МІНІСЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Київський національний університет будівництва і архітектури

Н.І. ПОЛТОРАЧЕНКО

МАТЕМАТИЧНА ЛОГІКА І ЧИСЛЕННЯ ПРЕДИКАТІВ

Конспект лекцій
для студентів спеціальності 126 «Інформаційні системи і технології»

Київ 2021

УДК 510.23:510.6
П49

Рецензент Є.В.Бородавка, д-р техн. наук, професор

Затверджено на засіданні ради факультету автоматизації і інформаційних технологій, протокол № 9 від 23 червня 2021 року.

Полтораченко Н.І.
П49 Математична логіка і числення предикатів**:** конспект лекцій / Н.І. Полтораченко. − Київ: КНУБА, 2021. − 56 с.

Розглянуто основи математичної логіки і числення предикатів відповідно до програми другого курсу. Наведено як науковий матеріал, так і деякі практичні задачі, що ілюструють теорію.

Призначено для студентів спеціальності 126 «Інформаційні системи і технології»

Зміст

Вступ

Основною метою викладання дисципліни "Математична логіка і числення предикатів" є набуття знань з основ вказаного курсу, формування у майбутніх фахівців знань і навичок застосування основних законів, принципів та методів математичної логіки в інженерній практиці, при вирішенні технічних задач.

Математична логіка і числення предикатів є дисципліною, яка спирається на апарат дискретної математики та широко використовується в теорії алгоритмів, системах штучного інтелекту, математичній кібернетики тощо.

У результаті вивчення дисципліни студент має *знати*:

- принципи побудови формальних теорій;
- властивості та закони операцій булевої алгебри;
- основні закони числення висловлювань;
- правила побудови формул алгебри висловлювань;
- аксіоми алгебри висловлювань;
- правила виведення в алгебрі висловлювань;
- теорему дедукції;
- секвенційне числення в алгебрі висловлювань;
- правила побудови формул алгебри предикатів;
- аксіоми алгебри предикатів;
- правила виведення в алгебрі предикатів;
- секвенційне числення в алгебрі висловлювань;

вміти:

- будувати формули алгебри висловлювань та алгебри предикатів;
- доводити теореми в алгебрі висловлювань та в алгебрі предикатів;
- користуватися теоремою дедукції;
- перевіряти на істинність формули засобами секвенційного числення.

1. Основні засади математичної логіки. Поняття висловлювання

Історична довідка

Логіка – це наука про правила міркувань, у першу чергу – доведень і спростувань, а математична логіка – наука, яка вивчає логічні питання, використовуючи математичні методи. Сам термін «логіка» походить від грецького λογοζ, що означає «слово, яке виражає думку».

Логіка як мистецтво суджень має глибокі коріння, які відносять до 6 століття до н.е. (Фалес, Парменід, Піфагор). У стародавній Греції її розглядали як окремий розділ науки. Платон розвинув загальні принципи логічних суджень, а от системний погляд на науку про закони і форми мислення пов'язують з іменем Аристотеля (Органон, 4 століття до н.е.). Він виклав закони логічного виведення, розробив аксіоматичний метод, запропонував першу формально-аксіоматичну систему логіки – силогістику. Через майже 2000 років у 17 сторіччі Лейбніц висунув ідею «універсального числення», запропонував ввести в логіку математичну символіку та використовувати її для логічних побудов (щось на кшталт того, як апаратом арифметики та алгебри ми можемо перевірити результати розв'язування математичних задач). Цю ідею у 19 сторіччі використав Джордж Буль (1815–1864), розробивши першу завершену систему математичної логіки, чим заклав її основи. Логіко-математичні мови, теорія їх смислу розвинуті в роботах Г.Фреге (1848–1925). Саме він ввів поняття предикату і кванторів. Г.Фреге та Б.Рассел (1872–1970) намагалися звести всю математику до логіки. Ця спроба не досягла основної мети, проте вона привела до створення багатого логічного апарату, без якого оформлення математичної логіки як повноцінного розділу математики було б неможливе. У цьому ж напрямку працювали Д. Гільберт (1862–1943) та його учні (програма обгрунтування математики на базі математичної логіки). Саме з його ім'ям пов'язують становлення математичної логіки як самостійної математичної дисципліни. Ще один напрямок розвитку логіки – інтуїціоністський, який пов'язують з іменем Л. Брауера (1881–1966). Для цього напрямку головним є поняття задачі та побудови, а не істини та обгрунтування, і він тісно пов'язаний з розвитком теорії алгоритмів.

Останніми десятиліттями математичну логіку широко використовують в економіці, біології, медицині, психології, мовознавстві, праві, при побудові систем штучного інтелекту. Апарат математичної логіки легко розповсюджується на об'єкти самої загальної природи, головне, щоб вони характеризувалися скінченою кількістю станів.

Основна проблема математичної логіки

Кожна формально-логічна теорія складається з *синтаксису* (правила побудови речень) та *семантики* (як ці речення приймають значення - найчастіше істинне та хибне).

Що стосується синтаксису, то вимоги до нього не викликають труднощів. Головне – щоб він був ефективним, тобто правила синтаксису допускали побудову всіх можливих речень за допомогою деякого алгоритму та перевірку речень на допустимість.

На відміну від синтаксису семантика як правило є складною. Найчастіше вона пов'язана з нескінченними множинами. У цьому випадку не можливо говорити про алгоритми семантичних правил. Звідси випливає головна задача математичної логіки – «створити таку синтаксичну систему, яка б породжувала всі семантично істинні речення (і тільки їх)» [2]. Під час вивчення математичної логіки ми дізнаємося, що вченим поки не вдалося розв'язати сформульовану вище задачу, що залишає актуальним політ наукової думки, але не применшує значущість отриманих результатів.

Принцип побудови формальних теорій

У загальному вигляді формальну теорію (числення) будують таким чином:

1) Означають набір основних символів – *алфавіт* теорії.
2) Означають *множину формул* (правильно побудованих виразів), яка утворює мову теорії.
3) Виокремлюють підмножину формул, які називають *аксіомами* теорії.
4) Задають *правила виводу* теорії (тобто вказують причинно-наслідкове відношення на відміну від булевої алгебри, де в основі буде еквівалентність).

Правило виводу $R(F_1, F_2, \ldots, F_m, G)$ – це відношення (операція) на множині формул. Формулу G називають безпосередньо вивідною з формул $F_1, F_2, \ldots, F_m$ та інколи записують:

$$\frac{F_1, F_2, \ldots, F_m}{G}.$$

Формули $F_1, F_2, \ldots, F_m$ називають *припущеннями, гіпотезами,* а формулу G – *висновком, наслідком.*

Виведенням (виводом) формули B з формул $A_1, A_2, \ldots, A_n$ називають таку послідовність формул $F_1, F_2, \ldots, F_m$, що $F_m = B$, а будь-яка формула $F_i (i = 1, \ldots, m)$ є:

1) або аксіомою;
2) або однією з початкових формул $A_1, A_2, \ldots, A_n$;

3) або безпосередньо вивідною з формул $F_1, F_2, \dots, F_{i-1}$ (або будь-якої їх підмножини) за одним із правил виводу.

Якщо існує виведення формули B з формул $A_1, A_2, \dots, A_n$, то кажуть, що B є *вивідною* з $A_1, A_2, \dots, A_n$ та позначають: $A_1, A_2, \dots, A_n \vdash B$. Формули $A_1, A_2, \dots, A_n$ називають *посилками, або гіпотезами*.

Теоремою називається формула B, для доведення якої використовуються як початкові формули тільки аксіоми, що позначається як $\vdash B$.

Означення висловлювання

Просте (елементарне) висловлювання (висловлення) – це просте твердження, тобто розповідне речення, щодо змісту якого доречно ставити питання про його правильність або неправильність. Правильні висловлювання називатимемо *істинними*, а неправильні – *хибними*. Елементарне висловлювання відносять до основних математичних понять та ще називають *атомами*.

Приклади висловлювань:

1) 1 – просте число;
2) усі прості числа - натуральні;
3) усі натуральні числа – цілі;
4) усі дійсні числа - раціональні.

Друге та третє висловлювання є істинними, а перше та четверте – хибними.

Водночас речення «Учітесь, читайте, і чужому навчайтесь, й свого не цурайтесь» (Т.Г. Шевченко)
не є висловлюванням.

При роботі з висловлюваннями будемо виходити з двох основних законів двозначної логіки:

1) кожне висловлювання є істинним або хибним (*закон виключення третього*);
2) жодне висловлювання не є одночасно істинним та хибним (*закон виключення суперечності*).

Елементарні висловлювання позначатимемо малими латинськими літерами $a, b, c, \dots$ (можливо, з індексами), *змінні висловлювання* - малими латинськими літерами $x, y, z, \dots$ (можливо, з індексами). Змінні висловлювання ще називають *пропозиційними змінними.*

Дослідження логічних теорій розпочнемо з булевої алгебри.

Запитання для самоперевірки

1. Наведіть означення понять «логіка» та «математична логіка».
2. Наведіть основні етапи розвитку математичної логіки.
3. У чому полягає основна проблема математичної логіки.
4. Наведіть основні складові частини побудови формальних теорій.
5. Як розуміємо правила виводу в формальній теорії? Охарактеризуйте процес виведення формули.
6. Що в математичній логіці називається теоремою?
7. Наведіть означення висловлювання.
8. Наведіть основні закони двозначної логіки, що використовуються при роботі з висловлюваннями.
9. Як позначаються елементарні висловлювання та пропозиційні висловлювання?

2. Логічні операції над висловлюваннями. Алфавіт числення висловлювань

Основні логічні операції

Двозначна логіка має справу з такими об'єктами, які приймають одне з двох можливих значень (істинне або хибне твердження, висока або низька напруга, наявність або відсутність заданої ознаки у об'єкта). Об'єкти, які можуть приймати значення з скінченної множини, що містить більше двох значень, називають многозначними. Вони або зводяться до двозначних, або обслуговуються апаратом многозначної логіки.

Прикладом двозначної логіки є *булева алгебра*, яка включає в себе нульарні операції 0 та 1 (булеві змінні приймають тільки два значення), унарну операцію заперечення та бінарні операції диз'юнкції та кон'юнкції.

Основні логічні операції:

1) заперечення, інверсія (одномісна)

x	$\bar{x}$
0	1
1	0

2) диз'юнкція (двомісна, x_1 або x_2)

x_1	x_2	$x_1 \vee x_2$
0	0	0
1	0	1
0	1	1
1	1	1

3) кон'юнкція (двомісна, x_1 та x_2)

x_1	x_2	$x_1 \wedge x_2$
0	0	0
1	0	0
0	1	0
1	1	1

4) імплікація (двомісна, якщо x_1, то x_2)

x_1	x_2	$x_1 \rightarrow x_2$
0	0	1
1	0	0
0	1	1
1	1	1

5) еквіваленція (двомісна, якщо x_1, то x_2 і навпаки)

x_1	x_2	$x_1 \leftrightarrow x_2$
0	0	1
1	0	0
0	1	0
1	1	1

Дві операції вважаються рівносильними, якщо при будь-яких значеннях змінних вони приймають однакові значення (позначка - "="). Рівносильність можна перевірити за таблицями основних операцій (таблицями істинності).

Властивості операцій

1) Комутативність: $x \vee y = y \vee x, \quad x \wedge y = y \wedge x.$
2) Асоціативність: $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z, \quad x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z.$
3) Дистрибутивність кон'юнкції $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z),$
дистрибутивність диз'юнкції $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z).$
Приклад перевірки дистрибутивності кон'юнкції:

x	y	z	$y \vee z$	$x \wedge y$	$x \wedge z$	$x \wedge (y \vee z)$	$(x \wedge y) \vee (x \wedge z)$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	0	1	1	1
1	1	0	1	1	0	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1

Так як останні два стовпця співпадають, то властивість дистрибутивності кон'юнкції доведено.
4) Властивість констант: $x \vee 0 = x, x \wedge 1 = x,$

$$x \wedge 0 = 0, x \vee 1 = 1.$$

5) Властивість заперечення: $x \vee \bar{x} = 1, x \wedge \bar{x} = 0, \bar{\bar{x}} = x.$
Наведені властивості є аксіомами булевої алгебри.

Тотожні перетворення

Закони ідемпотентності: $x \vee x = x \wedge x = x.$

Доведення: 1) $x \vee x = \left|\begin{matrix}\text{властивість}\\ \text{констант}\end{matrix}\right| = (x \vee x) \wedge 1 = \left|\begin{matrix}\text{властивість}\\ \text{заперечення}\end{matrix}\right| =$

$$= (x \vee x) \wedge (x \vee \bar{x}) = |\text{дистрибутивність}| = x \vee (x \wedge \bar{x}) = \left|\begin{matrix}\text{властивість}\\ \text{заперечення}\end{matrix}\right| =$$

$$= x \vee 0 = \left|\begin{matrix}\text{властивість}\\ \text{констант}\end{matrix}\right| = x;$$

$$2)\ x \wedge x = \left|\begin{matrix}\text{властивість}\\ \text{констант}\end{matrix}\right| = (x \wedge x) \vee 0 = \left|\begin{matrix}\text{властивість}\\ \text{заперечення}\end{matrix}\right| =$$

$$= (x \wedge x) \vee (x \wedge \bar{x}) = |\text{дистрибутивність}| = x \wedge (x \vee \bar{x}) = \left|\begin{matrix}\text{властивість}\\ \text{заперечення}\end{matrix}\right| =$$

$$= x \wedge 1 = \left|\begin{matrix}\text{властивість}\\ \text{констант}\end{matrix}\right| = x.$$

Зміст цих законів - повторна дія над об'єктом не змінює результат.

Закони поглинання: $x \vee (x \wedge y) = x \wedge (x \vee y) = x$.

Доведення: 1) $x \vee (x \wedge y) = \left|\begin{matrix}\text{властивість}\\ \text{констант}\end{matrix}\right| =$

$$= (x \wedge 1) \vee (x \wedge y) = |\text{дистрибутивність}| = x \wedge (1 \vee y) = \left|\begin{matrix}\text{властивість}\\ \text{констант}\end{matrix}\right| =$$

$$= x \wedge 1 = \left|\begin{matrix}\text{властивість}\\ \text{констант}\end{matrix}\right| = x;$$

$$2)\ x \wedge (x \vee y) = \left|\begin{matrix}\text{властивість}\\ \text{констант}\end{matrix}\right| = (x \vee 0) \wedge (x \vee y) = |\text{дистрибутивність}| =$$

$$= x \vee (0 \wedge y) = \left|\begin{matrix}\text{властивість}\\ \text{констант}\end{matrix}\right| = x \vee 0 = \left|\begin{matrix}\text{властивість}\\ \text{констант}\end{matrix}\right| = x.$$

Закони де Моргана: $\overline{x \vee y} = \bar{x} \wedge \bar{y}$, $\overline{x \wedge y} = \bar{x} \vee \bar{y}$.

Доведення. На базі властивості заперечення рівність $\overline{x \vee y}$ та $\bar{x} \wedge \bar{y}$ має означати, що $(x \vee y) \vee (\bar{x} \wedge \bar{y}) = 1$ та $(x \vee y) \wedge (\bar{x} \wedge \bar{y}) = 0$. Дійсно,

$$(x \vee y) \vee (\bar{x} \wedge \bar{y}) = |\text{дистрибутивність}| = \big((x \vee y) \vee \bar{x}\big) \wedge \big((x \vee y) \vee \bar{y}\big) =$$

$$= \left|\begin{matrix}\text{властивість}\\ \text{асоціативності}\end{matrix}\right| = \big((x \vee \bar{x}) \vee y\big) \wedge (x \vee (y \vee \bar{y})) = \left|\begin{matrix}\text{властивість}\\ \text{заперечення}\end{matrix}\right| =$$

$$= (1 \vee y) \wedge (x \vee 1) = \left|\begin{matrix}\text{властивість}\\ \text{констант}\end{matrix}\right| = 1 \wedge 1 = 1,$$

а також

$$(x \vee y) \wedge (\bar{x} \wedge \bar{y}) = |\text{дистрибутивність}| = \big(x \wedge (\bar{x} \wedge \bar{y})\big) \vee \big(y \wedge (\bar{x} \wedge \bar{y})\big) =$$

$$= \left| \begin{matrix} \text{властивість} \\ \text{асоціативності} \end{matrix} \right| = \big((x \wedge \bar{x}) \wedge \bar{y}\big) \vee \big((y \wedge \bar{y}) \wedge \bar{x}\big) = \left| \begin{matrix} \text{властивість} \\ \text{заперечення} \end{matrix} \right| =$$

$$= (0 \wedge \bar{y}) \vee (0 \wedge \bar{x}) = \left| \begin{matrix} \text{властивість} \\ \text{констант} \end{matrix} \right| = 0 \vee 0 = 0.$$

Як наслідок, співвідношення $\overline{x \vee y} = \bar{x} \wedge \bar{y}$ доведено.

Аналогічно, на базі властивості заперечення рівність $\overline{x \wedge y}$ та $\bar{x} \vee \bar{y}$ має означати, що
$(x \wedge y) \vee (\bar{x} \vee \bar{y}) = 1$ та $(x \wedge y) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y}) = 0$. Дійсно,

$$(x \wedge y) \vee (\bar{x} \vee \bar{y}) = |\text{дистрибутивність}| = \big(x \vee (\bar{x} \vee \bar{y})\big) \wedge \big(y \vee (\bar{x} \vee \bar{y})\big) =$$

$$= \left| \begin{matrix} \text{властивість} \\ \text{асоціативності} \end{matrix} \right| = \big((x \vee \bar{x}) \vee \bar{y}\big) \wedge (\bar{x} \vee (y \vee \bar{y})) = \left| \begin{matrix} \text{властивість} \\ \text{заперечення} \end{matrix} \right| =$$

$$= (1 \vee \bar{y}) \wedge (\bar{x} \vee 1) = \left| \begin{matrix} \text{властивість} \\ \text{констант} \end{matrix} \right| = 1 \wedge 1 = 1,$$

а також

$$(x \wedge y) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y}) = |\text{дистрибутивність}| = \big((x \wedge y) \wedge \bar{x}\big) \vee \big((x \wedge y) \wedge \bar{y}\big) =$$

$$= \left| \begin{matrix} \text{властивість} \\ \text{асоціативності} \end{matrix} \right| = \big((x \wedge \bar{x}) \wedge y\big) \vee \big((y \wedge \bar{y}) \wedge x\big) = \left| \begin{matrix} \text{властивість} \\ \text{заперечення} \end{matrix} \right| =$$

$$= (0 \wedge y) \vee (0 \wedge x) = \left| \begin{matrix} \text{властивість} \\ \text{констант} \end{matrix} \right| = 0 \vee 0 = 0.$$

Як наслідок, співвідношення $\overline{x \wedge y} = \bar{x} \vee \bar{y}$ доведено.

Операції диз'юнкції та кон'юнкції підкоряються законам комутативності і асоціативності, тому якщо змінні зв'язані лише цими операціями, то їх можна виконувати у будь-якому порядку. Наприклад, $(x_1 \vee x_2) \vee (x_3 \vee x_4) \vee x_5$ можна замінити на $x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4 \vee x_5$.

Пріоритет операцій:

1) вираз в дужках;
2) заперечення ¬;
3) кон'юнкція ∧;
4) диз'юнкція ∨;
5) імплікація →;
6) еквіваленція ↔.

Допускається явна відсутність операції кон'юнкції. Наприклад, $x \wedge \bar{x}$ можна замінити на $x\bar{x}$.

Алфавіт числення висловлювань

Алфавіт найпоширенішої формальної *мови* алгебри висловлювань складається з таких символів:

1) символи елементарних висловлювань та пропозиційних змінних: $a, b, c, \dots$ і $x, y, z, \dots$(можливо, з індексами);
2) символи операцій: ¬, ∧, ∨, $\rightarrow, \sim$;
3) допоміжні символи – круглі дужки.

Наведемо вирази, що відповідають символам операцій:

1) ∧ - і, але, а, хоч, незважаючи на…;
2) ∨ - або, чи, хоч одне з них…;
3) ¬ - не, неправильно, що…;
4) → - якщо…, то…; випливає…;
5) $\sim$ - …тоді й тільки тоді, коли…; …якщо й тільки якщо…; …еквівалентне (рівносильне)… .

Приклад. Якщо вивчити математичну логіку, то якість підготовки випускника підвищиться. При покращенні підготовки випускника його шанси на ринку праці збільшуються. Математична логіка була вивчена. Як наслідок, шанси випускника на ринку праці підвищилися. Побудувати формулу цього висловлювання.

Розв'язування. Введемо позначки елементарних висловлювань: a – випускник вивчив математичну логіку, b - якість підготовки випускника підвищилась, c - шанси випускника на ринку праці збільшуються. Тоді $a \rightarrow b$ відповідає фраза «Якщо вивчити математичну логіку, то якість підготовки випускника підвищиться», $b \rightarrow c$ відповідає фраза «При покращенні підготовки випускника його шанси на ринку праці збільшуються», кон'юнкції $(a \rightarrow b)(b \rightarrow c)a$ відповідає фрагмент висловлювання «Якщо вивчити математичну логіку, то якість підготовки випускника підвищиться. При покращенні підготовки випускника його шанси на ринку праці збільшуються. Математична логіка була вивчена», а все висловлювання матиме вигляд:

$$(a \rightarrow b)(b \rightarrow c)a \rightarrow c.$$

Запитання для самоперевірки

1. Наведіть основні ознаки двозначної логіки.
2. Наведіть основні операції булевої алгебри.
3. Наведіть таблицю істинності операції заперечення.
4. Наведіть таблицю істинності операції диз'юнкції.
5. Наведіть таблицю істинності операції кон'юнкції.
6. Наведіть таблицю істинності операції імплікації.
7. Наведіть таблицю істинності операції еквіваленції.
8. Наведіть властивості операцій булевої алгебри. Побудуйте таблиці істинності для кожної з них.
9. Доведіть закони ідемпотентності.
10. Доведіть закони поглинання.
11. Доведіть закони де Моргана.
12. Наведіть пріоритет виконання операцій булевої алгебри.
13. Наведіть складові частини алфавіту мови алгебри висловлювань.
14. Наведіть вирази, що відповідають символам операцій булевої алгебри.

3. Формули алгебри висловлювань. Тавтології

Логічні функції як відображення

Особливістю логічних функцій є той факт, що вони можуть приймати значення в скінченних множинах. Якщо область значень містить k різних елементів, то вона називається k-значною функцією.

Логічні функції можуть залежати від однієї, двох або, назагал, будь-якої кількості змінних x_1, x_2, ..., x_n. На відміну від самої функції, аргументи можуть приймати значення як з скінченних, так і нескінечних множин.

Логічну функцію можна розглядати як композицію $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n \to Y$, де $x_1 \in X_1, x_2 \in X_2, \ldots, x_n \in X_n, Y = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k\}$ – область значень.

Якщо аргументи приймають значення з тієї ж множини, що й сама функція, то її називають *однорідною*. У цьому випадку $X_1 = X_2 = \cdots = X_n = Y$.

Областю визначення однорідної функції $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ слугує множина наборів $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, що називаються словами, де кожний з аргументів $x_1, x_2, \ldots, x_n$ замінюється буквами k-ічного алфавіту $\{0,1, \ldots, k-1\}$.

Кількість n букв у слові визначає його довжину. Ще такі слова називають кортежами, якщо $k = 2$, то – двійковими кортежами.

Кількість можливих слів довжиною n в k-ічному алфавіті дорівнює k^n. Так як кожному такому слову є можливість поставити у відповідність одне з k значень множини Y, то загальна кількість однорідних функцій від n змінних виражається числом k^{k^n}.

Якщо буквами алфавіту слугують числа від 0 до $k - 1$, то кожне слово $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ розглядається як запис n-розрядного числа в позиційній системі числення з основою k, тобто $x_1 k^{n-1} + x_2 k^{n-2} + \dots + x_n k^0 = q$. Числа $q = 0,1, \dots, k^{n-1}$ слугують номерами слів.

Приклад. Тризначний алфавіт {0,1,2} зі словами довжини 4 складається зі слів 0000, 0001, 0002, 0010, 0011, 0012,..., 2221, 2222, які відповідають десятковим числам від 0 до $80 = 2 \cdot 3^3 + 2 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3^1 + 2 \cdot 3^0$. Поставивши у відповідність кожному такому числу одну з букв алфавіту {0,1,2}, отримаємо функцію чотирьох змінних, при цьому кількість функцій обчислюється виразом 3^{81}.

Табличне зображення функцій

Таблиця містить k^n стовбців (кількість букв у слові) та k^{k^n} рядків (кількість функцій). Наприклад, для $k = 3$ та $n = 2$ матриця має вигляд

x_1	0 0 0 1 1 1 2 2 2
x_2	0 1 2 0 1 2 0 1 2
y_0	0 0 0 0 0 0 0 0 0
y_1	0 0 0 0 0 0 0 0 1
y_2	0 0 0 0 0 0 0 0 2
…	…
y_{2361}	0 1 0 0 1 2 2 0 1
…	…
y_{19682}	2 2 2 2 2 2 2 2 2

Булеві функції однієї змінної ($k = 2, n = 1, k^n = 2, k^{k^n} = 4$):

x	0	1	y
y_0	0	0	0
y_1	0	1	x
y_2	1	0	$\bar{x}$
y_3	1	1	1

(y_0 та y_3 - функції-константи, y_2 – заперечення).

Булеві функції двох змінних ($k = 2, n = 2, k^n = 4, k^{k^n} = 16$):

x_1 x_2	0 0 1 1 0 1 0 1	Позначка	Назва	Читання
y_0	0 0 0 0	0	Константа 0 (завжди хибно)	Тотожній 0
y_1	0 0 0 1	$x_1\, x_2$; $x_1 \wedge x_2$; $x_1 \& x_2$; $x_1 \cap x_2$	Кон'юнкція (добуток, перетин, логічне "і")	x_1 і x_2
y_2	0 0 1 0	$x_1 \leftarrow x_2$	Заперечення імплікації	x_1, але не x_2
y_3	0 0 1 1	x_1	Повторення першого аргументу	Як x_1
y_4	0 1 0 0	$x_2 \leftarrow x_1$	Заперечення оберненої імплікації	Не x_1, але x_2
y_5	0 1 0 1	x_2	Повторення другого аргументу	Як x_2
y_6	0 1 1 0	$x_1 + x_2$; $x_1 \oplus x_2$	Сума по модулю 2 (антиеквівалентність)	x_1 не як x_2 (або x_1 або x_2)
y_7	0 1 1 1	$x_1 \vee x_2$; $x_1 \cup x_2$	Диз'юнкція (добуток, об'єднання, логічне "або")	x_1 або x_2
y_8	1 0 0 0	$x_1 \downarrow x_2$; $\overline{x_1 \vee x_2}$	Стрілка Пірса; заперечення диз'юнкції	Ні x_1, ні x_2
y_9	1 0 0 1	$x_1 \leftrightarrow x_2$	Еквіваленція (рівнозначність)	x_1 як x_2
y_{10}	1 0 1 0	$\overline{x_2}$; $\neg x_2$	Заперечення другого аргументу	Не x_2

y_{11}	1 0 1 1	$x_2 \rightarrow x_1$	Обернена імплікації	Якщо x_2, то x_1
y_{12}	1 1 0 0	$\overline{x_1}$; $\neg x_1$	Заперечення першого аргументу	Не x_1
y_{13}	1 1 0 1	$x_1 \rightarrow x_2$	Імплікація	Якщо x_1, то x_2
y_{14}	1 1 1 0	$x_1 \mid x_2$; $\overline{x_1 \wedge x_2}$	Штрих Шеффера (заперечення кон'юнкції)	Не x_1 або не x_2
y_{15}	1 1 1 1	1	Константа 1 (завжди істино)	Тотожня 1

Залежність між булевими функціями

Шість з наведених функцій (константи y_0, y_{15}, повторення y_3, y_5, заперечення y_{10}, y_{12}) не залежать від x_1 та x_2. Ще дві y_4 та y_{11} (заперечення оберненої імплікації, обернена імплікації) відрізняються від відповідних y_2 та y_{13} (заперечення імплікації, імплікація) лише порядком розташування аргументів, тому не є самостійними. Як наслідок, з 16 булевих функцій двох змінних тільки вісім є оригінальними (y_1, y_2, y_6, y_7, y_8, y_9, y_{13}, y_{14}).

З таблиць видно, що між функціями існує залежність $y_i = \overline{y_{15-i}}$ $(i = 0, 1, \dots, 15)$ або навпаки. Тому для однієї змінної виконується залежність $x = \bar{\bar{x}}$, а для двох змінних –

$$x_1\, x_2 = \overline{x_1 \mid x_2},\ (y_1, \overline{y_{14}}),$$
$$x_1 \leftarrow x_2 = \overline{x_1 \rightarrow x_2},\ (y_2, \overline{y_{13}}),$$
$$x_1 \oplus x_2 = \overline{x_1 \leftrightarrow x_2},\ (y_6, \overline{y_9}),$$
$$x_1 \vee x_2 = \overline{x_1 \downarrow x_2},\ (y_7, \overline{y_8})$$

або навпаки.

З цих залежностей випливає, що будь-яка функція двох змінних виражається в аналітичній формі через сукупність шести функцій, що містить заперечення $\bar{x}$ і будь-яку функцію з кожної пари $\{y_0, y_{15}\}$, $\{y_1, y_{14}\}$, $\{y_2, y_{13}\}$, $\{y_6, y_9\}$, $\{y_7, y_8\}$. Наприклад, такою сукупністю можуть слугувати функції: константа 0, заперечення $\bar{x}$, кон'юнкція $x_1\, x_2$, диз'юнкція $x_1 \vee x_2$, еквіваленція $x_1 \leftrightarrow x_2$, імплікація $x_1 \rightarrow x_2$.

Побудована сукупність є надлишковою, бо еквіваленція та імплікація виражаються через інші функції: $x_1 \to x_2 = \overline{x_1} \vee x_2$; $x_1 \leftrightarrow x_2 = (x_1 \vee \overline{x_2})(\overline{x_1} \vee x_2) = x_1 x_2 \vee \overline{x_1}\,\overline{x_2}$ (а ще $x_1 \oplus x_2 = \overline{x_1}\, x_2 \vee \overline{x_2} x_1$). Це можна показати, побудувавши таблицю відповідності:

x_1	0 0 1 1	
x_2	0 1 0 1	
$\overline{x_1}$	1 1 0 0	
$\overline{x_2}$	1 0 1 0	
$\overline{x_1} \vee x_2$	1 1 0 1	$x_1 \to x_2$
$x_1 \vee \overline{x_2}$	1 0 1 1	
$(x_1 \vee \overline{x_2})(\overline{x_1} \vee x_2)$	1 0 0 1	$x_1 \leftrightarrow x_2$
$\overline{x_1}\, x_2$	0 1 0 0	
$\overline{x_2} x_1$	0 0 1 0	
$\overline{x_1}\, x_2 \vee \overline{x_2} x_1$	0 1 1 0	$x_1 \oplus x_2$

Таким чином, склад елементарних функцій зменшується до чотирьох: константа 0, заперечення $\bar{x}$, кон'юнкція $x_1\, x_2$, диз'юнкція $x_1 \vee x_2$. Цей склад дуже зручний і часто використовується на практиці. Але і він може бути зменшений за рахунок законів де Моргана та подвійного заперечення:
$x_1 \vee x_2 = \overline{\overline{x_1} \wedge \overline{x_2}}$; $x_1\, x_2 = \overline{\overline{x_1} \vee \overline{x_2}}$. Тобто булеві функції виражаються через заперечення і кон'юнкцію або через заперечення і диз'юнкцію. Ще більше, для запису будь-якої булевої функції достатньо однієї з двох елементарних функцій - стрілка Пірса або штрих Шеффера:
$\bar{x} = x \downarrow x = x|x$; $x_1\, x_2 = (x_1|x_2)|(x_1|x_2)$; $x_1 \vee x_2 = (x_1 \downarrow x_2) \downarrow (x_1 \downarrow x_2)$.
Перевіримо за таблицею відповідності:

x	0 1
$\bar{x}$	1 0
$x \downarrow x$	1 0
$x\|x$	1 0

x_1	0 0 1 1	
x_2	0 1 0 1	
$x_1\, x_2$	0 0 0 1	
$x_1\|x_2$	1 1 1 0	
$(x_1\|x_2)\|(x_1\|x_2)$	0 0 0 1	$x_1\, x_2$

$x_1 \vee x_2$ $x_1 \downarrow x_2$ $(x_1 \downarrow x_2) \downarrow (x_1 \downarrow x_2)$	0 1 1 1 1 0 0 0 0 1 1 1	$x_1 \vee x_2$

Булеві функції багатьох змінних

За допомогою суперпозиції функцій можна отримати більш складні функції від будь-якої кількості змінних. Наприклад, $(x_1 \vee x_2)(x_2 \to \overline{x_3})$:

x_1 x_2 x_3	0 0 0 0 1 1 1 1 0 0 1 1 0 0 1 1 0 1 0 1 0 1 0 1
$x_1 \vee x_2$ $\overline{x_3}$ $x_2 \to \overline{x_3}$ $(x_1 \vee x_2)(x_2 \to \overline{x_3})$	0 0 1 1 1 1 1 1 1 0 1 0 1 0 1 0 1 1 1 0 1 1 1 0 0 0 1 0 1 1 1 0

Формули алгебри висловлювань

Формули алгебри висловлювань будуються за такими правилами:

1) усі елементарні висловлювання та пропозиційні змінні є формулами;
2) якщо A та B – формули, то вирази $(A \wedge B), (A \vee B), (\neg A), (A \to B)$ – також формули;
3) інших формул, ніж побудовані за правилами 1) та 2), немає.

В математичній логіці формули прийнято позначати великими готичними літерами, але для зручності будемо використовувати великі латинські літери. В імплікації $p \to q$ p називають *антецедентом* або *посилкою*, а q – *консеквентом* або *висновком.*

Тавтологія

Тавтологією називається формула алгебри висловлювань, функція істинності (таблиця істинності) якої тотожно дорівнює 1. Їх ще називають *тотожно істинними* формулами або *законами* алгебри висловлювань.

Тавтології в логіці висловлювань грають засадничу роль. Деякі приклади тавтологій:

1) $(a \vee (\neg a))$ (*закон виключення третього*);
2) $\left(\neg\left(a \wedge (\neg a)\right)\right)$ (*закон виключення суперечності*);
3) $(a \to a)$ (*закон тотожності*);
4) $a \to (b \to a)$ (*додавання антецедента* або *verum ex quodlibet* – істина з нічого);
5) $\neg a \to (a \to b)$ (*ex falso quodlibet* – з хиби що завгодно);
6) $(a \to b)a \to b$ (*закон відокремлення* або *modus ponens*);
7) $(a \to b)\neg b \to \neg a$ (*modus tollens*; використовується при доведенні від супротивного);
8) $(a \to b)(b \to c) \to (a \to c)$ (*закон силогізму*);
9) $(a \to b) \to (\neg a \to \neg b)$ (*закон контрапозиції*).

Позначка того, що формула A є тавтології: $\vDash A$.

Суперечністю називається формула алгебри висловлювань, функція істинності (таблиця істинності) якої тотожно дорівнює 0.

Формулу, яка не є ні тавтологією, ні суперечністю, називають *нейтральною*.

Формулу, яка не є суперечністю, називають *виконуваною.*

Приклад. Довести, що висловлювання $(a \to b)(b \to c)a \to c$ є тавтологією.

Розв'язування. Наведена формула була побудована в попередньому прикладі і відповідає висловлюванню «Якщо вивчити математичну логіку, то якість підготовки випускника підвищиться. При покращенні підготовки випускника його шанси на ринку праці збільшуються. Математична логіка була вивчена. Як наслідок, шанси випускника на ринку праці підвищилися».

Побудуємо таблицю істинності:

$a\ b\ c$	$a \to b$	$b \to c$	$(a \to b)(b \to c)a$	$(a \to b)(b \to c)a \to c$
0 0 0	1	1	0	1
0 0 1	1	1	0	1
0 1 0	1	0	0	1

0 1 1	1	1	0	1
1 0 0	0	1	0	1
1 0 1	0	1	0	1
1 1 0	1	0	0	1
1 1 1	1	1	1	1

Одиниці останнього стовпця говорять про наявність тавтології. Ще один шлях – використання апарата булевої алгебри:

$$(a \to b)(b \to c)a \to c = (\neg a \vee b)(\neg b \vee c)a \to c = (\neg a \neg b \vee \neg ac \vee bc)a \to c =$$

$$abc \to c = \neg(abc) \vee c = \neg a \vee \neg b \vee \neg c \vee c = \neg a \vee \neg b \vee 1 = 1.$$

Тобто наведене твердження є тавтологією: $\vDash (a \to b)(b \to c)a \to c$.

Запитання для самоперевірки

1. Наведіть означення логічної функції.
2. Що називається однорідною логічною функцією?
3. Чому дорівнює кількість можливих слів довжиною n в k-ічному алфавіті?
4. Чому дорівнює кількість однорідних функцій від n змінних в k-ічному алфавіті?
5. Наведіть таблицю булевих функцій від однієї змінної.
6. Наведіть таблицю булевих функцій від двох змінних.
7. Які залежності існують між булевими функціями від двох змінних?
8. Скориставшись властивостями функцій, виразити всі функції через:

а) константу 0, заперечення, кон'юнкцію та диз'юнкцію;

б) заперечення і кон'юнкцію;

в) заперечення і диз'юнкцію;

г) стрілку Пірса;

д) штрих Шеффера.

9. Сформулюйте правила побудови формул алгебри висловлювань.
10. Що таке антецедент та консеквент?
11. Наведіть означення тавтології.
12. Як виглядає закон виключення третього?
13. Як виглядає закон виключення суперечності?
14. Як виглядає закон тотожності?
15. Як виглядає закон додавання антецедента?
16. Як виглядає закон ex falso quodlibet?
17. Як виглядає закон modus ponens?

18. Як виглядає закон modus tollens?
19. Як виглядає закон силогізму?
20. Як виглядає закон контрапозиції?
21. Наведіть означення суперечності.
22. Наведіть означення нейтральної формули.

4. Нормальні форми логічних формул

Двоїстість формул булевої алгебри

Означення. Булева функція $g(x_1, x_2, \dots, x_n)$називається *двоїстою* до функції $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, якщо $g(x_1, x_2, \dots, x_n) = \bar{f}(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_n})$. Позначка: f^*, а саме

$$f^*(x_1, x_2, \dots, x_n) = \bar{f}(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_n}).$$

Приклад двоїстості операцій диз'юнкції та кон'юнкції:

x_1	x_2	$x_1 \vee x_2$	$x_1 \wedge x_2$
0	0	0	0
1	0	1	0
0	1	1	0
1	1	1	1

Таблицю істинності функції f^* можна отримати з таблиці істинності функції f, якщо в останній інвертувати усі значення аргументів функції, а також усі значення в стовпчику значень функції. З цього випливає, що двоїстою до функції f^* є функція f: $(f^*)^* = f$. Приклад - функція заперечення, функція медіана $m(x, y, z) = xy \vee xz \vee yz$.

Принцип двоїстості можна сформулювати так: якщо в булевій формулі F, яка зображує булеву функцію f, замінити всі операції кон'юнкції на операції диз'юнкції, а операції диз'юнкції - на операції кон'юнкції, усі операції 0 замінити на 1, а всі 1 - на 0, то одержимо формулу F^*, яка зображує бульову функцію f^*, що є двоїстою до функції f.

Формула або функція, що є рівносильною до своєї двоїстої, називається *самодвоїстою.*

Якщо булеві функції f та g рівні між собою, то рівні відповідні їм двоїсті функції f^* та g^* і навпаки. Це означає, що формули ${F_1}^*$ і ${F_2}^*$, що двоїсті до рівносильних формул F_1 і F_2, також рівносильні. Цей висновок дає можливість для будь-якої тотожності $F_1 = F_2$ автоматично отримувати нову тотожність

$F_1{}^* = F_2{}^*$ для відповідних двоїстих формул. Такі тотожності можна назвати двоїстими. Наприклад, пари з властивостей логічних операцій, законів ідемпотентності, де Моргана, поглинання є двоїстими тотожностями.

Нормальні форми

Диз'юнктивна (кон'юнктивна) нормальна форма - це диз'юнкція (кон'юнкція) скінченної кількості різних членів, кожний з яких є кон'юнкцією (диз'юнкцією) окремих змінних або їх заперечень, що входять до кожного члену не більше одного разу.

Формула зводиться до нормальної форми наступним шляхом:
1) за допомогою законів де Моргана формула перетворюється так, щоб знаки заперечення стосувалися лише окремих змінних;
2) на основі властивості дистрибутивності формула зводиться до диз'юнкції кон'юнкцій або до кон'юнкції диз'юнкцій;
3) отриманні вирази скорочуються за рахунок використання законів поглинання та властивостей заперечення.

Приклад. $(xy \vee \bar{y}z)\overline{\bar{x}a} = \left|\begin{matrix}\text{закон}\\ \text{де Моргана}\end{matrix}\right|$

$$= (xy \vee \bar{y}z)(x \vee \bar{a}) = |\text{дистрибутивність}|$$

$$= (xy \vee \bar{y}z)x \vee (xy \vee \bar{y}z)\bar{a} = |\text{дистрибутивність}|$$

$= xyx \vee \bar{y}zx \vee xy\bar{a} \vee \bar{y}z\bar{a} = \left|\begin{matrix}\text{закон}\\ \text{ідемпотентності}\end{matrix}\right| = xy \vee x\bar{y}z \vee xy\bar{a} \vee \bar{y}z\bar{a}$ (диз'юнктивна нормальна форма) або

$$(xy \vee \bar{y}z)\overline{\bar{x}a} = \left|\begin{matrix}\text{закон}\\ \text{де Моргана}\end{matrix}\right|$$

$$= (xy \vee \bar{y}z)(x \vee \bar{a}) = |\text{дистрибутивність}|$$

$$= (x \vee \bar{y}z)(y \vee \bar{y}z)(x \vee \bar{a}) = |\text{дистрибутивність}|$$

$= (x \vee \bar{y})(x \vee z)(y \vee \bar{y})(y \vee z)(x \vee \bar{a}) = \left|\begin{matrix}\text{властивость}\\ \text{заперечення}\end{matrix}\right| = (x \vee \bar{y})(x \vee z)(y \vee z)(x \vee \bar{a})$ (кон'юнктивна нормальна форма).

Члени диз'юнктивної (кон'юнктивної) нормальної форми, які є елементарними кон'юнкціями (диз'юнкціями) k букв, називаються *мінітермами* *(макстермами) k-ого рангу.* А саме, xy - мінітерм другого рангу, $x\bar{y}z$ - мінітерм третього рангу, $x\vee\bar{y}$ - макстерм другого рангу.

Якщо початкова формула містить інші операції, то вони попередньо виражаються через диз'юнкцію, кон'юнкцію та заперечення, наприклад:

$$\overline{x \to (\bar{x} \leftrightarrow z)}(y \to \bar{z})\vee\overline{x \to z} = |\text{еквіваленція}| =$$

$$= \overline{x \to (\bar{x} \to z)(z \to \bar{x})}(y \to \bar{z})\vee\overline{x \to z} = \left|\begin{matrix}\text{імплікація,}\\ \text{подвійне заперечення}\end{matrix}\right| =$$

$$= \overline{\bar{\bar{x}}\vee(x\vee z)(\bar{z}\vee\bar{x})}(\bar{y}\vee\bar{z})\vee\overline{\bar{x}\vee z} = \left|\begin{matrix}\text{закон}\\ \text{де Моргана,}\\ \text{подвійне заперечення}\end{matrix}\right| =$$

$$= x\overline{(x\vee z)(\bar{x}\vee\bar{z})}(\bar{y}\vee\bar{z})\vee x\bar{z} = \left|\begin{matrix}\text{закон}\\ \text{де Моргана}\end{matrix}\right| =$$

$$= x(\overline{x\vee z}\vee\overline{\bar{x}\vee\bar{z}})(\bar{y}\vee\bar{z})\vee x\bar{z} = \left|\begin{matrix}\text{закон}\\ \text{де Моргана,}\\ \text{подвійне заперечення}\end{matrix}\right| =$$

$$= x(\bar{x}\bar{z}\vee xz)(\bar{y}\vee\bar{z})\vee x\bar{z} = |\text{дистрибутивність}| =$$

$$= (x\bar{x}\bar{z}\vee xxz)(\bar{y}\vee\bar{z})\vee x\bar{z} = \left|\begin{matrix}\text{ідемпотентність,}\\ \text{властивість заперечення,}\\ \text{властивість констант}\end{matrix}\right| =$$

$$= xz(\bar{y}\vee\bar{z})\vee x\bar{z} = |\text{дистрибутивність}| =$$

$$= xz\bar{y}\vee xz\bar{z}\vee x\bar{z} = \left|\begin{matrix}\text{властивість констант,}\\ \text{властивість заперечення}\end{matrix}\right| =$$

$$x\bar{y}z\vee x\bar{z}.$$

Досконалі нормальні форми

Якщо в кожному члені нормальної форми містяться всі змінні, то вона називається *досконалою нормальною формою*. Будь-яку змінну можна ввести, використовуючи властивості

$$x = x\cdot 1 = x(y\vee\bar{y}) = xy\vee x\bar{y},$$

$$x = x\vee 0 = x\vee y\bar{y} = (x\vee y)(x\vee\bar{y}).$$

Продовжуючи останній приклад, отримаємо досконалу диз'юнктивну форму: $x\bar{y}z \vee x\bar{z} = x\bar{y}z \vee x\bar{z}(y \vee \bar{y}) = x\bar{y}z \vee xy\bar{z} \vee x\bar{y}\bar{z}$.

Досконалу кон'юнктивну форму отримаємо з наступного прикладу:

$$\overline{x \vee y\bar{z}}(x \vee z) = \bar{x}\overline{y\bar{z}}(x \vee z) = \bar{x}(\bar{y} \vee z)(x \vee z) = (\bar{x} \vee y\bar{y})(\bar{y} \vee z \vee x\bar{x})(x \vee z \vee y\bar{y}) =$$
$$= (\bar{x} \vee y)(\bar{x} \vee \bar{y})(\bar{y} \vee z \vee x)(\bar{y} \vee z \vee \bar{x})(x \vee z \vee y)(x \vee z \vee \bar{y}) =$$
$$= (\bar{x} \vee y \vee z\bar{z})(\bar{x} \vee \bar{y} \vee z\bar{z})(\bar{y} \vee z \vee x)(\bar{y} \vee z \vee \bar{x})(x \vee z \vee y)(x \vee z \vee \bar{y}) =$$
$$= (\bar{x} \vee y \vee z)(\bar{x} \vee y \vee \bar{z})(\bar{x} \vee \bar{y} \vee z)(\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z})(\bar{y} \vee z \vee x)(\bar{y} \vee z \vee \bar{x})(x \vee z \vee y)(x \vee z \vee \bar{y}) =$$
$$= (\bar{x} \vee y \vee z)(\bar{x} \vee y \vee \bar{z})(\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z})(\bar{x} \vee \bar{y} \vee z)(x \vee \bar{y} \vee z)(x \vee z \vee y).$$

Рівносильність формул можна перевірити за таблицями істинності, але велика кількість змінних робить цю задача занадто складною. Інший шлях - звести кожну формулу до досконалої нормальної форми. При їх співпадінні робимо висновок про рівносильність формул.

Побудова формули функції

Для сукупності змінних $x_1, x_2, \dots, x_n$ вираз $\widetilde{x_1}\widetilde{x_2}\dots\widetilde{x_n}$ називають конституентою одиниці, а вираз $\widetilde{x_1} \vee \widetilde{x_2} \vee \dots \vee \widetilde{x_n}$ – конституентою нуля, де $\widetilde{x_i}$ означає x_i або $\bar{x_i}$. Такі конституенти одиниці (нуля) перетворюються у одиницю (нуль) тільки при одному відповідному наборі значень змінних, який отримується, якщо всі змінні прирівняти до одиниці (нуля), а їх заперечення – до нуля (одиниці). Наприклад, конституенті одиниці $\overline{x_1}\,\overline{x_2}x_3x_4$ відповідає набір 0011, а конституенті нуля $\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4$ – набір 1000.

Вірним є й зворотне твердження, яке покладене в основу побудови формули будь-якої функції, що представлена таблицею істинності. Для цього треба записати диз’юнкції (кон’юнкції) конституент одиниці (нуля), що відповідають наборам значень змінних, де функція дорівнює одиниці (нулю). Наприклад, функція задана таблицею істинності

x_1 x_2 x_3	0 0 0 0 1 1 1 1 0 0 1 1 0 0 1 1 0 1 0 1 0 1 0 1
y	1 0 1 1 0 0 1 0

Її можна представити як $y = \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3} \vee \overline{x_1}x_2\overline{x_3} \vee \overline{x_1}x_2x_3 \vee x_1x_2\overline{x_3}$ або

$y = (x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3})(\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3)(\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_3})(\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3})$.

Алгебра Жегалкіна

Алгебра Жегалкіна – це ще одна цікава алгебра, яка будується на додаванні по модулю 2, кон'юнкції та 1. Її основні властивості:

1) комутативність $x + y = y + x; xy = yx$;

2) асоціативність $x + (y + z) = (x + y) + z; x(yz) = (xy)z$;

3) дистрибутивність кон'юнкції відносно додавання $x(y + z) = xy + xz$ (дистрибутивність додавання відносно кон'юнкції не працює);

4) властивість констант $x \cdot 1 = x; x \cdot 0 = 0; x + 0 = x$.

Також для цієї алгебри працює закон приведення подібних $x + x = 0$ та закон ідемпотентності добутку $xx = x$.

За допомогою формул або таблиць істинності можна перевірити інші формули:

$$\bar{x} = 1 + x;\ \ x_1 \vee x_2 = x_1 + x_2 + x_1 x_2;\ x_1 + x_2 = x_1 \overline{x_2} \vee \overline{x_1} x_2.$$

Перші дві з них дозволяють перейти від будь-якої формули булевої алгебри до алгебри Жегалкіна, а за допомогою третьої - забезпечити зворотній перехід. Наприклад,

$$x(\bar{x} \vee y) = x\big((1 + x) + y + (1 + x)y\big) =$$
$$x(1 + x + y + y + xy) =$$
$$x(1 + x + xy) = x + xx + xxy = x + x + xy = xy;$$
$$1 + x + y + xy = 1 + x + y(1 + x) = (1 + x)(1 + y) = \bar{x}\bar{y}.$$

Інші булеві функції:

$$x_1 \to x_2 =$$
$$= \overline{x_1} \vee x_2 = 1 + x_1 + x_2 + (1 + x_1)x_2 = 1 + x_1 + x_2 + x_2 + x_1 x_2 =$$
$$= 1 + x_1 + x_1 x_2;$$
$$x_1 \leftrightarrow x_2 =$$
$$= (\overline{x_1} \vee x_2)(x_1 \vee \overline{x_2}) = (1 + x_1 + x_1 x_2)(1 + x_2 + x_1 x_2) =$$
$$= 1 + x_1 + x_1 x_2 + x_2 + x_1 x_2 + x_1 x_2 x_2 + x_1 x_2 + x_1 x_1 x_2 + x_1 x_2 x_1 x_2 =$$
$$= 1 + x_1 + x_2;$$
$$x_1 \leftarrow x_2 =$$
$$= \overline{x_1 \to x_2} = \overline{1 + x_1 + x_1 x_2} = 1 + 1 + x_1 + x_1 x_2 = x_1 + x_1 x_2;$$
$$x_1 | x_2 =$$
$$= \overline{x_1 x_2} = 1 + x_1 x_2;$$
$$x_1 \downarrow x_2 =$$
$$= \overline{x_1 \vee x_2} = \overline{x_1 + x_2 + x_1 x_2} = 1 + x_1 + x_2 + x_1 x_2.$$

Поліноми Жегалкіна

Будь-яка булева функція може бути зведена до канонічного многочлену, члени якого не містять числових коефіцієнтів і лінійні відносно будь-якої змінної. Для цього треба:

1) функцію звести до досконалої нормальної форми;
2) замінити всі знаки диз'юнкції знаками суми по модулю 2 (бо тільки одна елементарна кон'юнкція на кожному наборі перетворюється у одиницю, а решта дають нулі), заперечення змінних виразити через формулу $\bar{x} = 1 + x$;
3) розкрити дужки та використати закони $x + x = 0$ і $xx = x$.

Приклад. $(x \leftrightarrow y)(x|y) + (x \leftarrow y)y = (\bar{x}\bar{y} \vee xy)\overline{xy} + \overline{x \to y}y =$

$= (\bar{x}\bar{y} \vee xy)(\bar{x} \vee \bar{y}) + \overline{\bar{x} \vee y}y = \bar{x}\bar{y} + x\bar{y}y = \bar{x}\bar{y} + 0 = \bar{x}\bar{y} = (1 + x)(1 + y) =$

$= 1 + x + y + xy.$

Було використано вище наведену схему. А далі безпосереднє використання формул булевих функцій в алгебрі Жегалкіна:

$(x \leftrightarrow y)(x|y) + (x \leftarrow y)y = (1 + x + y)(1 + xy) + (x + xy)y =$

$= 1 + x + y + xy + xxy + yxy + xy + xyy =$

$= 1 + x + y + xy + xy + xy + xy + xy = 1 + x + y + xy.$

Переваги алгебри Жегалкіна полягають в арифметизації логіки, що дозволяє використовувати апарат перетворення алгебраїчних виразів. Недоліком вважається складність формул, особливо при великій кількості змінних.

Приклад.

$x_1 \vee x_2 \vee x_3 = x_1(x_2 \vee \overline{x_2})(x_3 \vee \overline{x_3}) \vee (x_1 \vee \overline{x_1})x_2(x_3 \vee \overline{x_3}) \vee (x_1 \vee \overline{x_1})(x_2 \vee \overline{x_2})x_3 =$

$= x_1x_2x_3 \vee x_1x_2\overline{x_3} \vee x_1\overline{x_2}x_3 \vee x_1\overline{x_2x_3} \vee x_1x_2x_3 \vee x_1x_2\overline{x_3} \vee \overline{x_1}x_2x_3 \vee \overline{x_1}x_2\overline{x_3} \vee x_1x_2x_3 \vee$

$\vee x_1\overline{x_2}x_3 \vee \overline{x_1}x_2x_3 \vee \overline{x_1x_2}x_3 =$

$= x_1x_2x_3 \vee x_1x_2\overline{x_3} \vee x_1\overline{x_2}x_3 \vee x_1\overline{x_2x_3} \vee \overline{x_1}x_2x_3 \vee \overline{x_1}x_2\overline{x_3} \vee \overline{x_1x_2}x_3 =$

$= x_1x_2x_3 + x_1x_2\overline{x_3} + x_1\overline{x_2}x_3 + x_1\overline{x_2x_3} + \overline{x_1}x_2x_3 + \overline{x_1}x_2\overline{x_3} + \overline{x_1x_2}x_3$

$= x_1x_2x_3 + x_1x_2(1 + x_3) + x_1(1 + x_2)x_3 + x_1(1 + x_2)(1 + x_3)$

$+ (1 + x_1)x_2x_3 + (1 + x_1)x_2(1 + x_3) + (1 + x_1)(1 + x_2)x_3 =$

$= x_1x_2x_3 + x_1x_2 + x_1x_2x_3 + x_1x_3 + x_1x_2x_3 + x_1 + x_1x_3 + x_1x_2$

$+ x_1x_2x_3 + x_2x_3 + x_1x_2x_3 + x_2 + x_2x_3 + x_1x_2 + x_1x_2x_3 + x_3 + x_2x_3$

$+ x_1x_3 + x_1x_2x_3 = x_1 + x_2 + x_3 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 + x_1x_2x_3.$

$x_1 \vee x_2 \vee x_3 =$

$= (x_1 + x_2 + x_1x_2) \vee x_3 =$

$$= x_1 + x_2 + x_1x_2 + x_3 + (x_1 + x_2 + x_1x_2)x_3 =$$
$$= x_1 + x_2 + x_3 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 + x_1x_2x_3.$$

Метод невизначених коефіцієнтів для побудови полінома Жегалкіна

Ще один метод побудови полінома Жегалкіна - метод невизначених коефіцієнтів. Розглянемо його на попередньому прикладі:

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 \vee x_2 \vee x_3 =$$
$$= a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_1x_2 + a_5x_1x_3 + a_6x_2x_3 + a_7x_1x_2x_3$$
$$f(0,0,0) = 0\colon a_0 = 0;$$
$$f(0,0,1) = 1\colon a_3 = 1;$$
$$f(0,1,0) = 1\colon a_2 = 1;$$
$$f(0,1,1) = 1\colon 1 + 1 + a_6 = 1; a_6 = 1;$$
$$f(1,0,0) = 1\colon a_1 = 1;$$
$$f(1,0,1) = 1\colon 1 + 1 + a_5 = 1; a_5 = 1;$$
$$f(1,1,0) = 1\colon 1 + 1 + a_4 = 1;\ a_4 = 1;$$
$$f(1,1,1) = 1\colon 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + a_7 = 1;\ a_7 = 1.$$

Підставляємо отримані значення коефіцієнтів у поліном:

$$x_1 \vee x_2 \vee x_3 = x_1 + x_2 + x_3 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 + x_1x_2x_3.$$

Запитання для самоперевірки

1. Наведіть означення двоїстої функції.
2. Сформулюйте принцип двоїстості.
3. Наведіть означення самодвоїстої функції.
4. Як виглядає диз'юнктивна нормальна форма (ДНФ)?
5. Як виглядає кон'юнктивна нормальна форма(КНФ) ?
6. Наведіть етапи побудови ДНФ та КНФ.
7. Як виглядає досконала диз'юнктивна нормальна форма (ДДНФ)?
8. Як виглядає досконала кон'юнктивна нормальна форма(ДКНФ) ?
9. Як побудувати ДДНФ та ДКНФ?
10. Як використовуються ДДНФ та ДКНФ для доведення рівносильності формул?
11. Наведіть означення конституент нуля та одиниці.
12. Як конституенти нуля та одиниці використовуються для побудови формули будь-якої функції, що представлена таблицею істинності?
13. Наведіть основні властивості алгебри Жегалкіна.

14. Наведіть основні етапи побудови полінома Жегалкіна.
15. Опишіть метод невизначених коефіцієнтів для побудови полінома Жегалкіна.

5. Функціональна повнота системи функцій

Типи булевих функцій

В алгебрі логіки з множини θ=2^{2^n} різних булевих функцій n змінних $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ виділяють наступні 5 типів булевих функцій (класів Поста):

1) Функції, що зберігають константу 0, тобто $f(0,0,\dots,0) = 0$. Таких функцій $\theta - 2^{2^n-1} = \theta - \frac{1}{2}2^{2^n} = \theta - \frac{1}{2}\theta = \frac{1}{2}\theta$. До таких функцій відносять диз'юнкцію, додавання по модулю 2 та кон'юнкцію, заперечення та імплікація не зберігають 0.

2) Функції, що зберігають константу 1, тобто $f(1,1,\dots,1) = 1$. Таких функцій $\theta - 2^{2^n-1} = \theta - \frac{1}{2}2^{2^n} = \theta - \frac{1}{2}\theta = \frac{1}{2}\theta$. До таких функцій відносять диз'юнкцію, імплікацію та кон'юнкцію, заперечення та додавання по модулю 2 не зберігають 1.

3) Самодвоїсті функції - функції, для яких виконується умова $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \bar{f}(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_n})$. Так як набори в таблицях відповідності є симетричними, то кількість незалежних наборів є $\frac{1}{2}2^n$, а самих функцій - $2^{\frac{1}{2}2^n} = \sqrt{\theta}$. Приклад - заперечення.

4) Лінійні функції - функції, які в алгебрі Жегалкіна можна представити поліномом Жегалкіна, що не містить добутку змінних, $a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + {} + a_nx_n$, де $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ дорівнюють 0 або 1. Так як коефіцієнтів $n+1$, то кількість різних лінійних многочленів, а значить і функцій, - 2^{n+1}. До таких функцій відносять заперечення та додавання по модулю 2, а диз'юнкція і кон'юнкція не є лінійними ($x_1 \vee x_2 = x_1 + x_2 + x_1x_2$).

5) Монотонні функції - функції, для яких виконується умова: для будь-яких наборів $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \le (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ при $\alpha_i \le \beta_i$ $(i = 1,2, \dots, n)$ вірною є нерівність $f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \le f(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$.

Усі 5 типів функцій є замкненими відносно операції суперпозиції, тобто суперпозиція будь-якої кількості булевих функцій даного типу є функцією того ж типу.

Функціональна повнота

Систему булевих функцій називають *функціонально повною,* якщо будь-яку булеву функцію можна зобразити через функції системи. Якщо в такій системі допускаються константи 0 та 1, то її називають *послаблено функціонально повною.* Говорять, що функціонально повна система функцій утворює базис в логічному просторі. Система функцій називається мінімально повним базисом, якщо видалення з неї будь-якої функції перетворює систему в неповну.

Теорема (критерій повноти Поста). Для того, щоб система булевих функцій була функціонально повною, необхідно і достатньо, щоб вона не містилася цілком у жодному з п'яти замкнених типів функцій.

Іншими словами, щоб система булевих функцій була функціонально повною, необхідно і достатньо, щоб вона містила: 1) хоча б одну функцію, яка не зберігає 0; 2) хоча б одну функцію, яка не зберігає 1; 3) хоча б одну несамодвоїсту функцію; 4) хоча б одну нелінійну функцію; 5) хоча б одну немонотонну функцію. В таблиці наведені властивості булевих функцій з позиції функціональної повноти:

Булева функція	Формули	Збереження 0	Збереження 1	Самодвоїстість	Лінійність	Монотонність
Константа 0	0	+	-	-	+	+
Константа 1	1	-	+	-	+	+
Заперечення	$\bar{x}$	-	-	+	+	-
Кон'юнкція	$x_1 x_2$	+	+	-	-	+
Диз'юнкція	$x_1 \vee x_2$	+	+	-	-	+
Імплікація	$x_1 \to x_2$	-	+	-	-	-
Еквіваленція	$x_1 \leftrightarrow x_2$	-	+	-	+	-
Заперечення імплікації	$x_1 \leftarrow x_2$	+	-	-	-	-
Сума по модулю 2	$x_1 + x_2$	+	-	-	+	-
Штрих Шеффера	$x_1 \vert x_2$	-	-	-	-	-
Стрілка Пірса	$x_1 \downarrow x_2$	-	-	-	-	-

Приклади функціонально повних систем - $\{\vee, \neg\}$, $\{\wedge, \neg\}$, $\{|\}$, $\{\downarrow\}$, послаблено функціонально повна - $\{\wedge, \oplus, 1\}$. Так як в останній системі $\bar{x} = x \oplus 1$, то вона зводиться до другої. Водночас $\{\vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\}$, $\{\vee, \wedge, \rightarrow\}$, $\{\vee, \wedge, \leftrightarrow\}$, $\{\vee, \wedge\}$ не є функціонально повними, так як неможливо виразити $\bar{x}$, бо усі функції на наборі (1;1) набувають тільки 1. Аналогічні твердження щодо систем $\{\vee, \oplus\}$, $\{\wedge, \oplus\}$, $\{\oplus, \leftrightarrow\}$ тощо.

Запитання для самоперевірки

1. Наведіть типи булевих функцій.
2. Опишіть функції, що зберігають константу 0.
3. Опишіть функції, що зберігають константу 1.
4. Опишіть самодвоїсті функції.
5. Опишіть лінійні функції.
6. Опишіть монотонні функції.
7. Яку систему булевих функцій називають функціонально повною? Чим відрізняється послаблено функціонально повна система функцій?
8. Сформулюйте критерій повноти Поста.
9. Наведіть приклади функціонально повних та послаблено функціонально повних систем функцій.

6. Логічний висновок на базі алгебри висловлень

Аксіоми

Аксіомами $A1 - A10$ числення висловлювань є такі формули:

$A1.\ a \rightarrow (b \rightarrow a)$;

$A2.\ (a \rightarrow b) \rightarrow ((a \rightarrow (b \rightarrow c)) \rightarrow (a \rightarrow c))$;

$A3.\ (a \wedge b) \rightarrow a$;

$A4.\ (a \wedge b) \rightarrow b$;

$A5.\ (a \rightarrow b) \rightarrow ((a \rightarrow c) \rightarrow \big(a \rightarrow (b \wedge c)\big))$;

$A6.\ a \rightarrow (a \vee b)$;

$A7.\ b \rightarrow (a \vee b)$;

$A8.\ (a \rightarrow c) \rightarrow ((b \rightarrow c) \rightarrow \big((a \vee b) \rightarrow c\big))$;

$A9.\ (a \rightarrow b) \rightarrow ((a \rightarrow \neg b) \rightarrow \neg a)$;

$A10.\ \neg\neg a \rightarrow a$.

Перевіримо першу аксіому $a \to (b \to a)$:

a	b	$b \to a$	$a \to (b \to a)$
0	0	1	1
0	1	0	1
1	0	1	1
1	1	1	1

$$a \to (b \to a) = \neg a \vee (\neg b \vee a) = \neg a \vee \neg b \vee a = 1 \vee \neg b = 1.$$

Самостійно перевірте інші гіпотези.

Рівносильність

Дві формули A і B алгебри висловлювань називаються *рівносильними*, якщо їм відповідає та сама функція істинності, і позначаються: $A = B$ або $A \Leftrightarrow B$. Рівносильність можна перевірити за таблицями істинності.

Але застосування таблиць істинності не може повністю закрити питання доведення рівносильності, бо, по-перше, при великій кількості змінних ця задача стає складною, а, по-друге, в алгебрі висловлювань найчастіше стоїть питання доведення рівносильності нескінченної кількості пар формул певного типу. А це потребує загальних міркувань та інших методів.

Теорема. Формули A і B алгебри висловлювань рівносильні, тоді і тільки тоді, коли формула $(A \to B)(B \to A)$ є тавтологією. Більш короткий запис - $A \sim B$.

Властивості рівносильності:

1) рефлексивність ($A \Leftrightarrow A$);
2) симетричність (якщо $A \Leftrightarrow B$, то $B \Leftrightarrow A$);
3) транзитивність (з $A \Leftrightarrow B$ та $B \Leftrightarrow C$ слідує, що $A \Leftrightarrow C$).

Логічне слідування

Формула B є логічним слідування формули A, якщо формула B істинна на всіх наборах змінних, для яких формула A істинна. Легко переконатися, що $A \Rightarrow B$, якщо $\vDash A \to B$.

Цю думку можна розповсюдити на більшу кількість посилок: $A_1, A_2, \ldots, A_n \Rightarrow B$, якщо $\vDash A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n \to B$.

Приклад. Перевірити коректність наведених логічних міркувань формальними методами.

а) Якщо Тетяна поїде до Ужгорода, то Олександра поїде до Одеси. Тетяна поїде до Ужгорода або до Трускавця. Якщо Тетяна поїде до Трускавця, то Єгор залишиться у Києві. Однак Єгор не залишиться у Києві. Отже, Олександра поїде до Одеси.

Розв’язування. Введемо позначки елементарних висловлювань: a - Тетяна поїде до Ужгорода, b - Олександра поїде до Одеси, c - Тетяна поїде до Трускавця; d - Єгор залишиться у Києві.

Тоді формули-посилки мають вигляд: $a \to b, a \vee c, c \to d, \neg d$. Роль висновку виконує b. Тоді треба перевірити твердження: $a \to b, a \vee c, c \to d, \neg d \vdash b$. Побудуємо таблиці істинності:

$a\ b\ c\ d$	$a \to b$	$a \vee c$	$c \to d$	$\neg d$	b
0 0 0 0	1	0	1	1	0
0 0 0 1	1	0	1	0	0
0 0 1 0	1	1	0	1	0
0 0 1 1	1	1	1	0	0
0 1 0 0	1	0	1	1	1
0 1 0 1	1	0	1	0	1
0 1 1 0	1	1	0	1	1
0 1 1 1	1	1	1	0	1
1 0 0 0	0	1	1	1	0
1 0 0 1	0	1	1	0	0
1 0 1 0	0	1	0	1	0
1 0 1 1	0	1	1	0	0
1 1 0 0	1	1	1	1	1
1 1 0 1	1	1	1	0	1
1 1 1 0	1	1	0	1	1
1 1 1 1	1	1	1	0	1

З таблиці видно, що існує лише один набір (1,1,0,0), на якому всі посилки істинні. На цьому наборі й висновок є істинним. Як наслідок, наведені міркування коректні.

б) Для того, щоб бути допущеним до іспитів, необхідно отримати залік з математичної логіки. Я отримаю цей залік, якщо навчуся розв’язувати логічні задачі. Я не навчився розв’язувати логічні задачі, що означає, що я не буду допущений до іспитів.

Розв’язування. Введемо позначки елементарних висловлювань: a – я допущений до іспитів, b - я отримав залік з математичної логіки, c – я навчився розв’язувати логічні задачі.

Тоді формули-посилки мають вигляд: $b \to a,\ c \to b, \neg c$. Роль висновку виконує $\neg a$. Тоді треба перевірити твердження: $b \to a,\ c \to b, \neg c \vdash \neg a$. Побудуємо таблиці істинності:

$a\ b\ c$	$b \to a$	$c \to b$	$\neg c$	$\neg a$
0 0 0	1	1	1	1
0 0 1	1	0	0	1
0 1 0	0	1	1	1
0 1 1	0	1	0	1
1 0 0	1	1	1	0
1 0 1	1	0	0	0
1 1 0	1	1	1	0
1 1 1	1	1	0	0

З таблиці видно, що існує набори (1,0,0) та (1,1,0), на яких всі посилки істинні, але на цих наборах висновок є хибним. Як наслідок, наведені міркування не є коректними.

Множину висловлювань називають *несуперечною (сумісною)*, якщо існує такий набір значень для пропозиційних змінних, на якому кон’юнкція висловлювань набуває значення 1. В іншому випадку – висловлювання несумісні.

Властивості слідування:

1) рефлексивність ($A \Rightarrow A$);
2) антисиметричність (з $A \Rightarrow B$ та $B \Rightarrow A$ слідує $A \Leftrightarrow B$);
3) транзитивність (з $A \Rightarrow B$ та $B \Rightarrow C$ слідує, що $A \Rightarrow C$).

Правила виведення

Правилами виведення є:

1) *правило підстановки.* Якщо A – вивідна формула (тавтологія), яка містить літеру a (тобто $A(a)$), то вивідною (тавтологією) є й формула $A(B)$, де B – довільна формула, що записується

$$\frac{A(a)}{A(B)};$$

2) *правило висновку (modus ponens)*. Якщо A та $A \to B$ – вивідні формули (тавтології), то вивідною (тавтологією) є й формула B, що записують

$$\frac{A, A \to B}{B}.$$

Аксіоми числення висловлювань разом із правилами виведення повністю визначають поняття теореми числення висловлювань.

Приклад. Показати, що $\vdash a \to a$ для довільної формули a.

Розв'язування. Візьмемо аксіому $A2. (a \to b) \to ((a \to (b \to c)) \to (a \to c))$ та в ній за правилом підстановки поміняємо c на a, а b на $b \to a$. Тоді:

$$(a \to (b \to a)) \to ((a \to \big((b \to a) \to a\big)) \to (a \to a)).$$

Проаналізуємо отриману формулу. Вираз в перших дужках є аксіомою $A1$. Тоді за правилом висновку (modus ponens) вивідною є й формула

$$\Big(a \to \big((b \to a) \to a\big)\Big) \to (a \to a).$$

Якщо в аксіомі $A1. (a \to (b \to a))$ замінити b на $b \to a$ за правилом підстановки, то отримаємо $\Big(a \to \big((b \to a) \to a\big)\Big)$, що є посилкою в останній формулі. Тоді за правилом висновку (modus ponens) з істинності

$\Big(a \to \big((b \to a) \to a\big)\Big)$ випливає істинність $(a \to a)$.

Тобто $\vdash a \to a$ (закон тотожності).

Інший спосіб подачі цієї інформації:

$F1: S^{b,c}_{b \to a, a} A2 = \big(a \to (b \to a)\big) \to \Bigg(\Big(a \to \big((b \to a) \to a\big)\Big) \to (a \to a)\Bigg)$

$F2: MP(A1, F1) = (\Big(a \to \big((b \to a) \to a\big)\Big) \to (a \to a))$

$F3: S^{b}_{b \to a} A1 = \Big(a \to \big((b \to a) \to a\big)\Big)$

$F4: MP(F3, F2) = (a \to a),$

де $S^a_B A$ реалізує правило підстановки $\frac{A(a)}{A(B)}$, а $MP(A, A \to B) = B$ реалізує правило висновку (modus ponens) $\frac{A, A \to B}{B}$ [8].

Приклад. Показати, що $\vdash a \wedge b \to b \wedge a$ для довільних формул a та b.

Розв'язування. Візьмемо аксіому $A5. (a \to b) \to ((a \to c) \to \big(a \to (b \wedge c)\big))$ та в ній за правилом підстановки поміняємо c на a, а a на $a \wedge b$. Тоді:

$$((a \wedge b) \to b) \to \Big(\big((a \wedge b) \to a\big) \to \big((a \wedge b) \to (b \wedge a)\big)\Big).$$

Проаналізуємо отриману формулу. Вираз в перших дужках є аксіомою $A4$. Тоді за правилом висновку (modus ponens) вивідною є й формула

$$\left((a \wedge b) \to a\right) \to \left((a \wedge b) \to (b \wedge a)\right).$$

Знову вираз в перших дужках є аксіомою $A3$. Тоді за правилом висновку (modus ponens) вивідною є й формула $(a \wedge b) \to (b \wedge a)$. Тобто $\vdash a \wedge b \to b \wedge a$.

Інший спосіб подачі цієї інформації:

$F1{:}\, S^{a,c}_{a \wedge b, a} A5 = ((a \wedge b) \to b) \to \left(\left((a \wedge b) \to a\right) \to \left((a \wedge b) \to (b \wedge a)\right)\right)$

$F2{:}\, MP(A4, F1) = \left(\left((a \wedge b) \to a\right) \to \left((a \wedge b) \to (b \wedge a)\right)\right)$

$F3{:}\, MP(A3, F2) = \left((a \wedge b) \to (b \wedge a)\right)$.

Приклад. Показати, що $a \to b, b \to c \vdash a \to c$ для довільних формул a та b.

Розв’язування.

$F1{:}\, a \to b$

$F2{:}\, b \to c$

$F3{:}\, S^{a,b}_{b \to c, a} A1 = (b \to c) \to (a \to (b \to c))$

$F4{:}\, MP(F2, F3) = a \to (b \to c)$

$F5{:}\, MP(F1, A2) = ((a \to (b \to c)) \to (a \to c))$

$F6{:}\, MP(F4, F5) = a \to c$.

Довели закон силогізму.

Приклад. Показати, що $a \to b, \neg\, b \vdash \neg a$ для довільних формул a та b.

Розв’язування.

$F1{:}\, a \to b$

$F2{:}\, \neg\, b$

$F3{:}\, S^{a,b}_{\neg b, a} A1 = \neg\, b \to (a \to \neg\, b)$

$F4{:}\, MP(F2, F3) = a \to \neg\, b$

$F5{:}\, MP(F1, A9) = ((a \to \neg\, b) \to \neg a)$

$F6{:}\, MP(F4, F5) = \neg a$.

Довели закон modus tollens (введення заперечення).

З цього доведення випливає закон контрапозиції $a \to b \vdash \neg\, b \to \neg a$.

Приклад. Показати, що $a, \neg a \ \vdash\ b$ для довільних формул a та b.

Розв’язування.

$F1{:}\, a$

$F2{:}\, S^{b}_{\neg b} A1 = a \to (\neg\, b \to a)$

$F3{:}\, MP(F1, F2) = (\neg\, b \to a)$

$F4{:}\, \neg a$

$F5{:}\, S^{a,b}_{\neg a, \neg b} A1 = \neg a \to (\neg\, b \to \neg a)$

$F6: MP(F4, F5) = (\neg b \to \neg a)$
$F7: S^{a,b}_{\neg b,a} A9 = (\neg b \to a) \to ((\neg b \to \neg a) \to \neg\neg b)$
$F8: MP(F3, F7) = ((\neg b \to \neg a) \to \neg\neg b)$
$F9: MP(F6, F8) = \neg\neg b$
$F10: S^{a}_{b} A10 = \neg\neg b \to b$
$F11: MP(F9, F10) = b.$
Довели закон «з хиби що завгодно».

Приклад. Показати, що $a \vdash \neg\neg a$ для довільних формул a.

Розв’язування.

$F1: a$
$F2: S^{b}_{\neg a} A1 = a \to (\neg a \to a)$
$F3: MP(F1, F2) = \neg a \to a$
$F4: MP(\text{закон тотожності}) = \neg a \to \neg a$
$F5: S^{a,b}_{\neg a,a} A9 = (\neg a \to a) \to ((\neg a \to \neg a) \to \neg\neg a)$
$F6: MP(F3, F5) = (\neg a \to \neg a) \to \neg\neg a$
$F7: MP(F4, F6) = \neg\neg a.$
Тобто $a \to \neg\neg a$.

Приклад. Показати, що $\neg(a \vee b) \vdash \neg a \neg b$ для довільних формул a та b.

Розв’язування.

$F1: MP(A6, \text{закон контрапозиції}) = \neg(a \vee b) \to \neg a$
$F2: MP(A7, \text{закон контрапозиції}) = \neg(a \vee b) \to \neg b$
$$F3: S^{a,b,c}_{\neg(a \vee b), \neg a, \neg b} A5 = (\neg(a \vee b) \to \neg a) \to ((\neg(a \vee b) \to \neg b) \to \big(\neg(a \vee b) \to (\neg a \wedge \neg b)\big))$$
$F4: MP(F3, F1) = (\neg(a \vee b) \to \neg b) \to \big(\neg(a \vee b) \to (\neg a \wedge \neg b)\big)$
$F5: MP(F4, F2) = \neg(a \vee b) \to (\neg a \wedge \neg b)$

Формалізація процесу виводу має велике теоретичне значення і дозволяє побудувати схему доведення, яка може бути реалізована обчислювальною технікою. Складність аксіоматичного підходу примушує застосовувати правила, які скорочують багатократне застосування основних правил виводу.

Запитання для самоперевірки

1. Наведіть аксіоми алгебри висловлювань. Доведіть кожну з них за допомогою таблиць істинності.
2. Наведіть означення рівносильних формул.
3. Наведіть властивості рівносильних формул.

4. Наведіть означення логічного слідування.
5. Наведіть властивості логічного слідування.
6. Наведіть правила виведення алгебри висловлювань.
7. Сформулюйте правило підстановки.
8. Сформулюйте правило правило висновку (modus ponens).
9. Доведіть закон тотожності, використовуючи аксіоми алгебри висловлювань.
10. Доведіть закон силогізму, використовуючи аксіоми алгебри висловлювань.
11. Доведіть закон modus tollens, використовуючи аксіоми алгебри висловлювань.
12. Доведіть закон ex falso quodlibet, використовуючи аксіоми алгебри висловлювань.
13. Доведіть комутативність кон'юнкції, використовуючи аксіоми алгебри висловлювань.

7. Дедуктивний метод. Секвенції і секвенційні форми для логіки висловлень

Дедуктивний метод

Більш швидким є спосіб доведення, що оснований на *теоремі дедукції*:

Якщо формула B є логічним слідуванням формул $A_1, A_2, \ldots, A_n$, тобто $A_1, A_2, \ldots, A_n \Rightarrow B$, то $\vDash A_1 \to (A_2 \to (\ldots (A_n \to B) \ldots))$.

Доведення. $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}, A_n \Rightarrow B$ означає, що $A_1 A_2 \ldots A_{n-1} A_n \to B$. Тоді за законами булевої алгебри: $\neg(A_1 A_2 \ldots A_{n-1} A_n) \vee B = \neg A_1 \vee \neg A_2 \vee \ldots \neg A_{n-1} \vee \neg A_n \vee B = \neg A_1 \vee \neg A_2 \vee \ldots \neg A_{n-1} \vee (A_n \to B) = \neg A_1 \vee \neg A_2 \vee \ldots (A_{n-1} \to (A_n \to B)) = \cdots = A_1 \to (A_2 \to (\ldots (A_n \to B) \ldots))$. Так як початкова формула є тавтологією, то і рівносильна їй також є тавтологією.

З теореми дедукції та означення логічного слідування випливають наступні твердження:

1) $A_1, A_2, \ldots, A_n \Rightarrow A_i$ $(i = 1,2, \ldots, n)$, тобто будь-яка сукупність посилок є логічним слідуванням цієї сукупності;
2) якщо $A_1, A_2, \ldots, A_n \Rightarrow B_j$ $(j = 1,2, \ldots, m)$, а $B_1, B_2, \ldots, B_m \Rightarrow B$, то $A_1, A_2, \ldots, A_n \Rightarrow B$.

За допомогою цих правил можна представити доведення того, що формула B є логічним слідуванням формул $A_1, A_2, \ldots, A_n$ у вигляді ланцюга формул, останньою з яких буде B. Проміжні формули $B_1, B_2, \ldots, B_m$ отримуються на основі відомих законів, аксіом та еквівалентностей.

Приклад. Довести, що $(a \lor b) \to c,\ c \to (d \lor e), e \to f, \neg d \neg f \vdash \neg a.$

Розв'язування. За законом силогізму з перших двох посилок випливає, що $(a \lor b) \to (d \lor e)$. З останньої посилки за аксіомами 3 та 4 випливає $\neg d$ та $\neg f$. З посилок $e \to f$ та $\neg f$ за правилом modus tollens маємо $\neg e$. З $\neg d$ та $\neg e$ за законом де Моргана $\neg d \neg e = \neg(d \lor e)$, що разом з $(a \lor b) \to (d \lor e)$ за правилом modus tollens дає $\neg(a \lor b)$, звідки за законом де Моргана $\neg a \neg b$. Тоді з останньої формули за аксіомою 3 матимемо $\neg a$.

Застосуємо аксіоматичний підхід:

$F1: (a \lor b) \to c$

$F2: c \to (d \lor e)$

$F3: S^{a,b}_{(c \to d \lor e), a \lor b} A1 = (c \to d \lor e) \to \big(a \lor b \to (c \to d \lor e)\big)$

$F4: MP(F2, F3) = a \lor b \to (c \to d \lor e)$

$F5: S^{a,b,c}_{a \lor b, c, d \lor e} A2 = (a \lor b \to c) \to ((a \lor b \to (c \to d \lor e)) \to (a \lor b \to d \lor e))$

$F6: MP(F1, F5) = ((a \lor b \to (c \to d \lor e)) \to (a \lor b \to d \lor e))$

$F7: MP(F4, F6) = (a \lor b \to d \lor e)$

$F8: \neg d \neg f$

$F9: S^{a,b}_{\neg d, \neg f} A3 = (\neg d \neg f) \to \neg d$

$F10: MP(F8, F9) = \neg d$

$F11: S^{a,b}_{\neg d, \neg f} A4 = (\neg d \neg f) \to \neg f$

$F12: MP(F8, F11) = \neg f$

$F13: e \to f$

$F14: S^{a,b}_{\neg f, e} A1 : \neg f \to (e \to \neg f)$

$F15: MP(F12, F14) = e \to \neg f$

$F16: S^{a,b}_{e,f} A9 = (e \to f) \to ((e \to \neg f) \to \neg e)$

$F17: MP(F16, F13) = (e \to \neg f) \to \neg e$

$F18: MP(F15, F17) = \neg e$

$F19: S^{a,b}_{\neg d, e \to f} A1 = \neg d \to ((e \to f) \to \neg d)$

$F20: MP(F10, F19) = (e \to f) \to \neg d$

$F21: S^{a,b}_{\neg d, e \to f} A1 = \neg e \to ((e \to f) \to \neg e)$

$F22: MP(F18, F21) = (e \to f) \to \neg e$

$F23: S^{a,b,c}_{e \to f, \neg d, \neg e} A5 = ((e \to f) \to \neg d) \to (((e \to f) \to \neg e) \to ((e \to f) \to \neg d \neg e))$

$F24: MP(F20, F23) = ((e \to f) \to \neg e) \to ((e \to f) \to \neg d \neg e)$

$F25: MP(F22, F24) = (e \to f) \to \neg d \neg e$

$F26: MP(F13, F25) = \neg d \neg e$

$F27\colon S^{a,b}_{\neg d,\neg e}A3 = \neg d\neg e \to \neg d$

$F28\colon S^{a,b}_{\neg d,\neg e}A4 = \neg d\neg e \to \neg e$

$F29\colon MP(F27, \text{закон контрапозиції}) = d \to \neg(\neg d\neg e)$

$F30\colon MP(F28, \text{закон контрапозиції}) = e \to \neg(\neg d\neg e)$

$$F31\colon S^{a,b,c}_{d,e,\neg(\neg d\neg e)}A8 = (d \to \neg(\neg d\neg e)) \to \big(\big(e \to \neg(\neg d\neg e)\big) \to ((d \vee e) \to \neg(\neg d\neg e))$$

$F32\colon MP(F31, F29) = \big(e \to \neg(\neg d\neg e)\big) \to ((d \vee e) \to \neg(\neg d\neg e))$

$F33\colon MP(F32, F30) = (d \vee e) \to \neg(\neg d\neg e)$

$F34\colon MP(F33, \text{закон контрапозиції, обернене до } A10) = \neg d\neg e \to \neg(d \vee e)$

$F35\colon MP(F34, F26) = \neg(d \vee e)$

$F36\colon S^{a,b}_{\neg(d\vee e)\,,(a\vee b)}A1 = \neg(d \vee e) \to ((a \vee b) \to \neg(d \vee e))$

$F37 MP(F36, F35) = (a \vee b) \to \neg(d \vee e)$

$F38\colon S^{a,b}_{a\vee b\,,d\vee e}A9 = ((a \vee b) \to (d \vee e)) \to (((a \vee b) \to \neg(d \vee e)) \to \neg(a \vee b))$

$F39\colon MP(F38, F7) = ((a \vee b) \to \neg(d \vee e)) \to \neg(a \vee b)$

$F40\colon MP(F39, F37) = \neg(a \vee b)$

$F41\colon MP(A6, \text{закон контрапозиції }) = \neg(a \vee b) \to \neg a$

$F42\colon MP(A7, \text{закон контрапозиції }) = \neg(a \vee b) \to \neg b$

$$F43\colon S^{a,b,c}_{\neg(a\vee b),\neg a,\neg b}A5 = (\neg(a \vee b) \to \neg a) \to ((\neg(a \vee b) \to \neg b) \to \big(\neg(a \vee b) \to (\neg a\neg b)\big))$$

$F44\colon MP(F43, F41) = (\neg(a \vee b) \to \neg b) \to \big(\neg(a \vee b) \to (\neg a\neg b)\big)$

$F45\colon MP(F44, F42) = \neg(a \vee b) \to (\neg a\neg b)$

$F46\colon MP(F45, F40) = \neg a\neg b$

$F47\colon S^{a,b}_{\neg a,\neg b}A3 = \neg a\neg b \to \neg a$

$F48\colon MP(F47, F46) = \neg a.$

Секвенції і секвенційні форми

Продовжимо розгляд прикладу про користь вивчення математичної логіки: $(a \to b)(b \to c)a \to c$. Очевидно, формула не є тавтологією, якщо вона приймає значення 0 хоча б на одному наборі значень змінних. Цим твердженням можна скористатися для доведення тавтологій методом «зворотного судження», який полягає у пошуку таких змінних, при яких формула буде хибною. Так, у прикладі, що розглядається, формула буде хибною, коли $c = 0$, а $(a \to b)(b \to c)a = 1$, а це матиме місце, коли $a \to b = 1$, $b \to c = 1$, $a = 1$ одночасно. Якщо $a = 1$, то $a \to b = 1$ при $b = 1$. Тоді $b \to c =$

1 при $c = 1$, ще протирічить початковому твердженню про $c = 0$. Тобто немає такого набору значень змінних, при якому формула буде хибною. А це означає, що вона є тавтологією.

Наведені судження характеризують ідею *секвенційного числення* логіки висловлювань, в основі якого лежить пошук протиріччя. Розглянемо твердження $A_1, A_2, \ldots, A_n \vDash B$. За означенням воно буде істинним тоді і тільки тоді, коли для всіх значень змінних з істинності $A_1, A_2, \ldots, A_n$ випливає істинність B. Доведення цього факту пропонується виконувати методом від супротивного. Припустимо, що твердження є хибним, тобто існує набір значень змінних такий, що $A_1, A_2, \ldots, A_n$ є істинними, а B – хибним. Якщо при перетвореннях отримаємо суперечність (якась формула буде одночасно істинною та хибною), то припущення буде спростованим, а твердження $A_1, A_2, \ldots, A_n \vDash B$ – істинним. Більш загальний вигляд наслідкового твердження - $A_1, A_2, \ldots, A_n \vDash B_1, B_2, \ldots, B_m$ або для секвенційних методів - $A_1, A_2, \ldots, A_n \to B_1, B_2, \ldots, B_m$, які називаються *секвенціями*.

Секвенційне доведення може бути представлено у вигляді дерева секвенцій (корінь – остання операція, в індексах – значення формул, жирним шрифтом виділені формули, відносно яких відбувається утворення нових гілок). Побудуємо дерево секвенцій для прикладу про математичну логіку $(a \to b)(b \to c)a \to c$:

$$\dfrac{(\boldsymbol{a} \to \boldsymbol{b})(\boldsymbol{b} \to \boldsymbol{c})\boldsymbol{a}_{(\mathbf{1})}, c_{(0)}}{\dfrac{\boldsymbol{a} \to \boldsymbol{b}_{(\mathbf{1})}, b \to c_{(1)}, a_{(1)}, c_{(0)}}{\dfrac{a_{(1)}, b_{(1)}, \boldsymbol{b} \to \boldsymbol{c}_{(\mathbf{1})}, a_{(1)}, c_{(0)}}{\dfrac{a_{(1)}, b_{(1)}, c_{(1)}, c_{(0)}}{\times} \quad \dfrac{a_{(1)}, b_{(1)}, b_{(0)}}{\times}} \quad \dfrac{a_{(0)}, b \to c_{(1)}, a_{(1)}, c_{(0)}}{\times}}}$$

Знак «×» означає замкнену секвенцію (наявність протиріччя). Якщо всі секвенції замкнені, то доведення від супротивного виконано.

Перевіримо на коректність методом секвенцій твердження з прикладу про умови допуску до іспитів, тобто розглянемо твердження $b \to a,\ c \to b, \neg c \vdash \neg a$:

$$\dfrac{\boldsymbol{b} \to \boldsymbol{a},\ \boldsymbol{c} \to \boldsymbol{b}, \neg\boldsymbol{c}_{(\mathbf{1})}, \neg a_{(0)}}{\dfrac{b \to a_{(1)}, \boldsymbol{c} \to \boldsymbol{b}_{(\mathbf{1})}, c_{(0)}, a_{(1)}}{\dfrac{c_{(1)}, c_{(0)}}{\times} \quad \dfrac{\boldsymbol{b} \to \boldsymbol{a}_{(\mathbf{1})}, c_{(0)}, b_{(0)}, c_{(0)}, a_{(1)}}{\dfrac{b_{(1)}, b_{(0)}}{\times} \quad \dfrac{b_{(0)}, a_{(0)}, a_{(1)}}{\times} \quad \dfrac{b_{(0)}, a_{(1)}, c_{(0)}}{!}} \quad \dfrac{\boldsymbol{b} \to \boldsymbol{a}_{(\mathbf{1})}, c_{(0)}, b_{(1)}, c_{(0)}, a_{(1)}}{\dfrac{b_{(0)}, b_{(1)}}{\times} \quad \dfrac{b_{(1)}, a_{(1)}, c_{(0)}}{!}}}}$$

Знак «!» означає відсутність протиріччя, тобто маємо контрприклади $a_{(1)}, b_{(0)}, c_{(0)}$ та $a_{(1)}, b_{(1)}, c_{(0)}$ щодо початкового твердження.

Основні проблеми числення висловлювань

Теорема. Будь-яка теорема числення висловлювань є тотожно істинним висловлюванням.

Доведення. Доведемо, що усі аксіоми, правило підстановки та правило висновку перетворюють тотожно істинні формули в тотожно істинні.

а) Тотожну істинність усіх аксіом можна перевірити шляхом побудови таблиць істинності.

б) Якщо $A(x_1, x_2, \dots, x_n)$ - тотожно істинна формула, то для довільного набору значень $a_1, a_2, \dots, a_n$ її пропозиційних змінних висловлювання $A(a_1, a_2, \dots, a_n)$ буде істинним. Тоді тотожно істинною буде й будь-яка формула, що отримана шляхом підстановки в формулі A замість змінних $x_1, x_2, \dots, x_n$ довільних формул $B_1, B_2, \dots, B_n$, бо останні можуть приймати значення тільки 0 та 1.

в) Правило висновку (modus ponens) : якщо A та $A \to B$ - тотожно істинні формули, то й B - тотожно істинна. Припустимо, що існує набір значень змінних, на якому формула B приймає значення 0. Тоді з формули $A \to B$ маємо $1 \to 0$ (бо A – тавтологія), що є хибою і суперечить твердженню про тотожну істинність формули $A \to B$.

З наведених доведень випливає, що усі теореми числення висловлювань є тотожно істинним висловлюванням.

Обернена теорема. Будь-яка тотожно істинна формула алгебри висловлювань є теоремою числення висловлювань.

На базі цих теорем розв'язуються три проблеми числення висловлювань: несуперечності, повноти та розв'язності.

Проблема несуперечності. Числення висловлювань є несуперечним, якщо з аксіом неможливо вивести як формулу A, так і формулу $\neg A$.

Дійсно, якщо A – вивідна формула, то вона є тотожно істинною (за прямою теоремою), тоді $\neg A$ – тотожно хибна, тобто не є теоремою.

Проблема повноти виникає при постановці питання: чи вистачає аксіом та правил виводу для того, що можна було вивести будь-яку тотожно істинну формулу.

Числення висловлювань є повним, що випливає з оберненої теореми.

Проблема розв'язності відповідає на питання про існування метода, який дозволяє за скінченну кількість кроків з'ясувати, чи є формула A вивідною, чи ні. На це питання можна відповісти, побудувавши для формули A таблицю істинності. Якщо останній стовпчик буде містити лише одиниці, формула є вивідною, якщо - ні, то – ні. Ці операції можна виконати за скінченну кількість кроків.

Система аксіом числення висловлювань є *незалежною*, якщо жодну з них не можна вивести з інших. Запропонована система аксіом є незалежною.

Запитання для самоперевірки

1. Сформулюйте та доведіть теорему дедукції.
2. Сформулюйте основну ідею секвенційного числення.
3. Опишіть дерево секвенцій.
4. Наведіть основні проблеми числення висловлювань.
5. Доведіть теорему про тотожну істинність будь-якої теореми.
6. Опишіть проблему несуперечності.
7. Опишіть проблему повноти.
8. Опишіть проблему розв'язності.
9. Наведіть означення незалежної системи аксіом числення висловлювань.

8. Логіка предикатів. Квантори

Поняття предиката

Зазвичай висловлювання виражають властивості одного або кількох об'єктів. Змістовна частина висловлювання є визначальною властивістю сукупності об'єктів і називається *предикатом*. Наприклад, висловлювання «Іваненко – відмінник» є істинним або хибним в залежності від оцінок, які отримає особа, а предикат «x– відмінник» визначає підмножину відмінників на деякій множині осіб (студенти групи, факультету, вищого навчального закладу).

У наведеному прикладі «Іваненко» є підметом, а «відмінник» є присудком, тобто виражає певну його властивість. У латинській граматиці присудок називається предикатом (таким чином цей термін опинився в математичній логіці). В логіці предикатів саме присудок-властивість є головною частиною.

Ще приклади предикатів: «x – парне число», «y та z – одногрупники», «Студент x в таблиці рейтингів групи знаходиться між студентами y та z». Наведені приклади ще називають *пропозиційними формами* та можуть містити кілька змінних.

Узагальнене означення предиката має вигляд: *n-місним предикатом* $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ при $x_1 \in M_1, x_2 \in M_2, \dots, x_n \in M_n$ називається довільна функція виду $M_1 \times M_2 \times \dots \times M_n \to B$, де $B = \{0, 1\}$ – булевий алфавіт, $x_1, x_2, \dots, x_n$ – *предметні змінні,* або *терми* предиката P.

Множина елементів $(a_1 \in M_1, a_2 \in M_2, \dots, a_n \in M_n)$ таких, що $P(a_1, a_2, \dots, a_n) = 1$, називається *областю істинності* предиката P, а сам предикат називають істинним, інакше – хибним.

При $n = 1$ предикат $P(x)$ називають *одномісним,* або *унарним*, при $n = 2$ предикат $P(x, y)$ - *двомісним,* або *бінарним*, при $n = 3$ предикат $P(x, y, z)$ - *тримісним,* або *тернарним.*

Якщо всі аргументи $x_1, x_2, \dots, x_n$ прийняли конкретні значення, то предикат перетворюється у висловлювання, яке можна розглядати як 0-місний предикат.

Досить часто $M_1 = M_2 = \cdots = M_n = M$, де M – предметна область або *універсальна множина*.

Логіка предикатів

З елементарних предикатів та логічних операцій можна будувати складні предикати або *предикатні формули*.

Нехай $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ та $Q(x_1, x_2, \dots, x_n)$ - n-місні предикати на множині M.

Кон'юнкцією $P(x_1, x_2, \dots, x_n) \wedge Q(x_1, x_2, \dots, x_n)$ предикатів називають предикат $R(x_1, x_2, \dots, x_n)$, що набуває значення 1 тільки на тих наборах значень термів, на яких обоє предикати перетворюються у 1. Область істинності предиката $R(x_1, x_2, \dots, x_n) = P(x_1, x_2, \dots, x_n) \wedge Q(x_1, x_2, \dots, x_n)$ є перетином областей істинності предикатів $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ та $Q(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Диз'юнкцією $P(x_1, x_2, \dots, x_n) \vee Q(x_1, x_2, \dots, x_n)$ предикатів називають предикат $T(x_1, x_2, \dots, x_n)$, що набуває значення 1 тільки на тих наборах значень термів, на яких або предикат $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ перетворюється у 1, або предикат $Q(x_1, x_2, \dots, x_n)$ перетворюється у 1. Область істинності предиката $T(x_1, x_2, \dots, x_n) = P(x_1, x_2, \dots, x_n) \vee Q(x_1, x_2, \dots, x_n)$ є об'єднанням областей істинності предикатів $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ та $Q(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Запереченням предиката $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ є предикат $\neg P(x_1, x_2, \dots, x_n)$, що набуває значення 1 тільки на тих наборах значень термів, на яких предикат $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ перетворюється у 0. Область істинності предиката $\neg P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ є доповненням області істинності предиката $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Імплікацією $P(x_1, x_2, \dots, x_n) \to Q(x_1, x_2, \dots, x_n)$ предикатів називають предикат $S(x_1, x_2, \dots, x_n)$, що набуває значення 1 тільки на тих наборах значень термів, на яких або заперечення предиката $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ перетворюється у 1, або предикат $Q(x_1, x_2, \dots, x_n)$ перетворюється у 1. Область істинності предиката $S(x_1, x_2, \dots, x_n) = P(x_1, x_2, \dots, x_n) \to Q(x_1, x_2, \dots, x_n)$ є об'єднанням доповнення області істинності предиката $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ та області істинності предиката $Q(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Еквіваленцією $P(x_1, x_2, \dots, x_n) \sim Q(x_1, x_2, \dots, x_n)$ предикатів називають предикат $H(x_1, x_2, \dots, x_n)$, що набуває значення 1 тільки на тих наборах значень термів, на яких предикати $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ та $Q(x_1, x_2, \dots, x_n)$ набувають рівних значень. Область істинності предиката $H(x_1, x_2, \dots, x_n) = P(x_1, x_2, \dots, x_n) \sim Q(x_1, x_2, \dots, x_n)$ є перетином областей істинності предикатів $P(x_1, x_2, \dots, x_n) \to Q(x_1, x_2, \dots, x_n)$ та $Q(x_1, x_2, \dots, x_n) \to P(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Приклад. Побудувати таблицю одномісного предиката «x – більше 3 і менше 10» на множині $M = \{1,2, \dots ,15\}$.

Розв'язування.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$P(x)$	0	0	0	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0

Приклад. Побудувати таблицю двомісного предиката «$x^2 + y^2 < 4$» де $x, y \in M = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$.

Розв'язування.

$x \backslash y$	-2	-1	0	1	2
-2	0	0	0	0	0
-1	0	1	1	1	0
0	0	1	1	1	0
1	0	1	1	1	0
2	0	0	0	0	0

Приклад. Нехай на універсальній множині людей предикат $F(x, y)$ означає «x – батько y», предикат $M(x, y)$ означає «x – мати y», $W(x)$ означає «x – жінка". Записати через $F(x, y)$, $M(x, y)$ та $W(x)$ предикат «x та y – сестри».

Розв'язування. $W(x) \land W(y) \land (M(z_1, x) \land M(z_1, y) \lor F(z_2, x) \land F(z_2, y))$.

Квантори

Квантори – додаткові спеціальні операції.

Квантор загальності - $\forall$ (перевернута перша буква слова «all»). Висловлювання $\forall x\ P(x)$ читають: «для всіх x виконується $P(x)$».

Квантор існування - $\exists$ (розвернута перша буква слова «exist»). Висловлювання $\exists x\ P(x)$ читають: «існує такий x, що $P(x)$ має місце».

Приклади застосування кванторів:

1) $\forall x\ ((x > 2) \to (x > 1))$;
2) $\exists x\ ((x > 1) \to (x > 2))$;
3) $\forall x\ \exists y\ (x > y)$;
4) $\exists y\ \forall x\ (x > y)$.

Серед наведених прикладів четверте висловлювання є хибним.

Область дії квантора – це вираз, до якого відносять відповідний квантор. Його розташовують зразу після квантора та беруть у дужки. Інколи їх можна опустити, якщо це не викликає протиріччя.

Перехід від предикату $P(x)$ до $\forall x\ P(x)$ та $\exists x\ P(x)$ називається зв'язування змінної x (навішуванням квантора на змінну x або на предикат, квантофікацією змінної x). Таку змінну називають *зв'язною* (в іншому випадку – вільна). Зв'язна змінна перестає бути змінною в класичному розумінні (коли замість неї підставляємо числа та отримуємо істинні або хибні висловлювання). Вона виконує роль ідентифікатора терма. Тому можливо змінювати позначку зв'язної змінної ($\forall x\ P(x), \forall y\ P(y), \forall z\ P(z)$), що не впливає на істинність виразу.

Застосування квантора до *n*-місного предиката перетворює його на (*n*-1)-місний предикат. Назагал застосування k кванторів до *n*-місного предиката перетворює його на (*n*- *k*)-місний предикат. Наприклад, $\forall x\ P(x,y)$, $\exists x\ P(x,y)$, $\forall y\ P(x,y)$, $\exists y\ P(x,y)$ є одномісними предикатами, а $\forall x\ \forall y\ P(x,y)$, $\exists x\ \exists y\ P(x,y)$, $\exists x\ \forall y\ P(x,y)$, $\forall x\ \exists y\ P(x,y)$ є висловлюваннями.

Порядок слідування однойменних кванторів не має значення ($\forall x\ \forall y\ P(x,y)$ та $\forall y\ \forall x\ P(x,y)$), чого не можна сказати про різні квантори (як приклад, $\forall x\ \exists y\ ((x > y)$ та $\exists y\ \forall x\ ((x > y))$.

Приклад. Розглянемо двомісний предикат $P(x,y) = x^2 + y^2 < 4$, де $x, y \in M = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$

$x\backslash y$	-2	-1	0	1	2

-2	0	0	0	0	0
-1	0	1	1	1	0
0	0	1	1	1	0
1	0	1	1	1	0
2	0	0	0	0	0

та побудуємо відповідні одномісні предикати та висловлювання.

Розв'язування. Якщо зв'язати одну зі змінних, то отримаємо одномісні предикати:

y	$\forall x\, P(x,y)$	y	$\exists x\, P(x,y)$	x	$\forall y\, P(x,y)$	x	$\exists y\, P(x,y)$
-2	0	-2	0	-2	0	-2	0
-1	0	-1	1	-1	0	-1	1
0	0	0	1	0	0	0	1
1	0	1	1	1	0	1	1
2	0	2	0	2	0	2	0

Якщо зв'язати ще одну змінну, то отримаємо висловлювання:

$\forall x(\forall y\, P(x,y)) = 0,$ $\forall y(\forall x\, P(x,y)) = 0,$

$\exists x(\exists y\, P(x,y)) = 1,$ $\exists y(\exists x\, P(x,y)) = 1,$

$\exists x(\forall y\, P(x,y)) = 0,$ $\exists y(\forall x\, P(x,y)) = 0,$

$\forall x(\exists y\, P(x,y)) = 0,$ $\forall y(\exists x\, P(x,y)) = 0.$

Запитання для самоперевірки

1. Наведіть означення предиката. Які бувають предикати?
2. Опишіть предметну область предиката.
3. Опишіть диз'юнкцію предикатів.
4. Опишіть кон'юнкцію предикатів.
5. Опишіть заперечення предиката.
6. Опишіть імплікацію предикатів.
7. Опишіть квантор загальності.
8. Опишіть квантор існування.
9. Що таке область дії квантора?
10. В чому полягає процес зв'язування змінної?

9. Формули логіки предикатів

Формули. Рівносильність формул

Означення формули логіки предикатів:

1) Усі предикати $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ на множині M є формулами (елементарними).
2) Якщо A та B – формули, то вирази $(A \wedge B), (A \vee B), (\neg A), (A \rightarrow B)$,(A~B) – також формули.
3) Якщо A – формула, а x – вільна змінна в A, то $(\forall x\ A)$ і $(\exists x\ A)$ - також формули.
4) інших формул, ніж побудовані за правилами 1) - 3), немає.

Наприклад, $(\forall x\ (A(y) \rightarrow (\exists x(B(x)))))$ не є формулою, бо у виразі $(A(y) \rightarrow \left(\exists x\left(B(x)\right)\right))$ змінна x зв'язна і до неї не можна застосувати квантор $\forall x$.

Заради зручності скорочується кількість дужок за наступними правилами:
а) зберігаються усі правила скорочення кількості дужок з алгебри висловлювань;
б) відкидаються зовнішні дужки;
в) квантори мають більший пріоритет, ніж логічні операції;
г) не вказують дужки області дії квантора, якщо це не викликає протиріччя;
д) не пишуть дужки між кванторами, які слідують один за одним, при цьому такі кванторні операції виконуються справа наліво.

Якщо формула $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ набуває значення 1 на всіх набора з множини M, то вона називається *тотожно істинною в* M.

Якщо формула $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ набуває значення 0 на всіх набора з множини M, то вона називається *тотожно хибною в* M.

Приклад. Формула $\exists x\ A(x, y) \rightarrow \forall x\ A(x, y)$ є
тотожно істинною.

Формули $F_1(x_1, x_2, \dots, x_n)$ та $F_2(x_1, x_2, \dots, x_n)$ є *рівносильними*, якщо при всіх можливих наборах значень змінних вони набувають однакових значень $(F_1 = F_2)$. Усі тотожно істинні (хибні) формули є рівносильними між собою. При їх дослідженні постають питання: 1) побудова множини всіх тотожно істинних формул; 2) перевірка тотожної істинності формул логіки предикатів.

На відміну від логіки висловлювань перевірка тотожної істинності формул логіки предикатів викликає проблеми, що пов'язані з можливою нескінченністю області визначення предикатних змінних.

Якщо область визначення предикатних змінних є скінченною $M = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, то перевірку кванторних формул можна звести до перевірки формул логіки висловлювань:

$$\forall x\, A(x) = A(a_1) \wedge A(a_2) \wedge \dots \wedge A(a_n),$$
$$\exists x\, A(x) = A(a_1) \vee A(a_2) \vee \dots \vee A(a_n),$$

використовуючи метод підстановок. Цей же метод можна застосувати для доведення, що формула не є тотожно істинною при нескінченній M, підібравши контрприклад.

При нескінченній предикатній області доведення рівносильності формул логіки предикатів відбувається опосередковано. Наприклад, дистрибутивність квантора $\forall x$ відносно кон'юнкції:

$$\forall x \big(A(x) \wedge B(x)\big) = \forall x\, A(x) \wedge \forall x\, B(x).$$

Нехай ліва частина співвідношення є істинною. Тоді для будь-якого a з предметної області M кон'юнкція $A(x) \wedge B(x)$ буде істинною, тобто для усіх a істинними будуть висловлювання $A(a)$ та $B(a)$, що означає істинність формули $\forall x\, A(x) \wedge \forall x\, B(x)$. Якщо ліва частина співвідношення є хибною. Тоді для деякого a з предметної області M кон'юнкція $A(x) \wedge B(x)$ буде хибною, тобто для a хибними будуть висловлювання $A(a)$ або $B(a)$, що означає хибність формули $\forall x\, A(x)$ або $\forall x\, B(x)$.

Аналогічно доводиться дистрибутивність квантора $\exists x$ відносно диз'юнкції:

$$\exists x \big(A(x) \vee B(x)\big) = \exists x\, A(x) \vee \exists x\, B(x).$$

Істинними є наступні формули:

$$\forall x\, A(x) \vee \forall x\, B(x) \to \forall x \big(A(x) \vee B(x)\big),$$
$$\exists x \big(A(x) \wedge B(x)\big) \to \exists x\, A(x) \wedge \exists x\, B(x).$$

Ще одна рівносильність: $\neg\big(\exists x\, A(x)\big) = \forall x\, (\neg A(x))$.

Доведемо її. Нехай ліва частина істинна, тоді твердження $\exists x\, A(x)$ є хибою, тобто немає жодного значення x з предметної області M, для якого предикат $A(x)$ перетворювався б у істинне висловлювання. А це означає, що $\neg A(x)$ є істиною при усіх значення x з предметної області M. Якщо зліва маємо хибу, то твердження $\exists x\, A(x)$ є істинним, тобто є хоча б одне значення $x = a$ з предметної області M, для якого предикат $A(a)$ перетворюється у істинне висловлювання. Тоді $\neg A(a)$ є хибою, а твердження $\forall x\,(\neg A(x))$ також буде хибним. Аналогічно доводиться рівносильність: $\neg\big(\forall x\, A(x)\big) = \exists x\,(\neg A(x))$.

Ще декілька рівносильних формул для випадку, коли предикатна формула B не містить змінної x:

$$\forall x(A(x) \vee B) = \forall x\, A(x) \vee B;$$
$$\exists x(A(x) \vee B) = \exists x\, A(x) \vee B;$$
$$\forall x(A(x) \wedge B) = \forall x\, A(x) \wedge B;$$
$$\exists x(A(x) \wedge B) = \exists x\, A(x) \wedge B;$$
$$B \to \forall x\, A(x) = \forall x\big(B \to A(x)\big);$$
$$B \to \exists x\, A(x) = \exists x\big(B \to A(x)\big).$$

Числення предикатів. Теорія першого порядку

Числення предикатів будується за класичною схемою побудови формальних теорій:

1) Алфавіт складається з предметних змінних $x_1, x_2, \ldots$, предметних констант $a_1, a_2, \ldots$, предикатних букв $P_1^1, P_2^1, \ldots, P_k^j, \ldots$, функціональних букв $f_1^1, f_2^1, \ldots, f_k^j, \ldots$ (нижні індекси – номери, верхні – кількість аргументів), кванторів $\forall, \exists$ та розділових знаків (дужки, кома).

2) Формули.

3) Аксіоми складаються з двох груп. Перша – це аксіоми довільного числення висловлювань (наприклад, $A1 - A10$), друга – предикатні аксіоми:

$P1. \forall x\, F(x) \to F(y)$;

$P2.\ F(y) \to \exists x\, F(x)$.

Формула $F(y)$ отримується з $F(x)$ заміною всіх вільних входжень змінної x на y.

4) Правила виведення:

4.1) правило висновку;

4.2) правило узагальнення (введення квантора $\forall$), тобто з $B \to A(x)$ виводиться $B \to \forall x\, A(x)$ (формула B не містить вільного входження x);

4.3) правило введення квантора $\exists$, тобто з $A(x) \to B$ виводиться $\exists x\, A(x) \to B$(формула B не містить вільного входження x).

В даному випадку пріоритет надано методу побудови числення зі схемами аксіом (без правила підстановки). Правило підстановки потребує більш громіздких викладок, бо вимагає розрізняти при підстановках вільні та зв’язні змінні.

Виведення формул базується на наступних теоремах.

Теорема. Будь-яка вивідна формула (теорема) числення предикатів тотожно істинна.

Теорема. Будь-яка тотожно істинна предикатна формула є вивідною (теоремою).

Теорема. Предикатні формули A та B рівносильні тоді й тільки тоді, коли формула $(A \to B) \wedge (B \to A)$ (або $A \sim B$) вивідна в численні предикатів.

Побудоване числення предикатів називають *числення предикатів першого порядку*. У такій теорії аргументами можуть бути лише предметні змінні. У численнях другого та вищих порядків аргументами предикатів можуть бути й предикати, а квантори можуть зв'язувати й предикатні змінні.

Логічне слідування в логіці предикатів

Формула B є логічним наслідком формул $A_1, A_2, \ldots, A_n$, тобто $A_1, A_2, \ldots, A_n \Rightarrow B$, якщо для кожної предметної області і для кожного значення формул $A_1, A_2, \ldots, A_n$ в цих областях формула B істинна за умови, що всі формули $A_1, A_2, \ldots, A_n$ істинні. При цьому для всіх вільних входжень деякої змінної x в формули $A_1, A_2, \ldots, A_n$ обирається одне й теж саме значення з предметної області.

Приклад. Чи є коректним наведене нижче твердження?

«Деякі чотирикутники, що вписані в коло, є прямокутниками. Кожний прямокутник - паралелограм. Отже, деякі чотирикутники, що вписані в коло, є паралелограмами».

Розв'язування. Введемо предикати $P(x)$ – «x - чотирикутник, що вписаний в коло», $Q(x)$ – «x – прямокутник», $R(x)$ – «x – паралелограм». Отже, треба довести, що $\exists x\big(P(x) \wedge Q(x)\big), \forall x(Q(x) \to R(x)) \Rightarrow \exists x\big(P(x) \wedge R(x)\big)$.

Використаємо теорему дедукції. З першої посилки $\exists x\big(P(x) \wedge Q(x)\big)$ випливає, що $P(a) \wedge Q(a) = 1$ (правило екзистенціальної конкретизації), тобто $P(a) = 1$ та $Q(a) = 1$ (означення кон'юнкції), з другої посилки $\forall x(Q(x) \to R(x))$ випливає $Q(a) \to R(a) = 1$ (правило універсальної конкретизації, аксіома $P1$), а з $Q(a) = 1$ слідує, що $R(a) = 1$. В результаті, з $P(a) = 1$ та $R(a) = 1$ маємо $P(a) \wedge R(a) = 1$, що означає істинність $\exists x\big(P(x) \wedge R(x)\big)$ (правило екзистенціального узагальнення, аксіома $P2$).

Запитання для самоперевірки

1. Наведіть означення формули предиката.
2. Наведіть означення тотжно істинної формули предиката.
3. Наведіть означення тотжно хибної формули предиката.
4. Наведіть означення рівносильних формул предикатів.
5. Опишіть схему теорію числення предикатів.
6. В чому полягає особливість теорію числення предикатів першого порядку?
7. На яких теоремах базується виведення формул числення предикатів?
8. Сформулюйте теорему дедукції.

10. Секвенції і секвенційні форми для логіки предикатів

Секвенційні правила для кванторів

Логіка предикатів містить додаткові логічні операції кванторів, що впливає на процес секвенційного числення. Розглянемо секвенційні правила для кванторів.

За означенням формула $\exists x\, A(x)_{(1)}$ є істинною, якщо в предметній області міститься значення предметної змінної x, яке перетворює формулу $A(x)$ в істинне твердження. Таке значення позначимо через y. Але у секвенційному численні немає прив'язки до конкретної предметної області, тому y будемо розглядати як предметну змінну. Тобто формулу $\exists x\, A(x)_{(1)}$ можна замінити на формулу формула $A(y)_{(1)}$, де y – нова змінна, що не входить до інших формул секвенції.

Формула $\exists x\, A(x)_{(0)}$ інтерпретується як хиба формули $A(x)$ в кожному значенні x з предметної області, тобто $A(z_1)_{(0)}$, $A(z_2)_{(0)}$, …, $A(z_m)_{(0)}$, де z_1, z_2, …, z_m – вільні змінні секвенції. Але в такі заміні не враховано два пункти. Перше – можуть бути відсутні вільні змінні секвенції. Тоді вводимо довільну нову змінну. Друге – що робити, якщо в процесі роботи з'являться нові вільні змінні? Для розв'язання цієї проблеми залишаємо формулу $\exists x\, A(x)_{(0)}$. Тоді $\exists x\, A(x)_{(0)}$ міняємо на $A(z_1)_{(0)}$, $A(z_2)_{(0)}$, …, $A(z_m)_{(0)}$, $\exists x\, A(x)_{(0)}$, де z_1, z_2, …, z_m – вільні змінні секвенції, якщо їх нема, то вводимо довільну нову змінну.

Аналогічно $\forall x\, A(x)_{(1)}$ міняємо на $A(z_1)_{(1)}$, $A(z_2)_{(1)}$, …, $A(z_m)_{(1)}$, $\forall x\, A(x)_{(1)}$, де z_1, z_2, …, z_m – вільні змінні секвенції, якщо їх нема, то вводимо довільну нову змінну.

Формулу $\forall x\, A(x)_{(0)}$ міняємо на $A(y)_{(0)}$, де y – нова змінна, що не входить до інших формул секвенції.

Приклад. Перевірити істинність формули $\forall x\big(A(x) \to B(x)\big) \to \big(\forall x\, A(x) \to \exists x\, B(x)\big)$, застосовуючи секвенційне числення.

Розв'язування. Діємо від супротивного:

$$\begin{array}{c}
\forall x\big(A(x) \to B(x)\big)_{(1)},\ \boldsymbol{\forall x\, A(x) \to \exists x\, B(x)}_{(\mathbf{0})} \\
\hline
\forall x\big(A(x) \to B(x)\big)_{(1)},\ \boldsymbol{\forall x\, A(x)}_{(\mathbf{1})}, \exists x\, B(x)_{(0)} \\
\hline
\boldsymbol{\forall x\big(A(x) \to B(x)\big)}_{(1)},\ A(y)_{(1)}, \forall x\, A(x)_{(1)}, \exists x\, B(x)_{(0)} \\
\hline
A(y) \to B(y)_{(1)}, \forall x\big(A(x) \to B(x)\big)_{(1)},\ A(y)_{(1)}, \forall x\, A(x)_{(1)}, \boldsymbol{\exists x\, B(x)}_{(\mathbf{0})} \\
\hline
\boldsymbol{A(y) \to B(y)}_{(\mathbf{1})}, \forall x\big(A(x) \to B(x)\big)_{(1)},\ A(y)_{(1)}, \forall x\, A(x)_{(1)}, B(y)_{(0)}, \exists x\, B(x)_{(0)} \\
\hline
\begin{array}{c} A(y)_{(0)}, A(y)_{(1)} \\ \hline \times \end{array} \qquad \begin{array}{c} A(y)_{(1)}, B(y)_{(1)}, B(y)_{(0)} \\ \hline \times \end{array}
\end{array}$$

Приклад. Перевірити істинність формули $\big(\forall x\, A(x) \to \exists x\, B(x)\big) \to \forall x\big(A(x) \to B(x)\big)$, застосовуючи секвенційне числення.

Розв'язування. Діємо від супротивного:

$$\begin{array}{c}
\boldsymbol{\forall x\, A(x) \to \exists x\, B(x)}_{(\mathbf{1})},\ \forall x\big(A(x) \to B(x)\big)_{(\mathbf{0})} \\
\hline
\begin{array}{c}
\boldsymbol{\forall x\, A(x)}_{(\mathbf{0})}, \forall x\big(A(x) \to B(x)\big)_{(\mathbf{0})} \\
\hline
A(y)_{(0)}, \boldsymbol{\forall x\big(A(x) \to B(x)\big)}_{(\mathbf{0})} \\
\hline
A(y)_{(0)}, A(z)_{(1)}, B(z)_{(0)} \\
\hline
!
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}
\boldsymbol{\exists x\, B(x)}_{(\mathbf{1})}, \forall x\big(A(x) \to B(x)\big)_{(\mathbf{0})} \\
\hline
B(y)_{(1)}, \exists x\, B(x)_{(1)}, \boldsymbol{\forall x\big(A(x) \to B(x)\big)}_{(\mathbf{0})} \\
\hline
B(y)_{(1)}, A(z)_{(1)}, B(z)_{(0)} \\
\hline
!
\end{array}
\end{array}$$

Так як формула $\forall x\big(A(x) \to B(x)\big)_{(\mathbf{0})}$ присутня в обох секвенціях, то її розкриваємо з новою вільною змінною z.

Поставимо у відповідність вільній змінній y константу a, а вільній змінній z константу b. Тоді $A(a) = 0, A(b) = 1, B(b) = 0$. Формула $\forall x\, A(x) = 0$, тоді $\big(\forall x\, A(x) \to \exists x\, B(x)\big) = 1$. Формула $\forall x\big(A(x) \to B(x)\big) = 0$, бо існує b при якому матимемо $1 \to 0$. Тоді формула $\big(\forall x\, A(x) \to \exists x\, B(x)\big) \to \forall x\big(A(x) \to B(x)\big) = 0$. Тобто перевірили контрприклад першої секвенції.

Розглянемо другу секвенцію: $B(a) = 1, A(b) = 1, B(b) = 0$. Формула $\exists x\, B(x) = 1$ (бо $B(a) = 1$), тоді $\big(\forall x\, A(x) \to \exists x\, B(x)\big) = 1$. Формула $\forall x\big(A(x) \to B(x)\big) = 0$, бо існує b при якому матимемо $1 \to 0$. Тоді формула

$\left(\forall x\, A(x) \to \exists x\, B(x)\right) \to \forall x\left(A(x) \to B(x)\right) = 0$. Тобто перевірили контрприклад другої секвенції.

Застосування логіки предикатів

Числення предикатів, що не містить функціональних букв та предметних констант, називається *чистим*.

Прикладні числення окрім логічних аксіом містять *спеціальні* аксіоми, що описують властивості предикатних букв та предметних констант з відповідної предметної області. Приклади предикатних букв – предикат рівності (=), предикат порядку (≤), приклади функціональних букв – знаки арифметичних операцій, математичних функцій.

Так, для предикату рівності аксіомами можуть бути:

$E1.\, \forall x\ (x = x)$;

$E2.\, \forall x\ \forall y\ ((x = y) \to (y = x))$;

$E3.\, \forall x\ \forall y\ \forall z\ ((x = y) \to ((y = z) \to (x = z))$.

А числення буде називатися теорією з рівністю.

Для предикату еквівалентності аксіомами можуть бути:

$Q1.\, \forall x\ E(x, x)$;

$Q2.\, \forall x\ \forall y\ (E(x, y) \to E(y, x))$;

$Q3.\, \forall x\ \forall y\ \forall z\ ((E(x, y) \wedge E(y, z)) \to E(x, z))$.

Теорія часткового порядку містить аксіоми для предиката ≤:

$O1.\, \forall x\ (x \le x)$;

$O2.\, \forall x\ \forall y\ ((x \le y) \wedge (y \le x) \to (x = y))$;

$O3.\, \forall x\ \forall y\ \forall z\ ((x \le y) \to ((y \le z) \to (x \le z)))$.

Разом з четвертою аксіомою

$O4.\, \forall x\ \forall y\ ((x \le y) \vee (y \le x) \to (x = y))$

утворюється *теорія лінійного (досконалого порядку)*.

Аксіома щільності:

$O5.\, \forall x\ \forall y\ ((x \le y) \to \exists z((x \le z) \wedge (z \le y)))$.

Теорія, що є найбільш дослідженою, - *формальна арифметика*, яка використовує три формальні букви +, ×, $'$ (додавання, множення, операція «безпосередньо слідує за»), предикатну букву = та предметну константу 0.

Основні закони формальної логіки описуються аксіомами:

$A1.\, F(0) \wedge \forall x\ (F(x) \to F(x')) \to \forall y F(y)$ (принцип індукції);

$A2.\, \forall x\ \forall y\ ((x' = y') \to (x = y))$;

$A3.\, \forall x\ (\neg(x' = 0))$;

$A4.\ \forall x\ \forall y\ \forall z\ ((x = y) \rightarrow ((x = z) \rightarrow (y = z)));$
$A5.\ \forall x\ \forall y\ ((x = y) \rightarrow (x' = y'));$
$A6.\ \forall x\ (x + 0 = x);$
$A7.\ \forall x\ \forall y\ (x + y' = (x + y)');$
$A8.\ \forall x\ (x \times 0 = 0);$
$A9.\ \forall x\ \forall y\ (x \times y' = x \times y + y).$

На початку 30-х років 20-го століття Курт Гендель довів, що жодна скінченна система аксіом для елементарної арифметики не є повною. Тобто ні для арифметики, ні для більш ширших математичних теорій не існує відповідних формалізацій. Але цей факт не знецінює важливості формального підходу при дослідженні математичних теорій, а лише обмежує умови його застосування.

Запитання для самоперевірки

1. Опишіть секвенційне правило для істинного квантора існування.
2. Опишіть секвенційне правило для хибного квантора існування.
3. Опишіть секвенційне правило для істинного квантора загальності.
4. Опишіть секвенційне правило для хибного квантора загальності.
5. В чому відмінність прикладних числень предикатів?
6. Наведіть приклади спеціальних аксіом.

Список літератури

1. Дискретна математика: навчальний посібник / Федоренко Н.І., Білощицька С.В., Білощицький А.О., Баліна І.О., Безклубенко І.С., Буценко Ю.П. - К.:КНУБА,2014. - 103 с.
2. Основи математичної логіки: навчальний посібник / Дрозд Ю.А. - К.: ВПЦ Київський університет, 2003. — 100 с.
3. Математична логіка та теорія алгоритмів: навчальний посібник / Прийма С.М. - Мелітополь: ТОВ "Видавничий будинок ММД", 2008. - 134 с.
4. Математична логіка. Приклади і задачі: навчальний посібник / Шкільняк С.С. - К.: ВПЦ Київський університет, 2007. — 145 с.
5. Математична логіка та теорія алгоритмів: навчальний посібник / Матвієнко М.П., Шаповалов С.П. - К.: Ліра, 2015. - 212 с.
6. Дискретна математика у прикладах і задачах: теорія множин, математична логіка, комбінаторика, теорія графів: математичний практикум / Базилевич Л.Є. - Львів, 2013. - 486 с.
7. Формальна логіка: короткий словник-довідник / Гасяк О.С. - Чернівці:

Чернівецький нац. університет, 2014. - 200 с.
8. Дискретна математика: навчальний посібник / Трохимчук Р.М. - К.: ДП "Видавничий дім "Персонал", 2010. - 528 с.

Навчально-методичне видання

МАТЕМАТИЧНА ЛОГІКА І ЧИСЛЕННЯ ПРЕДИКАТІВ

Конспект лекцій

для студентів спеціальності 126 «Інформаційні системи і технології»

Укладач **ПОЛТОРАЧЕНКО Наталія Іванівна**