $x = 2\operatorname{arctg} t$; $\mathrm{d}x = \dfrac{2\mathrm{d}t}{1+t^2}$.

Отже, $\int R(\sin x, \cos x)\mathrm{d}x = \int R\left(\dfrac{2t}{1+t^2}, \dfrac{1-t^2}{1+t^2}\right)\dfrac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t = \int r(t)\mathrm{d}t$.

Описане вище перетворення називається **універсальною тригонометричною підстановкою**

Приклад

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{4\sin x + 3\cos x + 5} = \int \frac{\frac{2\mathrm{d}t}{1+t^2}}{4\frac{2t}{1+t^2} + 3\frac{1-t^2}{1+t^2} + 5} = 2\int \frac{\mathrm{d}t}{8t + 3 - 3t^2 + 5 + 5t^2} = 2\int \frac{\mathrm{d}t}{2t^2 + 8t + 8} =$$
$$= \int \frac{\mathrm{d}t}{t^2 + 4t + 4} = \int \frac{\mathrm{d}t}{(t+2)^2} = -\frac{1}{t+2} + C = -\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2} + 2} + C$$

Безсумнівною перевагою цієї підстановки є те, що з її допомогою завжди можна перетворити тригонометричну функцію в раціональну і обчислити відповідний інтеграл. До недоліків можна віднести те, що при перетворенні може вийти досить складна раціональна функція, інтегрування якої займе багато часу і сил.

Однак при неможливості застосувати раціональнішу заміну змінної цей метод є єдиним результативним.

Приклад

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{9 + 8\cos x + \sin x} = \int \frac{2\mathrm{d}t}{(1+t^2)\left[9 + \frac{8(1-t^2)}{1+t^2} + \frac{2t}{1+t^2}\right]} = 2\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2 + 2t + 17} = 2\int \frac{\mathrm{d}t}{(t+1)^2 + 16} =$$
$$= \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{t+1}{4} + C = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2} + 1}{4} + C$$

1.6.2 Інтеграл типу $\int R(\sin x, \cos x)\mathrm{d}x$, якщо функція R є непарною відносно $\cos x$

Незважаючи на можливість обчислення такого інтеграла за допомогою універсальної тригонометричної підстановки, раціональніше застосувати підстановку $t = \sin x$.

$$\int R(\sin x, \cos x)\mathrm{d}x = \int \frac{R(\sin x, \cos x)}{\cos x}\cos x\mathrm{d}x$$

Функція $\dfrac{R(\sin x, \cos x)}{\cos x}$ може містити $\cos x$ тільки у парних степенях, а отже, може бути перетворена в раціональну функцію відносно $\sin x$.

$$\int R(\sin x, \cos x)\mathrm{d}x = \int r(\sin x)\cos x\mathrm{d}x = \int r(t)\mathrm{d}t.$$

Приклад

$$\int \frac{\cos^7 x\mathrm{d}x}{\sin^4 x} = \left\{ \begin{array}{l} \sin x = t \\ \mathrm{d}t = \cos x \mathrm{d}x \\ \cos^2 x = 1 - \sin^2 x \end{array} \right\} = \int \frac{\left(1-t^2\right)^3}{t^4}\mathrm{d}t = \int \frac{1-3t^2+3t^4-t^6}{t^4}\mathrm{d}t = \int \frac{\mathrm{d}t}{t^4} - 3\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2} +$$
$$+3\int \mathrm{d}t - \int t^2\mathrm{d}t = -\frac{1}{3t^3} + \frac{3}{t} + 3t - \frac{1}{3}t^3 + C = -\frac{1}{3\sin^3 x} + \frac{3}{\sin x} + 3\sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + C$$

Загалом кажучи, для застосування цього методу необхідна тільки непарність функції щодо косинуса, а степінь синуса, що входить у функцію, може бути будь-яким, як цілим, так і дробовим.

1.6.3 Інтеграл типу $\int R(\sin x, \cos x)\mathrm{d}x$, якщо функція R є непарною відносно $\sin x$

За аналогією з розглянутим вище випадком робиться підстановка $t = \cos x$.
Тоді $\int R(\sin x, \cos x)\mathrm{d}x = \int r(\cos x)\sin x\mathrm{d}x = -\int r(t)\mathrm{d}t$.
Приклад

$$\int \frac{\sin^3 x}{2+\cos x}\mathrm{d}x = \left\{ \begin{array}{l} \cos x = t \\ \mathrm{d}t = -\sin x\mathrm{d}x \end{array} \right\} = -\int \frac{1-t^2}{2+t}\mathrm{d}t = \int \frac{t^2+4t+4-4t-5}{t+2}\mathrm{d}t = \int \left[\frac{(t+2)^2-4t-5}{t+2}\right]\mathrm{d}t =$$
$$= \int \left[t+2-\frac{4t}{t+2}-\frac{5}{t+2}\right]\mathrm{d}t = \int t\mathrm{d}t + \int 2\mathrm{d}t - 4\int \frac{t\mathrm{d}t}{t+2} - 5\int \frac{\mathrm{d}t}{t+2} = \frac{t^2}{2} + 2t - 5\ln|t+2| - 4\int \frac{t}{t+2}\mathrm{d}t =$$
$$= \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{t}{t+2} = \dfrac{A}{t+2} + B \\ A + Bt + 2 = t \\ B = 1, \quad A = -2 \\ \dfrac{t}{t+2} = \dfrac{-2}{t+2} + 1 \end{array} \right\} = \frac{t^2}{2} + 2t - 5\ln|t+2| + 8\int \frac{\mathrm{d}t}{t+2} - 4\int \mathrm{d}t = \frac{t^2}{2} + 2t - 5\ln|t+2| + 8\ln|t+2| - 4t =$$
$$= \frac{t^2}{2} - 2t + 3\ln|t+2| + C = \frac{\cos^2 x}{2} - 2\cos x + 3\ln(\cos x + 2) + C$$

1.6.4 Інтеграл типу $\int R(\sin x, \cos x)\mathrm{d}x$, якщо функція R парна відносно $\sin x$ і $\cos x$

Для перетворення функції R у раціональну використається підстановка $t = \operatorname{tg} x$
Тоді $\int R(\sin x, \cos x)\mathrm{d}x = \int r(t)\mathrm{d}t$
Приклад

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x + 6\sin x\cos x - 16\cos^2 x} = \int \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\operatorname{tg}^2 x + 6\operatorname{tg} x - 16}\mathrm{d}x = \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{tg} x = t; \\ \dfrac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x = \mathrm{d}(\operatorname{tg} x) = \mathrm{d}t \end{array} \right\} =$$
$$= \int \frac{\mathrm{d}t}{t^2+6t-16} = \int \frac{\mathrm{d}t}{(t+3)^2-25} = \frac{1}{10}\ln\left|\frac{\operatorname{tg} x + 3 - 5}{\operatorname{tg} x + 3 + 5}\right| + C = \frac{1}{10}\ln\left|\frac{\operatorname{tg} x - 2}{\operatorname{tg} x + 8}\right| + C$$

1.6.5 Інтеграл добутку синусів і косинусів різних аргументів

Залежно від типу добутку застосовується одна із трьох формул:

$$\int \cos mx\cos nx\mathrm{d}x = \int \frac{1}{2}\left[\cos(m+n)x + \cos(m-n)x\right]\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(m+n)x}{m+n} + \frac{\sin(m-n)x}{m-n}\right] + C$$
$$\int \sin mx\cos nx\mathrm{d}x = \int \frac{1}{2}\left[\sin(m+n)x + \sin(m-n)x\right]\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left[-\frac{\cos(m+n)x}{m+n} - \frac{\cos(m-n)x}{m-n}\right] + C$$
$$\int \sin mx\sin nx\mathrm{d}x = \int \frac{1}{2}\left[-\cos(m+n)x + \cos(m-n)x\right]\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left[-\frac{\sin(m+n)x}{m+n} + \frac{\sin(m-n)x}{m-n}\right] + C$$

Приклад
$$\int \sin 7x\sin 2x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \cos 5x\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int \cos 9x\mathrm{d}x = \frac{1}{10}\sin 5x - \frac{1}{18}\sin 9x + C.$$

Приклад

$$\int \sin 10x\cos 7x\cos 4x\mathrm{d}x = \int \sin 10x[\cos 7x\cos 4x]\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \sin 10x\cos 11x\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int \sin 10x\cos 3x\mathrm{d}x =$$
$$= \frac{1}{4}\int \sin 21x\mathrm{d}x - \frac{1}{4}\int \sin x\mathrm{d}x + \frac{1}{4}\int \sin 13x\mathrm{d}x + \frac{1}{4}\int \sin 7x\mathrm{d}x = -\frac{1}{84}\cos 21x - \frac{1}{4}\cos x - \frac{1}{52}\cos 13x -$$
$$-\frac{1}{28}\cos 7x + C$$

Іноді при інтегруванні тригонометричних функцій зручно використати загальновідомі тригонометричні формули для зниження порядку функцій.

Приклад

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x\cos^2 x}=\int\frac{4\mathrm{d}x}{\sin^2 2x}=\left\{\frac{\mathrm{d}\operatorname{ctg}2x}{\mathrm{d}x}=\frac{-2}{\sin^2 x}\right\}=-2\operatorname{ctg}2x+C$$

Приклад

$$\begin{aligned}&\int\sin^4 x\mathrm{d}x=\int\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x\right)^2\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\int(1-\cos 2x)^2\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\int\left(1-2\cos 2x+\cos^2 2x\right)\mathrm{d}x=\\&=\frac{1}{4}\int\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int\cos 2x\mathrm{d}x+\frac{1}{4}\int\cos^2 2x\mathrm{d}x=\frac{x}{4}-\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{4}\int\frac{1}{2}\left(1+\cos 4x\right)\mathrm{d}x=\frac{x}{4}-\frac{\sin 2x}{4}+\\&+\frac{1}{8}\left[\int\mathrm{d}x+\int\cos 4x\mathrm{d}x\right]=\frac{x}{4}-\frac{\sin 2x}{4}+\frac{x}{8}+\frac{\sin 4x}{32}+C=\frac{1}{4}\left[\frac{3x}{2}-\sin 2x+\frac{\sin 4x}{8}\right]+C\end{aligned}$$

Іноді застосовуються деякі нестандартні прийоми.

Приклад

$$\begin{aligned}&\int\cos(\ln x)\mathrm{d}x=\left\{\begin{array}{ll}u=\ln x; & \mathrm{d}u=\frac{1}{x}\mathrm{d}x;\\ x=e^u; & \mathrm{d}x=e^u\mathrm{d}u;\end{array}\right\}=\int e^u\cos u\mathrm{d}u=\left\{\begin{array}{ll}p=\cos u; & \mathrm{d}q=e^u\mathrm{d}u;\\ \mathrm{d}p=-\sin u\mathrm{d}u; & q=e^u;\end{array}\right\}=e^u\cos u+\\&+\int e^u\sin u\mathrm{d}u=\left\{\begin{array}{ll}p=\sin u; & \mathrm{d}q=e^u\mathrm{d}u;\\ \mathrm{d}p=\cos u\mathrm{d}u; & q=e^u;\end{array}\right\}=e^u\cos u+e^u\sin u-\int e^u\cos u\mathrm{d}u;\end{aligned}$$

Отже $\int e^u\cos u\mathrm{d}u=e^u(\cos u+\sin u)-\int e^u\cos u\mathrm{d}u$

$$\begin{aligned}&\int e^u\cos u\mathrm{d}u=\frac{e^u}{2}(\cos u+\sin u)+C\\&\int x\cos(\ln x)\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\frac{x}{2}\left(\cos\left(\ln x\right)+\sin\left(\ln x\right)\right)+C\\&\int\cos(\ln x)\mathrm{d}x=\frac{x}{\sqrt{2}}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\ln x\right)+C;\end{aligned}$$

1.7 Інтегрування деяких ірраціональних функцій

Далеко не кожна ірраціональна функція може мати інтеграл, виражений елементарними функціями. Для знаходження інтеграла від ірраціональної функції слід застосувати підстановку, що дозволить перетворити функцію в раціональну, інтеграл від якої може бути знайдений, як відомо, завжди.

Розглянемо деякі прийоми для інтегрування різних типів ірраціональних функцій.

1.7.1 Інтеграл типу $\int R\left(x,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_1}{n_1}},\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_2}{n_2}},...,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_s}{n_s}}\right)\mathrm{d}x$, де n_i, m_i – натуральні числа

За допомогою підстановки $\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}=t$, де n є найменшим спільним кратним чисел n_1, n_2, $\ldots$, n_s функція раціоналізується.

$$\frac{ax+b}{cx+d}=t^n;\qquad x=\frac{dt^n-b}{a-ct^n};\qquad \mathrm{d}x=\left(\frac{dt^n-b}{a-ct^n}\right)'\mathrm{d}t;$$

Тоді $\int R\left(x,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_1}{n_1}},\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_2}{n_2}},...,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_s}{n_s}}\right)\mathrm{d}x=\int R_1\left(\frac{dt^n-b}{a-ct^n},t\right)\left(\frac{dt^n-b}{a-ct^n}\right)'\mathrm{d}t=\int r(t)\mathrm{d}t.$

Приклад

$$\begin{aligned}&\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-2x}-\sqrt[4]{1-2x}}=\left\{\sqrt[4]{1-2x}=t;\quad \mathrm{d}t=\frac{-2\mathrm{d}x}{4\left(\sqrt[4]{1-2x}\right)^3}=\frac{-\mathrm{d}x}{2t^3};\right\}=\int\frac{-2t^3\mathrm{d}t}{t^2-t}=-2\int\frac{t^2\mathrm{d}t}{t-1}=\\&=-2\int\left(t+\frac{t}{t-1}\right)\mathrm{d}t=-2\int t\mathrm{d}t-2\int\frac{t}{t-1}\mathrm{d}t=-t^2-2\int\left(1+\frac{1}{t-1}\right)\mathrm{d}t=-t^2-2t-2\ln|t-1|+C=\\&=-\sqrt{1-2x}-2\sqrt[4]{1-2x}-2\ln\left|\sqrt[4]{1-2x}-1\right|+C\end{aligned}$$

Якщо до складу ірраціональної функції входять корені різних степенів, то для нової змінної раціонально взяти корінь степеня, рівного найменшому спільному кратному степенів коренів, що входять до виразу.

Проілюструємо це на прикладі.

Приклад

$$\int \frac{\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[4]{x-1}}{(x-1)\left(1+\sqrt[6]{x-1}\right)}\mathrm{d}x = \left\{\begin{array}{ll} \sqrt[12]{x-1}=t; & x-1=t^{12}; \\ \mathrm{d}x = 12t^{11}\mathrm{d}t; & \end{array}\right\} = \int \frac{(t^4+t^3)12t^{11}\mathrm{d}t}{t^{12}(1+t^2)} = 12\int \frac{t^3+t^2}{t^2+1}\mathrm{d}t =$$
$$= 12\left(\int \frac{t^3}{t^2+1}\mathrm{d}t + \int \frac{t^2}{t^2+1}\mathrm{d}t\right) = 12\left(\int\left(t-\frac{t}{t^2+1}\right)\mathrm{d}t + \int\left(1-\frac{1}{t^2+1}\right)\mathrm{d}t\right) = 12\int t\mathrm{d}t - 12\int\frac{t\mathrm{d}t}{t^2+1} +$$
$$+12\int \mathrm{d}t - 12\int\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = 6t^2+12t-6\ln(t^2+1)-12\,\mathrm{arctg}\,t + C = 6\sqrt[6]{x-1}+12\sqrt[12]{x-1}-$$
$$-6\ln(\sqrt[6]{x-1}+1)-12\,\mathrm{arctg}\,\sqrt[12]{x-1}+C$$

1.7.2 Інтегрування біноміальних диференціалів

Означення: **Біноміальним диференціалом** називається вираз $x^m\left(a+bx^n\right)^p\mathrm{d}x$, де m, n і p – раціональні числа.

Як було доведено академіком П. Л. Чебишовим (1821–1894), інтеграл від біноміального диференціала може бути виражений через елементарні функції тільки у наступних трьох випадках:

1. Якщо p – ціле число, то інтеграл раціоналізується за допомогою підстановки $t=\sqrt[\lambda]{x}$, де λ – спільний знаменник m і n.
2. Якщо $\dfrac{m+1}{n}$ – ціле число, то інтеграл раціоналізується підстановкою $t=\sqrt[s]{a+bx^n}$, де s – знаменник числа p.
3. Якщо $\dfrac{m+1}{n}+p$ – ціле число, то використовується підстановка $t=\sqrt[s]{\dfrac{a+bx^n}{x^n}}$, де s – знаменник числа p

Однак, найбільше практичне значення мають інтеграли від функцій, раціональних щодо аргументу і квадратного кореня із квадратного тричлена.

На розгляді цих інтегралів зупинимося більш докладно.

1.7.3 Інтеграли типу $\int R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)\mathrm{d}x$

Існує кілька способів інтегрування такого роду функцій. Залежно від типу виразу, що стоїть під знаком радикала, переважно застосовувати той або інший спосіб.

Як відомо, квадратний тричлен шляхом виділення повного квадрата може бути зведений до вигляду:

$$\pm u^2 \pm m^2.$$

Таким чином, інтеграл приводиться до одного з трьох типів:

1. $\int R(u,\sqrt{m^2-u^2})\mathrm{d}u$;
2. $\int R(u,\sqrt{m^2+u^2})\mathrm{d}u$;
3. $\int R(u,\sqrt{u^2-m^2})\mathrm{d}u$;

1.7.3.1 1 спосіб. Тригонометрична підстановка

Теорема: Інтеграл типу $\int R(u,\sqrt{m^2-u^2})\mathrm{d}u$ підстановкою $u=m\sin t$ або $u=m\cos t$ зводиться до інтеграла від раціональної функції відносно $\sin t$ або $\cos t$.

Приклад:

$$\int\sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x = \left\{\begin{array}{l} x=a\sin t; \\ \mathrm{d}x=a\cos t\mathrm{d}t \end{array}\right\} = \int\sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}\,a\cos t\mathrm{d}t = \int a^2\cos^2 t\mathrm{d}t = \frac{a^2}{2}\int(1+\cos 2t)\mathrm{d}t =$$
$$= \frac{a^2 t}{2}+\frac{a^2}{4}\sin 2t + C = \frac{a^2 t}{2}+\frac{a^2}{2}\sin t\cos t + C = \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+C$$

Теорема: Інтеграл типу $\int R(u,\sqrt{m^2+u^2})\mathrm{d}u$ підстановкою $u=m\,\mathrm{tg}\,t$ або $u=m\,\mathrm{ctg}\,t$ зводиться до інтеграла від раціональної функції відносно $\sin t$ і $\cos t$.

Приклад:

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{x^4\sqrt{a^2+x^2}} = \left\{\begin{array}{l} x=a\,\mathrm{tg}\,t; \mathrm{d}x=\dfrac{a}{\cos^2 t}\mathrm{d}t; \\ \sqrt{a^2+x^2}=\dfrac{a}{\cos t}; \end{array}\right\} = \int\frac{a\cos t\mathrm{d}t}{\cos^2 t\ \ a^4\,\mathrm{tg}^4\,t a} = \int\frac{\cos^3 t\mathrm{d}t}{a^4\sin^4 t} = \frac{1}{a^4}\int\frac{(1-\sin^2 t)\mathrm{d}\sin t}{\sin^4 t} =$$
$$= -\frac{1}{3a^4\sin^3 t}+\frac{1}{a^4\sin t}+C = \left\{\sin t=\sqrt{1-\frac{a^2}{a^2+x^2}}=\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}\right\} = -\frac{(a^2+x^2)^{3/2}}{3a^4x^3}+\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{a^4x}+C$$

Теорема: Інтеграл типу $\int R(u,\sqrt{u^2-m^2})\mathrm{d}u$ підстановкою $u=\dfrac{1}{\sin t}$ або $u=\dfrac{1}{\cos t}$ зводиться до інтеграла від раціональної функції відносно $\sin t$ або $\cos t$.

Приклад:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x(x^2-4)^{5/2}} = \left\{ \begin{array}{l} x = \dfrac{2}{\cos t}; \mathrm{d}x = \dfrac{2\sin t}{\cos^2 t}\mathrm{d}t; \\ \sqrt{x^2-4} = 2\operatorname{tg} t; \end{array} \right\} = \int \frac{2\sin t\cos t\mathrm{d}t}{\cos^2 t\cdot 2\cdot 2^5\operatorname{tg}^5 t} = \frac{1}{32}\int \operatorname{ctg}^4 t\mathrm{d}t =$$
$$= \frac{1}{32}\int \operatorname{ctg}^2 t\left(\frac{1}{\sin^2 t}-1\right)\mathrm{d}t = -\frac{1}{32}\int \operatorname{ctg}^2 t\mathrm{d}(\operatorname{ctg} t) - \frac{1}{32}\int \operatorname{ctg}^2 t\mathrm{d}t = -\frac{1}{96}\operatorname{ctg}^3 t - \frac{1}{32}\int\left(\frac{1}{\sin^2 t}-1\right)\mathrm{d}t =$$
$$= -\frac{1}{96}\operatorname{ctg}^3 t + \frac{1}{32}\operatorname{ctg} t + \frac{t}{32} + C = \left\{\operatorname{ctg} t = \frac{2}{\sqrt{x^2-4}}\right\} = -\frac{1}{12(x^2-4)^{3/2}} + \frac{1}{16\sqrt{x^2-4}} +$$
$$+\frac{1}{32}\arccos\frac{2}{x} + C$$

1.7.3.2 2 спосіб. Підстановки Ейлера

1. Якщо $a > 0$, то інтеграл типу $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\mathrm{d}x$ раціоналізується підстановкою
$$\sqrt{ax^2+bx+c} = t \pm x\sqrt{a}.$$
2. Якщо $a < 0$ і $c > 0$, то інтеграл типу $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\mathrm{d}x$ раціоналізується підстановкою $\sqrt{ax^2+bx+c} = tx \pm \sqrt{c}$.
3. Якщо $a < 0$, а підкореневий вираз розкладається на дійсні множники $a(x-x_1)(x-x_2)$, то інтеграл типу $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\mathrm{d}x$ раціоналізується підстановкою $\sqrt{ax^2+bx+c} = t(x-x_1)$.

Відзначимо, що підстановки Ейлера незручні для практичного використання, оскільки навіть при нескладних підінтегральних функціях приводять до досить громіздких обчислень.

1.7.3.3 3 спосіб. Метод невизначених коефіцієнтів

Розглянемо інтеграли наступних трьох типів:

$$I.\ \int \frac{P(x)\mathrm{d}x}{\sqrt{ax^2+bx+c}}; \qquad II.\ \int P(x)\sqrt{ax^2+bx+c}\mathrm{d}x; \qquad III.\ \int \frac{\mathrm{d}x}{(x-\alpha)^n\sqrt{ax^2+bx+c}};$$

де $P(x)$ – многочлен, n – натуральне число.

Причому інтеграли II і III типів можуть бути легко зведені до типу інтеграла I типу.

Далі роблять наступне перетворення:

$$\int \frac{P(x)\mathrm{d}x}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = Q(x)\sqrt{ax^2+bx+c} + \lambda\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{ax^2+bx+c}};$$

у цьому виразі $Q(x)$ – деякий многочлен, степінь якого нижче степеня многочлена $P(x)$, а λ – деяка стала величина.

Для знаходження невизначених коефіцієнтів многочлена $Q(x)$, степінь якого нижче степеня многочлена $P(x)$, диференціюють обидві частини отриманого виразу, потім множать на $\sqrt{ax^2+bx+c}$ й, порівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x, визначають λ і коефіцієнти многочлена $Q(x)$.

Даний метод вигідно застосовувати, якщо степінь многочлена $P(x)$ більше одиниці. У інших випадках можна успішно використати методи інтегрування раціональних дробів, розглянуті вище, оскільки лінійна функція є похідною підкореневого виразу.

Приклад

$$\int \frac{3x^3-7x^2+1}{\sqrt{x^2-2x+5}}\mathrm{d}x = (Ax^2+Bx+C)\sqrt{x^2-2x+5} + \lambda\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-2x+5}}.$$

Тепер продиференціюємо отриманий вираз, помножимо на $\sqrt{ax^2+bx+c}$ і згрупуємо коефіцієнти при однакових степенях x.

$$\frac{3x^3-7x^2+1}{\sqrt{x^2-2x+5}} = (2Ax+B)\sqrt{x^2-2x+5} + \frac{Ax^2+Bx+C}{\sqrt{x^2-2x+5}}(x-1) + \frac{\lambda}{\sqrt{x^2-2x+5}}$$
$$(2Ax+B)(x^2-2x+5) + (Ax^2+Bx+C)(x-1) + \lambda = 3x^3-7x^2+1$$
$$2Ax^3 - 4Ax^2 + 10Ax + Bx^2 - 2Bx + 5B + Ax^3 + Bx^2 + Cx - Ax^2 - Bx - C + \lambda = 3x^3-7x^2+1$$
$$3Ax^3 - (5A-2B)x^2 + (10A-3B+C)x + 5B - C + \lambda = 3x^3-7x^2+1$$
$$\left\{ \begin{array}{l} A = 1 \\ 5A-2B = 7 \\ 10A-3B+C = 0 \\ 5B-C+\lambda = 1 \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{l} A = 1 \\ B = -1 \\ C = -13 \\ \lambda = -7 \end{array} \right.$$

Разом $\int \dfrac{3x^3-7x^2+1}{\sqrt{x^2-2x+5}}\mathrm{d}x = (x^2-x-13)\sqrt{x^2-2x+5} - 7\int \dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x-1)^2+4}} =$

$$= (x^2-x-13)\sqrt{x^2-2x+5} - 7\ln(x-1+\sqrt{x^2-2x+5}) + C.$$

Приклад

$$\int (4x^2-6x)\sqrt{x^2+3}\mathrm{d}x = \int \frac{(4x^2-6x)(x^2+3)}{\sqrt{x^2+3}}\mathrm{d}x = (Ax^3+Bx^2+Cx+D)\sqrt{x^2+3} + \lambda\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+3}}$$

$$\frac{4x^4-6x^3+12x^2-18x}{\sqrt{x^2+3}} = (3Ax^2+2Bx+C)\sqrt{x^2+3} + \frac{(Ax^3+Bx^2+Cx+D)x}{\sqrt{x^2+3}} + \frac{\lambda}{\sqrt{x^2+3}}$$

$$4x^4-6x^3+12x^2-18x = (3Ax^2+2Bx+C)(x^2+3) + Ax^4+Bx^3+Cx^2+Dx+\lambda$$

$$4x^4-6x^3+12x^2-18x = 3Ax^4+2Bx^3+Cx^2+9Ax^2+6Bx+3C+Ax^4+Bx^3+Cx^2+Dx+\lambda$$

$$4x^4-6x^3+12x^2-18x = 4Ax^4+3Bx^3+(2C+9A)x^2+(6B+D)x+3C+\lambda$$

$$A=1;\quad B=-2;\quad C=3/2;\quad D=-6;\quad \lambda=-9/2;$$

$$\int (4x^2-6x)\sqrt{x^2+3}\mathrm{d}x = \left(x^3-2x^2+\frac{3}{2}x-6\right)\sqrt{x^2+3} - \frac{9}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2+3}\right| + C.$$

Приклад

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^3\sqrt{x^2-1}} = \left\{\begin{array}{l} x=\dfrac{1}{v}; \\ \mathrm{d}x = -\dfrac{\mathrm{d}v}{v^2} \end{array}\right\} = -\int \frac{v^3\mathrm{d}v}{v^2\sqrt{\dfrac{1}{v^2}-1}} = -\int \frac{v^2\mathrm{d}v}{\sqrt{1-v^2}} = (Av+B)\sqrt{1-v^2} + \lambda\int \frac{\mathrm{d}v}{\sqrt{1-v^2}}$$

$$-\frac{v^2}{\sqrt{1-v^2}} = A\sqrt{1-v^2} - \frac{(Av+B)v}{\sqrt{1-v^2}} + \frac{\lambda}{\sqrt{1-v^2}}$$

$$-v^2 = A - Av^2 - Av^2 - Bv + \lambda$$

$$-v^2 = -2Av^2 - Bv + A + \lambda$$

$$A=1/2;\quad B=0;\quad \lambda=-1/2;$$

$$-\int \frac{v^2\mathrm{d}v}{\sqrt{1-v^2}} = \frac{v\sqrt{1-v^2}}{2} - \frac{1}{2}\arcsin v = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{x^2-1}}{x^2} - \arcsin\frac{1}{x}\right) + C$$

Інший спосіб розв'язання того ж прикладу

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^3\sqrt{x^2-1}} = \left\{\begin{array}{l} x=\dfrac{1}{\cos t}; \mathrm{d}x = \dfrac{\operatorname{tg} t}{\cos t}\mathrm{d}t; \\ \sqrt{x^2-1} = \operatorname{tg} t; \end{array}\right\} = \int \frac{\dfrac{\sin t}{\cos^2 t}}{\dfrac{1}{\cos^3 t}\cdot\operatorname{tg} t}\mathrm{d}t = \int \frac{\sin t\cos^4 t}{\cos^2 t\sin t}\mathrm{d}t = \int \cos^2 t\mathrm{d}t =$$

$$= \int \frac{1}{2}\left(1+\cos 2t\right)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t = \left\{\sin 2t = 2\sin t\cos t = 2\cdot\frac{1}{x}\cdot\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\right\} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\arccos\frac{1}{x} + \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^2}\right) + C$$

З врахуванням того, що функції arcsin і arccos зв'язані співвідношенням $\arcsin\dfrac{1}{x} = \dfrac{\pi}{2} - \arccos\dfrac{1}{x}$, а стала інтегрування C – довільне число, відповіді, отримані різними методами, збігаються.

Як видно, при інтегруванні ірраціональних функцій можна застосовувати різні розглянуті вище прийоми. Вибір методу інтегрування обумовлюється в основному найбільшою зручністю, очевидністю застосування того або іншого методу, а також складністю обчислень і перетворень.

Приклад

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(1-x^2)^{3/2}} = \left\{\begin{array}{l} x=\sin t; \\ \mathrm{d}x = \cos t\mathrm{d}t; \\ \cos t = \sqrt{1-x^2} \end{array}\right\} = \int \frac{\cos t\mathrm{d}t}{\cos^3 t} = \int \frac{\mathrm{d}t}{\cos^2 t} = \operatorname{tg} t + C = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + C.$$

1.8 Кілька прикладів інтегралів, що не виражаються через елементарні функції

До таких інтегралів ставиться інтеграл типу $\int R\left(x, \sqrt{P(x)}\right)\mathrm{d}x$, де $P(x)$ – многочлен степеня вище другого. Ці інтеграли називаються **еліптичними**

Якщо степінь многочлена $P(x)$ вище четвертого, то інтеграл називається **гіпереліптичним**

Якщо все-таки інтеграл такого типу виражається через елементарні функції, то він називається **псевдоеліптичним**

Не можуть бути виражені через елементарні функції наступні інтеграли:

1. $\int e^{-x^2}\mathrm{d}x$ – інтеграл Пуассона[1]
2. $\int \sin x^2\mathrm{d}x$; $\int \cos x^2\mathrm{d}x$ – інтеграли Френеля [2]
3. $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{\ln x}$ – інтегральний логарифм
4. $\int \dfrac{e^x}{x}\mathrm{d}x$ – приводиться до інтегрального логарифма
5. $\int \dfrac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$ – інтегральний синус
6. $\int \dfrac{\cos x}{x}\mathrm{d}x$ – інтегральний косинус

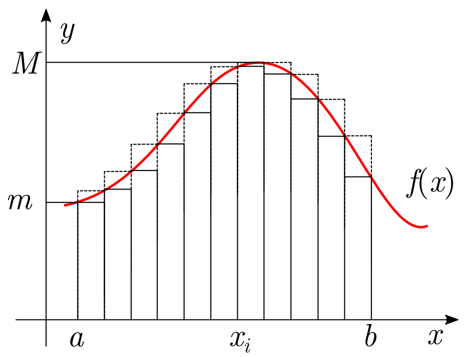
1.9 Визначений інтеграл

Нехай на відрізку $[a, b]$ задана неперервна функція $f(x)$.

Позначимо m і M найменше і найбільше значення функції на відрізку $[a, b]$. Розіб'ємо відрізок $[a, b]$ на частини (необов'язково однакові) n точками.

$$x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n$$

Тоді $x_1 - x_0 = \Delta x_1$, $x_2 - x_1 = \Delta x_2$, $\ldots$, $x_n - x_{n-1} = \Delta x_n$.



На кожному з отриманих відрізків знайдемо найменше і найбільше значення функції.
$[x_0, x_1] \to m_1,\ M_1$; $[x_1, x_2] \to m_2,\ M_2$; $\ldots [x_{n-1}, x_n] \to m_n,\ M_n$...
Складемо суми:

$$\underline{S}_n = m_1\Delta x_1 + m_2\Delta x_2 + \cdots + m_n\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} m_i\Delta x_i$$

$$\overline{S}_n = M_1\Delta x_1 + M_2\Delta x_2 + \cdots + M_n\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} M_i\Delta x_i$$

Сума $\underline{S}_n$ називається **нижньою інтегральною сумою**, а сума $\overline{S}_n$ – **верхньою інтегральною сумою**.
Оскільки $m_i \leqslant M_i$, то $\underline{S}_n \leqslant \bar{S}_n$, а $m\,(b-a) \leqslant \underline{S}_n \leqslant \bar{S}_n \leqslant M\,(b-a)$.
Усередині кожного відрізка виберемо деяку точку ε_i.

$$x_0 < \varepsilon_1 < x_1, x_1 < \varepsilon_2 < x_2, \ldots, x_{n-1} < \varepsilon_n < x_n.$$

Знайдемо значення функції у цих точках і складемо вираз, що називається **інтегральною сумою** для функції $f(x)$ на відрізку $[a, b]$.

[1]Сімеон Дені Пуассон (Siméon Denis Poisson) (1781–1840) – французький математик.
[2]Огюстен-Жан Френель (Augustin-Jean Fresnel) (1788–1827) – французький вчений.

$$S_n = f(\varepsilon_1)\Delta x_1 + f(\varepsilon_2)\Delta x_2 + \cdots + f(\varepsilon_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta x_i.$$

Тоді можна записати: $m_i\Delta x_i \leqslant f\left(\varepsilon_i\right)\Delta x_i \leqslant M_i\Delta x_i$
Отже, $\sum_{i=1}^{n} m_i\Delta x_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta x_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} M_i\Delta x_i$

$$\underline{S_n} \leqslant S_n \leqslant \overline{S_n}$$

Геометрично це представляється у такий спосіб: графік функції $f(x)$ обмежений зверху описаною ламаною лінією, а знизу – вписаною ламаною.

Позначимо $\max\Delta x_i$ – найбільший відрізок розбиття, а $\min\Delta x_i$ – найменший. Якщо $\max\Delta x_i \to 0$, то число відрізків розбиття відрізка $[a, b]$ прямує до нескінченності.

Якщо $S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta x_i$, то $\lim\limits_{\max\Delta x_i\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta x_i = S$.

Означення: Якщо при будь-яких розбиттях відрізка $[a, b]$ таких, що $\max\,\Delta x_i \to 0$ і довільному виборі точок ε_i інтегральна сума $S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta x_i$ прямує до границі S, що називається визначеним інтегралом від $f(x)$ на відрізку $[a, b]$.

Позначення : $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.
a – нижня границя, b – верхня границя, x – змінна інтегрування, $[a, b]$ – відрізок інтегрування.

Означення: Якщо для функції $f(x)$ існує границя $\lim\limits_{\max\Delta x_i\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$, то функція називається **інтегрованою** на відрізку $[a, b]$.

Також вірні твердження: $\lim\limits_{\max\Delta x_i\to 0} \sum_{i=1}^{n} m_i\Delta x_i = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$

$$\lim_{\max\Delta x_i\to 0} \sum_{i=1}^{n} M_i\Delta x_i = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

Теорема: Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a, b]$, то вона інтегрована на цьому відрізку.

1.9.1 Властивості визначеного інтеграла

1. $\int_a^b Af(x)\mathrm{d}x = A\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$;
2. $\int_a^b (f_1(x) \pm f_2(x))\mathrm{d}x = \int_a^b f_1(x)\mathrm{d}x \pm \int_a^b f_2(x)\mathrm{d}x$
3. $\int_a^a f(x)\mathrm{d}x = 0$
4. Якщо $f\left(x\right) \leqslant \varphi\left(x\right)$ на відрізку $[a, b]$ $a < b$, то $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b \varphi(x)\mathrm{d}x$
5. Якщо m і M – відповідно найменше і найбільше значення функції $f(x)$ на відрізку $[a, b]$, то:
$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant M(b-a)$$
6. **Теорема про середнє** Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a, b]$, то на цьому відрізку існує точка ε така, що
$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = (b-a)f(\varepsilon)$$
Доведення: У відповідності із властивістю 5:
$$m \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant M$$
оскільки функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a, b]$, то вона приймає на цьому відрізку всі значення від m до M. Інакше кажучи, існує таке число $\varepsilon \in [a, b]$, що якщо $\dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \mu$ і $\mu = f(\varepsilon)$, а $a \leqslant \varepsilon \leqslant b$, тоді $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = (b-a)f(\varepsilon)$. Теорему доведено.
7. Для довільних чисел a, b, c справедлива рівність:
$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x$$
Зрозуміло, ця рівність виконується, якщо існує кожний із інтегралів, що входять у неї.

8.

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\mathrm{d}x$$

<u>Узагальнена теорема про середнє</u> Якщо функції $f(x)$ і $\varphi(x)$ неперервні на відрізку $[a, b]$, і функція $\varphi(x)$ знакостала на ньому, то на цьому відрізку існує точка ε, така, що

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x = f(\varepsilon)\int_a^b \varphi(x)\mathrm{d}x$$

1.9.2 Обчислення визначеного інтеграла

Нехай в інтегралі $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ нижня границя $a = const$, а верхня границя b змінюється. Очевидно, що якщо змінюється верхня границя, то змінюється і значення інтеграла.

Позначимо $\int_a^x f(t)\mathrm{d}t = \Phi(x)$. Знайдемо похідну функції $\Phi(x)$ за змінною верхньої границі, x.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t = f(x)$$

Аналогічну теорему можна довести для випадку змінної нижньої границі.

<u>Теорема:</u> Для всякої функції $f(x)$, неперервної на відрізку $[a, b]$, існує на цьому відрізку первісна, а виходить, існує невизначений інтеграл.

<u>Теорема:</u> (Теорема Ньютона-Ляйбніца)

Якщо функція $F(x)$ – якась первісна від неперервної функції $f(x)$, то

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

це вираз відомий за назвою формули Ньютона-Ляйбніца.

<u>Доведення:</u> Нехай $F(x)$ – первісна функції $f(x)$. Тоді відповідно до наведеної вище теореми, функція $\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ – первісна функція від $f(x)$. Але оскільки функція може мати нескінченно багато первісних, які будуть відрізнятися одна від одної тільки на якесь стале число C, то

$$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t = F(x) + C$$

при відповідному виборі C ця рівність справедлива для будь-якого x, тобто при $x = a$:

$$\int_a^a f(t)\mathrm{d}t = F(a) + C$$

$$0 = F(a) + C$$

$$C = -F(a)$$

Тоді $\int_a^x f(t)\mathrm{d}t = F(x) - F(a)$.

А при $x = b$: $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = F(b) - F(a)$

Замінивши змінну t на змінну x, одержуємо формулу Ньютона-Ляйбніца:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

Теорему доведено.

Іноді застосовують позначення $F(b) - F(a) = F(x)|_a^b$.

Формула Ньютона-Ляйбніца являє собою загальний підхід до знаходження визначених інтегралів.

Що стосується прийомів обчислення визначених інтегралів, то вони практично нічим не відрізняються від всіх тих прийомів і методів, які були розглянуті вище при знаходженні невизначених інтегралів.

Точно так само застосовуються методи підстановки (заміни змінної), метод інтегрування частинами, ті ж прийоми знаходження первісних для тригонометричних, ірраціональних і трансцендентних функцій. Особливістю є тільки те, що при застосуванні цих прийомів треба поширювати перетворення не тільки на підінтегральну функцію, але і на границі інтегрування. Заміняючи змінну інтегрування, слід не забувати змінити відповідно границі інтегрування.

1.9.3 Заміна змінних

Нехай заданий інтеграл $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$, де $f(x)$ – неперервна функція на відрізку $[a,b]$.
Введемо нову змінну відповідно до формули $x=\varphi(t)$.
Тоді якщо
1) $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$
2) $\varphi(t)$ і $\varphi'(t)$ неперервні на відрізку $[\alpha,\beta]$.
3) $f(\varphi(t))$ визначена на відрізку $[\alpha,\beta]$, то

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t$$

Тоді $\int_\alpha^\beta f\left[\varphi(t)\right]\varphi'(t)\mathrm{d}t=F\left[\varphi(t)\right]\big|_\alpha^\beta=F\left[\varphi(\beta)\right]-F\left[\varphi(\alpha)\right]=F(b)-F(a)$
<u>Приклад</u>

$$\int_0^1\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x=\left\{\begin{array}{l}x=\sin t;\\ \alpha=0;\ \beta=\pi/2\end{array}\right\}=\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-\sin^2 t}\cos t\mathrm{d}t=\int_0^{\pi/2}\cos^2 t\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}(1+\cos 2t)\mathrm{d}t=$$
$$=\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{\pi/2}=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{4}\sin\pi=\frac{\pi}{4}$$

При заміні змінної у визначеному інтегралі слід пам'ятати про те, що вводять функцію, що (у розглянутому прикладі це функція sin) повинна бути неперервна на відрізку інтегрування. У противному випадку формальне застосування формули приводить до абсурду.
<u>Приклад</u>
$\int_0^\pi \mathrm{d}x=x|_0^\pi=\pi$, з іншого боку, якщо застосувати тригонометричну підстановку,

$$\int_0^\pi \mathrm{d}x=\int_0^\pi\frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x+\cos^2 x}=\int_0^\pi\frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x(1+\operatorname{tg}^2 x)}=\{\operatorname{tg}x=t\}=\int_0^0\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}=0$$

Тобто два способи знаходження інтеграла дають різні результати. Це відбулося через те, що не був врахований той факт, що уведена змінна tg x має на відрізку інтегрування розрив (у точці $x=\pi/2$). Тому у цьому випадку така підстановка незастосовна. При заміні змінної у визначеному інтегралі слід уважно стежити за виконанням перерахованих вище умов.

1.9.4 Інтегрування частинами

Якщо функції $u=\varphi(x)$ та $v=\psi(x)$ неперервні на відрізку $[a,b]$, а також неперервні на цьому відрізку їхні похідні, то справедлива формула інтегрування частинами:

$$\int_a^b u\mathrm{d}v=uv|_a^b-\int_a^b v\mathrm{d}u.$$

Виведення цієї формули абсолютно аналогічне виведенню формули інтегрування частинами для невизначеного інтеграла, що був досить докладно розглянутий вище, тому тут наводити його немає сенсу.

1.9.5 Наближене обчислення визначеного інтеграла

Як було сказано вище, існує величезна кількість функцій, інтеграл від яких не може бути виражений через елементарні функції. Для знаходження інтегралів від подібних функцій застосовуються різноманітні наближені методи, суть яких полягає у тому, що підінтегральна функція заміняється «близькою» до неї функцією, інтеграл від якої виражається через елементарні функції.

Якщо відомі значення функції $f(x)$ у деяких точках x_0, x_1, ..., x_m, то як функція «близьку» до $f(x)$ можна взяти многочлен $P(x)$ степеня не вище m, значення якого у вибраних точках дорівнюють значенням функції $f(x)$ у цих точках.

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\approx\int_a^b P(x)\mathrm{d}x$$

1.9.6 Формула прямокутників

Якщо розбити відрізок інтегрування монотонно функції, що монотонно зростає, на n рівних частин $\Delta x=\dfrac{b-a}{n}$. При цьому:

$$y_0=f(x_0),y_1=f(x_1),\ldots,y_n=f(x_n).$$

Складемо суми:

$$y_0\Delta x + y_1\Delta x + \cdots + y_{n-1}\Delta x$$

$$y_1\Delta x + y_2\Delta x + \cdots + y_n\Delta x$$

Це відповідно нижня і верхня інтегральні суми. Перша відповідає вписаній ламаній, друга – описаній.

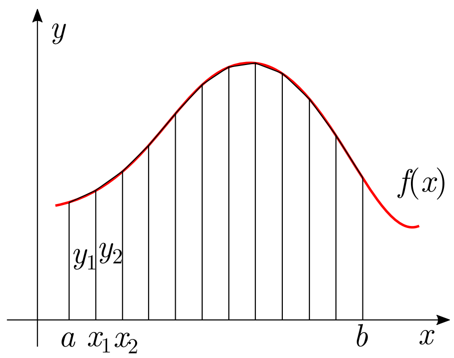
Тоді $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \dfrac{b-a}{n}(y_0 + y_1 + ... + y_{n-1})$ або

$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \dfrac{b-a}{n}(y_1 + y_2 + ... + y_n)$ – кожна із цих формул може застосовуватися для наближеного обчислення визначеного інтеграла і називається **загальною формулою прямокутників**.

1.9.7 Формула трапецій

Ця формула є локально більш точною у порівнянні з формулою прямокутників. Підінтегральна функція у цьому випадку заміняється на вписану ламану.

Геометрично площа криволінійної трапеції заміняється сумою площ вписаних трапецій. Очевидно, що чим більше взяти точок n розбиття інтервалу, тим з більшою точністю буде обчислений інтеграл.



Площі вписаних трапецій обчислюються за формулами:

$$\frac{y_0+y_1}{2}\Delta x; \quad \frac{y_1+y_2}{2}\Delta x; \quad ... \quad , \frac{y_{n-1}+y_n}{2}\Delta x$$

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{y_0+y_1}{2}\Delta x + \frac{y_1+y_2}{2}\Delta x + ... + \frac{y_{n-1}+y_n}{2}\Delta x$$

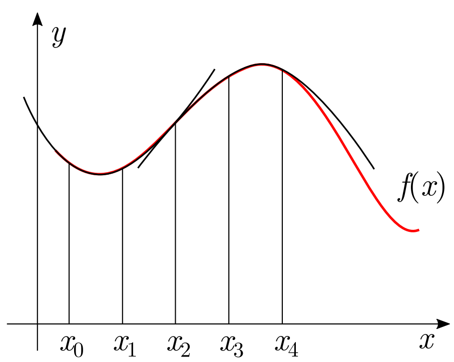
Після приведення подібних доданків одержуємо **формулу трапецій**:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{b-a}{n}\left(\frac{y_0+y_n}{2} + y_1 + y_2 + ... + y_{n-1}\right)$$

1.9.8 Формула парабол (формула Сімпсона або квадратурна формула)

Розділимо відрізок інтегрування $[a, b]$ на парне число відрізків $(2m)$. Площу криволінійної трапеції, обмеженої графіком функції $f(x)$ замінимо на площу криволінійної трапеції, обмеженою параболою другого степеня з віссю симетрії, паралельною осі Oy, такої, що проходить через точки кривої зі значеннями $f(x_0)$, $f(x_1)$, $f(x_2)$.

Для кожної пари відрізків побудуємо таку параболу.



Рівняння цих парабол мають вигляд $Ax^2 + Bx + C$, де коефіцієнти A, B, C можуть бути легко знайдені за трьома точками перетину параболи з вихідною кривою.

$$\begin{aligned} y_0 &= Ax_0^2 + Bx_0 + C \\ y_1 &= Ax_1^2 + Bx_1 + C \\ y_2 &= Ax_2^2 + Bx_2 + C \end{aligned} \tag{1}$$

Позначимо $2h = x_2 - x_0$.

$$S = \int_{x_0}^{x_2} (Ax^2 + Bx + C)\mathrm{d}x = \left[A\frac{x^3}{3} + B\frac{x^2}{2} + Cx\right]\Big|_{x_0}^{x_2}$$

Якщо прийняти

$$x_0 = -h, x_1 = 0, x_2 = h, \text{ то } S = \frac{h}{3}(2Ah^2 + 6C) \tag{2}$$

Тоді рівняння значень функції (1) мають вигляд:

$$\begin{aligned} y_0 &= Ah^2 - Bh + C \\ y_1 &= C \\ y_2 &= Ah^2 + Bh + C \end{aligned}$$

З врахуванням цього: $y_0 + 4y_1 + y_2 = 2Ah^2 + 6C$.

Звідси рівняння (2) набуде вигляду:

$$S = \frac{h}{3}\left(y_0 + 4y_1 + y_2\right)$$

Тоді

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2)$$
$$\int_{x_2}^{x_4} f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{h}{3}(y_2 + 4y_3 + y_4)$$
....

Складаючи ці вирази, одержуємо **формулу Сімпсона:**

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \frac{b-a}{6m}\left[y_0 + y_{2m} + 2(y_2 + y_4 + ... + y_{2m-2}) + 4(y_1 + y_3 + ... + y_{2m-1})\right]$$

Чим більше взяти число m, тим більше точне значення інтеграла буде отримано.

Приклад Обчислити наближене значення визначеного інтеграла $\int_{-2}^{8}\sqrt{x^3+16}\mathrm{d}x$ за допомогою формули Сімпсона[3], розбивши відрізок інтегрування на 10 частин.

За формулою Сімпсона одержимо:

$$\int_{-2}^{8}\sqrt{x^3+16}\mathrm{d}x \approx \frac{8+2}{6\cdot 5}[y(-2) + y(8) + 2[y(0) + y(2) + y(4) + y(6)] + 4[y(-1) + y(1) + y(3) + y(5) + y(7)]]$$

m	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x	– 2	– 1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$f(x)$	2,828	3,873	4	4,123	4,899	6,557	8,944	11,874	15,232	18,947	22,978

$$\int_{-2}^{8}\sqrt{x^3+16}\mathrm{d}x \approx \frac{8+2}{6\cdot 5}[2,828 + 22,978 + 2[4 + 4,899 + 8,944 + 15,232] + 4[3,873 + 4,123 + 6,557 +$$

$$+ 11,874 + 18,947]] = 91,151$$

Точне значення цього інтеграла – $91,173$.

Як видно, навіть при порівняно великому кроці розбиття точність отриманого результату цілком задовільна.

Для порівняння застосуємо до цієї ж задачі формулу трапецій.

$$\int_{-2}^{8}\sqrt{x^3+16}\mathrm{d}x \approx \frac{b-a}{n}\left(\frac{y_0+y_n}{2} + y_1 + y_2 + ... + y_{n-1}\right) = \frac{8+2}{10}\left(\frac{2,828+22,978}{2} + 3,873 + 4 + 4,123 + \right.$$
$$\left. + 4,899 + 6,557 + 8,944 + 11,874 + 15,232 + 18,947\right) = 91,352$$

Формула трапецій дала менш точний результат у порівнянні з формулою Сімпсона.

[3]Томас Сімпсон (Thomas Simpson) (1710–1761) – англійський математик.

1.10 Невласні інтеграли

Нехай функція $f(x)$ визначена і неперервна на інтервалі $[a,\, \infty)$. Тоді вона неперервна на будь-якому відрізку $[a, b]$.

<u>**Означення:**</u> Якщо існує скінченна границя $\lim\limits_{b\to\infty}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$, то ця границя називається **невласним інтегралом** від функції $f(x)$ на інтервалі $[a,\infty)$.

Позначення: $\lim\limits_{b\to\infty}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^\infty f(x)\mathrm{d}x$

Якщо ця границя **існує** і **скінченна**, то кажуть, що невласний інтеграл **збігається**.

Якщо границя не існує або нескінченна, то невласний інтеграл розбігається.

Аналогічні міркування можна привести для невласних інтегралів вигляду:

$$\int_{-\infty}^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^\infty f(x)\mathrm{d}x$$

Звичайно, ці твердження справедливі, якщо інтеграли, що до них входять, існують.

<u>Приклад</u>

$\int_0^\infty \cos x\mathrm{d}x = \lim\limits_{b\to\infty}\int_0^b \cos x\mathrm{d}x = \lim\limits_{b\to\infty}\sin x|_0^b = \lim\limits_{b\to\infty}(\sin b - \sin 0) = \lim\limits_{b\to\infty}\sin b$ не існує.

Невласний інтеграл розбіжний.

<u>Приклад</u>

$\int_{-\infty}^{-1}\dfrac{\mathrm{d}x}{x^2} = \lim\limits_{b\to-\infty}\int_b^{-1}\dfrac{\mathrm{d}x}{x^2} = \lim\limits_{b\to-\infty}\left[-\dfrac{1}{x}\right]\Bigg|_b^{-1} = \lim\limits_{b\to-\infty}\left(1+\dfrac{1}{b}\right) = 1$ – інтеграл збіжний.

<u>**Теорема:**</u> Якщо для всіх x $(x\geqslant a)$ виконується умова $0\leqslant f(x)\leqslant\varphi(x)$ і інтеграл $\int_a^\infty\varphi(x)\mathrm{d}x$ збігається, то $\int_a^\infty f(x)\mathrm{d}x$ теж збігається і $\int_a^\infty\varphi(x)\mathrm{d}x \geqslant \int_a^\infty f(x)\mathrm{d}x$.

<u>**Теорема:**</u> Якщо для всіх x $(x\geqslant a)$ виконується умова $0\leqslant f(x)\leqslant\varphi(x)$ і інтеграл $\int_a^\infty f(x)\mathrm{d}x$ розбігається, то $\int_a^\infty\varphi(x)\mathrm{d}x$ теж розбігається.

<u>**Теорема:**</u> Якщо $f(x)\sim\varphi(x)$ при $x\to\infty$, інтеграли $\int_a^\infty\varphi(x)\mathrm{d}x$ і $\int_a^\infty f(x)\mathrm{d}x$ збіжні або розбіжні одночасно.

<u>**Теорема:**</u> Якщо $\int_a^\infty|f(x)|\,\mathrm{d}x$ збігається, то збігається і інтеграл $\int_a^\infty f(x)\mathrm{d}x$. У цьому випадку інтеграл $\int_a^\infty f(x)\mathrm{d}x$ називається **абсолютно збіжним**.

1.10.1 Інтеграл від розривної функції

Якщо у точці $x=c$ функція або невизначена, або розривна, то

$$\int_a^c f(x)\mathrm{d}x = \lim_{b\to c-0}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

Якщо інтеграл $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ існує, то інтеграл $\int_a^c f(x)\mathrm{d}x$ – збігається, якщо інтеграл $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ не існує, то $\int_a^c f(x)\mathrm{d}x$ – розбігається.

Якщо у точці $x=a$ функція терпить розрив, то $\int_a^c f(x)\mathrm{d}x = \lim\limits_{b\to a+0}\int_b^c f(x)\mathrm{d}x$.

Якщо функція $f(x)$ має розрив у точці b на проміжку $[a,c]$, то

$$\int_a^c f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\mathrm{d}x$$

Таких точок всередині відрізку може бути кілька.

Якщо збігаються всі інтеграли, що входять у суму, то збігається і сумарний інтеграл.

1.11 Геометричні застосування визначеного інтеграла

1.11.1 Обчислення площ плоских фігур

Відомо, що визначений інтеграл на відрізку являє собою площу криволінійної трапеції, обмеженої графіком функції $f(x)$. Якщо графік розташований нижче осі Ox, тобто $f(x)<0$, то площа має знак «–», якщо графік розташований вище осі Ox, тобто $f(x)>0$, то площа має знак «+».

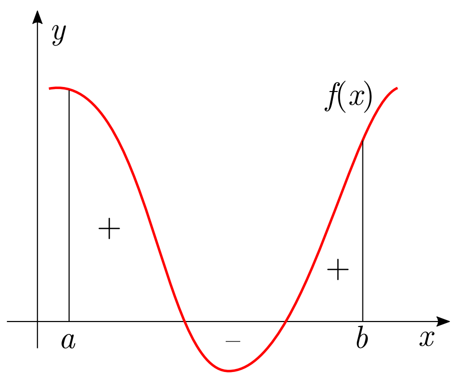
Для знаходження сумарної площі використовується формула $S=\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|$.

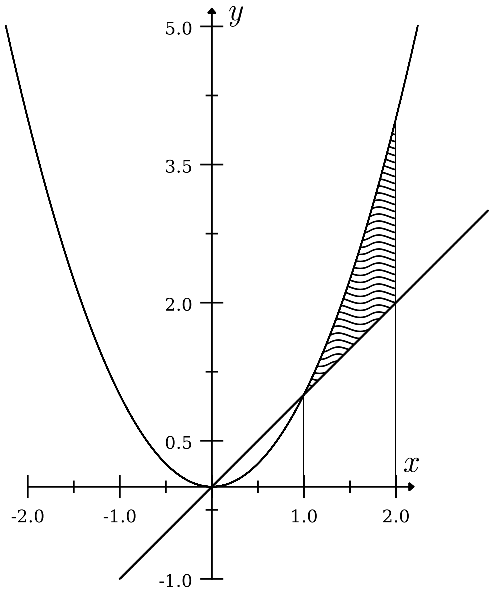
Площа фігури, обмеженої деякими лініями може бути знайдена за допомогою визначених інтегралів, якщо відомі рівняння цих ліній.

<u>Приклад</u> Знайти площу фігури, обмеженої лініями $y=x$, $y=x^2$, $x=2$.

Шукана площа (заштрихована на малюнку) може бути знайдена за формулою:

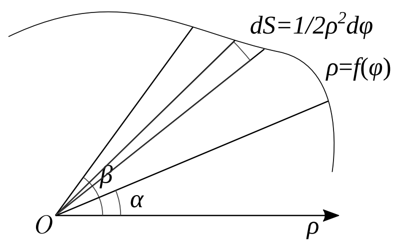
$S=\int\limits_1^2 x^2\mathrm{d}x - \int\limits_1^2 x\mathrm{d}x = \left[\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^2}{2}\right]\Bigg|_1^2 = \dfrac{8}{3}-\dfrac{4}{2}-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{5}{6}(\text{од}^2).$





1.11.2 Знаходження площі криволінійного сектора

Для знаходження площі криволінійного сектора введемо полярну систему координат. Рівняння кривої, що обмежує сектор у цій системі координат, має вигляд $\rho = f(\varphi)$, де ρ – довжина радіус-вектора, що з'єднує полюс із довільною точкою кривої, а φ – кут нахилу цього радіус-вектора до полярної осі.



Оскільки площа елементарного сектора обчислюється за формулою, показаною на рисунку, площа криволінійного сектора може бути знайдена за формулою

$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} f^2(\varphi) \mathrm{d}\varphi$$

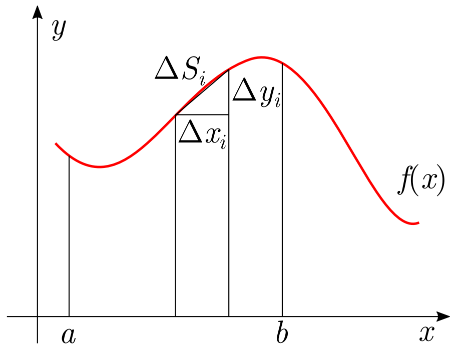
1.11.3 Обчислення довжини дуги кривої

Довжина ламаної лінії, що відповідає дузі, може бути знайдена як $S_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta S_i$.
Тоді довжина дуги дорівнює $S = \lim\limits_{\max \Delta S_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta S_i$.

З геометричних міркувань: $\Delta S_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2} \cdot \Delta x_i$

У той же час $\dfrac{\Delta y_i}{\Delta x_i} = \dfrac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{\Delta x_i}$
Тоді можна показати (див. Інтегрована функція), що

$$S = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta S_i = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2} \mathrm{d}x$$



Тобто $S = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\mathrm{d}x$

Якщо рівняння кривої задане параметрично, то з урахуванням правил обчислення похідної параметрично заданої функції, одержуємо

$$S = \int_\alpha^\beta \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\mathrm{d}t,$$

де $x = \varphi(t)$ і $y = \psi(t)$.

Якщо задано **просторову криву**, і $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ і $z = Z(t)$, то

$$S = \int_\alpha^\beta \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2 + [Z'(t)]^2}\mathrm{d}t$$

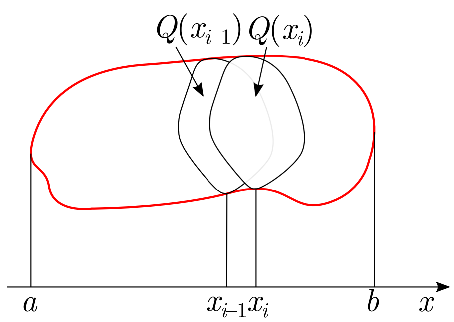
Якщо крива задана в **полярних координатах**, то
$S = \int_\alpha^\beta \sqrt{\rho'^2 + \rho^2}\mathrm{d}\varphi$, $\rho = f(\varphi)$.
<u>Приклад:</u> Знайти довжину кола, заданого рівнянням $x^2 + y^2 = r^2$.
1 спосіб Виразимо з рівняння змінну y. $y = \sqrt{r^2 - x^2}$
Знайдемо похідну $y' = -\dfrac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$
Тоді $\dfrac{1}{4}S = \int_0^r \sqrt{1 + \dfrac{x^2}{r^2 - x^2}}\mathrm{d}x = \int_0^r \dfrac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}}\mathrm{d}x = r \cdot \arcsin \dfrac{x}{r}\Big|_0^r = r\dfrac{\pi}{2}$
Тоді $S = 2\pi r$. Одержали загальновідому формулу довжини кола.

2 спосіб Якщо представити задане рівняння у полярній системі координат, то одержимо: $r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi = r^2$, тобто функція $\rho = f(\varphi) = r$, $\rho' = \dfrac{\mathrm{d}f(\varphi)}{\mathrm{d}\varphi} = 0$ тоді

$$S = \int_0^{2\pi} \sqrt{0 + r^2}\mathrm{d}\varphi = r\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi = 2\pi r$$

1.11.4 Обчислення об'ємів тіл

1.11.4.1 Обчислення об'єму тіла за відомими площами його паралельних перетинів



Нехай є тіло об'єму V. Площа будь-якого поперечного перерізу тіла Q, відома як неперервна функція $Q = Q(x)$. Розіб'ємо тіло на «шари» поперечними перерізами, що проходять через точки x_i розбиття відрізка $[a, b]$. Оскільки на будь-якому проміжному відрізку розбиття $[x_{i-1}, x_i]$ функція $Q(x)$ неперервна, то приймає на ньому найбільше і найменше значення. Позначимо їх відповідно M_i і m_i.

Якщо на цих найбільшому і найменшому перетинах побудувати циліндри з твірними, паралельними осі x, то об'єми цих циліндрів будуть відповідно рівні $M_i\Delta x_i$ і $m_i\Delta x_i$ тут $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.

Зробивши такі побудови для всіх відрізків розбиття, одержимо циліндри, об'єми яких рівні відповідно $\sum_{i=1}^n M_i\Delta x_i$ і $\sum_{i=1}^n m_i\Delta x_i$.

При прямуванні до нуля кроку розбиття λ, ці суми мають спільну границю:

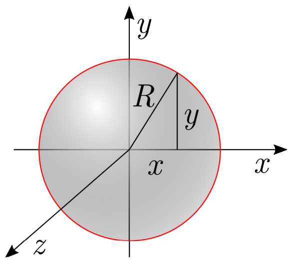
$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} M_i\Delta x_i = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} m_i\Delta x_i = \int_a^b Q(x)\mathrm{d}x$$

Таким чином, об'єм тіла може бути знайдений за формулою:

$$V = \int_a^b Q(x)\mathrm{d}x$$

Недоліком цієї формули є те, що для знаходження об'єму необхідно знати функцію $Q(x)$, що досить проблематично для складних тіл.

Приклад: Знайти об'єм кулі радіуса R.



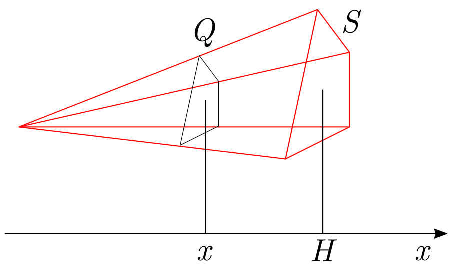
У поперечних перерізах кулі виходять кола змінного радіуса y. Залежно від поточної координати x цей радіус виражається за формулою $\sqrt{R^2 - x^2}$.

Тоді функція площ перетинів має вигляд: $Q(x) = \pi\left(R^2 - x^2\right)$.

Одержуємо об'єм кулі:

$$V = \int_{-R}^{R}\pi(R^2 - x^2)\mathrm{d}x = \pi\left(R^2x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-R}^{R} = \pi\left(R^3 - \frac{R^3}{3}\right) - \pi\left(-R^3 + \frac{R^3}{3}\right) = \frac{4\pi R^3}{3}.$$

Приклад: Знайти об'єм довільної піраміди з висотою H і площею основи S.



При перетині піраміди площинами, перпендикулярними висоті, у перетині одержуємо фігури, подібні до основи. Коефіцієнт подібності цих фігур дорівнює відношенню x/H, де x – відстань від площини перетину до вершини піраміди.

З геометрії відомо, що відношення площ подібних фігур дорівнює коефіцієнту подоби у квадраті, тобто

$$\frac{Q}{S} = \left(\frac{x}{H}\right)^2$$

Звідси одержуємо функцію площ перетинів: $Q(x) = \dfrac{S}{H^2}x^2$.

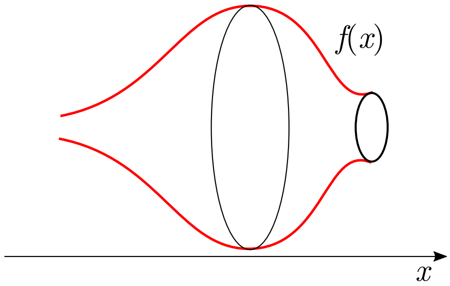
Знаходимо об'єм піраміди: $V = \int\limits_0^H \dfrac{S}{H^2}x^2\mathrm{d}x = \dfrac{Sx^3}{3H^2}\Bigg|_0^H = \dfrac{1}{3}SH$

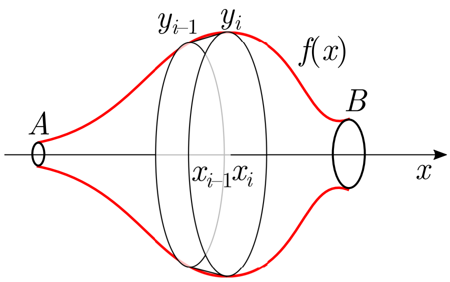
1.11.4.2 Об'єм тіл обертання

Розглянемо криву, задану рівнянням $y = f(x)$. Припустимо, що функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a, b]$. Якщо відповідну їй криволінійну трапецію з основами a і b обертати навколо осі Ox, то одержимо так зване **тіло обертання**.

Оскільки кожний перетин тіла площиною $x = const$ являє собою коло радіуса $R = |f(x)|$, то об'єм тіла обертання може бути легко знайдений за отриманою вище формулою:

$$V = \pi\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x$$





1.11.5 Площа поверхні тіла обертання

Означення: Площею поверхні обертання кривої AB навколо даної осі називають границю, до якої прямують площі поверхонь обертання ламаних, вписаних у криву AB, при прямуванні до нуля найбільших з довжин ланок цих ламаних.

Розіб'ємо дугу AB на n частин точками $M_0, M_1, M_2, \ldots, M_n$ ... Координати вершин отриманої ламаної мають координати x_i і y_i. При обертанні ламаної навколо осі одержимо поверхню, що складається з бічних поверхонь усічених конусів, площа яких дорівнює ΔP_i. Ця площа може бути знайдена за формулою:

$$\Delta P_i = 2\pi \frac{y_{i-1} + y_i}{2} \Delta S_i$$

Тут ΔS_i – довжина кожної хорди.

$$\Delta S_i = \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2} \Delta x_i$$

Застосовуємо теорему Лагранжа до відношення $\dfrac{\Delta y_i}{\Delta x_i}$.

Одержуємо: $\dfrac{\Delta y_i}{\Delta x_i} = \dfrac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} = f(\varepsilon_i), \quad x_{i-1} < \varepsilon < x_i$

Тоді $\Delta S_i = \sqrt{1 + f'^2(\varepsilon_i)} \Delta x_i$

$$\Delta P_i = 2\pi \frac{y_{i-1} + y_i}{2} \sqrt{1 + f'^2(\varepsilon_i)} \Delta x_i$$

Площа поверхні, описаної ламаної дорівнює:

$$P_n = \pi \sum_{i=1}^{n} \left(f(x_{i-1}) + f(x_i)\right) \sqrt{1 + f'^2(\varepsilon_i)} \Delta x_i$$

Ця сума не є інтегральною, але можна показати, що

$$P = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \pi \sum_{i=1}^{n} \left(f(x_{i-1}) + f(x_i)\right) \sqrt{1 + f'^2(\varepsilon_i)} \Delta x_i = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \pi \sum_{i=1}^{n} 2 f(\varepsilon_i) \sqrt{1 + f'^2(\varepsilon_i)} \Delta x_i$$

Тоді $P = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + f'^2(x)} \mathrm{d}x$ – формула обчислення **площі поверхні тіла обертання**

2 Звичайні диференціальні рівняння

Розв'язання різних геометричних, фізичних і інженерних задач часто приводять до рівнянь, які пов'язують незалежні змінні, що характеризують ту чи іншу задачу, з якоюсь функцією цих змінних і похідними цієї функції різних порядків.

Як приклад можна розглянути найпростіший випадок рівноприскореного руху матеріальної точки.

Відомо, що переміщення матеріальної точки при рівноприскореному русі є функцією часу і виражається за формулою:

$$S = V_0 t + \frac{at^2}{2}$$

У свою чергу прискорення a є похідною за часом t від швидкості V, що також є похідною за часом t від переміщення S. Тобто

$$V = \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}; \quad a = \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2 S}{\mathrm{d}t^2};$$

Тоді одержуємо: $S = f(t) = V_0 t + \dfrac{f''(t) \cdot t^2}{2}$ – рівняння зв'язує функцію $f(t)$ з незалежною змінною t і похідною другого порядку функції $f(t)$.

<u>**Означення.**</u> **Диференціальним рівнянням** називається рівняння, що зв'язує незалежні змінні, їхні функції і похідні (або диференціали) цієї функції.

<u>**Означення.**</u> Якщо диференціальне рівняння має одну незалежну змінну, то воно називається **звичайним диференціальним рівнянням**, якщо ж незалежних змінних дві або більше, то таке диференціальне рівняння називається **диференціальним рівнянням у частинних похідних.**

<u>**Означення.**</u> Найвищий порядок похідних, що входять у рівняння, називається **порядком диференціального рівняння.**

<u>Приклад.</u>

$x^3 y' + 8y - x + 5 = 0$ – звичайне диференціальне рівняння 1-го порядку. У загальному вигляді записується $F(x, y, y') = 0$.

$x\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} + xy\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + x^2 = y$ – звичайне диференціальне рівняння 2-го порядку. У загальному вигляді записується $F(x, y, y', y'') = 0$

$y^2\dfrac{\partial z}{\partial x} + xy\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$ – диференціальне рівняння в частинних похідних першого порядку.

<u>**Означення.**</u> **Загальним розв'язком** диференціального рівняння називається така диференційована функція $y = \varphi(x, C)$, що при підставлянні у вихідне рівняння замість невідомої функції обертає рівняння у тотожність.

<u>**Властивості загального розв'язку.**</u>

1) Оскільки стала C – довільна величина, то, загалом кажучи, диференціальне рівняння має нескінченну множину розв'язків.

2) При будь-яких початкових умовах $x = x_0$, $y(x_0) = y_0$ існує таке значення $C = C_0$, при якому розв'язком диференціального рівняння є функція $y = \varphi(x, C_0)$.

<u>**Означення.**</u> Розв'язок вигляду $y = \varphi(x, C_0)$ називається **частинним розв'язком** диференціального рівняння.

<u>**Означення.**</u> **Задачею Коші** називається задача зі знаходження будь-якого частинного розв'язку диференціального рівняння типу $y = \varphi(x, C_0)$, що задовольняє початкову умову $y(x_0) = y_0$.

<u>**Теорема Коші.**</u> (теорема про існування і єдиність розв'язку диференціального рівняння 1-го порядку)

Якщо функція $f(x, y)$ неперервна у деякій області D у площині xOy і має у цій області неперервну частинну похідну $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, то яка б не була точка $(x_0,\ y_0)$ в області D, існує єдиний розв'язок $y = \varphi(x)$ рівняння $y' = f(x, y)$, визначений у деякому інтервалі, що містить точку x_0, що приймає при $x = x_0$ значення $\varphi(x_0) = y_0$, тобто існує єдиний розв'язок задачі Коші.

<u>**Означення.**</u> **Інтегралом** диференціального рівняння називається будь-яке рівняння, що не містить похідних, для якого дане диференціальне рівняння є наслідком.

<u>Приклад.</u> Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння $xy' + y = 0$.

Загальний розв'язок диференціального рівняння шукаємо за допомогою інтегрування лівої і правої частин рівняння, що попередньо перетворені у такий спосіб:

$$x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + y = 0$$

$$x\mathrm{d}y = -y\mathrm{d}x$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{y} = -\frac{\mathrm{d}x}{x}$$

Тепер інтегруємо: $\int \dfrac{\mathrm{d}y}{y} = -\int \dfrac{\mathrm{d}x}{x}$

$$\ln|y| = -\ln|x| + C_0$$

$$\ln|y| + \ln|x| = C_0$$

$$\ln|xy| = C_0$$

$$xy = \pm e^{C_0} = C$$

$y = \dfrac{C}{x}$ – це загальний розв'язок вихідного диференціального рівняння.

Припустимо, задані деякі початкові умови: $x_0 = 1$; $y_0 = 2$.

Тоді

$$2 = \frac{C}{1}; \quad C = 2;$$

При підставлянні отриманого значення сталої в загальний розв'язок одержуємо частинний розв'язок при заданих початкових умовах (розв'язок задачі Коші).

$$y = \frac{2}{x}$$

<u>**Означення.**</u> Якщо у кожній точці деякої області на площині вибрано пряму, що проходить крізь цю точку, кажуть, що в області задано **поле напрямків**.

<u>**Означення.**</u> **Інтегральною кривою** називається графік $y = \varphi(x)$ розв'язку диференціального рівняння на площині xOy.

Лінія, яка у кожній своїй точці дотикається до визначеного у цій точці напрямку поля, є інтегральною кривою поля напрямків.

Отже, оскільки напрямок дотичних визначається похідною, поле напрямків у випадку рівняння першого порядку задається значеннями похідної, залежність якої від координат точки визначається самим рівнянням.

<u>**Означення.**</u> **Особливим розв'язком** диференціального рівняння називається такий розв'язок, у всіх точках якого умова єдиності Коші (див. Теорема Коші) не виконується, тобто в околі деякої точки (x, y) існує не менше двох інтегральних кривих.

Особливі розв'язки не залежать від сталої C.

Особливі розв'язки не можна одержати із загального розв'язку ні при яких значеннях сталої C. Якщо побудувати сімейство інтегральних кривих диференціального рівняння, то особливий розв'язок буде зображуватися лінією, що у кожній своїй точці дотична до принаймні однієї інтегральної кривої.

Відзначимо, що не кожне диференціальне рівняння має особливі розв'язки.

<u>Приклад.</u> Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння: $y' + y = 0$. Знайти особливий розв'язок, якщо він існує.

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -y$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{y} = -\mathrm{d}x$$

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = -\int \mathrm{d}x$$

$$\ln|y| = -x + C$$

$$|y| = e^{-x} \cdot e^{C}$$

$$y = C_1 \cdot e^{-x}$$

Дане диференціальне рівняння має також особливий розв'язок $y = 0$. Цей розв'язок неможливо одержати із загального, однак при підставлянні у вихідне рівняння одержуємо тотожність. Думка, що розв'язок $y = 0$ можна одержати із загального розв'язку при $C = 0$, помилкова, адже $C_1 = e^C \neq 0$.

Далі розглянемо докладніше прийоми і методи, які використаються при розв'язанні диференціальних рівнянь різних типів.

2.1 Диференціальні рівняння першого порядку.

<u>**Означення.**</u> **Диференціальним рівнянням першого порядку** називається співвідношення, що зв'язує функцію, її першу похідну і незалежну змінну, тобто співвідношення вигляду:

$$F(x, y, y') = 0$$

Якщо таке співвідношення перетворити до типу $y' = f(x, y)$ то це диференціальне рівняння першого порядку буде називатися рівнянням, **розв'язним відносно похідної.**

Перетворимо цей вираз далі:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x, y); \quad \mathrm{d}y = f(x, y)\mathrm{d}x; \quad f(x, y)\mathrm{d}x - \mathrm{d}y = 0;$$

Функцію $f(x, y)$ представимо у вигляді: $f(x, y) = -\dfrac{P(x, y)}{Q(x, y)}$, $\quad Q(x, y) \neq 0$; тоді при підставлянні в отримане вище рівняння маємо:

$$P(x, y)\mathrm{d}x + Q(x, y)\mathrm{d}y = 0$$

– це так звана **диференціальна форма** рівняння першого порядку.

Далі розглянемо докладніше типи рівнянь першого порядку і методи їхнього розв'язання.

2.1.1 Рівняння типу $y' = f(x)$

Нехай функція $f(x)$ – визначена і неперервна на деякому інтервалі $a < x < b$. У такому випадку всі розв'язки даного диференціального рівняння знаходяться як $y = \int f(x)\mathrm{d}x + C$. Якщо задані початкові умови x_0 і y_0, то можна визначити сталу C.

2.1.2 Рівняння з відокремлюваними змінними

Означення. Диференціальне рівняння $y' = f(x,y)$ називається **рівнянням з відокремлюваними змінними**, якщо його можна записати у вигляді

$$y' = \alpha(x)\beta(y).$$

Таке рівняння можна представити також у вигляді:

$$y' - \alpha(x)\beta(y) = 0; \quad \mathrm{d}y - \alpha(x)\beta(y)\mathrm{d}x = 0; \quad \frac{\mathrm{d}y}{\beta(y)} - \alpha(x)\mathrm{d}x = 0 \text{ при } \beta(y) \neq 0;$$

Перейдемо до нових позначень $\alpha(x) = -X(x)$; $\quad \dfrac{1}{\beta(y)} = Y(y)$;

Одержуємо: $X(x)\mathrm{d}x + Y(y)\mathrm{d}y = 0$;

$$\int X(x)\mathrm{d}x + \int Y(y)\mathrm{d}y = C$$

Після знаходження відповідних інтегралів виходить загальний розв'язок диференціального рівняння з відокремлюваними змінними.

Якщо задані початкові умови, то при їхній підстановці в загальний розв'язок знаходиться стала величина C, а, відповідно, і частинний розв'язок.

Приклад. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння: $yy' = \dfrac{-2x}{\cos y}$

$$y\cos y \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -2x$$

$$y\cos y\mathrm{d}y = -2x\mathrm{d}x$$

$$\int y\cos y\mathrm{d}y = -2\int x\mathrm{d}x$$

Інтеграл, що стоїть в лівій частині, береться частинами (див. Інтегрування частинами):

$$\int y\cos y\mathrm{d}y = \left\{ \begin{array}{ll} u = y; & \mathrm{d}v = \cos y\mathrm{d}y; \\ \mathrm{d}u = \mathrm{d}y; & v = \sin y \end{array} \right\} = y\sin y - \int \sin y\mathrm{d}y = y\sin y + \cos y$$

$$y\sin y + \cos y = -x^2 + C$$

$$y\sin y + \cos y + x^2 + C = 0$$

– це є загальний інтеграл вихідного диференціального рівняння, оскільки шукана функція і не виражена через незалежну змінну. У цьому і полягає **відмінність** загального (частинного) **інтеграла** від загального (частинного) **розв'язку.**

Щоб перевірити правильність отриманої відповіді, продиференціюймо його за змінною x.

$$y'\sin y + yy'\cos y - y'\sin y + 2x = 0$$

$yy' = -\dfrac{2x}{\cos y}$ – вірно.

Приклад. Знайти розв'язок диференціального рівняння $\dfrac{y}{y'} = \ln y$ за умови $y(2) = 1$.

$$y\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \ln y$$

$$\mathrm{d}x = \frac{\ln y\mathrm{d}y}{y}$$

$$\int \mathrm{d}x = \int \frac{\ln y\mathrm{d}y}{y}$$

$$x + C = \int \ln y\mathrm{d}(\ln y)$$

$$x + C = \frac{\ln^2 y}{2}$$

при $y(2) = 1$ одержуємо $2 + C = \dfrac{\ln^2 1}{2}$; $\quad \Rightarrow \quad 2 + C = 0$; $\quad \Rightarrow \quad C = -2$;

Разом: $2(x-2) = \ln^2 y$; або $y = e^{\pm\sqrt{2x-4}}$ – частинний розв'язок;

Перевірка: $y' = e^{\pm\sqrt{2x-4}} \cdot \dfrac{2}{\pm 2\sqrt{2x-4}}$, разом

$\dfrac{y}{y'} = \dfrac{e^{\pm\sqrt{2x-4}}(\pm\sqrt{2x-4})}{e^{\pm\sqrt{2x-4}}} = \pm\sqrt{2x-4} = \ln y$ – вірно.

<u>Приклад.</u> Розв'язати рівняння $y' = y^{\frac{2}{3}}$.

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y^{\frac{2}{3}}$$

$$y^{-\frac{2}{3}}\mathrm{d}y = \mathrm{d}x$$

$$\int y^{-\frac{2}{3}}\mathrm{d}y = \int \mathrm{d}x$$

$$3y^{\frac{1}{3}} = x + C$$

$27y = (x+C)^3$ – загальний інтеграл

$y = \dfrac{1}{27}(x+C)^3$ – загальний розв'язок

<u>Приклад.</u> Розв'язати рівняння $y' = x(y^2+1)$.

$$\frac{\mathrm{d}y}{y^2+1} = x\mathrm{d}x; \quad \int \frac{\mathrm{d}y}{y^2+1} = \int x\mathrm{d}x;$$

$$\operatorname{arctg} y = \frac{x^2}{2} + C; \quad y = \operatorname{tg}\left(\frac{x^2}{2} + C\right);$$

<u>Приклад.</u> Розв'язати рівняння $\dfrac{yy'}{x} + e^y = 0$ за умови $y(1) = 0$.

$$y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + xe^y = 0$$

$$y\mathrm{d}y + xe^y\mathrm{d}x = 0; \quad \frac{y}{e^y}\mathrm{d}y = -x\mathrm{d}x;$$

$$\int \frac{y}{e^y}\mathrm{d}y = -\int x\mathrm{d}x;$$

Інтеграл, що стоїть в лівій частині будемо брати частинами (див. Інтегрування частинами).

$$\int ye^{-y}\mathrm{d}y = \left\{ \begin{array}{ll} u = y; & e^{-y}\mathrm{d}y = \mathrm{d}v; \\ \mathrm{d}u = \mathrm{d}y; & v = -e^{-y}; \end{array} \right\} = -e^{-y}y - \int -e^{-y}\mathrm{d}y = -e^{-y}y - e^{-y} = -e^{-y}(y+1);$$

$$e^{-y}(y+1) = \frac{x^2}{2} + C_0;$$

$$2e^{-y}(y+1) = x^2 + C$$

Якщо $y(1) = 0$, то $2e^0(0+1) = 1 + C; \quad \Rightarrow \quad 2 = 1 + C; \quad \Rightarrow \quad C = 1;$

Отже, частинний інтеграл: $2e^{-y}(y+1) = x^2 + 1$.

<u>Приклад.</u> Розв'язати рівняння $y' + \sin(x+y) = \sin(x-y)$.

$$y' + \sin(x+y) - \sin(x-y) = 0$$

$$y' - 2\sin\frac{x-y-x-y}{2}\cos\frac{x-y+x+y}{2} = 0$$

$$y' - 2\sin(-y)\cos x = 0$$

$$y' + 2\sin y\cos x = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\sin y} = -2\cos x\mathrm{d}x; \quad \int \frac{\mathrm{d}y}{\sin y} = -2\int \cos x\mathrm{d}x;$$

Для знаходження інтеграла, що стоїть в лівій частині рівняння див. Таблиця основних інтегралів п.16. Одержуємо загальний інтеграл:

$$\ln\left|\operatorname{tg}\frac{y}{2}\right| = -2\sin x + C$$

<u>Приклад.</u> Розв'язати рівняння $2xe^{-x^2} + \dfrac{y'}{y} = 0$

Перетворимо задане рівняння:

$$2xe^{-x^2} + \frac{1}{y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0$$

$$2xe^{-x^2}\mathrm{d}x + \frac{\mathrm{d}y}{y} = 0$$

$$\int 2xe^{-x^2}\mathrm{d}x + \int \frac{\mathrm{d}y}{y} = C$$

$$-e^{-x^2} + \ln|y| = C$$

Одержали загальний інтеграл даного диференціального рівняння. Якщо із цього співвідношення виразити шукану функцію y, то одержимо загальний розв'язок.

Приклад. Розв'язати рівняння $y' = x(y^2+1)$.

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x\left(y^2+1\right)$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{y^2+1} = x\mathrm{d}x$$

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y^2+1} = \int x\mathrm{d}x; \operatorname{arctg} y = \frac{x^2}{2} + C;$$

$$y = \operatorname{tg}\left(\frac{x^2}{2} + C\right)$$

Припустимо, задані деякі початкові умови x_0 і y_0. Тоді:

$$\operatorname{arctg} y_0 = \frac{x_0^2}{2} + C_0; \quad \Rightarrow \quad C_0 = \operatorname{arctg} y_0 - \frac{x_0^2}{2};$$

Одержуємо частинний розв'язок $y = \operatorname{tg}\left(\dfrac{x^2}{2} + \operatorname{arctg} y_0 - \dfrac{x_0^2}{2}\right)$.

2.1.3 Однорідні рівняння

Означення. Функція $f(x,y)$ називається **однорідною n-го порядку** щодо своїх аргументів x і y, якщо для будь-якого значення параметра t (крім нуля) виконується тотожність:

$$f(tx,ty) = t^n f(x,y).$$

Приклад. Чи є однорідною функція $f(x,y) = x^3 + 3x^2y$?

$$f(tx,ty) = (tx)^3 + 3(tx)^2ty = t^3x^3 + 3t^3x^2y = t^3(x^3+3x^2y) = t^3 f(x,y)$$

Таким чином, функція $f(x,y)$ є однорідною 3-го порядку.

Означення. Диференціальне рівняння типу $y' = f(x,y)$ називається **однорідним**, якщо його права частина $f(x,y)$ є однорідна функція нульового порядку щодо своїх аргументів.

Будь-яке рівняння типу $P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y = 0$ є однорідним, якщо функції $P(x,y)$ і $Q(x,y)$ – однорідні функції однакового порядку.

Розв'язання будь-якого однорідного рівняння засноване на зведенні цього рівняння до рівняння з відокремлюваними змінними.

Розглянемо однорідне рівняння $y' = f(x,y)$.

Оскільки функція $f(x,y)$ – однорідна нульового порядку, то можна записати:

$$f(tx,ty) = f(x,y).$$

Оскільки параметр t загалом кажучи довільний, припустимо, що $t = \dfrac{1}{x}$. Одержуємо:

$$f(x,y) = f\left(1, \frac{y}{x}\right)$$

Права частина отриманої рівності залежить фактично тільки від одного аргументу $u = \dfrac{y}{x}$, тобто

$$f(x,y) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right) = \varphi(u);$$

Вихідне диференціальне рівняння у такий спосіб можна записати у вигляді:

$$y' = \varphi(u)$$

Далі заміняємо $y = ux$, $y' = u'x + ux'$.

$$u'x + ux' = \varphi(u); \quad u'x + u = \varphi(u); \quad u' = \frac{\varphi(u) - u}{x};$$

таким чином, одержали рівняння з відокремлюваними змінними щодо невідомої функції u.

$$\frac{\mathrm{d}u}{\varphi(u)-u}=\frac{\mathrm{d}x}{x};\quad \int\frac{\mathrm{d}u}{\varphi(u)-u}=\int\frac{\mathrm{d}x}{x}+C;$$

Далі, замінивши допоміжну функцію u на її вираз через x і y і знайшовши інтеграли, одержимо загальний розв'язок однорідного диференціального рівняння.

Приклад. Розв'язати рівняння $y'=\dfrac{y}{x}\left(\ln\dfrac{y}{x}+1\right)$.

Уведемо допоміжну функцію u.

$$u=\frac{y}{x};\quad y=ux;\quad y'=u'x+u.$$

Відзначимо, що введена нами функція u завжди додатна, оскільки у протилежному випадку втрачає сенс вихідне диференціальне рівняння, що містить $\ln u=\ln\dfrac{y}{x}$.

Підставляємо у вихідне рівняння:

$$u'x+u=u(\ln u+1);\quad u'x+u=u\ln u+u;\quad u'x=u\ln u;$$

Відокремлюємо змінні: $\dfrac{\mathrm{d}u}{u\ln u}=\dfrac{\mathrm{d}x}{x};\quad \int\dfrac{\mathrm{d}u}{u\ln u}=\int\dfrac{\mathrm{d}x}{x};$

Інтегруючи, одержуємо: $\ln|\ln u|=\ln|x|+C;\quad \ln u=Cx;\quad u=e^{Cx};$

Переходячи від допоміжної функції обернено до функції y, одержуємо загальний розв'язок:

$$y=xe^{Cx}.$$

2.1.4 Рівняння, що приводяться до однорідного

Крім рівнянь, описаних вище, існує клас рівнянь, які за допомогою певних підстановок можуть зведені до однорідного.

Це рівняння типу $y'=f\left(\dfrac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}\right)$.

Якщо визначник $\begin{vmatrix} a & b\\ a_1 & b_1\end{vmatrix}\neq 0$, то змінні можуть бути розділені підстановкою

$$x=u+\alpha;\qquad y=v+\beta;$$

де α і β – розв'язок системи рівнянь $\begin{cases} ax+by+c=0\\ a_1x+b_1y+c_1=0\end{cases}$

Приклад. Розв'язати рівняння $(x-2y+3)\mathrm{d}y+(2x+y-1)\mathrm{d}x=0$.

Одержуємо $(x-2y+3)\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-2x-y+1;\quad \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{-2x-y+1}{x-2y+3};$

Знаходимо значення визначника $\begin{vmatrix} -2 & -1\\ 1 & -2\end{vmatrix}=4+1=5\neq 0.$

Розв'язуємо систему рівнянь $\begin{cases} -2x-y+1=0\\ x-2y+3=0\end{cases};\quad \begin{cases} y=1-2x\\ x-2+4x+3=0\end{cases};\quad \begin{cases} x=-1/5\\ y=7/5\end{cases};$

Застосовуємо підстановку $x=u-1/5;\quad y=v+7/5;$ у вихідне рівняння:

$$(u-1/5-2v-14/5+3)\mathrm{d}v+(2u-2/5+v+7/5-1)\mathrm{d}u=0;$$

$$(u-2v)\mathrm{d}v+(2u+v)\mathrm{d}u=0;$$

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}=\frac{2u+v}{2v-u}=\frac{2+v/u}{2v/u-1};$$

Заміняємо змінну $\dfrac{v}{u}=t;\quad v=ut;\quad v'=t'u+t;$ при підстановці у вираз, записаний вище, маємо:

$$t'u+t=\frac{2+t}{2t-1}$$

Відокремлюємо змінні: $\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}u}u=\dfrac{2+t}{2t-1}-t=\dfrac{2+t-2t^2+t}{2t-1}=\dfrac{2(1+t-t^2)}{2t-1};$

$$\frac{\mathrm{d}u}{u}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1-2t}{1+t-t^2}\mathrm{d}t;\quad \int\frac{\mathrm{d}u}{u}=-\frac{1}{2}\int\frac{(1-2t)\mathrm{d}t}{1+t-t^2};$$

$$-\frac{1}{2}\ln\left|1+t-t^2\right|=\ln|u|+\ln C_1$$

$$\ln\left|1+t-t^2\right|=-2\ln|C_1u|$$

$$\ln\left|1+t-t^2\right| = \ln\left|\frac{C_2}{u^2}\right|; \quad 1+t-t^2 = \frac{C_2}{u^2};$$

Переходимо тепер до первісної функції y і змінної x.

$$t = \frac{v}{u} = \frac{y-7/5}{x+1/5} = \frac{5y-7}{5x+1}; \quad u = x+1/5;$$

$$1+\frac{5y-7}{5x+1} - \left(\frac{5y-7}{5x+1}\right)^2 = \frac{25C_2}{(5x+1)^2};$$

$$(5x+1)^2 + (5y-7)(5x+1) - (5y-7)^2 = 25C_2$$

$$25x^2+10x+1+25xy+5y-35x-7-25y^2+70y-49 = 25C_2$$

$$25x^2-25x+25xy+75y-25y^2 = 25C_2+49-1+7$$

$$x^2-x+xy+3y-y^2 = C_2+\frac{55}{25} = C;$$

Отже, вираз $x^2-x+xy+3y-y^2 = C$ є загальним інтегралом вихідного диференціального рівняння.

У випадку якщо у вихідному рівнянні типу $y' = f\left(\dfrac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}\right)$ визначник $\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = 0$, то змінні можуть бути розділені підстановкою

$$ax+by = t.$$

Приклад. Розв'язати рівняння $2(x+y)\mathrm{d}y + (3x+3y-1)\mathrm{d}x = 0$.

Одержуємо $2(x+y)\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -3x-3y+1$; $\quad \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{-3x-3y+1}{2x+2y} = -\dfrac{3x+3y-1}{2x+2y}$.

Знаходимо значення визначника $\begin{vmatrix} -3 & -3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -6+6 = 0$.

Застосовуємо підстановку $3x+3y = t$.

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{t'}{3} - 1;$$

Підставляємо цей вираз у вихідне рівняння:

$$\frac{t'}{3} - 1 = -\frac{3(t-1)}{2t}; \quad 2t(t'-3) = -9t+9; \quad 2tt' = 6t-9t+9; \quad 2tt' = -3t+9;$$

Розділяємо змінні: $\dfrac{2t}{-3t+9}\mathrm{d}t = \mathrm{d}x$; $\quad \dfrac{t}{t-3}\mathrm{d}t = -\dfrac{3}{2}\mathrm{d}x$;

$$\int\left(1+\frac{3}{t-3}\right)\mathrm{d}t = -\frac{3}{2}\int \mathrm{d}x;$$

$$t + 3\ln|t-3| = -\frac{3}{2}x + C_1$$

Далі повертаємося до первісної функції y і змінної x.

$$2x+2y+2\ln|3(x+y-1)| = -x+C_2;$$

$$3x+2y+2\ln 3+2\ln|x+y-1| = C_2;$$

$$3x+2y+2\ln|x+y-1| = C;$$

таким чином, ми одержали загальний інтеграл вихідного диференціального рівняння.

2.1.5 Лінійні рівняння

Означення. Диференціальне рівняння називається **лінійним** щодо невідомої функції і її похідної, якщо воно може бути записане у вигляді:

$$y' + P(x)y = Q(x),$$

при цьому, якщо права частина $Q(x)$ дорівнює нулю, то таке рівняння називається **лінійним однорідним** диференціальним рівнянням, якщо права частина $Q(x)$ не дорівнює нулю, то таке рівняння називається **лінійним неоднорідним** диференціальним рівнянням.

$P(x)$ і $Q(x)$ – функції неперервні на деякому проміжку $a < x < b$.

2.1.5.1 Лінійні однорідні диференціальні рівняння

Розглянемо методи знаходження загального розв'язку лінійного однорідного диференціального рівняння першого порядку вигляду

$$y' + P(x)y = 0.$$

Для цього типу диференціальних рівнянь відокремлення змінних не є складним.

$$\frac{\mathrm{d}y}{y} = -P(x)\mathrm{d}x$$

$$\ln|y| = -\int P(x)\mathrm{d}x + \ln|C|\,;$$

$$\ln\left|\frac{y}{C}\right| = -\int P(x)\mathrm{d}x;$$

Загальний розв'язок: $y = Ce^{-\int P(x)\mathrm{d}x}$

2.1.6 Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння

Для інтегрування лінійних неоднорідних рівнянь ($Q(x) \neq 0$) застосовуються в основному два методи: метод Бернуллі і метод Лагранжа.

2.1.6.1 Метод Бернуллі

Суть методу полягає у тім, що шукана функція представляється у вигляді добутку двох функцій $y = uv$.

При цьому очевидно, що $y' = u \cdot \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + v \cdot \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$ – диференціювання частинами.

Підставляючи у вихідне рівняння, одержуємо:

$$u\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + P(x)uv = Q(x)$$

$$u\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + v\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + P(x)u\right) = Q(x)$$

Далі треба зробити важливе зауваження – оскільки первісна функція була представлена нами у вигляді добутку, то кожний зі співмножників, що входять у цей добуток, може бути довільним, обраним як нам завгодно.

Наприклад, функція $y = 2x^2$ може бути представлена як $y = 1 \cdot 2x^2$; $y = 2 \cdot x^2$; $y = 2x \cdot x$ тощо.

Таким чином, можна одну зі складових добутку функцій вибрати так, що вираз $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + P(x)u = 0$.

Функцію u можна одержати, проінтегрувавши отримане співвідношення як однорідне диференціальне рівняння за описаною вище схемою:

$$\frac{\mathrm{d}u}{u} = -P(x)\mathrm{d}x; \quad \int\frac{\mathrm{d}u}{u} = -\int P(x)\mathrm{d}x; \quad \ln|u| = -\int P(x)\mathrm{d}x;$$

$$\ln|C_1| + \ln|u| = -\int P(x)\mathrm{d}x; \qquad u = Ce^{-\int P(x)\mathrm{d}x}; \quad C = 1/C_1;$$

Для знаходження другої невідомої функції v підставимо отриманий вираз для функції u у вихідне рівняння $u\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + v\left(\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + P(x)u\right) = Q(x)$ з врахуванням того, що вираз, що стоїть в дужках, дорівнює нулю.

$$e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = Q(x); \quad C\mathrm{d}v = Q(x)e^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x;$$

Інтегруючи, можемо знайти функцію v:

$$Cv = \int Q(x)e^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x + C_1; v = \frac{1}{C}\int Q(x)e^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x + C_2;$$

Тобто була отримана друга складова добутку $y = uv$, що і визначає шукану функцію.

Підставляючи отримані значення, одержуємо:

$$y = uv = Ce^{-\int P(x)\mathrm{d}x} \cdot \frac{1}{C}\left(\int Q(x)e^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x + C_2\right)$$

Остаточно одержуємо формулу:

$y = e^{-\int P(x)\mathrm{d}x} \cdot \left(\int Q(x)e^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x + C_2\right)$, C_2 – довільний коефіцієнт.

Це співвідношення може вважатися розв'язком неоднорідного лінійного диференціального рівняння у загальному вигляді за способом Бернуллі[4].

[4] Якоб Бернуллі (Jacob Bernoulli) (1654–1705) – швейцарський математик.

2.1.6.2 Метод Лагранжа

Метод Лагранжа розв'язання неоднорідних лінійних диференціальних рівнянь ще називають методом **варіації довільної сталої**.

Повернемося до поставленої задачі:

$$y' + P(x)y = Q(x)$$

Перший крок даного методу полягає у відкиданні правої частини рівняння і заміні її нулем.

$$y' + P(x)y = 0$$

Далі знаходиться розв'язок однорідного диференціального рівняння, що вийшло:

$$y = C_1 e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}.$$

Для того, щоб знайти відповідний розв'язок неоднорідного диференціального рівняння, будемо вважати сталу C_1 деякою функцією від x.

Тоді за правилами диференціювання добутку функцій одержуємо:

$$y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}C_1(x)}{\mathrm{d}x} e^{-\int P(x)\mathrm{d}x} + C_1(x) e^{-\int P(x)\mathrm{d}x} \cdot (-P(x))\,;$$

Підставляємо отримане співвідношення у вихідне рівняння

$$\frac{\mathrm{d}C_1(x)}{\mathrm{d}x} e^{-\int P(x)\mathrm{d}x} - C_1(x)P(x)e^{-\int P(x)\mathrm{d}x} + P(x)C_1(x)e^{-\int P(x)\mathrm{d}x} = Q(x)$$

$$\frac{\mathrm{d}C_1(x)}{\mathrm{d}x} e^{-\int P(x)\mathrm{d}x} = Q(x);$$

Із цього рівняння визначимо змінну функцію $C_1(x)$:

$$\mathrm{d}C_1(x) = Q(x)e^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x;$$

Інтегруючи, одержуємо:

$$C_1 = \int Q(x)e^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x + C;$$

Підставляючи це значення у вихідне рівняння, одержуємо:

$$y = e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\left(\int Q(x)e^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x + C\right).$$

Таким чином, ми одержали результат, що повністю збігається з результатом розрахунку за методом Бернуллі.

При виборі методу розв'язання лінійних диференціальних рівнянь варто керуватися простотою інтегрування функцій, що входять у вихідний інтеграл.

<u>Приклад.</u> Розв'язати рівняння $x^2y' + y = ax^2e^{\frac{1}{x}}$.

Спочатку приведемо дане рівняння до стандартного вигляду: $y' + \frac{1}{x^2}y = ae^{\frac{1}{x}}$.

Застосуємо отриману вище формулу: $P = \frac{1}{x^2}$; $\quad Q = ae^{\frac{1}{x}}$;

$$y = e^{-\int \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x}\left(\int ae^{\frac{1}{x}}e^{\int \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x + C\right)$$

$$y = e^{\frac{1}{x}}\left(\int ae^{\frac{1}{x}}e^{-\frac{1}{x}}\mathrm{d}x + C\right) = e^{\frac{1}{x}}\left(\int a\mathrm{d}x + C\right)$$

$$y = e^{\frac{1}{x}}(ax + C).$$

2.1.7 Рівняння Бернуллі

Означення. Рівнянням Бернуллі називається рівняння вигляду

$$y' + Py = Q \cdot y^n,$$

де P і Q – функції від x або сталі числа, а n – стале число, не рівне 1.

Для розв'язання рівняння Бернуллі застосовують підстановку $z = \dfrac{1}{y^{n-1}}$, за допомогою якої, рівняння Бернуллі приводиться до лінійного.

Для цього розділимо вихідне рівняння на y^n.

$$\frac{y'}{y^n} + P\frac{1}{y^{n-1}} = Q;$$

Застосуємо підстановку, врахувавши, що $z' = -\dfrac{(n-1)y^{n-2}}{y^{2n-2}} \cdot y' = -\dfrac{(n-1)y'}{y^n}$.

$$-\frac{z'}{n-1} + Pz = Q$$

$$z' - (n-1)Pz = -(n-1)Q$$

Тобто вийшло лінійне рівняння щодо невідомої функції z.

Розв'язок цього рівняння будемо шукати у вигляді:

$$z = e^{-\int P_1 \mathrm{d}x}\left(\int Q_1 e^{\int P_1 \mathrm{d}x}\mathrm{d}x + C\right)$$

$$Q_1 = -(n-1)Q; \qquad P_1 = -(n-1)P.$$

Приклад. Розв'язати рівняння $xy' + y = xy^2 \ln x$.

Розділимо рівняння на xy^2: $\dfrac{y'}{y^2} + \dfrac{1}{x} \cdot \dfrac{1}{y} = \ln x$.

Покладаємо $z = \dfrac{1}{y}$; $\quad z' = -\dfrac{y'}{y^2}$.

$$-z' + \frac{1}{x}z = \ln x; \qquad z' - \frac{1}{x}z = -\ln x.$$

Покладаємо $P = -\dfrac{1}{x}$, $\quad Q = -\ln x$.

$$z = e^{\int \frac{\mathrm{d}x}{x}}\left(\int -\ln x e^{-\int \frac{\mathrm{d}x}{x}}\mathrm{d}x + C\right); \quad z = e^{\ln x}\left(\int -\ln x e^{-\ln x}\mathrm{d}x + C\right);$$

$$z = x\left(\int -\ln x \cdot \frac{\mathrm{d}x}{x} + C\right); \quad z = x\left(-\int \ln x \mathrm{d}(\ln x) + C\right);$$

$$z = x\left(-\frac{\ln^2 x}{2} + C\right)$$

Зробивши зворотну підстановку, одержуємо:

$$\frac{1}{y} = x\left(-\frac{\ln^2 x}{2} + C\right).$$

Приклад. Розв'язати рівняння $xy' - 4y = x^2\sqrt{y}$.

Розділимо обидві частини рівняння на $x\sqrt{y}$.

$$\frac{1}{\sqrt{y}}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - \frac{4}{x}\sqrt{y} = x.$$

Покладаємо $z = \sqrt{y}$; $\quad z' = \dfrac{1}{2\sqrt{y}}y'$; $\quad y' = 2\sqrt{y}z'$;

$$\frac{1}{\sqrt{y}}2\sqrt{y}z' - \frac{4}{x}z = x; \quad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} - \frac{2z}{x} = \frac{x}{2};$$

Одержали лінійне неоднорідне диференціальне рівняння. Розглянемо відповідне йому лінійне однорідне рівняння:

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} - \frac{2z}{x} = 0; \quad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \frac{2z}{x}; \quad \frac{\mathrm{d}z}{z} = \frac{2\mathrm{d}x}{x};$$

$$\int \frac{\mathrm{d}z}{z} = 2\int \frac{\mathrm{d}x}{x} + C_1; \quad \ln|z| = 2\ln|x| + \ln C; \quad z = Cx^2;$$

Покладаємо $C = C(x)$ і підставляємо отриманий результат у лінійне неоднорідне рівняння, з врахуванням того, що

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = 2xC(x) + x^2\frac{\mathrm{d}C(x)}{\mathrm{d}x};$$

$$2xC(x) + x^2\frac{\mathrm{d}C(x)}{\mathrm{d}x} - \frac{2x^2C(x)}{x} = \frac{x}{2};$$

$$\frac{\mathrm{d}C(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{2x}; \quad C(x) = \frac{1}{2}\ln x + C_2;$$

Одержуємо: $z = x^2\left(C_2 + \frac{1}{2}\ln x\right);$

Застосовуючи зворотну підстановку, одержуємо остаточну відповідь:

$$y = x^4\left(C_2 + \frac{1}{2}\ln x\right)^2;$$

2.1.8 Рівняння у повних диференціалах (тотальні)

Означення. Диференціальне рівняння першого порядку вигляду:

$$M(x,y)\mathrm{d}x + N(x,y)\mathrm{d}y = 0$$

називається **рівнянням у повних диференціалах**, якщо ліва частина цього рівняння являє собою повний диференціал деякої функції $u = F(x,y)$.

Інтегрування такого рівняння зводиться до знаходження функції u, після чого розв'язок легко знаходиться у вигляді: $\mathrm{d}u = 0; \quad u = C.$

Таким чином, для розв'язання треба визначити:

1) у якому випадку ліва частина рівняння являє собою повний диференціал функції u;

2) як знайти цю функцію.

Якщо диференціальна форма $M(x,y)\mathrm{d}x + N(x,y)\mathrm{d}y$є повним диференціалом деякої функції u, то можна записати:

$$\mathrm{d}u = M(x,y)\mathrm{d}x + N(x,y)\mathrm{d}y = \frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y.$$

Тобто $\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = M(x,y) \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = N(x,y) \end{cases}.$

Знайдемо мішані похідні другого порядку, продиференціювавши перше рівняння за y, а друге – за x:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial M(x,y)}{\partial y} \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial N(x,y)}{\partial x} \end{cases}$$

Прирівнюючи ліві частини рівнянь, одержуємо **необхідну і достатню умову** того, що ліва частина диференціального рівняння є повним диференціалом. Це умова також називається **умовою тотальності.**

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$$

Тепер розглянемо питання про знаходження, власне, функції u.

Проінтегруємо рівність $\frac{\partial u}{\partial x} = M(x,y)$:

$$u = \int M(x,y)\mathrm{d}x + C(y).$$

Внаслідок інтегрування одержуємо не сталу величину C, а деяку функцію $C(y)$, оскільки при інтегруванні змінна y покладається сталим параметром.

Визначимо функцію $C(y)$.

Продиференціюємо отриману рівність за y.

$$\frac{\partial u}{\partial y} = N(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)\mathrm{d}x + C'(y).$$

Звідки одержуємо: $C'(y) = N(x,y) - \dfrac{\partial}{\partial y} \int M(x,y)\mathrm{d}x$.

Для знаходження функції $C(y)$ слід проінтегрувати наведену вище рівність. Однак, перед інтегруванням треба довести, що функція $C(y)$ не залежить від x. Ця умова буде виконана, якщо похідна цієї функції за x дорівнює нулю.

$$[C'(y)]'_x = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y} \int M(x,y)\mathrm{d}x = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x} \int M(x,y)\mathrm{d}x\right) =$$
$$= \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = 0.$$

Тепер визначаємо функцію $C(y)$:

$$C(y) = \int \left[N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y + C$$

Підставляючи цей результат у вираз для функції u, одержуємо:

$$u = \int M(x,y)\mathrm{d}x + \int \left[N(x,y) - \int \frac{\partial}{\partial y} M(x,y)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y + C.$$

Тоді загальний інтеграл вихідного диференціального рівняння буде мати вигляд:

$$\int M(x,y)\mathrm{d}x + \int \left[N(x,y) - \int \frac{\partial}{\partial y} M(x,y)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y = C.$$

Слід зазначити, що при розв'язанні рівнянь у повних диференціалах не обов'язково використовувати отриману формулу. Розв'язання може вийти більше компактним, якщо просто додержуватися методу, яким формула була отримана.

Приклад. Розв'язати рівняння $(3x^2 + 10xy)\mathrm{d}x + (5x^2 - 1)\mathrm{d}y = 0$

Перевіримо умову тотальності: $\dfrac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \dfrac{\partial(3x^2 + 10xy)}{\partial y} = 10x$;

$$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial(5x^2 - 1)}{\partial x} = 10x.$$

Умова тотальності виконується, отже, вихідне диференціальне рівняння є рівнянням у повних диференціалах.

Визначимо функцію u.

$$u = \int M(x,y)\mathrm{d}x + C(y) = \int (3x^2 + 10xy)\mathrm{d}x + C(y) = x^3 + 5x^2y + C(y);$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 5x^2 + C'(y) = N(x,y) = 5x^2 - 1;$$

$$C'(y) = -1; \quad C(y) = \int(-1)dy = -y + C_1;$$

Отже, $u = x^3 + 5x^2y - y + C_1$.

Знаходимо загальний інтеграл вихідного диференціального рівняння:

$$u = x^3 + 5x^2y - y + C_1 = C_2;$$

$$x^3 + 5x^2y - y = C.$$

2.1.9 Рівняння вигляду $y = f(y')$ і $x = f(y')$

Розв'язок рівнянь, що не містять в одному випадку аргументу x, а в іншому – функції y, шукаємо у параметричній формі, приймаючи за параметр похідну невідомої функції.

$$y' = p.$$

Для рівняння першого типу одержуємо: $y = f(p); \quad y' = f'(p)\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$.

Роблячи заміну, одержуємо: $p = f'(p)\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$;

У результаті цих перетворень маємо диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними.

$$\mathrm{d}x = \frac{f'(p)}{p}\mathrm{d}p; \quad x = \int \frac{f'(p)}{p}\mathrm{d}p + C.$$

Загальний інтеграл у параметричній формі представляється системою рівнянь:

$$\begin{cases} x = \int \dfrac{f'(p)}{p}\mathrm{d}p + C \\ y = f(p) \end{cases}$$

Виключивши із цієї системи параметр p, одержимо загальний інтеграл і не у параметричній формі.

Для диференціального рівняння типу $x = f(y')$ за допомогою тієї ж самої підстановки і аналогічних міркувань одержуємо результат:

$$\begin{cases} y = \int pf'(p)\mathrm{d}p + C \\ x = f(p) \end{cases}$$

Далі розглянемо приклади розв'язання різних типів диференціальних рівнянь першого порядку.

Приклад. Розв'язати рівняння із заданими початковими умовами.

$$y' - \frac{y}{x} = x + 1; \quad y(1) = 0.$$

Це лінійне неоднорідне диференціальне рівняння першого порядку.

Розв'яжемо відповідне йому однорідне рівняння.

$$y' - \frac{y}{x} = 0; \qquad y' = \frac{y}{x}; \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y}{x}; \qquad \frac{\mathrm{d}y}{y} = \frac{\mathrm{d}x}{x};$$

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = \int \frac{\mathrm{d}x}{x}; \ln y = \ln x + \ln C; y = Cx;$$

Для неоднорідного рівняння загальний розв'язок має вигляд:

$$y = C(x)x;$$

Диференціюючи, одержуємо: $y' = C'(x)x + C(x)$;

Для знаходження функції $C(x)$ підставляємо отримане значення у вихідне диференціальне рівняння:

$$C'(x)x + C(x) - C(x) = x + 1; xC'(x) = x + 1$$

$$C'(x) = 1 + \frac{1}{x}; C(x) = \int \left(1 + \frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x + C; C(x) = x + \ln x + C.$$

Разом, загальний розв'язок: $y = x(x + \ln x + C)$.

З врахуванням початкової умови $y(1) = 0$ визначаємо постійний коефіцієнт C.

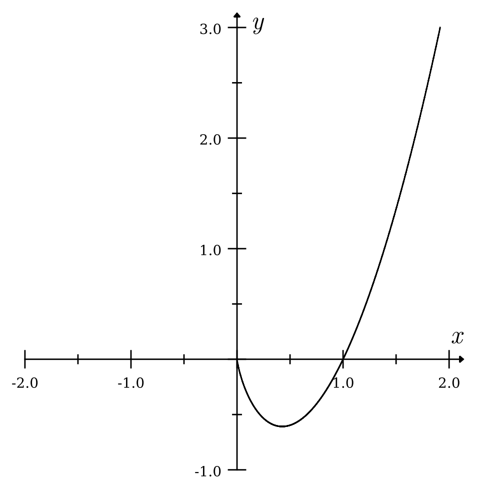
$$0 = 1 + \ln 1 + C; \qquad C = -1.$$

Остаточно одержуємо: $y = x^2 + x\ln x - x$.

Для перевірки підставимо отриманий результат у вихідне диференціальне рівняння:

$2x + \ln x + x \cdot \dfrac{1}{x} - 1 - x - \ln x + 1 = x + 1;$ – вірно.

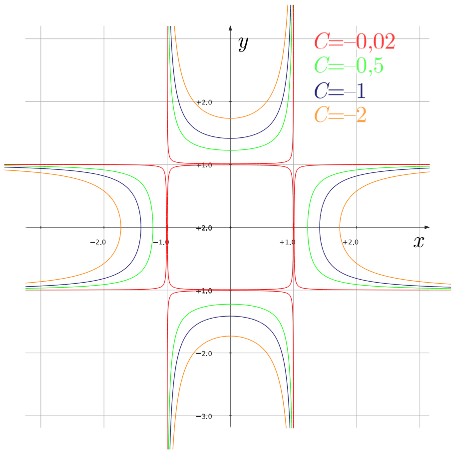
Нижче показаний графік інтегральної кривої рівняння.



Приклад. Знайти загальний інтеграл рівняння $x(y^2 - 1)\mathrm{d}x + y(x^2 - 1)\mathrm{d}y = 0$.

Це рівняння з відокремлюваними змінними.

$$\frac{x\mathrm{d}x}{x^2 - 1} + \frac{y\mathrm{d}y}{y^2 - 1} = 0; \quad \int \frac{x\mathrm{d}x}{x^2 - 1} = -\int \frac{y\mathrm{d}y}{y^2 - 1};$$



$$\ln\left|x^2-1\right|+\ln\left|y^2-1\right|=\ln C;$$

Загальний інтеграл має вигляд: $(x^2-1)(y^2-1)=C$.
Побудуємо інтегральні криві диференціального рівняння при різних значеннях C.
Приклад. Знайти розв'язок диференціального рівняння, що задовольняє заданим початковим умовам.

$$y'\cos x=(y+1)\sin x; \qquad y(0)=0.$$

Це рівняння з відокремлюваними змінними.

$$\frac{y'}{y+1}=\frac{\sin x}{\cos x}; \quad \frac{\mathrm{d}y}{y+1}=\operatorname{tg}x\mathrm{d}x;$$

$$\int\frac{\mathrm{d}y}{y+1}=\int\operatorname{tg}x\mathrm{d}x; \qquad \ln|y+1|=-\ln|\cos x|+\ln C;$$

$$\ln|(y+1)\cos x|=\ln C; \qquad (y+1)\cos x=C;$$

Загальний розв'язок має вигляд: $y=\dfrac{C}{\cos x}-1$.
Знайдемо частинний розв'язок при заданій початковій умові $y(0)=0$.

$$0=\frac{C}{1}-1; \qquad C=1.$$

Остаточно одержуємо: $y=\dfrac{1}{\cos x}-1$.
Приклад. Розв'язати попередній приклад іншим способом.
Дійсно, рівняння $y'\cos x=(y+1)\sin x$ може бути розглянуте як лінійне неоднорідне диференціальне рівняння.

$$y'\cos x-y\sin x=\sin x.$$

Розв'яжемо відповідне йому лінійне однорідне рівняння.

$$y'\cos x-y\sin x=0; \quad y'\cos x=y\sin x; \quad \frac{\mathrm{d}y}{y}=\operatorname{tg}x\mathrm{d}x;$$

$$\int\frac{\mathrm{d}y}{y}=\int\operatorname{tg}x\mathrm{d}x+\ln C; \quad \ln|y|=-\ln|\cos x|+\ln C; \quad y\cos x=C;$$

$$y=\frac{C}{\cos x}.$$

Розв'язок неоднорідного рівняння буде мати вигляд:$y=\dfrac{C(x)}{\cos x}$.
Тоді $y'=\dfrac{C'(x)\cos x+C(x)\sin x}{\cos^2 x}$.
Підставляючи у вихідне рівняння, одержуємо:

$$\frac{[C'(x)\cos x+C(x)\sin x]\cdot\cos x}{\cos^2 x}-\frac{C(x)\sin x}{\cos x}=\sin x;$$

$$\frac{C'(x)\cos x}{\cos x}=\sin x; \qquad C'(x)=\sin x; \qquad C(x)=\int\sin x\mathrm{d}x=-\cos x+C;$$

Разом $y=\dfrac{-\cos x+C}{\cos x}$; $y=\dfrac{C}{\cos x}-1$.

З урахуванням початкової умови $y(0) = 0$ одержуємо $y = \dfrac{1}{\cos x} - 1$;

Як видно результати, отримані при розв'язанні даного диференціального рівняння різними способами, збігаються.

При розв'язанні диференціальних рівнянь буває можливо вибирати метод розв'язання, виходячи зі складності перетворень.

Приклад. Розв'язати рівняння $y' + y\cos x = \dfrac{1}{2}\sin 2x$ з початковою умовою $y(0) = 0$.

Це лінійне неоднорідне рівняння. Розв'яжемо відповідне йому однорідне рівняння.

$$y' + y\cos x = 0; \quad \frac{\mathrm{d}y}{y} = -\cos x\mathrm{d}x; \quad \ln|y| = -\sin x + C_1;$$

$$|y| = e^{-\sin x} \cdot e^{C_1}; \qquad y = Ce^{-\sin x};$$

Для лінійного неоднорідного рівняння загальний розв'язок буде мати вигляд:

$$y = C(x)e^{-\sin x};$$

Для визначення функції $C(x)$ знайдемо похідну функції y і підставимо її у вихідне диференціальне рівняння.

$$y' = C'(x)e^{-\sin x} - C(x)e^{-\sin x}\cos x;$$

$$C'(x)e^{-\sin x} - C(x)e^{-\sin x}\cos x + C(x)e^{-\sin x}\cos x = \sin x\cos x;$$

$$C'(x)e^{-\sin x} = \sin x\cos x; \qquad C'(x) = e^{\sin x}\sin x\cos x;$$

$$C(x) = \int e^{\sin x}\sin x\cos x\mathrm{d}x = \left\{\begin{array}{ll} V = e^{\sin x}; & \mathrm{d}U = \cos x\mathrm{d}x; \\ \mathrm{d}V = e^{\sin x}\cos x\mathrm{d}x; & U = \sin x; \end{array}\right\} = e^{\sin x}\sin x - \int e^{\sin x}\cos x\mathrm{d}x =$$

$$= e^{\sin x}\sin x - e^{\sin x} + C.$$

Разом $y = e^{-\sin x}\left(e^{\sin x}\sin x - e^{\sin x} + C\right)$; $y = \sin x - 1 + Ce^{-\sin x}$.

Перевіримо отриманий загальний розв'язок підстановкою у вихідне диференціальне рівняння.

$\cos x + Ce^{-\sin x}(-\cos x) + \sin x\cos x - \cos x + Ce^{-\sin x}\cos x = \sin x\cos x$; (вірно)

Знайдемо частинний розв'язок при $y(0) = 0$.

$$0 = \sin 0 - 1 + Ce^{0}; \qquad C = 1.$$

Остаточно $y = \sin x + e^{-\sin x} - 1$.

Приклад. Знайти розв'язок диференціального рівняння

$$20x\mathrm{d}x - 3y\mathrm{d}y = 3x^2y\mathrm{d}y - 5xy^2\mathrm{d}x$$

з початковою умовою $y(1) = 1$.

Це рівняння може бути перетворене і представлене як рівняння з відокремлюваними змінними.

$$20x - 3yy' = 3x^2yy' - 5xy^2; \qquad 3yy'(x^2+1) = 5x(y^2+4);$$

$$y'\frac{3y}{y^2+4} = \frac{5x}{x^2+1}; \quad \frac{3y}{y^2+4}\mathrm{d}y = \frac{5x}{x^2+1}\mathrm{d}x;$$

$$\int \frac{3y}{y^2+4}\mathrm{d}y = \int \frac{5x}{x^2+1}\mathrm{d}x;$$

$$\frac{3}{2}\ln(y^2+4) = \frac{5}{2}\ln(x^2+1) + \ln C_1$$

$$(y^2+4)^3 = C\cdot(x^2+1)^5; \qquad y^2 + 4 = C\cdot\sqrt[3]{(x^2+1)^5};$$

$$y^2 = C(x^2+1)^{\frac{5}{3}} - 4;$$

$$y = \sqrt{C(x^2+1)^{\frac{5}{3}} - 4};$$

З урахуванням початкової умови:

$$1 = \sqrt{C\cdot 2^{\frac{5}{3}} - 4} = \sqrt{C\sqrt[3]{32} - 4}; \qquad 1 = 2C\sqrt[3]{4} - 4; \qquad 5 = 2C\sqrt[3]{4}; \qquad 125 = 8C^3\cdot 4; \quad C^3 = \frac{125}{32}; C = \frac{5}{2\sqrt[3]{4}}.$$

Остаточно $y = \sqrt{5\left(\dfrac{x^2+1}{2}\right)^{\frac{5}{3}} - 4}$.

Приклад. Розв'язати диференціальне рівняння $xy' + y = x + 1$ з початковою умовою $y(1) = 0$.

Це лінійне неоднорідне рівняння.

Розв'яжемо відповідне йому однорідне рівняння.

$$xy' + y = 0; \quad x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -y; \quad \frac{\mathrm{d}y}{y} = -\frac{\mathrm{d}x}{x}; \quad \ln|y| = -\ln|x| + \ln C;$$

$$xy = C; \qquad y = \frac{C}{x};$$

Розв'язок неоднорідного рівняння буде мати вигляд:

$$y = \frac{C(x)}{x};$$

Підставимо у вихідне рівняння:

$$x\frac{C'(x)x - C(x)}{x^2} + \frac{C(x)}{x} = x + 1; \qquad \frac{C'(x)x}{x} = x + 1; \qquad C'(x) = x + 1;$$

$$C(x) = \frac{x^2}{2} + x + C;$$

Загальний розв'язок буде мати вигляд: $y = \frac{x}{2} + 1 + \frac{C}{x}$;

З врахуванням початкової умови $y(1) = 0$: $0 = \frac{1}{2} + 1 + C$; $\quad C = -\frac{3}{2}$;

Частинний розв'язок: $y = \frac{x}{2} - \frac{3}{2x} + 1$;

<u>Приклад.</u> Знайти розв'язок диференціального рівняння $xy' = y\ln\left(\frac{y}{x}\right)$ з початковою умовою $y(1) = e$.

Це рівняння може бути зведене до типу рівняння з відокремлюваними змінними за допомогою заміни змінних.

Позначимо: $\ln\left(\frac{y}{x}\right) = u$; $\quad \frac{y}{x} = e^u$; $\quad y = xe^u$; $\quad y' = xu'e^u + e^u$;

Рівняння набуває такого вигляду:

$$xu'e^u + e^u = e^u u; \qquad xu' + 1 = u; \qquad xu' = u - 1;$$

Одержали рівняння з відокремлюваними змінними.

$$x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = u - 1; \quad \frac{\mathrm{d}u}{u-1} = \frac{\mathrm{d}x}{x};$$

$$\int \frac{\mathrm{d}u}{u-1} = \int \frac{\mathrm{d}x}{x}; \quad \ln|u-1| = \ln|x| + \ln C; \quad u - 1 = Cx;$$

Зробимо зворотну заміну: $Cx = \ln\left(\frac{y}{x}\right) - 1$; $\quad \ln\left(\frac{y}{x}\right) = Cx + 1$; $\quad \frac{y}{x} = e^{Cx+1}$;

Загальний розв'язок: $y = xe^{Cx+1}$.

З врахуванням початкової умови $y(1) = e$: $e = e^{C+1}$; $C = 0$.

Частинний розв'язок: $y = ex$.

<u>Другий спосіб розв'язання.</u>

$$\begin{aligned} &xy' = y\ln\frac{y}{x}; \\ &xy' = y\ln y - y\ln x; \\ &y' - \frac{y}{x}\ln y = -\frac{y}{x}\ln x; \end{aligned}$$

Одержали лінійне неоднорідне диференціальне рівняння. Відповідне однорідне:

$$\begin{aligned} &y' - \frac{y}{x}\ln y = 0; \\ &y' = \frac{y}{x}\ln y; \qquad \frac{\mathrm{d}y}{y\ln y} = \frac{\mathrm{d}x}{x}; \qquad \int \frac{\mathrm{d}\,(\ln y)}{\ln y} = \int \frac{\mathrm{d}x}{x}; \\ &\ln|\ln y| = \ln|x| + \ln C; \qquad \ln y = Cx; \qquad y = e^{Cx}; \end{aligned}$$

Розв'язок вихідного рівняння шукаємо у вигляді: $y = e^{C(x)x}$;

Тоді $y' = e^{C(x)x}\left(C'(x)x + C(x)\right)$;

Підставимо отримані результати у вихідне рівняння:

$$xe^{C(x)x}\left(C'(x)x + C(x)\right) = e^{C(x)x}\ln\frac{e^{C(x)x}}{x};$$

$$\begin{aligned} &x^2C'(x) + xC(x) = C(x)x - \ln x; \\ &x^2C'(x) = -\ln x; \qquad C'(x) = -\frac{\ln x}{x^2}; \end{aligned}$$

$$C(x) = -\int \frac{\ln x}{x^2} \mathrm{d}x = \left\{ \begin{array}{ll} u = \ln x; & \mathrm{d}v = \dfrac{\mathrm{d}x}{x^2}; \\ \mathrm{d}u = \dfrac{\mathrm{d}x}{x}; & v = -\dfrac{1}{x}; \end{array} \right\} = -\left[-\frac{\ln x}{x} - \int \frac{-\mathrm{d}x}{x^2} \right] = \frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x} + C;$$

$$y = e^{C(x)x} = e^{\ln x + 1 + Cx} = xe^{Cx+1};$$

Одержуємо загальний розв'язок: $y = xe^{Cx+1}$;

Приклад. Розв'язати диференціальне рівняння $y' + e^{\frac{y}{x}} - \frac{y}{x} = 0$ з початковою умовою $y(1) = 0$.

У цьому рівнянні також зручно застосувати заміну змінних.

$$e^{\frac{y}{x}} = u; \qquad \frac{y}{x} = \ln u; \qquad y = x \ln u; \qquad y' = \ln u + \frac{xu'}{u};$$

Рівняння набуває такого вигляду: $\ln u + \dfrac{xu'}{u} + u - \ln u = 0; \qquad xu' + u^2 = 0;$

$$xu' = -u^2; \quad \frac{\mathrm{d}u}{u^2} = -\frac{\mathrm{d}x}{x}; \quad \int \frac{\mathrm{d}u}{u^2} = -\int \frac{\mathrm{d}x}{x};$$

$$\frac{1}{u} = \ln|x| + \ln C; \qquad \frac{1}{u} = \ln Cx;$$

Робимо зворотну підстановку: $e^{-\frac{y}{x}} = \ln Cx; \qquad -\dfrac{y}{x} = \ln(\ln Cx);$

Загальний розв'язок: $y = -x\ln(\ln Cx)$;

З врахуванням початкової умови $y(1) = 0$: $0 = -\ln(\ln C)$; $\quad C = e$;

Частинний розв'язок: $y = -x\ln(\ln ex)$;

Інший спосіб розв'язання.

$$y' + e^{\frac{y}{x}} - \frac{y}{x} = 0$$

Заміна змінної: $u = \dfrac{y}{x}$; $y = ux$; $\quad y' = u'x + u$.

$$u'x + u + e^u - u = 0$$

$$u'x + e^u = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}x = -e^u$$

$$-e^{-u}\mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}x}{x}$$

$$-\int e^{-u}\mathrm{d}u = \int \frac{\mathrm{d}x}{x};$$

$$e^{-u} = \ln|x| + \ln C; \qquad e^{-u} = \ln|Cx|;$$

$$-u = \ln(\ln|Cx|); \qquad u = -\ln(\ln|Cx|);$$

Загальний розв'язок: $y = -x\ln(\ln Cx)$.

2.1.10 Геометрична інтерпретація розв'язків диференціальних рівнянь першого порядку

Як уже говорилися вище (див. Інтегральні криві), лінія S, що задається функцією, що є якимось розв'язком диференціального рівняння, називається інтегральною кривою рівняння $y' = f(x, y)$.

Похідна y' є **кутовим коефіцієнтом дотичної до інтегральної кривої.**

У будь-якій точці $A(x, y)$ інтегральний кривий цей кутовий коефіцієнт дотичної може бути знайдений ще до розв'язання диференціального рівняння.

Оскільки дотична вказує напрямок інтегральної кривої ще до її безпосередньої побудови, то за умови неперервності функції $f(x, y)$ і неперервного переміщення точки A можна наочно зобразити **поле напрямків** кривих, які виходять у результаті інтегрування диференціального рівняння, тобто являють собою його загальний розв'язок.

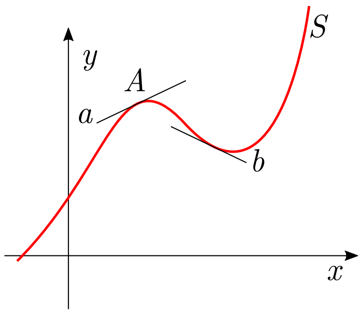
Означення. Множина дотичних у кожній точці розглянутої області називається **полем напрямків.**

З врахуванням сказаного вище можна навести наступне геометричне тлумачення диференціального рівняння:

1) Задати диференціальне рівняння першого порядку – це значить задати поле напрямків.

2) Розв'язати або проінтегрувати диференціальне рівняння – це значить знайти всі криві, у яких напрямок дотичних у кожній точці збігається з полем напрямків.

Означення. Лінії рівного нахилу у полі напрямків називаються **ізоклінами**.



2.1.11 Обчислювальні методи розв'язання диференціальних рівнянь

Відомі методи точного інтегрування диференціальних рівнянь дозволяють знайти розв'язок у вигляді аналітичної функції, однак ці методи застосовні для дуже обмеженого класу функцій. Більшість рівнянь, що зустрічаються при розв'язанні практичних задач не можна проінтегрувати за допомогою цих методів.

У таких випадках використаються числові методи розв'язання, які представляють розв'язок диференціального рівняння не у вигляді аналітичної функції, а у вигляді таблиць значень шуканої функції залежно від значення змінної.

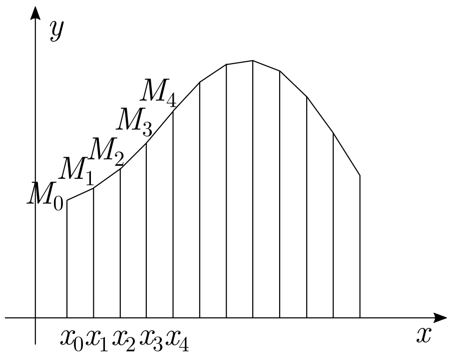
Існує кілька методів числового інтегрування диференціальних рівнянь, які відрізняються один від іншого за складністю обчислень і точністю результату.

Розгляньмо деякі з них.

2.1.11.1 Метод Ейлера

Відомо, що рівняння $y' = f(x, y)$ задає у деякій області поле напрямків. Розв'язок цього рівняння з деякими початковими умовами дає криву, що дотична до поля напрямків у будь-якій точці.

Якщо взяти послідовність точок x_0, x_1, x_2, $\ldots$ і замінити на відрізках, що вийшли, інтегральну криву на відрізки дотичні до неї, то одержимо ламану лінію.



При підставлянні заданих початкових умов (x_0, y_0) у диференціальне рівняння $y' = f(x, y)$ одержуємо кутовий коефіцієнт дотичної до інтегральної кривої у початковій точці

$$\operatorname{tg}\alpha_0 = y' = f(x_0, y_0).$$

Замінивши на відрізку $[x_0, x_1]$ інтегральну криву на дотичну до неї, одержуємо значення

$$y_1 = y_0 + f(x_0, y_0)(x_1 - x_0).$$

Роблячи аналогічну операцію для відрізка $[x_1, x_2]$, одержуємо:

$$y_2 = y_1 + f(x_1, y_1)(x_2 - x_1).$$

Продовжуючи подібні дії далі, одержуємо ламану криву, що називається **ламаною Ейлера**.

Можна записати загальну формулу обчислень:

$$y_n = y_{n-1} + f(x_{n-1}, y_{n-1})(x_n - x_{n-1}).$$

Якщо послідовність точок x_i вибрати так, щоб вони відстояли одна від одної на однакову відстань h, названу кроком обчислення, то одержуємо формулу:

$$y_n = y_{n-1} + f(x_{n-1}, y_{n-1})h$$

Слід зазначити, що точність методу Ейлера відносно невисока. Збільшити точність можна, звичайно, зменшивши крок обчислень, однак, це приведе до ускладнення розрахунків. Тому на практиці застосовується так званий **уточнений метод Ейлера** або **формула перерахування**.

Суть методу полягає у тому, що у формулі $y_1 = y_0 + f(x_0, y_0)h$ замість значення $y_0' = f(x_0, y_0)$ береться середнє арифметичне значень $f(x_0, y_0)$ і $f(x_1, y_1)$. Тоді уточнене значення:

$$y_1^{(1)} = y_0 + \frac{f(x_0, y_0) + f(x_1, y_1)}{2} h;$$

Потім знаходимо значення похідної у точці $(x_1, y_1^{(1)})$. Заміняючи $f(x_0, y_0)$ середнім арифметичним значень $f(x_0, y_0)$ і $f(x_1, y_1^{(1)})$, знаходимо друге уточнене значення y_1.

$$y_1^{(2)} = y_0 + \frac{f(x_0, y_0) + f(x_1, y_1^{(1)})}{2} h;$$

Потім третє:

$$y_1^{(3)} = y_0 + \frac{f(x_0, y_0) + f(x_1, y_1^{(2)})}{2} h;$$

тощо, поки два послідовних уточнених значення не перебуватимуть на відстані, меншій за заданий порядок точності. Тоді це значення приймається за ординату точки M_1 ламаної Ейлера.

Аналогічна операція виконується для інших значень y.

Подібне уточнення дозволяє істотно підвищити точність результату.

2.1.11.2 Метод Рунґе-Кутти

Метод Рунґе[5]-Кутти[6] є точнішим у порівнянні з методом Ейлера.

Суть уточнення полягає у тому, що шуканий розв'язок представляється у вигляді розкладу Тейлора (див. Формула Тейлора).

$$y_{i+1} = y_i + y_i' h + y_i'' \frac{h^2}{2!} + y_i''' \frac{h^3}{3!} + y_i^{IV} \frac{h^4}{4!} + \ldots$$

Якщо у цій формулі обмежитися двома першими доданками, то одержимо формулу методу Ейлера. Метод Рунґе-Кутти враховує чотири перших члени розкладу.

$$y_{i+1} = y_i + y_i' h + y_i'' \frac{h^2}{2!} + y_i''' \frac{h^3}{3!} = y_i + \Delta y_i.$$

У методі Рунґе–Кутти прирости Δy_i пропонується обчислювати за формулою:

$$\Delta y_i = \frac{1}{6} \left(k_1^{(i)} + 2k_2^{(i)} + 2k_3^{(i)} + k_4^{(i)} \right)$$

де коефіцієнти k_i обчислюються за формулами:

$$k_1^{(i)} = hf(x_i, y_i);$$

$$k_2^{(i)} = hf\left(x_i + \frac{h}{2}; y_i + \frac{k_1^{(i)}}{2} \right);$$

$$k_3^{(i)} = hf\left(x_i + \frac{h}{2}; y_i + \frac{k_2^{(i)}}{2} \right);$$

$$k_4^{(i)} = hf\left(x_i + h; y_i + k_3^{(i)} \right);$$

<u>Приклад.</u> Розв'язати методом Рунґе–Кутти диференціальне рівняння $y' = x + y$ при початковій умові $y(0) = 1$ на відрізку [0; 0,5] із кроком 0,1.

Для $i = 0$ обчислимо коефіцієнти k_i.

$$k_1^{(0)} = hf(x_0, y_0) = 0,1(x_0 + y_0) = 0,1(0 + 1) = 0,1;$$

$$k_2^{(0)} = hf\left(x_0 + \frac{h}{2}; y_0 + \frac{k_1^{(0)}}{2} \right) = 0,1\,(0,05 + 1,05) = 0,11;$$

$$k_3^{(0)} = hf\left(x_0 + \frac{h}{2}; y_0 + \frac{k_2^{(0)}}{2} \right) = 0,1(0,05 + 1,055) = 0,1105;$$

$$k_4^{(0)} = hf\left(x_0 + h; y_0 + k_3^{(0)} \right) = 0,1(0,1 + 1,1105) = 0,1211;$$

$$\Delta y_0 = \frac{1}{6}(k_1^{(0)} + 2k_2^{(0)} + 2k_3^{(0)} + k_4^{(0)}) = \frac{1}{6}(0,1 + 0,22 + 0,221 + 0,1211) = 0,1104;$$
$$x_1 = x_0 + h = 0,1;$$
$$y_1 = y_0 + \Delta y_0 = 1 + 0,1104 = 1,1104;$$

i	x_i	k		Δy_i	y_i
0	0	1	0,1000	0,1104	1
		2	0,1100		
		3	0,1105		
		4	0,1155		
1	0,1	1	0,1210	0,1325	1,1104
		2	0,1321		
		3	0,1326		
		4	0,1443		
2	0,2	1	0,1443	0,1569	1,2429
		2	0,1565		
		3	0,1571		
		4	0,1700		
3	0.3	1	0,1700	0,1840	1,3998
		2	0,1835		
		3	0,1842		
		4	0,1984		
4	0,4	1	0,1984	0,2138	1,5838
		2	0,2133		
		3	0,2140		
		4	0,2298		
5	0,5				1,7976

i	0	1	2	3	4	5
x_i	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
y_i	1	1,1	1,22	1,362	1,528	1,721

Наступні обчислення наводити не будемо, а результати представимо у вигляді таблиці.

Розв'яжемо цей же приклад методом Ейлера.

Застосовуємо формулу $y_n = y_{n-1} + hf(x_{n-1}, y_{n-1})$.

$$x_0 = 0, \quad y_0 = 1, \qquad f(x_0, y_0) = x_0 + y_0 = 1;$$
$$hf(x_0, y_0) = h(x_0 + y_0) = 0,1;$$
$$y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0) = 1 + 0,1 = 1,1.$$

$$x_1 = 0,1 \quad y_0 = 1,1 \qquad f(x_1, y_1) = x_1 + y_1 = 1,2;$$
$$hf(x_1, y_1) = h(x_1 + y_1) = 0,12;$$
$$y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1) = 1,1 + 0,12 = 1,22.$$

Виконуючи аналогічні обчислення далі, одержуємо таблицю значень:

Застосуємо тепер уточнений метод Ейлера.

Для порівняння точності наведених методів числового розв'язання даного рівняння розв'яжемо його аналітично і знайдемо точні значення функції y на заданому відрізку.

Рівняння $y' - y = x$ є лінійним неоднорідним диференціальним рівнянням першого порядку. Розв'яжемо відповідне йому однорідне рівняння.

$$y' - y = 0; \qquad y' = y; \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y; \qquad \frac{\mathrm{d}y}{y} = \mathrm{d}x; \qquad \int \frac{\mathrm{d}y}{y} = \int \mathrm{d}x;$$
$$\ln|y| = x + \ln C; \qquad \ln\left|\frac{y}{C}\right| = x; y = Ce^x;$$

Розв'язок неоднорідного рівняння має вигляд $y = C(x)e^x$.

$$y' = C'(x)e^x + C(x)e^x;$$

[5]Карл Давід Тольме Рунґе (Carl David Tolmé Runge) (1856–1927) – німецький математик, фізик і спектроскопіст.

[6]Мартін Вільгельм Кутта (Martin Wilhelm Kutta) (1867–1944) – німецький математик.

i	0	1	2	3	4	5
x_i	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
y_i	1	1,1	1,243	1,400	1,585	1,799

$$C'(x)e^x + C(x)e^x = x + C(x)e^x; \qquad C'(x)e^x = x; \qquad C'(x) = xe^{-x};$$

$$C(x) = \int xe^{-x}\mathrm{d}x = \left\{ \begin{array}{ll} u = x; & \mathrm{d}v = e^{-x}\mathrm{d}x; \\ \mathrm{d}u = \mathrm{d}x; & v = -e^{-x}; \end{array} \right\} = -xe^{-x} + \int e^{-x}\mathrm{d}x = -xe^{-x} - e^{-x} + C;$$

Загальний розв'язок: $y = Ce^x - x - 1$;
З врахуванням початкової умови: $1 = C - 0 - 1$; $\quad C = 2$;
Частинний розв'язок: $y = 2e^x - x - 1$.
Для порівняння отриманих результатів складемо таблицю.

i	x_i	y_i			
		Метод Ейлера	Уточнений метод Ейлера	Метод Рунґе-Кутти	Точне значення
0	0	1	1	1	1
1	0,1	1,1	1,1	1,1104	1,1103
2	0,2	1,22	1,243	1,2429	1,2428
3	0,3	1,362	1,4	1,3998	1,3997
4	0,4	1,528	1,585	1,5838	1,5837
5	0,5	1,721	1,799	1,7976	1,7975

Як видно з отриманих результатів метод Рунґе-Кутти дає найбільш точну відповідь. Точність досягає $0,0001$. Крім того, варто звернути увагу на те, помилка (розбіжність між точним і наближеним значеннями) збільшується з кожним кроком обчислень. Це обумовлено тим, що, по-перше, отримане наближене значення округляється на кожному кроці, а по-друге – тим, що як основу обчислення приймається значення, отримане на попередньому кроці, тобто наближене значення. У такий спосіб відбувається нагромадження помилки.

Це добре видно з таблиці. З кожним новим кроком наближене значення усе більше відрізняється від точного.

2.2 Диференціальні рівняння вищих порядків

Означення. Диференціальним рівнянням порядку n називається рівняння вигляду:

$$F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0$$

У деяких випадках це рівняння можна розв'язати відносно $y^{(n)}$:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', ..., y^{(n-1)}).$$

Так само, як і рівняння першого порядку, рівняння вищих порядків мають нескінченну кількість розв'язків.

Означення. Розв'язок $y = \varphi(x)$ задовольняє початковим умовам $x_0, y_0, y_0', ..., y_0^{(n-1)}$, якщо $\varphi(x_0) = y_0$, $\varphi'(x_0) = y_0'$, $\ldots$, $\varphi^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$.

Означення. Розв'язок рівняння $F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0$, що задовольняє початковим умовам x_0, y_0, y_0', $\ldots$, $y_0^{(n-1)}$, називається **розв'язком задачі Коші.**

Теорема Коші. (Теорема про необхідні і достатні умови існування розв'язку задачі Коші).

Якщо функція $(n+1)$-ої змінної вигляду $f(x, y, y', ..., y^{(n-1)})$ у деякій області D $(n+1)$-вимірного простору неперервна і має неперервні частинні похідні за $y, y', ..., y^{(n-1)}$, то яка б не була точка $(x_0, y_0, y_0', ..., y_0^{(n-1)})$ у цій області, існує єдиний розв'язок $y = \varphi(x)$ рівняння $y^{(n)} = f(x, y, y', ..., y^{(n-1)})$, визначений у деякому інтервалі, що містить точку x_0, та задовольняє початковим умовам $x_0, y_0, y_0', ..., y_0^{(n-1)}$.

Диференціальні рівняння вищих порядків, розв'язки яких можуть бути знайдені аналітично, можна розділити на кілька основних типів.

Розгляньмо докладніше методи знаходження розв'язків цих рівнянь.

2.2.1 Рівняння, що допускають зниження порядку

Зниження порядку диференціального рівняння – основний метод розв'язання рівнянь вищих порядків. Цей метод дає можливість порівняно легко знаходити розв'язок, однак, він застосовний далеко не до всіх рівнянь. Розглянемо випадки, коли можливе зниження порядку.

2.2.2 Рівняння типу $y^{(n)} = f(x)$

Якщо $f(x)$ – функція неперервна на деякому проміжку $a < x < b$, то розв'язок може бути знайдено послідовним інтегруванням.

$$y^{(n-1)} = \int f(x)\mathrm{d}x + C_1;$$

$$y^{(n-2)} = \int \left(\int f(x)\mathrm{d}x + C_1 \right) \mathrm{d}x + C_2 = \int \mathrm{d}x \int f(x)\mathrm{d}x + C_1 x + C_2;$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$y=\int \mathrm{d}x\int \mathrm{d}x....\int f(x)\mathrm{d}x+C_1\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}+C_2\frac{x^{n-2}}{(n-2)!}+...+C_n;$$

Приклад. Розв'язати рівняння $y'''=e^{2x}$ з початковими умовами $x_0=0$; $y_0=1$; $y_0'=-1$; $y_0''=0$.

$$y''=\int e^{2x}\mathrm{d}x+C_1=\frac{1}{2}e^{2x}+C_1;$$

$$y'=\int\left(\frac{1}{2}e^{2x}+C_1\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{4}e^{2x}+C_1x+C_2;$$

$$y=\int\left(\frac{1}{4}e^{2x}+C_1x+C_2\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{8}e^{2x}+\frac{1}{2}C_1x^2+C_2x+C_3;$$

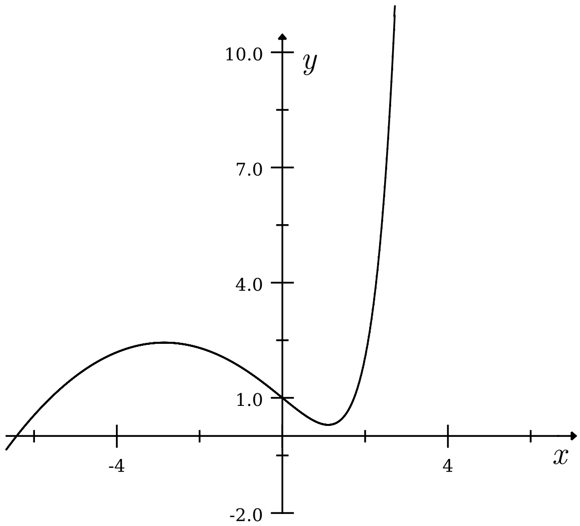
Підставимо початкові умови:

$$1=\frac{1}{8}+C_3;\quad -1=\frac{1}{4}+C_2;\quad 0=\frac{1}{2}+C_1;$$

$$C_1=-\frac{1}{2};\quad C_2=-\frac{5}{4};\quad C_3=\frac{7}{8};$$

Одержуємо частинний розв'язок (розв'язок задачі Коші): $y=\frac{1}{8}e^{2x}-\frac{1}{4}x^2-\frac{5}{4}x+\frac{7}{8}$.

Нижче показана інтегральна крива даного диференціального рівняння.



2.2.3 Рівняння, що не містять явно шуканої функції і її похідних до порядку $k-1$ включно

Це рівняння вигляду: $F(x,y^{(k)},y^{(k+1)},...,y^{(n)})=0$.

У рівняннях такого типу можливе зниження порядку на k одиниць. Для цього роблять заміну змінної:

$$y^{(k)}=z;\quad y^{(k+1)}=z';\quad ...\quad y^{(n)}=z^{(n-k)}.$$

Тоді одержуємо: $F(x,z,z',...,z^{(n-k)})=0$.

Тепер припустимо, що отримане диференціальне рівняння проінтегровано і сукупність його розв'язків виражається співвідношенням:

$$z=\psi(x,C_1,C_2,...,C_{n-k}).$$

Роблячи зворотну підстановку, маємо:

$$y^{(k)}=\psi(x,C_1,C_2,...,C_{n-k})$$

Інтегруючи отримане співвідношення послідовно k раз, одержуємо остаточну відповідь:

$$y=\varphi(x,C_1,C_2,...,C_n).$$

Приклад. Знайти загальний розв'язок рівняння $y'''=\frac{y''}{x}$.

Застосовуємо підстановку $z=y''$; $z'=y'''$;

$$z'=\frac{z}{x};\qquad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\frac{z}{x};\qquad \frac{\mathrm{d}z}{z}=\frac{\mathrm{d}x}{x};\qquad \int\frac{\mathrm{d}z}{z}=\int\frac{\mathrm{d}x}{x};$$

$$\ln|z|=\ln|x|+\ln C_1;\qquad z=C_1x;$$

Зробивши зворотну заміну, одержуємо:

$$y'' = C_1 x; \qquad y' = \int C_1 x \mathrm{d}x = \frac{C_1}{2}x^2 + C_2;$$

$$y = \int \left(\frac{C_1}{2}x^2 + C_2\right) \mathrm{d}x = \frac{C_1}{6}x^3 + C_2 x + C_3;$$

Загальний розв'язок вихідного диференціального рівняння:

$$y = Cx^3 + C_2 x + C_3;$$

Відзначимо, що це співвідношення є розв'язком для всіх значень змінної x крім значення $x = 0$.

2.2.4 Рівняння, що не містять явно незалежної змінної (автономні)

Це рівняння типу $F(y, y', ..., y^{(n)}) = 0$.

Порядок таких рівнянь може бути знижений на одиницю за допомогою заміни змінних $y' = p$.

$$y'' = \frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}y} \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}p;$$

$y''' = \dfrac{\mathrm{d}y''}{\mathrm{d}x} = \dfrac{\mathrm{d}y''}{\mathrm{d}y} \cdot \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{\mathrm{d}y''}{\mathrm{d}y}p = \dfrac{\mathrm{d}\left(\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}p\right)}{\mathrm{d}y}p = \dfrac{\mathrm{d}^2 p}{\mathrm{d}y^2}p^2 + \left(\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}\right)^2 p$; тощо.

Підставляючи ці значення у вихідне диференціальне рівняння, одержуємо:

$$F_1\left(y, p, \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}, ..., \frac{\mathrm{d}^{n-1}p}{\mathrm{d}y^{n-1}}\right) = 0$$

Якщо це рівняння проінтегрувати, і $\Phi(y, p, C_1, C_2, ..., C_{n-1}) = 0$ – сукупність його розв'язків, то для розв'язання даного диференціального рівняння залишається розв'язати рівняння першого порядку:

$$\Phi(y, y', C_1, C_2, ..., C_{n-1}) = 0.$$

<u>Приклад.</u> Знайти загальний розв'язок рівняння $yy'' - (y')^2 - 4yy' = 0$.

Заміна змінної: $p = y'$; $\quad y'' = \dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}p$;

$$yp\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} - p^2 - 4yp = 0; \quad p\left(y\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} - p - 4y\right) = 0;$$

$$1) y\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} - p - 4y = 0; \quad \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} = 4 + \frac{p}{y};$$

Для розв'язання отриманого диференціального рівняння зробимо заміну змінної: $u = \dfrac{p}{y}$.

$$u + \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}y = 4 + u; \quad \mathrm{d}u = 4\frac{\mathrm{d}y}{y};$$

$$\int \mathrm{d}u = 4\int \frac{\mathrm{d}y}{y}; \quad u = 4\ln|y| + 4\ln C_1; \quad u = 4\ln|C_1 y|;$$

$$p = 4y\ln|C_1 y|;$$

З врахуванням того, що $p = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, одержуємо:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 4y\ln|C_1 y|; \quad \int \frac{\mathrm{d}y}{4y\ln|C_1 y|} = \int \mathrm{d}x;$$

$$x = \frac{1}{4}\int \frac{\mathrm{d}(\ln|C_1 y|)}{\ln|C_1 y|} = \frac{1}{4}\ln|\ln|C_1 y|| + C_2;$$

Загальний інтеграл має вигляд: $\ln|\ln|C_1 y|| = 4x + C$;

$$2) p = 0; \qquad y' = 0; \qquad y = C;$$

Таким чином, одержали два загальних розв'язки.

2.2.5 Лінійні диференціальні рівняння вищих порядків

Означення. **Лінійним диференціальним рівнянням n-го порядку** називається будь-яке рівняння першого степеня щодо функції y і її похідних $y', y'', ..., y^{(n)}$ вигляду:

$$p_0 y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + p_2 y^{(n-2)} + ... + p_{n-1} y' + p_n y = f(x);$$

де $p_0, p_1, \ldots, p_n$ – функції від x або сталі величини, причому $p_0 \neq 0$.

Ліву частину цього рівняння позначимо $L(y)$.

$$p_0 y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + p_2 y^{(n-2)} + ... + p_{n-1} y' + p_n y = L(y);$$

Означення. Якщо $f(x) = 0$, то рівняння $L(y) = 0$ називається **лінійним однорідним** рівнянням, якщо $f(x) \neq 0$, то рівняння $L(y) = f(x)$ називається **лінійним неоднорідним** рівнянням, якщо всі коефіцієнти $p_0, p_1, p_2, \ldots, p_n$ – сталі числа, то рівняння $L(y) = f(x)$ називається **лінійним диференціальним рівнянням вищого порядку зі сталими коефіцієнтами**.

Відзначимо одну важливу властивість лінійних рівнянь вищих порядків, що відрізняє їх від нелінійних. Для нелінійних рівнянь частинний інтеграл знаходиться із загального, а для лінійних – навпаки, загальний інтеграл складається із часток. Лінійні рівняння являють собою найбільш вивчений клас диференціальних рівнянь вищих порядків. Це пояснюється порівняною простотою знаходження розв'язку. Якщо при розв'язанні якихось практичних задач потрібно розв'язати нелінійне диференціальне рівняння, то часто застосовуються наближені методи, що дозволяють замінити таке рівняння «близьким» до нього лінійним.

Розглянемо способи інтегрування деяких типів лінійних диференціальних рівнянь вищих порядків.

2.2.6 Лінійні однорідні диференціальні рівняння з довільними коефіцієнтами

Розглянемо рівняння типу $p_0 y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + p_2 y^{(n-2)} + ... + p_{n-1} y' + p_n y = 0$

Означення. Вираз $p_0 y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + p_2 y^{(n-2)} + ... + p_{n-1} y' + p_n y = L(y)$ називається **лінійним диференціальним оператором**.

Лінійний диференціальний оператор має наступні властивості:

$$1) L(Cy) = CL(y);$$
$$2) L(y_1 + y_2) = L(y_1) + L(y_2);$$

Розв'язки лінійного однорідного рівняння мають наступні властивості:
1) Якщо функція y_1 є розв'язком рівняння, то функція Cy_1, де C – стале число, також є його розв'язком.
2) Якщо функції y_1 і y_2 є розв'язками рівняння, то $y_1 + y_2$ також є його розв'язком.

Структура загального розв'язку

Означення. **Фундаментальною системою розв'язків** лінійного однорідного диференціального рівняння n-го порядку на інтервалі (a, b) називається всяка система n лінійно незалежних на цьому інтервалі розв'язків рівняння.

Означення. Якщо з функцій y_i скласти визначник n-го порядку

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & ... & y_n \\ y_1' & y_2' & ... & y_n' \\ ... & ... & ... & ... \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & ... & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix},$$

те цей визначник називається **визначником Вронського**[7].

Теорема. *Якщо функції $y_1, y_2, ..., y_n$ лінійно залежні, то складений для них визначник Вронського дорівнює нулю.*

Теорема. *Якщо функції $y_1, y_2, ..., y_n$ лінійно незалежні, то складений для них визначник Вронського не дорівнює нулю в жодній точці розглянутого інтервалу.*

Теорема. *Для того, щоб система розв'язків лінійного однорідного диференціального рівняння $y_1, y_2, ..., y_n$ була фундаментальною необхідно і достатньо, щоб складений для них визначник Вронського не дорівнював нулю.*

Теорема. *Якщо $y_1, y_2, ..., y_n$ - фундаментальна система розв'язків на інтервалі (a, b), то загальний розв'язок лінійного однорідного диференціального рівняння є лінійною комбінацією цих розв'язків.*

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + ... + C_n y_n,$$

де C_i – сталі коефіцієнти.

Застосування наведених вище властивостей і теорем розглянемо на прикладі лінійних однорідних диференціальних рівнянь другого порядку.

[7] Юзеф Вронський (Józef Maria Hoene-Wroński) (1776–1853) – польський математик і філософ-містик.

2.2.7 Загальний розв'язок лінійного однорідного диференціального рівняння другого порядку

З вищевикладеного видно, що відшукання загального розв'язку лінійного однорідного диференціального рівняння зводиться до знаходження його фундаментальної системи розв'язків.

Однак, навіть для рівняння другого порядку, якщо коефіцієнти p залежать від x, ця задача не може бути вирішена в загальному виді.

Проте, якщо відомий один ненульовий частинний розв'язок, то задача може бути вирішена.

<u>Теорема.</u> *Якщо задано рівняння типу $y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0$ і відомий один ненульовий розв'язок $y = y_1$, то загальний розв'язок може бути знайдений за формулою*:

$$y = C_2 y_1 \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int p_1(x)\mathrm{d}x} \mathrm{d}x + C_1 y_1.$$

Таким чином, для одержання загального розв'язку треба підібрати якийсь частинний розв'язок диференціального рівняння, хоча це буває часто достатньо складно.

2.2.8 Лінійні однорідні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами

Розв'язок диференціального рівняння типу $y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + ... + a_n y = 0$ або, коротше, $L(y) = 0$ будемо шукати у вигляді $y = e^{kx}$, де $k = const$.

Оскільки $y' = ke^{kx}$; $\quad y'' = k^2 e^{kx}$; $\quad ... \quad y^{(n)} = k^n e^{kx}$,

$$L(e^{kx}) = e^{kx}(k^n + a_1 k^{n-1} + ... + a_n).$$

При цьому многочлен $F(k) = k^n + a_1 k^{n-1} + ... + a_n$ називається **характеристичним многочленом диференціального рівняння**.

Для того, щоб функція $y = e^{kx}$ була розв'язком вихідного диференціального рівняння, необхідно і достатньо, щоб $L(e^{kx}) = 0$; Тобто $e^{kx}F(k) = 0$.

Оскільки $e^{kx} \neq 0$, $F(k) = 0$ – це рівняння називається **характеристичним рівнянням**.

Як і будь-яке алгебраїчне рівняння степеня n, характеристичне рівняння $k^n + a_1 k^{n-1} + ... + a_n = 0$ має n корінь. Кожному кореню характеристичного рівняння k_i відповідає розв'язок диференціального рівняння.

Залежно від коефіцієнтів k характеристичне рівняння може мати або n різних дійсних коренів, або серед дійсних коренів можуть бути кратні корені, можуть бути комплексно-спряжені корені, як різні, так і кратні.

Не будемо докладно розглядати кожний випадок, а сформулюємо загальне правило знаходження розв'язку лінійного однорідного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами.

1) Встановлюємо характеристичне рівняння і знаходимо його корені.

2) Знаходимо частинні розв'язки диференціального рівняння, причому:

а) кожному дійсному кореню відповідає розв'язок e^{kx};

б) кожному дійсному кореню кратності m ставиться у відповідність m розв'язків:

$$e^{kx}; \quad xe^{kx}; \quad ... \quad x^{m-1}e^{kx}.$$

в) кожній парі комплексно-спряжених коренів $\alpha \pm i\beta$ характеристичного рівняння ставиться у відповідність два розв'язки:

$e^{\alpha x}\cos\beta x$ та $e^{\alpha x}\sin\beta x$

г) кожній парі m-кратних комплексно-спряжених коренів $\alpha \pm i\beta$ характеристичного рівняння ставиться у відповідність $2m$ розв'язків:

$$\begin{aligned} &e^{\alpha x}\cos\beta x, \quad xe^{\alpha x}\cos\beta x, \quad ... \quad x^{m-1}e^{\alpha x}\cos\beta x, \\ &e^{\alpha x}\sin\beta x, \quad xe^{\alpha x}\sin\beta x, \quad ... x^{m-1}e^{\alpha x}\sin\beta x. \end{aligned}$$

3) Встановлюємо лінійну комбінацію знайдених розв'язків.

Ця лінійна комбінація і буде загальним розв'язком вихідного лінійного однорідного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами.

<u>Приклад.</u> Розв'язати рівняння $y''' - y = 0$.

Складемо характеристичне рівняння: $k^3 - 1 = 0$;

$$(k-1)(k^2+k+1) = 0; \qquad k_1 = 1; \qquad k^2+k+1 = 0;$$

$$D = 1 - 4 = -3; \qquad k_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i; \qquad k_3 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i;$$

Загальний розв'язок має вигляд: $y = C_1 e^x + e^{-\frac{x}{2}}\left[C_2\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_3\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right]$.

<u>Приклад.</u> Розв'язати рівняння $(1-x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0$.

Це лінійне однорідне диференціальне рівняння зі змінними коефіцієнтами другого порядку. Для знаходження загального розв'язку необхідно відшукати якийсь частинний розв'язок.

Таким частинним розв'язком буде функція $y_1 = x$.

$$y_1' = 1; \quad y_1'' = 0; \qquad 0 - 2x + 2x = 0;$$

Вихідне диференціальне рівняння можна перетворити:

$$y'' - \frac{2x}{1-x^2}y' + \frac{2y}{1-x^2} = 0.$$

Загальний розв'язок має вигляд: $y = C_1 x \int \frac{1}{x^2} e^{\int \frac{2x}{1-x^2}\mathrm{d}x} \mathrm{d}x + C_2 x;$

$$y = C_1 x \int \frac{e^{-\ln(1-x^2)}}{x^2} \mathrm{d}x + C_2 x;$$

$$y = C_1 x \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2\,(1-x^2)} + C_2 x; \qquad y = C_2 x + C_1 x \int \left[\frac{1}{x^2} + \frac{1}{2(1-x)} + \frac{1}{2(1+x)}\right] \mathrm{d}x;$$

$$y = C_2 x + C_1 x \left[-\frac{1}{x} + \frac{1}{2} \ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\right];$$

Остаточно: $y = C_2 x + C_3 x \ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C_4;$

Приклад. Розв'язати рівняння $y^{IV} - y = 0$.
Складемо характеристичне рівняння: $k^4 - 1 = 0$.

$$(k^2-1)(k^2+1) = 0; \qquad k_1 = 1; \quad k_2 = -1; \quad k_3 = i; \quad k_4 = -i.$$

Загальний розв'язок:$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x$.
Приклад. Розв'язати рівняння $y'' - 4y' + 4y = 0$.
Характеристичне рівняння: $k^2 - 4k + 4 = 0; \qquad k_1 = k_2 = 2$.
Загальний розв'язок: $y = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x}$.
Приклад. Розв'язати рівняння $y'' + 2y' + 5y = 0$.
Характеристичне рівняння: $k^2 + 2k + 5 = 0; \qquad D = -16; \qquad k_1 = -1 + 2i;$

$$k_2 = -1 - 2i.$$

Загальний розв'язок: $y = e^{-x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$.
Приклад. Розв'язати рівняння $y''' - 7y'' + 6y' = 0$.
Характеристичне рівняння: $k^3 - 7k^2 + 6k = 0; \qquad k(k^2 - 7k + 6) = 0;$

$$k_1 = 0; \quad k_2 = 1; \quad k_3 = 6;$$

Загальний розв'язок: $y = C_1 + C_2 e^x + C_3 e^{6x}$;
Приклад. Розв'язати рівняння $y'' - y' - 2y = 0$.
Характеристичне рівняння: $k^2 - k - 2 = 0; \qquad k_1 = -1; \quad k_2 = 2;$
Загальний розв'язок: $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x}$.
Приклад. Розв'язати рівняння $y^V - 9y''' = 0$.
Характеристичне рівняння: $k^5 - 9k^3 = 0; \qquad k^3(k^2 - 9) = 0;$

$$k_1 = k_2 = k_3 = 0; \qquad k_4 = 3; \qquad k_5 = -3;$$

Загальний розв'язок: $y = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 e^{3x} + C_5 e^{-3x}$;
Приклад. Розв'язати рівняння $yy'' - y'^2 = 0$.
Це рівняння не є лінійним, отже, наведений вище метод розв'язання до нього не застосовний.
Понизимо порядок рівняння за допомогою підстановки $y' = p$.
Тоді $y'' = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} y' = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} p$.

$$y\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}p - p^2 = 0; \quad p_1 = 0; \quad y_1 = C_1;$$

$$y\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} = p; \qquad \frac{\mathrm{d}p}{p} = \frac{\mathrm{d}y}{y}; \qquad \int \frac{\mathrm{d}p}{p} = \int \frac{\mathrm{d}y}{y}; \qquad \ln|p| = \ln|y| + \ln C;$$

$$p = Cy; \qquad y' = Cy; \qquad \frac{\mathrm{d}y}{Cy} = \mathrm{d}x; \qquad \int \frac{\mathrm{d}y}{Cy} = \int \mathrm{d}x;$$

$$\frac{1}{C} \ln|Cy| = x + \ln C_2; \qquad Cy = e^{Cx} e^{C \ln C_2} = C_3 e^{Cx};$$

Остаточно одержуємо: $y = C_1 e^{Cx}$;

Цей вираз буде загальним розв'язком вихідного диференціального рівняння. Отриманий вище розв'язок $y_1 = C_1$ виходить із загального розв'язку при $C = 0$.

Приклад. Розв'язати рівняння $3yy'' + y'^2 = 0$.

Робимо заміну змінної: $y' = p; \quad y'' = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}y' = p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$;

$$3yp\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} + p^2 = 0; \quad p_1 = 0; \quad y_1 = C;$$

$$3y\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} = -p; \qquad \frac{\mathrm{d}p}{p} = -\frac{\mathrm{d}y}{3y}; \qquad \int\frac{\mathrm{d}p}{p} = -\frac{1}{3}\int\frac{\mathrm{d}y}{y};$$

$$\ln|p| = -\frac{1}{3}\ln|y| + \ln C; \qquad p^3 = \frac{C}{y}; \qquad y' = C_1 y^{-\frac{1}{3}};$$

$$y^{\frac{1}{3}}\mathrm{d}y = C_1\mathrm{d}x; \qquad \int y^{\frac{1}{3}}\mathrm{d}y = C_1\int\mathrm{d}x; \qquad \frac{3}{4}y^{\frac{4}{3}} = C_1 x + C_2;$$

$$y^{\frac{4}{3}} = C_3 x + C_4;$$

Загальний розв'язок: $y = (C_3 x + C_4)^{\frac{3}{4}}$.

2.2.9 Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння з довільними коефіцієнтами

Розглянемо рівняння типу $y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + ... + p_n(x)y = f(x)$.

З урахуванням позначення $y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + ... + p_n(x)y = L(x)$ можна записати:

$$L(x) = f(x).$$

При цьому будемо вважати, що коефіцієнти і права частина цього рівняння неперервні на деякому інтервалі (кінцевому або нескінченному).

Теорема. *Загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння $y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + ... + p_n(x)y = f(x)$ у деякій області є сума* ***будь-якого*** *його розв'язку і загального розв'язку відповідного лінійного однорідного диференціального рівняння.*

Доведення. Нехай Y – деякий розв'язок неоднорідного рівняння.

Тоді при підстановці цього розв'язку у вихідне рівняння одержуємо тотожність:

$$L(Y) \equiv f(x).$$

Нехай $y_1, y_2, ..., y_n$ – фундаментальна система розв'язків лінійного однорідного рівняння $L(y) = 0$. Тоді загальний розв'язок однорідного рівняння можна записати у вигляді:

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + ... + C_n y_n; \quad C_i = const.$$

Далі покажемо, що сума $Y + C_1 y_1 + C_2 y_2 + ... + C_n y_n$є загальним розв'язком неоднорідного рівняння.

$$L(Y + C_1 y_1 + C_2 y_2 + ... + C_n y_n) = L(Y) + L(C_1 y_1) + L(C_2 y_2) + ... + L(C_n y_n) = L(Y) = f(x)$$

Загалом кажучи, розв'язок Y може бути отриманий із загального розв'язку, оскільки є частинним розв'язком.

Таким чином, відповідно до доведеної теореми, для розв'язку лінійного неоднорідного диференціального рівняння необхідно знайти загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння і якимось чином відшукати один частковий розв'язок неоднорідного рівняння. Зазвичай він знаходиться підбором.

На практиці зручно застосовувати метод **варіації довільних сталих**. Для цього спочатку знаходять загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння у вигляді:

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + ... + C_n y_n = \sum_{i=1}^{n} C_i y_i;$$

Потім, вважаючи коефіцієнти C_i функціями від x, шукається розв'язок неоднорідного рівняння:

$$y = \sum_{i=1}^{n} C_i(x) y_i;$$

Можна довести, що для знаходження функцій $C_i(x)$ треба розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} C_i'(x)y_i = 0 \\ \sum_{i=1}^{n} C_i'(x)y_i' = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \sum_{i=1}^{n} C_i'(x)y_i^{(n-1)} = f(x) \end{cases}$$

Приклад. Розв'язати рівняння $y'' + y = x - \sin 2x$.

Розв'язуємо лінійне однорідне рівняння $y'' + y = 0$.

$$k^2 + 1 = 0; \quad k_1 = i; \quad k_2 = -i.$$

$$y = e^{\alpha x}(A\cos\beta x + B\sin\beta x); \quad \alpha = 0; \quad \beta = 1;$$

$$y = A\cos x + B\sin x;$$

Розв'язок неоднорідного рівняння буде мати вигляд:

$$y = A(x)\cos x + B(x)\sin x;$$

Становимо систему рівнянь:

$$\begin{cases} A'(x)\cos x + B'(x)\sin x = 0 \\ -A'(x)\sin x + B'(x)\cos x = x - \sin 2x \end{cases}$$

Розв'яжемо цю систему:

$$\begin{cases} B'(x) = -A'(x)\dfrac{\cos x}{\sin x} \\ -A'(x)\sin x - A'(x)\dfrac{\cos^2 x}{\sin x} = x - \sin 2x \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{-A'(x)}{\sin x} = x - \sin 2x \\ B'(x) = \cos x(x - \sin 2x) \end{cases}$$

Зі співвідношення $A'(x) = 2\sin^2 x\cos x - x\sin x$ знайдемо функцію $A(x)$.

$$A(x) = \int \left(2\sin^2 x\cos x - x\sin x\right)\mathrm{d}x = 2\int \sin^2 x\cos x\mathrm{d}x - \int x\sin x\mathrm{d}x = \frac{2}{3}\sin^3 x - \int x\sin x\mathrm{d}x =$$

$$= \left\{ \begin{array}{ll} u = x; & \mathrm{d}v = \sin x\mathrm{d}x; \\ \mathrm{d}u = \mathrm{d}x; & v = -\cos x \end{array} \right\} = \frac{2}{3}\sin^3 x + x\cos x - \int \cos x\mathrm{d}x = \frac{2}{3}\sin^3 x + x\cos x - \sin x + C_1.$$

Тепер знаходимо $y(x)$.

$$B(x) = \int x\cos x\mathrm{d}x - 2\int \cos^2 x\sin x\mathrm{d}x = \left\{ \begin{array}{ll} u = x; & \mathrm{d}v = \cos x\mathrm{d}x; \\ \mathrm{d}u = \mathrm{d}x; & v = \sin x; \end{array} \right\} =$$

$$= x\sin x - \int \sin x\mathrm{d}x + \frac{2}{3}\cos^3 x == \frac{2}{3}\cos^3 x + x\sin x + \cos x + C_2.$$

Підставляємо отримані значення у формулу загального розв'язку неоднорідного рівняння:

$$y = \frac{2}{3}\sin^3 x\cos x + x\cos^2 x - \sin x\cos x + C_1\cos x + \frac{2}{3}\sin x\cos^3 x + x\sin^2 x + \sin x\cos x + C_2\sin x =$$
$$= \frac{2}{3}\sin x\cos x(\sin^2 x + \cos^2 x) + x(\sin^2 x + \cos^2 x) + C_1\cos x + C_2\sin x.$$

Остаточна відповідь: $y = \dfrac{1}{3}\sin 2x + x + C_1\cos x + C_2\sin x$;

Таким чином, удалося уникнути знаходження частинного розв'язку неоднорідного рівняння методом підбору.

Загалом кажучи, метод варіації довільних сталих придатний для знаходження розв'язків будь-якого лінійного неоднорідного рівняння. Але оскільки знаходження фундаментальної системи розв'язків відповідного однорідного рівняння може бути достатньо складною задачею, цей метод в основному застосовується для неоднорідних рівнянь із сталими коефіцієнтами.

2.2.10 Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами

Рівняння із правою частиною спеціального вигляду

Представляється можливим представити вид частинного розв'язку залежно від типу правої частини неоднорідного рівняння.

Розрізняють наступні випадки:

I. Права частина лінійного неоднорідного диференціального рівняння має вигляд:

$$f(x) = P(x)e^{\alpha x},$$

де $P(x) = A_0x^m + A_1x^{m-1} + ... + A_m$ – многочлен степеня m.

Тоді частинний розв'язок шукається у вигляді:

$$y = x^r e^{\alpha x} Q(x)$$

Тут $Q(x)$ – многочлен того ж степеня, що і $P(x)$, але з невизначеними коефіцієнтами, а r – число, що показує скільки разів число α є коренем характеристичного рівняння для відповідного лінійного однорідного диференціального рівняння.

Приклад. Розв'язати рівняння $y''' - 4y' = x$.

Розв'яжемо відповідне однорідне рівняння: $y''' - 4y' = 0$.

$$k^3 - 4k = 0; \quad k(k^2 - 4) = 0; \quad k_1 = 0; \quad k_2 = 2; \quad k_3 = -2;$$

$$y = C_1 + C_2 e^{2x} + C_3 e^{-2x};$$

Тепер знайдемо частинний розв'язок вихідного неоднорідного рівняння.

Зіставимо праву частину рівняння з видом правої частини, розглянутим вище.

$$P(x) = x; \quad \alpha = 0.$$

Частинний розв'язок шукаємо у вигляді: $y = x^r e^{\alpha x} Q(x)$, де $r = 1; \quad \alpha = 0; \quad Q(x) = Ax + B$.

Тобто $y = Ax^2 + Bx$.

Тепер визначимо невідомі коефіцієнти A і B.

Підставимо частинний розв'язок в загальному виді у вихідне неоднорідне диференціальне рівняння.

$$y' = 2Ax + B; \quad y'' = 2A; \quad y''' = 0;$$

$$0 - 8Ax - 4B = x; \quad -8A = 1; \quad A = -\frac{1}{8}; \quad B = 0;$$

Разом, частинний розв'язок: $y = -\dfrac{x^2}{8}$.

Тоді загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння:

$$y = -\frac{x^2}{8} + C_1 + C_2 e^{2x} + C_3 e^{-2x}.$$

II. Права частина лінійного неоднорідного диференціального рівняння має вигляд:

$$f(x) = e^{\alpha x} \left[P_1(x) \cos \beta x + P_2(x) \sin \beta x \right]$$

Тут $P_1(x)$ і $P_2(x)$ – многочлени степеня m_1 і m_2 відповідно.

Тоді частинний розв'язок неоднорідного рівняння буде мати вигляд:

$$y = x^r e^{\alpha x} \left[Q_1(x) \cos \beta x + Q_2(x) \sin \beta x \right]$$

де число r дорівнює кратності кореня $\alpha + i\beta$ характеристичного рівняння для відповідного однорідного рівняння, а $Q_1(x)$ і $Q_2(x)$ – многочлени степеня не вище m, де m – більший зі степенів m_1 і m_2.

Зазначимо, що якщо права частина рівняння є комбінацією виразів розглянутого вище вигляду, то розв'язок знаходиться як комбінація розв'язків допоміжних рівнянь, кожне з яких має праву частину, що відповідає виразу, що входить у комбінацію.

Тобто якщо рівняння має вигляд $L(y) = f_1(x) + f_2(x)$, то частинний розв'язок цього рівняння буде $y = y_1 + y_2$, де y_1 і y_2 – частині розв'язки допоміжних рівнянь

$L(y) = f_1(x)$ і $L(y) = f_2(x)$

Для ілюстрації розв'яжемо розглянутий вище приклад іншим способом.

Приклад. Розв'язати рівняння $y'' + y = x - \sin 2x$.

Праву частину диференціального рівняння представимо у вигляді суми двох функцій $f_1(x) + f_2(x) = x + (-\sin 2x)$.

Складемо і розв'яжемо характеристичне рівняння: $k^2 + 1 = 0$; $k_{1,2} = \pm\, i$:

1. Для функції $f_1(x)$ розв'язок шукаємо у вигляді $y_1 = x^r e^{\alpha x} Q(x)$.

   Одержуємо: $\alpha = 0, r = 0, Q(x) = Ax + B$. Тобто $y_1 = Ax + B$;

$$\begin{array}{l} y_1' = A; y_1'' = 0; \\ Ax + B = x; A = 1; B = 0; \end{array}$$

   Разом: $y_1 = x$;

2. Для функції $f_2(x)$ розв'язок шукаємо у вигляді: $y_2 = x^r e^{\alpha x} \left(Q_1(x) \cos \beta x + Q_2(x) \sin \beta x \right)$.

Аналізуючи функцію $f_2(x)$, одержуємо: $P_1(x) = 0$; $P_2(x) = -1$; $\alpha = 0$; $\beta = 2$; $r = 0$;
Таким чином, $y_2 = C\cos 2x + D\sin 2x$;

$$y_2' = -2C\sin 2x + 2D\cos 2x;$$
$$y_2'' = -4C\cos 2x - 4D\sin 2x;$$
$$-4C\cos 2x - 4D\sin 2x + C\cos 2x + D\sin 2x = -\sin 2x;$$

$$-3C\cos 2x - 3D\sin 2x = -\sin 2x$$

$$C = 0; \quad D = \frac{1}{3};$$

Разом: $y_2 = \dfrac{1}{3}\sin 2x$;
Тобто шуканий частинний розв'язок має вигляд: $y = y_1 + y_2 = \dfrac{1}{3}\sin 2x + x$;
Загальний розв'язок неоднорідного диференціального рівняння:

$$y = \frac{1}{3}\sin 2x + x + C_1\cos x + C_2\sin x;$$

Розглянемо приклади застосування описаних методів.
Приклад. Розв'язати рівняння $y'' - 2y' + y = 3e^x$.
Складемо характеристичне рівняння для відповідного лінійного однорідного диференціального рівняння:

$$k^2 - 2k + 1 - 0; \qquad k_1 = k_2 = 1;$$

Загальний розв'язок однорідного рівняння: $y = C_1e^x + C_2xe^x$.
Тепер знайдемо частинний розв'язок неоднорідного рівняння у вигляді:

$$y = x^r e^{\alpha x}Q(x)$$

$$\alpha = 1; \quad r = 2; \quad Q(x) = C;$$

$$y = Cx^2e^x.$$

Скористаємося методом невизначених коефіцієнтів.

$$y' = 2Cxe^x + Cx^2e^x; \qquad y'' = 2Ce^x + 2Cxe^x + 2Cxe^x + Cx^2e^x.$$

Підставляючи у вихідне рівняння, одержуємо:

$$2Ce^x + 4Cxe^x + Cx^2e^x - 4Cxe^x - 2Cx^2e^x + Cx^2e^x = 3e^x.$$

$$2C = 3; \qquad C = \frac{3}{2}.$$

Частинний розв'язок має вигляд: $y = \dfrac{3}{2}x^2e^x$.

Загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння: $y = C_1e^x + C_2xe^x + \dfrac{3}{2}x^2e^x$.
Приклад. Розв'язати рівняння $y''' - y' = x^2 - 1$.
Характеристичне рівняння: $k^3 - k = 0$; $k(k^2-1) = 0$; $k_1 = 0$; $k_2 = 1$; $k_3 = -1$;
Загальний розв'язок однорідного рівняння: $y = C_1 + C_2e^x + C_3e^{-x}$.
Частинний розв'язок неоднорідного рівняння: $y = x^r e^{\alpha x}Q(x)$.

$$\alpha = 0; \quad r = 1; \quad Q(x) = Ax^2 + Bx + C.$$

$$y = Ax^3 + Bx^2 + Cx$$

Знаходимо похідні і підставляємо їх у вихідне неоднорідне рівняння:

$$y' = 3Ax^2 + 2Bx + C; \quad y'' = 6Ax + 2B; \quad y''' = 6A;$$

$$6A - 3Ax^2 - 2Bx - C = x^2 - 1;$$

$$-3A = 1; \quad -2B = 0; \quad 6A - C = -1;$$

$$A = -\frac{1}{3}; \quad B = 0; \quad C = -1;$$

Одержуємо загальний розв'язок неоднорідного диференціального рівняння:

$$y = C_1 + C_2e^x + C_3e^{-x} - \frac{1}{3}x^3 - x.$$

2.3 Нормальні системи звичайних диференціальних рівнянь

Означення. Сукупність співвідношень вигляду:

$$\begin{cases} F_1(x, y_1, y_2, ..., y_n, y_1', y_2', ..., y_n') = 0 \\ F_2(x, y_1, y_2, ..., y_n, y_1', y_2', ..., y_n') = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ F_n(x, y_1, y_2, ..., y_n, y_1', y_2', ..., y_n') = 0 \end{cases}$$

де x – незалежна змінна, y_1, y_2,..., y_n – шукані функції, називається **системою диференціальних рівнянь першого порядку**.

Означення. Система диференціальних рівнянь першого порядку, розв'язних відносно похідних від невідомих функцій, називається **нормальною системою диференціальних рівнянь**.

Така система має вигляд:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2, ..., y_n) \\ \dfrac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, y_2, ..., y_n) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, y_2, ..., y_n) \end{cases} \tag{3}$$

Для прикладу можна сказати, що графік розв'язку системи двох диференціальних рівнянь являє собою інтегральну криву у просторі третього порядку.

Теорема. (Теорема Коші). *Якщо у деякій області $(n+1)$-вимірного простору функції $f_1(x, y_1, y_2, y_3, ..., y_n)$, ... $f_n(x, y_1, y_2, ..., y_n)$ неперервні і мають неперервні частинні похідні за y_1, y_2, ... , y_n, то для будь-якої точки (x_0. y_{10}, ... , y_{n0}) цієї області існує единий розв'язок*

$$y_1 = \varphi_1(x), \quad y_2 = \varphi_2(x), \quad ... \quad y_n = \varphi_n(x)$$

системи диференціальних рівнянь типу (3), визначений у деякому околі точки x_0 такий, що задовольняє початковій умові $x_0.y_{10}, y_{20}, ..., y_{n0}$.

Означення. **Загальним розв'язком** системи диференціальних рівнянь типу (3) буде сукупність функцій $y_1 = \varphi_1(x, C_1, C_2, ..., C_n)$, $y_2 = \varphi_2(x, C_1, C_2, ..., C_n)$, $\dots y_n = \varphi_n(x, C_1, C_2, ..., C_n)$, які при підстановці в систему (3) обертають її у тотожність.

2.3.1 Нормальні системи лінійних однорідних диференціальних рівнянь із сталими коефіцієнтами

При розгляді систем диференціальних рівнянь обмежимося випадком системи трьох рівнянь ($n = 3$). Все нижческазане справедливе для систем довільного порядку.

Означення. Нормальна система диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами називається **лінійною однорідною**, якщо її можна записати у вигляді:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = a_{11}y + a_{12}z + a_{13}u \\ \dfrac{dz}{dx} = a_{21}y + a_{22}z + a_{23}u \\ \dfrac{du}{dx} = a_{31}y + a_{32}z + a_{33}u \end{cases} \tag{4}$$

Розв'язки системи (4) мають наступні властивості:

1) Якщо y, z, u – розв'язки системи, то Cy, Cz, Cu, де $C = const$ – теж є розв'язками цієї системи.

2) Якщо y_1, z_1, u_1 і y_2, z_2, u_2 – розв'язки системи, то $y_1 + y_2$, $z_1 + z_2$, $u_1 + u_2$ – теж є розв'язками системи.

Розв'язки системи шукаємо у вигляді: $y = \alpha e^{kx}$; $\quad z = \beta e^{kx}$; $\quad u = \gamma e^{kx}$, $\quad \alpha, \beta, \gamma, k = const$

Підставляючи ці значення в систему (4) переносячи всі члени в одну сторону і скоротивши на e^{kx}, одержуємо:

$$\begin{cases} (a_{11} - k)\alpha + a_{12}\beta + a_{13}\gamma = 0 \\ a_{21}\alpha + (a_{22} - k)\beta + a_{23}\gamma = 0 \\ a_{31}\alpha + a_{32}\beta + (a_{33} - k)\gamma = 0 \end{cases}$$

Для того, щоб отримана система мала ненульовий розв'язок необхідно і достатньо, щоб визначник системи був рівний нулю, тобто:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - k & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - k & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - k \end{vmatrix} = 0$$

У результаті обчислення визначника одержуємо рівняння третього степеня відносно k. Це рівняння називається **характеристичним рівнянням** і має три корені k_1, k_2, k_3. Кожному із цих коренів відповідає ненульовий розв'язок системи (4):

$$y_1 = \alpha_1 e^{k_1 x}, \qquad z_1 = \beta_1 e^{k_1 x}, \qquad u_1 = \gamma_1 e^{k_1 x},$$

$$y_2 = \alpha_2 e^{k_2 x}, \qquad z_2 = \beta_2 e^{k_2 x}, \qquad u_2 = \gamma_2 e^{k_2 x},$$
$$y_3 = \alpha_3 e^{k_3 x}, \qquad z_3 = \beta_3 e^{k_3 x}, \qquad u_3 = \gamma_3 e^{k_3 x}.$$

Лінійна комбінація цих розв'язків із довільними коефіцієнтами буде розв'язком системи (4):

$$y = C_1\alpha_1 e^{k_1 x} + C_2\alpha_2 e^{k_2 x} + C_3\alpha_3 e^{k_3 x};$$
$$z = C_1\beta_1 e^{k_1 x} + C_2\beta_2 e^{k_2 x} + C_3\beta_3 e^{k_3 x};$$
$$u = C_1\gamma_1 e^{k_1 x} + C_2\gamma_2 e^{k_2 x} + C_3\gamma_3 e^{k_3 x}.$$

<u>Приклад.</u> Знайти загальний розв'язок системи рівнянь:

$$\begin{cases} x' = 5x + 2y \\ y' = 2x + 2y \end{cases}$$

Складемо характеристичне рівняння:

$$\begin{vmatrix} 5-k & 2 \\ 2 & 2-k \end{vmatrix} = 0; \qquad (5-k)(2-k) - 4 = 0; \qquad 10 - 5k - 2k + k^2 - 4 = 0;$$

$$k^2 - 7k + 6 = 0; \qquad k_1 = 1; \qquad k_2 = 6;$$

Розв'яжемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} (a_{11} - k)\alpha + a_{12}\beta = 0 \\ a_{21}\alpha + (a_{22} - k)\beta = 0 \end{cases}$$

Для k_1: $\begin{cases} (5-1)\alpha_1 + 2\beta_1 = 0 \\ 2\alpha_1 + (2-1)\beta_1 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 4\alpha_1 + 2\beta_1 = 0 \\ 2\alpha_1 + \beta_1 = 0 \end{cases}$

Підставляючи $\alpha_1 = 1$ (приймається будь-яке значення), одержуємо: $\beta_1 = -2$.

Для k_2: $\begin{cases} (5-6)\alpha_2 + 2\beta_2 = 0 \\ 2\alpha_2 + (2-6)\beta_2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} -1\alpha_2 + 2\beta_2 = 0 \\ 2\alpha_2 - 4\beta_2 = 0 \end{cases}$

Покладаючи $\alpha_2 = 2$ (приймається будь-яке значення), одержуємо: $\beta_2 = 1$.

Загальний розв'язок системи: $\begin{cases} x = C_1 e^t + 2C_2 e^{6t} \\ y = -2C_1 e^t + C_2 e^{6t} \end{cases}$

Цей приклад може бути розв'язаний іншим способом:

Продиференціюємо перше рівняння: $x'' = 5x' + 2y'$;

Підставимо у цей вираз похідну $y' = 2x + 2y$ з другого рівняння.

$$x'' = 5x' + 4x + 4y;$$

Підставимо сюди y, виражене з першого рівняння:

$$x'' = 5x' + 4x + 2x' - 10x$$
$$x'' - 7x' + 6x = 0$$

$$k_1 = 6; \qquad k_2 = 1$$
$$x = Ae^t + Be^{6t}; \qquad x' = Ae^t + 6Be^{6t};$$

$$2y = x' - 5x = Ae^t + 6Be^{6t} - 5Ae^t - 5Be^{6t};$$
$$y = -2Ae^t + \frac{1}{2}Be^{6t};$$

Позначивши $A = C_1$; $\frac{1}{2}B = C_2$, одержуємо розв'язок системи: $\begin{cases} x = C_1 e^t + 2C_2 e^{6t} \\ y = -2C_1 e^t + C_2 e^{6t} \end{cases}$

<u>Приклад.</u> Знайти розв'язок системи рівнянь

$$\begin{cases} y' = y + z \\ z' = y + z + x \end{cases}$$

Ця система диференціальних рівнянь не належить до розглянутого вище типу, оскільки не є однорідною (у рівняння входить незалежна змінна x).

Для розв'язання продиференціюємо перше рівняння за x. Одержуємо:

$$y'' = y' + z'.$$

Заміняючи значення z' з другого рівняння одержуємо: $y'' = y' + y + z + x$.

З врахуванням першого рівняння, одержуємо: $y'' = 2y' + x$.

Розв'язуємо отримане диференціальне рівняння другого порядку.

$$y'' - 2y' = x; \qquad y'' - 2y' = 0; \qquad k^2 - 2k = 0; \quad k_1 = 0; \quad k_2 = 2.$$

Загальний розв'язок однорідного рівняння: $y = C_1 + C_2 e^{2x}$.

Тепер знаходимо частинний розв'язок неоднорідного диференціального рівняння за формулою $y = x^r e^{\alpha x} Q(x)$; $\alpha = 0$; $r = 1$; $Q(x) = Ax + B$;

$$y = Ax^2 + Bx; \quad y' = 2Ax + B; \quad y'' = 2A;$$

$$2A - 4Ax - 2B = x; \qquad A = -\frac{1}{4}; \quad B = -\frac{1}{4};$$

Загальний розв'язок неоднорідного рівняння:

$$y = C_1 + C_2 e^{2x} - \frac{1}{4}x(x+1).$$

Підставивши отримане значення у перше рівняння системи, одержуємо:

$$z = -C_1 + C_2 e^{2x} + \frac{1}{4}(x^2 - x - 1).$$

Приклад. Знайти розв'язок системи рівнянь:

$$\begin{cases} y' = z + w \\ z' = 3y + w \\ w' = 3y + z \end{cases}$$

Складемо характеристичне рівняння:

$$\begin{vmatrix} -k & 1 & 1 \\ 3 & -k & 1 \\ 3 & 1 & -k \end{vmatrix} = 0; \qquad -k\begin{vmatrix} -k & 1 \\ 1 & -k \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & -k \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & -k \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 0;$$

$$-k(k^2-1) + 3k + 3 + 3 + 3k = 0; \qquad k^3 - 7k - 6 = 0; \qquad k_1 = -1; \quad k_2 = -2; \quad k_3 = 3;$$

1. $k_1 = -1$.

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ 3\alpha + \beta + \gamma = 0 \\ 3\alpha + \beta + \gamma = 0 \end{cases}; \qquad \alpha = 0; \quad \beta = -\gamma;$$

Якщо прийняти $\gamma = 1$, то розв'язок у цьому випадку одержуємо:

$$y_1 = 0; \quad z_1 = -e^{-x}; \quad w_1 = e^{-x};$$

2. $k_2 = -2$.

$$\begin{cases} 2\alpha + \beta + \gamma = 0 \\ 3\alpha + 2\beta + \gamma = 0 \\ 3\alpha + \beta + 2\gamma = 0 \end{cases}; \qquad \alpha = -\gamma; \quad \beta = \gamma;$$

Якщо прийняти $\gamma = 1$, то одержуємо:

$$y_2 = -e^{-2x}; \quad z_2 = e^{-2x}; \quad w_2 = e^{-2x};$$

3. $k_3 = 3$.

$$\begin{cases} -3\alpha + \beta + \gamma = 0 \\ 3\alpha - 3\beta + \gamma = 0 \\ 3\alpha + \beta - 3\gamma = 0 \end{cases}; \quad \alpha = \frac{2}{3}\gamma; \quad \beta = \gamma;$$

Якщо прийняти $\gamma = 3$, то одержуємо:

$$y_3 = 2e^{3x}; \quad z_3 = 3e^{3x}; \quad w_3 = 3e^{3x};$$

Загальний розв'язок має вигляд:

$$\begin{cases} y = -C_2 e^{-2x} + 2C_3 e^{3x} \\ z = -C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x} + 3C_3 e^{3x} \\ w = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x} + 3C_3 e^{3x} \end{cases}$$

3 Ряди

3.1 Основні визначення

<u>Означення.</u> Сума членів нескінченної числової послідовності $u_1, u_2, ..., u_n, ...$ називається **числовим рядом**.

$$u_1 + u_2 + ... + u_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

При цьому числа $u_1, u_2, ...$ будемо називати членами ряду, а u_n – загальним членом ряду.

<u>Означення.</u> Суми $S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$, $n = 1, 2, \ldots$ називаються **частинними (частковими) сумами** ряду.

Таким чином, можливо розглядати послідовності часткових сум ряду $S_1,\ S_2,\ \ldots,\ S_n,\ \ldots$

<u>Означення.</u> Ряд $u_1 + u_2 + ... + u_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ називається **збіжним**, якщо збігається послідовність його частинних сум. **Сума збіжного ряду** – границя послідовності його частинних сум.

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S, \quad S = \sum_{n=1}^{\infty} u_n.$$

<u>Означення.</u> Якщо послідовність частинних сум ряду розбіжна, тобто не має границі, або має нескінченну границю, то ряд називається **розбіжним** і йому не ставлять у відповідність ніякої суми.

3.1.1 Властивості рядів

1) Збіжність або розбіжність ряду не порушиться якщо змінити, відкинути або додати скінченне число членів ряду.

2) Розглянемо два ряди $\sum u_n$ і $\sum Cu_n$, де C – стале число.

<u>Теорема.</u> *Якщо ряд $\sum u_n$ збігається і його сума дорівнює S, то ряд $\sum Cu_n$ теж збігається, і його сума дорівнює CS.* $(C \neq 0)$

3) Розглянемо два ряди $\sum u_n$ і $\sum v_n$. **Сумою** або **різницею** цих рядів буде називатися ряд $\sum(u_n \pm v_n)$, де елементи отримані в результаті додавання (віднімання) вихідних елементів з однаковими номерами.

<u>Теорема.</u> *Якщо ряди $\sum u_n$ і $\sum v_n$ збіжні і їхні суми рівні відповідно S і σ, то ряд $\sum(u_n + v_n)$ теж збігається і його сума дорівнює $S + \sigma$.*

$$\sum(u_n + v_n) = \sum u_n + \sum v_n = S + \sigma$$

Різниця двох збіжних рядів також буде збіжним рядом.

Сума збіжного і розбіжного рядів буде розбіжним рядом.

Про суму двох розбіжних рядів загального твердження зробити не можна.

При вивченні рядів вирішують в основному дві задачі: дослідження на збіжність і знаходження суми ряду.

3.2 Критерій Коші

Для того, щоб послідовність $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ була збіжною, необхідно і достатньо, щоб для кожного $\varepsilon > 0$ існував такий номер N, що при $n > N$ і будь-якому $p > 0$, де p – ціле число, виконувалася б нерівність:

$$|a_{n+p} - a_n| < \varepsilon.$$

<u>Доведення.</u> (необхідність) Нехай $a_n \to a$, тоді для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ знайдеться номер N такий, що нерівність $|a - a_n| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ виконується при $n > N$. При $n > N$ і будь-якому цілому $p > 0$ виконується також нерівність $|a - a_{n+p}| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. З огляду на обидві нерівності, одержуємо:

$$|a_{n+p} - a_n| = |(a_{n+p} - a) + (a - a_n)| \leqslant |a_{n+p} - a| + |a - a_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Необхідність доведена. Доведення достатності розглядати не будемо.

Сформулюємо критерій Коші для ряду.

Для того, щоб ряд $u_1 + u_2 + ... + u_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ був збіжним необхідно і достатньо, щоб для кожного $\varepsilon > 0$ існував номер N такий, що при $n > N$ і будь-якому $p > 0$ виконувалася б нерівність

$$|u_{n+1} + u_{n+2} + ... + u_{n+p}| < \varepsilon.$$

Однак, на практиці використовувати безпосередньо критерій Коші не дуже зручно. Тому, як правило, використаються більше прості ознаки збіжності:

1) Якщо ряд $\sum u_n$ збігається, то необхідно, щоб загальний член u_n прямував до нуля. Однак, ця умова не є достатньою. Можна говорити тільки про те, що якщо загальний член не прямує до нуля, то ряд точно розбіжний. Наприклад, так званий гармонійний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ є розбіжним, хоча його загальний член і прямує до нуля.

Приклад. Дослідити збіжність ряду $\frac{1}{2}+\frac{2}{5}+\frac{3}{8}+...+\frac{n}{3n-1}+...$

Знайдемо $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{3n-1}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{3-\frac{1}{n}}=\frac{1}{3}\neq 0$ – необхідна ознака збіжності не виконується, значить ряд розбіжний.

Приклад. Дослідити збіжність гармонійного ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$.

Скористаємося такою нерівністю:

$$\int_k^{k+1}\frac{\mathrm{d}x}{x}\leqslant\frac{1}{k}\int_k^{k+1}\mathrm{d}x=\frac{1}{k}.$$

Тоді для частинних сум ряду, S_n, маємо

$$S_n>\int_1^{n+1}\frac{\mathrm{d}x}{x}=\ln(n+1),$$

отже $\lim\limits_{n\to\infty}S_n\geqslant\lim\limits_{n\to\infty}\ln(n+1)=+\infty$. Це і означає, що гармонійний ряд є розбіжним.

2) Якщо ряд збігається, то послідовність його частинних сум обмежена. Однак, ця ознака також не є достатньою.

Наприклад, ряд $1-1+1-1+1-1+\cdots+(-1)^{n+1}+\ldots$ розбіжний, оскільки розбіжна послідовність його частинних сум у силу того, що

$$S_n=\begin{cases}0, & \text{при парних } n\\ 1, & \text{при непарних } n\end{cases}$$

Однак, при цьому послідовність частинних сум обмежена, оскільки $|S_n|<2$ при будь-якому n.

3.3 Ряди з невід'ємними членами

При вивченні знакосталих рядів обмежимося розглядом рядів з невід'ємними членами, оскільки при простому множенні на -1 із цих рядів можна одержати ряди з від'ємними членами.

Теорема. *Для збіжності ряду $\sum u_n$ з невід'ємними членами необхідно і достатньо, щоб частині суми ряду були обмежені.*

Ознака порівняння рядів з невід'ємними членами.

Нехай дані два ряди $\sum u_n$ і $\sum v_n$ при $u_n, v_n\geqslant 0$.

Теорема. Якщо $u_n\leqslant v_n$ при будь-якому n, то зі збіжності ряду $\sum v_n$ випливає збіжність ряду $\sum u_n$, а з розбіжності ряду $\sum u_n$ випливає розбіжність ряду $\sum v_n$.

Доведення. Позначимо через S_n і σ_n частинні суми рядів $\sum u_n$ і $\sum v_n$. Оскільки за умовою теореми ряд $\sum v_n$ збігається, то його частині суми обмежені, тобто при всіх n $\sigma_n<M$, де M – деяке число. Але оскільки $u_n\leqslant v_n$, то $S_n\leqslant\sigma_n$, то частинні суми ряду $\sum u_n$ теж обмежені, а цього достатньо для збіжності.

Приклад. Дослідити на збіжність ряд $\frac{1}{\ln 2}+\frac{1}{\ln 3}+...+\frac{1}{\ln n}+...$

Оскільки $\frac{1}{\ln n}>\frac{1}{n}$, а гармонійний ряд $\sum\frac{1}{n}$ розбіжний, то розбіжний і ряд $\sum\frac{1}{\ln n}$.

Приклад. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^n}$.

Оскільки $\frac{1}{n2^n}<\frac{1}{2^n}$, а ряд $\sum\frac{1}{2^n}$ збігається (як спадна геометрична прогресія), то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^n}$ теж збігається.

Приклад. Дослідити збіжність узагальненого гармонійного ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$.

Якщо $\alpha\leqslant 1$, $\frac{1}{n^{\alpha}}\geqslant\frac{1}{n}$, враховуючи розбіжність гармонійного ряду, робимо висновок, що узагальнений гармонійний ряд також є розбіжним.

Якщо ж $\alpha>1$, то, позначивши $\alpha=1+\delta$, матимемо

$$\frac{1}{(n+1)^{\alpha}}+\frac{1}{(n+2)^{\alpha}}+\cdots+\frac{1}{(2n)^{\alpha}}<\frac{n}{(n+1)^{\alpha}}<\frac{1}{n^{\delta}}$$

Отже

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}=\left(1+\frac{1}{2^{\alpha}}\right)+\left(\frac{1}{3^{\alpha}}+\frac{1}{4^{\alpha}}\right)+\left(\frac{1}{(4+1)^{\alpha}}+\frac{1}{(4+2)^{\alpha}}+\frac{1}{(4+3)^{\alpha}}+\frac{1}{2\cdot 4^{\alpha}}\right)+\cdots<$$

$$<1+\frac{1}{2^{\alpha}}+\frac{1}{2^{\delta}}+\frac{1}{4^{\delta}}+\frac{1}{8^{\delta}}+\cdots=1+\frac{1}{2^{\alpha}}+\frac{\frac{1}{2^{\delta}}}{1-\frac{1}{2^{\delta}}}.$$

Тобто ряд з умови є меншим за збіжний ряд, тобто і сам є збіжним.

Також використовується наступна ознака збіжності:

Теорема. *Якщо $u_n>0,\quad v_n>0$ і існує границя $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=h$, де h – число, відмінне від нуля, то ряди $\sum u_n$ і $\sum v_n$ поводять себе однаково в сенсі збіжності.*

3.4 Ознака д'Аламбера

Якщо для ряду $\sum u_n$ з додатними членами існує таке число $q < 1$, що для всіх достатньо великих n виконується нерівність

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant q,$$

то ряд $\sum u_n$ збігається, якщо ж для всіх достатньо великих n виконується умова

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1,$$

то ряд $\sum u_n$ розбіжний.

3.4.1 Гранична ознака д'Аламбера

Гранична ознака д'Аламбера[8] є наслідком з наведеної вище ознаки д'Аламбера.

Якщо існує границя $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \rho$, то при $\rho < 1$ ряд збігається, а при $\rho > 1$ – розбіжний. Якщо $\rho = 1$, то на питання про збіжність відповісти не можна.

<u>Приклад.</u> Дослідити збіжність ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{2^n}$.

$$u_n = \frac{n}{2^n}; \quad u_{n+1} = \frac{n+1}{2^{n+1}}; \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)2^n}{2^{n+1}n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{n}}{2} = \frac{1}{2} < 1$$

Висновок: ряд збігається.

<u>Приклад.</u> Дослідити збіжність ряду $1 + \dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!} + ... + \dfrac{1}{n!} + ...$

$$u_n = \frac{1}{n!}; \quad u_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}; \quad \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1$$

Висновок: ряд збігається.

3.5 Радикальна ознака Коші

Якщо для ряду $\sum u_n$ з невід'ємними членами існує таке число q<1, що для всіх достатньо великих виконується нерівність

$$\sqrt[n]{u_n} \leqslant q,$$

то ряд $\sum u_n$ збігається, якщо ж для всіх достатньо великих n виконується нерівність

$$\sqrt[n]{u_n} \geqslant 1,$$

то ряд $\sum u_n$ розбіжний.

<u>**Наслідок.**</u> Якщо існує границя $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \rho$, то при $\rho < 1$ ряд збігається, а при $\rho > 1$ ряд розбіжний.

<u>Приклад.</u> Дослідити збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{2n^2+1}{3n^2+5}\right)^n$.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+1}{3n^2+5} = \lim_{n\to\infty} \frac{2+\frac{1}{n^2}}{3+\frac{5}{n^2}} = \frac{2}{3} < 1$$

Висновок: ряд збігається.

<u>Приклад.</u> Дослідити збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right) = 1.$$

Тобто ознака Коші не дає відповіді на питання про збіжність ряду. Перевіримо виконання необхідних умов збіжності. Як було сказано вище, якщо ряд збігається, то загальний член ряду прямує до нуля.

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \neq 0,$$

таким чином, необхідна умова збіжності не виконується, виходить, ряд розбіжний.

[8] Жан Лерон д'Аламбер (Jean-Baptiste le Rond d'Alembert) (1717–1783) – французький математик.

3.6 Інтегральна ознака Коші

Якщо $\varphi(x)$ – неперервна додатна функція, що спадає на проміжку $[1;\infty)$, то ряд $\varphi(1)+\varphi(2)+\dots+\varphi(n)+\dots = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\varphi(n)$ і невласний інтеграл $\int\limits_{1}^{\infty}\varphi(x)\mathrm{d}x$ однакові в сенсі збіжності.

Приклад. Ряд $1+\dfrac{1}{2^\alpha}+\dfrac{1}{3^\alpha}+...+\dfrac{1}{n^\alpha}+...$ збігається при $\alpha>1$ і розбіжний $\alpha\le 1$ оскільки відповідний невласний інтеграл $\int\limits_{1}^{\infty}\dfrac{\mathrm{d}x}{x^\alpha}$ збігається при $\alpha>1$ і розбіжний $\alpha\le 1$. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^\alpha}$ називається **узагальненим гармонійним** рядом.

Наслідок. Якщо $f(x)$ і $\varphi(x)$ – неперервні функції на інтервалі $(a,b]$ і $\lim\limits_{x\to a+0}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)} = h, \quad h\ne 0$, то інтеграли $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ і $\int_a^b\varphi(x)\mathrm{d}x$ поводяться однаково в сенсі збіжності.

3.7 Знакозмінні ряди

3.7.1 Знакочергові ряди

Знакочерговий ряд можна записати у вигляді:

$$u_1-u_2+u_3-u_4+...+(-1)^{n+1}u_n+...$$

де $u_n>0, \quad n=1,2,3,...$

3.7.1.1 Ознака Ляйбніца

Якщо в знакочерговому ряді $u_1-u_2+u_3-u_4+...+(-1)^{n+1}u_n+...$ абсолютні величини u_i спадають $u_1>u_2>u_3>...$ і загальний член прямує до нуля $u_n\to 0$, то ряд збігається.

3.7.2 Абсолютна і умовна збіжність рядів

Розглянемо деякий знакозмінний ряд (з членами довільних знаків).

$$u_1+u_2+...+u_n+...=\sum_{n=1}^{\infty}u_n \tag{5}$$

і ряд, складений з абсолютних величин членів ряду (5):

$$|u_1|+|u_2|+...+|u_n|+...=\sum_{n=1}^{\infty}|u_n| \tag{6}$$

Теорема. *Зі збіжності ряду (6) випливає збіжність ряду (5).*

Доведення. Ряд (6) є рядом із невід'ємними членами. Якщо ряд (6) збігається, то за критерієм Коші для кожного $\varepsilon>0$ існує число N, таке, що при $n>N$ і будь-якому цілому $p>0$ виконується нерівність:

$$|u_{n+1}|+|u_{n+2}|+...+|u_{n+p}|<\varepsilon$$

За властивістю абсолютних величин:

$$|u_{n+1}+u_{n+2}+...+u_{n+p}|\leqslant|u_{n+1}|+|u_{n+2}|+...+|u_{n+p}|<\varepsilon$$

$$|u_{n+1}+u_{n+2}+...+u_{n+p}|<\varepsilon$$

Тобто за критерієм Коші зі збіжності ряду (6) виливає збіжність ряду (5).

Означення. Ряд $\sum u_n$ називається **абсолютно збіжним**, якщо збігається ряд $\sum|u_n|$.

Очевидно, що для знакосталих рядів поняття збіжності і абсолютної збіжності збігаються.

Означення. Ряд $\sum u_n$ називається **умовно збіжним**, якщо він збігається, а ряд $\sum|u_n|$ розбіжний.

3.7.2.1 Ознаки д'Аламбера і Коші для знакозмінних рядів

Нехай $\sum u_n$ – знакозмінний ряд.

Ознака д'Аламбера. Якщо існує границя $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\rho$, то при $\rho<1$ ряд $\sum u_n$ буде абсолютно збіжним, а при $\rho>1$ ряд буде розбіжним. При $\rho=1$ ознака не дає відповіді про збіжність ряду.

Ознака Коші. Якщо існує границя $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n|}=\rho$, то при $\rho<1$ ряд $\sum u_n$ буде абсолютно збіжним, а при $\rho>1$ ряд буде розбіжним. При $\rho=1$ ознака не дає відповіді про збіжність ряду.

3.7.2.2 Властивості абсолютно збіжних рядів

1) **Теорема.** *Для абсолютної збіжності ряду $\sum u_n$ необхідно і достатньо, щоб його можна було представити у вигляді різниці двох збіжних рядів з невід'ємними членами.*

Наслідок. Умовно збіжний ряд є різницею двох розбіжних рядів з невід'ємними членами, що прямують до нуля.

2) У збіжному ряді будь-яке групування членів ряду, що не змінює їхнього порядку, зберігає збіжність і величину ряду.

3) Якщо ряд збігається абсолютно, то ряд, отриманий з нього будь-якою перестановкою членів, також абсолютно збігається і має ту ж суму.

Перестановкою членів умовно збіжного ряду можна одержати умовно збіжний ряд, що має кожну наперед задану суму, і навіть розбіжний ряд.

4) **Теорема.** *При будь-якому групуванні членів абсолютно збіжного ряду (при цьому число груп може бути як скінченним, так і нескінченним і число членів у групі може бути як скінченним, так і нескінченним) виходить збіжний ряд, сума якого дорівнює сумі вихідного ряду.*

5) Якщо ряди $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ й $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ збіжні абсолютно і їх суми рівні відповідно S і σ, то ряд, складений із всіх добутків типу $u_i v_k, \quad i, k = 1, 2, ...$ взятих у якому завгодно порядку, також збігається абсолютно і його сума дорівнює $S \cdot \sigma$ – добутку сум рядів, що перемножують.

Якщо ж виконувати множення умовно збіжних рядів, то в результаті можна одержати розбіжний ряд.

3.8 Функціональні послідовності

Означення. Якщо членами ряду будуть не числа, а функції від x, то ряд називається **функціональним**.

Дослідження на збіжність функціональних рядів складніше ніж дослідження числових рядів. Той самий функціональний ряд може при одних значеннях змінної x збігатися, а при інших – розбігатися. Тому питання збіжності функціональних рядів зводиться до визначення тих значень змінної x, при яких ряд збігається.

Сукупність таких значень називається **областю збіжності**.

Оскільки границею кожної функції, що входить в область збіжності ряду, є деяке число, то границею функціональної послідовності буде деяка функція:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

Означення. Послідовність $\{f_n(x)\}$ **збігається** до функції $f(x)$ на відрізку $[a, b]$, якщо для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ і будь-якої точки x з розглянутого відрізка існує номер $N = N(\varepsilon, x)$, такий, що нерівність

$$|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$$

виконується при $n > N$.

При обраному значенні $\varepsilon > 0$ кожній точці відрізка $[a, b]$ відповідає свій номер і, отже, номерів, що відповідають всім точкам відрізка $[a, b]$, буде незлічена множина. Якщо вибрати із всіх цих номерів найбільший, то цей номер буде годитися для всіх точок відрізка $[a, b]$, тобто буде спільним для всіх точок.

Означення. Послідовність $\{f_n(x)\}$ **рівномірно збігається** до функції $f(x)$ на відрізку $[a, b]$, якщо для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ існує номер $N = N(\varepsilon)$, такий, що нерівність

$$|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$$

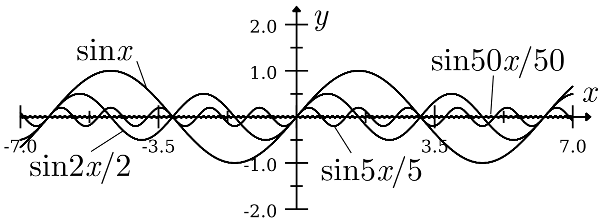
виконується при $n > N$ для всіх точок відрізка $[a, b]$.

Приклад. Розглянемо послідовність $\frac{\sin x}{1}, \frac{\sin 2x}{2}, ..., \frac{\sin nx}{n}, ...$

Ця послідовність збігається на всій числовій осі до функції $f(x) = 0$, оскільки

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin nx}{n} = 0, \quad -\infty < x < \infty$$

Побудуємо графіки цієї послідовності:



Як видно, при збільшенні числа n графік послідовності наближається до осі x.

3.9 Функціональні ряди

<u>Означення.</u> Частковими (**частинними**) **сумами** функціонального ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ називаються функції $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x)$, $n = 1, 2, ...$

<u>Означення.</u> Функціональний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ називається **збіжним** у точці ($x = x_0$), якщо у цій точці збігається послідовність його частинних сум. Границя послідовності $\{S_n(x_0)\}$ називається **сумою** ряду $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ у точці x_0.

<u>Означення.</u> Сукупність всіх значень x, для яких збігається ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ називається **областю збіжності** ряду.

<u>Означення.</u> Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ називається **рівномірно збіжним** на відрізку $[a, b]$, якщо рівномірно збігається на цьому відрізку послідовність частинних сум цього ряду.

<u>Теорема.</u> (Критерій Коші рівномірної збіжності ряду)

Для рівномірної збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ необхідно і достатньо, щоб для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ існував такий номер $N(\varepsilon)$, що при $n > N$ і будь-якому цілому $p > 0$ нерівність

$$|u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + ... + u_{n+p}(x)| < \varepsilon$$

виконувалася б для всіх x на відрізку $[a, b]$.

<u>Теорема.</u> (Ознака рівномірної збіжності Веєрштраса)

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ збігається рівномірно і при тому абсолютно на відрізку $[a, b]$, якщо модулі його членів на тім же відрізку не перевершують відповідних членів збіжного числового ряду з додатними членами:

$$M_1 + M_2 + ... + M_n + ...$$

тобто має місце нерівність:

$$|u_n(x)| \leqslant M_n.$$

Ще кажуть, що у цьому випадку функціональний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ **мажорується** числовим рядом $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$.

<u>Приклад.</u> Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos nx}{n^3}$.

Оскільки $|\cos nx| \leqslant 1$ завжди, то очевидно, що $\left|\dfrac{\cos nx}{n^3}\right| \leqslant \dfrac{1}{n^3}$.

При цьому відомо, що узагальнений гармонійний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^{\alpha}}$ при $\alpha = 3 > 1$ збігається, то відповідно до ознаки Веєрштраса[9] досліджуваний ряд рівномірно збігається і при тому на будь-якому інтервалі.

<u>Приклад.</u> Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n^3}$.

На відрізку $[-1, 1]$ виконується нерівність $\left|\dfrac{x^n}{n^3}\right| \leqslant \dfrac{1}{n^3}$ тобто за ознакою Веєрштраса на цьому відрізку досліджуваний ряд збігається, а на інтервалах $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ розбіжний.

3.9.1 Властивості рівномірно збіжних рядів

1) Теорема про неперервність суми ряду.

Якщо члени ряду $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ – неперервні на відрізку $[a, b]$ функції і ряд збігається рівномірно, то і його сума $S(x)$ є неперервна функція на відрізку $[a, b]$.

2) Теорема про почленне інтегрування ряду.

Рівномірно збіжний на відрізку $[a, b]$ ряд з неперервними членами можна почленно інтегрувати на цьому відрізку, тобто ряд, складений з інтегралів від його членів за відрізком $[a, b]$, збігається до інтеграла від суми ряду за цим відрізком.

$$\int_{\alpha}^{\beta} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\alpha}^{\beta} u_n(x) \mathrm{d}x; \quad \alpha, \beta \in [a, b]$$

3) Теорема про почленне диференціювання ряду.

Якщо члени ряду $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ збіжного на відрізку $[a, b]$ являють собою неперервні функції, що мають неперервні похідні, і ряд, складений із цих похідних $\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$ збігається на цьому відрізку рівномірно, то і даний ряд збігається рівномірно і його можна диференціювати почленно.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{d}u_n(x)}{\mathrm{d}x}$$

На основі того, що сума ряду є деякою функцією від змінної x, можна виконувати операцію подання будь-якої функції у вигляді ряду (розклад функції в ряд), що має широке застосування при інтегруванні, диференціюванні і інших діях з функціями.

На практиці часто застосовується розклад функцій у степеневий ряд.

[9] Карл Теодор Вільгельм Веєрштрас (Karl Theodor Wilhelm Weierstraß) (1815–1897) – німецький математик

3.10 Степеневі ряди

Означення. **Степеневим рядом** називається ряд вигляду

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n.$$

Для дослідження на збіжність степеневих рядів зручно використовувати ознаку д'Аламбера.

Приклад. Дослідити на збіжність ряд $x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + \dots + \dfrac{x^n}{n} + \dots$

Застосовуємо ознаку д'Аламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{x^{n+1}}{n+1}}{\frac{x^n}{n}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{xn}{n+1}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x}{1+\frac{1}{n}}\right| = |x|\,.$$

Одержуємо, що цей ряд збігається при $|x| < 1$ і є розбіжним при $|x| > 1$.

Тепер визначимо збіжність у граничних точках 1 і − 1.

При $x = -1$: $-1 + \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4} - \dots$ ряд збігається за ознакою Ляйбніца (див. Ознака Ляйбніца).

При $x = 1$: $1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \dots + \dfrac{1}{n} + \dots$ ряд розбіжний (гармонійний ряд).

3.10.1 Теореми Абеля

Теорема. *Якщо степеневий ряд $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$ збігається при $x = x_1$, то він збігається, причому абсолютно, для всіх $|x| < |x_1|$.*

Доведення. За умовою теореми, оскільки члени ряду обмежені,

$$|a_nx_1^n| \leqslant k,$$

де k – деяке стале число. Справедлива така нерівність:

$$|a_nx^n| = |a_nx_1^n|\left|\frac{x}{x_1}\right|^n \leqslant k\left|\frac{x}{x_1}\right|^n$$

Із цієї нерівності видно, що при $x < x_1$ числові величини членів нашого ряду будуть менше (у всякому разі не більше) відповідних членів ряду правої частини записаної вище нерівності, які утворять геометричну прогресію. Знаменник цієї прогресії $\left|\dfrac{x}{x_1}\right|$ за умовою теореми менше одиниці, отже, ця прогресія являє собою збіжний ряд.

Тому на підставі ознаки порівняння робимо висновок, що ряд $\sum |a_nx^n|$ збігається, а значить ряд $\sum a_nx^n$ збігається абсолютно.

Таким чином за теоремою Абеля[10], якщо степеневий ряд $\sum a_nx^n$ збігається у точці x_1, то він абсолютно збігається в будь-якій точці інтервалу довжини $2\,|E_1|$ із центром у точці $x = 0$.

Наслідок. Якщо при $x = x_1$ ряд розбіжний, то він розбіжний для всіх $|x| > |x_1|$.

Таким чином, для кожного степеневого ряду існує таке додатне число R, що при всіх x таких, що $|x| < R$ ряд абсолютно збігається, а при всіх $|x| > R$ ряд розбіжний. При цьому число R називається **радіусом збіжності**. Інтервал $(-R, R)$ називається **інтервалом збіжності**.

Відзначимо, що цей інтервал може бути як замкненим з однієї або двох сторін, так і незамкненим.

Радіус збіжності може бути знайдений за формулою:

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right|$$

Приклад. Знайти область збіжності ряду $x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \dots + \dfrac{x^n}{n!} + \dots$

Знаходимо радіус збіжності $R = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n-1}}{a_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{\frac{1}{(n-1)!}}{\frac{1}{n!}}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{n!}{(n-1)!}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}|n| = |\infty|.$

Отже, даний ряд збігається при будь-якому значенні x. Загальний член цього ряду прямує до нуля.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x^n}{n!} = 0.$$

Теорема. Якщо степеневий ряд $\sum a_nx^n$ збігається для додатного значення $x = x_1$, то він збігається рівномірно в будь-якому проміжку усередині $(-|x_1|\,;\ |x_1|)$.

[10] Нільс Хенрік Абель (Niels Henrik Abel) (1802–1829) – норвезький математик.

3.10.2 Дії зі степеневими рядами

1) Інтегрування степеневих рядів.

Якщо деяка функція $f(x)$ визначається степеневим рядом: $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, то інтеграл від цієї функції можна записати у вигляді ряду:

$$\int f(x)\mathrm{d}x = \int \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} \int a_n x^n \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} + C$$

2) Диференціювання степеневих рядів.

Похідна функції, що визначається степеневим рядом, знаходиться за формулою:

$$f'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} (a_n x^n) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

3) Додавання, віднімання, множення і ділення степеневих рядів.

Додавання і віднімання степеневих рядів зводиться до відповідних операцій з їхніми членами:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \pm \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n) x^n$$

Добуток двох степеневих рядів виражається формулою:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

Коефіцієнти c_i знаходяться за формулою:

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + ... + a_{n-1} b_1 + a_n b_0$$

Ділення двох степеневих рядів виражається формулою:

$$\frac{\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n}{\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n} = \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n$$

Для визначення коефіцієнтів q_n розглядаємо добуток $\sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, отриманий із записаного вище рівності і розв'язуємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} a_0 = q_0 b_0 \\ a_1 = q_0 b_1 + q_1 b_0 \\ a_2 = q_0 b_2 + q_1 b_1 + q_2 b_0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_n = q_0 b_n + q_1 b_{n-1} + ... + q_n b_0 \end{cases}$$

3.10.3 Розклад функцій у степеневі ряди

Розклад функцій у степеневий ряд має велике значення для розв'язання різних задач дослідження функцій, диференціювання, інтегрування, розв'язання диференціальних рівнянь, обчислення меж, обчислення наближених значень функції.

Можливі різні способи розклад функції в степеневий ряд. Такі способи як розклад за допомогою рядів Тейлора і Маклорена були розглянуті раніше.

Існує також спосіб розкладу в степеневий ряд **за допомогою алгебраїчного ділення.** Це – найпростіший спосіб розкладу, однак, придатний він тільки для розкладу в ряд алгебраїчних дробів.

Приклад. Розкласти в ряд функцію $\dfrac{1}{1-x}$.

Суть методу алгебраїчного ділення полягає в застосуванні загального правила ділення многочленів:

$$\begin{array}{l|l} 1 & 1-x \\ \underline{1-x} & \overline{1+x+x^2+x^3+...} \\ \quad x & \\ \quad \underline{x - x^2} & \\ \qquad x^2 & \\ \qquad \underline{x^2 - x^3} & \\ \qquad\quad x^3 & \end{array}$$

Якщо застосувати до тієї ж функції формулу Маклорена

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + ... + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + R_n(x),$$

то одержуємо: $f'(x)=\dfrac{1}{(1-x)^2}$; $\quad f'(0)=1$;

$$f''(x)=\frac{2}{(1-x)^3};\quad f''(0)=2;$$

$$f'''(x)=\frac{2\cdot 3}{(1-x)^4};\quad f'''(0)=3!;$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$f^{(n)}(x)=\frac{n!}{(1-x)^{n+1}};\quad f^{(n)}(0)=n!;$$

Разом, одержуємо: $f(x)=1+x+x^2+...+x^n+...$

Розглянемо спосіб розкладу функції в ряд **за допомогою інтегрування.**

За допомогою інтегрування можна розкладати в ряд таку функцію, для якої відомо або може бути легко знайдено розклад в ряд її похідної.

Знаходимо диференціал функції $\mathrm{d}f(x)=f'(x)\mathrm{d}x$ і інтегруємо його у межах від 0 до x.

$$\int_0^x \mathrm{d}f(x)=\int_0^x f'(x)\mathrm{d}x;\qquad f(x)|_0^x=\int_0^x f'(x)\mathrm{d}x;$$

$$f(x)=f(0)+\int_0^x f'(x)\mathrm{d}x;$$

Приклад. Розкласти в ряд функцію $f(x)=\ln(1+x)$.

Розклад в ряд цієї функції за формулою Маклорена було розглянуто вище.

Тепер розв'яжемо цю задачу за допомогою інтегрування.

При $f(0)=0$, $\quad f'(x)=\dfrac{1}{1+x}$ одержуємо за наведеною вище формулою:

$$\ln(1+x)=\int_0^x \frac{1}{1+x}\mathrm{d}x$$

Розклад в ряд функції $\dfrac{1}{1+x}$ може бути легко знайдено способом алгебраїчного ділення аналогічно розглянутому вище прикладу.

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+x^4-...+(-1)^n x^n+...$$

Тоді одержуємо: $\ln(1+x)=\int_0^x\dfrac{1}{1+x}\mathrm{d}x=\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x(-1)^n x^n\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$

Остаточно одержимо: $\ln(1+x)=x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^4}{4}+...+(-1)^n\dfrac{x^{n+1}}{n+1}+...$

Приклад. Розкласти в степеневий ряд функцію $\operatorname{arctg} x$.

Застосуємо розклад в ряд за допомогою інтегрування.

$$f(x)=\operatorname{arctg} x;\quad f(0)=0;\quad f'(x)=\frac{1}{1+x^2};$$

$$\operatorname{arctg} x=\int_0^x\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

Підінтегральна функція може бути розкладена в ряд методом алгебраїчного ділення:

$$\begin{array}{l|l}
1 & 1+x^2 \\
\cline{2-2}
\underline{1+x^2} & 1-x^2+x^4-... \\
\quad -x^2 & \\
\quad \underline{-x^2-x^4} & \\
\qquad\quad x^4 & \\
\qquad\quad \underline{x^4+x^6} & \\
\qquad\qquad -x^6 &
\end{array}$$

$$\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-...+(-1)^n x^{2n}+...$$

Тоді $\operatorname{arctg} x=\int_0^x\dfrac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x(-1)^n x^{2n}\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}$

Остаточно одержуємо: $\operatorname{arctg} x=x-\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^5}{5}-...+(-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}+...$

3.10.4 Розв'язання диференціальних рівнянь за допомогою степеневих рядів

За допомогою степеневих рядів можливо інтегрувати диференціальні рівняння.

Розглянемо лінійне диференціальне рівняння вигляду:

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + ... + p_n(x)y = f(x)$$

Якщо всі коефіцієнти і права частина цього рівняння розкладаються в збіжні у деякому інтервалі степеневі ряди, то існує розв'язок цього рівняння у деякій малій околиці нульової точки, що задовольняє початковим умовам.

Цей розв'язок можна представити степеневим рядом:

$$y = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + ...$$

Для знаходження розв'язку залишається визначити невідомі сталі c_i.

Ця задача вирішується **методом порівняння невизначених коефіцієнтів**. Записаний вираз для шуканої функції підставляємо у вихідне диференціальне рівняння, виконуючи при цьому всі необхідні дії зі степеневими рядами (диференціювання, додавання, віднімання, множення та ін.)

Потім прирівнюємо коефіцієнти при однакових степенях x у лівій і правій частинах рівняння. У результаті з урахуванням початкових умов одержимо систему рівнянь, з якої послідовно визначаємо коефіцієнти c_i.

Відзначимо, що цей метод застосовний і до нелінійних диференціальних рівнянь.

Приклад. Знайти розв'язок рівняння $y'' - xy = 0$ з початковими умовами $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

Розв'язок рівняння будемо шукати у вигляді $y = c_0 + c_1x + c_2x^2 + ...$

$$y' = c_1 + 2c_2x + 3c_3x^2 + 4c_4x^3 + ...$$

$$y'' = 2c_2 + 6c_3x + 12c_4x^2 + 20c_5x^3 + ...$$

Підставляємо отримані вирази у вихідне рівняння:

$$(2c_2 + 6c_3x + 12c_4x^2 + 20c_5x^3 + ...) - (c_0x + c_1x^2 + c_2x^3 + c_3x^4 + ...) = 0$$

$$2c_2 + x(6c_3 - c_0) + x^2(12c_4 - c_1) + x^3(20c_5 - c_2) + x^4(30c_6 - c_3) + ... = 0$$

Звідси одержуємо: $2c_2 = 0$

$$\begin{aligned} &6c_3 - c_0 = 0 \\ &12c_4 - c_1 = 0 \\ &20c_5 - c_2 = 0 \\ &30c_6 - c_3 = 0 \end{aligned}$$

....

Одержуємо, підставивши початкові умови у вираз для шуканої функції і її першої похідної:

$$\begin{aligned} &c_0 = 1 \\ &c_1 = 0 \end{aligned}$$

Остаточно одержимо: $c_0 = 1$; $c_1 = 0$; $c_2 = 0$; $c_3 = \frac{1}{6}$; $c_4 = 0$; $c_5 = 0$; $c_6 = \frac{1}{180}$; ...

Разом: $y = 1 + \frac{x^3}{6} + \frac{x^6}{180} + ...$

Існує і інший метод розв'язання диференціальних рівнянь за допомогою рядів. Він зветься **методом послідовного диференціювання.**

Розглянемо той же приклад. Розв'язання диференціального рівняння будемо шукати у вигляді розкладу невідомої функції в ряд Маклорена.

$$y = y(0) + \frac{y'(0)}{1!}x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \frac{y'''(0)}{3!}x^3 + ...$$

Якщо задані початкові умови $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$ підставити у вихідне диференціальне рівняння, одержимо, що $y''(0) = 0$.

Далі запишемо диференціальне рівняння у вигляді $y'' = xy$ і будемо послідовно диференціювати його за x.

$$\begin{aligned} &y''' = y + xy'; \qquad y'''(0) = y(0) = 1; \\ &y^{IV} = y' + y' + xy''; \quad y^{IV}(0) = 0; \\ &y^{V} = 2y'' + y'' + xy'''; \quad y^{V}(0) = 0; \\ &y^{VI} = 3y''' + y''' + xy^{IV}; \quad y^{VI}(0) = 4; \\ &\text{...} \end{aligned}$$

Після підстановки отриманих значень одержуємо:

$$y = 1 + \frac{x^3}{6} + \frac{x^6}{180} + ...$$

3.11 Ряди Фур'є

3.11.1 Тригонометричний ряд

Означення. Тригонометричним рядом називається ряд вигляду:

$$\frac{a_0}{2} + (a_1 \cos x + b_1 \sin x) + (a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x) + ... + (a_n \cos nx + b_n \sin nx) + ...$$

або, коротше, $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$.

Дійсні числа a_i, b_i називаються коефіцієнтами тригонометричного ряду.

Якщо ряд представленого вище типу збігається, то його сума являє собою періодичну функцію з періодом 2π, оскільки функції $\sin nx$ і $\cos nx$ також періодичні функції з періодом 2π.

Нехай тригонометричний ряд рівномірно збігається на відрізку $[-\pi;\pi]$, а отже, і на будь-якому відрізку в силу періодичності, і його сума дорівнює $f(x)$.

Визначимо коефіцієнти цього ряду.

Для розв'язання цієї задачі скористаємося наступними рівностями:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx \mathrm{d}x = \begin{cases} 0, & m \neq n, \quad m = 0, 1, 2, .. \\ \pi, & m = n, \quad m, n = 1, 2, ... \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx \mathrm{d}x = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ \pi, & m = n, \quad m, n = 1, 2, ... \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \sin nx \mathrm{d}x = 0, \quad m = 0, 1, 2, ..., \quad n = 1, 2, ...$$

Справедливість цих рівностей випливає із застосування до підінтегрального виразу тригонометричних формул. Докладніше див. Інтегрування тригонометричних функцій.

Оскільки функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[-\pi;\pi]$, то існує інтеграл

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{d}x = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}x + \int_{-\pi}^{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)\mathrm{d}x = \pi a_0$$

Такий результат виходить у результаті того, що $\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)\mathrm{d}x = 0$.

Одержуємо: $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{d}x$

Далі множимо вираз розкладу функції в ряд на $\cos nx$ і інтегруємо у межах від $-\pi$ до π.

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\mathrm{d}x = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx\mathrm{d}x + \int_{-\pi}^{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos^2 nx + b_n \cos nx \sin nx)\mathrm{d}x = \pi a_n$$

Звідси одержуємо: $a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\mathrm{d}x; \quad n = 1, 2, ...$

Аналогічно множимо вираз розкладу функції в ряд на $\sin nx$ і інтегруємо у межах від $-\pi$ до π.

Одержуємо: $b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x, \quad n = 1, 2, ...$

Вираз для коефіцієнта a_0 є частковим випадком для виразу коефіцієнтів a_n.

Таким чином, якщо функція $f(x)$ – будь-яка періодична функція періоду 2π, неперервна на відрізку $[-\pi;\pi]$ або така, що має на цьому відрізку скінченну кількість точок розриву першого роду, то коефіцієнти

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\mathrm{d}x; \quad n = 0, 1, 2, ...$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x, \quad n = 1, 2, ...$$

існують і називаються **коефіцієнтами Фур'є**[11] для функції $f(x)$.

Означення. Рядом Фур'є для функції $f(x)$ називається тригонометричний ряд, коефіцієнти якого є коефіцієнтами Фур'є. Якщо ряд Фур'є функції $f(x)$ збігається до неї у всіх її точках неперервності, то кажуть, що функція $f(x)$ розкладається в ряд Фур'є.

[11] Жан Батист Жозеф Фур'є (Jean-Baptiste Joseph Fourier) (1768 – 1830) – французький математик.

3.11.2 Достатні ознаки розкладності в ряд Фур'є

<u>**Теорема.**</u> (Теорема Діріхле) *Якщо функція $f(x)$ має період 2π і на відрізку $[-\pi;\pi]$ неперервна або має скінченне число точок розриву першого роду, і відрізок $[-\pi;\pi]$ можна розбити на скінченне число відрізків так, що усередині кожного з них функція $f(x)$ монотонна, то ряд Фур'є для функції $f(x)$ збігається при всіх значеннях x, причому у точках неперервності функції $f(x)$ його сума дорівнює $f(x)$, а у точках розриву його сума дорівнює $\dfrac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$, тобто середньому арифметичному граничних значень ліворуч і праворуч. При цьому ряд Фур'є функції $f(x)$ збігається рівномірно на будь-якому відрізку, що належить інтервалу неперервності функції $f(x)$.*

Функція $f(x)$, для якої виконуються умови теореми Діріхле називається **кусково-монотонною** на відрізку $[-\pi;\pi]$.

<u>**Теорема.**</u> *Якщо функція $f(x)$ має період 2π, крім того, $f(x)$ і її похідна $f'(x)$ – неперервні функції на відрізку $[-\pi;\pi]$ або мають скінченне число точок розриву першого роду на цьому відрізку, то ряд Фур'є функції $f(x)$ збігається при всіх значеннях x, причому у точках неперервності його сума дорівнює $f(x)$, а у точках розриву вона дорівнює $\dfrac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$. При цьому ряд Фур'є функції $f(x)$ збігається рівномірно на будь-якому відрізку, що належить інтервалу неперервності функції $f(x)$.*

Функція, що задовольняє умовам цієї теореми, називається **кусково-гладкою** на відрізку $[-\pi;\pi]$.

3.11.3 Розклад в ряд Фур'є неперіодичної функції

Задача розклад неперіодичної функції в ряд Фур'є у принципі не відрізняється від розкладу в ряд Фур'є періодичної функції.

Припустимо, функція $f(x)$ задана на відрізку $[a,b]$ і є на цьому відрізку кусково-монотонною. Розглянемо довільну періодичну кусково-монотонну функцію $f_1(x)$ з періодом $2T = b-a$, що збігається з функцією $f(x)$ на відрізку $[a,b]$.

Таким чином, функція $f(x)$ була доповнена. Тепер функція $f_1(x)$ розкладається в ряд Фур'є. Сума цього ряду у всіх точках відрізку $[a,b]$ збігається з функцією $f(x)$, тобто можна вважати, що функція $f(x)$ розкладена в ряд Фур'є на відрізку $[a,b]$.

Таким чином, якщо функція $f(x)$ задана на відрізку рівному 2π, розклад в ряд Фур'є нічим не відрізняється від розкладу в ряд періодичної функції. Якщо ж відрізок, на якому задана функція, менше, ніж 2α, то функція продовжується на інтервал $(b,\ a+2\pi)$ так, що умови розкладності в ряд Фур'є зберігалися.

Загалом кажучи, у цьому випадку продовження заданої функції на відрізок (інтервал) довжиною 2π може бути зроблено нескінченною кількістю способів, тому суми рядів, що вийшли, будуть різні, але вони будуть збігатися із заданою функцією $f(x)$ на відрізку $[a,b]$.

3.11.4 Ряд Фур'є для парних і непарних функцій

Зазначимо наступні властивості парних і непарних функцій: 1)

$$\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = \begin{cases} 0, & f(x) - \text{непарна} \\ 2\int_0^a f(x)\mathrm{d}x, & f(x) - \text{парна} \end{cases}$$

2) Добуток двох парних і непарних функцій є парною функцією.

3) Добуток парної і непарної функцій – непарна функція.

Справедливість цих властивостей може бути легко доведена виходячи з визначення парності і непарності функцій.

Якщо $f(x)$ – парна періодична функція з періодом 2π, що задовольняє умовам розкладності в ряд Фур'є, то можна записати:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\mathrm{d}x \qquad (n = 0, 1, 2, ...)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x = 0; \qquad (n = 1, 2, ...)$$

Таким чином, для парної функції ряд Фур'є записується:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos nx$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\mathrm{d}x \qquad (n = 0, 1, 2, ...)$$

Аналогічно одержуємо розклад в ряд Фур'є для непарної функції:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin nx;$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x; \qquad (n = 1, 2, ...)$$

<u>Приклад.</u> Розкласти в ряд Фур'є періодичну функцію $f(x) = x^3$ з періодом $T = 2\pi$ на відрізку $[-\pi;\pi]$.

Задана функція є непарною, отже, коефіцієнти Фур'є шукаємо у вигляді:

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x; \qquad (n = 1, 2, ...)$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^3\sin nx\mathrm{d}x = \left\{\begin{array}{ll} u = x^3; & \mathrm{d}v = \sin nx\mathrm{d}x; \\ \mathrm{d}u = 3x^2\mathrm{d}x; & v = -\dfrac{\cos nx}{n}; \end{array}\right\} = \frac{2}{\pi}\left(-\left.\frac{x^3\cos nx}{n}\right|_0^{\pi} + \frac{3}{n}\int_0^{\pi} x^2\cos nx\mathrm{d}x\right) =$$

$$= \left\{\begin{array}{ll} u = x^2; & \mathrm{d}v = \cos nx\mathrm{d}x; \\ \mathrm{d}u = 2x\mathrm{d}x; & v = \dfrac{\sin nx}{n}; \end{array}\right\} = \frac{2}{\pi}\left(-\frac{\pi^3\cos\pi n}{n} + \frac{3}{n}\left[\left.\frac{x^2\sin nx}{n}\right|_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\frac{2x\sin nx}{n}\mathrm{d}x\right]\right) =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(-\frac{\pi^3\cos\pi n}{n} - \frac{6}{n^2}\int_0^{\pi} x\sin nx\mathrm{d}x\right) = \left\{\begin{array}{ll} u = x; & \mathrm{d}v = \sin nx\mathrm{d}x; \\ \mathrm{d}u = \mathrm{d}x; & v = -\dfrac{\cos nx}{n}; \end{array}\right\} =$$

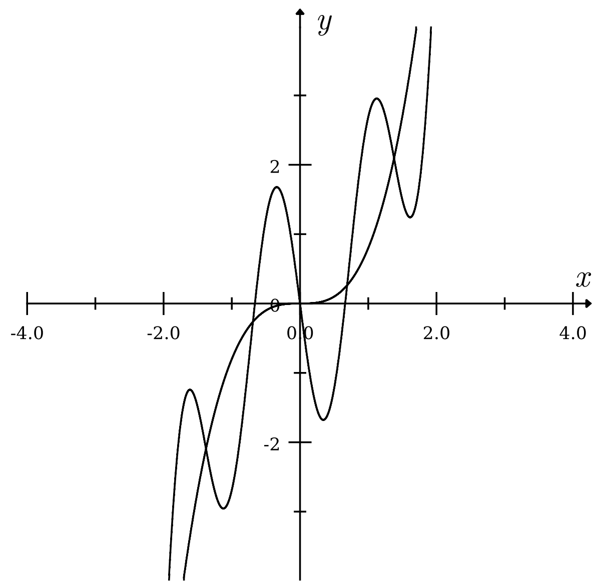
$$= \frac{2}{\pi}\left(-\frac{\pi^3\cos\pi n}{n} - \frac{6}{n^2}\left(-\left.\frac{x\cos nx}{n}\right|_0^{\pi} + \int_0^{\pi}\frac{\cos nx}{n}\mathrm{d}x\right)\right) =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(-\frac{\pi^3\cos\pi n}{n} + \frac{6\pi\cos\pi}{n^3} - \frac{6}{n^3}\left(\left.\frac{\sin nx}{n}\right|_0^{\pi}\right)\right) = -\frac{2\pi^2\cos\pi n}{n} + \frac{12\cos\pi n}{n^3} = (-1)^n\left(\frac{12}{n^3} - \frac{2\pi^2}{n}\right)$$

Одержуємо:

$$x^3 = \sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin nx = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{12}{n^3} - \frac{2\pi^2}{n}\right)\sin nx.$$

Побудуємо графіки заданої функції і її розклад в ряд Фур'є, обмежившись першими чотирма членами ряду.



3.11.5 Ряди Фур'є для функцій довільного періоду

Ряд Фур'є для функції $f(x)$ періоду $T = 2l$, неперервної або такої, що має скінченне число точок розриву першого роду на відрізку $[-l, l]$ має вигляд:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{\pi n}{l}x + b_n\sin\frac{\pi n}{l}x\right)$$

$$a_0 = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\mathrm{d}x;$$

$$a_n = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{\pi n}{l}x\mathrm{d}x, \quad n = 1, 2, ...$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{\pi n}{l}x\mathrm{d}x, \quad n = 1, 2, ...$$

Для парної функції довільного періоду розклад в ряд Фур'є має вигляд:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{\pi n}{l}x;$$
$$a_0 = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\mathrm{d}x;$$
$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{\pi n}{l}x\mathrm{d}x; \quad n = 1, 2, ...$$

Для непарної функції:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{\pi n}{l}x;$$
$$b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{\pi n}{l}x\mathrm{d}x; \quad n = 1, 2, ...$$

3.12 Інтеграл Фур'є

Нехай функція $f(x)$ на кожному відрізку $[-l, l]$, де l – будь-яке число, кусково-гладка або кусково-монотонна, крім того, $f(x)$ – абсолютно інтегрована функція, тобто збігається невласний інтеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,\mathrm{d}x$$

Тоді функція $f(x)$ розкладається в ряд Фур'є:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(a_n\cos\frac{\pi n}{l}x + b_n\sin\frac{\pi n}{l}x\Big)$$

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\cos\frac{\pi n}{l}t\mathrm{d}t, \quad n = 0, 1, 2, ...$$
$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\sin\frac{\pi n}{l}t\mathrm{d}t, \quad n = 1, 2, ...$$

Якщо підставити коефіцієнти у формулу для $f(x)$, одержимо:

$$f(x) = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(t)\mathrm{d}t + \frac{1}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_{-l}^{l} f(t)\cos\frac{\pi n}{l}t\mathrm{d}t\cos\frac{\pi n}{l}x + \int_{-l}^{l} f(t)\sin\frac{\pi n}{l}t\mathrm{d}t\sin\frac{\pi n}{l}x\right) =$$
$$= \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(t)\mathrm{d}t + \frac{1}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-l}^{l} f(t)\cos\frac{\pi n}{l}(t-x)\mathrm{d}t$$

Переходячи до границі при $l \to \infty$, можна довести, що $\lim\limits_{l\to\infty}\dfrac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(t)\mathrm{d}t = 0$ і

$$f(x) = \lim_{l\to\infty}\frac{1}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-l}^{l} f(t)\cos\frac{\pi n}{l}(t-x)\mathrm{d}t$$

Позначимо $u_n = \dfrac{\pi n}{l}$; $\quad \Delta u_n = u_{n+1} - u_n = \dfrac{\pi}{l}$; $\quad \dfrac{1}{l} = \dfrac{\Delta u_n}{\pi}$;
При $l \to \infty$, $\Delta u_n \to 0$.

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\lim_{l\to\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\Delta u_n\int_{-l}^{l} f(t)\cos u_n(t-x)\mathrm{d}t$$

Можна довести, що границя суми, що стоїть у правій частині рівності дорівнює інтегралу

$$\int_0^{\infty}\mathrm{d}u\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos u(t-x)\mathrm{d}t$$

Тоді $f(x) = \dfrac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\mathrm{d}u\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos u(t-x)\mathrm{d}t$ – **подвійний інтеграл Фур'є.**

Остаточно одержуємо:

$$f(x) = \int_0^{\infty}[a(u)\cos ux + b(u)\sin ux]\,\mathrm{d}u$$
$$a(u) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos ut\mathrm{d}t$$
$$b(u) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin ut\mathrm{d}t$$

– подання функції $f(x)$ **інтегралом Фур'є**.

Подвійний інтеграл Фур'є для функції $f(x)$ можна представити в комплексній формі:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}u\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{iu(x-t)}\mathrm{d}t$$

3.13 Перетворення Фур'є

Означення. Якщо $f(x)$ – будь-яка абсолютно інтегрована на всій числовій осі функція, неперервна або така, що має скінченне число точок розриву першого роду на кожному відрізку, то функція

$$F(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-iux}\mathrm{d}x$$

називається **перетворенням Фур'є функції** $f(x)$.

Функція $F(u)$ називається також **спектральною характеристикою функції** $f(x)$.

Якщо $f(x)$ – функція, що може бути представлена інтегралом Фур'є, то можна записати:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(u)e^{iux}\mathrm{d}u$$

Ця рівність називається **зворотним перетворенням Фур'є**

Інтеграли $F(u) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\int\limits_0^\infty f(x)\cos ux\mathrm{d}x$ і $F(u) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\int\limits_0^\infty f(x)\sin ux\mathrm{d}x$ називаються відповідно **косинус-перетворенням Фур'є і синус-перетворенням Фур'є.**

Косинус-перетворення Фур'є буде перетворенням Фур'є для парних функцій, синус-перетворення – для непарних.

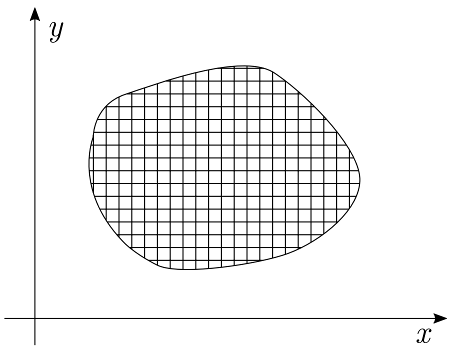
Перетворення Фур'є застосовується у функціональному аналізі, гармонійному аналізі, операційному численні, теорії лінійних систем тощо.

4 Кратні, криволінійні та поверхневі інтеграли

Як відомо, інтегрування є процесом підсумовування. Однак підсумовування може виконуватися неодноразово, що приводить нас до поняття кратних інтегралів. Розгляд цього питання почнемо з розгляду подвійних інтегралів.

4.1 Подвійні інтеграли

Розглянемо на площині деяку замкнену криву, рівняння якої $f(x, y) = 0$.



Сукупність всіх точок, що лежать усередині кривої і на самій кривій назвемо замкненою областю Δ. Якщо вибрати точки області без врахування точок, що лежать на кривій, область буде називається незамкненою областю Δ.

З геометричної точки зору Δ – площа фігури, обмеженої контуром.

Розіб'ємо область Δ на n часткових областей сіткою прямих, що відстоять одна від одної за віссю x на відстані Δx_i, а за віссю y – на Δy_i. Загалом кажучи, такий порядок розбиття необов'язковий, можливе розбиття області на часткові ділянки довільної форми і розміру.

Одержуємо, що площа S ділиться на елементарні прямокутники, площі яких рівні $S_i = \Delta x_i \cdot \Delta y_i$.

У кожній частковій області візьмемо довільну точку $P(x_i, y_i)$ і складемо інтегральну суму

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\cdot S_i;$$

де f – функція неперервна і однозначна для всіх точок області Δ.

Якщо нескінченно збільшувати кількість часткових областей Δ_i, тоді, очевидно, площа кожної часткової ділянки S_i прямує до нуля.

Означення: Якщо при прямуванні до нуля кроку розбиття області Δ інтегральні суми $\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\cdot S_i$ мають скінченну границю, то ця границя називається **подвійним інтегралом** від функції $f(x, y)$ за областю Δ.

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{i=n} f(x_i, y_i)S_i = \iint_{\Delta} f(x, y)\mathrm{d}x dy$$

З врахуванням того, що $S_i = \Delta x_i \cdot \Delta y_i$, одержуємо:

$$\sum_{i=1}^{i=n} f(x_i, y_i) S_i = \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{i=1}^{i=n} f(x_i, y_i) \Delta y_i \Delta x_i$$

У наведенім вище записі є два знаки Σ, оскільки підсумовування виконується за двома змінними, x і y.

Оскільки ділення області інтегрування довільне, також довільний і вибір точок P_i, тому, вважаючи всі площі S_i однаковими, одержуємо формулу:

$$\iint_{\Delta} f(x,y) \mathrm{d}y \mathrm{d}x = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \sum_{\Delta} \sum f(x,y) \Delta y \Delta x$$

4.1.1 Умови існування подвійного інтеграла

Сформулюємо достатні умови існування подвійного інтеграла.

Теорема *Якщо функція $f(x,y)$ неперервна в замкненій області Δ, то подвійний інтеграл $\iint_{\Delta} f(x,y)\mathrm{d}\Delta$ існує.*

Теорема *Якщо функція $f(x,y)$ обмежена в замкненій області Δ і неперервна в ній усюди, крім скінченного числа кусково-гладких ліній, то подвійний інтеграл $\iint_{\Delta} f(x,y)d\Delta$ існує.*

4.1.2 Властивості подвійного інтеграла

$$1) \iint_{\Delta} [f_1(x,y) + f_2(x,y) - f_3(x,y)] \, \mathrm{d}y \mathrm{d}x = \iint_{\Delta} f_1(x,y) \mathrm{d}y \mathrm{d}x + \iint_{\Delta} f_2(x,y) \mathrm{d}y \mathrm{d}x - \iint_{\Delta} f_3(x,y) \mathrm{d}y \mathrm{d}x$$

$$2) \iint_{\Delta} k f(x,y) \mathrm{d}y \mathrm{d}x = k \iint_{\Delta} f(x,y) \mathrm{d}y \mathrm{d}x$$

3) Якщо $\Delta = \Delta_1 + \Delta_2$, то

$$\iint_{\Delta} f(x,y) \mathrm{d}y \mathrm{d}x = \iint_{\Delta_1} f(x,y) \mathrm{d}y \mathrm{d}x + \iint_{\Delta_2} f(x,y) \mathrm{d}y \mathrm{d}x$$

4) Теорема про середнє. Подвійний інтеграл від функції $f(x,y)$ дорівнює добутку значення цієї функції у деякій точці області інтегрування на площу області інтегрування.

$$\iint_{\Delta} f(x,y) \mathrm{d}y \mathrm{d}x = f(x_0, y_0) \cdot S$$

5) Якщо $f\,(x,y) \geqslant 0$ в області Δ, то $\iint_{\Delta} f(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x \geqslant 0$.

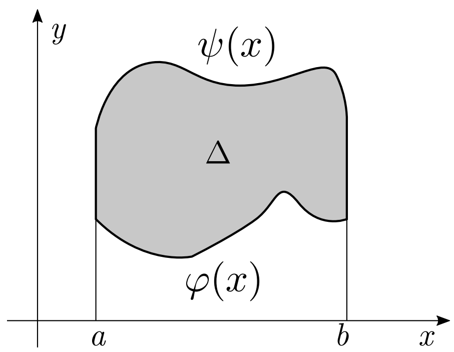
6) Якщо $f_1\,(x,y) \leqslant f_2\,(x,y)$, то $\iint_{\Delta} f_1(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x \leqslant \iint_{\Delta} f_2(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x$.

$$7) \left| \iint_{\Delta} f(x,y) \mathrm{d}y \mathrm{d}x \right| \leqslant \iint_{\Delta} |f(x,y)| \, \mathrm{d}y \mathrm{d}x.$$

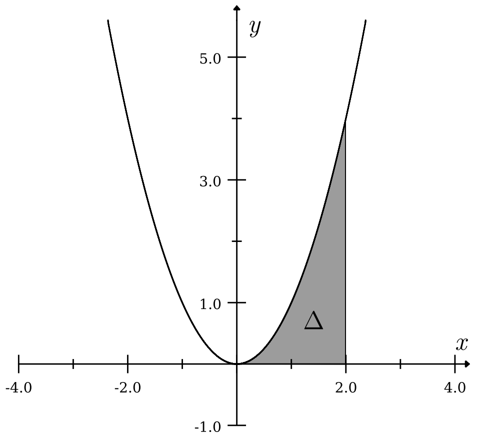
4.1.3 Обчислення подвійного інтеграла

Теорема *Якщо функція $f(x,y)$ неперервна в замкненій області Δ, обмеженої лініями $x = a$, $x = b$, $(a < b)$, $y = \varphi(x)$, $y = \psi(x)$, де φ і ψ – неперервні функції і $\varphi \leqslant \psi$, тоді*

$$\iint_{\Delta} f(x,y) \mathrm{d}x dy = \int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y) dy \right) \mathrm{d}x = \int_a^b \mathrm{d}x \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y) dy$$



<u>Приклад</u> Обчислити інтеграл $\iint_{\Delta} (x - y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, якщо область Δ обмежена лініями: $y = 0$, $y = x^2$, $x = 2$.

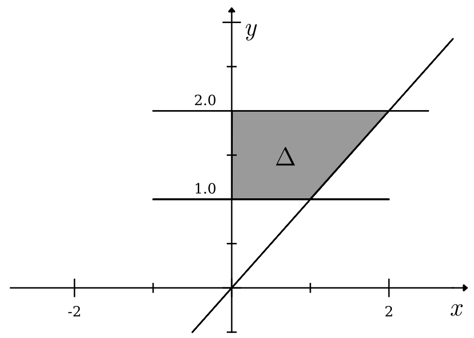


$$\iint_{\Delta} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^2 \mathrm{d}x \int_0^{x^2} (x-y)\mathrm{d}y = \int_0^2 \left(xy - \frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_{y=0}^{y=x^2} \mathrm{d}x = \int_0^2 \left(x^3 - \frac{x^4}{2}\right)\mathrm{d}x = \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{10}\right)\Bigg|_0^2 =$$
$$= 4 - 3,2 = 0,8$$

Теорема *Якщо функція $f(x,y)$ неперервна в замкненій області Δ, обмеженій лініями $y = c$, $y = d$ $(c < d)$, $x = \Phi(y)$, $x = \Psi(y)$ $(\Phi(y) \leqslant \Psi(y))$, то*

$$\iint_{\Delta} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_c^d \mathrm{d}y \int_{\Phi(y)}^{\Psi(y)} f(x,y)\mathrm{d}x$$

Приклад Обчислити інтеграл $\iint_{\Delta}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, якщо область Δ обмежена лініями $y = x$, $x = 0$, $y = 1$, $y = 2$.



$$\iint_{\Delta}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_1^2 \mathrm{d}y \int_0^y \left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}x = \int_1^2 \left(\frac{x^3}{3} + y^2x\right)\Bigg|_0^y \mathrm{d}y = \int_1^2 \frac{4}{3}y^3\mathrm{d}y = \frac{4}{12}\,y^4\Big|_1^2 = \frac{64}{12} - \frac{4}{12} = 5$$

Приклад Обчислити інтеграл $\iint_{\Delta}(3x^2-2xy+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, якщо область інтегрування Δ обмежена лініями $x = 0$, $x = y^2$, $y = 2$.

$$\iint_{\Delta}(3x^2-2xy+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^2 \mathrm{d}y \int_0^{y^2} (3x^2-2xy+y)\mathrm{d}x = \int_0^2 \left(x^3 - yx^2 + yx\right)\Big|_0^{y^2} \mathrm{d}y =$$
$$= \int_0^2 (y^6 - y^5 + y^3)\mathrm{d}y = \left(\frac{y^7}{7} - \frac{y^6}{6} + \frac{y^4}{4}\right)\Bigg|_0^2 = \frac{244}{21}$$

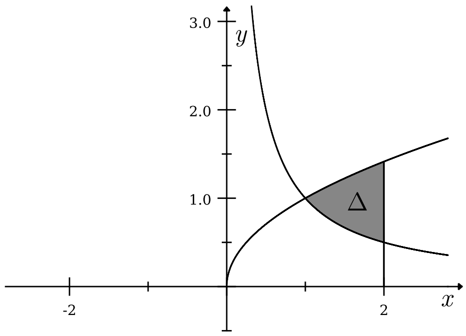
Приклад Обчислити подвійний інтеграл $\iint_{\Delta} y\ln x\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, якщо область інтегрування обмежена лініями $xy = 1$, $y = \sqrt{x}$, $x = 2$.

$$\iint_{\Delta} y\ln x\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_1^2 \mathrm{d}x \int_{1/x}^{\sqrt{x}} y\ln x\mathrm{d}y = \int_1^2 \frac{y^2}{2}\ln x\Bigg|_{1/x}^{\sqrt{x}} \mathrm{d}x = \int_1^2 \left[\frac{x\ln x}{2} - \frac{\ln x}{2x^2}\right]\mathrm{d}x$$

1.

$$\int x\ln x\mathrm{d}x = \left\{\begin{array}{ll} u = \ln x; & \mathrm{d}v = x\mathrm{d}x; \\ \mathrm{d}u = \dfrac{1}{x}\mathrm{d}x; & v = \dfrac{x^2}{2} \end{array}\right\} = \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x}{2}\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4};$$

$$\int_1^2 x\ln x\mathrm{d}x = \left(\frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4}\right)\Bigg|_1^2 = 2\ln 2 - 1 + \frac{1}{4} = 2\ln 2 - \frac{3}{4}.$$



2.

$$\int \frac{\ln x}{x^2}\mathrm{d}x = \left\{ \begin{array}{ll} \ln x = t; & x = e^t; \\ \mathrm{d}t = \dfrac{1}{x}\mathrm{d}x; & \end{array} \right\} = \int \frac{tx\mathrm{d}t}{x^2} = \int \frac{t\mathrm{d}t}{x} = \int e^{-t}t\mathrm{d}t = \left\{ \begin{array}{ll} u = t; & \mathrm{d}u = \mathrm{d}t; \\ \mathrm{d}v = e^{-t}\mathrm{d}t; & v = -e^{-t}; \end{array} \right\} = -te^{-t} +$$

$$+\int e^{-t}\mathrm{d}t = -te^{-t} - e^{-t} = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x};$$

$$\int_1^2 \frac{\ln x}{x^2}\mathrm{d}x = \left(-\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x}\right)\Bigg|_1^2 = -\frac{\ln 2}{2} - \frac{1}{2} + 1 = -\frac{\ln 2}{2} + \frac{1}{2};$$

3.

$$\iint_\Delta y\ln x\mathrm{d}x dy = \frac{1}{2}\left(2\ln 2 - \frac{3}{4} + \frac{\ln 2}{2} - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{5\ln 2}{2} - \frac{5}{4}\right) = \frac{5\ln 2}{4} - \frac{5}{8}.$$

4.1.4 Заміна змінних у подвійному інтегралі

Розглянемо подвійний інтеграл типу $\iint_\Delta F(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x$, де змінна x змінюється у межах від a до b, а змінна y – від $\varphi_1(x)$ до $\varphi_2(x)$.

Покладемо $x = f(u,v)$; $y = \varphi(u,v)$.

Тоді $\mathrm{d}x = \dfrac{\partial f}{\partial u}\mathrm{d}u + \dfrac{\partial f}{\partial v}\mathrm{d}v$; $\mathrm{d}y = \dfrac{\partial \varphi}{\partial u}\mathrm{d}u + \dfrac{\partial \varphi}{\partial v}\mathrm{d}v$;

$$\iint_\Delta F(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_a^b \mathrm{d}x \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} F(x,y)\mathrm{d}y$$

оскільки при першому інтегруванні змінна x приймається за сталу, то $\mathrm{d}x = 0$.

$\dfrac{\partial f}{\partial u}\mathrm{d}u + \dfrac{\partial f}{\partial v}\mathrm{d}v = 0$, тобто $\mathrm{d}u = -\dfrac{\partial f/\partial v}{\partial f/\partial u}\cdot \mathrm{d}v$

підставляючи цей вираз в записане вище співвідношення для $\mathrm{d}y$, одержуємо:

$$\mathrm{d}y = -\frac{\partial \varphi}{\partial u}\cdot\frac{\partial f/\partial v}{\partial f/\partial u}\mathrm{d}v + \frac{\partial \varphi}{\partial v}\mathrm{d}v = \frac{\dfrac{\partial \varphi}{\partial v}\cdot\dfrac{\partial f}{\partial u} - \dfrac{\partial \varphi}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial f}{\partial v}}{\dfrac{\partial f}{\partial u}}\cdot \mathrm{d}v$$

Вираз $\dfrac{\partial \varphi}{\partial v}\cdot\dfrac{\partial f}{\partial u} - \dfrac{\partial \varphi}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial f}{\partial v} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial u} & \dfrac{\partial f}{\partial v} \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial u} & \dfrac{\partial \varphi}{\partial v} \end{vmatrix} = |i|$ називається **визначником Якобі**[12] або **Якобіаном** функцій $f(u,v)$ і $\varphi(u,v)$.

Тоді $\iint_\Delta F(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_a^b \mathrm{d}x \int_{\Psi_1(x)}^{\Psi_2(x)} F\left(f(u,v),\varphi(u,v)\right)\cdot \dfrac{|i|}{\partial f/\partial u}\mathrm{d}v$

Оскільки при першому інтегруванні наведений вище вираз для $\mathrm{d}x$ приймає вигляд $\mathrm{d}x = \dfrac{\partial f}{\partial u}\mathrm{d}u$(при першому інтегруванні вважаємо $v = const$, $\mathrm{d}v = 0$), то при зміні порядку інтегрування, одержуємо співвідношення:

$$\iint_\Delta F(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_{V_1}^{V_2} \mathrm{d}v \int_{\Theta_1(v)}^{\Theta_2(v)} F\left(f(u,v),\varphi(u,v)\right)\cdot|i|\cdot\mathrm{d}u$$

[12] Карл Густав Якоб Якобі (Carl Gustav Jacob Jacobi) (1804–1851) – німецький математик.

4.1.5 Подвійний інтеграл у полярних координатах

Скористаємося формулою заміни змінних:

$$\iint_{\Delta} F(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{\Delta} F(f(u,v),\varphi(u,v))\,|i|\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

При цьому відомо, що $\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$

У цьому випадку якобіан має вигляд:

$$|i| = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \rho} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial \rho} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \sin\theta & \rho\cos\theta \end{vmatrix} = \rho\cos^2\theta + \rho\sin^2\theta = \rho$$

Тоді $\iint_{\Delta} F(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{\tau} F(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\,\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta = \iint_{\tau} f(\rho,\theta)\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta$

Тут τ – нова область значень, $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$; $\quad \theta = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$;

4.2 Потрійний інтеграл

Розглядаючи потрійний інтеграл, не будемо докладно зупинятися на всіх тих теоретичних викладках, які були детально розібрані для подвійного інтеграла, оскільки істотних розходжень між ними немає.

Єдина відмінність полягає у тому, що при знаходженні потрійного інтеграла інтегрування виконується не за двома, а за трьома змінними, а областю інтегрування є не частина площини, а деяка область у тривимірному просторі.

$$\iiint_V f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \lim_{\substack{\Delta x\to 0 \\ \Delta y\to 0 \\ \Delta z\to 0}} \sum\sum_{v}\sum f(x,y,z)\Delta x\Delta y\Delta z$$

Підсумовування проводиться за областю V, що обмежена деякою поверхнею $\varphi(x,y,z)=0$.

$$\iiint_V f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2}\int_{z_1}^{z_2} f(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}x$$

Тут x_1 і x_2 – сталі величини, y_1 і y_2 – можуть бути деякими функціями від x або сталими величинами, z_1 і z_2 – можуть бути функціями від x та y або сталими величинами.

Приклад Обчислити інтеграл $\int_0^1\int_0^{x^2}\int_0^{xy} x^2yz\mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}x$

$$\int_0^1\int_0^{x^2}\int_0^{xy} x^2yz\mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_0^1\int_0^{x^2} x^2y\left(\left.\frac{z^2}{2}\right|_0^{xy}\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^1\int_0^{x^2} x^2yx^2y^2\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^1\int_0^{x^2} x^4y^3\mathrm{d}y\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 x^4\left(\left.\frac{y^4}{4}\right|_0^{x^2}\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^4x^8}{4}\mathrm{d}x = \frac{1}{8}\int_0^1 x^{12}\mathrm{d}x = \frac{1}{8}\cdot\left.\frac{1}{13}x^{13}\right|_0^1 = \frac{1}{104}.$$

4.2.1 Заміна змінних у потрійному інтегралі

Операція заміни змінних у потрійному інтегралі аналогічна відповідній операції для подвійного інтеграла.

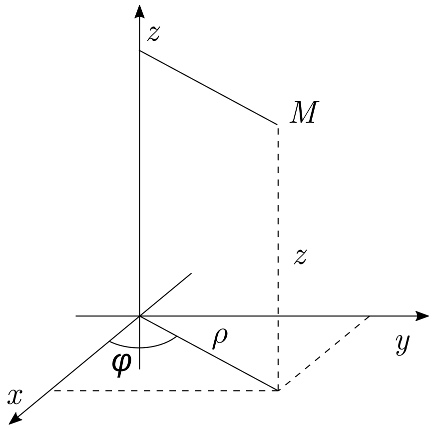
Можна записати:

$$\iiint_V F(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint_{\tau} F\left(f(u,v,w),\varphi(u,v,w),\psi(u,v,w)\right)\cdot|i|\cdot\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w$$

$$|i| = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial x}{\partial w} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial w} \\ \dfrac{\partial z}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$$

Найчастіше до заміни змінної у потрійному інтегралі вдаються з метою перейти від декартової прямокутної системи координат до циліндричної або сферичної системи.

Розглянемо ці перетворення докладніше.



4.2.2 Циліндрична система координат

Зв'язок координат довільної точки M простору у циліндричній системі з координатами в декартовій прямокутній системі здійснюється за формулами:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \\ z = z \end{cases}$$

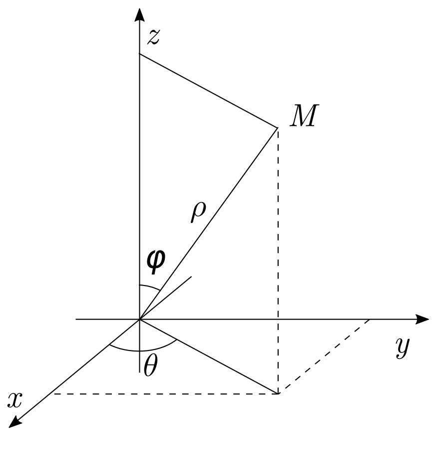
$$\rho = \sqrt{x^2+y^2}; \quad \varphi = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}; \quad z = z;$$

Для подання потрійного інтеграла у циліндричних координатах обчислюємо якобіан:

$$|i| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial\rho} & \frac{\partial x}{\partial\varphi} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial\rho} & \frac{\partial y}{\partial\varphi} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial\rho} & \frac{\partial z}{\partial\varphi} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho\cos^2\varphi + \rho\sin^2\varphi = \rho$$

Разом: $\iiint_r F(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint_\tau F(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z)\rho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\rho\mathrm{d}z$

4.2.3 Сферична система координат



Зв'язок координат довільної точки P простору в сферичній системі з координатами в декартовій прямокутній системі здійснюється за формулами:

$$\begin{cases} x = \rho\sin\varphi\cos\theta \\ y = \rho\sin\varphi\sin\theta \\ z = \rho\cos\varphi \end{cases}$$

$$\rho = \sqrt{x^2+y^2+z^2};$$

$$\theta = \operatorname{arctg}\frac{y}{x};$$

$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}.$$

Для подання потрійного інтеграла в сферичних координатах обчислюємо якобіан:

$$|i| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \\ \frac{\partial z}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin\varphi\cos\theta & \rho\cos\varphi\cos\theta & -\rho\sin\varphi\sin\theta \\ \sin\varphi\sin\theta & \rho\cos\varphi\sin\theta & \rho\sin\varphi\cos\theta \\ \cos\varphi & -\rho\sin\varphi & 0 \end{vmatrix} = \cos\varphi\left(\rho^2\sin\varphi\cos\varphi\cos^2\theta + \right.$$

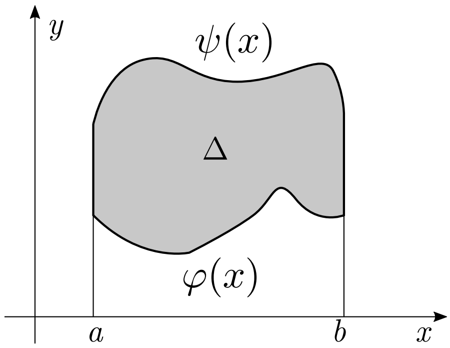
$$\left. +\rho^2\sin\varphi\cos\varphi\sin^2\theta\right) + \rho\sin\varphi\left(\rho\sin^2\varphi\cos^2\theta + \rho\sin^2\varphi\sin^2\theta\right) = \rho^2\cos^2\varphi\sin\varphi + \rho^2\sin^3\varphi =$$
$$= \rho^2\sin\varphi$$

Остаточно одержуємо:

$$\iiint_r F(x,y,z)\mathrm{d}x dy dz = \iiint_\tau f(\rho,\varphi,\theta)\rho^2\sin\varphi d\rho d\varphi d\theta$$

4.3 Геометричні і фізичні застосування кратних інтегралів

1. Обчислення площ у декартових координатах.

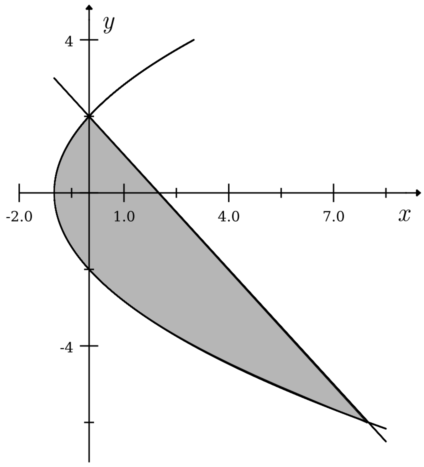


Площа фігури Δ, показаної на рисунку, може бути обчислена за допомогою подвійного інтеграла за формулою:

$$S = \int_a^b \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \mathrm{d}y\mathrm{d}x$$

<u>Приклад</u> Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $y^2 = 4x + 4$; $x + y - 2 = 0$.

Побудуємо графіки заданих функцій:



Лінії перетинаються у двох точках – $(0,2)$ і $(8,-6)$. Таким чином, область інтегрування обмежена за віссю Ox графіками кривих від $x = \dfrac{y^2-4}{4}$ до $x = 2 - y$, а за віссю Oy – від -6 до 2. Тоді шукана площа дорівнює:

$$S = \int\limits_{-6}^{2}\int\limits_{\frac{y^2-4}{4}}^{2-y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int\limits_{-6}^{2}\left(2 - y - \frac{y^2-4}{4}\right)\mathrm{d}y = \int\limits_{-6}^{2}\left(\frac{8-4y-y^2+4}{4}\right)\mathrm{d}y = \frac{1}{4}\int\limits_{-6}^{2}\left(-y^2-4y+12\right)\mathrm{d}y =$$

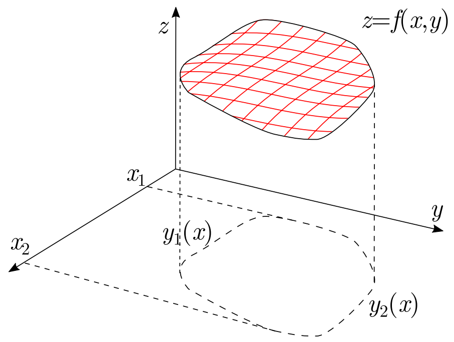
$$= \frac{1}{4}\left(-\frac{y^3}{3} - \frac{4y^2}{2} + 12y\right)\Bigg|_{-6}^{2} = \frac{1}{4}\left(-\frac{8}{3} - 8 + 24 - \left(\frac{36\cdot 6}{3} - \frac{4\cdot 36}{2} - 12\cdot 6\right)\right) = \frac{1}{4}\cdot\left(88 - \frac{8}{3}\right) = 21\frac{1}{3}$$

2. Обчислення площ у полярних координатах.

$$S = \iint_\tau \rho \mathrm{d}\rho \mathrm{d}\theta = \iint_\Delta \mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_{\theta_1}^{\theta_2}\int_{f(\theta)}^{\varphi(\theta)} \rho \mathrm{d}\rho \mathrm{d}\theta$$

3. Обчислення об'ємів тіл.

Нехай тіло обмежене знизу площиною xOy, а згори – поверхнею $z = f(x, y)$, а з боків – циліндричною поверхнею. Таке тіло називається **циліндроїд**



$$V = \lim_{\Delta x \to 0} \sum \sum_\Delta f(x, y)\Delta y \Delta x = \iint_\Delta f(x, y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2} f(x, y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x$$

Приклад Обчислити об'єм, обмежений поверхнями: $x^2 + y^2 = 1$; $x + y + z = 3$ і площиною xOy.

Межі інтегрування: за віссю Ox: $y_1 = -\sqrt{1-x^2}$; $\quad y_2 = \sqrt{1-x^2}$;

за віссю Oy: $x_1 = -1$; $x_2 = 1$;

$$V = \int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} (3 - x - y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x = 3\pi;$$

4. Обчислення площі кривої поверхні.

Якщо поверхня задана рівнянням: $f(x, y, z) = 0$, то площа її поверхні знаходиться за формулою:

$$S = \iint_\Delta \frac{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}}{\frac{\partial f}{\partial z}} \mathrm{d}y\mathrm{d}x$$

Якщо поверхню задано в явній формі, тобто рівнянням $z = \varphi(x, y)$, то площа цієї поверхні обчислюється за формулою:

$$S = \iint_\Delta \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} \mathrm{d}y\mathrm{d}x$$

5. Обчислення моментів інерції площ плоских фігур.

Нехай площа плоскої фігури (область Δ) обмежена лінією, рівняння якої $f(x, y) = 0$. Тоді моменти інерції цієї фігури знаходяться за формулами:

– відносно осі Ox: $I_x = \iint_\Delta y^2 \mathrm{d}y\mathrm{d}x$

– відносно осі Oy: $I_y = \iint_\Delta x^2 \mathrm{d}y\mathrm{d}x$

– відносно початку координат: $I_0 = I_x + I_y = \iint_\Delta \left(x^2 + y^2\right) \mathrm{d}y\mathrm{d}x$ – цей момент інерції називають ще **полярним моментом інерції**

6. Обчислення центрів ваги площ плоских фігур.

Координати центра ваги знаходяться за формулами:

$$x_C = \frac{\iint_\Delta wx\mathrm{d}y\mathrm{d}x}{\iint_\Delta w\mathrm{d}y\mathrm{d}x}; \quad y_C = \frac{\iint_\Delta wy\mathrm{d}y\mathrm{d}x}{\iint_\Delta w\mathrm{d}y\mathrm{d}x};$$

тут w – поверхнева щільність ($\mathrm{d}m = w\mathrm{d}y\mathrm{d}x$ – маса елемента площі).

7. Обчислення об'ємів тіл за допомогою потрійного інтеграла.

   Якщо поверхня тіла описується рівнянням $f(x, y, z) = 0$, то об'єм тіла може бути знайдений за формулою:

$$V = \int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2}\int_{z_1}^{z_2} \mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}x$$

   при цьому z_1 і z_2 – функції від x і в або постійні, y_1 і y_2 – функції від x або сталі, x_1 і x_2 – постійні.

8. Координати центра ваги тіла.

$$x_C = \frac{\iiint_r wx\mathrm{d}v}{\iiint_r w\mathrm{d}v}; \quad y_C = \frac{\iiint_r wy\mathrm{d}v}{\iiint_r w\mathrm{d}v}; \quad z_C = \frac{\iiint_r wz\mathrm{d}v}{\iiint_r w\mathrm{d}v};$$

9. Моменти інерції тіла щодо осей координат.

$$I_x = \iiint_r (y^2 + z^2)w\mathrm{d}v; \quad I_y = \iiint_r (x^2 + z^2)w\mathrm{d}v; \quad I_z = \iiint_r (x^2 + y^2)w\mathrm{d}v;$$

10. Моменти інерції тіла щодо координатних площин.

$$I_{xy} = \iiint_r z^2 w\mathrm{d}v; \quad I_{xz} = \iiint_r y^2 w\mathrm{d}v; \quad I_{yz} = \iiint_r x^2 w\mathrm{d}v;$$

11. Момент інерції тіла відносно початку координат.

$$I_0 = \iiint_r (x^2 + y^2 + z^2)w\mathrm{d}v;$$

    У наведених вище формулах п.п. 8 – 11 r – область обчислення інтеграла за об'ємом, w – щільність тіла у точці $(x,\ y,\ z)$, $\mathrm{d}v$ – елемент об'єму

    (а) у декартових координатах: $\mathrm{d}v = \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$;

    (б) у циліндричних координатах: $\mathrm{d}v = \rho\mathrm{d}z\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta$;

    (в) у сферичних координатах: $\mathrm{d}v = \rho^2 \sin\varphi\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta$.

12. Обчислення маси неоднорідного тіла.

$$M = \iiint_r w\mathrm{d}v;$$

    Тепер щільність w – величина змінна.

4.4 Криволінійні інтеграли

__**Означення.**__ Крива $\vec{r}(t) = \varphi(t)\vec{i} + \psi(t)\vec{j} + \gamma(t)\vec{k}$ $(a \leqslant t \leqslant b)$ називається **неперервною кусково-гладкою**, якщо функції φ, ψ і γ неперервні на відрізку $[a, b]$ і відрізок $[a, b]$ можна розбити на скінченне число часткових відрізків так, що на кожному з них функції φ, ψ і γ мають неперервні похідні, не рівні нулю одночасно.

Якщо визначено не тільки розбиття кривої на часткові відрізки точками, але і порядок цих точок, то крива називається **орієнтованою** кривою.

Орієнтована крива називається **замкненою**, якщо значення радіус-вектора у рівнянні кривої у початковій і кінцевій точках збігаються.

$$\vec{r}(a) = \vec{r}(b)$$

Розглянемо у просторі XYZ криву AB, у кожній точці якої визначена довільна функція $f(x, y, z)$.

Розіб'ємо криву на скінченне число відрізків і розглянемо добуток значення функції в кожній точці розбиття на довжину відповідного відрізка.

$$f(x_i, y_i, z_i)\Delta s_i$$

Склавши всі отримані у такий спосіб добутки, одержимо так звану **інтегральну** суму функції $f(x, y, z)$.

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta s_i$$

4.4.1 Криволінійні інтеграли першого роду

Означення. Якщо при прямуванні до нуля кроку розбиття кривої на часткові відрізки існує границя інтегральних сум, то ця границя називається **криволінійним інтегралом від функції** $f(x, y, z)$ **за довжиною дуги** AB або **криволінійним інтегралом першого роду**.

$$\int_{AB} f(x, y, z)\mathrm{d}s$$

4.4.1.1 Властивості криволінійного інтеграла першого роду

1) Значення криволінійного інтеграла за довжиною дуги не залежить від напрямку кривої AB.
2) Сталий множник можна виносити за знак криволінійного інтеграла.
3) Криволінійний інтеграл від суми функцій дорівнює сумі криволінійних інтегралів від цих функцій.
4) Якщо крива AB розбита на дуги AC і CB, то

$$\int_{AB} f(x, y, z)\mathrm{d}s = \int_{AC} f(x, y, z)\mathrm{d}s + \int_{CB} f(x, y, z)\mathrm{d}s$$

5) Якщо у точках кривої AB

$$f_1(x, y, z) \leqslant f_2(x, y, z)$$

то

$$\int_{AB} f_1(x, y, z)\mathrm{d}s \leqslant \int_{AB} f_2(x, y, z)\mathrm{d}s$$

6) Справедлива нерівність:

$$\left|\int_{AB} f(x, y, z)\mathrm{d}s\right| \leqslant \int_{AB} |f(x, y, z)|\,\mathrm{d}s$$

7) Якщо $f(x, y, z) = 1$, то

$$\int_{AB} \mathrm{d}s = \lim_{\lambda\to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta s_i = S;$$

S – довжина дуги кривої, λ – найбільша із всіх часткових дуг, на які розбивається дуга AB.
8) Теорема про середнє.
Якщо функція $f(x, y, z)$ неперервна на кривій AB, то на цій кривій існує точка $(x_1,\ y_1,\ z_1)$ така, що

$$\int_{AB} f(x, y, z)\mathrm{d}s = f(x_1, y_1, z_1) \cdot S$$

Для обчислення криволінійного інтеграла за довжиною дуги треба визначити його зв'язок зі звичайним визначеним інтегралом.

Нехай крива AB задана параметрично рівняннями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, де функції x, y, z – неперервно диференційовані функції параметра t, причому точці A відповідає $t = \alpha$, а точці B відповідає $t = \beta$. Функція $f(x, y, z)$ – неперервна на всій кривій AB.

Для будь-якої точки $M(x, y, z)$ кривої довжина дуги AM обчислюється за формулою (див. Обчислення довжини дуги кривої):

$$s = s(t) = \int_{\alpha}^{t} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}\mathrm{d}t$$

Довжина всієї кривої AB дорівнює

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}\mathrm{d}t$$

Криволінійний інтеграл за довжиною дуги AB можна знайти за формулою:

$$\int_{AB} f(x, y, z)\mathrm{d}s = \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t), y(t), z(t))\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}\mathrm{d}t$$

Таким чином, для обчислення криволінійного інтеграла першого роду (за довжиною дуги AB) треба, використовуючи параметричне рівняння кривої виразити підінтегральну функцію через параметр t, замінити $\mathrm{d}s$ диференціалом дуги залежно від параметра t і проінтегрувати отриманий вираз за t.

Приклад. Обчислити інтеграл $\int_{AB}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}s$ за одним витком ґвинтової лінії $x = \cos t$; $y = \sin t$; $z = t$; $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$.

$$\int_{AB}(x^2 + y^2 + z^2)\mathrm{d}s = \int_0^{2\pi}(\cos^2 t + \sin^2 t + t^2)\sqrt{(-\sin t)^2 + \cos^2 t + 1}\,\mathrm{d}t = \sqrt{2}\int_0^{2\pi}(1 + t^2)\mathrm{d}t =$$
$$= 2\sqrt{2}\pi\left(1 + \frac{4\pi^2}{3}\right).$$

Якщо інтегрування проводиться за довжиною плоскої кривої, заданої рівнянням $y = \varphi(x), \quad a \leqslant x \leqslant b$, то одержуємо:

$$\int_{AB} f(x,y)ds = \int_a^b f(x,\varphi(x))\sqrt{1+\varphi'^2(x)}\mathrm{d}x$$

4.4.2 Криволінійні інтеграли другого роду

Нехай AB – неперервна крива у просторі XYZ (або на площині XY), а точка $P(x,y,z)$ – довільна функція, визначена на цій кривій. Розіб'ємо криву точками $M(x_i,y_i,z_i)$ на скінченне число часткових дуг і розглянемо суму добутків значень функції в кожній точці на довжину відповідної часткової дуги.

$$\sum_{i=1}^{n} P(\alpha,\beta,\gamma)\Delta x_i; M(\alpha,\beta,\gamma) \in \Delta x_i$$

Означення. Якщо при прямуванні до нуля кроку розбиття кривої AB інтегральні суми мають скінченну границю, то ця границя називається **криволінійним інтегралом за змінною x від функції $P(x,y,z)$ за кривою AB у напрямку від A до B.**

$$\int_{AB} P(x,y,z)\mathrm{d}x = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} P(\alpha,\beta,\gamma)\Delta x_i$$

Криволінійний інтеграл другого роду, тобто інтеграл за координатами відрізняється від криволінійного інтеграла першого роду, тобто за довжиною дуги тим, що значення функції при складанні інтегральної суми множиться не на довжину часткової дуги, а на її проекцію на відповідну вісь. (У розглянутому вище випадку – на вісь Ox).

Загалом кажучи, криволінійні інтеграли можна рахувати також і за змінними y і z.

$$\int_{AB} Q(x,y,z)\mathrm{d}y = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} Q(\alpha,\beta,\gamma)\Delta y_i$$

$$\int_{AB} R(x,y,z)\mathrm{d}z = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} R(\alpha,\beta,\gamma)\Delta z_i$$

Суму криволінійних інтегралів також називають криволінійним інтегралом другого роду.

$$\int_{AB} P(x,y,z)\mathrm{d}x + Q(x,y,z)\mathrm{d}y + R(x,y,z)\mathrm{d}z$$

4.4.2.1 Властивості криволінійного інтеграла другого роду

1) Криволінійний інтеграл при зміні напрямку кривої міняє знак.

$$\int_{AB} P(x,y,z)\mathrm{d}x = -\int_{BA} P(x,y,z)\mathrm{d}x$$

$$2) \int_{AB} kP(x,y,z)\mathrm{d}x = k\int_{AB} P(x,y,z)\mathrm{d}x;$$

$$3) \int_{AB} \left(P_1(x,y,z) + P_2(x,y,z)\right)\mathrm{d}x = \int_{AB} P_1(x,y,z)\mathrm{d}x + \int_{AB} P_2(x,y,z)\mathrm{d}x$$

$$4) \int_{AB} P(x,y,z)\mathrm{d}x = \int_{AC} P(x,y,z)\mathrm{d}x + \int_{CB} P(x,y,z)\mathrm{d}x$$

5) Криволінійний інтеграл за замкненою кривою L не залежить від вибору початкової точки, а залежить тільки від напрямку обходу кривої.

$$\oint_L P(x,y,z)\mathrm{d}x + Q(x,y,z)\mathrm{d}y + R(x,y,z)\mathrm{d}z$$

Напрямок обходу контуру L задається додатково. Якщо L – замкнена крива без точок самоперетину, то напрямок обходу контуру проти годинникової стрілки називається додатним.

6) Якщо AB – крива, що лежить у площині, перпендикулярній осі Ox, то

$$\int_{AB} P(x,y,z)\mathrm{d}x = 0.$$

Аналогічні співвідношення справедливі при інтегруванні за змінними y і z.

Теорема. *Якщо крива AB – кусково-гладка, а функції $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$ і $R(x, y, z)$ – неперервні на кривій AB, то криволінійні інтеграли*

$$\int_{AB} P(x, y, z)\mathrm{d}x; \quad \int_{AB} Q(x, y, z)\mathrm{d}y; \quad \int_{AB} R(x, y, z)\mathrm{d}z;$$

$$\int_{AB} P(x, y, z)\mathrm{d}x + Q(x, y, z)\mathrm{d}y + R(x, y, z)\mathrm{d}z$$

існують.

Якщо функції $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$ і $R(x, y, z)$ є компонентами вектора сили, то інтеграл

$$\int_{AB} P(x, y, z)\mathrm{d}x + Q(x, y, z)\mathrm{d}y + R(x, y, z)\mathrm{d}z$$

виражає собою роботу сили на сегменті AB кривої L.

Обчислення криволінійних інтегралів другого роду виконується шляхом перетворення їх до визначених інтегралів за формулами:

$$\int_{AB} P(x, y, z)\mathrm{d}x = \int_{\alpha}^{\beta} P(x(t), y(t), z(t))x'(t)\mathrm{d}t$$

$$\int_{AB} Q(x, y, z)\mathrm{d}y = \int_{\alpha}^{\beta} Q(x(t), y(t), z(t))y'(t)\mathrm{d}t$$

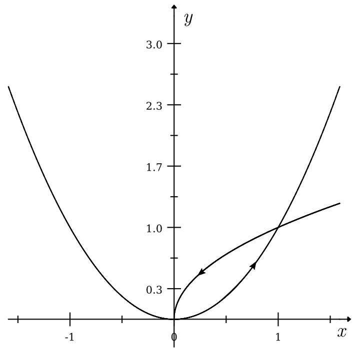
$$\int_{AB} R(x, y, z)\mathrm{d}x = \int_{\alpha}^{\beta} R(x(t), y(t), z(t))z'(t)\mathrm{d}t$$

$$\int_{AB} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z = \int_{\alpha}^{\beta} \left[Px'(t) + Qy'(t) + Rz'(t)\right]\mathrm{d}t$$

У випадку, якщо AB – плоска крива, задана рівнянням $y = f(x)$,

$$\int_{AB} P(x, y)\mathrm{d}x + Q(x, y)\mathrm{d}y = \int_{x_A}^{x_B} \left[P\left(x, f(x)\right) + Q(x, f(x))f'(x)\right]\mathrm{d}x$$

<u>Приклад.</u> Обчислити криволінійний інтеграл $\int_L x^2y\mathrm{d}x + x^3\mathrm{d}y$. L – контур, обмежений параболами $y^2 = x; \quad x^2 = y$. Напрямок обходу контуру додатний.



Представимо замкнений контур L як суму двох дуг $L_1 = x^2$ і $L_2 = \sqrt{x}$

$$\oint_L x^2y\mathrm{d}x + x^3\mathrm{d}y = \int_{L_1} x^2y\mathrm{d}x + \int_{L_1} x^3\mathrm{d}y + \int_{L_2} x^2y\mathrm{d}x + \int_{L_2} x^3\mathrm{d}y = \int_0^1 x^4\mathrm{d}x + \int_0^1 x^3 \cdot 2x\mathrm{d}x + \int_1^0 x^2\sqrt{x}\mathrm{d}x +$$
$$+ \int_1^0 \frac{x^3}{2\sqrt{x}}\mathrm{d}x = \left.\frac{x^5}{5}\right|_0^1 + \left.\frac{2x^5}{5}\right|_0^1 + \left.\frac{2x^{\frac{7}{2}}}{7}\right|_1^0 + \left.\frac{x^{\frac{7}{2}}}{7}\right|_1^0 = \frac{3}{5} - \frac{3}{7} = \frac{6}{35};;$$

4.5 Формула Ґріна

Формула Ґріна[13] встановлює зв'язок між криволінійним інтегралом і подвійним інтегралом, тобто дає вираз інтеграла за замкненим контуром через подвійний інтеграл за областю, обмеженою цим контуром.

Будемо вважати, що розглянута область **однозв'язна**, тобто в ній немає виключених ділянок.

Якщо замкнений контур має вигляд, показаний на рисунку, то криволінійний інтеграл за контуром L можна записати у вигляді:

$$\oint_L P(x, y)\mathrm{d}x = \int_{AB} + \int_{BC} + \int_{CD} + \int_{DA}$$

[13] Джордж Ґрін (George Green) (1793–1841) – англійський математик.

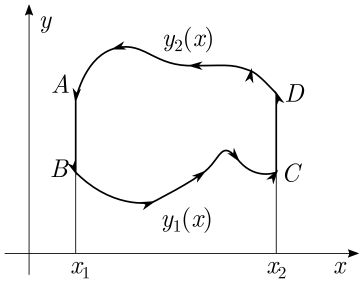
$$\int_{AB} = \int_{CD} = 0$$

$$\oint_L P(x,y)\mathrm{d}x = \int_{x_1}^{x_2} P\left(x, y_1(x)\right)\mathrm{d}x + \int_{x_2}^{x_1} P\left(x, y_2(x)\right)\mathrm{d}x = \int_{x_1}^{x_2} P\left(x, y_1(x)\right)\mathrm{d}x - \int_{x_1}^{x_2} P\left(x, y_2(x)\right)\mathrm{d}x$$

$$\oint_L P(x,y)\mathrm{d}x = -\int_{x_1}^{x_2} \left(P\left(x, y_2(x)\right) - P\left(x, y_1(x)\right)\right)\mathrm{d}x$$

$$P\left(x, y_2(x)\right) - P\left(x, y_1(x)\right) = P(x,y)\big|_{y_1(x)}^{y_2(x)} = \int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial P}{\partial y}\mathrm{d}y$$

$$\oint_L P(x,y)\mathrm{d}x = -\int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial P}{\partial y}\mathrm{d}y\mathrm{d}x = -\iint_\Delta \frac{\partial P}{\partial y}\mathrm{d}y\mathrm{d}x$$



Якщо ділянки AB і CD контуру прийняти за довільні криві, то, провівши аналогічні перетворення, одержимо формулу для контуру довільної форми:

$$\oint_L P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y = \iint_\Delta \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}x$$

Ця формула називається **формулою Ґріна**.

Формула Ґріна справедлива і у випадку багатозв'язної області, тобто області, усередині якої є виключені ділянки. У цьому випадку права частина формули буде являти собою суму інтегралів за зовнішнім контуром області і інтегралів за контурами всіх виключених ділянок, причому кожний із цих контурів інтегрується у такому напрямку, щоб область Δ увесь час залишалася ліворуч лінії обходу.

Приклад. Розв'яжемо приклад, розглянутий вище, скориставшись формулою Ґріна.

$$\oint\limits_L x^2y\mathrm{d}x + x^3\mathrm{d}y = \iint\limits_\Delta \left(3x^2 - x^2\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \iint\limits_\Delta 2x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 2x^2y\Big|_{x^2}^{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 2\left(x^{\frac{5}{2}} - x^4\right)\mathrm{d}x =$$
$$= 2\left(\frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}} - \frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_0^1 = 2\left(\frac{2}{7} - \frac{1}{5}\right) = \frac{6}{35}.$$

Формула Ґріна дозволяє значно спростити обчислення криволінійного інтеграла.

Криволінійний інтеграл не залежить від форми шляху, якщо він уздовж всіх шляхів, що з'єднують початкову і кінцеву точку, має ту саму величину.

Умовою незалежності криволінійного інтеграла від форми шляху є рівність нулю цього інтеграла за будь-яким замкненим контуром, що містить початкову і кінцеву точки.

Ця умова буде виконуватися, якщо підінтегральний вираз є повним диференціалом деякої функції, тобто виконується умова тотальності.

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

4.6 Поверхневі інтеграли

4.6.1 Поверхневі інтеграли першого роду

Поверхневий інтеграл є таким же узагальненням подвійного інтеграла, яким є криволінійний інтеграл відносно визначеного інтеграла.

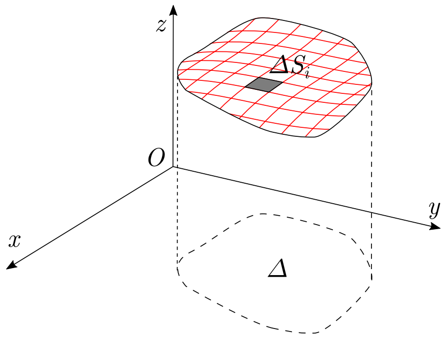
Розглянемо поверхню у просторі, що довільно розбита на n частин.

Розглянемо добуток значення деякої функції F у довільній точці з координатами $(\alpha,\ \beta,\ \gamma)$ на площу часткової ділянки ΔS_i, що містить цю точку.

$$F(\alpha,\beta,\gamma)\Delta S_i$$

Означення. Якщо при прямуванні до нуля кроку розбиття поверхні λ існує скінченна границя інтегральних сум, то ця границя називається **поверхневим інтегралом першого роду** або **інтегралом за площею поверхні.**

$$\iint_S F(x,y,z)\mathrm{d}S = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^n F(\alpha_i,\beta_i,\gamma_i)\Delta S_i$$



4.6.1.1 Властивості поверхневого інтеграла першого роду

Поверхневі інтеграли першого роду мають такі властивості:
1) $\iint_S \mathrm{d}S = S$, де S – площа поверхні.
2)

$$\iint_S kF(x,y,z)\mathrm{d}S = k\iint_S F(x,y,z)\mathrm{d}S; \quad k = const$$

3)

$$\iint_S \left[F_1(x,y,z) + F_2(x,y,z)\right]\mathrm{d}S = \iint_S F_1(x,y,z)\,\mathrm{d}S + \iint_S F_2(x,y,z)\,\mathrm{d}S$$

4) Якщо поверхня розділена на частини S_1 і S_2, то

$$\iint_S F(x,y,z)\mathrm{d}S = \iint_{S_1} F(x,y,z)\mathrm{d}S + \iint_{S_2} F(x,y,z)\mathrm{d}S$$

5) Якщо $F_1(x,y,z) \leqslant F_2(x,y,z)$, то

$$\iint_S F_1(x,y,z)\mathrm{d}S \leqslant \iint_S F_2(x,y,z)\mathrm{d}S$$

6)

$$\left|\iint_S F(x,y,z)\mathrm{d}S\right| \leqslant \iint_S |F(x,y,z)|\,\mathrm{d}S$$

7) Теорема про середнє.
Якщо функція $F(x,y,z)$ неперервна в будь-якій точці поверхні S, то існує точка (α,β,γ) така, що

$$\iint_S F(x,y,z)\mathrm{d}S = F(\alpha,\beta,\gamma)\cdot S,$$

де S – площа поверхні.

Провівши дослідження, аналогічні тим, які використовувалися при знаходженні криволінійного інтеграла, одержимо формулу для обчислення поверхневого інтеграла першого роду через подвійний інтеграл за **площею проекції поверхні на площину xOy.**

$$\iint\limits_S F(x,y,z)\mathrm{d}S = \iint\limits_\Delta F(x,y,f(x,y))\sqrt{1+(f'_x(x,y))^2+(f'_y(x,y))^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

4.6.2 Поверхневі інтеграли другого роду

Якщо на поверхні S є хоча б одна точка і хоча б один контур, що не перетинає границю поверхні, при обході за яким напрямок нормалі у точці міняється на протилежний, то така поверхня називається **однобічною**.

Якщо при цих умовах напрямок нормалі не міняється, то поверхня називається **двобічною**.

Будемо вважати додатним напрямком обходу контуру L, що належить поверхні, такий напрямок, при русі за яким за вибраним боком поверхні сама поверхня залишається ліворуч.

Двобічна поверхня із установленим додатним напрямком обходу називається **орієнтованою** поверхнею.

Розглянемо у просторі XYZ обмежену двобічну поверхню S, що складається зі скінченного числа шматків, кожний з яких заданий або рівнянням вигляду $z = f(x,y)$, або є циліндричною поверхнею з твірними, паралельними осі Oz.

Означення. Якщо при прямуванні до нуля кроку розбиття поверхні S інтегральні суми, складені як суми добутків значень деякої функції на площу часткової поверхні, мають скінченну границю, то ця границя називається **поверхневим інтегралом другого роду.**

$$\iint_S R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} R(\alpha_i,\beta_i,\gamma_i)\,(\Delta S_i)_{xy}$$

$$\iint_S P(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} P(\alpha_i,\beta_i,\gamma_i)\,(\Delta S_i)_{yz}$$

$$\iint_S Q(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} Q(\alpha_i,\beta_i,\gamma_i)\,(\Delta S_i)_{zx}$$

$$\iint_S P(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

– поверхневий інтеграл другого роду.

Властивості поверхневого інтеграла другого роду аналогічні вже розглянутим нами властивостям поверхневого інтеграла першого роду.

Тобто будь-який поверхневий інтеграл другого роду міняє знак при зміні сторони поверхні, сталий множник можна виносити за знак інтеграла, поверхневий інтеграл від суми двох і більше функцій дорівнює сумі поверхневих інтегралів від цих функцій, якщо поверхня розбита на скінченне число часткових поверхонь, інтеграл за усією поверхнею дорівнює сумі інтегралів за частинними поверхнями.

Якщо S – циліндрична поверхня з твірними, паралельними осі OZ, то $\iint_S R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0$. У випадку, якщо твірні поверхні паралельні осям Ox і Oy, то дорівнюють нулю відповідні складові поверхневого інтеграла другого роду.

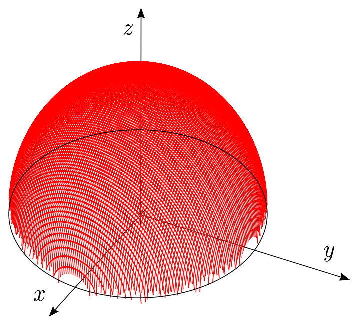
Обчислення поверхневого інтеграла другого роду зводиться до обчислення відповідних подвійних інтегралів. Розглянемо це на прикладі.

Приклад. Обчислити інтеграл $\iint_S (z-R)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ за верхнім боком півсфери

$$x^2+y^2+z^2 = 2Rz, \quad R \leqslant z \leqslant 2R.$$

Перетворимо рівняння поверхні до вигляду: $x^2+y^2+(z-R)^2-R^2=0$

$$z = R + \sqrt{R^2-x^2-y^2}$$



Задана поверхня проектується на площину xOy у круг, рівняння якого:

$$x^2+y^2 \leqslant R^2$$

$$\iint_S (z-R)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_\Delta \left(R^2-x^2-y^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Для обчислення подвійного інтеграла перейдемо до полярних координат:
(Див. Подвійний інтеграл у полярних координатах)

$$\iint_\Delta (R^2-x^2-y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_\tau f(\rho,\varphi)\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi, \rho = \sqrt{x^2+y^2}$$

$$\iint_S (z-R)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^R \left(R^2-\rho^2\right)\rho\mathrm{d}\rho = \int_0^{2\pi}\left(\frac{R^2\rho^2}{2}-\frac{\rho^4}{4}\right)\Bigg|_0^R\mathrm{d}\varphi = \frac{R^4}{4}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi = \frac{\pi R^4}{2}$$

4.6.3 Зв'язок поверхневих інтегралів першого і другого роду

Поверхневі інтеграли першого і другого роду пов'язані один з одним співвідношенням:

$$\iint_S P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_S \left(P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma\right)\mathrm{d}S$$

У цій формулі $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ – напрямні косинуси нормалі до поверхні S в обрану сторону поверхні.

4.6.4 Формула Гауса-Остроградського

Формула Гауса-Остроградського[14] є аналогом формули Ґріна. Ця формула пов'язує поверхневий інтеграл другого роду за замкненою поверхнею з потрійним інтегралом за просторовою областю, обмеженою цією поверхнею.

Для виведення формули Гауса-Остроградського треба скористатися міркуваннями, подібними до тих, які використовувалися при знаходженні формули Ґріна.

Розглядається спочатку поверхня, обмежена зверху і знизу деякими поверхнями, заданими відомими рівняннями, а збоку обмежена циліндричною поверхнею. Потім розглядається варіант коли поверхня обмежена циліндричною поверхнею з твірних, паралельними двом іншим координатним осям.

Після цього отримані результати узагальнюються, приводячи до формули **Гауса-Остроградського:**

$$\oiint_S P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iiint_V \left(\frac{\partial P(x,y,z)}{\partial x} + \frac{\partial Q(x,y,z)}{\partial y} + \frac{\partial R(x,y,z)}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

Відзначимо, що ця формула застосовна для обчислення поверхневих інтегралів за замкненою поверхнею.

На практиці формулу Гауса-Остроградського можна застосовувати для обчислення об'єму тіл, якщо відома поверхня, що обмежує це тіло.

Так мають місце формули:

$$V = \oiint_S x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \oiint_S y\mathrm{d}x\mathrm{d}z = \oiint_S z\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iiint_V \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

Приклад. Знайти формулу обчислення об'єму кулі.

У поперечних перерізах кулі (перетини паралельні площини xOy) виходять кола.

Рівняння кулі має вигляд: $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

Знайти об'єм кулі можна за формулою:

$$V = \int_{-R}^{R}\int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}}\int_{-\sqrt{R^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} \mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}x = 8\int_0^R \mathrm{d}x \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \sqrt{R^2-x^2-y^2}\mathrm{d}y =$$

$$= 8\int_0^R \left[\frac{y\sqrt{R^2-x^2-y^2}}{2} + \frac{R^2-x^2}{2}\arcsin\frac{y}{\sqrt{R^2-x^2}}\right]\Bigg|_0^{\sqrt{R^2-x^2}} \mathrm{d}x = 8\int_0^R \frac{R^2-x^2}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\mathrm{d}x =$$

$$= 2\pi\left[R^2x - \frac{x^3}{3}\right]\Bigg|_0^R = \frac{4\pi R^3}{3}.$$

Для розв'язання цієї ж задачі можна скористатися перетворенням інтеграла до сферичних координат. (Див. Сферична система координат) Це значно спростить інтегрування.

$$V = \int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta 2\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^R \rho^2\sin\varphi\mathrm{d}\rho = 2\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\frac{R^3}{3}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi = \frac{2}{3}\int_0^{\pi}2R^3\mathrm{d}\theta = \frac{4\pi R^3}{3}.$$

Ще простіше задача розв'язується за допомогою формули Остроградського-Гауса та полярної системи координат (S_c – переріз кулі площиною Oxy):

$$V = \oiint_S z\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\iint_{S_c}\sqrt{R^2-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^R\mathrm{d}\rho\int_{-\pi}^{\pi}\sqrt{R^2-\rho^2}\cdot\rho\mathrm{d}\theta = 2\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^R\sqrt{R^2-\rho^2}\cdot\rho\mathrm{d}\rho = \frac{4\pi R^3}{3}.$$

4.7 Елементи теорії поля

Означення. Якщо кожній точці простору M ставиться у відповідність деяка скалярна величина U, то у такий спосіб задається **скалярне поле** $U(M)$. Якщо кожній точці простору M ставиться у відповідність вектор $\vec{F}$, то задається **векторне поле** $\vec{F}(M)$.

Нехай у просторі M задана поверхня Δ. Будемо вважати, що в кожній точці P визначається додатний напрямок нормалі одиничним вектором $\vec{n}(P)$.

У просторі M задамо векторне поле, поставивши у відповідність кожній точці простору вектор, визначений координатами:

$$\vec{F} = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$$

Якщо розбити якимось чином поверхню на часткові ділянки Δ_i і скласти суму $\sum_i(\vec{F}(P_i)\vec{n}(P_i))\Delta_i$, де $\vec{F}\vec{n}$ – скалярний добуток, то границя цієї суми при прямуванні до нуля площ часткових ділянок розбиття (якщо ця границя існує) буде **поверхневим інтегралом**.

$$\iint_\Delta \vec{F}\vec{n}\mathrm{d}\Delta$$

Означення. Поверхневий інтеграл $\iint_\Delta \vec{F}\vec{n}\mathrm{d}\Delta$ називається **потоком векторного поля $\vec{F}$ через поверхню Δ.**

[14](Остроградський Михайло Васильович (1801–1862) – український математик.)

Якщо поверхня розбита на скінченне число часткових поверхонь, то потік векторного поля через всю поверхню буде дорівнює сумі потоків через часткові поверхні.

Якщо перетворити скалярний добуток у координатну форму, то одержуємо співвідношення:

$$\iint_{\Delta} \vec{F}\vec{n}\mathrm{d}\Delta = \iint_{\Delta} [P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma]\mathrm{d}\Delta = \iint_{\Delta} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Якщо на області Δ існує функція $f(x, y, z)$, що має неперервні частинні похідні, для яких виконуються властивості:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = P; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = Q; \quad \frac{\partial f}{\partial z} = R;$$

то таку функцію називають **потенційною функцією** або **потенціалом** вектора $\vec{F}$.

Тоді вектор $\vec{F}$ є **градієнтом** функції f.

$$\vec{F} = \mathrm{grad} f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}$$

Потенціал може бути знайдений за формулою:

$$f(x, y, z) = \int_{x_0}^{x} P(x, y_0, z_0)\mathrm{d}x + \int_{y_0}^{y} Q(x, y, z_0)\mathrm{d}y + \int_{z_0}^{z} R(x, y, z)\mathrm{d}z$$

У цій формулі x_0, y_0, z_0 – координати деякої початкової точки. У якості такої точки зручно брати початок координат.

Теорема. *Для того, щоб поле вектора $\vec{F}$, заданого у деякій області, мало потенціал, необхідно і достатньо, щоб виконувалося одна із двох умов:*

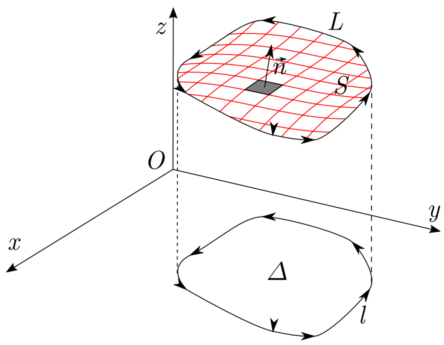
1) Інтеграл від вектора $\vec{F}$ за будь-яким замкненим кусково-гладким контуром, що належить області, дорівнює нулю.

2) Інтеграл за будь-яким кусково-гладким шляхом, що з'єднує дві будь-які точки поля, не залежить від шляху інтегрування.

4.7.1 Формула Стокса

Формула Стокса[15] пов'язує криволінійні інтеграли другого роду з поверхневими інтегралами другого роду.

Нехай у просторі задана деяка поверхня S. L – неперервний кусково-гладкий контур поверхні S.



Припустимо, що функції P, Q і R неперервні на поверхні S разом зі своїми частинними похідними першого порядку. Застосуємо формулу, що виражає криволінійний інтеграл через визначений.

$$\oint_L P(x,y,z)\mathrm{d}x + Q(x,y,z)\mathrm{d}y + R(x,y,z)\mathrm{d}z = \int_\alpha^\beta [P(x(t),y(t),z(t))x'(t) + Q(x(t),y(t),z(t))y'(t)+$$
$$+R(x(t),y(t),z(t))z'(t)]\mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta \left[Px'(t) + Qy'(t) + R\left(\frac{\partial z}{\partial x}x'(t) + \frac{\partial z}{\partial y}y'(t)\right)\right]\mathrm{d}t =$$
$$= \int_\alpha^\beta \left\{\left[P + R\frac{\partial z}{\partial x}\right]x'(t) + \left[Q + R\frac{\partial z}{\partial y}\right]y'(t)\right\}\mathrm{d}t = \oint_L \left[P + R\frac{\partial z}{\partial x}\right]\mathrm{d}x + \left[Q + R\frac{\partial z}{\partial y}\right]\mathrm{d}y$$

Введемо позначення: $p = \dfrac{\partial z}{\partial x}; \quad q = \dfrac{\partial z}{\partial y};$

Застосувавши формулу Ґріна, можна замінити криволінійний інтеграл рівним йому подвійним інтегралом. Після перетворень встановлюється така відповідність між криволінійним і поверхневим інтегралом:

$$\oint_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z = \iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

ця формула і називається **формулою Стокса.**

[15] Джордж Габріель Стокс (George Gabriel Stokes) (1819–1903) – ірландський математик.

Означення. Вектор $\vec{B}$, компоненти якого рівні відповідно

$$B_x = \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}; \quad B_y = \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}; \quad B_z = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y};$$

називається **вихором** або **ротором** вектора $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ і позначається:

$$\mathrm{rot}\vec{F}$$

Означення. Символічний вектор $\vec{\nabla} = \left\{\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right\} = \vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}$ називається **оператором Гамільтона**[16]. Символ ∇ – «набла».

З урахуванням цього позначення можна уявити собі поняття ротора вектора $\vec{F}$ як векторного добутку оператора Гамільтона на вектор $\vec{F}$.

$$\mathrm{rot}\vec{F} = \vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

Означення. Криволінійний інтеграл, що виражає собою роботу векторного поля уздовж деякої кривої L називається **лінійним інтегралом** від вектора $\vec{F}$ за орієнтованою кривою L.

$$\int_L \vec{F}\mathrm{d}\vec{s} = \int_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z$$

Якщо крива L являє собою замкнений контур, то лінійний інтеграл за таким контуром називається **циркуляцією** векторного поля $\vec{F}$ уздовж контуру L.

$$\mathcal{C} = \oint_L \vec{F}\mathrm{d}\vec{s} = \oint_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z$$

У векторній формі теорему Стокса можна сформулювати так:
Циркуляція вектора уздовж контуру деякої поверхні дорівнює потоку вихору (ротора) через цю поверхню.

$$\int_\lambda \vec{F}\mathrm{d}\vec{s} = \iint_\Delta \vec{n} rot\vec{F}\mathrm{d}\Delta$$

Відзначимо, що розглянута вище формула Ґріна є частковим випадком формули Стокса.

Також за умови рівності нулю всіх компонентів ротора вектора, одержуємо, що криволінійний інтеграл за будь-якою просторовою кривою дорівнює нулю, тобто криволінійний інтеграл не залежить від шляху інтегрування.

Означення. Вираз $\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$ називається **дивергенцією вектора** (**дивергенцією векторної функції**) $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ і позначається

$$\mathrm{div}\vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

Таким чином, формулу Гауса-Остроградського може бути записана у вигляді:

$$\oint_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\mathrm{d}S = \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

або

$$\iiint_V \mathrm{div}\vec{F}\mathrm{d}v = \oint_S \vec{F}\vec{n}\mathrm{d}S$$

Тобто *інтеграл від дивергенції векторного поля $\vec{F}$ за об'ємом дорівнює потоку вектора через поверхню, обмежену цим об'ємом.*

Означення. Векторне поле $\vec{F}$ називається **соленоїдальним** (**трубчастим**), якщо $\mathrm{div}\vec{F} = 0$.

З допомогою описаного вище оператора Гамільтона можна представити визначені нами поняття у такий спосіб:

$$\mathrm{grad}f = \vec{\nabla}f; \quad \mathrm{div}\vec{F} = \vec{\nabla}\vec{F}; \quad \mathrm{rot}\vec{F} = \vec{\nabla} \times \vec{F};$$

Вираз

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

називається **оператором Лапласа.**

Справедливі наступні співвідношення:

[16] Вільям Роуан Гамільтон (William Rowan Hamilton) (1805–1865) – ірландський математик.

$$\mathrm{div}(\mathrm{grad} f) = \Delta f; \qquad \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} f = \Delta f$$

Справедливість цих рівностей легко перевірити безпосереднім підставлянням.

Рівняння

$$\Delta f = 0$$

називається **рівнянням Лапласа.**

Його розв'язки – **гармонічні функції**.

До рівняння Лапласа зводяться задачі стаціонарної теплопровідності та стаціонарної ламінарної течії.

Тепер розглянемо приклади застосування розглянутих вище понять.

Приклад. Знайти $\mathrm{rot}(\vec{r} \cdot \vec{a}) \cdot \vec{r}$, якщо $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$; $\quad \vec{a} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$.

Знайдемо скалярний добуток: $\vec{r} \cdot \vec{a} = x + y + z$;

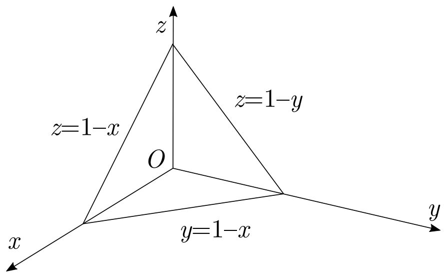
Знайдемо скалярний добуток:

$$(\vec{r} \cdot \vec{a}) \cdot \vec{r} = \{P, Q, R\} = \{x^2 + xy + xz, \quad yx + y^2 + yx, \quad xz + yz + z^2\}$$

$$\mathrm{rot}(\vec{r} \cdot \vec{a}) \cdot \vec{r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \vec{i}\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) - \vec{j}\left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}\right) + \vec{k}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) =$$

$$= \vec{i}(z - y) - \vec{j}(z - x) + \vec{k}(y - x)$$

Приклад. Знайти потік векторного поля $\vec{F} = (y - x)\vec{i} + (x + y)\vec{j} + y\vec{k}$ крізь сторону трикутника S, вирізаного із площини $x + y + z - 1 = 0$ координатними площинами.



$$= \iint\limits_S \vec{F} \cdot \vec{n} \mathrm{d}s = \iint\limits_S (y - x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + (x + y)\mathrm{d}x\mathrm{d}z + y\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int\limits_0^1 \mathrm{d}y \int\limits_0^{1-y} (y + y + z - 1)\mathrm{d}z +$$

$$+ \int\limits_0^1 \mathrm{d}z \int\limits_0^{1-z} (x + 1 - z - x)\mathrm{d}x + \int\limits_0^1 \mathrm{d}x \int\limits_0^{1-x} y\mathrm{d}y = \int\limits_0^1 \left[2yz + \frac{z^2}{2} - z\right]\Bigg|_0^{1-y} \mathrm{d}y + \int\limits_0^1 [x - zx]|_0^{1-z} \mathrm{d}z +$$

$$+ \int\limits_0^1 \frac{y^2}{2}\Bigg|_0^{1-x} \mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \left[2y - 2y^2 + \frac{1}{2} - y + \frac{y^2}{2} - 1 + y\right] \mathrm{d}y + \int\limits_0^1 \left[1 - z - z + z^2\right] \mathrm{d}z +$$

$$+ \int_0^1 \left[\frac{1}{2} - x + \frac{x^2}{2}\right] \mathrm{d}x = \int_0^1 \left[-\frac{3y^2}{2} + 2y - \frac{1}{2}\right] \mathrm{d}y + \left[z - z^2 + \frac{z^3}{3}\right]\Bigg|_0^1 + \left[\frac{x}{2} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}\right]\Bigg|_0^1 =$$

$$= \left[-\frac{y^3}{2} + y^2 - \frac{y}{2}\right]\Bigg|_0^1 + 1 - 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = -\frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{2} + \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

Приклад. Знайти $\mathrm{div}(\mathrm{grad} u)$, якщо $u = e^{x+y+z}$.

$$\mathrm{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k} = e^{x+y+z}\left[\vec{i} + \overleftarrow{j} + \vec{k}\right]$$

$$P = Q = R = e^{x+y+z};$$

$$\mathrm{div}(\mathrm{grad} u) = 3e^{x+y+z} = 3u.$$

Приклад. Визначити чи є векторне поле

$$\vec{F} = (5x + 6yz; \quad 5y + 6xz; \quad 5z + 6xy)$$

потенційним і знайти його потенціал.

$$\mathrm{grad}u = \left\{ \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z} \right\}$$

$$P = \frac{\partial u}{\partial x} = 5x + 6yz; \quad Q = \frac{\partial u}{\partial y} = 5y + 6xz; \quad R = \frac{\partial u}{\partial z} = 5z + 6xy;$$

Якщо поле потенційне, то повинні виконуватися наступні умови:

$$\begin{aligned} &1)\ \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}; \quad 6z = 6z; \\ &2)\ \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}; \quad 6x = 6x; \\ &3)\ \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}; \quad 6y = 6y; \end{aligned}$$

Ці умови еквівалентні умові рівності нулю ротора векторного поля. Справедливість цього твердження видна з означення ротора.

Таким чином, поле потенційне. Потенціал знаходиться за формулою:

$$u = \int_0^x 5x\mathrm{d}x + \int_0^y 5y\mathrm{d}y + \int_0^z (5z + 6xy)\mathrm{d}z = \frac{5}{2}x^2 + \frac{5}{2}y^2 + \frac{5}{2}z^2 + 6xyz;$$