КУРС ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ (Короткий конспект лекцій). ЧАСТИНА 1.

Чорноіван Юрій

18 вересня 2023 р.

Зміст

1 Комплексні числа

1.1 Основні означення

<u>Означення.</u> Множиною комплексних чисел називається множина упорядкованих пар дійсних чисел, додавання і множення яких виконується за такими правилами:

$$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y');$$
$$(x, y) \cdot (x', y') = (xx' - yy', xy' + yx').$$

Легко показати, що за таких правил $(0, 1)\cdot(0, 1) = (-1, 0)$. Оскільки операції з парами типу $(x, 0)$ повністю узгоджуються з тим, що нам відомо про звичайні дійсні числа, встановлена рівність може трактуватися як рівність квадрата певного числа, яке називають уявною одиницею і позначають i, числу -1. Використовуючи уявну одиницю, можна дати альтернативне означення комплексних чисел із використанням іншої форми запису пари, так званої **алгебраїчної форми запису комплексного числа**.

<u>Означення.</u> Комплексним числом z називається вираз $z = a + ib$, де a і b – дійсні числа, i – уявна одиниця, що визначається співвідношенням:

$$i^2 = -1.$$

При цьому число a називається **дійсною частиною** числа z ($a = \mathrm{Re}z$), а b – **уявною частиною** ($b = \mathrm{Im}z$).

Якщо $a = \mathrm{Re}z = 0$, то число z буде суто уявним, якщо $b = \mathrm{Im}z = 0$, то число z буде дійсним.

<u>Означення.</u> Числа $z = a + ib$ і $\bar{z} = a - ib$ називаються **комплексно спряженими.**

<u>Означення.</u> Два комплексних числа $z_1 = a_1 + ib_1$ і $z_2 = a_2 + ib_2$ називаються рівними, якщо відповідно рівні їхні дійсні і уявні частини:

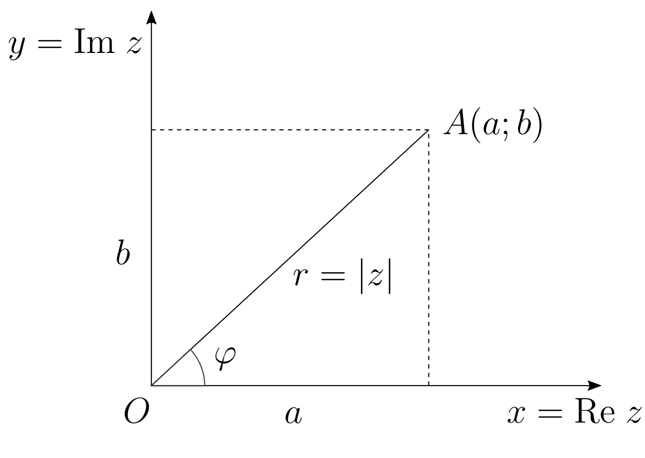
$$a_1 = a_2; \qquad b_1 = b_2;$$

<u>Означення.</u> Комплексне число дорівнює нулю, якщо відповідно дорівнюють нулю дійсна і уявна частини.

$$a = b = 0.$$

Поняття комплексного числа має геометричне тлумачення. Множина комплексних чисел є розширенням множини дійсних чисел за рахунок включення множини уявних чисел. Комплексні числа містять у собі всі множини чисел, які вивчалися раніше. Так натуральні, цілі, раціональні, ірраціональні, дійсні числа є, загалом кажучи, окремими випадками комплексних чисел.

Якщо будь-яке дійсне число може бути геометрично представлене у вигляді точки на числовій прямій, то комплексне число представляється точкою на площині, координатами якої будуть відповідно дійсна і уявна частини комплексного числа. При цьому горизонтальна вісь буде дійсною числовою віссю, а вертикальна – уявною віссю.



Таким чином, на осі Ox розташовуються дійсні числа, а на осі Oy – суто уявні.

За допомогою подібного геометричного подання можна представляти числа у так званій *тригонометричній* формі.

1.2 Тригонометрична форма комплексного числа

З геометричних міркувань видно, що $a = r\cos\varphi$; $\quad b = r\sin\varphi$. Тоді комплексне число можна представити у вигляді:

$$z = a + ib = r\cos\varphi + ir\sin\varphi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

Така форма запису називається **тригонометричною формою запису комплексного числа.**

При цьому величина r називається **модулем** комплексного числа, а кут нахилу φ – **аргументом** комплексного числа.

$$r = |z|\,; \qquad \varphi = Arg\, z.$$

З геометричних міркувань видно:

$$r = |a + ib| = \sqrt{a^2 + b^2}; \quad \varphi = Arg\, z = \operatorname{arctg} \frac{b}{a};$$

Очевидно, що комплексно спряжені числа мають однакові модулі і протилежні за знаком аргументи.

$$|z| = |\overline{z}|\,; \qquad Arg\, z = -Arg\, \overline{z}.$$

1.3 Дії з комплексними числами

Основні дії з комплексними числами випливають із дій з многочленами.

1) **Додавання і віднімання.**

$$z = z_1 \pm z_2 = (a_1 + ib_1) \pm (a_2 + ib_2) = (a_1 \pm a_2) + i(b_1 \pm b_2)$$
$$|z| = \sqrt{(a_1 \pm a_2)^2 + (b_1 \pm b_2)^2}$$

2) **Множення.**

$$z = z_1 z_2 = (a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) = a_1 a_2 + i a_1 b_2 + i b_1 a_2 + i^2 b_1 b_2$$
$$z = z_1 z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + b_1 a_2)$$

У тригонометричній формі:

$$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1), z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2).$$

$$z = z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2))$$

Для випадку комплексно-спряжених чисел:

$$z\overline{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2 = |z|^2 = |\overline{z}|^2\,.$$

3) **Ділення.**

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + ib_1}{a_2 + ib_2} = x + iy$$
$$z = \frac{(a_1 + ib_1)(a_2 - ib_2)}{(a_2 + ib_2)(a_2 - ib_2)} = \frac{(a_1 a_2 + b_1 b_2) + i(a_2 b_1 - a_1 b_2)}{a_2^2 + b_2^2}$$
$$z = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + i\frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}$$

У тригонометричній формі:

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2))$$

4) **Піднесення до степеня.**

З операції множення комплексних чисел випливає, що

$$z^2 = z \cdot z = r^2(\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi)$$

У загальному випадку одержимо:

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi),$$

де n – ціле додатне число.

Цей вираз називається **формулою Муавра**[1].

Формулу Муавра можна використати для знаходження тригонометричних функцій подвійного, потрійного тощо кутів.

Приклад. Знайти формули $\sin 2\varphi$ і $\cos 2\varphi$.

Розглянемо деяке комплексне число $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.

Тоді з одного боку $z^2 = r^2(\cos^2\varphi + 2i\cos\varphi\sin\varphi - \sin^2\varphi)$.

За формулою Муавра: $z^2 = r^2(\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi)$

Дорівнюючи, одержимо $\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi + 2i\cos\varphi\sin\varphi$

Оскільки два комплексних числа рівні, якщо рівні їхні дійсні і уявні частини, то

$$\cos 2\varphi = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi$$

$$\sin 2\varphi = 2\sin\varphi\cos\varphi$$

Одержали відомі формули для подвійного кута.

[1] Абрахам де Муавр (Abraham de Moivre) (1667–1754) – англійський математик

5) **Добування кореня з комплексного числа.**

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \rho(\cos\psi + i\sin\psi)$$

Підносячи до степеня, одержимо:

$$\rho^n(\cos n\psi + i\sin n\psi) = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

Звідси: $\rho = \sqrt[n]{r}$; $n\psi = \varphi + 2\pi k$; $k \in \mathbb{Z}$.

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right)$$

Таким чином, корінь n-го степеня з комплексного числа має n різних значень.

1.4 Показникова форма комплексного числа

Розглянемо показникову функцію $w = e^z; z = x + iy$.

Можна показати, що функція w може бути записана у вигляді:

$$w = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y)$$

Ця рівність називається **рівнянням Ойлера**.

Для комплексних чисел будуть справедливі наступні властивості:

1. $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$;
2. $e^{z_1-z_2} = \dfrac{e^{z_1}}{e^{z_2}}$;
3. $(e^z)^m = e^{mz}$; де m – ціле число.

Якщо в рівнянні Ойлера показник степеня прийняти за суто уявне число ($x = 0$), то одержуємо:

$$e^{iy} = \cos y + i\sin y$$

Для комплексно спряженого числа одержуємо:

$$e^{-iy} = \cos y - i\sin y$$

З цих двох рівнянь одержуємо:

$$\begin{cases} \cos y = \dfrac{e^{iy} + e^{-iy}}{2} \\ \sin y = \dfrac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i} \end{cases}$$

Цими формулами (**формулами Ойлера**) користуються для знаходження значень степенів тригонометричних функцій через функції кратних кутів.

Якщо представити комплексне число у тригонометричній формі:

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

і скористатися формулою Ойлера: $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$

$$z = re^{i\varphi}$$

Отримана рівність і є **показниковою формою комплексного числа.**

1.5 Розклад многочлена на множники

Означення. Функція вигляду $f(x) = A_0x^n + A_1x^{n-1} + ... + A_n$ називається **цілою раціональною** функцією від x.

Теорема Безу. [2]

При діленні многочлена $f(x)$ на різницю $x - a$ виходить остача, рівна $f(a)$.

Доведення. При діленні многочлена $f(x)$ на різницю $x - a$ часткою буде многочлен $f_1(x)$ степеня на одиницю меншого, ніж $f(x)$, а остачею – стале число R.

$$f(x) = f_1(x)(x - a) + R$$

Спрямовуючи x до a, одержуємо $f(a) = R$.

[2] Етьєн Безу (Étienne Bézout) (1730–1783) – французький математик

<u>Наслідок.</u> *Якщо, a – корінь многочлена, тобто $f(a) = 0$, то многочлен $f(x)$ ділиться на $(x - a)$ без остачі.*

<u>Означення.</u> Якщо рівняння має вигляд $P(x) = 0$, де $P(x)$ – многочлен степеня n, то це рівняння називається **алгебраїчним** рівнянням степеня n.

<u>Теорема.</u> (Основна теорема алгебри) *Усяка ціла раціональна функція $f(x)$ має принаймні один корінь, дійсний або комплексний.*

<u>Теорема.</u> *Усякий многочлен n-го степеня розкладається на n лінійних множників вигляду $x - a$ і множник, що дорівнює коефіцієнту при x^n.*

<u>Теорема.</u> *Якщо два многочлени тотожно рівні один одному, то коефіцієнти одного многочлена дорівнюють відповідним коефіцієнтам іншого.*

Якщо серед коренів многочлена зустрічаються кратні корені, то розклад на множники має вигляд:

$$f(x) = A_0(x - a_1)^{k_1}(x - a_2)^{k_2}...(x - a_m)^{k_m}.$$

$$k_1 + k_2 + ... + k_m = n$$

k_i – кратність відповідного кореня.

Звідси випливає, що *будь-який многочлен n-го степеня має рівно n коренів (дійсних або комплексних).*

Ця властивість має велике значення для розв'язання алгебраїчних рівнянь, диференціальних рівнянь і відіграє важливу роль в аналізі функцій.

Розгляньмо кілька прикладів дій з комплексними числами.

<u>Приклад.</u> Дано два комплексних числа $z_1 = 1 - \dfrac{7}{2}i$; $z_2 = -7 - 2i$. Потрібно а) знайти значення виразу $\left(\dfrac{1 - \frac{7}{2}i}{-7 - 2i}\right)^{-4}$ в алгебраїчній формі, б) для числа $z = 2 - 2\sqrt{3}i$ знайти тригонометричну форму, знайти z^{20}, знайти корінь рівняння $w^3 - z = 0$.

1. Очевидно, справедливе наступне перетворення:

$$\left(\frac{1 - \frac{7}{2}i}{-7 - 2i}\right)^{-4} = \left(\frac{2 - 7i}{-14 - 4i}\right)^{-4} = \left(\frac{-14 - 4i}{2 - 7i}\right)^{4} = 16\left(\frac{-7 - 2i}{2 - 7i}\right)^{4}$$

   Далі, виконуємо ділення двох комплексних чисел:

$$\frac{-7 - 2i}{2 - 7i} = \frac{(-7 - 2i)(2 + 7i)}{(2 - 7i)(2 + 7i)} = \frac{-14 - 49i - 4i + 14}{4 + 49} = \frac{-53i}{53} = -i.$$

   Одержуємо значення заданого виразу: $16(-i)^4 = 16i^4 = 16$.

2. Число $z = 2 - 2\sqrt{3}i$ представимо у вигляді $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, де

$$r = |z| = \sqrt{4 + 12} = 4; \qquad \varphi = \operatorname{arctg}\frac{b}{a} = \operatorname{arctg}\left(-\sqrt{3}\right) = -60^\circ = -\frac{\pi}{3}$$

   Тоді $z = 4(\cos(-\pi/3) + i\sin(-\pi/3))$.

   Для знаходження z^{20} скористаємося формулою Муавра.

$$z^{20} = 4^{20}(\cos 1200^\circ - i\sin 1200^\circ) = 4^{20}(\cos(3\cdot 2\pi + 120^\circ) - i\sin(3\cdot 2\pi + 120^\circ)) =$$
$$= 4^{20}(\cos 120^\circ - i\sin 120^\circ) = -4^{20}\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right).$$

   Якщо $w^3 - z = 0$, то $w = \sqrt[3]{z}$

$$\sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{3} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{3}\right) = \sqrt[3]{4}\left(\cos\frac{-\pi/3 + 2\pi k}{3} + i\sin\frac{-\pi/3 + 2\pi k}{3}\right); \quad k = 0, 1, 2.$$

2 Елементи лінійної алгебри

2.1 Матриця. Основні означення

Означення. Матрицею розміру $m \times n$, де m – кількість рядків, n – кількість стовпців, називається таблиця чисел, розташованих у певному порядку. Ці числа називаються елементами матриці. Місце кожного елемента однозначно визначається номером рядка і стовпця, на перетині яких він перебуває. Елементи матриці позначаються a_{ij}, де i – номер рядка, а j – номер стовпця.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}$$

2.2 Основні дії над матрицями

Матриця може складатися як з одного рядка, так і з одного стовпця. Загалом кажучи, матриця може складатися навіть із одного елемента.

Означення. Якщо кількість стовпців матриці дорівнює кількості рядків ($m = n$), то матриця називається **квадратною**.

Означення. Матриця вигляду:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix} = I$$

називається **одиничною матрицею**.

Означення. Якщо $a_{mn} = a_{nm}$, то матриця називається **симетричною**.

Приклад. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 6 \\ 5 & 6 & 4 \end{pmatrix}$ – симетрична матриця

Означення. Квадратна матриця виду $\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & ... & 0 \\ 0 & a_{22} & ... & 0 \\ ... & ... & ... & 0 \\ 0 & 0 & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$ називається **діагональною** матрицею.

Означення. Матриця виду $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & ... & a_{2n} \\ 0 & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & a_{mn} \end{pmatrix}$ називається **верхньою трикутною** матрицею.

Означення. Матриця виду $\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & ... & 0 \\ a_{21} & a_{22} & ... & 0 \\ ... & ... & ... & 0 \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}$ називається **нижньою трикутною** матрицею.

Означення. Якщо ж у матриці форма області ненульових елементів подібна до трапеції, така матриця називається (відповідно до форми області) верхньою або нижньою **трапецеподібною**.

Додавання і віднімання матриць зводиться до відповідних операцій над їхніми елементами. Найголовнішою властивістю цих операцій є те, що вони визначені тільки для матриць однакового розміру. Таким чином, можна визначити операції додавання і віднімання матриць:

Означення. Сумою (різницею) матриць є матриця, елементами якої є відповідно сума (різниця) елементів вихідних матриць.

$$c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}$$
$$C = A + B = B + A.$$

Операція **множення (ділення)** матриці будь-якого розміру на довільне число зводиться до множення (ділення) кожного елемента матриці на це число.

$$\alpha A = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & ... & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & ... & \alpha a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & ... & \alpha a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\alpha(A \pm B) = \alpha A \pm \alpha B$$
$$A(\alpha \pm \beta) = \alpha A \pm \beta A$$

Приклад. Дано матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 5 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, знайти $2A + B$.

$2A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 2 & 8 \\ 6 & 4 & 6 \end{pmatrix}$, $2A + B = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 10 \\ 9 & 9 & 16 \\ 7 & 6 & 10 \end{pmatrix}$.

2.3 Операція множення матриць

Означення: Добутком матриць називається матриця, елементи якої можуть бути обчислені за наступними формулами:

$$A \cdot B = C;$$

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj}.$$

З наведеного визначення видно, що операція множення матриць визначена тільки для матриць, **кількість стовпців першої з яких дорівнює кількості рядків другої.**

2.3.1 Властивості операції множення матриць

1) Множення матриць не комутативне, тобто $AB \neq BA$, навіть якщо визначені обидва добутки. Однак, якщо для яких-небудь матриць співвідношення $AB = BA$ виконується, то такі матриці називаються комутуючими.

Найхарактернішим прикладом може слугувати одинична матриця, що є комутуючою з будь-якою іншою матрицею того ж розміру.

Комутуючими можуть бути тільки квадратні матриці того самого порядку.

$A \cdot I = I \cdot A = A$.

Очевидно, що для будь-яких матриць виконується така властивість:

$A \cdot O = O$; $O \cdot A = O$, де O – **нульова** матриця.

2) Операція перемножування матриць **асоціативна,** тобто якщо визначені добутки AB і $(AB)C$, то визначені BC і $A(BC)$, і виконується рівність:

$(AB)C = A(BC)$.

3) Операція множення матриць **дистрибутивна** стосовно додавання, тобто якщо мають сенс вирази $A(B + C)$ і $(A + B)C$, то відповідно:

$A(B + C) = AB + AC$,

$(A + B)C = AC + BC$.

4) Якщо добуток AB визначений, то для будь-якого числа α виконується співвідношення:

$\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$.

5) Якщо визначено добуток AB, то визначено і добуток $B^T A^T$, і виконується рівність:

$(AB)^T = B^T A^T$, де індексом T позначається **транспонована** матриця.

6) Зазначимо також, що для будь-яких квадратних матриць $\det(AB) = \det A \det B$.

Поняття det (визначник, детермінант) буде розглянуто нижче.

Означення. Матрицю B називають **транспонованою** матрицею A, а перехід від A до B **транспонуванням**, якщо елементи кожного рядка матриці A записати у тім же порядку в стовпці матриці B.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}; B = A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & ... & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & ... & a_{m2} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{1n} & a_{2n} & ... & a_{mn} \end{pmatrix};$$

інакше кажучи, $b_{ji} = a_{ij}$.

Як наслідок з попередньої властивості (5) можна записати, що:

$(ABC)^T = C^T B^T A^T$,

за умови, що визначено добуток матриць ABC.

Приклад. Дано матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & -4 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ і число $\alpha = 2$. Знайти $A^T B + \alpha C$.

$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & -4 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; $A^T B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & -4 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 1 \cdot 2 \\ 0 \cdot 1 + 4 \cdot 3 - 4 \cdot 2 \\ 3 \cdot 1 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix}$;

$\alpha C = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$; $A^T B + \alpha C = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 12 \end{pmatrix}$.

Приклад. Знайти добуток матриць $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ і $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

$AB = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 2 & 1\cdot 4 & 1\cdot 1 \\ 4\cdot 2 & 4\cdot 4 & 4\cdot 1 \\ 3\cdot 2 & 3\cdot 4 & 3\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 8 & 16 & 4 \\ 6 & 12 & 3 \end{pmatrix}$.

$BA = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = 2\cdot 1 + 4\cdot +1\cdot 3 = 2 + 16 + 3 = 21.$

Приклад. Знайти добуток матриць $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$

$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+10 & 4+12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 16 \end{pmatrix}$.

2.4 Визначники (детермінанти)

Означення. Визначником (детермінантом) квадратної матриці $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$ називається число, яке може бути обчислене за елементами матриці за формулою:

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} a_{1k} \det M_{1k},$$

де $\det M_{1k}$ – визначник матриці, отриманої з вихідної викреслюванням першого рядка і k-го стовбчика. Варто звернути увагу на те, що визначники мають тільки квадратні матриці, тобто матриці, у яких кількість рядків дорівнює кількості стовпців.

Попередня формула дозволяє обчислити визначник матриці за першим рядком, також справедлива формула обчислення визначника за першим стовпцем:

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} a_{k1} \det M_{k1}$$

Загалом кажучи, визначник може обчислюватися за будь-яким рядком або стовпцем матриці, тобто справедлива формула:

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+i} a_{ik} \det M_{ik}, i = 1, 2, \dots, n...$$

Очевидно, що різні матриці можуть мати однакові визначники.

Визначник одиничної матриці дорівнює 1.

Для зазначеної матриці A матриця M_{1k} називається **додатковим мінором** елемента матриці a_{1k}. Таким чином, можна помітити, що кожний елемент матриці має свій додатковий мінор. Додаткові мінори існують тільки у квадратних матрицях.

Означення. Додатковий мінор довільного елемента квадратної матриці a_{ij} дорівнює матриці, отриманій з вихідної викреслюванням i-го рядка та j-го стовбчика.

Зауваження:

1. Класичне означення визначника є таким:

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{\mathrm{inv}\sigma} \left(a_{1\sigma_1} \cdot a_{2\sigma_2} \cdot \ldots \cdot a_{n\sigma_n} \right),$$

де σ_i є елементами перестановки σ чисел від 1 до n; $\mathrm{inv}\sigma$ – інверсія перестановки σ, яка дорівнює кількості інверсних пар у перестановці. Інверсними називаються такі пари елементів перестановки, для яких $\sigma_k > \sigma_l$ при $k < l$. Наведене тут означення використано лише для спрощення викладу.

2. У переважній частині класичної літератури мінором називається визначник матриці, яку ми тут назвали мінором, знову ж таки для спрощення викладу.

2.4.1 Властивості визначника

Властивість 1. Важливою властивістю визначників є наступне співвідношення:

$$\det A = \det A^T;$$

Властивість 2. $\det(AB) = \det A \cdot \det B$.

Властивість 3. Якщо у квадратній матриці поміняти місцями які-небудь два рядки (або стовпці), то визначник матриці змінить знак, не змінившись за абсолютною величиною.

Властивість 4. При множенні стовпця (або рядка) матриці на число її визначник множиться на це число.

Означення: Стовпці (рядки) матриці називаються **лінійно залежними**, якщо існує їхня лінійна комбінація, рівна нулю, що має нетривіальні (не рівні нулю) розв'язки.

Властивість 5. Якщо в матриці A рядки або стовпці лінійно залежні, то її визначник дорівнює нулю.

Властивість 6. Якщо матриця містить нульовий стовпець або нульовий рядок, то її визначник дорівнює нулю. (Дане твердження очевидне, оскільки рахувати визначник можна саме за нульовим рядком або стовпцем.)

Властивість 7. Визначник матриці не зміниться, якщо до елементів однієї з його рядків (стовпця) додати (відняти) елементи іншого рядка (стовпця), помножені на якесь число, не рівне нулю.

Властивість 8. Якщо для елементів якогось рядка або стовбчика матриці виконується співвідношення: $d = d_1 \pm d_2$, $e = e_1 \pm e_2$, $f_1 = \pm f_2$, то виконується:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ k & l & m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d_1 & e_1 & f_1 \\ k & l & m \end{vmatrix} \pm \begin{vmatrix} a & b & c \\ d_2 & e_2 & f_2 \\ k & l & m \end{vmatrix}$$

Приклад. Обчислити визначник матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = (-2 \cdot 1 - 1 \cdot 3) - 2(0 \cdot 1 - 3 \cdot 3) + (0 \cdot 1 + 3 \cdot 2) =$$

$$= -5 + 18 + 6 = 19.$$

2.4.2 Обчислення визначників другого і третього порядків вручну

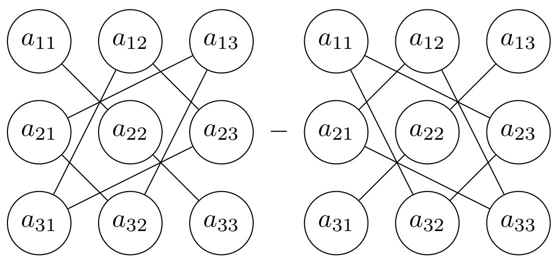
Для обчислення визначника другого порядку використовують просте правило: визначник дорівнює добутку елементів головної діагоналі матриці мінус добуток елементів її бічної діагоналі:

$$\det A = \begin{vmatrix} + & \\ a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ - & \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Для обчислення визначників третього порядку вручну на практиці часто застосовують правило Саррюса[3].

$$\det A = \begin{vmatrix} + & + & + & & \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \\ - & - & - & & \end{vmatrix}$$

Іншим способом обчислення визначника третього порядку вручну є «правило трикутника»:

$\det A =$ 

[3]П'єр Фредерік Саррюс (Pierre-Frédéric Sarrus) (1798–1861) – французький математик.

Приклад:. Дано матриці $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Знайти $\det AB$.

1-й спосіб: $\det A = 4-6=-2$; $\det B = 15-2=13$; $\det(AB)=\det A\cdot\det B=-26$.

2-й спосіб: $AB=\begin{pmatrix} 1\cdot5+2\cdot1 & 1\cdot2+2\cdot3 \\ 3\cdot5+4\cdot1 & 3\cdot2+4\cdot3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 19 & 18 \end{pmatrix}$, $\det(AB)=7\cdot18-8\cdot19=126-152=-26$.

Приклад. Обчислити визначник $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$.

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = -1\begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} + 3\cdot\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} - 4\cdot\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = -1(6-4)-1(9-1)+2(12-2)=-2-8+20=10.$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 2(0-2)-1(0-6)=2.$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 2(-4)-3(-6)=-8+18=10.$$

Значення визначника: $-10+6-40=-44$.

2.5 Елементарні перетворення матриці

Означення. Елементарними перетвореннями матриці назвемо наступні перетворення:
1) множення рядка на число, відмінне від нуля;
2) додавання до елементів одного рядка елементів іншого рядка;
3) перестановка рядків;
4) викреслювання (видалення) одного з однакових рядків (стовпців);
5) транспонування.

Ті ж операції, застосовані до стовпців, також називаються елементарними перетвореннями.

За допомогою елементарних перетворень можна до якого-небудь рядка або стовпця додати лінійну комбінацію інших рядків (стовпців).

2.6 Мінори

Вище було використане поняття додаткового мінора матриці. Дамо означення мінора матриці.

Означення. Якщо у матриці A вилучити кілька довільних рядків і стільки ж довільних стовпців, то визначник матриці, складеної з елементів, розташованих на перетині цих рядків і стовпців називається **мінором** матриці A. Якщо перетинаються s рядків і стовпців, то отриманий мінор називається мінором порядку s.

Зазначимо, що вищесказане застосовне не тільки до квадратних матриць, але і до прямокутних.

Якщо викреслити з вихідної квадратної матриці A виділені рядки і стовпці, то отримана матриця буде додатковим мінором.

2.7 Алгебраїчні доповнення

Означення. Алгебраїчним доповненням мінора матриці називається визначник його додаткового мінора, помножений на (-1) у степені, рівному сумі номера рядка і номера стовпця мінора матриці.

В окремому випадку, алгебраїчним доповненням елемента матриці називається визначник його додаткового мінора, узятий зі своїм знаком, якщо сума номерів стовпця і рядка, на яких стоїть елемент, є число парне, і з протилежним знаком, якщо непарне.

2.8 Обернена матриця

Визначимо операцію ділення матриць як операцію, обернену множенню.

Означення. Якщо існують квадратні матриці X і A одного порядку, що задовольняють умові:

$$XA = AX = I,$$

де I – одинична матриця того ж самого порядку, що і матриця A, то матриця X називається **оберненою** до матриці A і позначається A^{-1}.

Кожна квадратна матриця з визначником, не рівним нулю має обернену матрицю і при тому тільки одну.

Розглянемо загальний підхід до знаходження оберненої матриці. Виходячи з визначення добутку матриць, можна записати:

$$AX = I \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot x_{kj} = e_{ij}, i = (1, n), j = (1, n),$$

$$e_{ij} = 0, i \neq j,$$

$$e_{ij} = 1, i = j.$$

Таким чином, одержуємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} a_{11}x_{1j} + a_{12}x_{2j} + ... + a_{1n}x_{nj} = 0 \\ .... \\ a_{j1}x_{1j} + a_{j2}x_{2j} + ... + a_{jn}x_{nj} = 1 \\ .... \\ a_{n1}x_{1j} + a_{n2}x_{2j} + ... + a_{nn}x_{nj} = 0 \end{cases},$$

Розв'язавши цю систему, знаходимо елементи матриці X.

Приклад. Дано матрицю $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, знайти A^{-1}.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{cases} a_{11}x_{11} + a_{12}x_{21} = e_{11} = 1 \\ a_{11}x_{12} + a_{12}x_{22} = e_{12} = 0 \\ a_{21}x_{11} + a_{22}x_{21} = e_{21} = 0 \\ a_{21}x_{12} + a_{22}x_{22} = e_{22} = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_{11} + 2x_{21} = 1 \\ x_{12} + 2x_{22} = 0 \\ 3x_{11} + 4x_{21} = 0 \\ 3x_{12} + 4x_{22} = 1 \end{cases} \begin{cases} x_{11} = -2 \\ x_{12} = 1 \\ x_{21} = 3/2 \\ x_{22} = -1/2 \end{cases}$$

Таким чином, $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$.

Однак, такий спосіб незручний при знаходженні обернених матриць більших порядків, тому звичайно застосовують наступну формулу:

$$x_{ij} = \frac{A_{ji}}{\det A},$$

де A_{ji} – алгебраїчне доповнення елемента a_{ji} матриці А. Цей метод називається **методом спряженої матриці**, а матриця з алгебраїчних доповнень — **спряженою матрицею**.

Приклад. Дано матрицю $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, знайти A^{-1}.

$$\det A = 4 - 6 = -2.$$

$M_{11} = 4$; $M_{12} = 3$; $M_{21} = 2$; $M_{22} = 1$

$x_{11} = -2$; $x_{12} = 1$; $x_{21} = 3/2$; $x_{22} = -1/2$

Таким чином, $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$.

2.9 Властивості обернених матриць

Вкажемо наступні властивості обернених матриць:

1) $(A^{-1})^{-1} = A$;

2) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

3) $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

$A^2 = AA = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 14 \\ 7 & 18 \end{pmatrix}$; $A^3 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 11 & 14 \\ 7 & 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 47 & 78 \\ 39 & 86 \end{pmatrix}$.

Зазначимо, що матриці $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ і $\begin{pmatrix} 11 & 14 \\ 7 & 18 \end{pmatrix}$ є комутуючими.

2.10 Базисний мінор матриці. Ранг матриці

Як було сказано вище, мінором матриці порядку s називається матриця, утворена з елементів вихідної матриці, що перебувають на перетині яких-небудь обраних s рядків і s стовпців.

Означення. У матриці порядку $m \times n$ мінор порядку r називається **базисним**, якщо його визначник не дорівнює нулю, а всі мінори порядку $r+1$ і вище дорівнюють нулю, або не існують зовсім, тобто r збігається з меншим із чисел m або n.

Стовпці і рядки матриці, на яких стоїть базисний мінор, також називаються **базисними**.

У матриці може бути кілька різних базисних мінорів, що мають однаковий порядок.

Означення. Порядок базисного мінору матриці називається **рангом** матриці і позначається $\mathrm{rank}A$.

Дуже важливою властивістю елементарних перетворень матриць є те, що вони не змінюють ранг матриці.

Означення. Матриці, отримані в результаті елементарного перетворення, називаються **еквівалентними.**

Слід відзначити, що **рівні** матриці і **еквівалентні** матриці – поняття зовсім різні.

Теорема. *Найбільша кількість лінійно незалежних стовпців у матриці дорівнює кількості лінійно незалежних рядків і дорівнює рангу матриці.*

Оскільки елементарні перетворення не змінюють ранг матриці, то можна істотно спростити процес знаходження рангу матриці.

Приклад. Визначити ранг матриці.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 11 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 11 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 11 \end{pmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 11 \end{vmatrix} = 11 - 10 = 1 \neq 0 \Rightarrow \mathrm{rank}A = 2.$$

Приклад: Визначити ранг матриці.

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & 8 & 12 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 2 = 1 \neq 0 \Rightarrow \mathrm{rank}A = 2.$$

Приклад. Визначити ранг матриці.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 6 & 8 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 6 & 8 \end{pmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 6 = -2 \neq 0. \Rightarrow \mathrm{rank}A = 2.$$

Якщо за допомогою елементарних перетворень не вдається знайти матрицю, еквівалентну вихідній, але меншого розміру, то знаходження рангу матриці варто починати з обчислення мінорів найвищого можливого порядку. У вищенаведеному прикладі – це мінори порядку 3. Якщо визначник хоча б один з них не дорівнює нулю, то ранг матриці дорівнює порядку цього мінору.

2.10.1 Теорема про базисний мінор

Теорема. *У довільній матриці A кожний стовпець (рядок) є лінійною комбінацією стовпців (рядків), у яких розташований базисний мінор.*

Таким чином, ранг довільної матриці A дорівнює максимальному числу лінійно незалежних рядків (стовпців) у матриці.

Якщо A – квадратна матриця і $\det A = 0$, то принаймні один зі стовпців – лінійна комбінація інших стовпців. Те ж саме справедливе і для рядків. Дане твердження є наслідком властивості лінійної залежності рядків або стовпчиків при визначнику рівному нулю.

2.11 Матричний метод розв'язання систем лінійних рівнянь

Матричний метод застосуємо до розв'язання систем рівнянь, де кількість рівнянь дорівнює кількості невідомих.

Метод зручний для розв'язування систем невисокого порядку.

Метод заснований на застосуванні властивостей множення матриць.

Нехай дана система рівнянь:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ .... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Складемо матриці: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_n \end{pmatrix}$; $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}$.

Систему рівнянь можна записати так:

$$A \cdot x = B.$$

Зробимо наступне перетворення: $A^{-1} \cdot A \cdot x = A^{-1} \cdot B$, оскільки $A^{-1} \cdot A = I$, то $I \cdot x = A^{-1} \cdot B$,

$$x = A^{-1} \cdot B.$$

Для застосування даного методу необхідно знаходити обернену матрицю, що може бути пов'язане з обчислювальними труднощами при розв'язанні систем високого порядку.

Приклад. Розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} 5x - y - z = 0 \\ x + 2y + 3z = 14 \\ 4x + 3y + 2z = 16 \end{cases}$$

$$x = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 14 \\ 16 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо обернену матрицю A^{-1}.

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 5(4-9) + 1(2-12) - 1(3-8) = -25 - 10 + 5 = -30.$$

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -5;\ A_{21} = -\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -1;\ A_{31} = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1;$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 10;\ A_{22} = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 14;\ A_{32} = -\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -16;$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -5;\ A_{23} = -\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -19;\ A_{33} = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 11;$$

$$\begin{matrix} a_{11}^{-1} = \frac{5}{30}; & a_{12}^{-1} = \frac{1}{30}; & a_{13}^{-1} = \frac{1}{30}; \\ a_{21}^{-1} = -\frac{10}{30}; & a_{22}^{-1} = -\frac{14}{30}; & a_{23}^{-1} = \frac{16}{30}; \\ a_{31}^{-1} = \frac{5}{30}; & a_{32}^{-1} = \frac{19}{30}; & a_{33}^{-1} = -\frac{11}{30}; \end{matrix} \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{30} & \frac{1}{30} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{7}{15} & \frac{8}{15} \\ \frac{1}{6} & \frac{19}{30} & -\frac{11}{30} \end{pmatrix};$$

Зробимо перевірку:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{5}{30} & \frac{1}{30} & \frac{1}{30} \\ -\frac{10}{30} & -\frac{14}{30} & \frac{16}{30} \\ \frac{5}{30} & \frac{19}{30} & -\frac{11}{30} \end{pmatrix} = \frac{1}{30} \begin{pmatrix} 25+10-5 & 5+14-19 & 5-16+11 \\ 5-20+15 & 1-28+57 & 1+32-33 \\ 20-30+10 & 4-42+38 & 4+48-22 \end{pmatrix} = I.$$

Знаходимо матрицю x.

$$x = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1}B = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{30} & \frac{1}{30} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{7}{15} & \frac{8}{15} \\ \frac{1}{6} & \frac{19}{30} & -\frac{11}{30} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 14 \\ 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6}0 + \frac{14}{30} + \frac{16}{30} \\ -\frac{1}{3}0 - \frac{98}{15} + \frac{128}{15} \\ \frac{1}{6}0 + \frac{266}{30} - \frac{176}{30} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Отже розв'язок системи: $x = 1$; $y = 2$; $z = 3$.

Незважаючи на обмеження можливості застосування даного методу і складність обчислень при більших значеннях коефіцієнтів, а також систем високого порядку, метод може бути легко реалізований на ЕОМ.

2.12 Метод Крамера

Даний метод також застосовується тільки у випадку систем лінійних рівнянь, де кількість змінних збігається із кількістю рівнянь. Крім того, необхідно ввести обмеження на коефіцієнти системи. Необхідно, щоб всі рівняння були лінійно незалежні, тобто жодне рівняння не було б лінійною комбінацією інших.

Для цього необхідно, щоб визначник матриці системи не дорівнював 0.

$$\det A \neq 0;$$

Дійсно, якщо якесь рівняння системи є лінійною комбінацією інших, то якщо до елементів якогось рядка додати елементи іншої, помножені на якесь число, за допомогою лінійних перетворень можна одержати нульовий рядок. Визначник у цьому випадку буде дорівнює нулю.

Теорема. (Правило Крамера)[4]:

[4] Габріель Крамер (Gabriel Cramer) (1704-1752) швейцарський математик

Теорема. *Система з n рівнянь із n невідомими*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ .... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

у випадку, якщо визначник матриці системи не дорівнює нулю, має єдиний розв'язок і цей розв'язок знаходиться за формулами $x_i = \Delta_i/\Delta$, *де* $\Delta = \det A$, *а* Δ_i *– визначник матриці, одержаної з матриці системи заміною стовпця і стовпцем вільних членів* b_i.

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} a_{11}...a_{1i-1} & b_1 & a_{1i+1}...a_{1n} \\ a_{21}...a_{2i-1} & b_2 & a_{2i+1}...a_{2n} \\ ... & ... & ... \\ a_{n1}...a_{ni-1} & b_n & a_{ni+1}...a_{nn} \end{vmatrix}$$

Приклад.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$; $\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$; $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}$; $\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$;

$x_1 = \Delta_1/\det A$; $x_2 = \Delta_2/\det A$; $x_3 = \Delta_3/\det A$;

Приклад. Знайти розв'язок системи рівнянь:

$$\begin{cases} 5x - y - z = 0 \\ x + 2y + 3z = 14 \\ 4x + 3y + 2z = 16 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 5(4-9) + (2-12) - (3-8) = -25 - 10 + 5 = -30;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 14 & 2 & 3 \\ 16 & 3 & 2 \end{vmatrix} = (28-48) - (42-32) = -20 - 10 = -30.$$

$$x_1 = \Delta_1/\Delta = 1;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 1 & 14 & 3 \\ 4 & 16 & 2 \end{vmatrix} = 5(28-48) - (16-56) = -100 + 40 = -60.$$

$$x_2 = \Delta_2/\Delta = 2;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 14 \\ 4 & 3 & 16 \end{vmatrix} = 5(32-42) + (16-56) = -50 - 40 = -90.$$

$$x_3 = \Delta_3/\Delta = 3.$$

Як видно, результат збігається з результатом, отриманим вище матричним методом.
Якщо система однорідна, тобто $b_i = 0$, то при $\Delta \neq 0$ система має єдиний нульовий розв'язок $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$...
При $\Delta = 0$ система має нескінченну множину розв'язків.
Для самостійного розв'язання:

$$\begin{cases} x + 3y - 6z = 12 \\ 3x + 2y + 5z = -10 \\ 2x + 5y - 3z = 6 \end{cases};$$

Відповідь: $x = 0$; $y = 0$; $z = -2$.

2.13 Розв'язання довільних систем лінійних рівнянь

Як було сказано вище, матричний метод і метод Крамера застосовні тільки до тих систем лінійних рівнянь, у яких кількість невідомих дорівнює кількості рівнянь. Далі розглянемо довільні системи лінійних рівнянь.

<u>Означення.</u> Система m рівнянь із n невідомими в загальному виді записується у такий спосіб:

$$\left\{\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right. , \tag{1}$$

де a_{ij} – коефіцієнти, а b_i – сталі. Розв'язками системи є n чисел, які при підстановці до системи перетворюють кожне її рівняння у тотожність.

<u>Означення.</u> Якщо система має хоча б один розв'язок, то вона називається **сумісною**. Якщо система не має жодного розв'язку, то вона називається **несумісною**.

<u>Означення.</u> Система називається **визначеною**, якщо вона має тільки один розв'язок і **невизначеною**, якщо більше одного.

<u>Означення.</u> Для системи лінійних рівнянь матриця

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}$ називається матрицею системи, а матриця

$A^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} & b_2 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$ називається розширеною матрицею системи

<u>Означення.</u> Якщо $b_1 = b_2 = \cdots = b_m = 0$, то система називається **однорідною**. Однорідна система завжди сумісна, оскільки завжди має нульовий розв'язок.

2.13.1 Елементарні перетворення систем

До елементарних перетворень належать:

1) Додавання до обох частин одного рівняння відповідних частин іншого, помножених на однакове число, не рівне нулю.

2) Переставлення рівнянь місцями.

3) Видалення із системи рівнянь, що є тотожностями для всіх x.

2.13.2 Теорема Кронекера-Капеллі (умова сумісності системи)

<u>Теорема Кронекера-Капеллі:</u>[5] *Система сумісна (має хоча б один розв'язок) тоді і тільки тоді, коли ранг матриці системи дорівнює рангу розширеної матриці.*

$$\mathrm{rank}A = \mathrm{rank}A^*.$$

Причому система має єдиний розв'язок, якщо ранг дорівнює кількості невідомих, і нескінченно багато розв'язків, якщо ранг менше кількості невідомих.

Очевидно, що система (1) може бути записана у вигляді:

$$x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ ... \\ a_{m1} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ ... \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \cdots + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ ... \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_m \end{pmatrix}$$

<u>Доведення.</u>

1) Якщо розв'язок існує, то стовпець вільних членів є лінійною комбінацією стовпців матриці A, а значить додавання цього стовпця у матрицю, тобто перехід $A \to A^*$ не змінює рангу.

2) Якщо $\mathrm{rank}A = \mathrm{rank}A^*$, то це означає, що вони мають той самий базисний мінор. Стовпець вільних членів – лінійна комбінація стовпців базисного мінора, тоді виконується рівність, наведена вище.

<u>Приклад.</u> Перевірити сумісність лінійних рівнянь:

$$\left\{\begin{array}{l} x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 + 9x_5 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 + 5x_5 = 2 \\ 2x_1 + 11x_2 + 12x_3 + 25x_4 + 22x_5 = 4 \end{array}\right.$$

[5] Леопольд Кронекер (Leopold Kronecker) (1823-1891) німецький математик

$$A=\begin{pmatrix}1&3&5&7&9\\1&-2&3&-4&5\\2&11&12&25&22\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&3&5&7&9\\0&-5&-2&-11&-4\\0&5&2&11&4\end{pmatrix}$$
$$\sim\begin{pmatrix}1&3&5&7&9\\0&-5&-2&-11&-4\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

$$\mathrm{rank}A=2.$$
$$A^*=\begin{pmatrix}1&3&5&7&9&1\\1&-2&3&-4&5&2\\2&11&12&25&22&4\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&3&5&7&9&1\\0&-5&-2&-11&-4&1\\0&5&2&11&4&2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&3&5&7&9&1\\0&-5&-2&-11&-4&1\\0&0&0&0&0&3\end{pmatrix};\mathrm{rank}A^*=3.$$

Система несумісна.

Приклад. Перевірити сумісність лінійних рівнянь.

$$\begin{cases}x_1-4x_2=-1\\3x_1+2x_2=4\\7x_1+10x_2=12\\5x_1+6x_2=8\\3x_1-16x_2=-5\end{cases}\quad A=\begin{pmatrix}1&-4\\3&2\\7&10\\5&6\\3&-16\end{pmatrix};\begin{vmatrix}1&-4\\3&2\end{vmatrix}=2+12=14\neq0;\ \mathrm{rank}A=2;$$

$$A^*=\begin{pmatrix}1&-4&-1\\3&2&4\\7&10&12\\5&6&8\\3&-16&-5\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&-4&-1\\0&14&7\\0&38&19\\0&26&13\\0&-4&-2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&-4&-1\\0&2&1\\0&2&1\\0&2&1\\0&2&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&-4&-1\\0&2&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix}1&-4\\0&2\end{vmatrix}=2\neq0.\quad \mathrm{rank}A^*=2.$$

Система сумісна. Розв'язок: $x_1=1$; $x_2=1/2$.

2.14 Метод Гауса

На відміну від матричного методу і метода Крамера, метод Гауса[6] може бути застосований до систем лінійних рівнянь із довільною кількістю рівнянь і невідомих. Суть методу полягає в послідовному виключенні невідомих.

Розглянемо систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+...+a_{1n}x_n=b_1\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+...+a_{2n}x_n=b_2\\\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+...+a_{mn}x_n=b_m\end{cases}$$

Розділимо обидві частини 1-го рівняння на $a_{11}\neq0$, потім:
1) помножимо на a_{21} і віднімемо із другого рівняння
2) помножимо на a_{31} і віднімемо із третього рівняння
тощо.
Одержимо:

$$\begin{cases}x_1+d_{12}x_2+...+d_{1n}x_n=d_1\\d_{22}x_2+d_{23}x_3+...+d_{2n}x_n=d_2\\\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\d_{m2}x_2+d_{m3}+...+d_{mn}x_n=d_m\end{cases},\ \text{де } d_{1j}=a_{1j}/a_{11},\quad j=2,3,\ldots,n+1...$$

$d_{ij}=a_{ij}-a_{i1}d_{1j}$, $i=2,3,\ldots,n$; $j=2,3,\ldots,n+1...$

Далі повторюємо цю ж дії для другого рівняння системи, потім – для третього тощо. Це *прямий хід* методу Гауса.

Далі, останнє з рівнянь системи після завершення прямого ходу методу Гауса міститиме лише одну невідому. Визначивши її і підставивши отримане значення до усіх інших рівнянь системи, зможемо визначити з передостаннього рівняння ще одну невідому. Далі повторюємо дію для усіх інших рівнянь системи і отримуємо остаточний розв'язок. Це **зворотний хід** методу Гауса.

Приклад. Розв'язати систему лінійних рівнянь методом Гауса.

$$\begin{cases}2x_1+x_2-x_3=5\\x_1-2x_2+3x_3=-3\\7x_1+x_2-x_3=10\end{cases}$$

[6]Карл Фрідріх Гаус (Johann Carl Friedrich Gauß) (1777–1855) німецький математик

Складемо розширену матрицю системи.
$A^* = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 5 \\ 1 & -2 & 3 & -3 \\ 7 & 1 & -1 & 10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -3 \\ 2 & 1 & -1 & 5 \\ 7 & 1 & -1 & 10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -3 \\ 0 & 5 & -7 & 11 \\ 0 & 15 & -22 & 31 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -3 \\ 0 & 5 & -7 & 11 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$
Таким чином, вихідна система може бути представлена у вигляді:
$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -3 \\ 5x_2 - 7x_3 = 11 \\ -x_3 = -2 \end{cases}$
Далі, виконуємо зворотний хід:
$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -3 \\ 0 & 5 & -7 & 11 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -9 \\ 0 & 5 & 0 & 25 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$
Звідки одержуємо: $x_1 = 1$; $x_2 = 5$; $x_3 = 2$.
Приклад. Розв'язати систему методом Гауса.

$$\begin{cases} 5x - y - z = 0 \\ x + 2y + 3z = 14 \\ 4x + 3y + 2z = 16 \end{cases}$$

Складемо розширену матрицю системи.

$$\begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 14 \\ 4 & 3 & 2 & 16 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 4 & 3 & 2 & 16 \\ 5 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 0 & -5 & -10 & -40 \\ 0 & -11 & -16 & -70 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 0 & -5 & -10 & -40 \\ 0 & 0 & 6 & 18 \end{pmatrix}$$

Таким чином, вихідна система може бути представлена у вигляді:
$\begin{cases} x + 2y + 3z = 14 \\ -5y - 10z = 40 \\ 6z = 18 \end{cases}$, звідки одержуємо: $z = 3; y = 2; x = 1$.
Отримана відповідь збігається з відповіддю, отриманою для даної системи методом Крамера і матричним методом.
Для самостійного розв'язання:
$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 4 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 1 \\ x_1 - x_3 + 2x_4 = 6 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$
Відповідь: $\{1, 2, 3, 4\}$.

2.15 Фундаментальна система розв'язків

Розглянемо однорідну систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

З теореми Кронекера-Капеллі очевидно, що система однорідних лінійних рівнянь завжди сумісна. Вона має або єдиний розв'язок (нульовий або *тривіальний*), або безліч розв'язків.

Справді, для систем такого типу завжди $\mathrm{rank}A = \mathrm{rank}A^*$. Очевидно, що система однорідних рівнянь завжди має тривіальний розв'язок $(0, 0, \dots, 0)$. При цьому відповідно до загальної теорії:

1. якщо $\mathrm{rank}A = n$, то система має єдиний (тривіальний) розв'язок.

2. якщо $\mathrm{rank}A < n$, то система має безліч розв'язків.

Зрозуміло, що необхідною і достатньою умовою існування нетривіальних розв'язків системи n лінійних рівнянь з n невідомими є рівність нулю визначника Δ цієї системи.

Дійсно, якщо $\Delta = 0$, то $\mathrm{rank}A < n$, і існують нетривіальні розв'язки системи, то це означає, що $D = 0$, оскільки для $D \neq 0$ існує лише один тривіальний розв'язок.

Означення. Фундаментальною системою розв'язків системи однорідних лінійних рівнянь називається така лінійно незалежна сукупність її розв'язків, для якої усякий розв'язок даної системи є якоюсь лінійною комбінацією розв'язків з цієї сукупності.

Виникає питання про існування фундаментальної системи розв'язків для довільної системи однорідних лінійних рівнянь. Відповідь на нього дає така теорема.

Теорема: Для довільної системи однорідних лінійних рівнянь з рангом $\mathrm{rank}A < n$ існує фундаментальна система розв'язків. Кількість розв'язків цієї системи дорівнює $n - \mathrm{rank}A$.

Якщо базисний мінор матриці A може бути побудований на коефіцієнтах до певної групи невідомих, то ці невідомі називаються **базисними**. Решта невідомих називаються **вільними**.

Надаючи *вільним* невідомим сталих ненульових (наприклад одиничних) значень можна за допомогою методів розв'язування неоднорідних систем лінійних алгебраїчних рівнянь знайти усі *базисні* невідомі. Використовуючи замість вільних невідомих довільні сталі можемо знайти лінійно незалежну систему з $n - \text{rank}A$ розв'язків. Можна довести, що така система утворює *фундаментальну систему розв'язків*.

Приклад: Знайти фундаментальну систему розв'язків такої системи:

$$\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0 \\ 6x_1 - 3x_2 - x_3 - 4x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 0 \\ 4x_1 - 4x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

Складемо матрицю системи і виконаємо елементарні перетворення з метою зведення матриці до верхньої трапецеподібної:

$$\begin{pmatrix} 2 & -5 & 3 & 2 \\ 6 & -3 & -1 & -4 \\ 2 & 1 & -2 & -3 \\ 4 & -4 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -5 & 3 & 2 \\ 0 & 12 & -10 & -10 \\ 0 & 6 & -5 & -5 \\ 0 & 6 & -5 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -5 & 3 & 2 \\ 0 & 6 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Очевидно, $\text{rank}A = 2$, отже кількість базисних невідомих – 2 і кількість вільних невідомих $4 - \text{rank}A = 4 - 2 = 2$. Оскільки визначник мінора, отриманого викреслюванням двох останніх рядків і стовпчиків не дорівнює нулеві, його можна вважати базисним, а невідомі x_1 та x_2 базисними. Тоді невідомі x_3 та x_4 будуть вільними. Позначимо $x_3 = C_1$, $x_4 = C_2$. Маємо:

$$\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 + 3C_1 + 2C_2 = 0 \\ 6x_2 - 5C_1 - 5C_2 = 0 \end{cases}$$

З другого рівняння системи визначаємо x_2 і підставляємо отримане значення до першого рівняння з метою визначення x_1.

$$6x_2 = 5C_1 + 5C_2; \Rightarrow x_2 = \frac{5}{6}C_1 + \frac{5}{6}C_2;$$

$$2x_1 - 5 \cdot \frac{5}{6}C_1 - 5 \cdot \frac{5}{6}C_2 + 3C_1 + 2C_2 = 0; \Rightarrow 2x_1 - \frac{7}{6}C_1 - \frac{13}{6}C_2 = 0; \Rightarrow x_1 = \frac{7}{12}C_1 + \frac{13}{12}C_2.$$

Запишемо отриманий розв'язок у стовпчик:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{12}C_1 + \frac{13}{12}C_2 \\ \frac{5}{6}C_1 + \frac{5}{6}C_2 \\ C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} \frac{7}{12} \\ \frac{5}{6} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} \frac{13}{12} \\ \frac{5}{6} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Записані нами два стовпчики значень у дужках останньої рівності і є, згідно з вищевикладеними міркуваннями, фундаментальною системою розв'язків системи лінійних алгебраїчних рівнянь.

2.15.1 Представлення загального розв'язку неоднорідної системи лінійних алгебраїчних рівнянь

Нехай маємо систему лінійних неоднорідних алгебраїчних рівнянь загального вигляду:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Можна довести, що розв'язок такої системи (через лінійність) є сумою загального розв'язку однорідної системи лінійних алгебраїчних рівнянь (цей розв'язок представляється через фундаментальну систему розв'язків) і довільного частинного розв'язку неоднорідної системи лінійних алгебраїчних рівнянь.

Частинний розв'язок неоднорідної системи можна отримати підставлянням до неї замість вільних невідомих довільних ненульових значень.

2.16 Лінійний (векторний) простір

Як відомо, лінійні операції (додавання, віднімання, множення на число) визначені по-своєму для кожної множини (числа, многочлени, направлені відрізки, матриці). Самі операції різні, але їхні властивості однакові.

Ця спільність властивостей дозволяє узагальнити поняття лінійних операцій для будь-яких множин поза залежністю від того, що це за множини (числа, матриці тощо).

Для того, щоб дати визначення лінійного (векторного) простору розглянемо деяку множину L дійсних елементів, для яких визначені операції додавання і множення на число.

Ці операції мають такі властивості:

1. Комутативність $\overrightarrow{x}+\overrightarrow{y} = \overrightarrow{y}+\overrightarrow{x}$
2. Асоціативність $(\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}) + \overrightarrow{z} = \overrightarrow{x} + (\overrightarrow{y} + \overrightarrow{z})$
3. Існує такий нульовий вектор $\overrightarrow{O}$, що $\overrightarrow{O} + \overrightarrow{x} = \overrightarrow{x}$ для $\forall \overrightarrow{x} \in L$
4. Для $\forall \overrightarrow{x} \in L$ існує вектор $\overrightarrow{y} = -\overrightarrow{x}$, такий, що $\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y} = \overrightarrow{O}$
5. $1 \cdot \overrightarrow{x} = \overrightarrow{x}$
6. $\alpha(\beta\overrightarrow{x}) = (\alpha\beta)\overrightarrow{x}$
7. Розподільний закон $(\alpha + \beta)\overrightarrow{x} = \alpha\overrightarrow{x} + \beta\overrightarrow{x}$
8. $\alpha(\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}) = \alpha\overrightarrow{x} + \alpha\overrightarrow{y}$

Означення: Множина L називається **лінійним** (векторним) простором, а його елементи називаються **векторами**.

Важливо не плутати поняття вектора, наведене вище з поняттям вектора як направленого відрізка на площині або у просторі. Направлені відрізки є всього лише частинним випадком елементів лінійного (векторного) простору. Лінійний (векторний) простір – поняття ширше. Прикладами таких просторів можуть слугувати множина дійсних чисел, множина векторів на площині і у просторі, матриці тощо.

Якщо операції додавання і множення на число визначені для дійсних елементів, то лінійний (векторний) простір є дійсним простором, якщо для комплексних елементів – комплексним простором.

2.16.1 Властивості лінійних просторів

1. У кожному лінійному просторі існує тільки один нульовий елемент.
2. Для кожного елемента існує тільки один протилежний елемент.
3. Для кожного $\overrightarrow{x} \in L$ виконується $0 \cdot \overrightarrow{x} = 0$
4. Для кожного $\alpha \in \mathbb{R}$ і $\overrightarrow{O} \in L$ виконується $\alpha \cdot \overrightarrow{O} = \overrightarrow{O}$
5. Якщо $\alpha \cdot \overrightarrow{x} = \overrightarrow{O}$, то $\alpha = 0$ або $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{O}$
6. $(-1)\overrightarrow{x} = -\overrightarrow{x}$

2.16.2 Лінійні перетворення

Означення: Будемо вважати, що в лінійному просторі L задане деяке перетворення A, якщо будь-якому елементу $\overrightarrow{x} \in L$ за деяким правилом ставиться у відповідність елемент $A\overrightarrow{x} \in L$.

Означення: Перетворення A називається **лінійним**, якщо для будь-яких векторів $\overrightarrow{x} \in L$ і $\overrightarrow{y} \in L$ і кожного α виконується

$$A(\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}) = A\overrightarrow{x} + A\overrightarrow{y}$$
$$A(\alpha\overrightarrow{x}) = \alpha A\overrightarrow{x}$$

Означення: Лінійне перетворення називається **тотожним**, якщо воно перетворює елемент лінійного простору сам у себе.

$$I\overrightarrow{x} = \overrightarrow{x}$$

Приклад. Чи є A лінійним перетворенням. $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{x} + \overrightarrow{x_0}$; $\overrightarrow{x_0} \neq 0$.

Запишемо перетворення A для якогось елемента $\overrightarrow{y}$. $A\overrightarrow{y} = \overrightarrow{y} + \overrightarrow{x_0}$. Перевіримо, чи виконується правило операції додавання для цього перетворення $A(\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}) = \overrightarrow{y} + \overrightarrow{x} + \overrightarrow{x_0}$; $A(\overrightarrow{x}) + A(\overrightarrow{y}) = \overrightarrow{x} + \overrightarrow{x_0} + \overrightarrow{y} + \overrightarrow{x_0}$, що виконується, лише якщо $\overrightarrow{x_0} = 0$, тобто дане перетворення A нелінійне.

Означення: Якщо у просторі L є вектори лінійного перетворення $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, ..., \overrightarrow{a_n}$, то інший вектор $\overrightarrow{b} = \alpha\overrightarrow{a_1} + \beta\overrightarrow{a_2} + ... + \lambda\overrightarrow{a_n}$ є **лінійною комбінацією** векторів $\overrightarrow{a_i}$.

Означення: Якщо $\alpha\overrightarrow{a_1} + \beta\overrightarrow{a_2} + ... + \lambda\overrightarrow{a_n} = 0$ тільки при $\alpha = \beta = \ldots = \lambda = 0$, то вектори $\overrightarrow{a_i}$ називаються **лінійно незалежними**.

Означення: Якщо в лінійному просторі L є n лінійно незалежних векторів, але будь-які $n+1$ векторів лінійно залежні, то простір L називається **n-вимірним**, а сукупність лінійно незалежних векторів називається **базисом** лінійного простору L.

Наслідок: Будь-який вектор лінійного простору може бути представлений у вигляді лінійної комбінації векторів базису.

2.16.3 Матриці лінійних перетворень

Нехай в n-вимірному лінійному просторі з базисом $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \ldots, \overrightarrow{e_n}$ задано лінійне перетворення A. Тоді вектори $A\overrightarrow{e_1}$, $A\overrightarrow{e_2}, \ldots, A\overrightarrow{e_n}$ – також вектори цього простору і їх можна представити у вигляді лінійної комбінації векторів базису:

$$A\overrightarrow{e_1} = a_{11}\overrightarrow{e_1} + a_{12}\overrightarrow{e_2} + \cdots + a_{1n}\overrightarrow{e_n}$$
$$A\overrightarrow{e_2} = a_{21}\overrightarrow{e_1} + a_{22}\overrightarrow{e_2} + \cdots + a_{n2}\overrightarrow{e_n}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$A\overrightarrow{e_n} = a_{n1}\overrightarrow{e_1} + a_{n2}\overrightarrow{e_2} + \cdots + a_{nn}\overrightarrow{e_n}$$

Тоді матриця $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$ називається **матрицею лінійного перетворення A.**

Якщо у просторі L взяти вектор $\overrightarrow{x} = x_1\overrightarrow{e_1} + x_2\overrightarrow{e_2} + \cdots + x_n\overrightarrow{e_n}$, то $A\overrightarrow{x} \in L$.
$A\overrightarrow{x} = x'_1\overrightarrow{e_1} + x'_2\overrightarrow{e_2} + ... + x'_n\overrightarrow{e_n}$, де

$$x'_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n$$
$$x'_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$x'_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n$$

Ці рівності можна назвати лінійним перетворенням у базисі $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \ldots, \overrightarrow{e_n}$... У матричному вигляді:

$$\overrightarrow{x} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, ..., \overrightarrow{e_n}) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix},\ A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ ... \\ x'_n \end{pmatrix},\ A \cdot \overrightarrow{x} = \overrightarrow{x'}$$

<u>Приклад.</u> Знайти матрицю лінійного перетворення, заданого у вигляді:

$$\begin{gathered} x' = x + y \\ y' = y + z \\ z' = z + x \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} x' = 1 \cdot x + 1 \cdot y + 0 \cdot z \\ y' = 0 \cdot x + 1 \cdot y + 1 \cdot z \\ z' = 1 \cdot x + 0 \cdot y + 1 \cdot z \end{gathered}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

На практиці дії над лінійними перетвореннями зводяться до дій над їхніми матрицями.

<u>**Означення:**</u> Якщо вектор $\overrightarrow{x}$ переводиться у вектор $\overrightarrow{y}$ лінійним перетворенням з матрицею A, а вектор $\overrightarrow{y}$ у вектор $\overrightarrow{z}$ лінійним перетворенням з матрицею B, то послідовне застосування цих перетворень рівносильне лінійному перетворенню, що переводить вектор $\overrightarrow{x}$ у вектор $\overrightarrow{z}$ (воно називається **добутком складових перетворень**).

$$C = B \cdot A$$

<u>Приклад.</u> Задано лінійне перетворення A, що переводить вектор $\overrightarrow{x}$ у вектор $\overrightarrow{y}$ і лінійне перетворення B, що переводить вектор $\overrightarrow{y}$ у вектор $\overrightarrow{z}$. Знайти матрицю лінійного перетворення, що переводить вектор $\overrightarrow{x}$ у вектор $\overrightarrow{z}$.

$$\begin{cases} y_1 = 2x_1 - x_2 + 5x_3 \\ y_2 = x_1 + 4x_2 - x_3 \\ y_3 = 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 \end{cases} \qquad \begin{cases} z_1 = y_1 + 4y_2 + 3y_3 \\ z_2 = 5y_1 - y_2 - y_3 \\ z_3 = 3y_1 + 6y_2 + 7y_3 \end{cases}$$

$$x \xrightarrow{A} y \xrightarrow{B} z$$

$$x \xrightarrow{C} z$$

$$C = B \cdot A$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 1 & 4 & -1 \\ 3 & -5 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 5 & -1 & -1 \\ 3 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 2+4+9 & -1+16-15 & 5-4+6 \\ 10-1-3 & -5-4+5 & 25+1-2 \\ 6+6+21 & -3+24-35 & 15-6+14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 0 & 7 \\ 6 & -4 & 24 \\ 33 & -14 & 23 \end{pmatrix}.$$

Тобто $\begin{cases} z_1 = 15x_1 + 7x_3 \\ z_2 = 6x_1 - 4x_2 + 24x_3 \\ z_3 = 33x_1 - 14x_2 + 23x_3 \end{cases}$

Примітка: Якщо $A = 0$, то перетворення вироджене, тобто, наприклад, площина перетвориться не у цілу площину, а в пряму.

2.16.4 Власні значення і власні вектори лінійного перетворення

Означення: Нехай L – заданий n-вимірний лінійний простір. Ненульовий вектор $\overrightarrow{v} \in L$ називається **власним вектором** лінійного перетворення A, якщо існує таке число λ, що виконується рівність:

$$A\overrightarrow{v} = \lambda\overrightarrow{v}.$$

При цьому число λ називається **власним значенням (характеристичним числом)** лінійного перетворення A, що відповідає вектору $\overrightarrow{v}$.

Означення: Якщо лінійне перетворення A в деякому базисі $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \ldots, \overrightarrow{e_n}$ має матрицю

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix},$$

то власні значення лінійного перетворення A можна знайти як корінь $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ рівняння:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Це рівняння називається **характеристичним рівнянням,** а його ліва частина – **характеристичним многочленом** лінійного перетворення A.

Слід зазначити, що характеристичний многочлен лінійного перетворення не залежить від вибору базису.

Розглянемо окремий випадок.

Нехай A – деяке лінійне перетворення площини, матриця якого дорівнює $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$. Тоді перетворення A може бути задане формулами:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}; \begin{cases} x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{cases}$$

у деякому базисі $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}$.

Якщо перетворення A має власний вектор із власним значенням λ, то $A\overrightarrow{v} = \lambda\overrightarrow{v}$.

$\begin{cases} x_1' = \lambda x_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ x_2' = \lambda x_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{cases}$ або $\begin{cases} (a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 = 0 \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 = 0 \end{cases}$

Оскільки власний вектор $\overrightarrow{x}$ ненульовий, то x_1 і x_2 не дорівнюють нулю одночасно. Оскільки дана система однорідна, то для того, щоб вона мала нетривіальний розв'язок, визначник системи повинен дорівнювати нулю. У протилежному випадку за правилом Крамера система має єдиний розв'язок – нульовий, що неможливо.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) - a_{12}a_{21} = \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})$$

Отримане рівняння є **характеристичним рівнянням лінійного перетворення** A**.**

Таким чином, можна знайти власний вектор $\overrightarrow{v}(x_1, x_2)$ лінійного перетворення A із власним значенням λ, де λ – корінь характеристичного рівняння, а x_1 і x_2 – корінь системи рівнянь при підстановці у неї значення λ.

Зрозуміло, що якщо характеристичне рівняння не має дійсних коренів, то лінійне перетворення A не має власних векторів.

Слід зазначити, що якщо $\overrightarrow{x}$ – власний вектор перетворення A, то і будь-який вектор колінеарний йому – теж власний з тим же самим власним значенням λ.

Дійсно, $A(k\overrightarrow{x}) = kA\overrightarrow{x} = k\lambda\overrightarrow{x} = \lambda(k\overrightarrow{x})$. Якщо врахувати, що вектори мають один початок, то ці вектори утворять так званий **власний напрямок** або **власну пряму**.

Оскільки характеристичне рівняння може мати два різних дійсних корені λ_1 і λ_2, то у цьому випадку при підстановці їх у систему рівнянь одержимо нескінченну кількість розв'язків. (Оскільки рівняння лінійно залежні). Ця множина розв'язків визначає дві **власні прямі**.

Якщо характеристичне рівняння має два рівних корені $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, то або є лише одна власна пряма, або при підстановці в систему вона перетворюється у систему виду: $\begin{cases} 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 = 0 \\ 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 = 0 \end{cases}$. Ця система задовольняється будь-якими значеннями x_1 і x_2. Тоді всі вектори будуть власними, і таке перетворення називається **перетворенням подібності**.

Приклад. Знайти характеристичні числа і власні вектори лінійного перетворення з матрицею $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Запишемо лінійне перетворення у вигляді: $\begin{array}{l} x_1' = \lambda x_1 = 5x_1 + 4x_2 \\ x_2' = \lambda x_2 = 2x_1 + 3x_2 \end{array}$

Складемо характеристичне рівняння:

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 4 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)(3-\lambda) - 8 = 15 - 3\lambda - 5\lambda + \lambda^2 - 8 = 0$$

$$\lambda^2 - 8\lambda + 7 = 0;$$

Корені характеристичного рівняння: $\lambda_1 = 7$; $\lambda_2 = 1$;

Для кореня $\lambda_1 = 7$: $\begin{cases} (5-7)x_1 + 4x_2 = 0 \\ 2x_1 + (3-7)x_2 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} -2x_1 + 4x_2 = 0 \\ 2x_1 - 4x_2 = 0 \end{cases}$

Із системи виходить залежність: $x_1 - 2x_2 = 0$. Власні вектори для першого кореня характеристичного рівняння мають координати: $(t; 0,5t)$, де t – параметр.

Для кореня $\lambda_2 = 1$: $\begin{cases} (5-1)x_1 + 4x_2 = 0 \\ 2x_1 + (3-1)x_2 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} 4x_1 + 4x_2 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases}$

Із системи виходить залежність: $x_1 + x_2 = 0$. Власні вектори для другого кореня характеристичного рівняння мають координати: $(t; -t)$, де t – параметр.

Отримані власні вектори можна записати у вигляді:

$$\overrightarrow{u_1} = t(\overrightarrow{e_1} + 0,5\overrightarrow{e_2}); \quad \overrightarrow{u_2} = t(\overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_2}).$$

Приклад. Знайти характеристичні числа і власні вектори лінійного перетворення з матрицею $A = \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$.

Запишемо лінійне перетворення у вигляді: $\begin{array}{l} x_1' = \lambda x_1 = 6x_1 - 4x_2 \\ x_2' = \lambda x_2 = 4x_1 - 2x_2 \end{array}$

$$\begin{cases} (6-\lambda)x_1 - 4x_2 = 0 \\ 4x_1 - (2+\lambda)x_2 = 0 \end{cases}$$

Складемо характеристичне рівняння:

$$\begin{vmatrix} 6-\lambda & -4 \\ 4 & -2-\lambda \end{vmatrix} = -(6-\lambda)(2+\lambda) + 16 = -12 - 6\lambda + 2\lambda + \lambda^2 + 16 = 0$$

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0;$$

Корінь характеристичного рівняння: $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$;

Одержуємо: $\begin{cases} (6-2)x_1 - 4x_2 = 0 \\ 4x_1 - 4x_2 = 0 \end{cases}$

Із системи виходить залежність: $x_1 - x_2 = 0$. Власні вектори для першого кореня характеристичного рівняння мають координати: $(t; t)$, де t – параметр.

Власний вектор можна записати: $\vec{u} = (\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2})t$.

Розглянемо інший окремий випадок. Якщо $\vec{v}$ – власний вектор лінійного перетворення A, заданого у тривимірному лінійному просторі, а x_1, x_2, x_3 – компоненти цього вектора в деякому базисі $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_2}$, $\overrightarrow{e_3}$, то

$$x_1' = \lambda x_1; \quad x_2' = \lambda x_2; \quad x_3' = \lambda x_3,$$

де λ – власне значення (характеристичне число) перетворення A.

Якщо матриця лінійного перетворення A має вигляд:

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, то $\begin{cases} \lambda x_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ \lambda x_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ \lambda x_3 = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{cases}$

Характеристичне рівняння: $\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix} = 0$

Розкривши визначник, одержимо кубічне рівняння відносно λ. Будь-яке кубічне рівняння з дійсними коефіцієнтами має або один, або три дійсних корені.

Тоді будь-яке лінійне перетворення у тривимірному просторі має власні вектори.

Приклад. Знайти характеристичні числа і власні вектори лінійного перетворення A, матриця лінійного перетворення $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Складемо характеристичне рівняння:

$$\begin{cases} x_1' = \lambda x_1 = 1 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 \\ x_2' = \lambda x_2 = 1 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 \\ x_3' = \lambda x_3 = 3 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 3 \\ 1 & 5-\lambda & 1 \\ 3 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(1-\lambda)\left((5-\lambda)(1-\lambda)-1\right) - (1-\lambda-3) + 3(1-15+3\lambda) = 0$$

$$(1-\lambda)\left(5-5\lambda-\lambda+\lambda^2-1\right) + 2 + \lambda - 42 + 9\lambda = 0$$

$$(1-\lambda)\left(4-6\lambda+\lambda^2\right) + 10\lambda - 40 = 0$$

$$4 - 6\lambda + \lambda^2 - 4\lambda + 6\lambda^2 - \lambda^3 + 10\lambda - 40 = 0$$

$$-\lambda^3 + 7\lambda^2 - 36 = 0$$

$$-\lambda^3 + 9\lambda^2 - 2\lambda^2 - 36 = 0$$

$$-\lambda^2(\lambda+2) + 9\left(\lambda^2-4\right) = 0$$

$$(\lambda+2)\left(-\lambda^2+9\lambda-18\right) = 0$$

Власні значення: $\lambda_1 = -2$; $\lambda_2 = 3$; $\lambda_3 = 6$;

1) Для $\lambda_1 = -2$: $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 + 7x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$ $\qquad \begin{cases} x_1 + 7x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$

Маємо систему лінійних однорідних рівнянь, у якій дві базисні невідомі і одна вільна.

Якщо прийняти $x_1 = C$, то $\begin{cases} 7x_2 + x_3 = -C \\ x_2 + 3x_3 = -3C \end{cases}$ $\qquad \Rightarrow x_2 = 0$; $x_3 = -C$;

Власні вектори: $\overrightarrow{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} C$.

2) Для $\lambda_2 = 3$: $\begin{cases} -2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$ $\qquad \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$

Якщо прийняти $x_1 = C$, то $\begin{cases} 2x_2 + x_3 = -C \\ x_2 - 2x_3 = -3C \end{cases}$ $\qquad \Rightarrow x_2 = -C$; $x_3 = C$.

Власні вектори: $\overrightarrow{v_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} C$.

3) Для $\lambda_3 = 6$: $\begin{cases} -5x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - 5x_3 = 0 \end{cases}$ $\qquad \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - 5x_3 = 0 \end{cases}$

Якщо прийняти $x_1 = C$, то $\begin{cases} -x_2 + x_3 = -C \\ x_2 - 5x_3 = -3C \end{cases}$ $\qquad \Rightarrow x_2 = 2C$; $x_3 = C$.

Власні вектори: $\overrightarrow{v_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} C$.

Власні вектори операторів, заданих симетричними матрицями

Якщо матриця симетрична, власні вектори є перпендикулярними. Зокрема, перпендикулярними є власні вектори для матриць, які складено із нормальних і дотичних напружень або моментів інерції.

Приклад. Знайти характеристичні числа і власні вектори лінійного перетворення A, матриця лінійного перетворення $A = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Складемо характеристичне рівняння:

$$\begin{vmatrix} -3-\lambda & -2 & -4 \\ 2 & 1-\lambda & 2 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$-(3+\lambda)\left((1-\lambda)(2-\lambda)-2\right) + (4-2\lambda-2) - 4(2-1+\lambda) = 0$$

$$-(3+\lambda)\left(2-\lambda-2\lambda+\lambda^2-2\right) + 2(2-2\lambda) - 4(1+\lambda) = 0$$

$$-(3+\lambda)\left(\lambda^2-3\lambda\right) + 4 - 4\lambda - 4 - 4\lambda = 0$$

$$-3\lambda^2 + 9\lambda - \lambda^3 + 3\lambda^2 - 8\lambda = 0$$

$$-\lambda^3 + \lambda = 0$$
$$\lambda_1 = 0; \lambda_2 = 1; \lambda_3 = -1;$$

Для $\lambda_1 = 0$: $\begin{cases} -3x_1 - 2x_2 - 4x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} 2x_1 + x_2 = -2x_3 \\ x_1 + x_2 = -2x_3 \end{cases}$

Якщо прийняти $x_3 = 1$, одержуємо $x_1 = 0$, $x_2 = -2$

Власні вектори $\overrightarrow{u_1} = (0 \cdot \overrightarrow{e_1} - 2 \cdot \overrightarrow{e_2} + 1 \cdot \overrightarrow{e_3}) \cdot t$, де t – параметр.

Для самостійного розв'язання: Аналогічно знайти $\overrightarrow{u_2}$ і $\overrightarrow{u_3}$ для λ_2 і λ_3.

3 Аналітична геометрія

3.1 Елементи векторної алгебри

Означення. Вектором називається прямолінійний відрізок (упорядкована пара точок). До векторів належить також і **нульовий** вектор, початок і кінець якого збігаються.

Означення. Довжиною (модулем) вектора називається відстань між початком і кінцем вектора.

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = |\overrightarrow{a}|$$

Означення. Вектори називаються колінеарними, якщо вони розташовані на одній або паралельних прямих. Нульовий вектор колінеарний до будь-якого вектора.

Означення. Вектори називаються **компланарними**, якщо існує площина, якій вони паралельні.

Колінеарні вектори завжди компланарні, але не всі компланарні вектори колінеарні.

Означення. Вектори називаються **рівними**, якщо вони колінеарні, однаково спрямовані і мають однакові модулі.

Усякі вектори можна привести до спільного початку, тобто побудувати вектори, відповідно рівні даним, що мають загальний початок. З означення рівності векторів слідує, що будь-який вектор має нескінченно багато векторів, рівних йому.

Означення. Лінійними операціями над векторами називається додавання і множення на число.

Сумою векторів є вектор – $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$

Добуток – $\vec{b} = \alpha\,\vec{a}$; $\left|\overrightarrow{b}\right| = \alpha\,|\overrightarrow{a}|$, при цьому $\vec{a}$ колінеарний до $\vec{b}$.

Вектор $\vec{a}$ співнаправлений з вектором $\vec{b}$ ($\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$), якщо $\alpha > 0$.

Вектор $\vec{a}$ протилежно спрямований до вектора $\vec{b}$ ($\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$), якщо $\alpha < 0$.

3.2 Властивості векторів

1. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ – комутативність.
2. $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$
3. $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$
4. $\vec{a} + (-1)\vec{a} = \vec{0}$
5. $(\alpha \cdot \beta)\vec{a} = \alpha(\beta\vec{a})$ – асоціативність
6. $(\alpha + \beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$ – дистрибутивність
7. $\alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}$
8. $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$.

Означення.

1) **Базисом** у просторі називаються будь-які 3 некомпланарні вектори, узяті в певному порядку.

2) **Базисом** на площині називаються будь-які 2 неколінеарні вектори, узяті в певному порядку.

3) **Базисом** на прямій називається будь-який ненульовий вектор.

Означення. Якщо $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_2}$, $\overrightarrow{e_3}$ – базис у просторі і $\overrightarrow{a} = \alpha\overrightarrow{e_1} + \beta\ \overrightarrow{e_2} + \gamma\ \overrightarrow{e_3}$, то числа α, β і γ – називаються **компонентами або координатами** вектора $\vec{a}$ у цьому базисі.

У зв'язку із цим можна записати наступні **властивості**:

1. рівні вектори мають однакові координати,
2. при множенні вектора на число його координати теж множаться на це число,
3. $\lambda\overrightarrow{a} = \lambda(\alpha\overrightarrow{e_1} + \beta\ \overrightarrow{e_2} + \gamma\ \overrightarrow{e_3}) = (\lambda\alpha)\overrightarrow{e_1} + (\lambda\beta)\ \overrightarrow{e_2} + (\lambda\gamma)\ \overrightarrow{e_3}$.
4. при додаванні векторів складаються їхні відповідні компоненти.

$$\overrightarrow{a} = \alpha_1\overrightarrow{e_1} + \alpha_2\overrightarrow{e_2} + \alpha_3\overrightarrow{e_3};\ \overrightarrow{b} = \beta_1\overrightarrow{e_1} + \beta_2\overrightarrow{e_2} + \beta_3\overrightarrow{e_3};$$
$$\vec{a} + \vec{b} = (\alpha_1 + \beta_1)\overrightarrow{e_1} + (\alpha_2 + \beta_2)\overrightarrow{e_2} + (\alpha_3 + \beta_3)\overrightarrow{e_3}.$$

3.3 Лінійна залежність векторів

Означення. Вектори $\overrightarrow{a_1}, ..., \overrightarrow{a_n}$ називаються **лінійно залежними**, якщо існує така лінійна комбінація $\alpha_1\overrightarrow{a_1}+\alpha_2\overrightarrow{a_2}+ ... + \alpha_n\overrightarrow{a_n} = 0$, при не рівних нулю одночасно α_i , тобто $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + ... + \alpha_n^2 \neq 0$.

Якщо ж тільки при $\alpha_i = 0$ виконується$\alpha_1\overrightarrow{a_1} + \alpha_2\overrightarrow{a_2} + ... + \alpha_n\overrightarrow{a_n} = 0$, то вектори називаються лінійно незалежними.

Властивість 1. Якщо серед векторів $\overrightarrow{a_i}$ є нульовий вектор, то ці вектори лінійно залежні.

Властивість 2. Якщо до системи лінійно залежних векторів додати один або кілька векторів, то отримана система теж буде лінійно залежна.

Властивість 3. Система векторів лінійно залежна тоді і тільки тоді, коли один з векторів розкладається в лінійну комбінацію інших векторів.

Властивість 4. Будь-які 2 колінеарні вектори лінійно залежні й, навпаки, будь-які 2 лінійно залежні вектори колінеарні.

Властивість 5. Будь-які 3 компланарних вектори лінійно залежні й, навпаки, будь-які 3 лінійно залежні вектори компланарні.

Властивість 6. Будь-які 4 вектори лінійно залежні.

3.4 Система координат

Для визначення положення довільної точки можуть використовуватися різні системи координат. Положення довільної точки в якійсь системі координат повинне однозначно визначатися. Поняття системи координат являє собою сукупність точки початку відліку (початку координат) і деякого базису. Як на площині, так і у просторі можливе завдання найрізноманітніших систем координат. Вибір системи координат залежить від характеру поставленої геометричної, фізичної або технічної задачі. Розглянемо деякі найбільше часто застосовувані на практиці системи координат.

3.4.1 Декартова система координат

Зафіксуємо у просторі точку O і розглянемо довільну точку M.

Вектор $\overrightarrow{OM}$ назвемо радіус-вектором точки M. Якщо у просторі задати деякий базис, то точці M можна зіставити деяку трійку чисел – компонента її радіус-вектора.

Означення. Декартовою системою координат у просторі називається сукупність точки і базису. Точка називається **початком координат**. Прямі, що проходять через початок координат називаються **осями координат**.

1-а вісь – вісь **абсцис**

2-а вісь – вісь **ординат**

3-я вісь – вісь **аплікат**

Щоб знайти компоненти вектора потрібно з координат його кінця відняти координати початку.

Якщо задані точки $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, то $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$.

Означення. Базис називається **ортонормованим**, якщо його вектори попарно ортогональні і дорівнюють одиниці.

Означення. Декартова система координат, базис якої ортонормований називається **декартовою прямокутною системою координат**.

Будемо позначати елементи (**орти**) ортонормованого базису $\vec{i}$, $\vec{j}$ та $\vec{k}$.

Приклад. Дано вектори $\vec{a} = (1; 2; 3)$, $\vec{b} = (-1; 0; 3)$, $\vec{c} = (2; 1; -1)$ і $\overrightarrow{d} = (3; 2; 2)$ у деякому базисі. Показати, що вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ утворюють базис і знайти координати вектора $\overrightarrow{d}$ у цьому базисі.

Вектори утворять базис, якщо вони лінійно незалежні, інакше кажучи, якщо рівняння, що входять у систему:

$\begin{cases} \alpha - \beta + 2\gamma = 0 \\ 2\alpha + 0 \cdot \beta + \gamma = 0 \\ 3\alpha + 3\beta - \gamma = 0 \end{cases}$ лінійно незалежні.

Тоді $\overrightarrow{d} = \alpha\overrightarrow{a} + \beta\overrightarrow{b} + \gamma\overrightarrow{c}$.

Ця умова виконується, якщо визначник матриці системи відмінний від нуля.

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = -3 + (-2 - 3) + 12 = 4 \neq 0$$

$\begin{cases} \alpha a_1 + \beta b_1 + \gamma c_1 = d_1 \\ \alpha a_2 + \beta b_2 + \gamma c_2 = d_2 \\ \alpha a_3 + \beta b_3 + \gamma c_3 = d_3 \end{cases}$. Для розв'язання цієї системи скористаємося методом Крамера.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3(-3) + (-2 - 2) + 12 = -1.$$

$$\alpha = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -\frac{1}{4};$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = (-2-2) - 3(-2-3) + 2(4-6) = -4 + 15 - 4 = 7;$$

$$\beta = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{7}{4};$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -6 + (4-6) + 18 = 10;$$

$$\gamma = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{5}{2};$$

Разом, координати вектора $\overrightarrow{d}$ в базисі $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$: $\overrightarrow{d} = \left\{-\frac{1}{4}, \frac{7}{4}, \frac{5}{2}\right\}$.

Довжина вектора в координатах визначається як відстань між точками початку і кінця вектора. Якщо задані дві точки у просторі $A(x_1,\, y_1,\, z_1)$, $B(x_2,\, y_2,\, z_2)$, то $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2}$.

Якщо точка $M(x,\, y,\, z)$ **ділить відрізок** AB **у співвідношенні** λ/μ, то координати цієї точки визначаються як:

$$x = \frac{\mu x_1 + \lambda x_2}{\mu + \lambda}; \quad y = \frac{\mu y_1 + \lambda y_2}{\mu + \lambda}; \quad z = \frac{\mu z_1 + \lambda z_2}{\mu + \lambda}.$$

В окремому випадку координати **середини відрізка** знаходяться як:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}; \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}; \quad z = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

3.4.2 Лінійні операції над векторами в координатах

Нехай задані вектори в прямокутній системі координат $\overrightarrow{a}(x_A, y_A, z_A)$; $\overrightarrow{b}(x_B, y_B, z_B)$, тоді

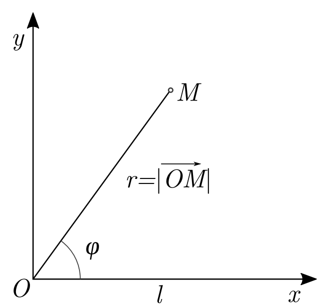
$$\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c} = (x_A + x_B; y_A + y_B; z_A + z_B); \quad \alpha \cdot \overrightarrow{a} = (\alpha x_A; \alpha y_A; \alpha z_A)$$

3.4.3 Полярна система координат

Будь-яка точка на площині може бути однозначно визначена за допомогою різних координатних систем, вибір яких визначається різними факторами. Спосіб задання початкових умов для розв'язання якої-небудь конкретної технічної задачі може визначити вибір тієї або іншої системи координат. Для зручності проведення обчислень часто краще використати системи координат, відмінні від декартової прямокутної системи. Крім того, наочність подання остаточної відповіді найчастіше теж сильно залежить від вибору системи координат. Нижче розглянемо деякі найбільше часто використовувані системи координат.

Означення. Точка O називається **полюсом**, а промінь l – **полярною віссю.**

Сенс задання якоїсь системи координат на площині полягає у тому, щоб кожній точці площини поставити у відповідність пару дійсних чисел, що визначають положення цієї точки на площині. У випадку полярної системи координат роль цих чисел відіграють відстань точки від полюса і кут між полярною віссю і радіус-вектором цієї точки. Цей кут φ називається **полярним кутом**.



Можна встановити зв'язок між полярною системою координат і декартовою прямокутною системою, якщо помістити початок декартової прямокутної системи у полюс, а полярну вісь спрямувати уздовж додатного напрямку осі Ox.

Тоді координати довільної точки у двох різних системах координат зв'язуються співвідношеннями:

$$x = r\cos\varphi; y = r\sin\varphi; x^2 + y^2 = r^2$$

3.4.4 Циліндрична і сферична системи координат

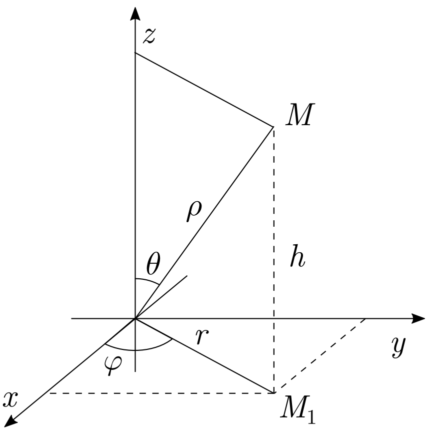
Як і на площині, у просторі положення будь-якої точки може бути визначене трьома координатами в різних системах координат, відмінних від декартової прямокутної системи. Циліндрична і сферична системи координат є узагальненням для простору полярної системи координат, що була докладно розглянута вище.

Введемо у просторі точку O і промінь l, що виходить із точки O, а також вектор $\vec{n} \perp l, \quad |\vec{n}| = 1$. Через точку O можна провести єдину площину, перпендикулярну вектору нормалі $\vec{n}$.

Для введення відповідності між циліндричною, сферичною і декартовою прямокутною системами координат точку O суміщають з початком декартової прямокутної системи координат, промінь l – з додатним напрямком осі x, вектор нормалі – з віссю z.

Циліндрична і сферична системи координат використовуються у тих випадках, коли рівняння кривої або поверхні у декартовій прямокутній системі координат виглядають досить складно, і операції з таким рівнянням виглядають трудомісткими.

Подання рівнянь у циліндричній і сферичній системі дозволяє значно спростити обчислення, що буде показано далі.



$\left|\overrightarrow{OM}\right| = \rho$; $OM_1 = r$; $MM_1 = h$.

Якщо з точки M опустити перпендикуляр MM_1 на площину, то точка M_1 буде мати на площині полярні координати (r, φ).

<u>Означення.</u> Циліндричними координатами точки M називаються числа (r, φ, h), які визначають положення точки M у просторі.

<u>Означення.</u> Сферичними координатами точки M називаються числа (ρ, φ, θ), де θ – кут між ρ і нормаллю.

3.4.5 Зв'язок між циліндричною та декартовою прямокутною системами координат

Аналогічно полярній системі координат на площині можна записати співвідношення, що зв'язують між собою різні системи координат у просторі. Для циліндричної і декартової прямокутної систем ці співвідношення мають вигляд:

$$h = z; x = r\cos\varphi; y = r\sin\varphi; \cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}; \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

3.4.6 Зв'язок сферичної системи координат з декартовою прямокутної

У випадку сферичної системи координат співвідношення мають вигляд:

$$z = \rho\cos\theta; \quad y = \rho\sin\theta\sin\varphi; \quad x = \rho\sin\theta\cos\varphi; \quad \rho = \sqrt{x^2+y^2+z^2};$$

$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}; \quad \theta = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}; \quad \cos\theta = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}; \quad \sin\theta = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}};$$

3.5 Скалярний добуток векторів

<u>Означення.</u> Скалярним добутком векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається число, рівне добутку довжин цих сторін на косинус кута між ними.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right| \cos\varphi$$

3.5.1 Властивості скалярного добутку

1. $\vec{a}\cdot\vec{a}=\vec{a}^2$;
2. $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$, якщо $\vec{a}\perp\vec{b}$, або $\vec{a}=0$, або $\vec{b}=0$.
3. $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$;
4. $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$;
5. $(m\vec{a})\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot(m\vec{b})=m(\vec{a}\cdot\vec{b})$;

Якщо розглядати вектори $\overrightarrow{a}=(x_a,y_a,z_a)$; $\overrightarrow{b}=(x_b,y_b,z_b)$ в декартовій прямокутній системі координат, то $\vec{a}\cdot\vec{b}=x_ax_b+y_ay_b+z_az_b$;
Використовуючи отримані рівності, одержуємо формулу для обчислення кута між векторами:

$$\cos\varphi=\frac{x_ax_b+y_ay_b+z_az_b}{|\vec{a}|\cdot\left|\vec{b}\right|};$$

Приклад. Знайти $(5\vec{a}+3\vec{b})(2\vec{a}-\vec{b})$, якщо $|\vec{a}|=2,\quad \left|\vec{b}\right|=3,\quad \vec{a}\perp\vec{b}$.

$$10\vec{a}\cdot\vec{a}-5\vec{a}\cdot\vec{b}+6\vec{a}\cdot\vec{b}-3\vec{b}\cdot\vec{b}=10\,|\vec{a}|^2-3\left|\vec{b}\right|^2=40-27=13,$$

оскільки $\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2=4$, $\vec{b}\cdot\vec{b}=\left|\vec{b}\right|^2=9$, $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$.

Приклад. Знайти кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо $\vec{a}=\vec{i}+2\vec{j}+3\vec{k}$,

$$\vec{b}=6\vec{i}+4\vec{j}-2\vec{k}.$$

Тобто $\vec{a}=(1,2,3)$, $\vec{b}=(6,4,-2)$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=6+8-6=8:$$

$$|\vec{a}|=\sqrt{1+4+9}=\sqrt{14};\qquad \left|\vec{b}\right|=\sqrt{36+16+4}=\sqrt{56}.$$

$$\cos\varphi=\frac{8}{\sqrt{14}\sqrt{56}}=\frac{8}{2\sqrt{14}\sqrt{14}}=\frac{4}{14}=\frac{2}{7};\quad \varphi=\arccos\frac{2}{7}.$$

Приклад. Знайти скалярний добуток $(3\vec{a}-2\vec{b})\cdot(5\vec{a}-6\vec{b})$, якщо $|\vec{a}|=4$, $\left|\vec{b}\right|=6$, $\widehat{\vec{a}\,\vec{b}}=\pi/3$.

$$15\vec{a}\cdot\vec{a}-18\vec{a}\cdot\vec{b}-10\vec{a}\cdot\vec{b}+12\vec{b}\cdot\vec{b}=15\,|\vec{a}|^2-28\,|\vec{a}|\left|\vec{b}\right|\cos\frac{\pi}{3}+12\left|\vec{b}\right|^2=15\cdot16-28\cdot4\cdot6\cdot\frac{1}{2}+$$

$$+12\cdot36=240-336+432=672-336=336.$$

Приклад. Знайти кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо $\vec{a}=3\vec{i}+4\vec{j}+5\vec{k}$, $\vec{b}=4\vec{i}+5\vec{j}-3\vec{k}$.
Тобто $\vec{a}=(3,4,5)$, $\vec{b}=(4,5,-3)$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=12+20-15=17;$$

$$|\vec{a}|=\sqrt{9+16+25}=\sqrt{50};\qquad \left|\vec{b}\right|=\sqrt{16+25+9}=\sqrt{50}.$$

$$\cos\varphi=\frac{17}{\sqrt{50}\sqrt{50}}=\frac{17}{50};\quad \varphi=\arccos\frac{17}{50}.$$

Приклад. При якому m вектори $\vec{a}=m\vec{i}+\vec{j}$ і $\vec{b}=3\vec{i}-3\vec{j}-4\vec{k}$ перпендикулярні?
$\vec{a}=(m,1,0)$; $\vec{b}=(3,-3,-4)$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=3m-3=0;\quad \Rightarrow m=1.$$

Приклад. Знайти скалярний добуток векторів $2\vec{a}+3\vec{b}+4\vec{c}$ і $5\vec{a}+6\vec{b}+7\vec{c}$, якщо $|\vec{a}|=1,\quad \left|\vec{b}\right|=2,\quad |\vec{c}|=3,\quad \widehat{\vec{a}\,\vec{b}}=\widehat{\vec{a}\,\vec{c}}=\widehat{\vec{b}\,\vec{c}}=\dfrac{\pi}{3}$.

$$(2\vec{a}+3\vec{b}+4\vec{c})(5\vec{a}+6\vec{b}+7\vec{c})=10\vec{a}\cdot\vec{a}+12\vec{a}\cdot\vec{b}+14\vec{a}\cdot\vec{c}+15\vec{a}\cdot\vec{b}+18\vec{b}\cdot\vec{b}+21\vec{b}\cdot\vec{c}+$$

$$+20\vec{c}\cdot\vec{a}+24\vec{b}\cdot\vec{c}+28\vec{c}\cdot\vec{c}=10\vec{a}\cdot\vec{a}+27\vec{a}\cdot\vec{b}+34\vec{a}\cdot\vec{c}+45\vec{b}\cdot\vec{c}+18\vec{b}\cdot\vec{b}+28\vec{c}\cdot\vec{c}=10+27+51+135+72+252=547.$$

3.5.2 Основні застосування скалярного добутку

1. Перевірка перпендикулярності векторів.

2. Знаходження кута між векторами.

3. Знаходження проєкції вектора на напрямок іншого вектора. Проєкцію $\vec{a}$ на напрям вектора $\vec{b}$ можна знайти за такою формулою:
$$\text{Пр}_{\vec{b}}\vec{a} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}.$$

4. Знаходження роботи сили при пересуванні точки її прикладання уздовж заданого вектора. Якщо вектор $\vec{F}$ відповідає силі, прикладеній до матеріальної точки, що рухається з початку у кінець вектора $\vec{s}$, то робота A цієї сили визначається рівністю
$$A = \vec{F}\cdot\vec{s}.$$

3.6 Векторний добуток векторів

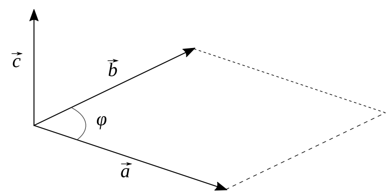
<u>**Означення.**</u> **Векторним добутком** векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається вектор $\vec{c}$, що задовольняє наступним умовам:

1. $|\vec{c}| = |\vec{a}|\cdot\left|\vec{b}\right|\sin\varphi$, де φ – кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$, $\sin\varphi \geqslant 0$; $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$;

2. вектор $\vec{c}$ ортогональний до векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$;

3. $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ утворюють праву трійку векторів.

Позначається: $\vec{c} = \vec{a}\times\vec{b}$ або $\vec{c} = \left[\vec{a},\vec{b}\right]$.



3.6.1 Властивості векторного добутку

1. $\vec{b}\times\vec{a} = -\vec{a}\times\vec{b}$;

2. $\vec{a}\times\vec{b} = 0$, якщо $\vec{a}\parallel\vec{b}$, або $\vec{a}=0$, або $\vec{b}=0$;

3. $(m\vec{a})\times\vec{b} = \vec{a}\times(m\vec{b}) = m(\vec{a}\times\vec{b})$;

4. $\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{A}) = \vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{A}$;

5. Якщо задані вектори $\vec{a} = (x_a, y_a, z_a)$ і $\vec{b} = (x_b, y_b, z_b)$ у декартовій прямокутній системі координат з одиничними векторами $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$, то
$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \end{vmatrix}$$

6. Геометричним змістом векторного добутку векторів є площа паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

<u>Приклад.</u> Знайти векторний добуток векторів $\vec{a} = 2\vec{i}+5\vec{j}+\vec{k}$ і
$$\vec{b} = \vec{i}+2\vec{j}-3\vec{k}.$$
$$\vec{a} = (2,5,1); \vec{b} = (1,2,-3)$$
$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -17\vec{i}+7\vec{j}-\vec{k}.$$

<u>Приклад.</u> Обчислити площу трикутника з вершинами $A(2,2,2)$, $B(4,0,3)$, $C(0,1,0)$.

$$\overrightarrow{AC} = (0-2; 1-2; 0-2) = (-2; -1; -2)$$
$$\overrightarrow{AB} = (4-2; 0-2; 3-2) = (2; -2; 1)$$

$$\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AB} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = \vec{i}(-1-4) - \vec{j}(-2+4) +$$
$$+\vec{k}(4+2) = -5\vec{i} - 2\vec{j} + 6\vec{k}.$$

$\left|\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{25+4+36} = \sqrt{65}.$ $S_\Delta = \dfrac{\sqrt{65}}{2}$(од^2).

Приклад. Довести, що вектори $\vec{a} = 7\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{b} = 3\vec{i} - 7\vec{j} + 8\vec{k}$і $\vec{c} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ компланарні.

$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & -7 & 8 \\ 7 & -3 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & 5 \\ 0 & 4 & -5 \end{pmatrix}$, оскільки вектори лінійно залежні, то вони компланарні.

Приклад. Знайти площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a} + 3\vec{b}$; $3\vec{a} + \vec{b}$, якщо $|\vec{a}| = \left|\vec{b}\right| = 1$; $\widehat{\vec{a}\,\vec{b}} = 30°$.

$$(\vec{a} + 3\vec{b}) \times (3\vec{a} + \vec{b}) = 3\vec{a} \times \vec{a} + \vec{a} \times \vec{b} + 9\vec{b} \times \vec{a} + 3\vec{b} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a} + 9\vec{b} \times \vec{a} = 8\vec{b} \times \vec{a}$$

$S = 8\left|\vec{b}\right| |\vec{a}| \sin 30° = 4$(од^2).

3.6.2 Основні застосування векторного добутку

1. Знаходження вектора, який є перпендикулярним до заданих координатами векторів. Такий вектор можна знайти як векторний добуток початкових векторів.

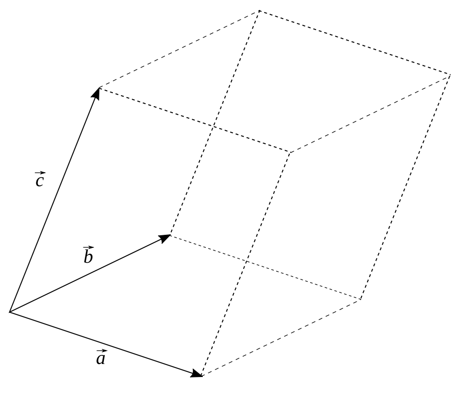
2. Знаходження площі паралелограма, який побудовано на заданих векторах. Зокрема, для знаходження площі S паралелограма, який побудовано на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$ можна скористатися формулою:

$$S = \left|\vec{a} \times \vec{b}\right|.$$

3. Знаходження моменту сили. Якщо вектор $\vec{F}$ відповідає силі, прикладеній до матеріальної точки N, то момент $\vec{M}$ сили $\vec{F}$ відносно точки O обчислюється за формулою

$$\vec{M} = \overrightarrow{ON} \times \vec{F}.$$

3.7 Мішаний добуток векторів



Означення. Мішаним добутком векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ називається число, рівне скалярному добутку вектора $\vec{a}$ на вектор, який дорівнює векторному добутку векторів $\vec{b}$ і $\vec{c}$.

Позначається $\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c}$ або ($\vec{a}$, $\vec{b}$,$\vec{c}$).

Мішаний добуток $\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c}$ за модулем дорівнює об'єму паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$.

3.7.1 Властивості мішаного добутку

1. Мішаний добуток дорівнює нулю, якщо:

   (а) хоч один з векторів дорівнює нулю;

   (б) два з векторів колінеарні;

   (в) вектори компланарні.

2. $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$

3. $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}) = (\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}) = -(\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}) = -(\vec{c}, \vec{b}, \vec{a}) = -(\vec{a}, \vec{c}, \vec{b})$

4. $(\lambda \vec{a}_1 + \mu \vec{a}_2, \vec{b}, \vec{c}) = \lambda(\vec{a}_1, \vec{b}, \vec{c}) + \mu(\vec{a}_2, \vec{b}, \vec{c})$

5. Об'єм трикутної піраміди, утвореної векторами $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$, дорівнює
$$\frac{1}{6}\left|\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right)\right|$$

6. Якщо $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$, $\vec{c} = (x_3, y_3, z_3)$, то
$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

Приклад. Довести, що точки $A(5;7;-2)$, $B(3;1;-1)$, $C(9;4;-4)$, $D(1;5;0)$ лежать в одній площині.

Знайдемо координати векторів: $\overrightarrow{AB} = (-2;-6;1)$, $\overrightarrow{AC} = (4;-3;-2)$, $\overrightarrow{AD} = (-4;-2;2)$

Знайдемо мішаний добуток отриманих векторів:
$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} -2 & -6 & 1 \\ 4 & -3 & -2 \\ -4 & -2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & -6 & 1 \\ 0 & -15 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -6 & 1 \\ 0 & -15 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$
Таким чином, отримані вище вектори компланарні, отже точки A, B, C і D лежать в одній площині.

Приклад. Знайти об'єм піраміди і довжину висоти, опущеної на грань BCD, якщо вершини мають координати $A(0;0;1)$, $B(2;3;5)$, $C(6;2;3)$, $D(3;7;2)$.

Знайдемо координати векторів: $\overrightarrow{BA} = (-2;-3;-4)$, $\overrightarrow{BD} = (1;4;-3)$, $\overrightarrow{BC} = (4;-1;-2)$

Об'єм піраміди
$$V = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} -2 & -3 & -4 \\ 1 & 4 & -3 \\ 4 & -1 & -2 \end{vmatrix} = \frac{1}{6}(-2(-8-3) + 3(-2+12) - 4(-1-16)) =$$
$$= \frac{1}{6}(22 + 30 + 68) = 20(\text{од}^3)$$
Для знаходження довжини висоти піраміди знайдемо спочатку площу основи BCD.
$$\overrightarrow{BD} \times \overrightarrow{BC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 4 & -3 \\ 4 & -1 & -2 \end{vmatrix} = \vec{i}(-8-3) - \vec{j}(-2+12) + \vec{k}(-1-16) = -11\vec{i} - 10\vec{j} - 17\vec{k}.$$
$$\left|\overrightarrow{BD} \times \overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{11^2 + 10^2 + 17^2} = \sqrt{121 + 100 + 289} = \sqrt{510}$$
$S_{\text{осн}} = \sqrt{510}/2 \ (\text{од})^2$

Оскільки $V = \dfrac{S_{\text{осн}} \cdot h}{3}$; $h = \dfrac{3V}{S_{\text{осн}}} = \dfrac{120}{\sqrt{510}} = \dfrac{4\sqrt{510}}{17}(\text{од})$.

3.7.2 Основні застосування мішаного добутку

1. Перевірка компланарності векторів. Якщо трійка векторів є компланарною, їхній мішаний добуток має дорівнювати нулеві.

2. Знаходження об'ємів паралелепіпедів та тетраедрів, побудованих на заданих векторах.

3.8 Аналітична геометрія на площині

3.8.1 Рівняння лінії на площині

Як відомо, будь-яка точка на площині визначається двома координатами в якій-небудь або системі координат. Системи координат можуть бути різними залежно від вибору базису і початку координат.

Означення. Рівнянням лінії називається співвідношення $y = f(x)$ між координатами точок, що становлять цю лінію.

Зазначимо, що рівняння лінії може бути виражено параметричним способом, тобто кожна координата кожної точки виражається через деякий незалежний параметр t.

Характерний приклад – траєкторія точки, що рухається. У цьому випадку роль параметра грає час.

3.8.2 Рівняння прямої на площині

<u>Означення.</u> Будь-яка пряма на площині може бути задана рівнянням першого порядку

$$Ax + By + C = 0,$$

причому сталі A, B не дорівнюють нулю одночасно, тобто $A^2 + B^2 \neq 0$. Це рівняння першого порядку називають **загальним рівнянням прямої.**

Залежно від значень сталих A, B і C можливі наступні окремі випадки:

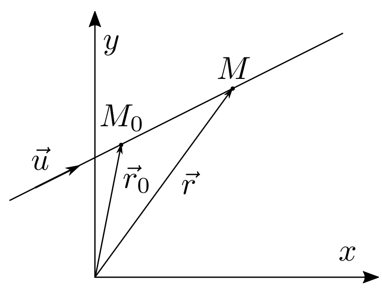
1. $C = 0$, $A \neq 0$, $B \neq 0$ – пряма проходить через початок координат
2. $A = 0$, $B \neq 0$, $C \neq 0$ $\{By + C = 0\}$ – пряма паралельна осі Ox
3. $B = 0$, $A \neq 0$, $C \neq 0$ $\{Ax + C = 0\}$ – пряма паралельна осі Oy
4. $B = C = 0$, $A \neq 0$ – пряма збігається з віссю Oy
5. $A = C = 0$, $B \neq 0$ – пряма збігається з віссю Ox

Рівняння прямої може бути представлене в різному виді залежно від яких-небудь заданих початкових умов.

3.8.3 Параметричне рівняння прямої

Розгляньмо довільну пряму на площині і вектор $\vec{u} = (m, n)$, паралельний даній прямій. Вектор $\vec{u}$ називається **напрямним вектором** прямої.

На прямій візьмемо дві довільні точки $M_0(x_0, y_0)$ і $M(x, y)$.



Позначимо $\overrightarrow{OM_0} = \vec{r_0}$ і $\overrightarrow{OM} = \vec{r}$, тоді $\vec{r} = \vec{r_0} + \overrightarrow{M_0M}$.

Оскільки вектори $\overrightarrow{M_0M}$ і $\vec{u}$ колінеарні, має виконуватися співвідношення $\overrightarrow{M_0M} = \vec{u}t$, де t – деякий параметр.

Разом, можна записати: $\vec{r} = \vec{r_0} + \vec{u}t$.

Оскільки цьому рівнянню задовольняють координати будь-якої точки прямої, то отримане рівняння – **параметричне рівняння прямої на площині**.

Це векторне рівняння може бути представлене в координатній формі:

$$\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \end{cases}$$

Виключаючи t з рівнянь системи, маємо:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} \Rightarrow nx - my - mx_0 + ny_0 = 0.$$

Останнє рівняння, із врахуванням перепозначення $A = n$, $B = -m$, $C = ny_0 - mx_0$, збігається із загальним рівнянням прямої.

3.8.4 Рівняння прямої за точкою і вектором нормалі

<u>Твердження.</u> У декартовій прямокутній системі координат вектор з компонентами (A, B) перпендикулярний прямій, заданій рівнянням $Ax + By + C = 0$.

Справедливість цього твердження є наслідком очевидної перпендикулярності вектора $(A; B) = (n; -m)$ та напрямного вектора $\overrightarrow{u} = (m; n)$ (їхній скалярний добуток дорівнює нулеві).

<u>Приклад.</u> Знайти рівняння прямої, що проходить через точку $A(1, 2)$ перпендикулярно вектору $\vec{n} = (3, -1)$.

Складемо при $A = 3$ і $B = -1$ рівняння прямої: $3x - y + C = 0$. Для знаходження коефіцієнта C підставимо в отриманий вираз координати заданої точки A.

Одержуємо: $3 - 2 + C = 0$, отже $C = -1$.

Разом: шукане рівняння: $3x - y - 1 = 0$.

3.8.5 Рівняння прямої, що проходить через дві точки

Нехай у просторі задані дві точки $M_1(x_1, y_1)$ і $M_2(x_2, y_2)$, тоді рівняння прямої, що проходить через ці точки:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

Якщо який-небудь зі знаменників дорівнює нулю, варто прирівняти нулю відповідний чисельник.

На площині записане вище рівняння прямої спрощується:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

якщо $x_1 \neq x_2$ і $x = x_1$, якщо $x_1 = x_2$.

Дріб $\dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = k$ називається **кутовим коефіцієнтом** прямої.

Приклад. Знайти рівняння прямої, що проходить через точки $A(1, 2)$ і $B(3, 4)$.

Застосовуючи записану вище формулу, одержуємо:

$$\begin{aligned} &y - 2 = \frac{4 - 2}{3 - 1}(x - 1) \\ &y - 2 = x - 1 \\ &x - y + 1 = 0 \end{aligned}$$

3.8.6 Рівняння прямої за точкою і кутовим коефіцієнтом

Якщо загальне рівняння прямої $Ax + By + C = 0$ привести до виду:

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$$

і позначити$-\dfrac{A}{B} = k$; $\quad -\dfrac{C}{B} = b$; тобто $y = kx + b$, то отримане рівняння називається **рівнянням прямої з кутовим коефіцієнтом** k.

3.8.7 Рівняння прямої за точкою і напрямком вектора

За аналогією з пунктом, що розглядає рівняння прямої через вектор нормалі можна ввести завдання прямої через точку і напрямний вектор прямої.

Означення. Кожний ненульовий вектор $\vec{u} = (\alpha_1, \alpha_2)$, компоненти якого задовольняють умові $A\alpha_1 + B\alpha_2 = 0$ називається напрямним вектором прямої $Ax + By + C = 0$.

Приклад. Знайти рівняння прямої з напрямним вектором $\vec{u} = (1; -1)$, що проходить через точку $A(1; 2)$.

Рівняння шуканої прямої будемо шукати у вигляді: $Ax+By+C = 0$. Відповідно до визначення, коефіцієнти повинні задовольняти умовам:

$1 \cdot A + (-1) \cdot B = 0$, тобто $A = B$.

Тоді рівняння прямої має вигляд: $Ax + Ay + C = 0$, або $x + y + C/A = 0$. При $x = 1$, $y = 2$ одержуємо $C/A = -3$, тобто шукане рівняння:

$$x + y - 3 = 0$$

3.8.8 Рівняння прямої у відрізках

Якщо в загальному рівнянні прямої $Ax + By + C = 0$, $C \neq 0$, то, розділивши на $-C$, одержимо: $-\dfrac{A}{C}x - \dfrac{B}{C}y = 1$ або $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$, де

$$a = -\frac{C}{A}; \quad b = -\frac{C}{B}$$

Геометричний зміст коефіцієнтів у тім, що коефіцієнт a є координатою точки перетину прямої з віссю Ox, а b – координатою точки перетину прямої з віссю Oy.

Приклад. Задано загальне рівняння прямої $x - y + 1 = 0$. Знайти рівняння цієї прямої у відрізках.

$C = 1$, $-\dfrac{x}{1} + \dfrac{y}{1} = 1$, $a = -1$, $b = 1$.

3.8.9 Нормальне рівняння прямої

Якщо обидві частини рівняння $Ax+By+C=0$ помножити на число $\mu = \pm\dfrac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}$, що називається **нормуючим множником**, то одержимо

$x\cos\varphi + y\sin\varphi - p = 0$ – **нормальне рівняння прямої**.

Знак $\pm$ нормуючого множника треба вибирати так, щоб $\mu C < 0$.

p – довжина перпендикуляра, опущеного з початку координат на пряму, а φ – кут, утворений цим перпендикуляром з позитивним напрямком осі Ox.

Приклад. Дано загальне рівняння прямої $12x - 5y - 65 = 0$. Потрібно написати різні типи рівнянь цієї прямої.

рівняння цієї прямої у відрізках: $\dfrac{12}{65}x - \dfrac{5}{65}y = 1$, $\dfrac{x}{(65/12)} + \dfrac{y}{(-13)} = 1$.

рівняння цієї прямої з кутовим коефіцієнтом: (ділимо на 5)

$$y = \frac{12}{5}x - \frac{65}{5} = \frac{12}{5}x - 13.$$

нормальне рівняння прямої:

$\mu = \dfrac{1}{\sqrt{12^2+(-5)^2}} = \dfrac{1}{13}; \Rightarrow \dfrac{12}{13}x - \dfrac{5}{13}y - 5 = 0$; $\cos\varphi = 12/13$; $\sin\varphi = -5/13$; $p = 5$.

Слід відзначити, що не кожну пряму можна представити рівнянням у відрізках, наприклад, прямі, паралельні осям або такі, що проходять через початок координат.

Приклад. Пряма відтинає на координатних осях рівні позитивні відрізки. Скласти рівняння прямої, якщо площа трикутника, утвореного цими відрізками дорівнює 8дм^2.

Рівняння прямої має вигляд: $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$, $a = b$; $a \cdot b/2 = 8$; $a = 4; -4$.

$a = -4$ не підходить за умовою задачі.

Разом: $\dfrac{x}{4} + \dfrac{y}{4} = 1$ або $x + y - 4 = 0$.

Приклад. Скласти рівняння прямої, що проходить через точку $A(-2,-3)$ і початок координат.

Рівняння прямої має вигляд: $\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1} = \dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}$, де $x_1 = y_1 = 0$; $x_2 = -2$; $y_2 = -3$.

$$\frac{x-0}{-2-0} = \frac{y-0}{-3-0}; \qquad \frac{x}{-2} = \frac{y}{-3}; \qquad 3x - 2y = 0.$$

Для самостійного розв'язання: Скласти рівняння прямих, що проходять через точку $M(-3,-4)$ і паралельних осям координат.

Відповідь: $\{x + 3 = 0;\ y + 4 = 0\}$.

3.8.10 Кут між прямими на площині

Твердження. Якщо задані дві прямі $y = k_1x + b_1$, $y = k_2x + b_2$, то гострий кут між цими прямими буде визначатися як

$$\operatorname{tg}\alpha = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}\right|.$$

Дві прямі паралельні, якщо $k_1 = k_2$.

Дві прямі перпендикулярні, якщо $k_1 = -1/k_2$.

Теорема. *Прямі $Ax + By + C = 0$ і $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ паралельні, коли пропорційні коефіцієнти $A_1 = \lambda A$, $B_1 = \lambda B$. Якщо ще і $C_1 = \lambda C$, то прямі збігаються.*

Координати точки перетину двох прямих є розв'язками системи двох рівнянь.

3.8.11 Рівняння прямої, що проходить через дану точку перпендикулярно до даної прямої

Твердження. Пряма, що проходить через точку $M_1(x_1, y_1)$ і перпендикулярна до прямої $y = kx + b$, представляється рівнянням:

$$y - y_1 = -\frac{1}{k}(x - x_1)$$

3.8.12 Відстань від точки до прямої

Теорема. *Якщо задано точку $M(x_0, y_0)$, то відстань до прямої $Ax + By + C = 0$ визначається так:*

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

Доведення. Нехай точка $M_1(x_1, y_1)$ – основа перпендикуляра, опущеного із точки M на задану пряму. Тоді відстань між точками M і M_1:

$$d = \sqrt{(x_1-x_0)^2 + (y_1-y_0)^2} \tag{2}$$

Координати x_1 і y_1 можуть бути знайдені як розв'язки системи рівнянь:

$$\begin{cases} Ax + By + C = 0 \\ A(y - y_0) - B(x - x_0) = 0 \end{cases}$$

Друге рівняння системи – це рівняння прямої, що проходить через задану точку M_0 перпендикулярно заданої прямої.

Якщо перетворити перше рівняння системи до виду:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + Ax_0 + By_0 + C = 0,$$

то, розв'язуючи, одержимо:

$$x - x_0 = -\frac{A}{A^2 + B^2}(Ax_0 + By_0 + C),$$
$$y - y_0 = -\frac{B}{A^2 + B^2}(Ax_0 + By_0 + C)$$

Підставляючи ці вирази у рівняння (2), знаходимо:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Теорему доведено.

Приклад. Визначити кут між прямими: $y = -3x + 7$; $y = 2x + 1$.

$k_1 = -3$; $k_2 = 2$; $\operatorname{tg}\varphi = \left|\frac{2 - (-3)}{1 + (-3) \cdot 2}\right| = 1$; $\varphi = \pi/4$.

Приклад. Показати, що прямі $3x - 5y + 7 = 0$ і $10x + 6y - 3 = 0$ перпендикулярні.

Знаходимо: $k_1 = 3/5$, $k_2 = -5/3$, $k_1 k_2 = -1$, отже, прямі перпендикулярні.

Приклад. Дано вершини трикутника $A(0; 1)$, $B(6; 5)$, $C(12; -1)$. Знайти рівняння висоти, проведеної з вершини C.

Знаходимо рівняння сторони AB: $\frac{x - 0}{6 - 0} = \frac{y - 1}{5 - 1}$; $\frac{x}{6} = \frac{y - 1}{4}$; $4x = 6y - 6$;

$2x - 3y + 3 = 0$; $y = \frac{2}{3}x + 1$.

Шукане рівняння висоти має вигляд: $Ax + By + C = 0$ або $y = kx + b$.

$k = -\frac{3}{2}$. Тоді $y = -\frac{3}{2}x + b$. Оскільки висота проходить через точку C, то її координати задовольняють даному рівнянню: $-1 = -\frac{3}{2}12 + b$, звідки $b = 17$. Разом: $y = -\frac{3}{2}x + 17$. Множачи обидві частини цієї рівності на 2, отримуємо остаточну відповідь.

Відповідь: $3x + 2y - 34 = 0$.

Для самостійного розв'язання: Дані сторони трикутника $x + y - 6 = 0$, $3x - 5y + 15 = 0$, $5x - 3y - 14 = 0$. Скласти рівняння його висот.

Вказівка: Спочатку варто знайти координати вершин трикутника, як точок перетину сторін, потім скористатися методом, розглянутому в попередньому прикладі.

Відповідь: $\{x - y = 0;\ 5x + 3y - 26 = 0;\ 3x + 5y - 26 = 0\}$.

3.9 Криві другого порядку

3.9.1 Основні теоретичні відомості

Історична довідка. Дослідження кривих другого порядку сягають античних часів та початків геометрії як науки. Досить докладний опис геометричних властивостей цих кривих можна знайти у працях Аполлонія Перзького та Евкліда. Встановлені геометрами давнини властивості цих кривих та споріднених з ними поверхонь, іноді інтуїтивно, використовувалися при проектуванні та побудові споруд античності та середньовіччя. Новий поштовх дослідженням цих кривих надало винайдення Декартом методу координат. Новий систематизований погляд на криві другого порядку було викладено Ойлером у його праці «Вступ до аналізу нескінченних». Згодом, дослідження кривих і поверхонь другого порядку та пов'язаних з ними квадратичних форм сприяло швидкому розвитку математичної фізики, теорії пружності, опору матеріалів та багатьох інших прикладних дисциплін.

3.9.2 Загальна форма запису рівняння кривої другого порядку

Нехай розташування точок на площині віднесено до двох осей координат, x та y прямокутної декартової системи координат. Будемо досліджувати лише ті криві на цій площині, рівняння яких утворюються за допомогою множення координат точок кривої між собою та на довільні сталі дійсні числа, а також додавання отриманих добутків між собою. Порядком рівняння будемо називати найстарший сумарний степінь добутку координат, що входить до такого рівняння. За нашим визначенням порядку, рівняння прямої у загальній формі запису, $Ax + By + C = 0$, є рівнянням кривої першого порядку, а рівнянням кривої другого порядку у *загальній формі запису* буде рівняння

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Для подальшого вивчення властивостей кривих другого порядку трохи видозмінимо це рівняння, ввівши такі позначення: $A = a_{11}$, $B = 2a_{12}$, $C = a_{22}$, $D = 2a_{13}$, $E = 2a_{23}$,$F = a_{33}$. Тоді матимемо таке рівняння:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0. \tag{3}$$

Надалі, за умови що a_{11}, a_{12} і a_{22} не дорівнюють нулю одночасно, будемо називати саме (3) *загальним рівнянням кривої другого порядку*. Перші три доданки у лівій частині рівняння (3) називаються *квадратичною формою* відносно змінних x та y.

3.9.3 Класифікація кривих другого порядку

Загальну форму запису рівняння кривої другого порядку може бути спрощено шляхом двох простих перетворень, а саме, перетворення обертання відносно початку координат:

$$\begin{cases} x = x' \cos\varphi - y' \sin\varphi; \\ y = x' \sin\varphi + y' \cos\varphi; \end{cases} \tag{4}$$

та перетворення перенесення початку координат:

$$\begin{cases} x = \overline{x} + x_0; \\ y = \overline{y} + y_0; \end{cases} \tag{5}$$

де кут φ, x_0 та y_0 є параметрами перетворень.

Подібні перетворення дуже часто використовуються у обчислювальних процедурах сучасних сіткових методів, які значно спрощують розв'язання задач, пов'язаних з визначенням несучої здатності конструкцій, визначення характеристик різноманітних приладів тощо.

Спочатку визначимо кут, на який слід повернути систему координат, щоб позбутися добутку координат у рівнянні (3). Підставивши (4) до (3) і прирівнявши коефіцієнт при $x'y'$ до нуля, отримаємо відому з теорії головних напружень у опорі матеріалів та теорії головних моментів інерції у теоретичній механіці формулу (перевірте!):

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2a_{12}}{a_{22} - a_{11}}. \tag{6}$$

Після повороту на кут, що визначається рівнянням (6), нові коефіцієнти при x'^2 та y'^2 можна отримати за відомими формулами:

$$\begin{aligned} &a'_{11} = \frac{1}{2}\left[(a_{11} + a_{22}) - sign\,(a_{22} - a_{11})\sqrt{D}\right]; \\ &a'_{22} = \frac{1}{2}\left[(a_{11} + a_{22}) + sign\,(a_{22} - a_{11})\sqrt{D}\right]; \\ &D = (a_{22} - a_{11})^2 + 4a_{12}^2, \end{aligned} \tag{7}$$

де через $sign$ позначено функцію знаку виразу у дужках (дорівнює -1, якщо вираз від'ємний, 1, якщо додатний, і 0, якщо дорівнює нулеві).

Остаточне спрощення загального рівняння виконується за допомогою виокремлення у ньому повних квадратів і вибору відповідних параметрів перетворення (5) з метою отримання рівняння, у якому б не було доданків з $\overline{x}$ та $\overline{y}$ у перших степенях.

Загалом, оскільки, очевидно, перетворення (5) не змінить значень коефіцієнтів при квадратах x та y, класифікацію кривих другого порядку можна виконати за цими коефіцієнтами. Можливі такі випадки:

1. Коефіцієнти a'_{11} і a'_{22} мають однакові знаки.

2. Коефіцієнти a'_{11} і a'_{22} мають різні знаки.

3. Один з коефіцієнтів a'_{11} чи a'_{22} дорівнює нулеві.

У першому з випадків криву називають *еліпсом*, у другому — *гіперболою*, у третьому — *параболою*.

Розглянемо властивості кожної з цих кривих окремо.

3.9.4 Еліпс

Якщо a'_{11} і a'_{22} мають однакові знаки і перетворене рівняння задовольняється хоча б для декількох точок площини, це перетворене рівняння, $a'_{11}\overline{x}^2 + a'_{22}\overline{y}^2 + a'_{33} = 0$, можна звести до такого вигляду:

$$\frac{\overline{x}^2}{a^2} + \frac{\overline{y}^2}{b^2} = 1. \tag{8}$$

Рівняння (8) називають *канонічним рівнянням еліпса*.

У класичній евклідовій геометрії еліпс визначається як геометричне місце точок, сума відстаней від яких до двох заданих точок (які ми називатимемо *фокусами еліпса*) є величиною сталою.

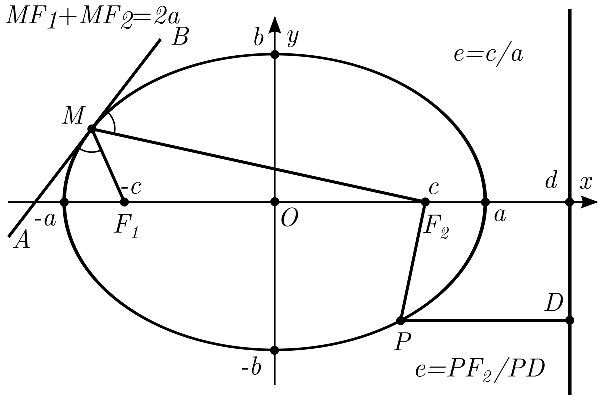


Рис. 1: Еліпс

Покажемо, що з класичного означення слідує означення за допомогою канонічного рівняння. Нехай маємо еліпс з фокусами $F_1\left(-c;0\right)$ та $F_2\left(c;0\right)$ (Рис. 1) та точку $M\left(x;y\right)$, а сума відстаней F_1M та F_2M дорівнює $2a$. Тоді,

$$F_1M=\sqrt{\left(x+c\right)^2+y^2};F_2M=\sqrt{\left(x-c\right)^2+y^2};$$

$$F_1M+F_2M=\sqrt{\left(x+c\right)^2+y^2}+\sqrt{\left(x-c\right)^2+y^2}=2a.$$

Перенесемо перший радикал до правої частини і обидві частини знайденого рівняння піднесемо до квадрата:

$$\left(x-c\right)^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{\left(x+c\right)^2+y^2}+\left(x+c\right)^2+y^2.$$

Розкриваючи дужки і зводячи подібні, знайдемо після скорочення на 4:

$$a\sqrt{\left(x+c\right)^2+y^2}=a^2+cx.$$

Піднесемо обидві частини цього рівняння до квадрата і виокремимо доданки з квадратами x та y:

$$\left(a^2-c^2\right)x^2+a^2y^2=a^2\left(a^2-c^2\right).$$

Оскільки $a>c$, позначимо $a^2-c^2=b^2$ і поділимо обидві частини рівняння на a^2b^2:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Відстані F_1M та F_2M називаються *фокальними радіусами* точки M і позначаються r_1 та r_2. Підставивши y з канонічного рівняння еліпса до виразів для F_1M та F_2M, дістанемо:

$$r_1=a-\frac{c}{a}x;r_2=a+\frac{c}{a}x.$$

Зауважимо, що з канонічного рівняння еліпса випливає, що значення координат точок, що лежать на еліпсі, є обмеженими (оскільки для x та y, що задовольняють цьому рівнянню, мають виконуватися нерівності $-a\leqslant x\leqslant a$ та $-b\leqslant y\leqslant b$). З того, що до канонічного рівняння входять координати точки еліпса лише у парних степенях, дістаємо, що коли точка $M\left(x;y\right)$ належить еліпсу, то і точки $M_1\left(-x;y\right)$, $M_2\left(x;-y\right)$ і $M_3\left(-x;-y\right)$ також належать еліпсу. Отже, еліпс має вертикальну та горизонтальну осі симетрії, а також центр симетрії.

Крива, що має центр симетрії, називається *центральною*.

Наявність осей симетрії (ними, зокрема, є осі координат) дає змогу виконувати побудову еліпса лише в одній координатній чверті, а потім здійснювати дзеркальне відображення відносно осей і початку координат.

Точки перетину еліпса з осями координат можна визначити з канонічного рівняння, підставивши до нього послідовно $x=0$ та $y=0$. Цими точками є точки з координатами $(-a;0)$, $(a;0)$, $(0;-b)$ та $(0;b)$. Ці точки називаються вершинами еліпса (рис. 1).

Рекомендація студентам:

Побудову ескізу еліпса слід розпочинати саме з побудови вершин.

Величини $2a$ і $2b$ називаються *осями еліпса*, а a і b — *напівосями*.

Якщо $a=b$, то еліпс перетворюється на коло, а $c=\sqrt{a^2-b^2}$ стає рівним нулеві. Тому вводять характеристику еліпса, і загалом кривих другого порядку, яку називають *ексцентриситетом* і обчислюють за такою формулою:

$$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}.$$

Для еліпса ексцентриситет лежить у межах $0\leqslant e<1$. Видовженіші еліпси мають більший ексцентриситет.

Прямі $x=\pm\dfrac{a}{e}$ називаються *директрисами*(напрямними) еліпса (на рис. 1 такою директрисою є пряма dD). Особливістю директриси є те, що відношення фокального радіуса будь-якої точки еліпса до відповідної відстані до директриси є величиною сталою, що дорівнює ексцентриситету.

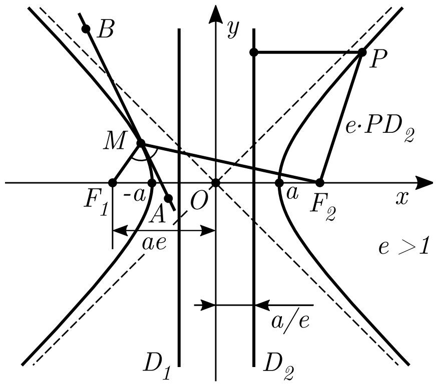


Рис. 2: Гіпербола

3.9.5 Гіпербола

Якщо a'_{11} і a'_{22} мають різні знаки, перетворене рівняння, $a'_{11}\overline{x}^2 + a'_{22}\overline{y}^2 + a'_{33} = 0$, можна звести до такого вигляду:

$$\frac{\overline{x}^2}{a^2} - \frac{\overline{y}^2}{b^2} = \pm 1. \tag{9}$$

Рівняння (9) називають *канонічним рівнянням гіперболи*. Для визначеності, у подальшому в основному будемо розглядати випадок рівняння гіперболи, у якому у правій частині (9) стоїть 1 (основне рівняння). Випадок рівняння з -1 у правій частині зводиться до цього випадку переставлянням координат x та y. Гіпербола, яка відповідає цьому випадку, називається *спряженою гіперболою*.

За класичним означенням, відомим ще з часів античності, гіперболою називається геометричне місце точок площини, модуль різниці відстаней кожної з яких до двох наперед заданих точок, які називаються *фокусами*, є величиною сталою.

Використаємо для доведення того, що з цього означення випливає означення за допомогою канонічного рівняння гіперболи, позначення, наведені на рис. 2.

Нехай маємо гіперболу з фокусами $F_1\,(-c;0)$ та $F_2\,(c;0)$ та точку $M\,(x;y)$, а модуль різниці відстаней F_1M та F_2M дорівнює $2a$. Тоді,

$$F_1M = \sqrt{(x+c)^2 + y^2};\, F_2M = \sqrt{(x-c)^2 + y^2};$$

$$|F_1M - F_2M| = \left|\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right| = 2a.$$

Діючи у спосіб, аналогічний до використаного раніше для еліпса, знайдемо

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

де $b^2 = c^2 - a^2$. З цього рівняння маємо:

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}\left(x^2 - a^2\right),$$

звідки $|x| \geqslant a$. Лінія гіперболи складається з двох частин, для $x \leqslant -a$ та для $x \geqslant a$, відповідно. Ці частини називаються *лівою та правою гілками гіперболи*.

Як і для еліпса, довжини відрізків F_1M та F_2M називаються фокальними радіусами точки M і позначаються r_1 та r_2. Підставивши вираз для y з канонічного рівняння до рівнянь для F_1M та F_2M можна знайти, наприклад, для лівої гілки

$$\begin{cases} r_1 = -a - \dfrac{c}{a}x; \\ r_2 = a - \dfrac{c}{a}x. \end{cases}$$

Так само, як і еліпс, гіпербола є симетричною відносно координатних осей і має центр. У випадку основного рівняння гіперболи точки перетину лінії гіперболи з осями координат, $(-a;0)$ та $(a;0)$ називаються *вершинами гіперболи*. Відстань між ними, $2a$, називається *дійсною віссю гіперболи*, а відстань між вершинами спряженої гіперболи, $(0;-b)$ та $(0;b)$, $2b$, називається *уявною віссю гіперболи*.

Якщо у виразі для знаходження y з канонічного рівняння гіперболи:

$$y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2},$$

припустити, що x є дуже великою величиною, можна вважати що a^2 змінює вираз під коренем незначно. Тоді маємо

$$y = \pm\frac{b}{a}x. \tag{10}$$

Рівняння прямих (10), до яких гранично наближається лінія гіперболи при віддаленні від початку координат, називаються рівняннями *асимптот гіперболи.* На рис. 2 асимптоти позначено штриховими лініями.

Рекомендація студентам:

Побудову ескізу гіперболи слід розпочинати з побудови вершин та асимптот.

Гіпербола, у рівнянні якої $a = b$, називається *рівнобічною.* Асимптотами такої гіперболи є бісектриси чвертей координатної системи.

Ексцентриситетом гіперболи називають величину

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}.$$

Для гіперболи ексцентриситет $e > 1$.

Прямі $x = \pm\frac{a}{e}$ називаються *директрисами*(напрямними) гіперболи (на рис. 2 директриси позначено D_1 та D_2. Особливістю директриси є те, що відношення фокального радіуса будь-якої точки гіперболи до відповідної відстані до директриси є величиною сталою, що дорівнює ексцентриситету.

3.9.6 Парабола

Якщо, наприклад, $a'_{11} = 0$ перетворене рівняння, $a'_{22}\overline{y}^2 + 2a'_{13}\overline{x} = 0$, можна звести до такого вигляду:

$$y^2 = 2px. \tag{11}$$

Рівняння (11) називається *канонічним рівнянням параболи.*

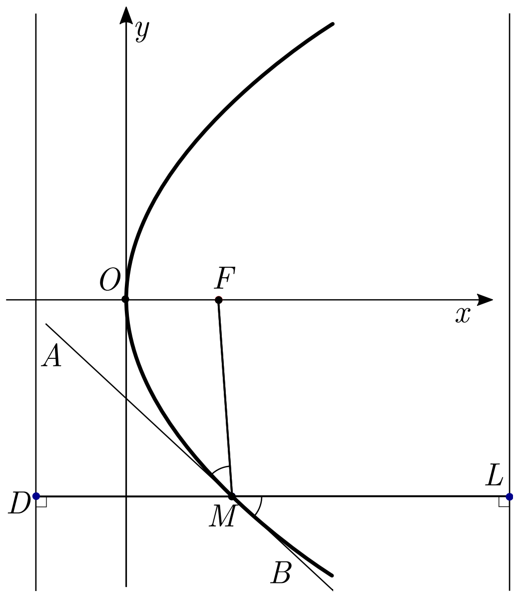


Рис. 3: Парабола

За класичним означенням, параболою називається геометричне місце точок площини, рівновіддалених від фіксованої точки (*фокуса*) та фіксованої прямої (*директриси*), що не проходить через цю точку.

Позначивши відстань між прямою і фокусом через p і розташувавши початок координат на рівній відстані від фокуса F і директриси D (Рис. 3), матимемо для точки $M\,(x; y)$ на параболі $MD = MF$ або

$$x + \frac{p}{2} = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}.$$

Звідки маємо

$$y^2 = 2px.$$

Парабола є симетричною лише відносно вісі y, тому не є центральною кривою (не має центра).

Ексцентриситет параболи з міркувань щодо відстані точок параболи від директриси та фокуса слід прийняти рівним одиниці: $e = 1$.

Парабола (третій з рисунків 4) є проміжним *конічним перерізом* між еліпсом і гіперболою. Оскільки усі криві другого порядку є конічними перерізами, проблеми, пов'язані з розрахунками на міцність та проектувальними розрахунками елементів конструкцій з граничними точками, що лежать на кривих другого порядку є доволі важливими.

Крім того, усі криві другого порядку мають властивості, які називають *оптичними.* Використання цих властивостей при проектуванні дає змогу керувати освітленістю та акустикою всередині будівель. На рис. 1 — 2 оптичні властивості визначають рівність між собою кутів $\angle AMF_1 = \angle BMF_2$, а на рис. 3 — рівність кутів $\angle AMF = \angle BML$.

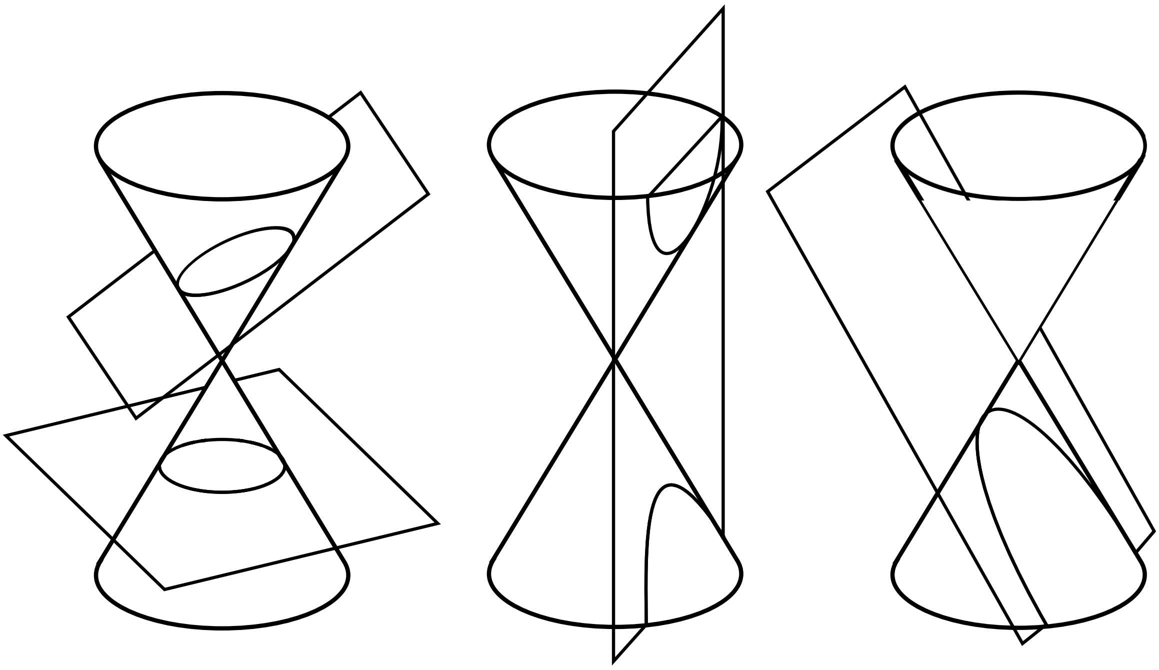


Рис. 4: Конічні перерізи

Отже, промінь світла або будь-яка інша хвиля, запущена з одного фокуса еліпса на його дзеркальну поверхню, потрапить до іншого фокуса. Цю властивість можна використати для побудови еліптичних дзеркал, що концентрують сонячну енергію, яка на них потрапляє, у певній, потрібній будівельнику, точці, або для звукової ізоляції певних частин приміщення або будівлі від відбитого від стін шуму.

Оптичні властивості параболи використовують для концентрації хвиль у фокусі (параболічні антени) або створення паралельного потоку хвиль, що надходять від точкового джерела випромінювання (прожектори і гучномовці).

Полярне рівняння кривих другого порядку. Загальним рівнянням кривих другого порядку у полярній системі координат є рівняння

$$r = \frac{p}{1 - e\cos\varphi},$$

де p — так званий фокальний параметр, e — ексцентриситет. Полярну систему координат при цьому буде розташовано так, що полюс перебуватиме у фокусі, а полярну вісь буде спрямовано у бік, протилежний до найближчої до цього фокуса директриси.

Перетин кривої другого порядку з прямою. Для визначення можливих випадків перетину кривої другого порядку та прямої використаємо загальне рівняння кривої другого порядку і рівняння прямої у параметричній формі запису:

$$\begin{cases} x = x_0 + lt; \\ y = y_0 + mt, \end{cases} \tag{12}$$

де виберемо компоненти напрямного вектора прямої, $\overrightarrow{u} = (l; m)$ так, щоб $|\overrightarrow{u}| = 1$. Підставивши (12) до загального рівняння кривої другого порядку, отримаємо таке квадратне рівняння відносно t (перевірте!):

$$Lt^2 + 2Mt + N = 0,$$

де

$$L = a_{11}l^2 + 2a_{12}lm + a_{22}m^2;$$
$$M = l\left(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}\right) + m\left(a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}\right);$$
$$N = a_{11}x_0^2 + 2a_{12}x_0y_0 + a_{22}y_0^2 + 2a_{13}x_0 + 2a_{23}y_0 + a_{33}.$$

Якщо позначити можливі точки перетину через M_1 (цій точці поставимо у відповідність значення параметра $t = t_1$) та M_2 ($t = t_2$), матимемо такі випадки для коренів отриманого квадратного рівняння:

1) Дискримінант рівняння, $LN - M^2$, є більшим за нуль, а $N \neq 0$. Тоді матимемо дві точки перетину прямої і кривої, які не збігаються з точкою $M_0\,(x_0; y_0)$, через яку проведено пряму. Відрізок перетину, M_1M_2, у цьому випадку називається *хордою* (подібно до хорди при перетині прямої і кола). $M_1M_0 = |t_1|$, а $M_2M_0 = |t_2|$ (подумайте, чому). Якщо крива другого порядку є центральною (еліпс або гіпербола), хорди, що проходять через центр, називаються *діаметрами кривої другого порядку.*

Оскільки усі діаметри поділятимуться центром навпіл (отже, якщо M_0 — центр, то $t_1 + t_2 = 0$), з теореми Вієта отримуємо умову для пошуку центрів кривих другого порядку. Ця умова полягає у тому, що $M = 0$. Оскільки напрямний вектор прямої може бути вибрано довільним чином, отримуємо такі *умови для пошуку центра*:

$$\begin{cases} a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13} = 0; \\ a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23} = 0. \end{cases}$$

2) Дискримінант рівняння, $LN - M^2$, є більшим за нуль, а $N = 0$. Тоді маємо дві точки перетину, а точка M_0 збігається з точкою M_1 або M_2.

3) $M = N = 0$, $L \neq 0$ — усі точки M_0, M_1 та M_2 стягуються у одну точку. Отже, маємо дотик кривої і прямої. Виразивши l та m з параметричного рівняння прямої, рівняння дотичної у цьому випадку можна записати так:

$$F_x (x - x_0) + F_y (y - y_0) = 0,$$

де

$$F_x = a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}; F_y = a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}.$$

4) $N = L = 0$ — одна точка перетину (пряма паралельна до вісі симетрії параболи).

5) $L = M = 0$, $N \neq 0$ — пряма і крива другого порядку не перетинаються. Таке можливо, якщо ми маємо справу з прямою поза межами еліпса чи параболи або асимптотою гіперболи. Тому зі співвідношення $L = 0$, можна отримати умову асимптотичності прямої:

$$a_{11}l^2 + 2a_{12}lm + a_{22}m^2 = 0.$$

3.9.7 Загальна схема зведення рівняння кривої другого порядку до канонічного вигляду

З теорії квадратичних форм відомо, що якщо записати коефіцієнти при старших степенях у загальному рівнянні кривої другого порядку у формі матриці:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix},$$

то оскільки матриця симетрична (елемент на другій позиції першого рядка дорівнює елементу на першій позиції другого рядка), власні вектори лінійного оператора, який вона задає, будуть перпендикулярні. Власні значення цього оператора, λ_1 та λ_2, будуть коефіцієнтами у канонічному вигляді квадратичної форми загального рівняння, яку можна отримати шляхом повороту та перенесення початку координат початкової системи координат. Тобто, зробивши деяку заміну вигляду

$$x = b_{11}x_1 + b_{12}y_1 + x_0;$$
$$y = b_{21}x_1 + b_{22}y_1 + y_0;$$

ми можемо отримати канонічний вигляд квадратичної форми. Якщо квадратична форма не є виродженою (задає криву саме *другого* порядку), у випадку, якщо λ_1 та λ_2 одного знаку, матимемо еліпс, якщо різних — гіперболу, якщо одне з власних значень рівне нулю — параболу. Канонічним виглядом нашого рівняння буде (еліпс або гіпербола):

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 y_1^2 + a_{33}^{'} = 0$$

або (парабола)

$$y_1^2 + a_{13}^{'} x_1 = 0.$$

При цьому напрямок осей нової системи координат, $x_1O_1y_1$ визначається власними векторами, що відповідають власним значенням λ_1 та λ_2 відповідно.

Отже схема зведення рівняння кривої до канонічного вигляду має бути такою:

Записати матрицю A та знайти власні значення та власні вектори лінійного оператора, який нею задається.

За допомогою власних векторів знайти підстановку, що повертає координати до напрямків, що збігаються з напрямками канонічної системи координат.

Виділивши повні квадрати відносно нових змінних у перетвореному рівнянні, встановити положення початку координат канонічної системи координат та остаточний вигляд канонічного рівняння кривої другого порядку.

3.9.8 Інваріанти загального рівняння лінії другого порядку

Іншим способом аналізу загального рівняння є інваріанти.

Інваріантом перетворення повороту координатної системи та перенесення початку координат для загального рівняння кривої другого порядку є функції параметрів цього рівняння, які не змінюють свого значення після перетворення.

Основними інваріантами загального рівняння кривої другого порядку є

$$I_1 = a_{11} + a_{22}; I_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}; I_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

За інваріантами можна побудувати загальну класифікацію ліній другого порядку таким чином:

Умова	Рівняння	Назва лінії
$I_2 \neq 0; I_3 \neq 0$	$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 y_1^2 + \dfrac{I_3}{I_2} = 0$	$I_2 > 0; I_2 I_3 < 0$ — еліпс
		$I_2 > 0; I_2 I_3 > 0$ — уявний еліпс
		$I_2 < 0$ — гіпербола
$I_2 = 0; I_3 \neq 0$	$\lambda_1 y_1^2 \pm \sqrt{-\dfrac{I_3}{I_1}} x_1 = 0$	парабола
$I_3 = 0; I_2 \neq 0$	$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 y_1^2 = 0$	$I_2 > 0$ — точка
		$I_2 < 0$ — дві прямі, що перетинаються
$I_3 = 0; I_2 = 0$	$\lambda_1 x_1^2 + a'_{33} = 0$	$a'_{33}\lambda_1 > 0$ — дві уявні прямі
		$a'_{33}\lambda_1 < 0$ — дві паралельні прямі
		$a'_{33} = 0$ — одна пряма

Поєднуючи класифікацію за допомогою інваріантів з рівняннями для визначення центра лінії другого порядку, можна визначити канонічну форму рівняння, тип кривої та її розташування у початковій системі координат взагалі не виконуючи ніяких перетворень загального рівняння кривої. У подібний же спосіб виконується аналіз плоского напруженого стану чи характеристик інерції плоского перерізу.

3.9.9 Опорні задачі

Вправа 1.Дано гіперболу $16x^2 - 9y^2 = 25$. Знайти: 1) напіввісі a та b; 2) фокуси; 3) ексцентриситет; 4) рівняння асимптот; 5) рівняння директрис.

Розв'язання

1) Для визначення a та b приведемо рівняння до канонічного вигляду, поділивши обидві його частини на 25 (так, щоб отримати у правій частині рівняння 1):

$$\frac{x^2}{\frac{25}{16}} - \frac{y^2}{\frac{25}{9}} = 1.$$

Порівнюючи отриманий результат з загальною формою запису канонічного рівняння, отримуємо

$$a = \sqrt{\frac{25}{16}} = \frac{5}{4}; b = \sqrt{\frac{25}{9}} = \frac{5}{3}.$$

2) За відомою формулою напіввідстань між фокусами, c, для гіперболи можна знайти з рівності $c^2 = a^2 + b^2$. Отже,

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{\frac{25}{16} + \frac{25}{9}} = \frac{25}{12}.$$

Оскільки маємо справу з основним рівнянням (перевірте!), фокуси буде розташовано у точках $F_1\left(-\dfrac{25}{12}; 0\right)$ та $F_2\left(\dfrac{25}{12}; 0\right)$.

3) Значення ексцентриситету гіперболи обчислюється за формулою $e = \dfrac{c}{a}$. Отже, у нашій задачі $e = \dfrac{25}{12}\Big/\dfrac{5}{4} = \dfrac{5}{3}$.

4) Асимптоти гіперболи мають рівняння $y = \pm\dfrac{b}{a}x$. Отже, у нашій задачі рівняннями асимптот будуть такі рівняння:

$$y = \pm\frac{4}{3}x.$$

5) Директрисами будуть прямі $x = \pm\dfrac{a}{e}$. Отже, у нашій задачі $x = \pm\dfrac{5}{4}\Big/\dfrac{5}{3} = \pm\dfrac{3}{4}$.

Вправа 3. Знайти рівняння гіперболи, якщо її ексцентриситет $e = 2$ і фокуси збігаються з фокусами еліпса $9x^2 + 25y^2 = 225$.

Розв'язання

Приводимо рівняння еліпса до канонічного вигляду діленням обох його частин на 225. Оскільки $225/9 = 25$, а $225/25 = 9$, маємо

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

Отже, велика напіввісь дорівнює $\sqrt{25} = 5$, мала напіввісь дорівнює $\sqrt{9} = 3$, а фокуси еліпса розташовано на вісі x. Для еліпса половина відстані між фокусами обчислюється як корінь квадратний з різниці квадратів великої і малої напівосей еліпса. Тому, $c = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$. Оскільки фокуси гіперболи за умовою збігаються з фокусами еліпса, це значення є напіввідстанню між фокусами гіперболи.

Далі, ексцентриситет гіперболи визначається з формули $e = c/a$. Тому напіввісь гіперболи можна знайти за формулою $a = c/e = 4/2 = 2$.

Крім того, іншу піввісь можна знайти з формули $b^2 = c^2 - a^2$. Отже, $b = \sqrt{4^2 - 2^2} = \sqrt{12}$. Остаточно, рівнянням шуканої гіперболи буде

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1.$$

Вправа 3. Використовуючи теорію квадратичних форм, звести рівняння кривої другого порядку до канонічного вигляду. Зобразити стару та нову системи координат та накреслити криву.

$$x^2 + y^2 - 4xy - 2x + 4y = 1$$

Розв'язання

У нашому випадку матриця A матиме вигляд (оскільки коефіцієнт при xy є подвоєним значенням a_{12}, в нашому випадку $a_{12} = \dfrac{-4}{2} = -2$):

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Власні значення знаходимо з рівняння $\begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$ або, після розкриття визначника, $\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$.

Розв'язками цього рівняння є, очевидно, $\lambda_1 = -1; \lambda_2 = 3$. Ці значення різних знаків, отже маємо рівняння гіперболи.

Почергово знайдемо власні вектори, що відповідають цим власним значенням:

$$\lambda_1 = -1 : \begin{pmatrix} 1-(-1) & -2 \\ -2 & 1-(-1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow 2a_1 - 2a_2 = 0, \Rightarrow a_1 = a_2.$$

Якщо тепер покласти $a_2 = C$, то можна записати власний вектор $\vec{u}_1$, що відповідає власному значенню $\lambda_1 = -1$, у вигляді $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C \\ C \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Аналогічно знаходимо для власного значення $\lambda_2 = 3$

$$\begin{pmatrix} 1-3 & -2 \\ -2 & 1-3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow 2a_1 + 2a_2 = 0, \Rightarrow a_1 = -a_2 = -C.$$

$$\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -C \\ C \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Для знаходження першої підстановки нам слід знайти одиничні вектори напрямлені за власними векторами. Для цього слід розділити кожну компоненту власного вектора на його модуль отримані значення будуть компонентами ортів нової системи координат у початковій системі координат:

$$\vec{v}_1 = \frac{\vec{u}_1}{|\vec{u}_1|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}; \quad \vec{v}_2 = \frac{\vec{u}_2}{|\vec{u}_2|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}.$$

Координати цих ортів є коефіцієнтами при x та y у виразах для координат у повернутій системі координат. Тобто координати $x^{'}$ та y' у повернутій системі координат виражаються через x та y так:

$$\begin{aligned} x^{'} &= \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y; \\ y^{'} &= -\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y. \end{aligned}$$

Звідси можемо знайти x та y за допомогою правила Крамера:

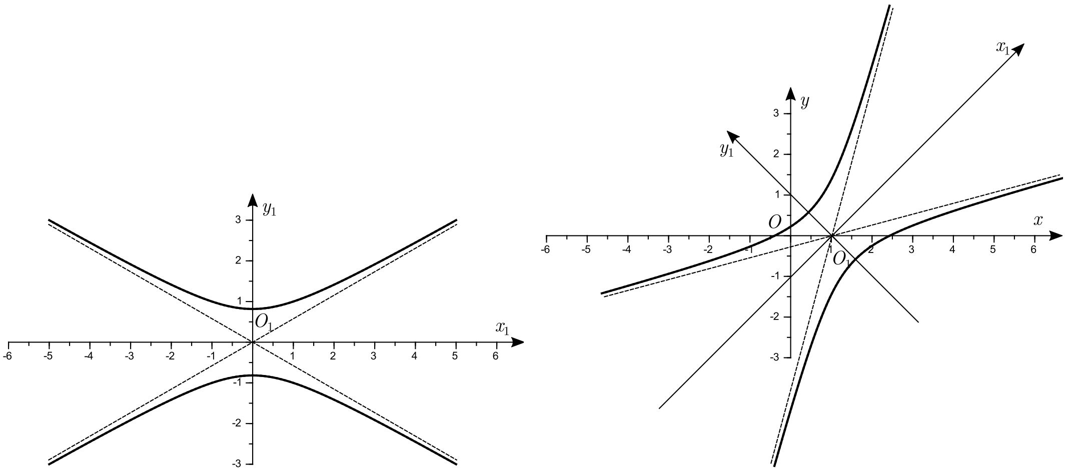
$$\begin{aligned} x &= \frac{\sqrt{2}}{2}x^{'} - \frac{\sqrt{2}}{2}y^{'}; \\ y &= \frac{\sqrt{2}}{2}x^{'} + \frac{\sqrt{2}}{2}y^{'}. \end{aligned} \tag{13}$$

Підставимо отримані значення до вихідного рівняння:

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x^{'} - \frac{\sqrt{2}}{2}y^{'}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}x^{'} + \frac{\sqrt{2}}{2}y^{'}\right)^2 - 4\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x^{'} - \frac{\sqrt{2}}{2}y^{'}\right) \times$$
$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x^{'} + \frac{\sqrt{2}}{2}y^{'}\right) - 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x^{'} - \frac{\sqrt{2}}{2}y^{'}\right) + 4\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x^{'} + \frac{\sqrt{2}}{2}y^{'}\right) = 1$$

Після спрощення матимемо

$$-x^{'2} + 3y^{'2} + \sqrt{2}x^{'} + 3\sqrt{2}y^{'} - 1 = 0.$$



(а) Допоміжна система координат (б) Основна система координат

Рис. 5: Креслення гіперболи

Виокремлюємо повні квадрати

$$-\left(x^{'2}-\sqrt{2}x^{'}+\frac{1}{2}\right)+3\left(y^{'2}+\sqrt{2}y^{'}+\frac{1}{2}\right)-2=0\Rightarrow$$
$$-\left(x^{'}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+3\left(y^{'}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2=2.$$

Виконуючи тепер підстановку

$$\begin{aligned} x_1&=x^{'}-\frac{1}{\sqrt{2}};\\ y_1&=y^{'}+\frac{1}{\sqrt{2}}, \end{aligned} \tag{14}$$

отримуємо канонічну форму рівняння нашої гіперболи

$$\frac{x_1^2}{2}-\frac{y_1^2}{\frac{2}{3}}=-1.$$

Початок нової системи координат $x_1O_1y_1$ — точка O_1, матиме у системі координат $x^{'}Oy^{'}$ координати, що визначаються з рівнянь (14), — $\left(\frac{1}{\sqrt{2}};-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Беручи до уваги рівняння (13), знаходимо координати точки O_1 у початковій системі координат:

$$\begin{aligned} x_0&=\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{2}}{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=1;\\ y_0&=\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{2}}{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=0. \end{aligned}$$

Отже координати точки O_1 у початковій системі координат — $O_1(1;0)$.

Для того щоб правильно намалювати гіперболу, нам слід спочатку визначити положення її вершин та рівняння асимптот у новій системі координат. Очевидно, що маємо справу з другою формою канонічного рівняння гіперболи, коли вершини гіперболи розташовано на вісі y_1. Порівнюючи наше рівняння з загальною формою канонічного рівняння для таких гіпербол $\left(\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1\right)$, маємо: $a=\sqrt{2}; b=\sqrt{\frac{2}{3}}$. Отже, вершини розташовано у точках $y_1=\pm b=\pm\sqrt{\frac{2}{3}}$, а асимптоти мають рівняння $y_1=\pm\frac{b}{a}x_1=\pm\frac{x_1}{\sqrt{3}}$.

Спочатку слід намалювати на окремому малюнку гіперболу у перетвореній системі координат $x_1O_1y_1$, рис. a. Потім намалювати початкову та перетворену системи координат та гіперболу у початковій системі координат, рис. b.

3.9.10 Завдання для аудиторної та самостійної роботи

1. Дано еліпс $9x^2+5y^2=45$. Знайти: 1) його напіввісі; 2) фокуси; 3) ексцентриситет; 4) рівняння директрис.

2. Обчислити площу чотирикутника, дві вершини якого лежать у фокусах еліпса $9x^2+5y^2=1$, дві інші збігаються з кінцями його малої вісі.

3. Знайти точки перетину прямої $3x-4y-40=0$ і еліпса $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$.

4. Скласти рівняння дотичних до еліпса $\frac{x^2}{10} + \frac{2y^2}{5} = 1$, паралельних до прямої $3x + 2y + 7 = 0$.

5. Дано гіперболу $16x^2 - 9y^2 = -144$. Знайти: 1) напіввісі a та b; 2) фокуси; 3) ексцентриситет; 4) рівняння асимптот; 5) рівняння директрис.

6. Точка $A(-3; -5)$ лежить на гіперболі, фокус якої $F(-2; -3)$, а відповідна директриса задана рівнянням $x + 1 = 0$. Скласти рівняння цієї гіперболи.

7. Знайти точки перетину прямої $4x - 3y - 16 = 0$ та гіперболи $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1$.

8. Скласти рівняння дотичних до гіперболи $x^2 - y^2 = 16$, проведених з точки $A(-1; -7)$.

9. Визначити величину параметра та розташування відносно координатних осей таких парабол: 1) $y^2 = 6x$; 2) $x^2 = 5y$; 3) $y^2 = -4x$; 4) $x^2 = -y$.

10. Скласти рівняння параболи, якщо задано її фокус $F(4; 3)$ і директриса $y + 1 = 0$.

11. На еліпсі $\rho = \frac{12}{3 - \sqrt{2}\cos\varphi}$ знайти точки, полярний радіус яких дорівнює 6.

12. Визначити тип кожного з наступних рівнянь за допомогою обчислення власних значень відповідних квадратичних форм: 1) $2x^2 + 10xy + 12y^2 - 7x + 18y - 15 = 0$; 2) $3x^2 - 8xy + 7y^2 + 8x - 15y + 20 = 0$; 3) $25x^2 - 20xy + 4y^2 - 12x + 20y - 17 = 0$; 4) $5x^2 + 14xy + 11y^2 + 12x - 7y + 19 = 0$; 5) $x^2 - 4xy + 4y^2 + 7x - 12 = 0$.

13. Звести рівняння до канонічної форми, визначити тип кожного з них. Для кожного з випадків зобразити на кресленні вісі початкової системи координат та геометричний образ, що визначається вказаним рівнянням: 1) $3x^2 + 10xy + 3y^2 - 2x - 14y - 13 = 0$; 2) $25x^2 - 14xy + 25y^2 + 64x - 64y - 224 = 0$; 3) $4xy + 3y^2 + 16x + 12y - 36 = 0$; 4) $7x^2 + 6xy - y^2 + 28x + 12y + 28 = 0$; 5) $19x^2 + 6xy + 11y^2 + 38x + 6y + 29 = 0$; 6) $5x^2 - 2xy + 5y^2 - 4x + 20y + 20 = 0$.

3.10 Аналітична геометрія у просторі

3.10.1 Рівняння поверхні у просторі

Означення. Будь-яке рівняння, що пов'язує координати x, y, z будь-якої точки поверхні є рівнянням цієї поверхні.

3.10.2 Загальне рівняння площини

Означення. Площиною називається поверхня, всі точки якої задовольняють загальному рівнянню:

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

де A, B, C – координати вектора $\overrightarrow{N} = A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k}$ – вектор **нормалі** до площини.

Можливі наступні окремі випадки:

$A = 0$ – площина паралельна осі Ox

$B = 0$ – площина паралельна осі Oy

$C = 0$ – площина паралельна осі Oz

$D = 0$ – площина проходить через початок координат

$A = B = 0$ – площина паралельна площині xOy

$A = C = 0$ – площина паралельна площині xOz

$B = C = 0$ – площину паралельна площини yOz

$A = D = 0$ – площина проходить через вісь Ox

$B = D = 0$ – площина проходить через вісь Oy

$C = D = 0$ – площина проходить через вісь Oz

$A = B = D = 0$ – площина збігається із площиною xOy

$A = C = D = 0$ – площина збігається із площиною xOz

$B = C = D = 0$ – площина збігається із площиною yOz

3.10.3 Рівняння площини, що проходить через три точки

Для того, щоб через три які-небудь точки простору можна було провести єдину площину, необхідно, щоб ці точки не лежали на одній прямій.

Розглянемо точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$ у загальній декартовій системі координат.

Для того, щоб довільна точка $M(x, y, z)$ лежала в одній площині із точками M_1, M_2, M_3 необхідно, щоб вектори $\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_1M_3}, \overrightarrow{M_1M}$ були компланарні.

$$(\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_1M_3}, \overrightarrow{M_1M}) = 0$$

Таким чином, $\begin{array}{l}\overrightarrow{M_1M} = \{x - x_1; y - y_1; z - z_1\} \\ \overrightarrow{M_1M_2} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\} \\ \overrightarrow{M_1M_3} = \{x_3 - x_1; y_3 - y_1; z_3 - z_1\}\end{array}$

Рівняння площини, що проходить через три точки:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

3.10.4 Рівняння площини за двома точками і вектором, паралельним до площини

Нехай задані точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ і вектор $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$.

Складемо рівняння площини, що проходить через дані точки M_1 і M_2 і довільну точку $M(x, y, z)$ паралельно до вектора $\vec{a}$.

Вектори $\begin{array}{l}\overrightarrow{M_1M} = \{x - x_1; y - y_1; z - z_1\} \\ \overrightarrow{M_1M_2} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}\end{array}$ і вектор $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ мають бути компланарні, тобто

$$(\overrightarrow{M_1M}, \overrightarrow{M_1M_2}, \vec{a}) = 0$$

Рівняння площини:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = 0$$

3.10.5 Рівняння площини за однією точкою і двома векторами, колінеарними площині

Нехай задані два вектори $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ і $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, колінеарні площині. Тоді для довільної точки $M(x,\, y,\, z)$, що належить площині, вектори $\vec{a}, \vec{b}, \overrightarrow{MM_1}$ повинні бути компланарні.

Рівняння площини:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0$$

3.10.6 Рівняння площини за точкою та вектором нормалі

Теорема. *Якщо у просторі задана точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$, то рівняння площини, що проходить через точку M_0 перпендикулярно вектору нормалі $\overrightarrow{N} = (A, B, C)$ має вигляд:*

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

Доведення. Для довільної точки $M(x, y, z)$, що належить площині, складемо вектор $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$. Оскільки вектор $\overrightarrow{N}$ – вектор нормалі, то він перпендикулярний площині, а отже, перпендикулярний і вектору $\overrightarrow{M_0M}$. Тоді скалярний добуток

$$\overrightarrow{M_0M} \cdot \overrightarrow{N} = 0$$

Таким чином, одержуємо рівняння площини

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

Теорему доведено.

3.10.7 Рівняння площини у відрізках

Якщо в загальному рівнянні $Ax + By + Cz + D = 0$ поділити обидві частини на $-D$

$$-\frac{A}{D}x - \frac{B}{D}y - \frac{C}{D}z - 1 = 0,$$

замінивши $-\dfrac{D}{A} = a, \quad -\dfrac{D}{B} = b, \quad -\dfrac{D}{C} = c$, одержимо рівняння площини у відрізках:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

Числа a, b, c є координатами точок перетину площини відповідно з осями x, y, z.

3.10.8 Рівняння площини у векторній формі

$$\vec{r} \cdot \vec{n} = p,$$

де $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ – радіус-вектор поточної точки $M(x, y, z)$, $\vec{n} = \vec{i}\cos\alpha + \vec{j}\cos\beta + \vec{k}\cos\gamma$ – одиничний вектор, що має напрямок перпендикуляра, опущеного на площину з початку координат.

α, β і γ – кути, утворені цим вектором з осями x, y, z.

p – довжина цього перпендикуляра.

У координатах це рівняння має вигляд:

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0.$$

Останнє рівняння називається *нормальним рівнянням площини.*

3.10.9 Відстань від точки до площини

Відстань від довільної точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до площини $Ax + By + Cz + D = 0$ дорівнює:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Приклад. Знайти рівняння площини, знаючи, що точка $P(4; -3; 12)$ – основа перпендикуляра, опущеного з початку координат на цю площину.

$$\overrightarrow{OP} = (4; -3; 12); \quad \left|\overrightarrow{OP}\right| = \sqrt{16 + 9 + 144} = \sqrt{169} = 13;$$
$$\overrightarrow{N} = \left(\frac{4}{13}; -\frac{3}{13}; \frac{12}{13}\right)$$

Таким чином, $A = 4/13$; $B = -3/13$; $C = 12/13$, скористаємося формулою:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$
$$\frac{4}{13}(x-4) - \frac{3}{13}(y+3) + \frac{12}{13}(z-12) = 0$$
$$\frac{4}{13}x - \frac{16}{13} - \frac{3}{13}y - \frac{9}{13} + \frac{12}{13}z - \frac{144}{13} = 0$$
$$\frac{4}{13}x - \frac{3}{13}y + \frac{12}{13}z - \frac{169}{13} = 0$$
$$4x - 3y + 12z - 169 = 0.$$

Приклад. Знайти рівняння площини, що проходить через дві точки $P(2; 0; -1)$ і $Q(1; -1; 3)$ перпендикулярно площини $3x + 2y - z + 5 = 0$.

Вектор нормалі до площини $3x + 2y - z + 5 = 0$, $\overrightarrow{N} = (3; 2; -1)$ паралельний до шуканої площини.

Одержуємо:

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-0 & z+1 \\ 1-2 & -1-0 & 3+1 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} x-2 & y & z+1 \\ -1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$(x-2)(1-8) - y(1-12) + (z+1)(-2+3) = 0$$
$$-7(x-2) + 11y + (z+1) = 0$$
$$-7x + 14 + 11y + z + 1 = 0$$
$$-7x + 11y + z + 15 = 0$$

Приклад. Знайти рівняння площини, що проходить через точки $A(2, -1, 4)$ і $B(3, 2, -1)$ перпендикулярно площини $x + y + 2z - 3 = 0$.

Шукане рівняння площини має вигляд: $Ax+By+Cz+D = 0$, вектор нормалі до цієї площини $\overrightarrow{n_1} = (A, B, C)$. Вектор $\overrightarrow{AB} = (1, 3, -5)$ належить площині. Задана нам площина, перпендикулярна шуканої має вектор нормалі $\overrightarrow{n_2} = (1, 1, 2)$. Оскільки точки A та B належать обом площинам, а площини взаємно перпендикулярні, то

$$\overrightarrow{n_1} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{n_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 3 & -5 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 11\vec{i} - 7\vec{j} - 2\vec{k}.$$

Таким чином, вектор нормалі $\vec{n_1} = (11, -7, -2)$. Оскільки точка A належить шуканій площині, то її координати повинні задовольняти рівнянню цієї площини, тобто $11 \cdot 2 + 7 \cdot 1 - 2 \cdot 4 + D = 0$; $D = -21$.

Отже, одержуємо рівняння площини: $11x - 7y - 2z - 21 = 0$.

Приклад. Знайти рівняння площини, знаючи, що точка $P(4, -3, 12)$ – основа перпендикуляра, опущеного з початку координат на цю площину.

Знаходимо координати вектора нормалі $\overrightarrow{OP} = (4, -3, 12)$. Шукане рівняння площини має вигляд: $4x - 3y + 12z + D = 0$. Для знаходження коефіцієнта D підставимо в рівняння координати точки P:

$$16 + 9 + 144 + D = 0$$
$$D = -169$$

Разом, одержуємо шукане рівняння: $4x - 3y + 12z - 169 = 0$.

Приклад. Дано координати вершин піраміди $A_1(1;0;3)$, $A_2(2;-1;3)$, $A_3(2;1;1)$, $A_4(1;2;5)$.

1. Знайти довжину ребра A_1A_2.

$$\overrightarrow{A_1A_2} = \{2-1; -1-0; 3-3\} = \{1; -1; 0\}\,; \quad \left|\overrightarrow{A_1A_2}\right| = \sqrt{1+1+0} = \sqrt{2}(\text{од}).$$

2. Знайти кут між ребрами A_1A_2 і A_1A_4.

$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{A_1A_4} = \{1-1; 2-0; 5-3\} = \{0; 2; 2\}\\
&\left|\overrightarrow{A_1A_4}\right| = 2\sqrt{2}(\text{од})\\
&\overrightarrow{A_1A_2} \cdot \overrightarrow{A_1A_4} = (1; -1; 0)(0; 2; 2) = -2\\
&\overrightarrow{A_1A_2} \cdot \overrightarrow{A_1A_4} = \left|\overrightarrow{A_1A_2}\right| \left|\overrightarrow{A_1A_4}\right| \cos\alpha = 2\sqrt{2}\sqrt{2}\cos\alpha = 4\cos\alpha\\
&\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{A_1A_2} \cdot \overrightarrow{A_1A_4}}{\left|\overrightarrow{A_1A_2}\right| \left|\overrightarrow{A_1A_4}\right|} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}; \quad \alpha = 120^\circ
\end{aligned}$$

3. Знайти кут між ребром A_1A_4 і гранню $A_1A_2A_3$.

   Спочатку знайдемо вектор нормалі до грані $A_1A_2A_3$, $\vec{N}$, як векторний добуток векторів $\overrightarrow{A_1A_3}$ і $\overrightarrow{A_1A_2}$.

$$\overrightarrow{A_1A_3} = (2-1; 1-0; 1-3) = (1; 1; -2);$$

$$\vec{N} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \vec{i}(0-2) - \vec{j}(0+2) + \vec{k}(-1-1) = -2\vec{i} - 2\vec{j} - 2\vec{k}; \quad \vec{N} = (-2; -2; -2)$$
$$\left|\vec{N}\right| = 2\sqrt{3}$$

   Знайдемо кут між вектором нормалі і вектором $\overrightarrow{A_1A_4}$.

$$\vec{N} \cdot \overrightarrow{A_1A_4} = \left|\vec{N}\right| \cdot \left|\overrightarrow{A_1A_4}\right| \cos\beta = 2\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{2}\cos\beta$$
$$\vec{N} \cdot \overrightarrow{A_1A_4} = -4 - 4 = -8.$$

   Шуканий кут γ між вектором і площиною буде дорівнює $\gamma = 90^\circ - \beta$.

$$\sin\gamma = \cos\beta = \frac{|-8|}{4\sqrt{6}} = \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{3}.\gamma = \arcsin\frac{\sqrt{6}}{3}$$

4. Знайти площу грані $A_1A_2A_3$.

$$S = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{A_1A_2} \times \overrightarrow{A_1A_3}\right| = \frac{1}{2}\left|\vec{N}\right| = \sqrt{3}(\text{од}^2)$$

5. Знайти об'єм піраміди.

$$V = \frac{1}{6}\left|\left(\left(\overrightarrow{A_1A_2} \times \overrightarrow{A_1A_3}\right) \cdot \overrightarrow{A_1A_4}\right)\right| = \left|\frac{1}{6}\vec{N} \cdot \overrightarrow{A_1A_4}\right| = \frac{4}{3}(од^3).$$

6. Знайти рівняння площини $A_1A_2A_3$.

   Скористаємося формулою рівняння площини, що проходить через три точки.

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-0 & z-3 \\ 2-1 & -1-0 & 3-3 \\ 2-1 & 1-0 & 1-3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-1 & y & z-3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = (x-1) \cdot 2 - y(-2) + (z-3)(1+1) =$$
$$= 2x - 2 + 2y + 2z - 6 = 0$$

$$2x + 2y + 2z - 8 = 0;$$
$$x + y + z - 4 = 0;$$

3.10.10 Рівняння лінії у просторі

Лінія у просторі може бути визначена і інакше. Її можна розглядати як лінію перетину двох поверхонь, кожна з яких задана якимось рівнянням.

Нехай $F(x, y, z) = 0$ і $\Phi(x, y, z) = 0$ – рівняння поверхонь, що перетинаються уздовж лінії L.

Тоді пари рівнянь

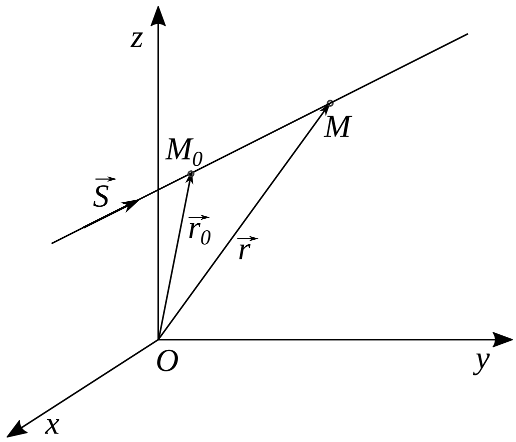
$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ \Phi(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

назвемо **рівнянням лінії у просторі**.

3.10.11 Рівняння прямої у просторі за точкою та напрямним вектором

Розгляньмо довільну пряму і вектор $\vec{S} = (m, n, p)$, паралельний даній прямій. Вектор $\vec{S}$ називається **напрямним вектором** прямої.

На прямій візьмемо дві довільні точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ і $M(x, y, z)$.



Позначимо радіус-вектори цих точок як $\overrightarrow{r_0}$ і $\vec{r}$, тоді $\vec{r} - \overrightarrow{r_0} = \overrightarrow{M_0M}$.

Оскільки вектори $\overrightarrow{M_0M}$ і $\vec{S}$ колінеарні, має виконуватися співвідношення $\overrightarrow{M_0M} = \vec{S}t$, де t – деякий параметр.

Разом, можна записати: $\vec{r} = \overrightarrow{r_0} + \vec{S}t$.

Оскільки цьому рівнянню задовольняють координати будь-якої точки прямої, то отримане рівняння – **параметричне рівняння прямої**.

Це векторне рівняння може бути представлене в координатній формі:

$$\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \\ z = z_0 + pt \end{cases}$$

Перетворивши цю систему і дорівнявши значення параметра t одне до одного, одержуємо **канонічні рівняння прямої** у просторі:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}.$$

<u>Означення.</u> Напрямними косинусами прямої називаються напрямні косинуси вектора $\vec{S}$, які можуть бути обчислені за формулами:

$$\cos\alpha = \frac{m}{\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}; \cos\beta = \frac{n}{\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}; \cos\gamma = \frac{p}{\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}.$$

Звідси одержимо: $m : n : p = \cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma$.

Числа m, n, p називаються **кутовими коефіцієнтами** прямої. Оскільки $\vec{S}$ – ненульовий вектор, то m, n і p не можуть дорівнювати нулю одночасно, але одне або два із цих чисел можуть дорівнювати нулю. У цьому випадку в рівнянні прямої варто прирівняти до нуля відповідні чисельники.

3.10.12 Рівняння прямої у просторі, що проходить через дві точки

Якщо на прямій у просторі позначити дві довільні точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ і $M_2(x_2, y_2, z_2)$, то координати цих точок повинні задовольняти отриманому вище рівнянню прямої:

$$\frac{x_2 - x_1}{m} = \frac{y_2 - y_1}{n} = \frac{z_2 - z_1}{p}.$$

Крім того, для точки M_1 можна записати:

$$\frac{x-x_1}{m}=\frac{y-y_1}{n}=\frac{z-z_1}{p}.$$

Розв'язуючи спільно ці рівняння, одержимо:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}.$$

Це рівняння прямої, що проходить через дві точки у просторі.

3.10.13 Загальні рівняння прямої у просторі

Рівняння прямої може бути розглянуте як рівняння лінії перетину двох площин.

Як було розглянуто вище, площина у векторній формі може бути задана рівнянням:
$\vec{N}\cdot\vec{r}+D=0$, де $\vec{N}$ – нормаль площини; $\vec{r}$ – радіус-вектор довільної точки площини.

Нехай у просторі задані дві площини: $\overrightarrow{N_1}\cdot\vec{r}+D_1=0$ і $\overrightarrow{N_2}\cdot\vec{r}+D_2=0$, вектори нормалі мають координати: $\overrightarrow{N_1}(A_1,B_1,C_1)$, $\overrightarrow{N_2}(A_2,B_2,C_2)$; $\vec{r}=(x,y,z)$.

Тоді загальні рівняння прямої у векторній формі:

$$\begin{cases}\overrightarrow{N_1}\cdot\vec{r}+D_1=0\\ \overrightarrow{N_2}\cdot\vec{r}+D_2=0\end{cases}$$

Загальні рівняння прямої в координатній формі:

$$\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{cases}$$

Практична задача часто полягає в приведенні рівнянь прямих у загальному виді до канонічного виду.

Для цього треба знайти довільну точку прямої і числа m, n, p.

При цьому напрямний вектор прямої може бути знайдений як векторний добуток векторів нормалі до заданих площин.

$$\vec{S}=\overrightarrow{N_1}\times\overrightarrow{N_2}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\A_1&B_1&C_1\\A_2&B_2&C_2\end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix}B_1&C_1\\B_2&C_2\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}A_1&C_1\\A_2&C_2\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}A_1&B_1\\A_2&B_2\end{vmatrix}=\vec{i}m+\vec{j}n+\vec{k}p.$$

<u>Приклад.</u> Знайти канонічне рівняння, якщо пряма задана у вигляді:

$$\begin{cases}2x-y+3z-1=0\\5x+4y-z-7=0\end{cases}$$

Для знаходження довільної точки прямої, приймемо її координату $x=0$, а потім підставимо це значення в задану систему рівнянь.

$\begin{cases}y=3z-1\\4y-z-7=0\end{cases}$ $\begin{cases}y=3z-1\\12z-4-z-7=0\end{cases}$ $\begin{cases}y=3z-1\\z=1\end{cases}$ $\begin{cases}y=2\\z=1\end{cases}$, тобто $A(0,2,1)$.

Знаходимо компоненти напрямного вектора прямої.

$$m=\begin{vmatrix}B_1&C_1\\B_2&C_2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1&3\\4&-1\end{vmatrix}=-11;\quad n=-\begin{vmatrix}A_1&C_1\\A_2&C_2\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}2&3\\5&-1\end{vmatrix}=17;\quad p=\begin{vmatrix}A_1&B_1\\A_2&B_2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2&-1\\5&4\end{vmatrix}=13.$$

Тоді канонічні рівняння прямої:

$$-\frac{x}{11}=\frac{y-2}{17}=\frac{z-1}{13}.$$

<u>Приклад.</u> Привести до канонічного виду рівняння прямої, задане у вигляді:

$$\begin{cases}2x+3y-16z-7=0\\3x+y-17z=0\end{cases}$$

Для знаходження довільної точки прямої, що є лінією перетину зазначених вище площин, приймемо $z=0$. Тоді:

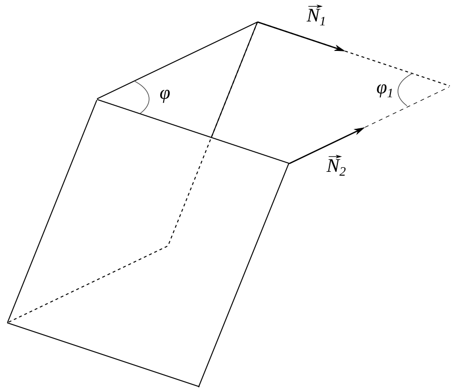
$$\begin{cases}2x+3y-16z-7=0\\3x+y-17z=0\end{cases};\quad y=-3x;$$

$$2x-9x-7=0; x=-1; y=3.$$

Одержуємо: $A(-1;3;0)$.

Напрямний вектор прямої: $\vec{S}=\overrightarrow{n_1}\times\overrightarrow{n_2}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\2&3&-16\\3&1&-17\end{vmatrix}=-35\vec{i}-14\vec{j}-7\vec{k}.$

Отже: $\dfrac{x+1}{-35}=\dfrac{y-3}{-14}=\dfrac{z}{-7}$; $\dfrac{x+1}{5}=\dfrac{y-3}{2}=\dfrac{z}{1}$.



3.10.14 Кут між площинами

Кут між двома площинами у просторі φ пов'язаний з кутом між нормалями до цих площин φ_1 співвідношенням: $\varphi = \varphi_1$ або $\varphi = 180° - \varphi_1$, тобто $\cos\varphi = \pm\cos\varphi_1$.

Визначимо кут φ_1. Відомо, що площини можуть бути задані співвідношеннями:

$\begin{cases} \overrightarrow{N_1} \cdot \vec{r} + D_1 = 0 \\ \overrightarrow{N_2} \cdot \vec{r} + D_2 = 0 \end{cases}$, де

$\overrightarrow{N_1} = (A_1, B_1, C_1)$, $\overrightarrow{N_2} = (A_2, B_2, C_2)$. Кут між векторами нормалі знайдемо з їхнього скалярного добутку:

$$\cos\varphi_1 = \frac{\overrightarrow{N_1} \cdot \overrightarrow{N_2}}{\left|\overrightarrow{N_1}\right| \left|\overrightarrow{N_2}\right|}.$$

Таким чином, кут між площинами знаходиться за формулою:

$$\cos\varphi = \pm\frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

Вибір знака косинуса залежить від того, який кут між площинами слід знайти – гострий, або суміжний з ним тупий.

3.10.15 Умови паралельності і перпендикулярності площин

На основі отриманої вище формули для знаходження кута між площинами можна знайти умови паралельності і перпендикулярності площин.

Для того, щоб площини були перпендикулярні, необхідно і достатньо, щоб косинус кута між площинами дорівнював нулю. Ця умова виконується, якщо:

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0.$$

Площини паралельні, вектори нормалей колінеарні: $\overrightarrow{N_1} || \overrightarrow{N_2}$. Ця умова виконується, якщо: $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2}$.

3.10.16 Кут між прямими у просторі

Нехай у просторі задані дві прямі. Їхні параметричні рівняння:

$$l_1 : \vec{r} = \overrightarrow{r_1} + \overrightarrow{S_1}t$$

$$l_2 : \vec{r} = \overrightarrow{r_2} + \overrightarrow{S_2}t$$

$$\vec{r} = (x, y, z); \quad \overrightarrow{r_1} = (x_1, y_1, z_1); \quad \overrightarrow{r_2} = (x_2, y_2, z_2); \quad \overrightarrow{S_1} = (m_1, n_1, p_1); \quad \overrightarrow{S_2} = (m_2, n_2, p_2).$$

Кут між прямими φ і кут між напрямними векторами φ цих прямих пов'язані співвідношенням: $\varphi = \varphi_1$ або $\varphi = 180° - \varphi_1$. Кут між напрямними векторами знаходиться зі скалярного добутку у такий спосіб:

$$\cos\varphi = \pm\frac{\overrightarrow{S_1} \cdot \overrightarrow{S_2}}{\left|\overrightarrow{S_1}\right| \left|\overrightarrow{S_2}\right|} = \pm\frac{m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2}\sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}.$$

3.10.17 Умови паралельності і перпендикулярності прямих у просторі

Щоб дві прямі були паралельні, необхідно і достатньо, щоб напрямні вектори цих прямих були колінеарні, тобто їх відповідні координати були пропорційні.

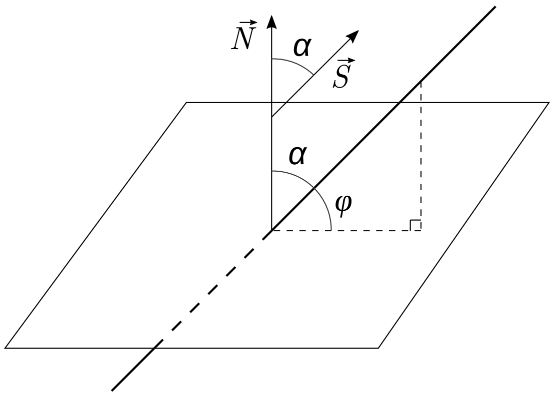
$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}$$

Щоб дві прямі були перпендикулярні, необхідно і достатньо, щоб напрямні вектори цих прямих були перпендикулярні, тобто косинус кута між ними дорівнював нулю.

$$m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2 = 0$$

3.10.18 Кут між прямою і площиною

Означення. Кутом між прямою і площиною називається будь-який кут між прямою та її проекцією на цю площину.



Нехай площина задана рівнянням $\vec{N}\cdot\vec{r}+D=0$, а пряма – $\vec{r}=\overrightarrow{r_0}+\vec{S}t$. З геометричних міркувань (див. рис.) видно, що шуканий кут $\alpha = 90^\circ - \varphi$, де α – кут між векторами $\vec{N}$ і $\vec{S}$. Цей кут може бути знайдений за формулою:

$$\cos\alpha = \frac{\vec{N}\cdot\vec{S}}{\left|\vec{N}\right|\left|\vec{S}\right|}$$

$$\sin\varphi = \pm\cos\alpha = \pm\frac{\vec{N}\cdot\vec{S}}{\left|\vec{N}\right|\left|\vec{S}\right|}$$

У координатній формі:

$$\sin\varphi = \pm\frac{Am+Bn+Cp}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{m^2+n^2+p^2}}.$$

3.10.19 Умови паралельності і перпендикулярності прямої і площині у просторі

Для того, щоб пряма і площина були паралельні, необхідно і достатньо, щоб вектор нормалі до площини і напрямний вектор прямої були перпендикулярні. Для цього необхідно, щоб їхній скалярний добуток був рівний нулеві.

$$\vec{N}\perp\vec{S}, \quad \vec{N}\cdot\vec{S}=0, \quad \sin\varphi=0, \qquad Am+Bn+Cp=0.$$

Для того, щоб пряма і площина були перпендикулярні, необхідно і достатньо, щоб вектор нормалі до площини і напрямний вектор прямої були колінеарні. Ця умова виконується, якщо векторний добуток цих векторів дорівнює нулю.

$$\vec{N}\times\vec{S}=0; \qquad \frac{A}{m}=\frac{B}{n}=\frac{C}{p}$$

3.11 Поверхні другого порядку

3.11.1 Загальне рівняння поверхні другого порядку

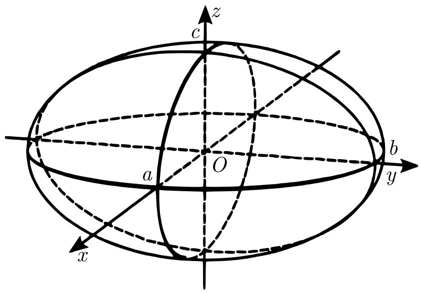
Поверхні другого порядку з точки зору аналітичної геометрії є узагальненням кривих другого порядку на випадок простору. Аналогічно до кривих другого порядку, *загальним рівнянням поверхні другого порядку* буде рівняння

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0 \tag{15}$$

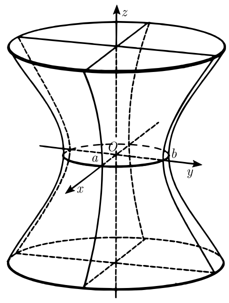
Можна показати, що будь-який перетин поверхні другого порядку площиною є кривою другого порядку.

3.11.2 Класифікація поверхонь другого порядку

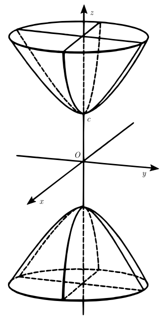
Подібно до кривих другого порядку, загальне рівняння поверхні другого порядку можна за допомогою повороту осей координатної системи на перенесення початку координат привести до канонічного вигляду. Нижче наведено таблицю з рисунками, записом канонічної форми рівняння та назвами поверхонь другого порядку. Крім вказаних у таблиці поверхонь, прийнято виокремлювати такі поверхні, які можна отримати рухом прямої (твірної), спрямованої паралельно до вісі z вздовж кривих другого порядку:
$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ — *еліптичний циліндр;* $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ — *гіперболічний циліндр;* $y^2=2px$ — *параболічний циліндр.*



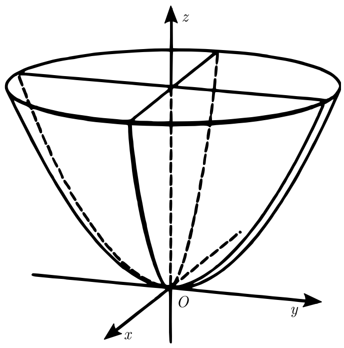
$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$
Еліпсоїд



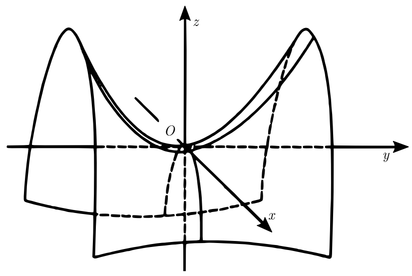
$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$
Однопорожнинний гіперболоїд



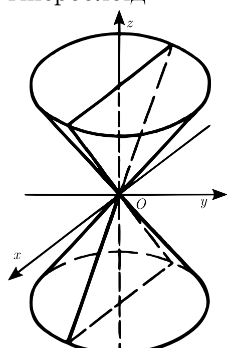
$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=-1$
Двопорожнинний гіперболоїд



$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=2z$
Еліптичний параболоїд



$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=2z$
Гіперболічний параболоїд



$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=0$
Конус

3.11.3 Метод паралельних перерізів

Для побудови ескізів та з'ясування властивостей поверхонь другого порядку застосовують метод паралельних перерізів. Суть цього методу у побудові перерізів фігури, що обмежується поверхнею, площинами, паралельними до площин координат. Отримані ескізи перерізів «вставляються» до ескізу поверхні, після чого на них «натягується» сам ескіз поверхні.

3.11.4 Прямолінійні твірні поверхонь другого порядку

Розглянемо рівняння однопорожнинного гіперболоїда:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

Перенісши y^2/b^2 до правої частини рівняння, матимемо

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{y^2}{b^2}.$$

Тоді, за формулою різниці квадратів отримаємо

$$\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)=\left(1-\frac{y}{b}\right)\left(1+\frac{y}{b}\right).$$

Звідси маємо два сімейства прямих, заданих у формі перетину двох площин:

$$\begin{cases}\dfrac{x}{a}-\dfrac{z}{c}=u\left(1+\dfrac{y}{b}\right);\\ \dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{c}=\dfrac{1}{u}\left(1-\dfrac{y}{b}\right);\end{cases} \text{та} \begin{cases}\dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{c}=\dfrac{1}{v}\left(1+\dfrac{y}{b}\right);\\ \dfrac{x}{a}-\dfrac{z}{c}=v\left(1-\dfrac{y}{b}\right),\end{cases}$$

де u та v – довільні числа.

Ці прямі повністю належать поверхні, називаються *прямолінійними твірними* і мають такі властивості: усі прямі одного сімейства є мимобіжними, усі прямі різних сімейств перетинаються.

Далі, розглянемо рівняння гіперболічного параболоїда:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z.$$

Використовуючи формулу розкладу різниці квадратів на множники, знаходимо

$$\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) = 2 \cdot z.$$

Звідки маємо такі рівняння прямолінійних твірних:

$\begin{cases} \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 2u; \\ \dfrac{x}{a} - \dfrac{y}{b} = \dfrac{z}{u}; \end{cases}$ та $\begin{cases} \dfrac{x}{a} - \dfrac{y}{b} = 2v; \\ \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = \dfrac{z}{v}. \end{cases}$

Прямолінійні твірні гіперболічного параболоїда мають такі властивості: усі прямі одного сімейства є мимобіжними, усі прямі різних сімейств перетинаються, усі прямі одного сімейства паралельні до однієї спільної площини.

Розташовуючи силові елементи конструкцій (прямолінійні стандартні балки) за прямолінійними напрямними можна побудувати ефектні та дешеві інженерні конструкції, розрахунок яких стандартними методами не викликатиме ніяких проблем.

3.11.5 Класифікація поверхонь другого порядку за допомогою інваріантів

Аналогічно до кривих другого порядку, для аналізу загального рівняння поверхні другого порядку можна застосувати інваріанти відповідної квадратичної форми. Інваріантами рівнянь поверхонь другого порядку є

$$I_1 = a_{11} + a_{22} + a_{33}; I_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix};$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}; I_4 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{vmatrix}.$$

Для аналізу належності поверхні до певного типу використовується матриця з коефіцієнтів квадратичної форми загального рівняння поверхні:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

та її власні числа, λ_1, λ_2 та λ_3 (власні вектори задають напрямки повернутих осей координатної системи). Нижче наведено результати такої класифікації.

Умова	Рівняння	Назва поверхні
$I_4 \neq 0; I_3 \neq 0$	$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 y_1^2 + \lambda_3 z_1^2 + \dfrac{I_4}{I_3} = 0$	Еліпсоїд, однопорожнинний або двопорожнинний гіперболоїд
$I_4 \neq 0; I_3 = 0$	$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 y_1^2 \pm \sqrt{-\dfrac{I_4}{\lambda_1 \lambda_2}} z_1 = 0$	Еліптичний або гіперболічний параболоїд
$I_4 = 0; I_3 \neq 0$	$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 y_1^2 + \lambda_3 z_1^2 = 0$	Конус або точка $(0; 0; 0)$
$I_4 = 0; I_3 = 0; \lambda_1 \neq 0; \lambda_2 \neq 0; \lambda_3 = 0$	$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 y_1^2 + a'_{44} = 0$	$a'_{44} \neq 0$ — еліптичний або гіперболічний циліндр
		$a'_{44} = 0$ — пара площин або пряма
$I_4 = 0; I_3 = 0; \lambda_1 \neq 0; \lambda_2 = \lambda_3 = 0$	$\lambda_1 x_1^2 + a'_{44} z = 0$ або	Параболічний циліндр
	$\lambda_1 x_1^2 + a'_{44} = 0$	Пара площин

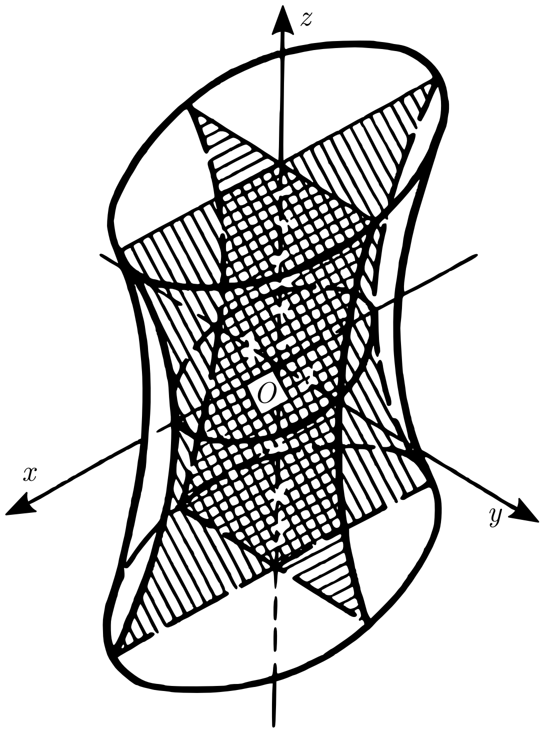
3.11.6 Опорні задачі

Вправа 1. Намалювати ескіз поверхні другого порядку

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{25} = 1.$$

Розв'язання. Скористаємося методом перерізів.

Переріз поверхні площиною xOy знайдемо підставивши до рівняння поверхні $z = 0$: $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} = 1$. Це рівняння еліпса.



Для перерізу площиною площиною xOz $(y = 0)$ маємо $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{z^2}{25} = 1$ — гіпербола.

Для перерізу площиною yOz $(x = 0)$ — $\dfrac{y^2}{9} - \dfrac{z^2}{25} = 1$ — теж гіпербола.

Малюємо відповідні криві другого порядку на координатних площинах і за ними будуємо ескіз поверхні (рис. 2.1).

Вправа 2. Знайти точки перетину поверхні $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{4} = z$ та прямої $\dfrac{x}{3} = \dfrac{y-2}{-2} = \dfrac{z+1}{2}$.

Розв'язання. Перепишемо рівняння прямої у параметричному вигляді:

$$\begin{cases} x = 3t; \\ y = 2 - 2t; \\ z = -1 + 2t. \end{cases}$$

Якщо точка $M\,(x; y; z)$ належить є точкою перетину поверхні та прямої, її координати мають одночасно задовольняти вказану вище систему рівнянь для прямої та рівняння поверхні. Отже, підставивши вирази для x, y та z до рівняння поверхні, матимемо:

$$\frac{(3t)^2}{9} - \frac{(2-2t)^2}{4} = -1 + 2t$$

або

$$0 = 0.$$

Отже, рівняння задовольняється за будь-яких значень t, тобто пряма повністю належить поверхні (є прямолінійною твірною).

Вправа 3. Визначити за рівнянням $3x^2 + 3y^2 + z^2 + 4xz - 4yz + 6x + 4y - 8z + 10 = 0$ тип поверхні другого порядку, яка задається цим рівнянням, та вектори-напрямки осей у перетвореній системі координат.

Розв'язання. Скористаємося інваріантами квадратичної форми рівняння. Відповідна матриця квадратичної форми у цьому випадку матиме вигляд

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Власні значення і власні вектори цієї матриці можна знайти за допомогою системи комп'ютерної алгебри (наприклад Maxima). Ними будуть $\lambda_1 = 5$ (одиничний власний вектор — $\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}; -\dfrac{1}{\sqrt{3}}; \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$); $\lambda_1 = 3$ (одиничний власний вектор — $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}; \dfrac{1}{\sqrt{2}}; 0\right)$) та $\lambda_3 = -1$ (одиничний власний вектор — $\left(\dfrac{1}{\sqrt{6}}; -\dfrac{1}{\sqrt{6}}; -\dfrac{2}{\sqrt{6}}\right)$). $I_3 = -15$; $I_4 = -281$. Отже, за таблицею маємо справу з двопорожнинним гіперболоїдом з рівнянням у перетвореній системі координат

$$5{x'}_1^2 + 3{y'}_1^2 - {z'}_1^2 + \frac{281}{15} = 0.$$

Напрями осей повернутої системи координат визначаються знайденими власними векторами.

3.11.7 Завдання для аудиторної та самостійної роботи

1. Намалювати ескізи поверхонь: 1) $x^2+y^2-4z^2=4$; 2) $x^2+9y^2+25z^2=36$; 3) $x^2+y^2+2x-4y=0$; 4) $x^2-16z^2=1$.

2. Знайти точки перетину поверхні і прямої: 1) $\dfrac{x^2}{81}+\dfrac{y^2}{36}+\dfrac{z^2}{9}=1$ та $\dfrac{x-3}{3}=\dfrac{y-4}{-6}=\dfrac{z+2}{4}$; 2) $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}-\dfrac{z^2}{4}=1$ та $\dfrac{x}{4}=\dfrac{y}{-3}=\dfrac{z+2}{4}$.

3. Переконавшись, що точка $M(1;3;-1)$ лежить на гіперболічному параболоїді $4x^2-z^2=y$, скласти рівняння його прямолінійних твірних, що проходять крізь M.

4. Визначити за рівнянням тип поверхні другого порядку, яка задається цим рівнянням, та вектори-напрямки осей у перетвореній системі координат: 1) $x^2+y^2+2x-4y+2z+1=0$; 2) $x^2+6y-8z+10=0$; 3) $3x^2-7y^2+3z^2+8xy-8xz-8yz+10x-14y-6z-8=0$.

4 Диференціальне числення функції однієї змінної

4.1 Числова послідовність

Означення. Якщо кожному натуральному числу n поставлено у відповідність число x_n, то кажуть, що задано **послідовність**

$$x_1, x_2, \ldots, x_n = \{x_n\}$$

Загальний елемент послідовності є залежним від n.

$$x_n = f(n)$$

У такий спосіб послідовність може розглядатися як функція.

Задати послідовність можна різними способами – головне, щоб був зазначений спосіб одержання будь-якого члена послідовності.

Приклад. $\{x_n\} = \{(-1)^n\}$ або $\{x_n\} = -1; 1; -1; 1; \ldots$

$\{x_n\} = \{\sin \pi n/2\}$ або $\{x_n\} = 1; 0; -1; 0; \ldots$

Для послідовностей можна визначити наступні **операції**:

1. Множення послідовності на число m: $m\{x_n\} = \{mx_n\}$, тобто mx_1, mx_2, ...

2. Додавання (віднімання) послідовностей: $\{x_n\} \pm \{y_n\} = \{x_n \pm y_n\}$.

3. Добуток послідовностей: $\{x_n\} \cdot \{y_n\} = \{x_n \cdot y_n\}$.

4. Ділення послідовностей: $\dfrac{\{x_n\}}{\{y_n\}} = \left\{\dfrac{x_n}{y_n}\right\}$ при $\{y_n\} \neq 0$.

4.2 Обмежені і необмежені послідовності

Означення. Послідовність $\{x_n\}$ називається **обмеженою**, якщо існує таке число $M > 0$, що для будь-якого n виконується нерівність:

$$|x_n| < M$$

тобто всі члени послідовності належать проміжку $(-M; M)$.

Означення. Послідовність $\{x_n\}$ називається **обмеженою згори**, якщо для будь-якого n існує таке число M, що

$$x_n \leqslant M.$$

Означення. Послідовність $\{x_n\}$ називається **обмеженою знизу**, якщо для будь-якого n існує таке число M, що

$$x_n \geqslant M.$$

Приклад. $\{x_n\} = n$ – обмежена знизу $\{1, 2, 3, \ldots\}$...

Означення. Число a називається **границею** послідовності $\{x_n\}$, якщо для будь-якого додатного $\varepsilon > 0$ існує такий номер N, що для всіх $n > N$ виконується умова:

$$|a - x_n| < \varepsilon.$$

Це записується: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

У цьому випадку говорять, що послідовність $\{x_n\}$ **збігається** до a при $n \to \infty$.

Властивість: Якщо відкинути якусь скінченну кількість членів послідовності, то виходить нова послідовність, при цьому якщо збігається одна з них, то збігається і інша.

Приклад. Довести, що границя послідовності $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}=0$.

Нехай при $n>N$ виконується $\left|0-\dfrac{(-1)^n}{n}\right|<\varepsilon$, тобто $\dfrac{1}{n}<\varepsilon$. Це вірно при $n>\dfrac{1}{\varepsilon}$, таким чином, якщо за N взяти цілу частину від $\dfrac{1}{\varepsilon}$, то твердження, наведене вище, виконується.

Приклад. Показати, що при $n\to\infty$ послідовність $3,\ 2\dfrac{1}{2},\ 2\dfrac{1}{3},\ 2\dfrac{1}{4},...,\ 2+\dfrac{1}{n}$ має границею число 2.

Отже: $\{x_n\}=2+1/n$; $1/n=x_n-2$.

Очевидно, що існує таке число n, що $|x_n-2|=\left|\dfrac{1}{n}\right|<\varepsilon$, тобто $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=2$.

Теорема. *Послідовність не може мати більше однієї границі.*

Доведення. Припустимо, що послідовність $\{x_n\}$ має дві границі a і b, не рівні одна одній.

$x_n\to a$; $x_n\to b$; $a\neq b$.

Тоді за означенням для будь-якого $\varepsilon>0$ існує таке число N, що для будь-якого $n>N$:

$$|a-x_n|<\frac{\varepsilon}{2}$$
$$|b-x_n|<\frac{\varepsilon}{2}$$

Запишемо вираз: $|a-b|=|(a-x_n)+(x_n-b)|\leqslant|a-x_n|+|x_n-b|<\dfrac{\varepsilon}{2}+\dfrac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$

А оскільки ε – **будь-яке** число, $|a-b|=0$, тобто $a=b$. Теорему доведено.

Теорема. *Якщо $x_n\to a$, то $|x_n|\to|a|$.*

Доведення. З $x_n\to a$ слідує, що $|x_n-a|<\varepsilon$. У той же час:

$||x_n|-|a||\leqslant|x_n-a|$, тобто $||x_n|-|a||<\varepsilon$, тобто $|x_n|\to|a|$. Теорему доведено.

Теорема. *Якщо $x_n\to a$, то послідовність $\{x_n\}$ обмежена.*

Слід зазначити, що обернене твердження не є правильним, тобто з обмеженості послідовності не випливає її збіжність.

Наприклад, послідовність$x_n=\begin{cases}1+\frac{1}{n}, & \text{при парному } n\\ 2-\frac{1}{n}, & \text{при непарному } n\end{cases}$ не має границі, хоча $|x_n|\leqslant 2$.

Теорема (про трьох собачок). *Якщо $x_n\to a$ і $z_n\to a$ і $x_n\leqslant y_n\leqslant z_n$, то $y_n\to a$.*

4.3 Монотонні послідовності

Означення. 1) Якщо $x_{n+1}>x_n$ для всіх n, то послідовність зростаюча.

2) Якщо $x_{n+1}\geqslant x_n$ для всіх n, то послідовність неспадна.

3) Якщо $x_{n+1}<x_n$ для всіх n, то послідовність спадна.

4) Якщо $x_{n+1}\leqslant x_n$ для всіх n, то послідовність незростаюча

Всі ці послідовності називаються **монотонними.** Зростаючі і спадні послідовності називаються **строго монотонними**.

Приклад. $\{x_n\}=1/n$ – спадна і обмежена

$\{x_n\}=n$ – зростаюча і необмежена.

Приклад. Довести, що послідовність $\{x_n\}=\left\{\dfrac{n}{2n+1}\right\}$ монотонна зростаюча.

Знайдемо член послідовності $x_{n+1}=\dfrac{n+1}{2n+2+1}=\dfrac{n+1}{2n+3}$.

Знайдемо знак різниці:

$$x_n-x_{n+1}=\frac{n}{2n+1}-\frac{n+1}{2n+3}=\frac{2n^2+3n-2n^2-2n-n-1}{(2n+1)(2n+3)}=\frac{-1}{(2n+1)(2n+3)}<0,$$

оскільки при $n\in\mathbb{N}$ знаменник додатний при будь-якому n.

Таким чином, $x_{n+1}>x_n$. Послідовність зростаюча, що і слід було довести.

Приклад. З'ясувати чи є зростаючою або спадною послідовність $\{x_n\}=\dfrac{n}{5^n}$.

Знайдемо $x_{n+1}=\dfrac{n+1}{5^{n+1}}$. Знайдемо різницю

$$x_{n+1}-x_n=\frac{n+1}{5\cdot5^n}-\frac{n}{5^n}=\frac{n+1-5n}{5\cdot5^n}=\frac{1-4n}{5\cdot5^n},$$

оскільки при $n\in\mathbb{N}$; $1-4n<0$, $x_{n+1}<x_n$. Послідовність монотонно спадає.

Слід зазначити, що монотонні послідовності обмежені принаймні з одного боку.

Теорема. *Монотонна обмежена послідовність має границю.*

Доведення. Розглянемо монотонну неспадну послідовність

$$x_1\leqslant x_2\leqslant x_3\leqslant\ldots\leqslant x_n\leqslant x_{n+1}\leqslant\ldots$$

Ця послідовність обмежена згори: $x_n \leqslant M$, де M – деяке число.

Оскільки будь-яка, обмежена згори, числова множина має точну верхню грань, то для кожного $\varepsilon > 0$ існує таке число N, що $x_N > a - \varepsilon$, де a – деяка верхня грань множини.

Оскільки $\{x_n\}$ – неспадна послідовність, при $n > N$: $a - \varepsilon < x_N \leqslant x_n$, $x_n > a - \varepsilon$.

Звідси $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$

$-\varepsilon < x_n - a < \varepsilon$ або $x_n - a < \varepsilon$, тобто $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

Для інших монотонних послідовностей доведення аналогічне. Теорему доведено.

4.4 Число е

Розглянемо послідовність $\{x_n\} = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$.

Якщо послідовність $\{x_n\}$ монотонна і обмежена, то вона має скінченну границю.

За формулою бінома Ньютона:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + \frac{n}{1}\cdot\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\left(\frac{1}{n}\right)^3 + ... + \frac{n(n-1)(n-2)...[n-(n-1)]}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}\left(\frac{1}{n}\right)^n$$

або, що те ж саме

$$x_n = 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + ... + \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)...\left(1-\frac{k-1}{n}\right) + ... + \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)...\left(1-\frac{n-1}{n}\right)$$

Покажемо, що послідовність $\{x_n\}$ – зростаюча. Дійсно, запишемо вираз x_{n+1} і прирівняємо його з виразом x_n:

$$\begin{aligned} x_{n+1} = 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right) + ... + \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)...\left(1-\frac{k-1}{n+1}\right) + ... \\ +\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)...\left(1-\frac{n-1}{n+1}\right) + \frac{1}{(n+1)!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)...\left(1-\frac{n}{n+1}\right). \end{aligned}$$

Кожний доданок у виразі x_{n+1} більше відповідного значення x_n, і, крім того, в x_{n+1} додається ще один додатний доданок. Таким чином, послідовність $\{x_n\}$ зростаюча.

Доведемо тепер, що при будь-якому n її члени не перевищують трьох: $x_n < 3$.

$$x_n < 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + ... + \frac{1}{n!} < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + ... + \frac{1}{2^{n+1}} = 1 + \frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}} < 1 + \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 3$$

за формулою суми геометричної прогресії

Отже, послідовність $\left\{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right\}$ – монотонно зростаюча і обмежена зверху, тобто має скінченну границю. Цю границю прийнято позначати літерою e.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

З нерівності $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n < 3$ випливає, що $e \leqslant 3$. Відкидаючи в рівності для $\{x_n\}$ всі члени, починаючи із четвертого, маємо:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n > 2 + \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right)$$

переходячи до границі, одержуємо

$$e \geqslant 2 + \frac{1}{2} = 2,5$$

Таким чином, число e розміщене між числами 2,5 і 3. Якщо взяти більшу кількість членів послідовності, то можна одержати більш точну оцінку значення числа e.

Можна показати, що число e ірраціональне і його значення дорівнює $2,71828...$

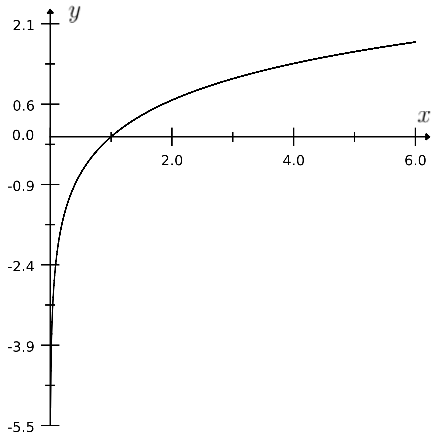
Аналогічно можна показати, що $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e$, розширивши вимоги щодо x до будь-якого дійсного числа:

Припустимо: $n \leqslant x \leqslant n+1$

$$\frac{1}{n} \geqslant \frac{1}{x} \geqslant \frac{1}{n+1}$$

$$1 + \frac{1}{n} \geqslant 1 + \frac{1}{x} \geqslant 1 + \frac{1}{n+1}$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} > \left(1+\frac{1}{x}\right)^x > \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n$$



Знайдемо $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1} = e\cdot 1 = e;\quad \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^{n} = \dfrac{e}{1} = e;\quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x} = e$

Число e є основою натурального логарифма.

$$\log_e x = \ln x = y, \quad \text{якщо} \quad e^y = x.$$

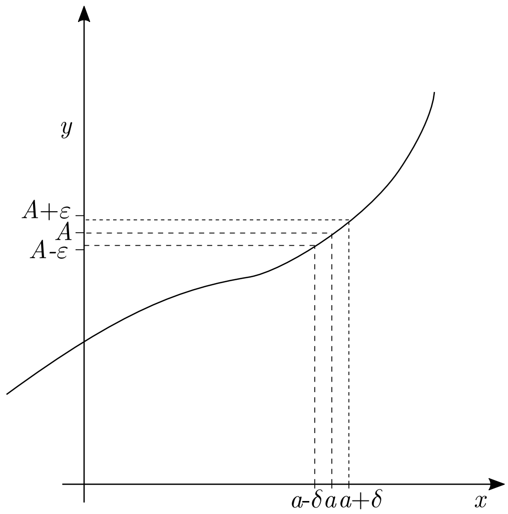
Вище наведено графік функції $y = \ln x$.

4.4.1 Зв'язок натурального і десяткового логарифмів

Нехай $x = 10^y$, тоді $\ln x = \ln 10^y$, отже $\ln x = y \ln 10$.

$y = \lg x = \dfrac{\ln x}{\ln 10} = M \ln x;\quad \ln x = \dfrac{1}{M}\lg x$, де $M = \dfrac{1}{\ln 10} \approx 0,43429\ldots$ – модуль переходу.

4.5 Границя функції у точці



Нехай функція $f(x)$ визначена в деякому околі точки $x = a$ (тобто в самій точці $x = a$ функція може бути і невизначена).

Означення. Число A називається **границею** функції $f(x)$ при $x \to a$, якщо для кожного $\varepsilon > 0$ існує таке число $\delta > 0$, що для всіх x таких, що

$$0 < |x - a| < \delta$$

виконується нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Те ж визначення може бути записане в іншому вигляді:

Якщо $a - \delta < x < a + \delta$, $x \neq a$, то виконується нерівність $A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon$.

Запис границі функції у точці: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$

Означення. Якщо $f(x) \to A_1$ при $x \to a$ тільки при $x < a$, то $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = A_1$ - називається **границею** функції $f(x)$ у точці $x = a$ **ліворуч**, а якщо $f(x) \to A_2$ при $x \to a$ тільки при $x > a$, то $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = A_2$ називається **границею** функції $f(x)$ у точці $x = a$ **праворуч**.

Наведене вище визначення відповідає випадку, коли функція $f(x)$ не визначена в самій точці $x = a$, але визначена в деякому як завгодно малому околі цієї точки.

Межі A_1 і A_2 називаються також **однобічними границями** функції $f(x)$ у точці $x = a$. Також кажуть, що A – **скінченна границя** функції $f(x)$.

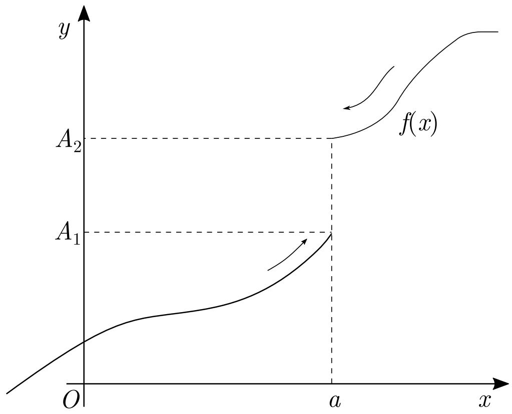


Рис. 6: Однобічні границі

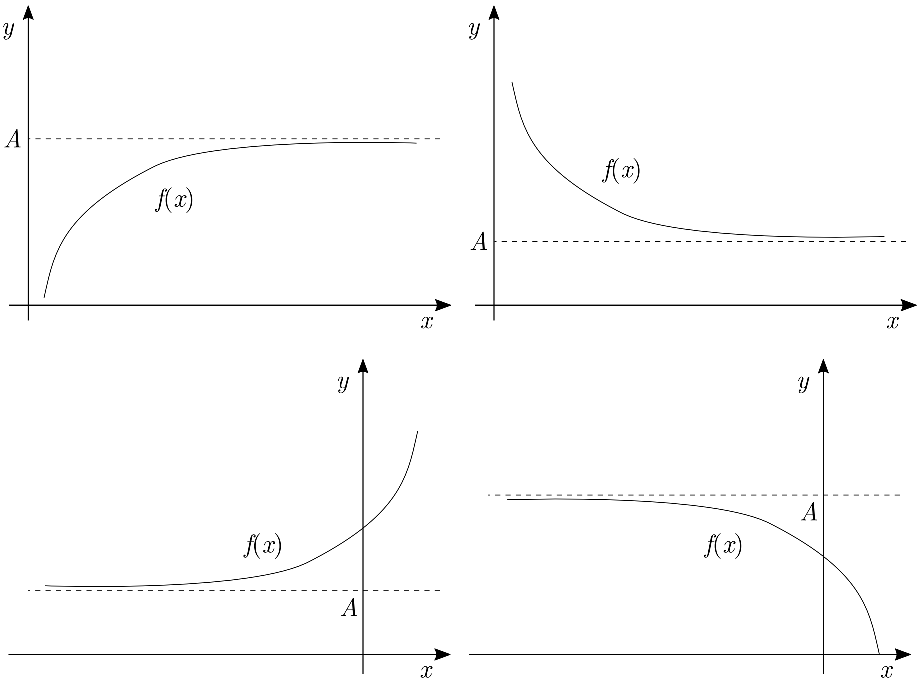


Рис. 7: Границі при прямуванні аргументу до нескінченності

4.5.1 Границя функції при прямуванні аргументу до нескінченності

<u>Означення.</u> Число A називається **границею** функції $f(x)$ при $x \to \infty$, якщо для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ існує таке число $M > 0$, що для всіх x, $x > M$ виконується нерівність

$$|A - f(x)| < \varepsilon$$

При цьому вважається, що функція $f(x)$ визначена в околиці нескінченності.

Записують: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$.

Графічно можливі випадки представлено на наведеному нижче рисунку 7.

Аналогічно можна визначити границі $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$ для будь-якого $x > M$ і $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = A$ для будь-якого $x < M$.

4.6 Основні теореми про границі

<u>Теорема 1.</u> $\lim\limits_{x\to a} C = C$, де $C = \text{const}$.

Наступні теореми справедливі в припущенні, що функції $f(x)$ і $g(x)$ мають скінченні границі при $x \to a$.

<u>Теорема 2.</u> $\lim\limits_{x\to a} (f(x) \pm g(x)) = \lim\limits_{x\to a} f(x) \pm \lim\limits_{x\to a} g(x)$

Доведення цієї теореми буде наведено нижче.

<u>Теорема 3.</u> $\lim\limits_{x\to a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to a} g(x)$

<u>Наслідок.</u> $\lim\limits_{x\to a} C \cdot f(x) = C \cdot \lim\limits_{x\to a} f(x)$

Теорема 4. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to a}f(x)}{\lim\limits_{x\to a}g(x)}$ за умови $\lim\limits_{x\to a}g(x)\neq 0$

Теорема 5. *Якщо $f(x)>0$ поблизу точки $x=a$ і $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$, то $A\geqslant 0$.*

Аналогічно визначається знак границі при $f(x)<0$, $f(x)\leqslant 0$, $f(x)\geqslant 0$.

Теорема 6. *Якщо $g(x)\leqslant f(x)\leqslant u(x)$ поблизу точки $x=a$ і $\lim\limits_{x\to a}g(x)=\lim\limits_{x\to a}u(x)=A$, то і $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$.*

Означення. Функція $f(x)$ називається **обмеженою** поблизу точки $x=a$, якщо існує таке число $M>0$, що $|f(x)|<M$ поблизу точки $x=a$.

Теорема 7. *Якщо функція $f(x)$ має скінченну границю при $x\to a$, то вона обмежена поблизу точки $x=a$.*

Доведення. Нехай $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$, тобто $|f(x)-A|<\varepsilon$, тоді
$|f(x)|=|f(x)-A+A|\leqslant|f(x)-A|+|A|$ або
$|f(x)|<\varepsilon+|A|$, тобто
$|f(x)|<M$, де $M=\varepsilon+A$
Теорему доведено.

4.7 Нескінченно малі функції

Означення. Функція $f(x)$ називається **нескінченно малою** при $x\to a$, де a може бути числом або однією з величин ∞, $+\infty$ або $-\infty$, якщо $\lim\limits_{x\to a}f(x)=0$.

Нескінченно малою функція може бути тільки якщо вказати, до якого числа прямує аргумент x. При різних значеннях a функція може бути нескінченно малою чи ні.

Приклад. Функція $f(x)=x^n$ є нескінченно малою при $x\to 0$ і не є нескінченно малою при $x\to 1$, оскільки $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=1$.

Теорема. *Для того, щоб функція $f(x)$ при $x\to a$ мала границю, рівну A, необхідно і достатньо, щоб поблизу точки $x=a$ виконувалася умова*

$$f(x)=A+\alpha(x),$$

де $\alpha(x)$ – нескінченно мала при $x\to a$ ($\alpha(x)\to 0$ при $x\to a$).

4.7.1 Властивості нескінченно малих функцій

1. Сума фіксованого числа нескінченно малих функцій при $x\to a$ теж нескінченно мала функція при $x\to a$.
2. Добуток фіксованого числа нескінченно малих функцій при $x\to a$ теж нескінченно мала функція при $x\to a$.
3. Добуток нескінченно малої функції на функцію, обмежену поблизу точки $x=a$ є нескінченно малою функцією при $x\to a$.
4. Частка від ділення нескінченно малої функції на функцію, границя якої не дорівнює нулю, є величина нескінченно мала.

Використовуючи поняття нескінченно малих функцій, наведемо доведення деяких теорем про границі, наведених вище.

Доведення теореми 2. Представимо $f(x)=A+\alpha(x)$, $g(x)=B+\beta(x)$, де
$A=\lim\limits_{x\to a}f(x)$, $B=\lim\limits_{x\to a}g(x)$, тоді

$$f(x)\pm g(x)=(A\pm B)+\alpha(x)\pm\beta(x)$$

$A+B=\text{const}$, $\alpha(x)\pm\beta(x)$ – нескінченно мала, значить

$$\lim_{x\to a}(f(x)\pm g(x))=A\pm B=\lim_{x\to a}f(x)\pm\lim_{x\to a}g(x)$$

Теорему доведено.

Доведення теореми 3. Представимо $f(x)=A+\alpha(x)$, $g(x)=B+\beta(x)$, де
$A=\lim\limits_{x\to a}f(x)$, $B=\lim\limits_{x\to a}g(x)$, тоді

$$f(x)\cdot g(x)=A\cdot B+A\beta(x)+\alpha(x)B+\alpha(x)\beta(x)$$

$A\cdot B=const$, $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ – нескінченно малі, значить

$$\lim_{x\to a}[f(x)g(x)]=\lim_{x\to a}A\cdot B+0=A\cdot B=\lim_{x\to a}f(x)\cdot\lim_{x\to a}g(x)$$

Теорему доведено.

4.7.2 Нескінченно великі функції та їх зв'язок з нескінченно малими

Означення. Границя функції $f(x)$ при $x \to a$, де a – число, **дорівнює нескінченності**, якщо для будь-якого числа $M > 0$ існує таке число $\Delta > 0$, що нерівність

$$|f(x)| > M$$

виконується при всіх x, що задовольняють умові

$$0 < |x - a| < \Delta$$

Записується $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$.

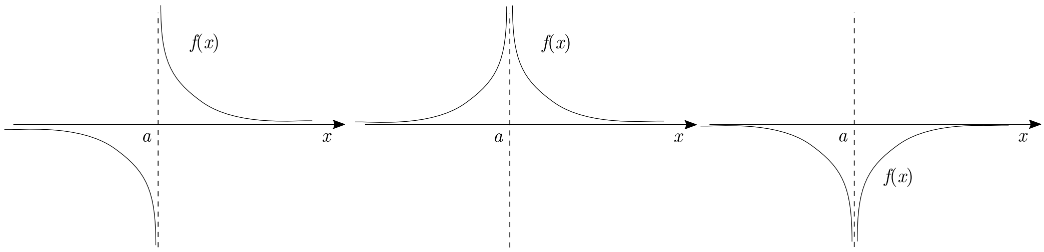
Власне, якщо в наведеному вище визначенні замінити умову $|f(x)| > M$ на $f(x) > M$, то одержимо:

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty,$$

а якщо замінити на $f(x) < -M$, то:

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty.$$

Графічно наведені вище випадки можна проілюструвати у такий спосіб:



Означення. Функція називається **нескінченно великою** при $x \to a$, де a – число або одна з величин ∞, $+\infty$ або $-\infty$, якщо $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$, де A – одна з величин ∞, $+\infty$ або $-\infty$.

Зв'язок нескінченно великих і нескінченно малих функцій здійснюється у відповідності з наступною теоремою.

Теорема. *Якщо $f(x) \to 0$ при $x \to a$ (якщо $x \to \infty$), і не обертається в нуль, то*

$$y = \frac{1}{f(x)} \to \infty$$

4.7.3 Порівняння нескінченно малих функцій

Нехай $\alpha(x)$, $\beta(x)$ і $\gamma(x)$ – нескінченно малі функції при $x \to a$. Будемо позначати ці функції α, β і γ відповідно. Ці нескінченно малі функції можна порівнювати за швидкістю їхнього спадання, тобто за швидкістю їхнього прямування до нуля.

Наприклад, функція $f(x) = x^{10}$ прямує до нуля швидше, ніж функція $f(x) = x$.

Означення. Якщо $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\alpha}{\beta} = 0$, то функція α називається **нескінченно малою вищого порядку**, ніж функція β. Таке співвідношення між нескінченно малими позначається так: $\alpha = o(\beta)$ (читається «о маленьке»).

Означення. Якщо $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\alpha}{\beta} = A$, $A \neq 0$, $A = const$, то α і β називаються **нескінченно малими одного порядку**. Таке співвідношення між нескінченно малими позначається так: $\alpha = O(\beta)$ (читається «о велике»).

Означення. Якщо $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\alpha}{\beta} = 1$, то функції α і β називаються **еквівалентними нескінченно малими**. Записують $\alpha \sim \beta$ при $x \to a$.

Приклад. Порівняємо нескінченно малі при $x \to 0$ функції $f(x) = x^{10}$ і $f(x) = x$.

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^{10}}{x} = \lim_{x \to 0} x^9 = 0$$

тобто функція $f(x) = x^{10}$ – нескінченно мала вищого порядку, ніж $f(x) = x$.

Означення. Нескінченно мала функція α називається **нескінченно малою порядку** k відносно нескінченно малої функції β, якщо границя $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\alpha}{\beta^k}$ скінченна і відмінна від нуля.

Однак, слід зазначити, що не всі нескінченно малі функції можна порівнювати між собою. Наприклад, якщо відношення $\dfrac{\alpha}{\beta}$ не має границі, то функції непорівнянні.

Приклад. Якщо $\alpha = x^2$, $\beta = x$, то при $x \to 0$ $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\alpha}{\beta^2} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2}{x \cdot x} = 1$, тобто функція α – нескінченно мала порядку 2 щодо функції β.

Приклад. Якщо $\alpha = x \sin \dfrac{1}{x}$, $\beta = x$, то при $x \to 0$ $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\alpha}{\beta}$ не існує, тобто функція α і β непорівнянні.

4.7.4 Властивості еквівалентних нескінченно малих

1. $\alpha \sim \alpha$, $\left(\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha}{\alpha}=1\right)$

2. Якщо $\alpha\sim\beta$ і $\beta\sim\gamma$, то $\alpha\sim\gamma$, $\left(\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha}{\gamma}=\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\cdot\dfrac{\beta}{\gamma}\right)=1\cdot 1=1\right)$

3. Якщо $\alpha\sim\beta$, то $\beta\sim\alpha$, $\left(\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\beta}{\alpha}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{1}{\dfrac{\alpha}{\beta}}=1\right)$

4. Якщо $\alpha\sim\alpha_1$ і $\beta\sim\beta_1$ і $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha}{\beta}=k$, то і $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha_1}{\beta_1}=k$ або $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha}{\beta}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha_1}{\beta_1}$.

Наслідки:
а) якщо $\alpha\sim\alpha_1$ і $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha}{\beta}=k$, то і $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha}{\beta}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha_1}{\beta}$
б) якщо $\beta\sim\beta_1$ і $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha}{\beta}=k$, то $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha}{\beta}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha}{\beta_1}$

Властивість 4 особливо важлива на практиці, оскільки вона фактично означає, що границя відношення нескінченно малих не міняється при заміні їх на еквівалентні нескінченно малі. Цей факт дає можливість при знаходженні границь заміняти нескінченно малі на еквівалентні їм функції, що може значно спростити обчислення границь.

4.7.5 Деякі визначні границі

Перша визначна границя. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, де $P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\dots+a_n$, $Q(x)=b_0x^m+b_1x^{m-1}+\dots+b_m$ – многочлени.

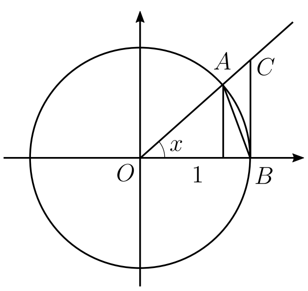
$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{x^n(a_0+\frac{a_1}{x}+...+\frac{a_n}{x^n})}{x^m(b_0+\frac{b_1}{x}+....+\frac{b_m}{x^m})}=x^{n-m}\frac{a_0+\frac{a_1}{x}+...+\frac{a_n}{x^n}}{b_0+\frac{b_1}{x}+...+\frac{b_m}{x^m}}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0+\frac{a_1}{x}+...+\frac{a_n}{x^n}}{b_0+\frac{b_1}{x}+...+\frac{b_m}{x^m}}=\frac{a_0}{b_0}$$

Разом: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{P(x)}{Q(x)}=\begin{cases}0, & \text{при}\quad n<m\\ \dfrac{a_0}{b_0}, & \text{при}\quad n=m\\ \infty, & \text{при}\quad n>m\end{cases}$

Друга визначна границя.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$



$$S_{\triangle OAB}<S_{OAB}<S_{\triangle OCB}$$

$$\frac{1}{2}\sin x<\frac{1}{2}x<\frac{1}{2}\operatorname{tg}x$$

$$1<\frac{x}{\sin x}<\frac{1}{\cos x}$$

$$1>\frac{\sin x}{x}>\cos x$$

$$1-\frac{\sin x}{x}<1-\cos x=2\sin^2\frac{x}{2}<\frac{x^2}{2}$$

Звідси, $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta=\varepsilon:|x|<\delta=\varepsilon\Rightarrow\left|\frac{\sin x}{x}-1\right|<x<\varepsilon$.

Третя визначна границя.

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$$

Часто, якщо безпосереднє знаходження границі якоїсь функції видається складним, можна шляхом перетворення функції звести задачу до знаходження визначних границь.

Крім трьох, викладених вище, границь можна записати наступні корисні на практиці співвідношення:

$$\boxed{\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e}$$

Доведення:

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\left|\begin{array}{c} y=\frac{1}{x} \\ y\to\infty \end{array}\right|=\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y}=e$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\log_a e}$$

Доведення:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\log_a(1+x)=\lim_{x\to 0}\log_a(1+x)^{\frac{1}{x}}=\log_a e$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1}$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a}$$

Доведення:

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\left|\begin{array}{c} y=a^x-1\Rightarrow x=\log_a(1+y) \\ x\to 0\Rightarrow y\to 0 \end{array}\right|=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\log_a(1+y)}=\frac{1}{\log_a e}=\ln a;$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^m-1}{x}=m}$$

Доведення:

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^m-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{m\ln(1+x)}-1}{x}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^{m\ln(1+x)}-1}{m\ln(1+x)}\cdot\frac{m\ln(1+x)}{x}=m\lim_{x\to 0}\frac{e^{m\ln(1+x)}-1}{m\ln(1+x)}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=m$$

4.7.6 Таблиця еквівалентних нескінченно малих величин

Якщо $\alpha(x)\to 0$ при $x\to b$, тоді

$\sin\alpha(x)\sim\alpha(x)$	$\arcsin\alpha(x)\sim\alpha(x)$
$\operatorname{tg}\alpha(x)\sim\alpha(x)$	$\operatorname{arctg}\alpha(x)\sim\alpha(x)$
$1-\cos\alpha(x)\sim\frac{\alpha^2(x)}{2}$	$a^{\alpha(x)}-1\sim\alpha(x)\ln a$
$e^{\alpha(x)}-1\sim\alpha(x)$	$\log_a(1+\alpha(x))\sim\alpha(x)\log_a e$
$\ln(1+\alpha(x))\sim\alpha(x)$	$(1+\alpha(x))^a-1\sim a\alpha(x)$

<u>Приклад.</u> Знайти границю $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}5x}{\sin 7x}$

Оскільки $\operatorname{tg}5x\sim 5x$ і $\sin 7x\sim 7x$ при $x\to 0$, то, замінивши функції еквівалентними нескінченно малими, одержимо:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}5x}{\sin 7x}=\lim_{x\to 0}\frac{5x}{7x}=\frac{5}{7}$$

<u>Приклад.</u> Знайти границю $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3}{1-\cos x}$.

Оскільки $1-\cos x=2\sin^2\dfrac{x}{2}\sim 2\left(\dfrac{x}{2}\right)^2$ при $x\to 0$, то $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3}{\frac{x^2}{2}}=\lim\limits_{x\to 0}2x=0$.

<u>Приклад.</u> Знайти границю $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}x}{\sin x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{x^2}=\infty$.

Якщо α і β – нескінченно малі при $x\to a$, причому β – нескінченно мала вищого порядку, чим α, то $\gamma=\alpha+\beta$ – нескінченно мала, еквівалентна α. Це можна довести наступною рівністю: $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\gamma}{\alpha}=\lim\limits_{x\to a}\left(1+\dfrac{\beta}{\alpha}\right)=1$.

Тоді кажуть, що α – **головна частина** нескінченно малої функції γ.

<u>Приклад.</u> Функція x^2+x – нескінченно мала при $x\to 0$, x – головна частина цієї функції. Щоб показати це, запишемо $\alpha=x^2$, $\beta=x$, тоді

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x}=0,\quad\lim_{x\to 0}\frac{x^2+x}{x}=\lim_{x\to 0}(x+1)=1.$$

<u>Приклад.</u> Знайти границю.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}mx}{\sin nx}=\lim_{x\to 0}\frac{mx}{nx}=\frac{m}{n}$$

Приклад. Знайти границю.

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}x_0}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{\sin(x-x_0)}{(x-x_0)\cos x\cos x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{\sin(x-x_0)}{x-x_0}\cdot\lim_{x\to x_0}\frac{1}{\cos x\cos x_0}=$$
$$=1\cdot\frac{1}{\cos^2 x_0}=\frac{1}{\cos^2 x_0}$$

Приклад. Знайти границю.

$$\lim_{x\to\pi/4}\frac{\sin x-\cos x}{\pi-4x}=\lim_{x\to\pi/4}\frac{-\dfrac{2}{\sqrt{2}}\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)}{\pi-4x}=\lim_{x\to\pi/4}\frac{-\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)}{2\sqrt{2}\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)}=-\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

Приклад. Знайти границю.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\pi-2x}=\left\{\begin{array}{l} y=\pi/2-x\\ x=\pi/2-y\\ \pi-2x=\pi-\pi+2y\end{array}\right\}=\lim_{y\to0}\frac{\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-y\right)}{2y}=\lim_{y\to0}\frac{\sin y}{2y}=\frac{1}{2}$$

Приклад. Знайти границю.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x-1}\right)^{x+3}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1+4}{x-1}\right)^{x+3}=\left\{\begin{array}{l} y=x-1\\ x\to\infty\\ y\to\infty\end{array}\right\}=\lim_{y\to\infty}\left(\frac{y+4}{y}\right)^{y+4}=\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{4}{y}\right)^{y}\cdot\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{4}{y}\right)^{4}=$$
$$=\left\{z=\frac{y}{4}\right\}=\lim_{z\to\infty}\left(1+\frac{1}{z}\right)^{4z}=\left(\lim_{z\to\infty}\left(1+\frac{1}{z}\right)^{z}\right)^{4}=e^4$$

Приклад. Знайти границю $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-6x+8}{x^2-8x+12}$.

Для знаходження цієї границі розкладемо на множники чисельник і знаменник даного дробу.

$$x^2-6x+8=0;x^2-8x+12=0;$$
$$D=36-32=4;D=64-48=16;$$
$$x_1=(6+2)/2=4;x_1=(8+4)/2=6;$$
$$x_2=(6-2)/2=2;x_2=(8-4)/2=2;$$

Тоді $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{(x-2)(x-4)}{(x-2)(x-6)}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x-4}{x-6}=\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}$

Приклад. Знайти границю.

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2}}{x^2-x}$$

домножимо чисельник і знаменник дробу на спряжений вираз:

$$\lim_{x\to0}\frac{1+x+x^2-1+x-x^2}{x(x-1)(\sqrt{1+x+x^2}+\sqrt{1-x+x^2})}=\lim_{x\to0}\frac{2x}{x(x-1)(\sqrt{1+x+x^2}+\sqrt{1-x+x^2})}=\frac{2}{-1\cdot(1+1)}=-1.$$

Приклад. Знайти границю

$$\lim_{x\to3}\frac{x^2-5x+6}{x^2-9}=\left\{x^2-5x+6=(x-2)(x-3)\right\}=\lim_{x\to3}\frac{(x-2)(x-3)}{(x-3)(x+3)}=\frac{3-2}{3+3}=\frac{1}{6}$$

Приклад. Знайти границю

$$\lim_{x\to1}\frac{x^3-6x^2+11x-6}{x^2-3x+2}.$$

Розкладемо чисельник і знаменник на множники.

$$x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$$
$$x^3-6x^2+11x-6=(x-1)(x-2)(x-3),$$

оскільки

$$
\begin{array}{l}
\big(\;\; x^3-6x^2+11x-6\big)\div\big(x-1\big)=x^2-5x+6\\
\underline{-x^3\;\;+x^2}\\
\qquad -5x^2+11x\\
\qquad \underline{\;\;5x^2\;\;-5x}\\
\qquad\qquad\quad 6x-6\\
\qquad\qquad\; \underline{-6x+6}\\
\qquad\qquad\qquad\; 0
\end{array}
$$

$$x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$$

Тоді $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)\,(x-2)\,(x-3)}{(x-1)\,(x-2)}=-2$

Приклад. Знайти границю.

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin(a+2h)-2\sin(a+h)+\sin a}{h^2}=\lim_{h\to 0}\frac{2\sin\dfrac{2a+2h}{2}\cos\dfrac{2h}{2}-2\sin(a+h)}{h^2}=$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{2\sin(a+h)(\cos h-1)}{h^2}=2\lim_{h\to 0}\sin(a+h)\cdot\lim_{h\to 0}\frac{-2\sin^2(h/2)}{4(h/2)^2}=2\sin a\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=-\sin a$$

Для самостійного розв'язання:

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^4+2x^2+5x-6}{x^3+2x^2+7x-1}=\infty$; 2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x^3+4x+5)(x^2+x+1)}{(x+2)(x^4+2x^3+7x^2+x-1)}=2$; 3. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-7x+10}{x^2-8x+12}=\dfrac{3}{4}$;
4. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{4+x+x^2}-2}{x+1}=-\dfrac{1}{4}$; 5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x\sin x}-1}{x^2}=\dfrac{1}{2}$; 6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt[3]{1+x}-1}=3$;
7. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{7+2x-x^2}}{x^2-2x}=\dfrac{\sqrt{7}}{4}$; 8. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-2x^2-4x+8}{3x^4-16x^3+24x^2-16}$.

4.8 Неперервність функції у точці

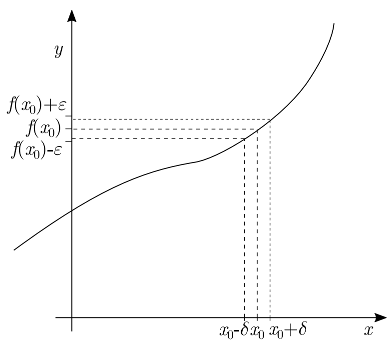
Означення. Функція $f(x)$, визначена в околі деякої точки x_0, називається **неперервною у точці** x_0, якщо границя функції і її значення у цій точці рівні, тобто

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$$

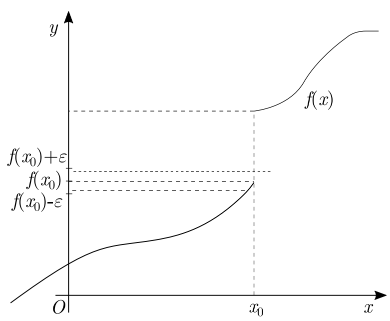
Той же факт можна записати інакше: $\lim\limits_{x\to x_0}f\left(x\right)=f\left(\lim\limits_{x\to x_0}x\right)$

Означення. Якщо функція $f(x)$ визначена в деякому околі точки x_0, але не є неперервною в самій точці x_0, то вона називається **розривною** функцією, а точка x_0 – точкою розриву.

Приклад неперервної функції:



Приклад розривної функції:



Означення. Функція $f(x)$ називається неперервною у точці x_0, якщо для будь-якого додатного числа $\varepsilon > 0$ існує таке число $\Delta > 0$, що для будь-яких x, що задовольняють умові

$$|x - x_0| < \Delta$$

виконується нерівність $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Означення. Функція $f(x)$ називається **неперервною** у точці $x = x_0$, якщо приріст функції у точці x_0 є нескінченно малою величиною.

$$f(x) = f(x_0) + \alpha(x)$$

де $\alpha(x)$ – нескінченно мала при $x \to x_0$.

4.8.1 Властивості неперервних функцій

1) Сума, різниця і добуток неперервних у точці x_0 функцій – є функція, неперервна у точці x_0.

2) Частка двох неперервних функцій $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ є неперервна функція за умови, що $g(x)$ не дорівнює нулю у точці x_0.

3) Суперпозиція неперервних функцій є неперервною функцією. Ця властивість може бути записана у такий спосіб:

Якщо $u = f(x)$ – неперервна функція у точці $x = x_0$, а $v = g(y)$ – неперервна функція у точці $y = f(x_0)$, то функція $v = g(f(x))$ – неперервна функція у точці $x = x_0$.

Справедливість наведених вище властивостей можна легко довести, використовуючи теореми про границі.

4.8.2 Неперервність деяких елементарних функцій

1) Функція $f(x) = C$, $C = \text{const}$ – неперервна функція на всій області визначення.

2) Раціональна функція $f(x) = \dfrac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + ... + b_m}$ неперервна для всіх значень x, крім тих, при яких знаменник обертається в нуль. Таким чином, функція цього виду неперервна на всій області визначення.

3) Тригонометричні функції неперервні на своїй області визначення.

Доведемо властивість 3 для функції $y = \sin x$.

Запишемо приріст функції $\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x$, або після перетворення:

$$\Delta y = 2\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}; \quad \lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 2\lim_{\Delta x \to 0}\left(\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}\right) = 0$$

Дійсно, є границя добутку двох функцій $\cos\left(x + \dfrac{\Delta x}{2}\right)$ і $\sin\dfrac{\Delta x}{2}$. При цьому функція косинус обмежена функція при $\Delta x \to 0$; $\left|\cos\left(x + \dfrac{\Delta x}{2}\right)\right| \leqslant 1$, а оскільки границя функції синус $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \sin\dfrac{\Delta x}{2} = 0$, то вона є нескінченно малою при $\Delta x \to 0$.

Таким чином, є добуток обмеженої функції на нескінченно малу, отже цей добуток, тобто функція Δy – нескінченно мала. Відповідно до розглянутого вище визначеннями, функція $y = \sin x$ – неперервна функція для будь-якого значення $x = x_0$ з області визначення, оскільки її приріст у цій точці – нескінченно мала величина.

Аналогічно можна довести неперервність інших тригонометричних функцій на всій області визначення.

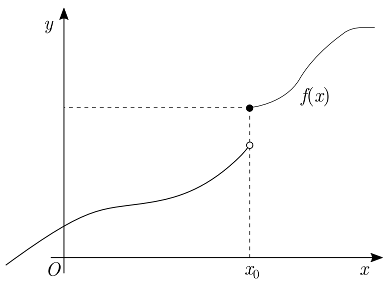
Взагалі варто відзначити, що всі основні елементарні функції неперервні на всій своїй області визначення.

4.8.3 Точки розриву і їхня класифікація

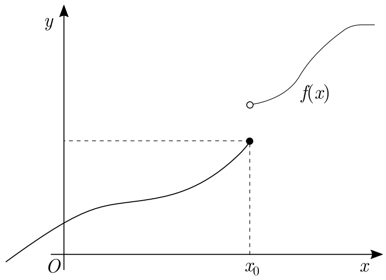
Розглянемо деяку функцію $f(x)$, неперервну в околі точки x_0, за винятком, можливо, самої цієї точки. З визначення точки розриву функції слідує, що для того, щоб $x = x_0$ була точкою розриву, функцію має бути не визначено у цій точці або функція не повинна бути у ній неперервною.

Слід зазначити також, що неперервність функції може бути однобічною. Пояснимо це у такий спосіб.

Якщо однобічна границя (див. вище) $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0)$, то функція називається неперервною праворуч.



Якщо однобічна границя (див. вище) $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0)$, то функція називається неперервною ліворуч.



<u>Означення.</u> Точка x_0 називається **точкою розриву** функції $f(x)$, якщо $f(x)$ не визначена у точці x_0 або не є неперервною у цій точці.

<u>Означення.</u> Точка x_0 називається **точкою розриву 1-го роду**, якщо у цій точці функція $f(x)$ має скінченні, але не рівні між собою ліву і праву границі.

$$\lim_{x\to x_0+0} f(x) \neq \lim_{x\to x_0-0} f(x)$$

Для виконання умов цього визначення непотрібно, щоб функція була визначена у точці $x = x_0$, достатньо того, щоб вона була визначена ліворуч і праворуч від неї.

З визначення можна зробити висновок, що у точці розриву 1-го роду функція може мати тільки скінченний стрибок. У деяких окремих випадках точку розриву 1-го роду ще іноді називають **усувною** точкою розриву, але докладніше про це поговоримо нижче.

<u>Означення.</u> Точка x_0 називається **точкою розриву 2-го роду**, якщо у цій точці функція $f(x)$ не має хоча б одної з однобічних границь або хоча б одна з них нескінченна.

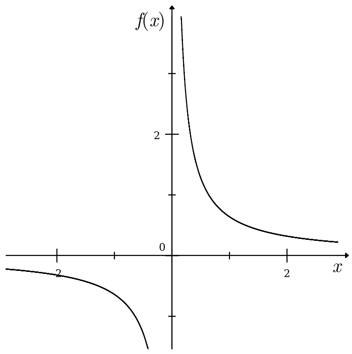
<u>Приклад.</u> Функція Діріхле[7]

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x - \text{раціональне} \\ 0, & x - \text{не є раціональним} \end{cases}$$

не є неперервною у будь-якій точці x_0.

<u>Приклад.</u> Функція $f(x) = \dfrac{1}{x}$ має у точці $x_0 = 0$ точку розриву 2-го роду, оскільки

$$\lim_{x\to 0+0} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x\to 0-0} f(x) = -\infty.$$



<u>Приклад.</u> $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$

Функція невизначена у точці $x = 0$, але має в ній скінченну границю $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$, тобто у точці $x = 0$ функція має точку розриву 1-го роду. Це усувна точка розриву, оскільки якщо довизначити функцію:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & \text{при} \quad x \neq 0 \\ 1, & \text{при} \quad x = 0 \end{cases}$$

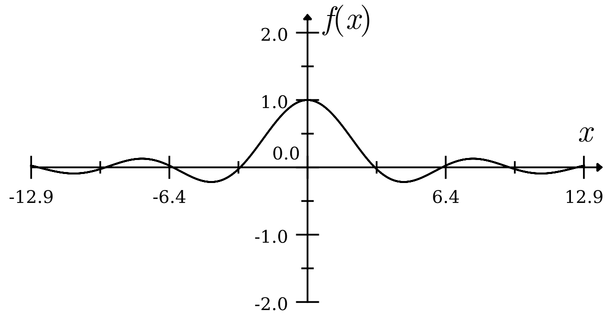
Графік цієї функції:

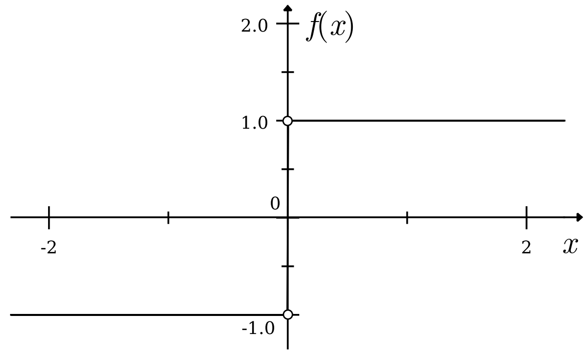
<u>Приклад.</u> $f(x) = \dfrac{x}{|x|} = \begin{cases} 1, & \text{при} \quad x > 0 \\ -1, & \text{при} \quad x < 0 \end{cases}$

Ця функція також позначається $\operatorname{sign}(x)$ – знак x. У точці $x = 0$ функція не визначена. Оскільки ліва і права границі функції різні, то точка розриву – 1-го роду. Якщо довизначити функцію у точці $x = 0$, поклавши $f(0) = 1$, то функція буде неперервна праворуч, якщо покласти $f(0) = -1$, то функція буде неперервною ліворуч, якщо покласти $f(x)$ рівне якому-небудь числу, відмінному від 1 або -1, то функція не буде неперервна ні ліворуч, ні праворуч, але у всіх випадках проте буде мати у точці $x = 0$ розрив 1-го роду. У цьому прикладі точка розриву 1-го роду не є усувною.

Таким чином, для того, щоб точка розриву 1-го роду була усувною, необхідно, щоб однобічні границі праворуч і ліворуч були скінченні і рівні, а функція була б у цій точці не визначена.

[7] Петер Густав Діріхле (Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet) (1805–1859) – німецький математик.





4.8.4 Неперервність функції на інтервалі і на відрізку

<u>**Означення.**</u> Функція $f(x)$ називається **неперервною на інтервалі (відрізку)**, якщо вона неперервна в будь-якій точці інтервалу (відрізка).

При цьому не потрібна неперервність функції на кінцях відрізка або інтервалу, необхідна тільки однобічна неперервність на кінцях відрізка або інтервалу.

4.8.5 Властивості функцій, неперервних на відрізку

<u>**Властивість 1:**</u> (Перша теорема Веєрштраса[8]). Функція, неперервна на відрізку, обмежена на цьому відрізку, тобто на відрізку $x \in [a, b]$ виконується умова $-M \leqslant f(x) \leqslant M$.

Доведення цієї властивості засноване на тому, що функція, неперервна у точці x_0, обмежена у деякому її околі, а якщо розбивати відрізок $[a, b]$ на скінченну кількість відрізків, які «стягаються» до точок x_0, то, вибравши найбільше серед значень M, отримаємо найбільше значення, яке обмежить функцію на усьому відрізку.

<u>**Властивість 2:**</u> (Друга теорема Веєрштраса) Функція, неперервна на відрізку $[a, b]$, приймає на ньому найбільше і найменше значення.

Тобто існують такі значення x_1 і x_2, що $f(x_1) = m$, $f(x_2) = M$, причому $m \leqslant f(x) \leqslant M$.

Зазначимо, що ці найбільші і найменші значення функція може приймати на відрізку і кілька разів (наприклад – $f(x) = \sin x$).

Різниця між найбільшим і найменшим значенням функції на відрізку називається **коливанням** (варіацією) функції на відрізку.

<u>**Властивість 3:**</u> (Друга теорема Коші). Функція, неперервна на відрізку $[a, b]$, приймає на цьому відрізку всі значення між найменшим і найбільшим значеннями.

<u>**Властивість 4:**</u> Якщо функція $f(x)$ неперервна у точці $x = x_0$, то існує деякий окіл точки x_0, у якій функція зберігає знак.

<u>**Властивість 5:**</u> (Перша теорема Коші). Якщо функція $f(x)$ – неперервна на відрізку $[a, b]$ і має на кінцях відрізка значення протилежних знаків, то існує така точка усередині цього відрізка, де $f(x) = 0$. Тобто, якщо $\text{sign}(f(a)) \neq \text{sign}(f(b))$, то $\exists x_0$: $f(x_0) = 0$.

<u>**Означення.**</u> Функція $f(x)$ називається **рівномірно неперервною** на відрізку $[a, b]$, якщо для кожного $\varepsilon > 0$ існує $\Delta > 0$ таке, що для будь-яких точок $x_1 \in [a, b]$ і $x_2 \in [a, b]$ таких, що $|x_2 - x_1| < \Delta$, виконується нерівність $|f(x_2) - f(x_1)| < \varepsilon$.

Відмінність рівномірної неперервності від «звичайної» у тім, що для кожного ε існує своє δ, що не залежить від x, а при «звичайній» неперервності δ залежить від ε і x.

<u>**Властивість 6:**</u> Теорема Кантора[9]. Функція, неперервна на відрізку, рівномірно неперервна на ньому.

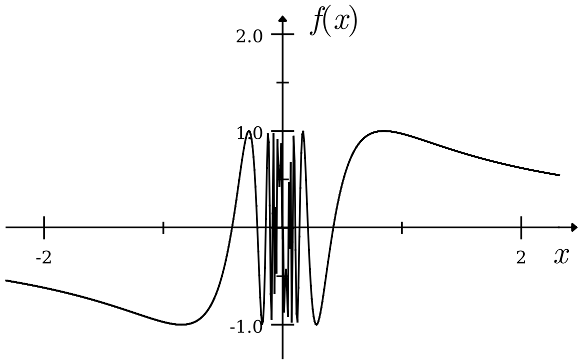
(Ця властивість справедлива тільки для відрізків, а не для інтервалів і напівінтервалів.)

<u>Приклад.</u> $f(x) = \sin \dfrac{1}{x}$

Функція $f(x) = \sin \dfrac{1}{x}$ неперервна на інтервалі $(0, a)$, але не є на ньому рівномірно неперервною, оскільки існує таке число $\delta > 0$ таке, що існують значення x_1 і x_2 такі, що $|f(x_1) - f(x_2)| > \varepsilon$, ε – будь-яке число за умови, що x_1 і x_2

[8] Карл Веєрштрас (Karl Theodor Wilhelm Weierstraß) (1815–1897) – німецький математик

[9] Георг Кантор (Georg Cantor) (1845–1918) – німецький математик.



близькі до нуля.

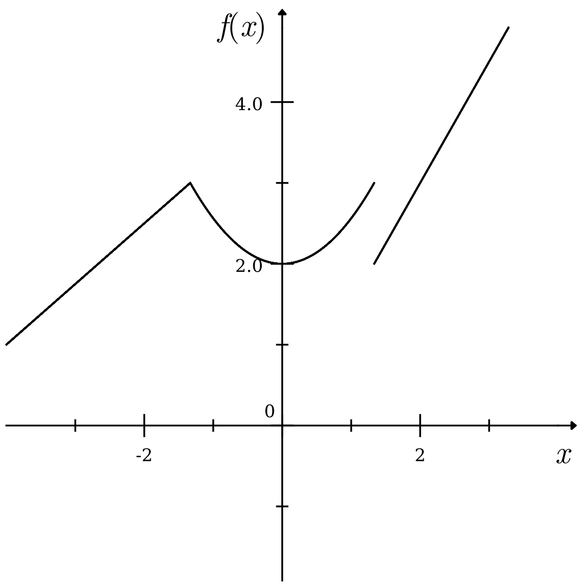
Властивість 7: Якщо функція $f(x)$ визначена, монотонна і неперервна на деякому проміжку, то і обернена їй функція $x = g(y)$ теж однозначна, монотонна і неперервна.

Приклад. Дослідити на неперервність функцію і визначити тип точок розриву, якщо вони є.

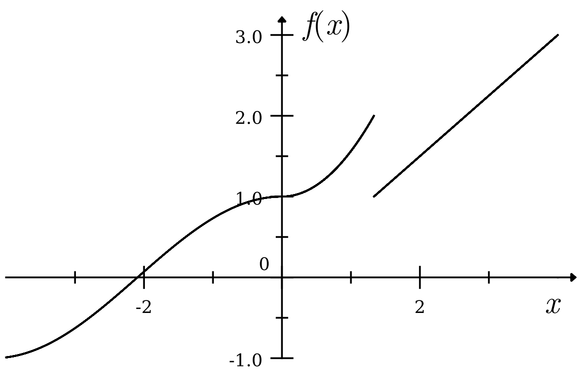
$$f(x) = \begin{cases} x+4, & x < -1 \\ x^2+2, & -1 \leqslant x \leqslant 1 \\ 2x, & x > 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to -1-0} f(x) = 3 \quad \lim_{x \to 1-0} f(x) = 3$$
$$\lim_{x \to -1+0} f(x) = 3 \quad \lim_{x \to 1+0} f(x) = 2$$

у точці $x = -1$ функція неперервна у точці $x = 1$ точка розриву 1-го роду



Приклад. Дослідити на неперервність функцію і визначити тип точок розриву, якщо вони є.



$$f(x) = \begin{cases} \cos x, & x \leqslant 0 \\ x^2+1, & 0 < x < 1 \\ x, & x \geqslant 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0-0} f(x) = 1 \quad \lim_{x\to 1-0} f(x) = 2$$
$$\lim_{x\to 0+0} f(x) = 1 \quad \lim_{x\to 1+0} f(x) = 1$$

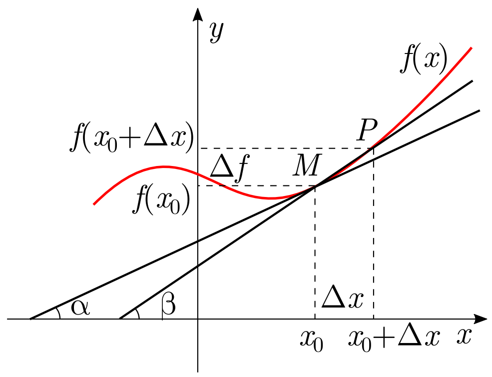
у точці $x = 0$ функція неперервна у точці $x = 1$ точка розриву 1-го роду

4.9 Похідна функції, її геометричний і фізичний зміст

Означення **Похідною** функції $f(x)$ у точці x називається границя, якщо вона існує, відношення приросту функції у цій точці до приросту аргументу при прямування приросту аргументу до нуля.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

Функція, яка має у точці похідну, називається *диференційованою* у цій точці.



Нехай $f(x)$ визначена на деякому проміжку (a, b). Тоді $\operatorname{tg}\beta = \dfrac{\Delta f}{\Delta x}$ – тангенс кута нахилу січної MP до графіка функції.

$$\lim_{\Delta x\to 0} \operatorname{tg}\beta = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x_0) = \operatorname{tg}\alpha,$$

де α – кут нахилу дотичної до графіка функції $f(x)$ у точці $(x_0, f(x_0))$.

Кут між кривими може бути визначений як кут між дотичними, проведеними до цих кривих у який-небудь точці.

Рівняння дотичної до кривої: $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$

Рівняння нормалі до кривої: $y - y_0 = -\dfrac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$.

Фактично, похідна функції показує швидкість зміни функції, як змінюється функція при зміні змінної.

Фізичний зміст похідної функції $f(t)$, де t – час, а $f(t)$ – закон руху (зміни координат) – миттєва швидкість руху.

$$v_{\text{сер}} = \frac{\Delta f}{\Delta t} = \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$
$$v = \lim_{\Delta t\to 0} v_{\text{сер}} = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta f}{\Delta t}$$

Відповідно, друга похідна функції – швидкість зміни швидкості, тобто прискорення.

$$v = f' = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} \text{ – позначення Ляйбніца (Leibniz)}$$

Корисне, оскільки у багатьох випадках похідна поводиться подібно до звичайного дробу.

4.9.1 Однобічні похідні функції у точці

Означення Правою (лівою) похідною функції $f(x)$ у точці $x = x_0$ називається праве (ліве) значення границі відношення $\dfrac{\Delta f}{\Delta x}$ за умови, що це відношення існує.

$$f'_+(x_0) = \lim_{\Delta x\to 0+0} \frac{\Delta f}{\Delta x};$$
$$f'_-(x_0) = \lim_{\Delta x\to 0-0} \frac{\Delta f}{\Delta x}.$$

Якщо функція $f(x)$ має похідну в деякій точці $x = x_0$, то вона має у цій точці однобічні похідні. Однак, зворотне твердження невірне. По-перше, функція може мати розрив у точці x_0, а по-друге, навіть якщо функція неперервна у точці x_0, вона може бути у ній недиференційована.

Наприклад: $f(x) = |x|$ – має у точці $x = 0$ і ліву і праву похідну, неперервна у цій точці, однак, не має в ній похідної.

Теорема (Необхідна умова існування похідної) *Якщо функція $f(x)$ має похідну у точці x_0, то вона неперервна у цій точці.*

Зрозуміло, що ця умова не є достатньою.

4.9.2 Основні правила диференціювання

Позначимо $f(x) = u$, $g(x) = v$ – функції, диференційовані у точці x.

1. $(u \pm v)' = u' \pm v'$
2. $(u \cdot v)' = uv' + u'v$
3. $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$, якщо $v \neq 0$.

Ці правила можуть бути легко доведені на основі теорем про границі.

4.9.3 Похідні основних елементарних функцій

1. $C' = 0$;
2. $(x^m)' = mx^{m-1}$;
3. $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$;
4. $\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$;
5. $(e^x)' = e^x$;
6. $(a^x)' = a^x \ln a$;
7. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$;
8. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$;
9. $(\sin x)' = \cos x$;
10. $(\cos x)' = -\sin x$;
11. $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$;
12. $(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$;
13. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$;
14. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$;
15. $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1 + x^2}$;
16. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1 + x^2}$.

4.9.4 Похідна складеної функції

Теорема. *Нехай $y = f(u)$; $u = g(x)$ диференційовані у відповідних точках функції, причому область значень функції u входить в область визначення функції f. Тоді $y' = f'(u) \cdot g'$.*

Доведення

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta g} \cdot \frac{\Delta g}{\Delta x} \Rightarrow \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta g \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta g} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta g}{\Delta x}$$

(з врахуванням того, що якщо $\Delta x \to 0$, то $\Delta u \to 0$, оскільки $u = g(x)$ – неперервна функція)

Тоді $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}g} \cdot \dfrac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}$.

Теорему доведено.

4.9.5 Логарифмічне диференціювання

Розглянемо функцію $y = \ln|x| = \begin{cases} \ln x, & \text{при} \quad x > 0 \\ \ln(-x), & \text{при} \quad x < 0 \end{cases}$.

Тоді $(\ln|x|)' = \dfrac{1}{x}$, оскільки $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$; $\quad (\ln(-x))' = \dfrac{(-x)'}{-x} = \dfrac{1}{x}$.

З огляду на отриманий результат, можна записати $(\ln|f(x)|)' = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$.

Відношення $\dfrac{f'(x)}{f(x)}$ називається **логарифмічною похідною** функції $f(x)$.

Спосіб **логарифмічного диференціювання** полягає у тому, що спочатку знаходять логарифмічну похідну функції, а потім похідну самої функції за формулою

$$f'(x) = (\ln|f(x)|)' \cdot f(x)$$

Спосіб логарифмічного диференціювання зручно застосовувати для знаходження похідних складних, особливо показникових функцій, для яких безпосереднє обчислення похідної з використанням правил диференціювання видається трудомістким.

4.9.6 Похідна показниково-степеневої функції

Функція називається показниковою, якщо незалежна змінна входить у показник степеня, і степеневою, якщо змінна є основою. Якщо ж і основа і показник степеня залежать від змінної, то така функція буде показниково-степеневою.

Нехай $u = f(x)$ і $v = g(x)$ – функції, що мають похідні у точці x, $f(x) > 0$.

Знайдемо похідну функції $y = u^v$. Логарифмуючи, одержимо:

$$\ln y = v \ln u$$

$$\frac{y'}{y} = v' \ln u + v\frac{u'}{u}$$

$$y' = u^v \left(v\frac{u'}{u} + v' \ln u \right)$$

$$(u^v)' = vu^{v-1}u' + u^v v' \ln u$$

<u>Приклад</u> Знайти похідну функції $f(x) = (x^2 + 3x)^{x \cos x}$.

За отриманою вище формулою одержуємо: $u = x^2 + 3x$; $\quad v = x \cos x$;

Похідні цих функцій: $u' = 2x + 3$; $\quad v' = \cos x - x \sin x$;

Остаточно:

$$f'(x) = x \cos x \cdot (x^2 + 3x)^{x \cos x - 1} \cdot (2x + 3) + (x^2 + 3x)^{x \cos x} (\cos x - x \sin x) \ln(x^2 + 3x)$$

4.9.7 Диференціювання функції, заданої неявним чином

Означення. Якщо змінна x і її функція $y = y(x)$ пов'язані між собою рівнянням

$$F(x, y) = 0,$$

то функцію $y(x)$ називають *заданою неявним чином.*

<u>Приклад</u>

$$y^3 - 3 \sin xy + \operatorname{tg} x - 4 = 0$$

Диференціювання функції, заданої неявним чином, виконують у два кроки:

- Диференціюють обидві частини виразу $F(x, y) = 0$ за x, враховуючи правила диференціювання складеної функції і те, що $y = y(x)$.
- Знаходять з отриманого рівняння $y'(x)$.

4.9.8 Похідна оберненої функції

Нехай потрібно знайти похідну функції $y = f(x)$ за умови, що обернена їй функція $x = g(y)$ має похідну, відмінну від нуля у відповідній точці.

Для розв'язання цієї задачі диференціюємо функцію $x = g(y)$ за x:

$$1 = g'(y)y'$$

оскільки $g'(y) \neq 0$, $y' = \dfrac{1}{g'(y)}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\dfrac{dx}{dy}}$$

тобто похідна оберненої функції обернена за величиною до похідної даної функції.

<u>Приклад</u> Знайти формулу для похідної функції arctg.

Функція arctg є функцією, оберненою до функції tg, тобто її похідна може бути знайдена у такий спосіб:

$$y = \operatorname{tg} x; \quad x = \operatorname{arctg} y;$$

Відомо, що $y' = (\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$;

За наведеною вище формулою одержуємо:

$$y' = \frac{1}{d(\operatorname{arctg} y)/dx}; \quad \frac{d(\operatorname{arctg} y)}{dy} = \frac{1}{1/\cos^2 x}$$

Оскільки $\dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x = 1 + y^2$; то можна записати остаточну формулу для похідної арктангенса:

$$(\operatorname{arctg} y)' = \frac{1}{1+y^2};$$

У такий спосіб отримані всі формули для похідних арксинуса, арккосинуса і інших зворотних функцій, наведених у таблиці похідних.

4.10 Похідна функції, заданої параметрично

Нехай $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}, \quad t_0 \leqslant t \leqslant T.$

Припустімо, що ці функції мають похідні і функція $x = \varphi(t)$ має обернену функцію $t = \Phi(x)$.

Тоді функція $y = \psi(t)$ може бути розглянута як складена функція $y = \psi[\Phi(x)]$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{d\psi(t)}{dt}\frac{d\Phi(x)}{dx}$$

оскільки $\Phi(x)$ – обернена функція, то $\dfrac{d\Phi(x)}{dx} = \dfrac{1}{\dfrac{d\varphi(t)}{dt}}$

Остаточно одержуємо: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\dfrac{d\psi(t)}{dt}}{\dfrac{d\varphi(t)}{dt}} = \dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$

Таким чином, можна знаходити похідну функції, не знаходячи безпосередньої залежності y від x.

<u>Приклад</u> Знайти похідну функції $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

Спосіб 1: Виразимо одну змінну через іншу $y = \pm\dfrac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$, тоді

$$\frac{dy}{dx} = \pm\frac{b(-2x)}{2a\sqrt{a^2-x^2}} = \pm\frac{bx}{a\sqrt{a^2-x^2}}$$

Спосіб 2: Застосуємо параметричне завдання даної кривої: $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b\cos t}{-a\sin t} = \frac{b}{-a\operatorname{tg} t}$$

$$x^2 = a^2\cos^2 t; \cos^2 t = \frac{x^2}{a^2}$$

$$\frac{1}{\cos^2 t} = 1 + \operatorname{tg}^2 t \quad \Rightarrow \quad \operatorname{tg}^2 t = -1 + \frac{a^2}{x^2} = \frac{a^2 - x^2}{x^2} \quad \operatorname{tg} t = \pm\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}; \frac{dy}{dx} = \pm\frac{bx}{a\sqrt{a^2-x^2}}$$

4.11 Диференціал функції

Нехай функція $y = f(x)$ має похідну у точці x:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$$

Тоді можна записати: $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha$, де $\alpha \to 0$, при $\Delta x \to 0$.

Отже: $\Delta y = f'(x) \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x$.

Величина $\alpha \Delta x$ – нескінченно мала більш високого порядку, чим $f'(x)\Delta x$, тобто $f'(x)\Delta x$ – головна частина приросту Δy.

<u>**Означення**</u> **Диференціалом** функції $f(x)$ у точці x називається головна лінійна частина приросту функції.

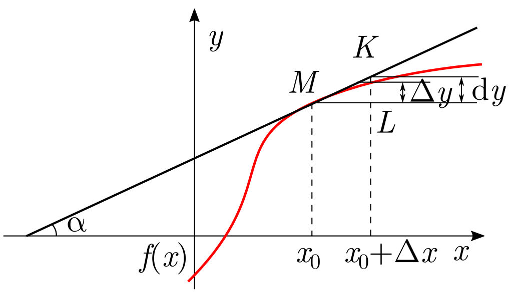
Позначається $\mathrm{d}y$ або $\mathrm{d}f(x)$.

З визначення випливає, що $\mathrm{d}y = f'(x)\Delta x$ або

$$\mathrm{d}y = f'(x)\,\mathrm{d}x.$$

Можна також записати: $f'(x) = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$

4.11.1 Геометричний зміст диференціала



Із трикутника ΔMKL: $KL = \mathrm{d}y = \mathrm{tg}\,\alpha \cdot \Delta x = y' \cdot \Delta x$.

Таким чином, диференціал функції $f(x)$ у точці x дорівнює приросту ординати дотичної до графіка цієї функції у розглянутій точці.

4.11.2 Властивості диференціала

Якщо $u = f(x)$ і $v = g(x)$ – функції, диференційовані у точці x, то безпосередньо з визначення диференціала випливають наступні властивості:

1. $d(u \pm v) = (u \pm v)'dx = u'\mathrm{d}x \pm v'\mathrm{d}x = \mathrm{d}u \pm \mathrm{d}v$
2. $d(uv) = (uv)'\mathrm{d}x = (u'v + v'u)\mathrm{d}x = v\mathrm{d}u + u\mathrm{d}v$
3. $d(Cu) = Cdu$
4. $d\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{v\mathrm{d}u - u\mathrm{d}v}{v^2}$

4.11.3 Диференціал складеної функції. Інваріантність форми запису диференціала

Нехай $y = f(x)$, $x = g(t)$, тобто y – складена функція.

Тоді $\mathrm{d}y = f'(x)g'(t)\mathrm{d}t = f'(x)\mathrm{d}x$.

Видно, що форма запису диференціала $\mathrm{d}y$ не залежить від того, чи буде x незалежної змінної або функцією якоїсь іншої змінної, у зв'язку із чим ця форма запису називається **інваріантною формою запису диференціала**.

Однак, якщо x – незалежна змінна, то

$\mathrm{d}x = \Delta x$, але якщо x залежить від t, то $\Delta x \neq \mathrm{d}x$.

У такий спосіб форма запису $\mathrm{d}y = f'(x)\Delta x$ не є інваріантною.

<u>Приклад</u> Знайти похідну функції $y = x \cos x \sin x + \dfrac{1}{2}\cos^2 x$.

Спочатку перетворимо дану функцію: $y = \dfrac{x}{2}\sin 2x + \dfrac{1}{2}\cos^2 x$

$$y' = \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{2}x2\cos 2x + \frac{1}{2}2\cos x(-\sin x) = \frac{1}{2}\sin 2x + x\cos 2x - \sin x \cos x = x\cos 2x.$$

<u>Приклад</u> Знайти похідну функції $y = \dfrac{x^2 e^{x^2}}{x^2+1}$.

$$y' = \frac{(2xe^{x^2} + x^2 2xe^{x^2})(x^2+1) - (2x)x^2e^{x^2}}{(x^2+1)^2} = \frac{2x^3e^{x^2} + 2x^5e^{x^2} + 2xe^{x^2} + 2x^3e^{x^2} - 2x^3e^{x^2}}{(x^2+1)^2} =$$

$$= \frac{2xe^{x^2}(x^4+1+x^2)}{(x^2+1)^2}$$

Приклад Знайти похідну функції $y = \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2} - \frac{x}{\sin x}$

$$y' = \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{2} - \frac{\sin x - x\cos x}{\sin^2 x} = \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} - \frac{\sin x - x\cos x}{\sin^2 x} = \frac{\sin x - \sin x + x\cos x}{\sin^2 x} =$$

$$= \frac{x\cos x}{\sin^2 x}$$

Приклад Знайти похідну функції $y = \operatorname{arctg}\frac{2x^4}{1-x^8}$

$$y' = \frac{1}{\left(1 + \frac{4x^8}{(1-x^8)^2}\right)} \cdot \frac{8x^3(1-x^8) - (-8x^7)2x^4}{(1-x^8)^2} = \frac{(1-x^8)^2(8x^3 - 8x^{11} + 16x^{11})}{(1+x^8)^2(1-x^8)^2} = \frac{8x^3 + 8x^{11}}{(1+x^8)^2} =$$

$$= \frac{8x^3(1+x^8)}{(1+x^8)^2} = \frac{8x^3}{1+x^8}$$

Приклад Знайти похідну функції $y = x^2e^{x^2}\ln x$.

$$y' = \left(x^2e^{x^2}\right)'\ln x + x^2e^{x^2}\frac{1}{x} = \left(2xe^{x^2} + x^2e^{x^2}2x\right)\ln x + xe^{x^2} = 2xe^{x^2}(1+x^2)\ln x + xe^{x^2} =$$

$$= xe^{x^2}(1 + 2\ln x + 2x^2\ln x)$$

4.11.4 Застосування диференціала до наближених обчислень

Диференціал функції $y = f(x)$ залежить від Δx і є головною частиною приросту Δx.
Також можна скористатися формулою

$$\mathrm{d}y = f'(x)\mathrm{d}x$$

Тоді абсолютна похибка

$$|\Delta y - \mathrm{d}y|$$

Відносна похибка

$$\left|\frac{\Delta y - \mathrm{d}y}{\mathrm{d}y}\right|$$

Більш докладне застосування диференціала до наближених обчислень буде описано нижче.

4.12 Похідні і диференціали вищих порядків

Нехай функція $f(x)$ – диференційована на деякому інтервалі. Тоді, диференціюючи її, одержуємо першу похідну

$$y' = f'(x) = \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}$$

Якщо знайти похідну функції $f'(x)$, одержимо **другу похідну** функції $f(x)$.

$$y'' = f''(x) = \frac{\mathrm{d}^2f(x)}{\mathrm{d}x^2}$$

тобто $y'' = (y')'$ або $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)$.

Цей процес можна продовжити і далі, знаходячи похідні порядку n.

$$\frac{\mathrm{d}^ny}{\mathrm{d}x^n} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}^{n-1}y}{\mathrm{d}x^{n-1}}\right).$$

4.12.1 Загальні правила знаходження похідних вищих порядків

Якщо функції $u = f(x)$ і $v = g(x)$ диференційовані, то

1. $(Cu)^{(n)} = Cu^{(n)}$;
2. $(u \pm v)^{(n)} = u^{(n)} \pm v^{(n)}$;
3. $(u \cdot v)^{(n)} = vu^{(n)} + nu^{(n-1)}v' + \dfrac{n(n-1)}{2!}u^{(n-2)}v'' + ... + \dfrac{n(n-1)...[n-(k-1)]}{k!}u^{(n-k)}v^{(k)} + ...$
$$... + uv^{(n)}.$$

Цей вираз називається **формулою Ляйбніца**
Також за формулою $\mathrm{d}^n y = f^{(n)}(x)\mathrm{d}x^n$ може бути знайдений диференціал n-го порядку.

4.12.2 Порушення інваріантності форми запису для диференціалів вищих порядків

Нехай функції $y = f(x)$ та $x = x(t)$ є двічі диференційованими на відповідних проміжках (мають другу похідну на них). Тоді

$$y = f(x(t)) \Rightarrow \mathrm{d}y = f'(x)\mathrm{d}x; \mathrm{d}^2y = f''(x)\mathrm{d}x^2;$$
$$y = f(x(t)) \Rightarrow \mathrm{d}y = f'(x)\mathrm{d}x = f'\left(x(t)\right)x'(t)\mathrm{d}t^2;$$
$$\mathrm{d}^2y = \left(f'(x(t))x'(t)\right)'\mathrm{d}t^2 = \Big(f''\left(x(t)\right)\left(x'(t)\right)^2 + f'\left(x(t)\right)x''(t)\Big)\mathrm{d}t^2 = f''(x(t))\left(x'(t)\mathrm{d}t\right)^2 + f'(x(t))x''(t)\mathrm{d}t^2 =$$
$$= f''(x)(\mathrm{d}x)^2 + f'(x)\mathrm{d}^2x.$$

Остання рівність вказує на порушення інваріантності форми запису диференціала другого порядку, а значить, і на порушення інваріантності для усіх диференціалів вищих порядків.

4.12.3 Знаходження похідної другого порядку для функції, яку задано параметрично

Нехай маємо функцію, яку задано параметрично:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

Тоді, якщо $x(t)$ та $y(t)$ мають в околі точки, де слід знайти другу похідну від функції $y(x)$, другі похідні,

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}} = \frac{y'(t)}{x'(t)}$$
$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right] = \frac{\mathrm{d}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\cdot\mathrm{d}t}\left[\frac{y'(t)}{x'(t)}\right]$$
$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{1}{x'(t)}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{y'(t)}{x'(t)}\right]$$

Приклад

Знайти другу похідну функції $y = y(x)$, якщо

$$\begin{cases} x = t^2e^{t^3}; \\ y = \left(1 - t^2\right)e^{-t}. \end{cases}$$

Розв'язання

Маємо:

$$x = t^2e^{t^3} \Rightarrow x'(t) = 2te^{t^3} + t^2\cdot e^{t^3}\cdot 3t^2 = e^{t^3}(2t + 3t^4)$$

$$y = \left(1 - t^2\right)e^{-t} \Rightarrow y'(t) = -2t\cdot e^{-t} + (1 - t^2)\cdot e^{-t}\cdot(-1) = e^{-t}(t^2 - 2t - 1)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{y'(t)}{x'(t)}\right] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{e^{-t}(t^2-2t-1)}{e^{t^3}(2t+3t^4)}\right] = \left[e^{-t-t^3}\cdot\frac{t^2-2t-1}{2t+3t^4}\right]' =$$
$$= e^{-t-t^3}(-1-3t^2)\cdot\frac{t^2-2t-1}{2t+3t^4} + e^{-t-t^3}\cdot\frac{(2t-2)(2t+3t^4) - (t^2-2t-1)(2+12t^3)}{(2t+3t^4)^2} =$$
$$= -\frac{\left(9t^8 - 18t^7 - 6t^6 + 6t^5 - 33t^4 - 16t^3 - 6t^2 - 2t - 2\right)e^{-t^3-t}}{(2t+3t^4)^2}$$
$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{1}{x'(t)}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{y'(t)}{x'(t)}\right] =$$
$$= -\frac{\left(9t^8 - 18t^7 - 6t^6 + 6t^5 - 33t^4 - 16t^3 - 6t^2 - 2t - 2\right)e^{-2t^3-t}}{(2t+3t^4)^3}$$

4.12.4 Знаходження похідної другого порядку для функції, яку задано неявним чином

Нехай змінна x і її функція $y = y(x)$ пов'язані між собою рівнянням

$$F(x, y) = 0$$

Алгоритм знаходження Знаходження похідної другого порядку для функції, заданої неявним чином, виконують у три кроки:

- Диференціюють обидві частини виразу $F(x, y) = 0$ за x, враховуючи правила диференціювання складеної функції і те, що $y = y(x)$.
- Знаходять з отриманого рівняння $y'(x)$.
- Диференціюють рівняння для $y'(x)$ і підставляють до нього значення $y'(x)$.

Приклад $y = x + \ln y$. Знайти $y'' = \dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}$.
Розв'язання
Знаходимо $y'(x)$:

$$(y)' = (x)' + (\ln y)' \Rightarrow y' = 1 + \frac{y'}{y} \Rightarrow \left[1 - \frac{1}{y}\right] y' = 1 \Rightarrow y' = \frac{y}{y-1}$$

Диференціюють рівняння для $y'(x)$:

$$y'' = \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = (y')' = \left(\frac{y}{y-1}\right)' = \frac{y' \cdot (y-1) - y \cdot y'}{(y-1)^2} = -\frac{y'}{(y-1)^2} = -\frac{\frac{y}{y-1}}{(y-1)^2} = -\frac{y}{(y-1)^3}$$

4.13 Формула Тейлора

Теорема Тейлора[10] 1) *Нехай функція $f(x)$ має у точці $x = a$ і деякому її околі похідні порядку до $n+1$ включно. Тобто і всі попередні до порядку n функції і їхні похідні неперервні і диференційовані у цьому околі*

2) *Нехай x – будь-яке значення з цього околу, але $x \neq a$*

Тоді між точками x і a знайдеться така точка ε, що справедлива формула:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(\varepsilon)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

– цей вираз називається **формулою Тейлора**, а вираз:

$$\frac{f^{(n+1)}(\varepsilon)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} = R_{n+1}(x)$$

називається **залишковим членом у формі Лагранжа**.

Доведення Представимо функцію $f(x)$ у вигляді деякого многочлена $P_n(x)$, значення якого у точці $x = a$ дорівнює значенню функції $f(x)$, а значення його похідних дорівнює значенням відповідних похідних функції у точці $x = a$.

$$P_n(a) = f(a); \quad P_n'(a) = f'(a); \quad P_n''(a) = f''(a); \quad ... \quad P_n^{(n)}(a) = f^{(n)}(a) \tag{16}$$

Багаточлен $P_n(x)$ буде близький до функції $f(x)$. Чим більше значення n, тим ближче значення многочлена до значень функції, тим точніше він повторює функцію.

Представимо цей многочлен з невизначеними поки коефіцієнтами:

$$P_n(x) = C_0 + C_1(x-a) + C_2(x-a)^2 + ... + C_n(x-a)^n \tag{17}$$

Для знаходження невизначених коефіцієнтів обчислюємо похідні многочлена у точці $x = a$ і встановлюємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} P_n'(x) = C_1 + 2C_2(x-a) + 3C_3(x-a)^2 + ... + nC_n(x-a)^{n-1} \\ P_n''(x) = 2C_2 + 3 \cdot 2C_3(x-a) + ... + n(n-1)C_n(x-a)^{n-2} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ P_n^{(n)}(x) = n(n-1)(n-2)...2 \cdot 1C_n \end{cases} \tag{18}$$

Розв'язання цієї системи при $x = a$ не викликає утруднень, одержуємо:

$$f(a) = C_0$$

$$f'(a) = C_1$$

$$f''(a) = 2 \cdot 1C_2$$

$$f'''(a) = 3 \cdot 2 \cdot 1C_3$$

[10]Брук Тейлор (Brook Taylor) (1685–1731) – англійський математик

....

$$f^{(n)}(a) = n(n-1)(n-2)...2 \cdot 1C_n$$

Підставляючи отримані значення C_i до формули (17), одержуємо:

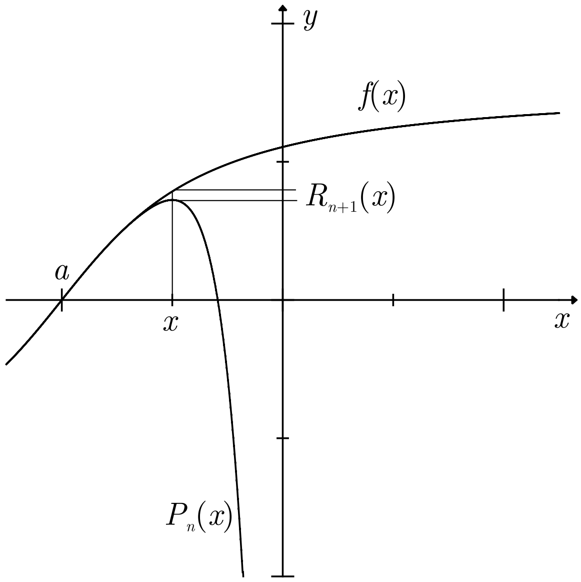
$$P_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1}(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Як було зазначено вище, многочлен не точно збігається з функцією $f(x)$, тобто відрізняється від неї на деяку величину. Позначимо цю величину $R_{n+1}(x)$. Тоді:

$$f(x) = P_n(x) + R_{n+1}(x)$$

Теорему доведено.

Розглянемо докладніше величину $R_{n+1}(x)$, яку називають **залишковим членом**.



Як видно на малюнку, у точці $x = a$ значення многочлена у точності збігається зі значенням функції. Однак, при віддаленні від точки $x = a$ розбіжність значно збільшується.

Іноді використається інший запис для $R_{n+1}(x)$. Оскільки точка $\varepsilon \in (a, x)$, то знайдеться таке число θ з інтервалу $0 < \theta < 1$, що $\varepsilon = a + \theta(x-a)$.

Тоді можна записати:

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}[a + \theta(x-a)]}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

Тоді, якщо прийняти $a = x_0$, $x - a = \Delta x$, $x = x_0 + \Delta x$, формулу Тейлора можна записати у вигляді:

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \frac{f'(x_0)}{1!}\Delta x + \frac{f''(x_0)}{2!}(\Delta x)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(\Delta x)^n + \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta\Delta x)}{(n+1)!}(\Delta x)^{n+1}$$

де $0 < \theta < 1$.

Якщо прийняти $n = 0$, одержимо: $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0 + \theta\Delta x) \cdot \Delta x$ – цей вираз називається **формулою Лагранжа**[11].

Формула Тейлора має величезне значення для різних математичних перетворень. З її допомогою можна знаходити значення різних функцій, інтегрувати, розв'язувати диференціальні рівняння та інше.

При розгляді степеневих рядів буде більш докладно описані деякі особливості і умови розкладу функції за формулою Тейлора.

4.13.1 Формула Маклорена

Формулою Маклорена[12] називається формула Тейлора при $a = 0$:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + ... + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n(x)$$

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}; \quad 0 < \theta < 1$$

[11] Жозеф Луї Лагранж (Joseph Louis Lagrange) (1736–1813) французький математик і механік.
[12] Колін Маклорен (Colin Maclaurin) (1698–1746) шотландський математик.

Ми одержали так звану формулу Маклорена із залишковим членом у формі Лагранжа.

Слід зазначити, що при розкладі функції, застосування формули Маклорена краще, ніж застосування безпосередньо формули Тейлора, оскільки обчислення значень похідних у нулі простіше, ніж у будь-якій іншій точці, природно, за умови, що ці похідні існують.

Однак, вибір числа a дуже важливий для практичного використання. Справа у тому, що при обчисленні значення функції у точці, розташованої відносно близько до точки a, значення, отримане за формулою Тейлора, навіть при обмеженні трьома – чотирма першими доданками, збігається з точним значенням функції практично абсолютно. При віддаленні ж розглянутої точки від точки a для одержання точного значення треба брати все більшу кількість доданків формули Тейлора, що незручно.

Тобто чим більше за модулем значення різниці $(x-a)$, тим точніше значення функції відрізняється від знайденого за формулою Тейлора.

Крім того, можна показати, що залишковий член $R_{n+1}(x)$ є нескінченно малою функцією при $x \to a$, причому більш високого порядку, ніж $(x-a)^n$, тобто (залишковий член у формі Пеано[13])

$$R_{n+1}(x) = o\left([x-a]^n\right).$$

Таким чином, ряд Маклорена можна вважати частковим випадком ряду Тейлора.

4.13.2 Подання деяких елементарних функцій за формулою Тейлора

Застосування формули Тейлора для розкладу функцій у степеневий ряд широко використовується і має величезне значення при проведенні різних математичних розрахунків. Безпосереднє обчислення інтегралів деяких функцій може бути сполучене зі значними труднощами, а заміна функції степеневим рядом дозволяє значно спростити задачу. Знаходження значень тригонометричних, зворотних тригонометричних, логарифмічних функцій також може бути зведене до знаходження значень відповідних многочленів.

Якщо при розкладі взяти достатню кількість доданків, то значення функції може бути знайдене з будь-якою наперед заданою точністю. Практично можна сказати, що для знаходження значення будь-якої функції з достатнім ступенем точності (передбачається, що точність, що перевищує 10–20 знаків після десяткової точки, необхідна дуже рідко) досить 4–10 членів розкладу в ряд.

Застосування принципу розкладу в ряд дозволяє робити обчислення на ЕОМ у режимі реального часу, що варте уваги при розв'язанні конкретних технічних задач.

Функція $f(x) = e^x$

Знаходимо:

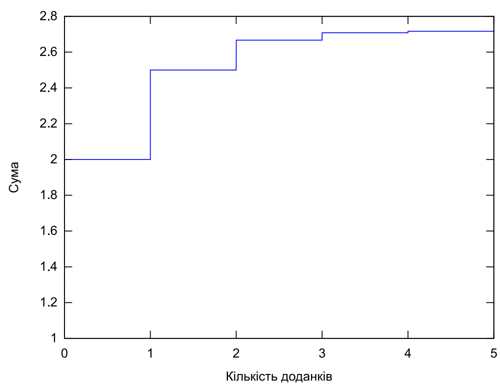
$$f(x) = e^x, f(0) = 1;$$
$$f'(x) = e^x, f'(0) = 1;$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$f^{(n)}(x) = e^x, f^{(n)}(0) = 1.$$

Тоді: $e^x = 1 + \dfrac{x}{1} + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + ... + \dfrac{x^n}{n!} + \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta x}, \qquad 0 < \theta < 1$

Приклад: Знайдемо значення числа e.

В отриманій вище формулі покладемо $x = 1$.

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + ... + \frac{1}{(n+1)!}e^{\theta}$$



Для 8 членів розкладу: $e = 2,71827876984127003$

Для 10 членів розкладу: $e = 2,71828180114638451$

Для 100 членів розкладу: $e = 2,71828182845904553$

[13]Джузеппе Пеано (Giuseppe Peano) (1858–1932) – італійський математик.

На графіку показані значення числа e з точністю, що залежить від кількості членів розкладу Тейлора.

Як видно, для досягнення точності, достатньої для розв'язання більшості практичних задач, можна обмежитися 6–7-ма членами ряду.

Функція $f(x) = \sin x$

Одержуємо:

$$f(x) = \sin x; f(0) = 0;$$
$$f'(x) = \cos x = \sin(x + \pi/2); f'(0) = 1;$$
$$f''(x) = -\sin x = \sin(x + 2(\pi/2)); f''(0) = 0;$$
$$f'''(x) = -\cos x = \sin(x + 3(\pi/2)); f'''(0) = -1;$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$f^{(n)}(x) = \sin(x + \pi n/2); f^{(n)}(0) = \sin(\pi n/2);$$
$$f^{(n+1)}(x) = \sin(x + (n+1)\pi/2); f^{(n+1)}(\varepsilon) = \sin(\varepsilon + (n+1)\pi/2);$$

Отже:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - ... + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + R_{2n}(x);$$
$$R_{2n}(x) = \frac{f^{(2n+1)}(\varepsilon)}{(2n+1)!}x^{2n+1} = \pm\frac{\cos\varepsilon}{(2n+1)!}x^{2n+1}$$

Функція $f(x) = \cos x$

Для функції $\cos x$, застосувавши аналогічні перетворення, одержимо:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - ... + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + R_{2n+1}(x);$$
$$R_{2n+1}(x) = \frac{f^{(2n+2)}(\varepsilon)}{(2n+2)!}x^{2n+2} = \pm\frac{\cos\varepsilon}{(2n+2)!}x^{2n+2}$$

Функція $f(x) = (1+x)^\alpha$ (α – дійсне число)

$$f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}; \quad f'(0) = \alpha;$$
$$f''(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}; \quad f''(0) = \alpha(\alpha-1);$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)...(\alpha-(n-1))(1+x)^{\alpha-n}; \quad f^{(n)}(0) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)...(\alpha-n+1)$$

Тоді:

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2\cdot 1}x^2 + ... + \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!}x^n + R_{n+1}(x)$$
$$R_{n+1}(x) = \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n)}{(n+1)!}(1+\theta x)^{\alpha-(n+1)}; \qquad 0 < \theta < 1$$

Якщо в отриманій формулі прийняти $\alpha = n$, де n – натуральне число і $f^{(n+1)}(x) = 0$, то $R_{n+1} = 0$, тоді

$$(1+x)^n = 1 + \frac{n}{1!}x + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + ... + x^n$$

Вийшла формула, відома як **біном Ньютона**.

Приклад: Застосувати отриману формулу для знаходження синуса будь-якого кута з будь-яким ступенем точності.

На наведених нижче графіках представлене порівняння точного значення функції і значення розкладу в ряд Тейлора при різній кількості членів розкладу.

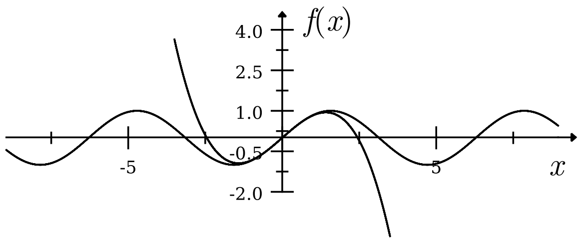


Рис. 8: Два члени розкладу

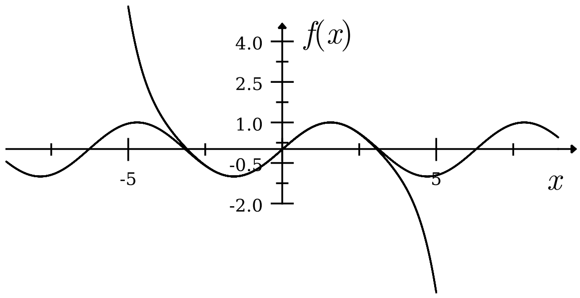


Рис. 9: Чотири члени розкладу

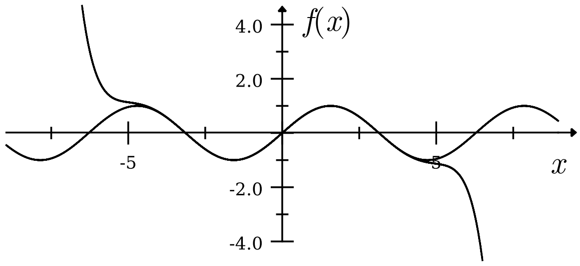


Рис. 10: Шість членів розкладу

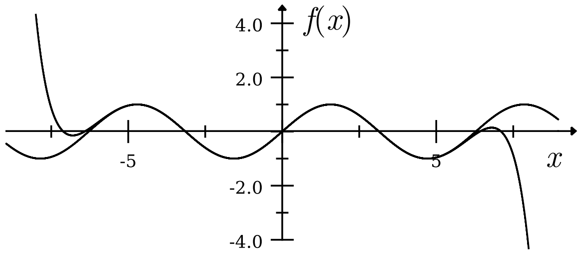


Рис. 11: Вісім членів розкладу

Щоб одержати найбільш точне значення функції при найменшій кількості членів розкладу треба у формулі Тейлора як параметр a вибрати таке число, що досить близько до значення x, і значення функції від цього числа легко обчислюється.

Для прикладу, обчислимо значення $\sin 20°$.

Попередньо переведемо кут $20°$ у радіани: $20° = \pi/9$.

Застосуємо розклад в ряд Тейлора, обмежившись трьома першими членами розкладу:

$$\sin 20° = \sin\frac{\pi}{9} \cong \frac{\pi}{9} - \frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{9}\right)^3 + \frac{1}{5!}\left(\frac{\pi}{9}\right)^5 = 0,348889 - 0,007078 + 0,000043 = 0,341854$$

У чотиризначних таблицях Брадіса для синуса цього кута зазначене значення 0,3420.

На графіку показана зміна значень розкладу в ряд Тейлора залежно від кількості членів розкладу. Як видно, якщо обмежитися трьома членами розкладу, то досягається точність до 0,0002.

Вище говорилося, що при $x \to 0$ функція $\sin x$ є нескінченно малою і може при обчисленні бути замінена на еквівалентну їй нескінченно малу функцію x. Тепер видно, що при x, близьких до нуля, можна практично без втрати у точності обмежитися першим членом розкладу, тобто $\sin x \approx x$.

Приклад: Обчислити $\sin 28°13'15''$.

Для того, щоб представити заданий кут у радіанах, скористаємося співвідношеннями:

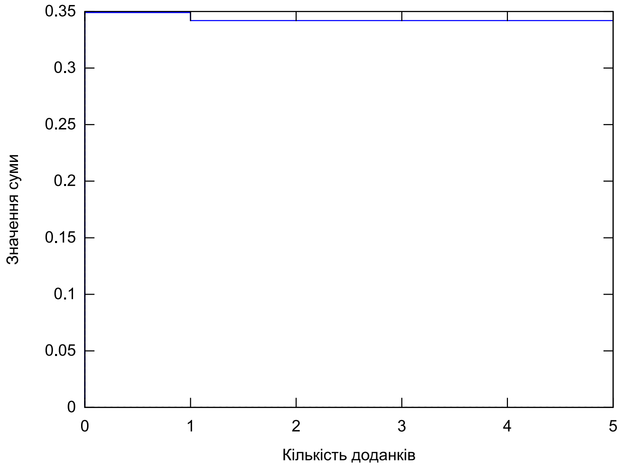
$$1° = \frac{\pi}{180}; 28° = \frac{28\pi}{180};$$

$$1' = \frac{\pi}{60 \cdot 180}; 13' = \frac{13\pi}{60 \cdot 180};$$

$$1'' = \frac{\pi}{60 \cdot 60 \cdot 180}; 15'' = \frac{15\pi}{60 \cdot 60 \cdot 180};$$

$$28°13'15'' = \frac{28\pi}{180} + \frac{13\pi}{60 \cdot 180} + \frac{15\pi}{60 \cdot 60 \cdot 180} = \frac{\pi}{180}\left(\frac{28 \cdot 60 \cdot 60 + 60 \cdot 13 + 15}{60 \cdot 60}\right) = 0,492544 \textit{ радіан}$$

Якщо при розкладанні за формулою Тейлора обмежитися трьома першими членами, одержимо: $\sin\ x = x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{120} = 0,492544 - 0,019915 + 0,000242 = 0,472871.$



Порівнюючи отриманий результат з точним значенням синуса цього кута,
$\sin 28°13'15'' = 0,472869017612759812$,

Бачимо, що навіть при обмеженні всього трьома членами розкладу, точність склала $0,000002$, що цілком достатньо для більшості практичних технічних задач.

Функція $f(x) = \ln(1+x)$

Одержуємо: $f(x) = \ln(1+x)$; $f(0) = 0$;

$$f'(x) = \frac{1}{1+x}; f'(0) = 1;$$

$$f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}; f''(0) = -1;$$

$$f'''(x) = \frac{-1 \cdot (-2)}{(1+x)^3}; f'''(0) = 2;$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}; f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}(n-1)!;$$

Разом:

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1 \cdot 2}{3!}x^3 - ... + \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{n!}x^n + R_{n+1}(x);$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - ... + \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n + R_{n+1}(x);$$

$$R_{n+1}(x) = \frac{(-1)^n n!}{(n+1)!}\left(\frac{x}{1+\varepsilon}\right)^{n+1};$$

Отримана формула дозволяє знаходити значення будь-яких логарифмів (не тільки натуральних) з будь-яким рівнем точності. Нижче представлений приклад обчислення натурального логарифма $\ln 1,5$. Спочатку отримане точне значення, потім – розрахунок за отриманою вище формулою, обмежившись п'ятьма членами розкладу. Точність сягає $0,0003$.

$$\ln 1,5 = 0,405465108108164381$$

$$\ln 1,5 = \ln(1+0,5) \approx 0,5 - \frac{0,5^2}{2} + \frac{0,5^3}{3} - \frac{0,5^4}{4} + \frac{0,5^5}{5} - \frac{0,5^6}{6} + \frac{0,5^7}{7} = 0,4058035$$

Розклад різних функцій за формулами Тейлора і Маклорена наводиться у спеціальних таблицях, однак, формула Тейлора настільки зручна, що для переважної більшості функцій розклад може бути легко знайдений безпосередньо.

Далі у курсі будуть розглянуті різні застосування формули Тейлора не тільки до наближених подань функцій, але і до розв'язання диференціальних рівнянь і до обчислення інтегралів.

4.14 Теореми про середнє

4.14.1 Теорема Ферма

Якщо функція $f(x)$ має на інтервалі (a,b) деяку точку x_0 таку, що $f(x_0) = \min\limits_{x \in (a,b)} f(x)$ або $f(x_0) = \max\limits_{x \in (a,b)} f(x)$ і існує $f'(x_0)$, то $f'(x_0) = 0$.

Доведення Оскільки випадки аналогічні, нехай $f(x_0) = \max\limits_{x\in(a,b)} f(x)$. Існування $f'(x_0)$ рівносильне тому, що існують однобічні похідні $f'_-(x_0)$ та $f'_+(x_0)$ і $f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$. Тоді,

$$f'_-(x_0) = \lim_{x\to x_0-0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geqslant 0;$$

$$f'_+(x_0) = \lim_{x\to x_0+0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leqslant 0;$$

і $f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$. Звідси слідує, що $f'(x_0) = 0$.

Теорему доведено.

4.14.2 Теорема Ролля

Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a,b]$, диференційована на інтервалі (a,b) і значення функції на кінцях відрізка рівні $f(a) = f(b)$, то на інтервалі (a,b) існує точка ε, $a < \varepsilon < b$, у якій похідна функція $f(x)$ рівна нулю, $f'(\varepsilon) = 0$.

Геометричний зміст теореми Ролля[14] полягає у тому, що при виконанні умов теореми на інтервалі (a,b) існує точка ε така, що у відповідній точці кривої $y = f(x)$ дотична паралельна осі Ox. Таких точок на інтервалі може бути і декілька, але теорема стверджує існування принаймні однієї такої точки.

Доведення За властивістю функцій, неперервних на відрізку (другою теоремою Веєрштраса), функція $f(x)$ на відрізку $[a,b]$ приймає найбільше і найменше значення. Позначимо ці значення M і m відповідно. Можливі два різних випадки $M = m$ і $M \neq m$.

Нехай $M = m$. Тоді функція $f(x)$ на відрізку $[a,b]$ зберігає постійне значення і у будь-якій точці інтервалу її похідна дорівнює нулю. У цьому випадку за ε можна прийняти будь-яку точку інтервалу.

Нехай $M \neq m$. Тоді значення на кінцях відрізка різні, і хоча б одне зі значень, M або m, функція приймає усередині відрізка $[a,b]$. Позначимо ε, $a < \varepsilon < b$ точку, у якій $f(\varepsilon) = M$. Оскільки M – найбільше значення функції, то для кожного Δx (будемо вважати, що точка $\varepsilon + \Delta x$ перебуває усередині розглянутого інтервалу) виконується нерівність:

$$\Delta f(\varepsilon) = f(\varepsilon + \Delta x) - f(\varepsilon) \leqslant 0$$

При цьому $\dfrac{\Delta f(\varepsilon)}{\Delta x} = \begin{cases} \leqslant 0, & \text{при} \quad \Delta x > 0 \\ \geqslant 0, & \text{при} \quad \Delta x < 0 \end{cases}$

Але оскільки за умовою похідна у точці ε існує, то існує і границя $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{\Delta f(\varepsilon)}{\Delta x}$.

Оскільки $\lim\limits_{\Delta x\to 0+0} \dfrac{\Delta f(\varepsilon)}{\Delta x} \leqslant 0$ і $\lim\limits_{\Delta x\to 0-0} \dfrac{\Delta f(\varepsilon)}{\Delta x} \geqslant 0$, то можна зробити висновок:

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta f(\varepsilon)}{\Delta x} = 0, \quad \text{при} \quad f'(\varepsilon) = 0.$$

Теорему доведено.

Теорема Ролля має кілька **наслідків**:

1. Якщо функція $f(x)$ на відрізку $[a,b]$ задовольняє умови теореми Ролля, причому $f(a) = f(b) = 0$, то існує принаймні одна точка ε, $a < \varepsilon < b$, така, що $f'(\varepsilon) = 0$. Тобто між двома нулями функції знайдеться хоча б одна точка, у якій похідна функції дорівнює нулю.

2. Якщо на розглянутому інтервалі (a,b) функція $f(x)$ має похідну $(n-1)$-го порядку і n раз обертається в нуль, то існує принаймні одна точка інтервалу, у якій похідна $(n-1)$-го порядку дорівнює нулю.

За допомогою теореми Ролля можна довести формулу для залишкового члена формули Тейлора у формі Лагранжа, яку ми використовували раніше.

Для цього розгляньмо таку функцію $g(t)$:

$$g(t) := f(x) - P_n(x,t) - \frac{L}{(n+1)!}(x-t)^{n+1}, L \in \mathbb{R}, t \in < x_0; x >,$$

де

$$P_n(x,t) = f(t) - \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(t)(x-t)^k}{k!}$$

Маємо

1. $g(t)$ неперервна між x_0 та x як сума неперервних.

[14] Мішель Ролль (Michel Rolle) (1652–1719) – французький математик.

2. $g(t)$ диференційована між x_0 та x

$$g'(t) = (f(x))' - f'(t) - \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{f^{(k+1)}(t)(x-t)^k}{k!} - \frac{f^{(k)}(t)(x-t)^{k-1}}{(k-1)!} \right) + \frac{L}{n!}(x-t)^n$$

$$= -\frac{f^{(n+1)}(t)(x-t)^n}{n!} + \frac{L}{n!}(x-t)^n$$

3. $g(x) = 0$. Виберемо $L = L_0$ так, щоб $g(x_0) = 0$:

$$g(x_0) = f(x) - f(x_0) - \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k}{k!} - \frac{L}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} = 0$$

$\exists! L = L_0 : g(x_0) = 0.$

Нехай $L = L_0$.

Отже, для $g(t)$ справджуються умови теореми Ролля. Тому

$$\exists \theta \in (0;1) : g'(x_0 + \theta(x - x_0)) = 0$$

Тобто

$$\frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x-x_0))(x - x_0 - \theta(x-x_0))^n}{n!} = \frac{L_0}{n!}(x - x_0 - \theta(x-x_0))^n \Rightarrow$$

$$L_0 = f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))$$

Звідси, розглядаючи $g(x_0)$, отримуємо формулу Тейлора із залишковим членом у формі Лагранжа.

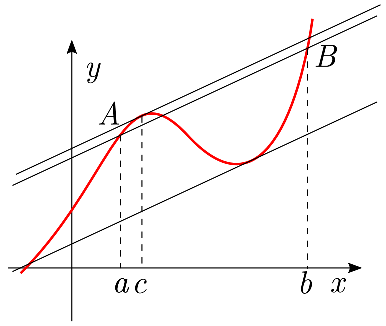
4.14.3 Теорема Лагранжа

Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a,b]$ і диференційована на інтервалі (a,b), то на цьому інтервалі знайдеться принаймні одна точка c, $a < c < b$, така, що $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$

Це означає, що якщо на деякому проміжку виконуються умови теореми, то відношення приросту функції до приросту аргументу на цьому відрізку дорівнює значенню похідної у деякій проміжній точці.

Розглянута вище теорема Ролля є частковим випадком теореми Лагранжа.

Відношення $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ дорівнює кутовому коефіцієнту січної AB.



Якщо функція $f(x)$ задовольняє умовам теореми, то на інтервалі (a,b) існує точка c така, що у відповідній точці кривої $y = f(x)$ дотична паралельна січній, що з'єднує точки A і B. Таких точок може бути і декілька, але одна існує точно.

Доведення Розглянемо деяку допоміжну функцію

$F(x) = f(x) - y_{\text{січн AB}}$

Рівняння січної AB можна записати у вигляді:

$$y - f(a) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a);$$

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a).$$

Функція $F(x)$ задовольняє умови теореми Ролля. Дійсно, вона неперервна на відрізку $[a,b]$ і диференційована на інтервалі (a,b). За теоремою Ролля існує хоча б одна точка c, $a < c < b$, така що $F'(c) = 0$.

Оскільки $F'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, то $F'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$, отже

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Теорему доведено.

Означення Вираз $f(a) - f(b) = f'(\varepsilon)(b-a)$ називається **формулою Лагранжа** або **формулою скінчених приростів**

Надалі ця формула буде дуже часто застосовуватися для доведення найрізноманітніших теорем.

Іноді формулу Лагранжа записують у трохи іншому вигляді:

$$\Delta y = f'(x + \theta\Delta x)\Delta x,$$

де $0 < \theta < 1$, $\Delta x = b - a$, $\Delta y = f(b) - f(a)$.

4.14.4 Теорема Коші

Якщо функції $f(x)$ і $g(x)$ неперервні на відрізку $[a, b]$ і диференційовані на інтервалі (a, b) і $g'(x) \neq 0$ на інтервалі (a, b), то існує принаймні одна точка ε, $a < \varepsilon < b$, така, що

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\varepsilon)}{g'(\varepsilon)}.$$

Тобто відношення приростів функцій на даному відрізку дорівнює відношенню похідних у точці ε.

Для доведення цієї теореми на перший погляд дуже зручно скористатися теоремою Лагранжа. Записати формулу скінченних різниць для кожної функції, а потім розділити їхній одну на одну. Однак, це враження помилкове, оскільки точка ε для кожної з функцій в загальному випадку різна. Звичайно, у деяких окремих випадках ця точка інтервалу може виявитися однаковою для обох функцій, але це – дуже рідкісний збіг, а не правило, тому не може бути використаний для доведення теореми.

Доведення Розглянемо допоміжну функцію

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}(g(x) - g(a)),$$

яка на інтервалі $[a, b]$ задовольняє умовам теореми Ролля. Легко бачити, що при $x = a$ та $x = b$: $F(a) = F(b) = 0$. Тоді за теоремою Ролля існує точка ε, $a < \varepsilon < b$, така, що $F'(\varepsilon) = 0$. Оскільки $F'(x) = f'(x) - \dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(x)$, то

$$F'(\varepsilon) = 0 = f'(\varepsilon) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(\varepsilon)$$

А оскільки $g'(\varepsilon) \neq 0$, то

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\varepsilon)}{g'(\varepsilon)}.$$

Теорему доведено.

Слід зазначити, що розглянута вище теорема Лагранжа є частковим випадком (при $g(x) = x$) теореми Коші[15]. Доведена нами теорема Коші дуже широко використається для розкриття так званих невизначеностей. Застосування отриманих результатів дозволяє істотно спростити процес обчислення границь функцій, що буде докладно розглянуто нижче.

4.15 Розкриття невизначеностей. Правило Лопіталя

До розряду невизначеностей прийнято включати такі наступні співвідношення:

$$\frac{0}{0};\ \frac{\infty}{\infty};\ \infty \cdot 0;\ \infty^0;\ 1^\infty;\ \infty - \infty$$

Теорема (правило Лопіталя)[16] *Якщо функції $f(x)$ і $g(x)$ диференційовані поблизу точки a, неперервні у точці a, $g'(x)$ відмінна від нуля поблизу a і $f(a) = g(a) = 0$, то границя частки функцій при $x \to a$ дорівнює границі частки їхніх похідних, якщо ця границя (скінченна або нескінченна) існує*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Доведення Застосувавши формулу Коші, одержимо:

$$\frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(\varepsilon)}{g'(\varepsilon)}$$

[15] Огюстен Коші (Augustin-Louis Cauchy) (1789–1857) – французький математик

[16] Гійом де Лопіталь (Guillaume François Antoine de L'Hôpital) (1661–1704) – французький математик

де ε – точка, що перебуває між a і x. З огляду на те, що $f(a) = g(a) = 0$:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\varepsilon)}{g'(\varepsilon)}$$

Нехай при $x \to a$ відношення $\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ прямує до деякої границі. Оскільки точка ε лежить між точками a та x, то при $x \to a$ одержимо $\varepsilon \to a$, а отже і відношення $\dfrac{f'(\varepsilon)}{g'(\varepsilon)}$ прямує до тієї ж границі. Таким чином, можна записати:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Теорему доведено.

Приклад: Знайти границю $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1+\ln x}{e^x-e}$.

Як видно, при спробі безпосереднього обчислення границі виходить невизначеність виду $\dfrac{0}{0}$. Функції, що входять у чисельник і знаменник дробу, задовольняють вимогам теореми Лопіталя.

$$f'(x) = 2x + \frac{1}{x}; g'(x) = e^x;$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 1}\frac{2x+\frac{1}{x}}{e^x} = \frac{2+1}{e} = \frac{3}{e};$$

Приклад: Знайти границю $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\pi - 2\operatorname{arctg} x}{e^{\frac{3}{x}}-1}$.

$$f'(x) = -\frac{2}{1+x^2}; g'(x) = -e^{\frac{3}{x}}\cdot\frac{3}{x^2};$$

$$\lim_{x\to\infty}\left[-\frac{2x^2}{(1+x^2)e^{\frac{3}{x}}(-3)}\right] = \frac{-2}{(0+1)\cdot 1\cdot(-3)} = \frac{2}{3}.$$

Якщо при розв'язанні прикладу після застосування правила Лопіталя спроба обчислити границю знову приводить до невизначеності, то правило Лопіталя може бути застосовано другий раз, третій тощо поки не буде отриманий результат. Природно, це можливо тільки у тому випадку, якщо знову отримані функції у свою чергу задовольняють вимогам теореми Лопіталя.

Приклад: Знайти границю $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{xe^{\frac{x}{2}}}{x+e^x}$.

$$f'(x) = e^{\frac{x}{2}}\left(1+\frac{1}{2}x\right); g'(x) = 1+e^x;$$

$$f''(x) = \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}} + \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}} + \frac{x}{4}e^{\frac{x}{2}} = \frac{1}{4}e^{\frac{x}{2}}(4+x); g''(x) = e^x;$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{4}e^{\frac{x}{2}}(4+x)}{e^x} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{4}(4+x)}{e^{\frac{x}{2}}}$$

$$f_1'(x) = \frac{1}{4}; g_1'(x) = \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}; \lim_{x\to\infty}\frac{1}{2e^{\frac{x}{2}}} = 0;$$

Слід зазначити, що правило Лопіталя – всього лише один зі способів обчислення границь. Часто в конкретному прикладі поряд із правилом Лопіталя може бути використаний і якийсь інший метод (заміна змінних, домноження тощо).

Приклад: Знайти границю $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}$.

$$f'(x) = e^x + e^{-x} - 2; g'(x) = 1-\cos x; \lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos x} = \frac{1+1-2}{1-1} = \frac{0}{0}$$

Знову вийшла невизначеність. Застосуємо правило Лопіталя ще раз.

$$f''(x) = e^x - e^{-x}; g''(x) = \sin x; \lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\sin x} = \frac{1-1}{0} = \frac{0}{0}.$$

Застосовуємо правило Лопіталя ще раз.

$$f'''(x) = e^x + e^{-x}; g'''(x) = \cos x; \lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}}{\cos x} = \frac{2}{1} = 2;$$

Невизначеності вигляду 0^0; 1^∞; ∞^0 можна розкрити за допомогою логарифмування. Такі невизначеності зустрічаються при знаходженні меж функцій вигляду $y = [f(x)]^{g(x)}$, $f(x) > 0$ поблизу точки a при $x \to a$. Для знаходження границі такої функції досить знайти границю функції $\ln y = g(x) \ln f(x)$.

Приклад: Знайти границю $\lim\limits_{x\to 0+0} x^x$.

Тут $y = x^x$, $\ln y = x \ln x$.

Тоді $\lim\limits_{x\to 0+0} \ln y = \lim\limits_{x\to 0+0} x \ln x = \lim\limits_{x\to 0+0} \dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \left\{ \begin{array}{c} \text{правило} \\ \text{Лопіталя} \end{array} \right\} = \lim\limits_{x\to 0+0} \dfrac{1/x}{-1/x^2} = -\lim\limits_{x\to 0+0} x = 0;$. Отже $\lim\limits_{x\to 0+0} \ln y = \ln \lim\limits_{x\to 0+0} y = 0; \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{x\to 0+0} y = \lim\limits_{x\to 0+0} x^x = 1$

Приклад: Знайти границю $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2}{e^{2x}}$.

$f'(x) = 2x; \quad g'(x) = 2e^{2x}; \ \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{e^{2x}} = \dfrac{\infty}{\infty}$ – одержали невизначеність. Застосовуємо правило Лопіталя ще раз.

$$f''(x) = 2; \qquad g''(x) = 4e^{2x}; \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2e^{2x}} = \frac{1}{\infty} = 0;$$

4.16 Дослідження функцій за допомогою похідної

4.16.1 Зростання і спадання функцій

Теорема. 1) *Якщо функція $f(x)$ має похідну на відрізку $[a, b]$ і зростає на цьому відрізку, то її похідна на цьому відрізку невід'ємна, тобто $f'(x) \geqslant 0$.*

2) *Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a, b]$ і диференційована на проміжку (a, b), причому $f'(x) > 0$ для $a < x < b$, то ця функція зростає на відрізку $[a, b]$*

Доведення

1. Якщо функція $f(x)$ зростає, то $f(x + \Delta x) > f(x)$ при $\Delta x > 0$ і $f(x + \Delta x) < f(x)$ при $\Delta x < 0$, тоді:

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} > 0, \qquad \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \geqslant 0.$$

2. Нехай $f'(x) > 0$ для будь-яких точок x_1 і x_2, що належать відрізку $[a, b]$, причому $x_1 < x_2$.

Тоді за теоремою Лагранжа: $f(x_2) - f(x_1) = f'(\varepsilon)(x_2 - x_1)$, $x_1 < \varepsilon < x_2$

За умовою $f'(\varepsilon) > 0$, отже, $f(x_2) - f(x_1) > 0$, тобто функція $f(x)$ зростає.

Теорему доведено.

Аналогічно можна зробити висновок про те, що якщо функція $f(x)$ спадає на відрізку $[a, b]$, то $f'(x) \leqslant 0$ на цьому відрізку. Якщо $f'(x) < 0$ у проміжку (a, b), то $f(x)$ спадає на відрізку $[a, b]$.

Звичайно, дане твердження справедливе, якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a, b]$ і диференційована на інтервалі (a, b).

4.17 Точки екстремуму

Означення Функція $f(x)$ має у точці x_1 максимум, якщо її значення у цій точці більше значень у всіх точках деякого інтервалу, що містить точку x_1. Функція $f(x)$ має у точці x_2 мінімум, якщо $f(x_2 + \Delta x) > f(x_2)$ при кожному Δx (Δx може бути і від'ємним).

Очевидно, що функція, визначена на відрізку може мати максимум і мінімум тільки у точках, що перебувають усередині цього відрізка. Не можна також плутати максимум і мінімум функції з її найбільшим і найменшим значенням на відрізку – це поняття принципово різні.

Означення Точки максимуму і мінімуму функції називаються **точками екстремуму**

Теорема (необхідна умова існування екстремуму) *Якщо функція $f(x)$ диференційована у точці $x = x_1$ і точка x_1 є точкою екстремуму, то похідна функції обертаєтся в нуль у цій точці.*

Доведення Припустімо, що функція $f(x)$ має у точці $x = x_1$ максимум.

Тоді при досить малих додатних $\Delta x > 0$ виконується нерівність $f(x_1 + \Delta x) < f(x_1)$, тобто

$$f(x_1 + \Delta x) - f(x_1) < 0$$

Тоді

$$\frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} > 0 \qquad \text{при} \quad \Delta x < 0$$
$$\frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} < 0 \qquad \text{при} \quad \Delta x > 0$$

За визначенням:

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} = f'(x_1)$$

Тобто якщо $\Delta x \to 0$, але $\Delta x < 0$, то $f'(x_1) \geqslant 0$, а якщо $\Delta x \to 0$, але $\Delta x > 0$, то $f'(x_1) \leqslant 0$.

А можливо це тільки у тому випадку, якщо при $\Delta x \to 0$ $f'(x_1) = 0$.

Для випадку, коли функція $f(x)$ має у точці x_2 мінімум, теорема доводиться аналогічно.

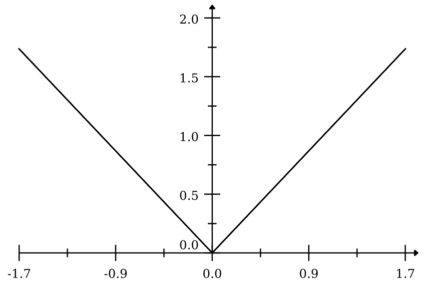
Теорему доведено.

Наслідок Зворотне твердження є помилковим. Якщо похідна функції в деякій точці дорівнює нулю, то це ще не значить, що у цій точці функція має екстремум. Красномовний приклад цього – функція $y = x^3$, похідна якої у точці $x = 0$ дорівнює нулю, однак у цій точці функція має тільки перегин, а не максимум або мінімум.

Означення **Критичними точками** функції називаються точки, у яких похідна функції не існує або дорівнює нулю.

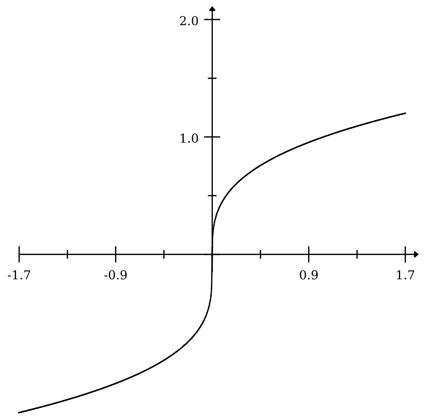
Розглянута вище теорема дає нам необхідні умови існування екстремуму, але цього недостатньо.

Приклад: $f(x) = |x|$



У точці $x = 0$ функція має мінімум, але не має похідної.

Приклад: $f(x) = \sqrt[3]{x}$



У точці $x = 0$ функція не має ні максимуму, ні мінімуму, ні похідної.

Загалом кажучи, функція $f(x)$ може мати екстремум у точках, де похідна не існує або дорівнює нулю.

Теорема (Достатні умови існування екстремуму)

Нехай функція $f(x)$ неперервна в інтервалі (a, b), що містить критичну точку x_1, і диференційована у всіх точках цього інтервалу крім, може бути, самої точки x_1.

Якщо при переході через точку x_1 ліворуч праворуч похідна функції $f'(x)$ міняє знак з «+» на «−», то у точці $x = x_1$ функція $f(x)$ має максимум, а якщо похідна міняє знак з «−» на «+» – то функція має мінімум

Доведення

Нехай $\begin{cases} f'(x) > 0 \quad \text{при} \quad x < x_1 \\ f'(x) < 0 \quad \text{при} \quad x > x_1 \end{cases}$

За теоремою Лагранжа: $f(x) - f(x_1) = f'(\varepsilon)(x - x_1)$, де $x < \varepsilon < x_1$.

Тоді: 1) Якщо $x < x_1$, то $\varepsilon < x_1$; $f'(\varepsilon) > 0$; $f'(\varepsilon)(x - x_1) < 0$, отже

$$f(x) - f(x_1) < 0 \text{ або } f(x) < f(x_1).$$

2) Якщо $x > x_1$, то при $\varepsilon > x_1$ $f'(\varepsilon) < 0$; $f'(\varepsilon)(x - x_1) < 0$, отже

$$f(x) - f(x_1) < 0 \text{ або } f(x) < f(x_1).$$

Оскільки відповіді збігаються, то можна сказати, що $f(x) < f(x_1)$ у будь-яких точках поблизу x_1, тобто x_1 – точка максимуму.

Доведення теореми для точки мінімуму проводиться аналогічно.

Теорему доведено.

На основі вищесказаного можна виробити єдиний порядок дій при знаходженні найбільшого і найменшого значення функції на відрізку:

1. Знайти критичні точки функції.

2. Знайти значення функції у критичних точках.

3. Знайти значення функції на кінцях відрізка.

4. Вибрати серед отриманих значень найбільше і найменше.

Дослідження функції на екстремум за допомогою похідних вищих порядків

Нехай у точці $x = x_1$ $f'(x_1) = 0$ і $f''(x_1)$ існує і неперервна в деякому околі точки x_1.

Теорема *Якщо $f'(x_1) = 0$, то функція $f(x)$ у точці $x = x_1$ має максимум, якщо $f''(x_1) < 0$, і мінімум, якщо $f''(x_1) > 0$*

Доведення

Нехай $f'(x_1) = 0$ і $f''(x_1) < 0$. Оскільки функція $f''(x)$ неперервна, то $f''(x_1)$ буде від'ємною і у деякому малому околі точки x_1.

Оскільки $f''(x) = (f'(x))' < 0$, то $f'(x)$ спадає на відрізку, що містить точку x_1, але $f'(x_1) = 0$, тобто $f'(x) > 0$ при $x < x_1$ і $f'(x) < 0$ при $x > x_1$. Це і означає, що при переході через точку $x = x_1$ похідна $f'(x)$ міняє знак з «+» на «–», тобто у цій точці функція $f(x)$ має максимум.

Для випадку мінімуму функції теорема доводиться аналогічно.

Якщо $f''(x_1) = 0$, можна скористатися такою теоремою:

Теорема *Нехай $f(x)$ є неперервною в певному околі точки $x = x_1$, причому у самій точці існують похідні функції, аж до n-го порядку включно і $f'(x_1) = f''(x_1) = \cdots = f^{(n-1)}(x_1) = 0$, $f^{(n)}(x_1) \neq 0$. Тоді*

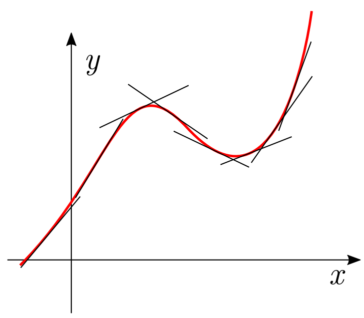
1. *якщо n – парне і $f^{(n)}(x_1) > 0$, x_1 є точкою мінімуму;*

2. *якщо n – парне і $f^{(n)}(x_1) < 0$, x_1 є точкою максимуму;*

3. *якщо n – непарне, x_1 не є точкою екстремуму.*

4.18 Опуклість і увігнутість кривої. Точки перегину

Означення Крива звернена опуклістю **догори** на інтервалі (a, b), якщо всі її точки лежать нижче будь-якої її дотичної на цьому інтервалі. Крива, звернена опуклістю нагору, називається **опуклою**, а крива, звернена опуклістю вниз – називається **увігнутою**.



На малюнку показана ілюстрація наведеного вище визначення.

Теорема 1 *Якщо у всіх точках інтервалу (a, b) друга похідна функції $f(x)$ від'ємна, то крива $y = f(x)$ звернена опуклістю нагору (опукла).*

Доведення Нехай $x_0 \in (a, b)$. Проведемо дотичну до кривої у цій точці.

Рівняння кривої: $y = f(x)$. Рівняння дотичної: $\overline{y} - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$.

Слід довести, що $y - \overline{y} = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$.

За теоремою Лагранжа для $f(x) - f(x_0)$: $y - \overline{y} = f'(c)(x - x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$, $x_0 < c < x$. Отже, $y - \overline{y} = (x - x_0)\left[f'(c) - f'(x_0)\right]$.

За теоремою Лагранжа для $f'(c) - f'(x_0) : y - \overline{y} = f''(c_1)(c - x_0)(x - x_0), \quad x_0 < c_1 < c$.

Нехай $x > x_0$ тоді $x_0 < c_1 < c < x$. Оскільки $x - x_0 > 0$ і $c - x_0 > 0$, і крім того за умовою $f''(c_1) < 0$, отже, $y - \overline{y} < 0$.

Нехай $x < x_0$ тоді $x < c < c_1 < x_0$ і $x - x_0 < 0$, $c - x_0 < 0$, оскільки за умовою $f''(c_1) < 0$, тому $y - \overrightarrow{y} < 0$.

Аналогічно доводиться, що якщо $f''(x) > 0$ на інтервалі (a, b), то крива $y = f(x)$ увігнута на інтервалі (a, b).

Теорему доведено.

Означення Точка, що відокремлює опуклу частину кривої від увігнутої, називається **точкою перегину**.

Очевидно, що у точці перегину дотична перетинає криву.

Теорема 2 *Нехай крива визначається рівнянням $y = f(x)$. Якщо друга похідна $f''(a) = 0$ або $f''(a)$ не існує і при переході через точку $x = a$ $f''(x)$ міняє знак, то точка кривої з абсцисою $x = a$ є точкою перегину*

Доведення 1) Нехай $f''(x) < 0$ при $x < a$ і $f''(x) > 0$ при $x > a$. Тоді при $x < a$ крива опукла, а при $x > a$ крива увігнута, тобто точка $x = a$ – точка перегину.

2) Нехай $f''(x) > 0$ при $x < b$ і $f''(x) < 0$ при $x > b$. Тоді при $x < b$ крива звернена опуклістю вниз, а при $x > b$ – опуклістю нагору. Тоді $x = b$ – точка перегину.

Теорему доведено.

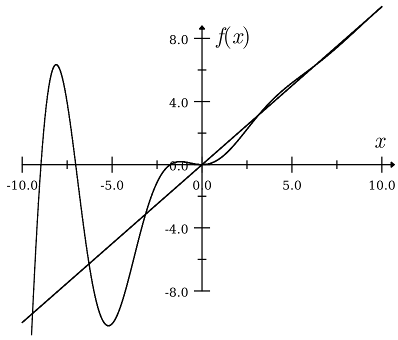
4.19 Асимптоти

При дослідженні функцій часто буває, що при віддаленні координати x точки кривої в нескінченність крива необмежено наближається до деякої прямої.

<u>**Означення**</u> Пряма називається **асимптотою** кривої, якщо відстань від змінної точки кривої до цієї прямої при віддаленні точки в нескінченність прямує до нуля.

Слід зазначити, що не будь-яка крива має асимптоту. Асимптоти можуть бути прямі і похилі. Дослідження функцій на наявність асимптот має велике значення і дозволяє більш точно визначити характер функції і поводження графіка кривої.

Загалом кажучи, крива, необмежено наближаючись до своєї асимптоти, може і перетинати її, причому не в одній точці, як показано на наведеному нижче графіку функції $y = x + e^{-\frac{x}{3}} \sin x$. Її похила асимптота – $y = x$.



Розгляньмо докладніше методи знаходження асимптот кривих.

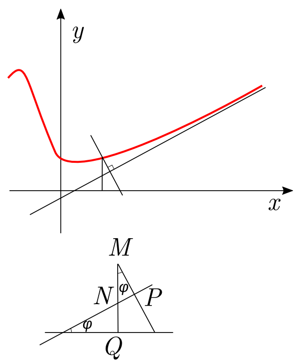
4.19.1 Вертикальні асимптоти

З визначення асимптоти слідує, що якщо $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = \infty$ або $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = \infty$ або $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$, то пряма $x = a$ – асимптота кривої $y = f(x)$.

Наприклад, для функції $f(x) = \dfrac{2}{x-5}$ пряма $x = 5$ є вертикальною асимптотою.

4.19.2 Похилі асимптоти

Припустімо, що крива $y = f(x)$ має похилу асимптоту $y = kx + b$. Позначимо точку перетину кривої і перпендикуляра до асимптоти – M, P – точку перетину цього перпендикуляра з асимптотою. Кут між асимптотою і віссю Ox позначимо φ. Перпендикуляр MQ до осі Ox перетинає асимптоту у точці N.



Тоді $MQ = y$ – ордината точки кривої, $NQ = \overline{y}$ – ордината точки N на асимптоті.

За умовою: $\lim\limits_{x\to\infty} |MP| = 0$, $\angle NMP = \varphi$, $|NM| = \dfrac{|MP|}{\cos\varphi}$.

Кут φ – сталий і не рівний 90°, тому

$$\lim_{x\to\infty} |MP| = \lim_{x\to\infty} |NM| \cos\varphi = \lim_{x\to\infty} |NM| = 0$$

$$|NM| = ||MQ| - |QN|| = |y - \overline{y}| = |f(x) - (kx + b)|$$

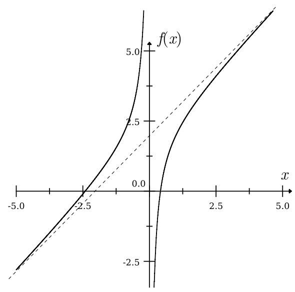
Тоді $\lim\limits_{x\to\infty} [f(x) - (kx + b)] = 0$.

Отже, пряма $y = kx+b$ – асимптота кривої. Для точного визначення цієї прямої необхідно знайти спосіб обчислення коефіцієнтів k і b.

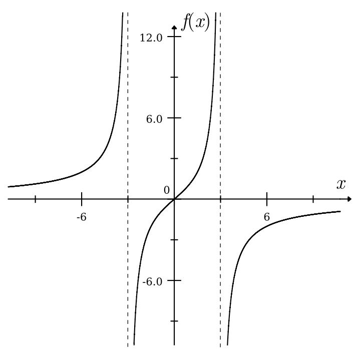
В отриманому виразі виносимо за дужки x:

$$\lim_{x\to\infty} x \left[\frac{f(x)}{x} - k - \frac{b}{x} \right] = 0$$

Оскільки $x \to \infty$, то $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{f(x)}{x} - k - \dfrac{b}{x}\right] = 0$.
Оскільки $b = const$, то $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{b}{x} = 0$; $\lim\limits_{x\to\infty} k = k$.
Тоді
$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} - k - 0 = 0.$$
Отже,
$$k = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}.$$
Оскільки $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x) - (kx+b)] = 0$, то $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x) - kx] - \lim\limits_{x\to\infty} b = 0$, отже,
$$b = \lim_{x\to\infty}[f(x) - kx]$$
Зазначимо, що горизонтальні асимптоти є частковим випадком похилих асимптот при $k = 0$.
Приклад Знайти асимптоти і побудувати графік функції $y = \dfrac{x^2+2x-1}{x}$.
1) Вертикальні асимптоти: $y \to +\infty$ $x \to 0-0$; $y \to -\infty$ $x \to 0+0$, отже, $x = 0$ – вертикальна асимптота.
2) Похилі асимптоти:
$$k = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2x-1}{x^2} = \lim_{x\to\infty}\left(1 + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}\right) = 1.$$
$$b = \lim_{x\to\infty}(f(x) - x) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2x-1}{x} - x\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2x-1-x^2}{x}\right) =$$
$$= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x-1}{x}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(2 - \frac{1}{x}\right) = 2$$
Таким чином, пряма $y = x + 2$ є похилою асимптотою.
Побудуємо графік функції:



Приклад Знайти асимптоти і побудувати графік функції $y = \dfrac{9x}{9-x^2}$.
Прямі $x = 3$ і $x = -3$ є вертикальними асимптотами кривої.
Знайдемо похилі асимптоти: $k = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{9}{9-x^2} = 0$
$$b = \lim_{x\to\infty}\frac{9x}{9-x^2} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{9}{x}}{\frac{9}{x^2} - 1} = 0$$
$y = 0$ – горизонтальна асимптота.

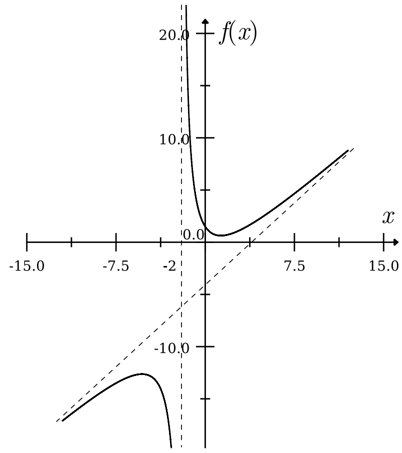


Приклад Знайти асимптоти і побудувати графік функції $y = \dfrac{x^2-2x+3}{x+2}$.
Пряма $x=-2$ є вертикальною асимптотою кривої.
Знайдемо похилі асимптоти.

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-2x+3}{x(x+2)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-2x+3}{x^2+2x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{x^2}}{1+\dfrac{2}{x}}=1.$$

$$b=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-2x+3}{x+2}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-2x+3-x^2-2x}{x+2}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{-4x+3}{x+2}=\lim_{x\to\infty}\frac{-4+\dfrac{3}{x}}{1+\dfrac{2}{x}}=-4$$

Отже, пряма $y=x-4$ є похилою асимптотою.



4.19.3 Схема дослідження функцій

Процес дослідження функції складається з декількох етапів. Для отримання якнайповніших даних щодо поводження функції і характеру її графіка необхідно визначити такі дані:

1. Область існування функції. Це поняття містить у собі і область значень і область визначення функції.
2. Точки розриву. (Якщо вони є).
3. Інтервали зростання і спадання.
4. Точки максимуму і мінімуму.
5. Максимальне і мінімальне значення функції на її області визначення.
6. Області опуклості і увігнутості.
7. Точки перегину.(Якщо вони є).
8. Асимптоти.(Якщо вони є).
9. Побудова графіка.

Застосування цієї схеми розглянемо на прикладі.
Приклад Дослідити функцію $y=\dfrac{x^3}{x^2-1}$ і побудувати її графік.
Знаходимо область існування функції. Очевидно, що *областю визначення* функції є область $(-\infty;-1)\cup(-1;1)\cup(1;\infty)$. У свою чергу, видно, що прямі $x=1$, $x=-1$ є *вертикальними асимптотами* кривої.
Областю значень даної функції є інтервал $(-\infty;\infty)$.
Точками розриву функції є точки $x=1$, $x=-1$.
Знаходимо *критичні точки.*
Знайдемо похідну функції

$$y'=\frac{3x^2(x^2-1)-2x\cdot x^3}{(x^2-1)^2}=\frac{3x^4-3x^2-2x^4}{(x^2-1)^2}=\frac{x^4-3x^2}{(x^2-1)^2}$$

Критичні точки: $x=0$; $x=-\sqrt{3}$; $x=\sqrt{3}$; $x=-1$; $x=1$.

Знайдемо другу похідну функції

$$y'' = \frac{(4x^3-6x)(x^2-1)^2-(x^4-3x^2)4x(x^2-1)}{(x^2-1)^4} =$$

$$= \frac{(4x^3-6x)(x^4-2x^2+1)-(x^4-3x^2)(4x^3-4x)}{(x^2-1)^4} =$$

$$= \frac{4x^7-8x^5+4x^3-6x^5+12x^3-6x-4x^7+4x^5+12x^5-12x^3}{(x^2-1)^4} =$$

$$= \frac{2x^5+4x^3-6x}{(x^2-1)^4} = \frac{2x(x^4+2x^2-3)}{(x^2-1)^4} = \frac{2x(x^2+3)(x^2-1)}{(x^2-1)^4} = \frac{2x(x^2+3)}{(x^2-1)^3}.$$

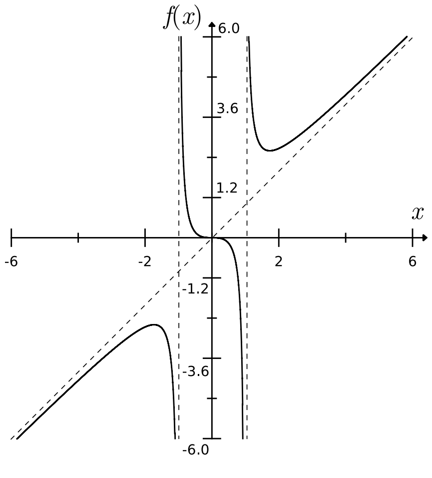
Визначимо опуклість і увігнутість кривої на проміжках.
$-\infty < x < -\sqrt{3}$, $y'' < 0$, крива опукла
$-\sqrt{3} < x < -1$, $y'' < 0$, крива опукла
$-1 < x < 0$, $y'' > 0$, крива увігнута
$0 < x < 1$, $y'' < 0$, крива опукла
$1 < x < \sqrt{3}$, $y'' > 0$, крива увігнута
$\sqrt{3} < x < \infty$, $y'' > 0$, крива увігнута
Знаходимо проміжки *зростання* і *спадання* функції. Для цього визначаємо знаки похідної функції на проміжках.
$-\infty < x < -\sqrt{3}$, $y' > 0$, функція зростає
$-\sqrt{3} < x < -1$, $y' < 0$, функція спадає
$-1 < x < 0$, $y' < 0$, функція спадає
$0 < x < 1$, $y' < 0$, функція спадає
$1 < x < \sqrt{3}$, $y' < 0$, функція спадає
$\sqrt{3} < x < \infty$, $y' > 0$, функція зростає
Видно, що точка $x = -\sqrt{3}$ є точкою *максимуму*, а точка $x = \sqrt{3}$ є точкою *мінімуму*.
Значення функції у цих точках рівні відповідно $3/2\sqrt{3}$ і $-3/2\sqrt{3}$.
Про вертикальні *асимптоти* було вже сказане вище. Тепер знайдемо *похилі асимптоти*.

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^2-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1-\dfrac{1}{x^2}} = 1;$$

$$b = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^3}{x^2-1} - x\right) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^3-x^3+x}{x^2-1}\right) =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x^2-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{\dfrac{1}{x}}{1-\dfrac{1}{x^2}} = 0$$

Отже, рівняння похилої асимптоти – $y = x$.
Побудуємо *графік* функції:



<u>Приклад:</u> Методами диференціального числення дослідити функцію $y = \sqrt[3]{1-x^3}$ і побудувати її графік.

1. Областю визначення даної функції є всі дійсні числа $(-\infty; \infty)$.

2. Функція є функцією загального виду в сенсі парності і непарності.

3. Точки перетину з координатними осями: з віссю Oy: $x = 0$; $y = 1$; з віссю Ox: $y = 0$; $x = 1$;

4. Точки розриву і асимптоти: Вертикальних асимптот немає.

   Похилі асимптоти: загальне рівняння $y = kx + b$;

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt[3]{1-x^3}}{x} = \lim_{x\to\infty} \sqrt[3]{\frac{1-x^3}{x^3}} = \lim_{x\to\infty} \sqrt[3]{\frac{1}{x^3} - 1} = -1;$$

$$b = \lim_{x\to\infty}(f(x) - kx) = \lim_{x\to\infty}(\sqrt[3]{1-x^3} + x) = \lim_{x\leftarrow\infty} \frac{(1 - x^3 + x^3)}{\left[\left(\sqrt[3]{1-x^3}\right)^2 - x \cdot \sqrt[3]{1-x^3} + x^2\right]} = 0;$$

   Отже: $y = -x$ – похила асимптота.

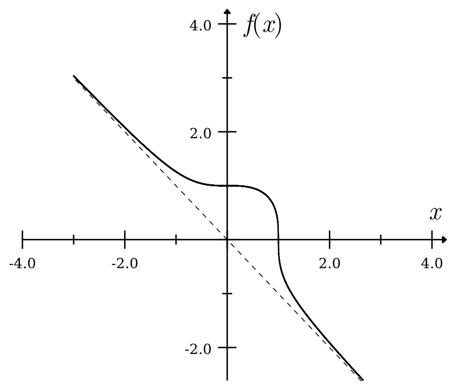
5. Зростання і спадання функції, точки екстремуму.

   $y' = \dfrac{1}{3}(1 - x^3)^{-2/3} \cdot \left(-3x^2\right)$. Видно, що $y' < 0$ при будь-якому $x \neq 0$, отже, функція спадає на всій області визначення і не має екстремумів. У точці $x = 0$ перша похідна функції дорівнює нулю, однак у цій точці спадання не змінюється на зростання, отже, у точці $x = 0$ функція швидше за все має перегин. Для знаходження точок перегину, знаходимо другу похідну функції.

   $y'' = \dfrac{-2x}{\sqrt[3]{(1-x^3)^5}}$; $y'' = 0$ при $x = 0$ і $y'' = \infty$ при $x = 1$.

   Точки $(0, 1)$ і $(1, 0)$ є точками перегину, оскільки $y''(1-h) < 0$; $y''(1+h) > 0$; $y''(-h) > 0$; $y''(h) < 0$ для будь-якого $h > 0$.

6. Побудуємо графік функції.



Приклад: Дослідити функцію $y = \dfrac{x^3 + 4}{x^2}$ і побудувати її графік.

1. Областю визначення функції є всі значення x, крім $x = 0$.

2. Функція є функцією загального виду в сенсі парності і непарності.

3. Точки перетину з координатними осями: с віссю Ox: $y = 0$; $x = -\sqrt[3]{4}$ з віссю Oy: $x = 0$; y – не існує.

4. Точка $x = 0$ є точкою розриву $\lim\limits_{x\to 0} y = \infty$, отже, пряма $x = 0$ є вертикальною асимптотою.

   Похилі асимптоти шукаємо у вигляді: $y = kx + b$.

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3 + 4}{x^3} = \lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{4}{x^3}\right) = 1$$

$$b = \lim_{x\to\infty}(f(x) - kx) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^3 + 4}{x^2} - x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{4}{x^3} = 0.$$

   Похила асимптота — $y = x$.

5. Знаходимо точки екстремуму функції.

   $y' = 1 - \dfrac{8}{x^3}$; $y' = 0$ при $x = 2$, $y' = \infty$ при $x = 0$.

   $y' > 0$ при $x \in (-\infty, 0)$ – функція зростає,

   $y' < 0$ при $x \in (0, 2)$ – функція спадає,

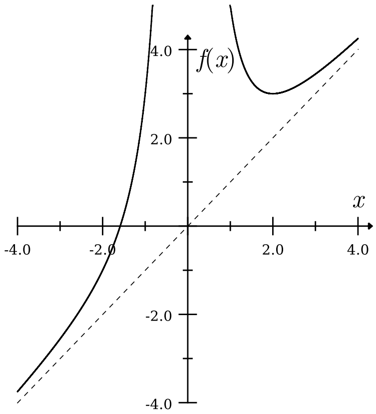
   $y' > 0$ при $x \in (2, \infty)$ – функція зростає.

Таким чином, точка $(2,3)$ є точкою мінімуму.

Для визначення характеру опуклості/увігнутості функції знаходимо другу похідну.

$y'' = \dfrac{24}{x^4} > 0$ при будь-якому $x \neq 0$, отже, функція увігнута на всій області визначення.

6. Побудуємо графік функції.

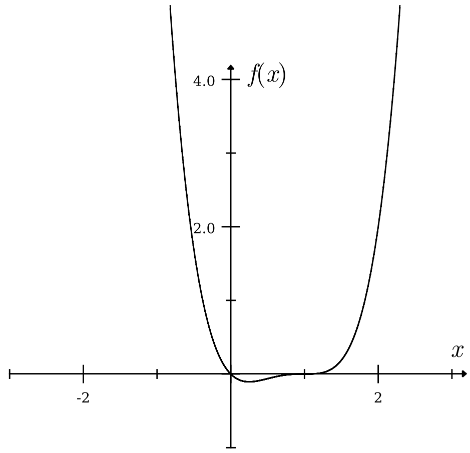


<u>Приклад:</u> Дослідити функцію $y = x(x-1)^3$ і побудувати її графік.

1. Областю визначення даної функції є проміжок $x \in (-\infty, \infty)$.
2. У сенсі парності і непарності функція є функцією загального вигляду.
3. Точки перетину з осями координат: з віссю Oy: $x = 0$, $y = 0$;
   з віссю Ox: $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$.
4. Асимптоти кривої.
   Вертикальних асимптот немає. Спробуємо знайти похилі асимптоти у вигляді $y = kx + b$.
   $k = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x(x-1)^3}{x} = \infty$ – похилих асимптот не існує.
5. Знаходимо точки екстремуму.
$$y' = \left[x(x^3 - 3x^2 + 3x - 1\right]' = \left[x^4 - 3x^3 + 3x^2 - x\right]' = 4x^3 - 9x^2 + 6x - 1$$
   Для знаходження критичних точок слід розв'язати рівняння $4x^3 - 9x^2 + 6x - 1 = 0$.
   Для цього розкладемо даний многочлен третього степеня на множники.
   Підбором можна визначити, що одним з коренів цього рівняння є число $x = 1$. Тоді:
$$\begin{array}{l}
\big(\quad 4x^3 - 9x^2 + 6x - 1\big) \div \big(x - 1\big) = 4x^2 - 5x + 1 \\
\underline{-\,4x^3 + 4x^2} \\
\qquad\quad -\,5x^2 + 6x \\
\qquad\qquad \underline{5x^2 - 5x} \\
\qquad\qquad\qquad\quad x - 1 \\
\qquad\qquad\qquad \underline{-\,x + 1} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\ 0
\end{array}$$
   Тоді можна записати $(x-1)(4x^2 - 5x + 1) = 0$. Остаточно одержуємо дві критичні точки: $x = 1$ і $x = 1/4$.
   <u>Примітка</u> Операції ділення многочленів можна було уникнути, якщо при знаходженні похідної скористатися формулою похідної добутку:
$$y' = \left[x(x-1)^3\right]' = (x-1)^3 + 3x(x-1)^2 = (x-1)^2(x - 1 + 3x) = (x-1)^2(4x-1)$$
   Знайдемо другу похідну функції: $12x^2 - 18x + 6$. Прирівнюючи до нуля, знаходимо:
   $x = 1$, $x = 1/2$.
   Систематизуємо отриману інформацію у таблиці:

	$(-\infty\ ;\ 1/4)$	$1/4$	$(1/4\ ;\ 1/2)$	$1/2$	$(1/2\ ;\ 1)$	1	$(1\ ;\ \infty)$
$f'(x)$	–	0	+	+	+	0	+
$f''(x)$	+	+	+	0	–	0	+
$f(x)$	спадає, увігнута	min	зростає, увігнута	перегин	зростає, опукла	перегин	зростає, увігнута

6. Побудуємо графік функції.

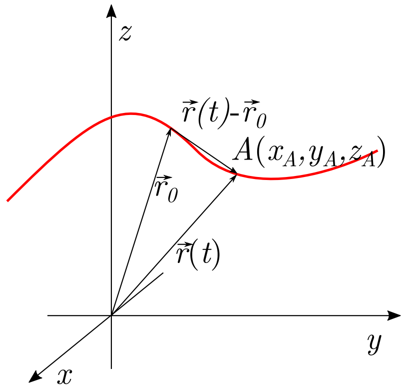


4.20 Векторна функція скалярного аргументу

Нехай деяка крива у просторі задана параметрично:

$x = \varphi(t)$; $y = \psi(t)$; $z = f(t)$;

Радіус-вектор довільної точки кривої: $\overrightarrow{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = \varphi(t)\vec{i} + \psi(t)\vec{j} + f(t)\vec{k}$.



Таким чином, радіус-вектор точки кривої може розглядатися як деяка векторна функція скалярного аргументу t. При зміні параметра t змінюється величина і напрямок вектора $\vec{r}$.

Запишемо співвідношення для деякої точки t_0:

$$\lim_{t\to t_0} \varphi(t) = \varphi_0; \quad \lim_{t\to t_0} \psi(t) = \psi_0; \quad \lim_{t\to t_0} f(t) = f_0;$$

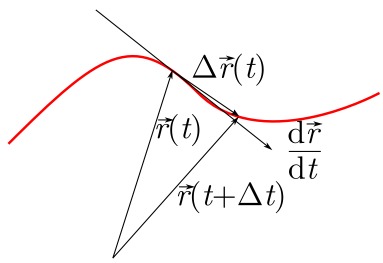
Тоді вектор $\vec{r}_0 = \varphi_0\vec{i} + \psi_0\vec{j} + f_0\vec{k}$ – границя функції $\vec{r}(t)$. $\lim\limits_{t\to t_0} \vec{r}(t) = \vec{r}_0$.

Очевидно, що

$\lim\limits_{t\to t_0} |\vec{r}(t) - \vec{r}_0| = \lim\limits_{t\to t_0} \sqrt{(\varphi(t) - \varphi_0)^2 + (\psi(t) - \psi_0)^2 + (f(t) - f_0)^2} = 0$, тоді

$$\lim_{t\to t_0} |\vec{r}(t)| = |\vec{r}_0|.$$

Щоб знайти похідну векторної функції скалярного аргументу, розглянемо приріст радіус-вектора при деякому прирості параметра t.



$$\vec{r}(t + \Delta t) = \varphi(t + \Delta t)\vec{i} + \psi(t + \Delta t)\vec{j} + f(t + \Delta t)\vec{k}; \Delta\vec{r} = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t);$$

$$\Delta\vec{r} = (\varphi(t + \Delta t) - \varphi(t))\vec{i} + (\psi(t + \Delta t) - \psi(t))\vec{j} + (f(t + \Delta t) - f(t))\vec{k}$$

$$\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\varphi(t + \Delta t) - \varphi(t)}{\Delta t}\vec{i} + \frac{\psi(t + \Delta t) - \psi(t)}{\Delta t}\vec{j} + \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}\vec{k}$$

або, якщо існують похідні $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$, $f'(t)$, то

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \varphi'(t)\vec{i} + \psi'(t)\vec{j} + f'(t)\vec{k} = \vec{r'}$$

Цей вираз – вектор похідна вектора $\vec{r}$.

$$\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\vec{i} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\vec{j} + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\vec{k}$$

$$\left|\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\right| = \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2 + [f'(t)]^2}$$

Якщо є рівняння кривої:

$$x = \varphi(t); y = \psi(t); z = f(t);$$

то в довільній точці кривої $A(x_A, y_A, z_A)$ з радіус-вектором

$$\overrightarrow{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = \varphi(t)\vec{i} + \psi(t)\vec{j} + f(t)\vec{k}$$

можна провести пряму з рівнянням $\dfrac{x - x_A}{m} = \dfrac{y - y_A}{n} = \dfrac{z - z_A}{p}$

Оскільки похідна $\dfrac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}$ – вектор, спрямований за дотичною до кривої, то

$$\frac{x - x_A}{\frac{\mathrm{d}x_A}{\mathrm{d}t}} = \frac{y - y_A}{\frac{\mathrm{d}y_A}{\mathrm{d}t}} = \frac{z - z_A}{\frac{\mathrm{d}z_A}{\mathrm{d}t}}.$$

4.21 Властивості похідної векторної функції скалярного аргументу

1. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{r}_1 + \vec{r}_2 - \vec{r}_3) = \dfrac{\mathrm{d}\vec{r}_1}{\mathrm{d}t} + \dfrac{\mathrm{d}\vec{r}_2}{\mathrm{d}t} - \dfrac{\mathrm{d}\vec{r}_3}{\mathrm{d}t}$
2. $\dfrac{\mathrm{d}(\lambda\vec{r})}{\mathrm{d}t} = \lambda\dfrac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}$, де $\lambda = \mathrm{const}$ – стала
3. $\dfrac{\mathrm{d}(\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2)}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{r}_1}{\mathrm{d}t} \cdot \vec{r}_2 + \vec{r}_1 \cdot \dfrac{\mathrm{d}\vec{r}_2}{\mathrm{d}t}$
4. $\dfrac{\mathrm{d}(\vec{r}_1 \times \vec{r}_2)}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{r}_1}{\mathrm{d}t} \times \vec{r}_2 + \vec{r}_1 \times \dfrac{\mathrm{d}\vec{r}_2}{\mathrm{d}t}$

Рівняння нормальної площини до кривої буде мати вигляд:

$$\frac{\mathrm{d}x_A}{\mathrm{d}t}(x - x_A) + \frac{\mathrm{d}y_A}{\mathrm{d}t}(y - y_A) + \frac{\mathrm{d}z_A}{\mathrm{d}t}(z - z_A) = 0$$

Приклад Скласти рівняння дотичної і нормальної площини до лінії, заданої рівнянням $\vec{r} = \vec{i}\cos t + \vec{j}\sin t + \sqrt{3}t\vec{k}$ у точці $t = \pi/2$.

Рівняння, що описують криву, за осями координат мають вигляд:
$x(t) = \cos t$; $y(t) = \sin t$; $z(t) = \sqrt{3}t$;
Знаходимо значення функцій і їхніх похідних у заданій точці:

$$x'(t) = -\sin t; y'(t) = \cos t; z'(t) = \sqrt{3}$$

$$x'(\pi/2) = -1; y'(\pi/2) = 0; z'(\pi/2) = \sqrt{3}$$

$$x(\pi/2) = 0; y(\pi/2) = 1; z(\pi/2) = \pi\sqrt{3}/2$$

$\dfrac{x}{-1} = \dfrac{y-1}{0} = \dfrac{z - \frac{\pi\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{3}}$ – це рівняння дотичної.
Нормальна площина має рівняння:

$$-1 \cdot (x - 0) + 0 + \sqrt{3}\left(z - \frac{\pi\sqrt{3}}{2}\right) = 0$$

$$-x + \sqrt{3}z - \frac{3\pi}{2} = 0$$

4.22 Параметричне задання функції

Дослідження і побудова графіка кривої, що задана системою рівнянь вигляду:

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases},$$

проводиться загалом аналогічно дослідженню функції вигляду $y = f(x)$.

Знаходимо похідні:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \varphi'(t) \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \psi'(t) \end{cases}$$

Тепер можна знайти похідну $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$. Далі знаходяться значення параметра t, при яких хоча б одна з похідних $\varphi'(t)$ або $\psi'(t)$ дорівнює нулю або не існує. Такі значення параметра t називаються **критичними**.

Для кожного інтервалу $(t_1,\, t_2)$, $(t_2,\, t_3)$, $\ldots$, $(t_{k-1},\, t_k)$ знаходимо відповідний інтервал $(x_1,\, x_2)$, $(x_2,\, x_3)$, $\ldots$, $(x_{k-1},\, x_k)$ і визначаємо знак похідної $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ на кожному з отриманих інтервалів, тим самим визначаючи проміжки зростання і спадання функції.

Далі знаходимо другу похідну функції на кожному з інтервалів і, визначаючи її знак, знаходимо напрямок опуклості кривої у кожній точці.

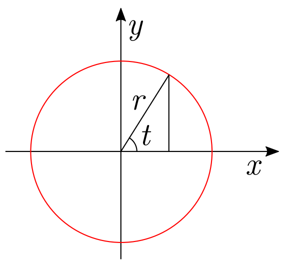
Для знаходження асимптот знаходимо такі значення t, при наближенні до яких або x або y прямує до нескінченності, і такі значення t, при наближенні до яких і x і y прямують до нескінченності.

В іншому дослідження проводиться аналогічно тому, як і дослідження функції, заданої безпосередньо.

На практиці дослідження параметрично заданих функцій здійснюється, наприклад, при знаходженні траєкторії об'єкта, що рухається, де роль параметра t виконує час.

Нижче розглянемо докладніше деякі широко відомі типи параметрично заданих кривих.

4.22.1 Коло



Якщо центр кола знаходиться у початку координат, то координати будь-якої його точки можуть бути знайдені за формулами:

$$\begin{cases} x = r\cos t \\ y = r\sin t \end{cases} \quad 0 \leqslant t < 360^\circ$$

Якщо виключити параметр t, то одержимо канонічне рівняння кола:

$$x^2 + y^2 = r^2(\cos^2 t + \sin^2 t) = r^2$$

4.22.2 Еліпс

Канонічне рівняння: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

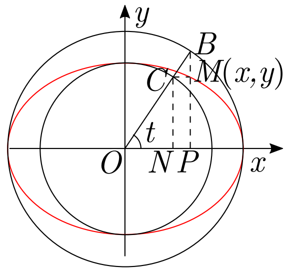
Для довільної точки еліпса $M(x, y)$ з геометричних міркувань можна записати: $\dfrac{x}{\cos t} = a$ з $\triangle OBP$ і $\dfrac{y}{\sin t} = b$ з $\triangle OCN$, де a – більша піввісь еліпса, а b – менша піввісь еліпса, x і y – координати точки M.

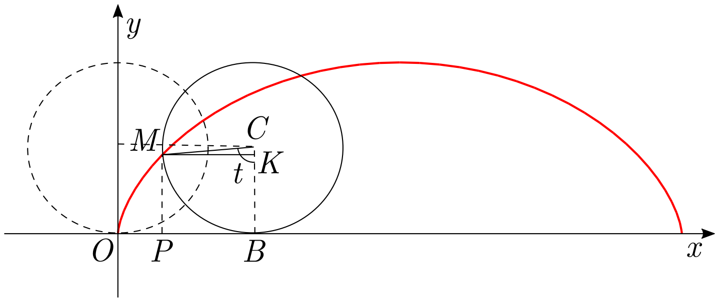
Тоді одержуємо параметричні рівняння еліпса:

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$$

де $0 \leqslant t < 2\pi$.

Кут t називається **ексцентричним кутом**.





4.22.3 Циклоїда

<u>Означення</u> Циклоїдою називається крива, яку описує деяка точка, що лежить на колі, коли коло без ковзання котиться прямою.

Нехай коло радіуса a пересувається без ковзання уздовж осі x. Тоді з геометричних міркувань можна записати: $OB = \overset{\frown}{MB} = at$; $PB = MK = a\sin t$;

$\angle MCB = t$; Тоді $y = MP = KB = CB - CK = a - a\cos t = a(1-\cos t)$.

$x = at - a\sin t = a(t - \sin t)$.

Отже: $\begin{cases} x = a\,(t - \sin t) \\ y = a\,(1 - \cos t) \end{cases}$ при $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$ – це параметричне рівняння циклоїди.

Якщо виключити параметр, то одержуємо:

$$x = 2\pi a - \left(a \cdot \arccos\frac{a-y}{a} - \sqrt{2ay - y^2}\right), \quad \pi a \leqslant x \leqslant 2\pi a$$

$$x = a \cdot \arccos\frac{a-y}{a} - \sqrt{2ay - y^2}, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi a$$

Як видно, параметричне рівняння циклоїди набагато зручніше у використанні, ніж рівняння, що безпосередньо виражає одну координату через іншу.

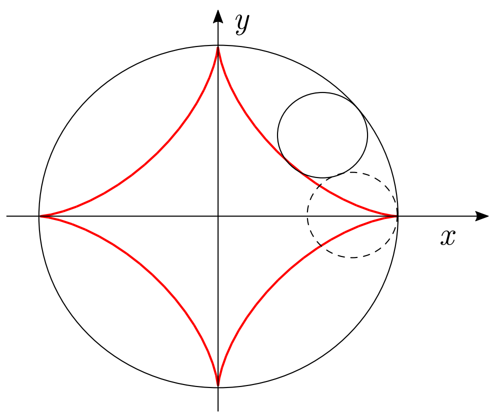
4.22.4 Астроїда

Дана крива являє собою траєкторію точки кола радіуса $R/4$, що обертається без ковзання внутрішнім боком кола радіуса R.

Параметричні рівняння, що задають зображену вище криву,

$$\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases} \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi,$$

Перетворюючи, одержимо: $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}(\cos^2 t + \sin^2 t) = a^{2/3}$



5 Диференціальне числення функції декількох змінних

При розгляді функцій декількох змінних обмежимося докладним описом функцій двох змінних, оскільки всі отримані результати будуть справедливі для функцій довільної кількості змінних.

<u>Означення:</u> Якщо кожній парі незалежних одне від одного чисел $(x,\, y)$ з деякої множини за якимось правилом ставиться у відповідність одне або кілька значень змінної z, то змінна z називається **функцією двох змінних**

$$z = f(x, y)$$

5.1 Границя і неперервність функції декількох змінних у точці

<u>Означення:</u> Якщо парі чисел $(x,\, y)$ відповідає одне значення z, то функція називається **однозначною**, а якщо більше одного, то – **багатозначною**.

<u>Означення:</u> Областю визначення функції z називається сукупність пар $(x,\, y)$, при яких функція z існує.

<u>Означення:</u> Околом точки $M_0(x_0, y_0)$ радіуса r називається сукупність всіх точок (x, y), які задовольняють умові $\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < r$.

<u>Означення:</u> Число A називається **границею** функції $f(x, y)$ при прямуванні точки $M(x, y)$ до точки $M_0(x_0, y_0)$, якщо для кожного числа $\varepsilon > 0$ знайдеться таке число $r > 0$, що для будь-якої точки $M(x, y)$, для якої виконується умова

$$MM_0 < r$$

також виконується і умова $|f(x, y) - A| < \varepsilon$.

Записують: $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x, y) = A$

<u>Приклад</u>

Знайти границю

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\operatorname{tg}(x^2+y^2)}{\ln(1+2x^2+2y^2)}$$

Розв'язання

Покладемо $x^2 + y^2 = t$.

Тоді, при $(x; y) \to (0; 0)$ можемо переписати границю як

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\operatorname{tg}(x^2+y^2)}{\ln(1+2x^2+2y^2)} = \lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{tg} t}{\ln(1+2t)} \overset{\text{еквівалентність}}{=} \lim_{t\to 0} \frac{t}{2t} = \frac{1}{2}$$

<u>Приклад</u>

Довести, що границя

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2+2y^2}{xy}$$

не існує за наведеним вище означенням.

Розв'язання

Нехай під час прямування $(x; y) \to (0; 0)$ зберігається співвідношення $y = kx$.

Тоді

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2+2y^2}{xy} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2+2k^2x^2}{x\cdot kx} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2(1+2k^2)}{x^2k} = \frac{1+2k^2}{k}$$

Таким чином, значення границі має залежати від кутового коефіцієнта k. Але це не відповідає означенню, оскільки за означенням границя не повинна залежати від способу прямування $(x; y) \to (0; 0)$.

Отже, границі у сенсі записаного означення не існує.

Нехай для довільного $y \in Y$ існує границя функції $f(x; y)$ границя при $x \to x_0$.

У загальному випадку ця буде залежати від y:

$$\lim_{x\to x_0} f(x; y) = \varphi(y)$$

Якщо існує границя

$$\lim_{y\to y_0} \varphi(y) = A,$$

то ця границя називається *повторною границею.*

$$\lim_{y\to y_0} \lim_{x\to x_0} f(x; y) = A$$

Іншу повторну границю можна отримати помінявши місцями границі за x та y:

$$\lim_{x\to x_0} \lim_{y\to y_0} f(x; y) = B$$

Приклад нерівності повторних границь
Нехай
$$f(x;y)=\frac{x-y}{x+y+x^2+y^2}$$
Тоді
$$\varphi(y)=\lim_{x\to 0}f(x;y)=-\frac{1}{y+1};\quad \lim_{y\to 0}\varphi(y)=\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0}f(x;y)=-1$$
$$\psi(x)=\lim_{y\to 0}f(x;y)=\frac{1}{x+1};\quad \lim_{x\to 0}\psi(x)=\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}f(x;y)=1$$
Отже, повторні границі є різними.
Приклад, коли одна з повторних границь існує, а інша – ні
Нехай
$$f(x;y)=\frac{x\sin\frac{1}{x}+y}{x+y}$$
Тоді
$$\varphi(y)=\lim_{x\to 0}f(x;y)=\frac{y}{y}=1;\quad \lim_{y\to 0}\varphi(y)=\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0}f(x;y)=1$$
$$\psi(x)=\lim_{y\to 0}f(x;y)=\frac{x\sin\frac{1}{x}}{x}=\sin\frac{1}{x};\quad \lim_{x\to 0}\psi(x)=\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}f(x;y)-\text{ не існує}$$
Отже, одна з повторних границь існує, а інша – ні.
Отже, можливість переставляння границь має бути обґрунтовано.
Теорема *Якщо існує (скінченна або ні) подвійна границя*
$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}f(x,y)=A$$
і для будь-якого $y\in Y$ існує (скінченна) звичайна границя за x $\lim\limits_{x\to x_0}f(x;y)=\varphi(y)$, існує повторна границя $\lim\limits_{y\to y_0}\varphi(y)=A$, яка дорівнює подвійній границі.

Доведення
Доведемо для випадку скінченних A, x_0 та y_0.
За означенням $\forall\varepsilon>0\ \exists r$: $|f(x;y)-A|<\varepsilon$, тільки-но $MM_0<r$.
Зафіксуємо y так, щоб $|y-y_0|<r$, і перейдемо у $|f(x;y)-A|<\varepsilon$ до границі $x\to x_0$.
Оскільки $\lim\limits_{x\to x_0}f(x;y)=\varphi(y)$,
$$|\varphi(y)-A|\leqslant\varepsilon$$
Тоді
$$A=\lim_{y\to y_0}\varphi(y)=\lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0}f(x;y)$$
Що і слід було довести.

Якщо, окрім умов, які вказано у формулюванні теореми, $\forall x\in X$ існує (скінченна) звичайна границя $\psi(x)=\lim\limits_{y\to y_0}f(x;y)$, то, як випливає з доведеного, існує також і друга повторна границя $\lim\limits_{x\to x_0}\psi(x)=\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0}f(x;y)$, що дорівнює також числу A (у цьому випадку обидві повторні границі є рівними).

Означення: Нехай точка $M_0(x_0,y_0)$ належить області визначення функції $f(x,y)$. Тоді функція $z=f(x,y)$ називається **неперервною** у точці $M_0(x_0,y_0)$, якщо
$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}f(x,y)=f(x_0,y_0)\tag{19}$$
причому точка $M(x,y)$ прямує до точки $M_0(x_0,y_0)$ довільним чином.

Якщо в будь-якій точці умова (19) не виконується, то ця точка називається **точкою розриву** функції $f(x,y)$. Це може бути у наступних випадках:

1. Функція $z=f(x,y)$ не визначена у точці $M_0(x_0,y_0)$.
2. Не існує границя $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}f(x,y)$.
3. Ця границя існує, але вона не дорівнює $f(x_0,y_0)$.

Властивість Якщо функція $f(x, y, ...)$ визначена і неперервна в замкнутій і обмеженій області D, то у цій області знайдеться принаймні одна точка $N(x_0, y_0, \dots)$, така, що для інших точок виконується нерівність

$$f(x_0, y_0, \dots) \geqslant f(x, y, \dots)$$

а також точка $N_1(x_{01}, y_{01}, \dots)$, така, що для всіх інших точок виконується нерівність

$$f(x_{01}, y_{01}, \dots) \leqslant f(x, y, \dots)$$

тоді $f(x_0, y_0, \dots) = M$ – **найбільше значення** функції, а $f(x_{01}, y_{01}, \dots) = m$ – **найменше значення** функції $f(x, y, \dots)$ в області D.

Неперервна функція в замкнутій і обмеженій області D досягає принаймні один раз найбільшого значення і один раз найменшого.

Властивість Якщо функція $f(x, y, \dots)$ визначена і неперервна в замкнутій обмеженій області D, а M і m – відповідно найбільше і найменше значення функції у цій області, то для будь-якої точки $\mu \in [m, M]$ існує точка $N_0(x_0, y_0, \dots)$ така, що $f(x_0, y_0, \dots) = \mu$.

Простіше кажучи, неперервна функція приймає в області D всі проміжні значення між M і m. Наслідком цієї властивості може служити висновок, що якщо числа M і m різних знаків, то в області D функція принаймні один раз обертається у нуль.

Властивість Функція $f(x, y, \dots)$, неперервна в замкнутій обмеженій області D, **обмежена** у цій області, якщо існує таке число K, що для всіх точок області виконується нерівність $|f(x, y, ...)| < K$.

Властивість Якщо функція $f(x, y, \dots)$ визначена і неперервна в замкнутій обмеженій області D, то вона **рівномірно неперервна** у цій області, тобто для будь-якого додатного числа ε існує таке число $\Delta > 0$, що для будь-яких двох точок (x_1, y_1) і (x_2, y_2) області, що перебувають на відстані, меншій Δ, виконується нерівність

$$|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| < \varepsilon$$

Наведені вище властивості аналогічні властивостям функцій однієї змінної, неперервним на відрізку. Див. Властивості функцій, неперервних на відрізку.

5.2 Похідні і диференціали функцій декількох змінних

Означення Нехай у деякій області задана функція $z = f(x, y)$. Візьмемо довільну точку $M(x, y)$ і задамо приріст Δx до змінної x. Тоді величина $\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y)$ називається **частинним приростом функції за** x

Можна записати

$$\frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}.$$

Тоді $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta_x z}{\Delta x}$ називається **частинною похідною** функції $z = f(x, y)$ за x.

Позначення: $\dfrac{\partial z}{\partial x}$; $\quad z'_x$; $\quad \dfrac{\partial f(x, y)}{\partial x}$; $\quad f'_x(x, y)$.

Аналогічно визначається частинна похідна функції за y.

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$$

Геометричним змістом частинної похідної (наприклад $\dfrac{\partial z}{\partial x}$) є тангенс кута нахилу дотичної, проведеної у точці $N_0(x_0, y_0, z_0)$ до перетину поверхні площиною $y = y_0$.

5.3 Повний приріст і повний диференціал

Означення Для функції $f(x, y)$ вираз $\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$ називається **повним приростом**.

Якщо функція $f(x, y)$ має неперервні частинні похідні, то

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) + f(x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y) = [f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y)] + \\ + [f(x, y + \Delta y) - f(x, y)]$$

Застосуємо теорему Лагранжа (див. теорема Лагранжа.) до виразів, що стоять у квадратних дужках.

$$f(x, y + \Delta y) - f(x, y) = \Delta y \frac{\partial f(x, \overline{y})}{\partial y}$$

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y) = \Delta x \frac{\partial f(\overline{x}, y + \Delta y)}{\partial x}$$

тут $\overline{y} \in (y, y + \Delta y)$; $\quad \overline{x} \in (x, x + \Delta x)$

Тоді одержуємо

$$\Delta z = \Delta x \frac{\partial f(\overline{x}, y+\Delta y)}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial f(x, \overline{y})}{\partial y}$$

Оскільки частинні похідні неперервні, то можна записати рівності:

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{\partial f(\overline{x}, y+\Delta y)}{\partial x} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}$$

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{\partial f(x, \overline{y})}{\partial y} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$$

5.4 Диференціал функції двох змінних

Означення Вираз $\Delta z = \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}\Delta x + \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}\Delta y + \alpha_1 \Delta x + \alpha_2 \Delta y$ називається **повним приростом** функції $f(x, y)$ у деякій точці $(x,\, y)$, де α_1 і α_2 – нескінченно малі функції при $\Delta x \to 0$ і $\Delta y \to 0$ відповідно.

Означення: Повним диференціалом функції $z = f(x, y)$ називається головна лінійна відносно Δx і Δy частина приросту функції Δz у точці (x, y).

$$\mathrm{d}z = f'_x(x, y)\mathrm{d}x + f'_y(x, y)\mathrm{d}y$$

Для функції довільного числа змінних:

$$\mathrm{d}f(x, y, z, ..., t) = \frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y + ... + \frac{\partial f}{\partial t}\mathrm{d}t$$

Приклад. Знайти повний диференціал функції $u = x^{y^2 z}$.

$$\mathrm{d}u = \frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial u}{\partial z}\mathrm{d}z$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y^2 z x^{y^2 z - 1}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = x^{y^2 z} \ln x \cdot 2yz; \quad \frac{\partial u}{\partial z} = x^{y^2 z} \ln x \cdot y^2;$$

$$\mathrm{d}u = y^2 z x^{y^2 z - 1}\mathrm{d}x + 2x^{y^2 z} yz \ln x \mathrm{d}y + y^2 x^{y^2 z} \ln x \mathrm{d}z$$

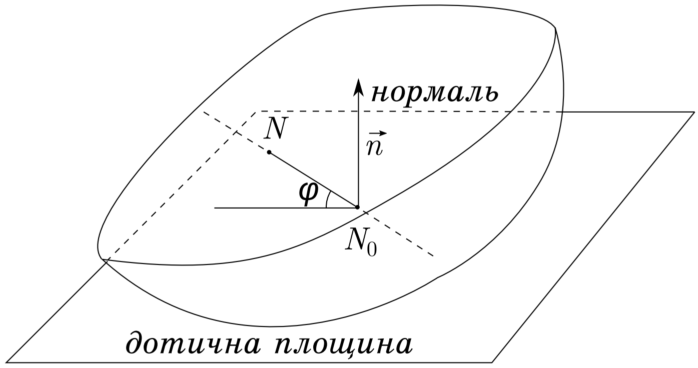
Приклад Знайти повний диференціал функції $z = \dfrac{y}{x^2 - y^2}$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-2yx}{(x^2 - y^2)^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y'(x^2 - y^2) - y(-2y)}{(x^2 - y^2)^2} = \frac{x^2 - y^2 + 2y^2}{(x^2 - y^2)^2} = \frac{x^2 + y^2}{(x^2 - y^2)^2}$$

$$\mathrm{d}z = -\frac{2xy}{(x^2 - y^2)}\mathrm{d}x + \frac{x^2 + y^2}{(x^2 - y^2)^2}\mathrm{d}y$$

5.4.1 Геометричний зміст повного диференціала. Дотична площина і нормаль до поверхні



Нехай N і N_0 – точки даної поверхні. Проведемо пряму NN_0. Площина, що проходить через точку N_0, називається **дотичною площиною** до поверхні, якщо кут між січною NN_0 і цією площиною прямує до нуля, коли прямує до нуля відстань NN_0.

Означення Нормаллю до поверхні у точці N_0 називається пряма, що проходить через точку N_0 перпендикулярно дотичній площині до цієї поверхні.

У будь-якій точці поверхня має або тільки одну дотичну площину, або не має її зовсім.

Якщо поверхня задана рівнянням $z = f(x, y)$, де $f(x, y)$ – функція, диференційована у точці $N_0(x_0, y_0)$, дотична площина у точці $N_0(x_0, y_0)$ існує і має рівняння:

$$z - f(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Рівняння нормалі до поверхні у цій точці:

$$\frac{x - x_0}{f'_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{f'_y(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}$$

Рівняння дотичної площини і нормалі для нерозв'язного щодо z рівняння поверхні

Нехай поверхню задано рівнянням $F(x, y, z) = 0$.

Рівняння дотичної площини у точці $M(x_0; y_0; z_0)$:

$$F'_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F'_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F'_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0.$$

Рівняння нормалі до поверхні у цій точці:

$$\frac{x - x_0}{F'_x(x_0, y_0, z_0)} = \frac{y - y_0}{F'_y(x_0, y_0, z_0)} = \frac{z - z_0}{F'_z(x_0, y_0, z_0)}$$

Геометричним змістом повного диференціала функції двох змінних $f(x, y)$ у точці (x_0, y_0) є приріст аплікати (координати z) дотичної площини до поверхні при переході від точки (x_0, y_0) до точки $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$.

Як видно, геометричний зміст повного диференціала функції двох змінних є просторовим аналогом геометричного змісту диференціала функції однієї змінної.

Приклад Знайти рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні

$$z = x^2 - 2xy + y^2 - x + 2y$$

у точці $M(1, 1, 1)$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - 2y - 1; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -2x + 2y + 2$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_M = -1; \quad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_M = 2;$$

Рівняння дотичної площини:

$$z - 1 = -(x - 1) + 2(y - 1); \qquad x - 2y + z = 0;$$

Рівняння нормалі:

$$\frac{x - 1}{-1} = \frac{y - 1}{2} = \frac{z - 1}{-1};$$

5.4.2 Наближені обчислення за допомогою повного диференціала

Нехай функція $f(x, y)$ диференційована у точці (x, y). Знайдемо повний приріст цієї функції:

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$$

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) = f(x, y) + \Delta z$$

Якщо підставити у цю формулу вираз

$$\Delta z \approx \mathrm{d}z = \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y$$

то одержимо наближену формулу:

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) \approx f(x, y) + \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\Delta y$$

Приклад Обчислити приблизно значення $\sqrt{1,04^{1,99} + \ln 1,02}$, виходячи зі значення функції $u = \sqrt{x^y + \ln z}$ при $x = 1$, $y = 2$, $z = 1$.

Із заданого виразу визначимо $\Delta x = 1,04 - 1 = 0,04$, $\Delta y = 1,99 - 2 = -0,01$,

$$\Delta z = 1,02 - 1 = 0,02.$$

Знайдемо значення функції $u(1,2,1)=\sqrt{1^2+\ln 1}=1$
Знаходимо частинні похідні:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(1,2,1) = \left.\frac{y\cdot x^{y-1}}{2\sqrt{x^y+\ln z}}\right|_{(1,2,1)} = \frac{2\cdot 1}{2\sqrt{1}} = 1$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(1,2,1) = \left.\frac{x^y \ln x}{2\sqrt{x^y+\ln z}}\right|_{(1,2,1)} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}(1,2,1) = \left.\frac{\frac{1}{z}}{2\sqrt{x^y+\ln z}}\right|_{(1,2,1)} = \frac{1}{2}$$

Повний диференціал функції u дорівнює:

$$\mathrm{d}u = 0,04\cdot\frac{\partial u}{\partial x} - 0,01\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + 0,02\cdot\frac{\partial u}{\partial z} = 1\cdot 0,04 - 0\cdot 0,01 + \frac{1}{2}\cdot 0,02 = 0,04+0,01=0,05$$

$$\sqrt{1,04^{1,99}+\ln 1,02} \approx u(1,2,1)+\mathrm{d}u = 1+0,05 = 1,05$$

Точніше значення цього виразу: $1,049275225687319176$.

5.5 Частинні похідні складених функцій

Оскільки диференціал функції є головною лінійною відносно приростів змінних частиною приросту функції декількох змінних, за його допомогою можна обчислювати похідні від складених функцій. Для цього достатньо просто знайти відповідні коефіцієнти при приростах з використанням виведених вище формул.

Наведемо декілька прикладів.

1. Знайдемо повну похідну за змінною x від функції $z=z(x,y)$, якщо відомо, що $y=y(x)$.

$$\mathrm{d}z = \frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y = \frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x = \left(\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)\mathrm{d}x,$$

тому

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}.$$

2. Знайдемо повну похідну за змінною t від функції $z=z(x,y)$, якщо відомо, що $x=x(t)$, $y=y(t)$.

$$\mathrm{d}z = \frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)\mathrm{d}t,$$

тому

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}.$$

<u>Приклад</u> Знайти повну похідну $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$ функції $z=\sin\frac{x}{y}$, де $x=e^t$; $y=t^2$.

<u>Розв'язання</u> Маємо

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \cos\frac{x}{y}\cdot\frac{1}{y} = \frac{1}{y}\cos\frac{x}{y};\quad \frac{\partial z}{\partial y} = \cos\frac{x}{y}\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right) = -\frac{x}{y^2}\cos\frac{x}{y}.$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = e^t;\quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 2t$$

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{y}\cos\frac{x}{y}e^t - \frac{x}{y^2}\cos\frac{x}{y}\cdot 2t = \frac{1}{t^2}\cos\frac{e^t}{t^2}e^t - \frac{e^t}{t^4}\cos\frac{e^t}{t^2}\cdot 2t = (t-2)\cdot\frac{e^t}{t^3}\cdot\cos\frac{e^t}{t^2}.$$

3. Знайдемо частинні похідні за змінними u та v від функції $z=z(x,y)$, якщо відомо, що $x=x(u,v)$, $y=y(u,v)$.

$$\mathrm{d}z = \frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y = \frac{\partial z}{\partial x}\left(\frac{\partial x}{\partial u}\mathrm{d}u + \frac{\partial x}{\partial v}\mathrm{d}v\right) + \frac{\partial z}{\partial y}\left(\frac{\partial y}{\partial u}\mathrm{d}u + \frac{\partial y}{\partial v}\mathrm{d}v\right) = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}\right)\mathrm{d}u + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}\right)\mathrm{d}v,$$

тому

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u};\qquad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}.$$

<u>Приклад</u> Знайти $\dfrac{\partial z}{\partial u}$, $\dfrac{\partial z}{\partial v}$, де $z=\mathrm{arctg}\,\dfrac{x}{y}$; $x=u\sin v$; $y=u\cos v$.

Розв'язання Маємо

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{1+\frac{x^2}{y^2}}\cdot\frac{1}{y}=\frac{y}{x^2+y^2};\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{1+\frac{x^2}{y^2}}\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right)=-\frac{x}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial x}{\partial u}=\sin v;\frac{\partial x}{\partial v}=u\cos v;\quad \frac{\partial y}{\partial u}=\cos v;\frac{\partial y}{\partial v}=-u\sin v;$$

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{y}{x^2+y^2}\cdot\sin v-\frac{x}{x^2+y^2}\cdot\cos v=\frac{u\sin v\cos v-u\sin v\cos v}{u^2\sin^2 v+u^2\cos^2 v}=0.$$

$$\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{y}{x^2+y^2}\cdot u\cos v+\frac{x}{x^2+y^2}\cdot u\sin v=\frac{u^2\cos^2 v}{u^2\sin^2 v+u^2\cos^2 v}+\frac{u^2\sin^2 v}{u^2\sin^2 v+u^2\cos^2 v}=1.$$

5.6 Похідна у даному напрямі. Градієнт

Як можна зрозуміти із аналогії з похідними функції однієї змінної, частинні похідні виражають собою «швидкості зміни» у певному напрямку. Наприклад, f'_x є «швидкістю зміни» функції f у напрямку вісі x. У обчислювальних задачах та фізичних застосуваннях похідних (зокрема у задачах теплопровідності) часто потрібно визначати швидкість зміни функції у напрямках, відмінних від напрямків осей координатної системи.

Нехай маємо якусь вісь (напрямок) l, на якій розташовано дві точки, M_0 та M. Нехай також маємо деяку функцію $f(M)$, визначену у достатньо великому околі точки M_0, такому, щоб до нього потрапила точка M. Тоді, взявши довжину відрізка M_0M із належним знаком («+» якщо напрямок руху від M_0 до M збігається із напрямком l і «-», якщо навпаки), будемо називати границю

$$\lim_{M\to M_0}\frac{f(M)-f(M_0)}{MM_0}$$

похідною від функції $f(M)$ за напрямком l у точці M_0.

Позначення:

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial l}=\frac{\partial f(x_0,y_0,z_0)}{\partial l}.$$

Якщо напрямними косинусами вісі l (вектора $\overrightarrow{M_0M}$) у координатній системі xyz тривимірного простору є $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, похідну за напрямом можна записати через частинні похідні:

$$\frac{\partial f}{\partial l}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma.$$

Можна показати, що найбільшого значення похідна за напрямком досягає у напрямку вектора, координатами якого є частинні похідні функції у точці M_0. Цей вектор називається **градієнтом**:

$$\mathrm{grad} f=\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z}\right).$$

Тоді, частинну похідну можна розглядати як проєкцію градієнта на напрямок вектора MM_0:

$$\frac{\partial f}{\partial l}=\frac{\left(\mathrm{grad} f;\overrightarrow{M_0M}\right)}{\left|\overrightarrow{M_0M}\right|}.$$

5.7 Частинні похідні вищих порядків

Якщо функція $f(x,y)$ визначена в деякій області D, то її частинні похідні $f'_x(x,y)$ і $f'_y(x,y)$ теж будуть визначені у тій же області або її частині.

Будемо називати ці похідні **частинними похідними першого порядку**

Похідні цих функцій будуть **частинними похідними другого порядку**

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f''_{xx}(x,y);\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f''_{yy}(x,y);$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f''_{xy}(x,y);\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=f''_{yx}(x,y);$$

Продовжуючи диференціювати отримані рівності, одержимо частинні похідні вищих порядків.

Означення Частинні похідні виду $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y};\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x};\frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y\partial x};\frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y\partial y}$ і далі називаються **мішаними похідними**

Теорема Якщо функція $f(x,y)$ і її частинні похідні $f'_x,f'_y,f''_{xy},f''_{yx}$ визначені і неперервні у точці $M(x,\,y)$ і її околі, то виконується співвідношення:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}.$$

Тобто частинні похідні вищих порядків не залежать від порядку диференціювання (теорема Шварца[17]).

Аналогічно визначаються диференціали вищих порядків.

$$\mathrm{d}z = f'_x(x,y)\mathrm{d}x + f'_y(x,y)\mathrm{d}y$$

$$\mathrm{d}^2z = \mathrm{d}\left[f'_x(x,y)\mathrm{d}x + f'_y(x,y)\mathrm{d}y\right] = f''_{x^2}(x,y)(\mathrm{d}x)^2 + 2f''_{xy}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + f''_{y^2}(x,y)(\mathrm{d}y)^2$$

$$\mathrm{d}^3z = f'''_{x^3}(x,y)(\mathrm{d}x)^3 + 3f'''_{x^2y}(x,y)(\mathrm{d}x)^2\mathrm{d}y + 3f'''_{xy^2}(x,y)\mathrm{d}x(\mathrm{d}y)^2 + f'''_{y^3}(x,y)(\mathrm{d}y)^3$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\mathrm{d}^nz = \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial}{\partial y}\mathrm{d}y\right)^n f(x,y)$$

Тут n – символічний степінь похідної, на який заміняється дійсний степінь після піднесення до нього виразу в дужках.

5.8 Екстремум функції декількох змінних

<u>Означення</u> Якщо для функції $z = f(x,y)$, визначеної в деякій області, у деякому околі точки $M_0(x_0,y_0)$ виконується нерівність

$$f(x_0,y_0) > f(x,y)$$

то точка M_0 називається **точкою максимуму**

<u>Означення</u> Якщо для функції $z = f(x,y)$, визначеної в деякій області, у деякому околі точки $M_0(x_0,y_0)$ виконується нерівність

$$f(x_0,y_0) < f(x,y)$$

то точка M_0 називається **точкою мінімуму**

<u>Теорема. (Необхідні умови екстремуму)</u>

Якщо функція $f(x,y)$ у точці (x_0,y_0) має екстремум, то у цій точці або обидві її частинні похідні першого порядку дорівнюють нулю $f'_x(x_0,y_0) = 0, \quad f'_y(x_0,y_0) = 0$, або хоча б одна з них не існує.

Цю точку (x_0,y_0) будемо називати **критичною точкою**

<u>Теорема. (Достатні умови екстремуму)</u>

Нехай в околі критичної точки (x_0,y_0) функція $f(x,y)$ має неперервні частинні похідні до другого порядку включно. Розглянемо вираз:

$$D(x,y) = f''_{x^2}(x,y)\cdot f''_{y^2}(x,y) - \left[f''_{xy}(x,y)\right]^2$$

1. Якщо $D(x_0,y_0) > 0$, то у точці (x_0,y_0) функція $f(x,y)$ має екстремум, якщо $f''_{x^2}(x_0,y_0) < 0$ – максимум, якщо $f''_{x^2}(x_0,y_0) > 0$ – мінімум.

2. Якщо $D(x_0,y_0) < 0$, то у точці (x_0,y_0) функція $f(x,y)$ не має екстремуму. У випадку, якщо $D = 0$, висновок про наявність екстремуму зробити не можна.

5.9 Умовний екстремум

Умовний екстремум знаходиться, коли змінні x і y, що входять у функцію $u = f(x,y)$, не є незалежними, тобто існує деяке співвідношення $\varphi(x,y) = 0$, що називається **рівнянням зв'язку**.

Тоді зі змінних x і y тільки одна буде незалежною, оскільки інша може бути виражена через неї з рівняння зв'язку.

Тоді $u = f(x,y(x))$.

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$$

У точках екстремуму:

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0 \tag{20}$$

Крім того:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0 \tag{21}$$

Помножимо рівність (21) на число λ і складемо з рівністю (20).

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) + \lambda\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) = 0$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial f}{\partial y} + \lambda\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0$$

[17] Герман Шварц (Karl Hermann Amandus Schwarz) (1843–1921) – німецький математик.

Для виконання цієї умови у всіх точках знайдемо невизначений коефіцієнт λ так, щоб виконувалася система трьох рівнянь:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} + \lambda \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} + \lambda \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \\ \varphi(x, y) = 0 \end{cases}$$

Отримана система рівнянь є необхідними умовами умовного екстремуму. Однак ця умова не є достатньою. Тому при знаходженні критичних точок потрібно їхнє додаткове дослідження на екстремум.

Вираз $u = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y)$ називається **функцією Лагранжа**

Приклад Знайти екстремум функції $f(x, y) = xy$, якщо рівняння зв'язку: $2x + 3y - 5 = 0$.

$$u = xy + \lambda(2x + 3y - 5)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y + 2\lambda; \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = x + 3\lambda;$$

$$\begin{cases} y + 2\lambda = 0 \\ x + 3\lambda = 0 \\ 2x + 3y - 5 = 0 \end{cases}$$

$$\lambda = -\frac{5}{12}; \qquad x = \frac{5}{4}; \qquad y = \frac{5}{6};$$

Таким чином, функція має екстремум у точці $\left(\frac{5}{4}; \frac{5}{6}\right)$.

Використання функції Лагранжа для знаходження точок екстремуму функції називається також **методом множників Лагранжа**.

Вище ми розглянули функцію двох змінних, однак, всі міркування щодо умовного екстремуму можуть бути поширені на функції більшого числа змінних.