МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Київський національний університет будівництва і архітектури

Н.В. Бондаренко, В.В. Отрашевська

Числові та функціональні ряди

Конспект лекцій

для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти
за спеціальностями 192 «Будівництво та цивільна інженерія»
та 193 «Геодезія та землеустрій»

Київ 2024

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Київський національний університет будівництва і архітектури

Н.В. Бондаренко, В.В. Отрашевська

Числові та функціональні ряди

Конспект лекцій

для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти
за спеціальностями 192 «Будівництво та цивільна інженерія»
та 193 «Геодезія та землеустрій»

Київ   2024

УДК 517.521

Б 81

Рецензент З.І. Наголкіна, канд. фіз.-мат. наук, доцент

Затверджено на засіданні навчально-методичної вченої ради КНУБА, протокол № 4 від 21 грудня 2023 року.

В авторській редакції

Бондаренко Н.В.

81 Числові та функціональні ряди: конспект лекцій / Н.В. Бондаренко, В.В. Отрашевська. – Київ: КНУБА, 2024. – 84 с.

Викладено розділ «Числові та функціональні ряди» курсу «Вища математика», який включає такі теми: числові ряди, функціональні ряди, ряди Фур'є. Містить стислі теоретичні відомості, приклади розв'язання основних задач та вправи для самостійної роботи.

Призначено для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти за спеціальностями 192 «Будівництво та цивільна інженерія» та 193 «Геодезія та землеустрій».

УДК 517.521

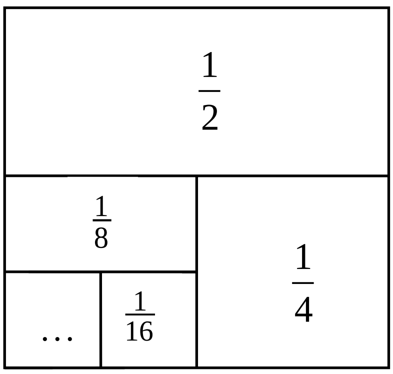
Зміст

Вступ

Тема «Числові та функціональні ряди» є частиною курсу вищої математики. Числові та функціональні ряди широко застосовуються в різних розділах математики та при розв’язуванні прикладних задач. Ряди є одним з найбільш універсальних і ефективних засобів як дослідження, так і обчислення, оскільки дозволяють за допомогою наближених обчислень отримати результати із заданою точністю. В математиці числові ряди використовуються для обчислень значень функцій та інтегралів, для розв'язування трансцендентних та алгебраїчних рівнянь, дослідження різноманітних прикладних задач, пов'язаних з наближеним інтегруванням диференціальних рівнянь.

Перші приклади числових рядів зустрічались в античній математиці. Так в Стародавньому Єгипті вивчалися арифметичні та геометричні прогресії, члени яких сумувалися. Знаходити скінченні суми арифметичної та геометричної прогресій вміли також грецькі та китайські стародавні математики.

З початку XVII століття розвиток теорії рядів базується на розгляді числового ряду як нескінченної суми певних доданків. Італійський математик П’єтро Менголі (1626 – 1686 рр.) першим став досліджувати нескінченні ряди в загальному вигляді. Він розглянув квадрат зі стороною довжини 1 і площею, яка відповідно дорівнює 1. Поділивши площу квадрата навпіл, потім одну з половин знову навпіл і т.д., отримав нескінченну кількість прямокутників, площі яких утворили числовий ряд. Таким чином, рисунок Менголі демонструє доведення того, що



$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^5}+\ldots=1.$$

У XVIII ст. англійський математик Брук Тейлор (1685–1731 рр.) запропонував важливий метод розкладу функції в степеневий ряд на основі інтерполяційної формули Ньютона. Вивчення збіжності рядів значною мірою обумовлювалося потребою знаходження для деяких функцій раціональних виразів, які дозволяли б здійснювати інтегрування таких функцій. У 1812 році німецький математик Карл Фрідріх Гаусс (1777 – 1855 рр.) навів перший зразок дослідження збіжності ряду. Надзвичайно вагомий внесок в розвиток теорії рядів зробив швейцарський математик Леонард Ейлер (1707 – 1783 рр.). Він широко користувався рядами для представлення функцій в різноманітних обчисленнях, причому поряд зі степеневими рядами застосовував тригонометричні ряди. Ейлер використовував та вивчав також розбіжні ряди та одним із перших досліджував питання покращення збіжності рядів.

Значний матеріал по рядам, що накопичився на початок XIX століття, поставив перед наукою задачу строгого обґрунтування теорії рядів. У 1821 році французький математик Огюстен Луї Коші (1789 – 1857 рр.) встановив основні сучасні принципи теорії рядів, дав чіткі означення суми числового ряду, збіжності та розбіжності ряду. В цей час були сформульовані достатні ознаки збіжності рядів з додатними членами. Результати в цьому напрямку отримали Жан Лерон Д'Аламбер (1717 – 1783 рр.), Огюстен Луї Коші, Йозеф Людвіг Раабе (1801 – 1859 рр.), Ернст Едуард Куммер (1810 – 1893 рр.), Нільс Генрік А́бель (1802 – 1829 рр.) та ін. З початку XX ст. у математичному аналізі, чисельних методах, фізиці, інженерії та інших розділах науки методи теорії рядів є широко застосовними.

Мета навчального видання – надати студентам фундаментальні математичні знання та навички з використання теорії рядів, необхідні для успішного засвоєння загальних теоретичних та спеціальних дисциплін, передбачених навчальними програмами будівельних спеціальностей.

У результаті вивчення розділу «Числові та функціональні ряди» дисципліни «Вища математика» студенти повинні

знати:

- основні поняття та означення числових рядів;
- поняття ряду геометричної прогресії, гармонічного ряду, узагальненого гармонічного ряду;

- достатні ознаки збіжності рядів з додатними членами: першу та другу ознаки порівняння, ознаку Д'Аламбера, радикальну ознаку Коші, інтегральну ознаку Коші;
- достатню ознаку збіжності знакопочергових рядів – теорему Лейбніца;
- основні поняття та означення функціональних рядів;
- поняття радіуса збіжності та інтервала збіжності степеневого ряду;
- поняття рівномірної збіжності функціонального ряду, теорему Вейєрштраса;
- ряди Тейлора та Маклорена, їхні основні властивості;
- ряди Фур'є, основні поняття та означення.

уміти:

- доводити за означенням збіжність чи розбіжність числового ряду;
- застосовувати для дослідження на збіжність рядів з додатними членами достатні ознаки збіжності: першу та другу ознаки порівняння, ознаку Д'Аламбера, радикальну ознаку Коші, інтегральну ознаку Коші;
- застосовувати достатню ознаку збіжності, теорему Лейбніца, для дослідження збіжності знакопочергових рядів;
- застосовувати достатню ознаку Вейєрштрасса для дослідження рівномірної збіжності функціональних рядів;
- знаходити область збіжності степеневих рядів;
- розкладати функції в ряд Тейлора та Маклорена;
- розкладати в ряд Фур'є 2π-періодичні функції;
- розкладати в ряд Фур'є функції з довільним періодом;
- розкладати в ряд Фур'є неперіодичні функції.

Тема 1. Числові ряди

Лекція 1. Збіжність і сума числового ряду. Ряд геометричної прогресії. Гармонічний ряд. Узагальнені гармонічні ряди. Необхідна ознака збіжності ряду

Збіжність і сума числового ряду

Нехай задана нескінченна послідовність дійсних чисел (числова послідовність)

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots,$$

тобто відоме правило, за яким для кожного натурального числа n можна визначити n-й член послідовності.

Означення. Вираз

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad (1)$$

називається *числовим рядом.*

Числа $a_1, a_2, a_3, \ldots$ називаються *членами ряду,* a_n – *загальним членом ряду*.

Вираз (1) поки що точного сенсу не має, оскільки нескінченне число додавань здійснити не можна.

Означення. Сума n перших членів ряду (1) називається n*-ю частинною сумою ряду* і позначається S_n:

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n.$$

Тобто числовому ряду (1) можна поставити у відповідність числову послідовність

$$S_1 = a_1,$$
$$S_2 = a_1 + a_2,$$
$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

І навпаки, числовій послідовності $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ можна поставити у відповідність ряд

$$a_1 + (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + ... + (a_n - a_{n-1}) + \ldots .$$

У багатьох випадках представлення числової послідовності у вигляді ряду є зручнішим для дослідження збіжності і визначення суми ряду.

Означення. Якщо існує скінченна границя послідовності частинних сум $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$, то ця границя S називається *сумою ряду* і ряд називається *збіжним* (*ряд збігається*). Якщо ця границя не існує або є нескінченною, коли $n \to \infty$, то ряд називається *розбіжним* (*ряд розбігається*) і такий ряд суми не має.

Твердження 1. Якщо ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ збігається і його сума рівна S, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c \cdot a_n$, де $c \in$R, також збігається і його сума рівна $c \cdot S$. Якщо ж ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ розбігається, то розбігається і ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c \cdot a_n$.

Твердження 2. Якщо два збіжних ряди $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ і $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ мають суми *A* і *B* відповідно, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n)$ також збігається і його сума дорівнює $A \pm B$.

Зауваження. Сума (різниця) збіжного та розбіжного рядів є розбіжним рядом. Сума (різниця) двох розбіжних рядів може бути як збіжним, так і розбіжним рядом.

Ряд

$$r_n = a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + \ldots = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$$

називається n*-м залишком ряду* (1). Він утворюється з ряду (1) відкиданням n перших його членів.

Твердження 3. Якщо збігається ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + a_{n+1} + \ldots,$$

то збігається і його залишок

$$r_n = a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + \ldots.$$

Тобто на збіжність ряду не впливає відкидання або приєднання до нього скінченної кількості членів.

Приклад 1.

Ряд $0+0+0+...+0+...$ – збігається і його сума рівна 0.

Ряд $1+1+1+...+1+...$ – розбігається. Дійсно, n-а частинна сума ряду $S_n = n$. Границя $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} n = \infty$.

Ряд $1-1+1-1+1-1+...+1-...$ – розбігається, оскільки послідовність часткових сум $S_1 = 1, S_2 = 0, S_3 = 1,...$ границі не має.

Приклад 2. Дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ і знайти його суму.

Розв'язання. Для знаходження суми ряду запишемо його загальний член у вигляді суми простих дробів:

$$a_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{(1+n)-n}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

Підставляючи в цей вираз для загального члена ряду замість n послідовно $1,2,3,...,n$, запишемо

$$a_1 = 1 - \frac{1}{2},\quad a_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3},\quad a_3 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4},\ ...,\ a_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

Частинна сума $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$, або

$$S_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right).$$

У правій частині рівності всі доданки, крім першого і останнього, взаємно знищуються, тому $S_n = 1 - \dfrac{1}{n+1}$. Тобто сума ряду

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1.$$

Отже, ряд збігається і його сума дорівнює 1.

Ряд геометричної прогресії (геометричний ряд)

Важливими прикладами рядів є ряди геометричної прогресії. *Геометричною прогресією* називається числова послідовність, у якої кожен наступний член дорівнює попередньому, помноженому на деяке, незмінне для даної прогресії, число. Геометрична прогресія записується у вигляді

$$a, aq, aq^2, ..., aq^n, ... \quad ,$$

де a *– перший член прогресії,* q *– знаменник прогресії.*

Ряд, членами якого є члени геометричної прогресії,

$$a + aq + aq^2 + ... + aq^n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} \qquad (2)$$

називається рядом *геометричної прогресії.*

Твердження 4. *Ряд геометричної прогресії* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$ *збігається і його сума дорівнює* $S = \dfrac{a}{1-q}$, *якщо* $|q| < 1$, *і розбігається, якщо* $|q| \geq 1$.

Доведення. Дійсно, дослідимо на збіжність ряд (2). Відомо, що сума n перших членів геометричної прогресії

$$S_n = \frac{a\cdot(1-q^n)}{1-q}.$$

Можливі такі випадки.

1) $|q| < 1$. У цьому разі $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a\cdot(1-q^n)}{1-q} = \dfrac{a}{1-q}$, тобто ряд

збігається і його сума дорівнює $S = \dfrac{a}{1-q}$.

2) $|q| \geq 1$. Якщо $q > 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \pm\infty$ і ряд розбігається. Якщо $q = 1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty}(an) = \infty$ і ряд також розбігається.

Якщо $q = -1$ маємо ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a \cdot (-1)^n = -a + a - a + a - a + \ldots$ і $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ не існує. Якщо $q < -1$ границя $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ також не існує. Отже, якщо $q \leq -1$, то ряд розбігається. ■

Приклад 3.

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{5}\right)^n$ збігається, оскільки його члени є членами геометричної прогресії, у якої $a = \dfrac{1}{5}$, $q = \dfrac{1}{5} < 1$. Сума ряду $S = \dfrac{\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{5}} = \dfrac{1}{4}$.

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(3)^{n-1}$ розбігається, оскільки його члени є членами геометричної прогресії, у якої $a = 1$, $q = 3 > 1$.

Необхідна ознака збіжності ряду

Крім знаходження суми ряду важливим питанням при вивченні рядів і їхніх застосувань є дослідження збіжності ряду. Наведемо деякі ознаки збіжності рядів.

Теорема 1 (необхідна ознака збіжності ряду). Якщо ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + a_{n+1} + \ldots \qquad (3)$$

збігається, то загальний член цього ряду прямує до нуля, коли $n \to \infty$, тобто

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0. \qquad (4)$$

Доведення. Нехай S – сума ряду (3), а S_n – n-а частиннна сума цього ряду, тоді $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$.

Оскільки $a_n = S_n - S_{n-1},\ n \geq 2$, то

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0. \qquad \blacksquare$$

Наслідок. Якщо $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$ або ця границя не існує, то ряд (3) розбігається.

Приклад 4. Дослідити на збіжність ряд. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n+2}{3n-1}$.

Розв'язання. Перевіримо виконання необхідної ознаки збіжності ряду. Знайдемо

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{3n-1} = \frac{1}{3} \neq 0.$$

Необхідна ознака збіжності ряду не справджується, отже ряд розбігається.

Приклад 5. Дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$.

Розв'язання. Перевіримо виконання необхідної ознаки збіжності ряду. Знайдемо

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \neq 0.$$

Необхідна ознака збіжності ряду не справджується, отже ряд розбігається.

Гармонічний ряд

Розглянемо ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots \tag{5}$$

відомий під назвою *гармонічного ряду*.

Перевіримо виконання необхідної ознаки збіжності ряду:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Необхідна ознака збіжності гармонічного ряду справджується, але ряд розбіжний. Доведемо це.

Відомо, що $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$ (друга визначна границя). Оскільки числова послідовність $\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n, n \geq 1\}$ строго зростаюча, то для кожного $n \in \mathbf{N}$ можемо записати нерівність

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e.$$

Прологарифмуємо нерівність та отримаємо ланцюжок нерівностей:

$$n \cdot \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < 1; \quad \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) < \frac{1}{n}; \quad \ln(n+1) - \ln n < \frac{1}{n}.$$

З останньої нерівності маємо:

$$n = 1 \Rightarrow \ln 2 < 1;$$

$$n = 2 \Rightarrow \ln 3 - \ln 2 < \frac{1}{2};$$

$$n = 3 \Rightarrow \ln 4 - \ln 3 < \frac{1}{3};$$

....

$$n = n \Rightarrow \ln(n+1) - \ln n < \frac{1}{n}.$$

Склавши почленно отримані n нерівностей, дістанемо

$$\ln(n+1) < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n} = S_n.$$

Оскільки $\lim_{n\to\infty} \ln(n+1) = \infty$, то і $\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$. Тобто гармонічний ряд (5) розбігається.

Узагальнені гармонічні ряди

Означення. *Узагальненим гармонічним рядом* (*рядом Діріхле*) називається ряд виду

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}, \qquad (6)$$

де α – дійсне число.

Узагальнений гармонічний ряд збігається, якщо $\alpha > 1$, *і розбігається, якщо* $\alpha \le 1$ (див. Приклад 14).

Наприклад, ряд $1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\ldots+\frac{1}{n^3}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$ збігається, оскільки $\alpha = 3 > 1$.

Ряд $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$ розбігається, оскільки $\alpha = \frac{1}{2} < 1$.

Контрольні запитання

1. Що називається числовим рядом?
2. Який числовий ряд називається збіжним, а який розбіжним?
3. Який ряд називається рядом геометричної прогресії? За якої умови ряд геометричної прогресії збігається, відповідно розбігається?
4. Сформулюйте необхідну ознаку збіжності числового ряду?
5. Який числовий ряд називається гармонічним рядом?
6. Який числовий ряд називається узагальненим гармонічним рядом?

Вправи

1. Запишіть чотири перших члени ряду:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n^2+1}$, б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}$, в) $\sum_{n=1}^{\infty} n!\sin\frac{\pi}{n}$; г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\ln(n+1)}$.

2. Доведіть розбіжність ряду:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n-3}{8n+5}$, б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{9n^2+2}{3n^2-3n+1}$, в) $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi n}{4n+2}$, г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n \cdot \sin\dfrac{n}{n^2+2}$, д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{n-3}{n+5}\right)^{2n}$, е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sqrt{n+1}}{\ln(n+1)}$.

3. Доведіть за означенням збіжність ряду та знайдіть його суму:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(n+3)}$, б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(n-1)(n+2)}$,

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(n+3)(n+6)}$, г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}$,

д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(3n-1)(3n+1)}$, е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\dfrac{n+1}{n+2}$;

ж) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{5}{6^{n-1}}$; з) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{6^n-4^n}{12^n}$,

и) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^n+9^n}{18^n}$, к) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{10^n-5^n}{20^n}$.

Лекція 2. Достатні ознаки збіжності рядів з додатними членами

Розглянемо питання дослідження збіжності чи розбіжності рядів. Це питання найпростіше вирішується для рядів з додатними членами.

Нехай ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots \quad (7)$$

має додатні члени, тобто $a_n \geq 0, (n=1, 2, 3, \ldots)$. Ряд (7) в такому разі ще називають *знакододатним*.

Теорема 2 (перша ознака порівняння). Нехай маємо два ряди з додатними членами

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n,\ a_n \geq 0, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} b_n,\ b_n \geq 0$$

і для всіх n, починаючи з деякого номера, виконується нерівність

$$a_n \le b_n.$$

Тоді, якщо ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ збіжний, то збіжний і ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. Якщо ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ розбіжний, то розбіжний і ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$.

Теорема 3 (друга ознака порівняння). Нехай маємо два ряди з додатними членами

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n,\ a_n \ge 0, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} b_n,\ b_n \ge 0$$

і існує скінченна, відмінна від нуля границя

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = k \quad (k \ne 0, \quad k \ne \infty).$$

Тоді ряди $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ або одночасно збіжні, або одночасно розбіжні.

Для дослідження збіжності рядів за допомогою першої і другої ознак порівняння використовуються ряди, збіжність чи розбіжність яких наперед відома. Зокрема, порівнюваними рядами часто є ряди геометричної прогресії (2), гармонічний ряд (5) і узагальнені гармонічні ряди (6). Нагадаємо:

– геометрична прогресія $\sum\limits_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} \begin{cases} \text{збігається, якщо } |q| < 1, \\ \text{розбігається, якщо } |q| \ge 1; \end{cases}$

– узагальнений гармонічний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^{\alpha}} \begin{cases} \text{збігається, якщо } \alpha > 1, \\ \text{розбігається, якщо } \alpha \le 1. \end{cases}$

Приклад 6. Дослідити збіжність ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(n+1)\cdot 5^n}$.

Розв'язання. Порівняємо загальний член даного ряду $a_n = \dfrac{1}{(n+1)\cdot 5^n}$ із загальним членом $b_n = \dfrac{1}{5^n}$ ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{5^n}$:

$$\frac{1}{(n+1)\cdot 5^n} < \frac{1}{5^n}, \text{ для всіх } n = 1, 2, \ldots .$$

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5^n}$ збігається як ряд геометричної прогресії зі знаменником $q = \frac{1}{5} < 1$. Тому, оскільки члени досліджуваного ряду менші, ніж відповідні члени збіжного ряду, за першою ознакою порівняння ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\cdot 5^n}$ збігається також.

Приклад 7. Дослідити збіжність ряду $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n-1)}}$.

Розв'язання. Порівняємо загальний член ряду із загальним членом розбіжного гармонічного ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$. Маємо

$$\frac{1}{\sqrt{n(n-1)}} \geq \frac{1}{\sqrt{n\cdot n}} = \frac{1}{n}, \text{ для всіх } n = 2, 3, \ldots .$$

Оскільки всі члени досліджуваного ряду, починаючи с другого, більші відповідних членів розбіжного гармонічного ряду, то за першою ознакою порівняння розглядуваний ряд також розбігається.

Приклад 8. Дослідити збіжність ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\cdot\sin\frac{1}{n}$.

Розв'язання. Порівняємо ряд із рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1,5}}$. Це є узагальнений гармонічний ряд і він збігається, оскільки $\alpha = 1,5 > 1$. Скористаємося другою ознакою порівняння:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{n}}\cdot\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n\sqrt{n}}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{n}}\cdot\frac{1}{n}}{\frac{1}{n\sqrt{n}}} = 1 = const \neq 0\cdot$$

Отже, досліджуваний ряд також збігається.

Зазначимо, що для визначення границі скористалися еквівалентністю нескінченно малих величин: $\sin x \sim x,\ x \to 0$.

Приклад 9. Дослідити збіжність ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{(n^3-1)^2}$.

Розв'язання. Користуючись другою ознакою порівняння, порівняємо ряд із збіжним узагальненим гармонічним рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^5}$:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{n+2}{(n^3-1)^2}}{\dfrac{1}{n^5}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)\cdot n^5}{(n^3-1)^2}=1=const\neq 0.$$

Отже, досліджуваний ряд також збігається.

З останнього прикладу видно, що при дослідженні за допомогою другої ознаки порівняння збіжності ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{P_k(n)}{Q_l(n)}$, де $P_k(n)$ – многочлен k-го степеня від n, а $Q_l(n)$ – многочлен l-го степеня від n, за порівнюваний слід обирати узагальнений гармонічний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$, де $\alpha=l-k$. За такого значення α границя є скінченною і не дорівнює нулю.

Теорема 4 (ознака Д'Аламбера). Якщо для ряду з додатними членами $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ існує скінченна або нескінченна границя

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=l,$$

то:

1) якщо $l<1$, то ряд збігається,

2) якщо $l>1$, то ряд розбігається,

3) якщо $l=1$, то ряд може як збігатися, так і розбігатися. Тобто у разі $l=1$ ознака Д'Аламбера не підходить для дослідження збіжності ряду.

У разі $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=+\infty$ ряд розбігається.

Ознаку Д'Аламбера доцільно використовувати, якщо загальний член ряду містить факторіал або показникову залежність.

Приклад 10. Дослідити збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{5^n}$.

Розв'язання. Використаємо ознаку Д'Аламбера. Запишемо n-й та $(n+1)$-й члени ряду:

$$a_n = \frac{n(n+1)}{5^n}, \quad a_{n+1} = \frac{(n+1)(n+2)}{5^{n+1}}.$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{(n+1)(n+2)}{5^{n+1}}}{\dfrac{n(n+1)}{5^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)(n+2)\cdot 5^n}{5^{n+1}\cdot n\cdot(n+1)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{5n} = \frac{1}{5} < 1.$$

Отже, за ознакою Д'Аламбера ряд збігається.

Приклад 11. Дослідити збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^n}$.

Розв'язання. Використаємо ознаку Д'Аламбера. Запишемо n-й та $(n+1)$-й члени ряду:

$$a_n = \frac{n!}{2^n}, \qquad a_{n+1} = \frac{(n+1)!}{2^{n+1}}.$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{(n+1)!}{2^{n+1}}}{\dfrac{n!}{2^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!\cdot 2^n}{n!\cdot 2^{n+1}} = .$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n!\cdot(n+1)\cdot 2^n}{n!\cdot 2^n\cdot 2} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)}{2} = +\infty.$$

Отже, за ознакою Д'Аламбера ряд розбігається.

Теорема 5 (радикальна ознака Коші). Якщо для ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ з додатними членами існує скінченна або нескінченна границя

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=l,$$

то:

1) якщо $l<1$, то ряд збігається,

2) якщо $l>1$, то ряд розбігається,

3) якщо $l=1$ ряд може як збігатися, так і розбігатися. Тобто у разі $l=1$ ознака Коші не підходить для дослідження збіжності ряду.

У разі $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=+\infty$ ряд розбігається.

Приклад 12. Дослідити збіжність ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n}{2n+1}\right)^n$.

Розв'язання. Використаємо радикальну ознаку Коші:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1}=\frac{1}{2}<1.$$

Отже, за ознакою Коші ряд збігається.

Приклад 13. Дослідити збіжність ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{5n+1}{5n-2}\right)^{n^2}$.

Розв'язання. Використаємо радикальну ознаку Коші:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{5n+2}{5n-3}\right)^{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5n+2}{5n-3}\right)^n=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{5n+2}{5n-3}-1\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{5n+2-5n+3}{5n-3}\right)^n=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{5}{5n-3}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{5}{5n-3}\right)^{\frac{5n-3}{5}\cdot}\right]^{n\cdot\frac{5}{5n-3}}=$$

$$=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5n}{5n-3}}=e^1>1.$$

Отже, за радикальною ознакою Коші ряд розбігається. Зазначимо, для визначення границі використали другу визначну границю $\lim\limits_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}=e$.

Теорема 6 (інтегральна ознака Коші). Нехай задано знакододатний ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ \dots\ + a_n + \dots \tag{8}$$

члени якого є значеннями неперервної, додатної і монотонно спадної функції $f(x)$ на проміжку $[1;+\infty)$, тобто $f(n)=a_n$. Тоді ряд (8) збігається, якщо збігається невласний інтеграл $\int_1^{\infty} f(x)dx$ і ряд (8) розбігається, якщо цей інтеграл розбіжний.

Приклад 14. Дослідити збіжність узагальненого гармонічного ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$, де α – дійсне число (див. ряд (6)).

Розв'язання. Якщо $\alpha \le 0$, то загальний член ряду a_n не прямує до нуля, коли $n\to\infty$, тобто не виконується необхідна ознака збіжності ряду і ряд розбігається.

Для $\alpha>0$ застосуємо інтегральну ознаку Коші. Для даного ряду $f(x)=\frac{1}{x^{\alpha}}$. Функція $f(x)$ є неперервною, додатною та монотонно спадною на проміжку $[1;+\infty)$.

Невласний інтеграл

$$\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^{\alpha}}=\begin{cases}\ln x\Big|_1^{\infty}=\lim\limits_{x\to\infty}(\ln x)-\ln 1=\infty \quad \text{якщо} \quad \alpha=1,\\[2ex] \dfrac{1}{-\alpha+1}\cdot x^{-\alpha+1}\Big|_1^{\infty}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right)-\dfrac{1}{1-\alpha}=\left[\begin{array}{l}\infty \quad \text{якщо} \quad \alpha<1,\\ \dfrac{1}{\alpha-1} \quad \text{якщо} \quad \alpha>1.\end{array}\right.\end{cases}$$

Отже, інтеграл $\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^{\alpha}}$, а з ним і ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$, збігається, якщо $\alpha>1$, і розбігається, якщо $\alpha\le 1$.

Приклад 15. Дослідити збіжність ряду $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln n}$.

Розв'язання. Застосуємо інтегральну ознаку Коші. Для даного ряду $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$. Функція $f(x)$ задовольняє умови теореми 6 (інтегральної ознаки Коші): функція $f(x)$ є неперервною, додатною та монотонно спадною на проміжку $[2;+\infty)$.

Невласний інтеграл

$$\int\limits_2^{\infty} \frac{dx}{x \ln x} = \int\limits_2^{\infty} \frac{d(\ln x)}{\ln x} = \ln \ln x \Big|_2^{\infty} = \infty.$$

Інтеграл розбігається. Тому за інтегральною ознакою Коші розбігається і ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln n}$.

Так само, застосувавши інтегральну ознаку Коші, можна переконатися, що ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot (\ln n)^k}$ збігається, якщо $k > 1$, і розбігається, якщо $k < 1$.

Контрольні запитання

1. Який числовий ряд називається знакододатним?
2. Сформулюйте першу ознаку порівняння.
3. Сформулюйте другу ознаку порівняння.
4. Сформулюйте ознаку Д’Аламбера.
5. Сформулюйте радикальну ознаку Коші.
6. Сформулюйте інтегральну ознаку Коші.

Вправи

1. Використовуючи першу та другу ознаки порівняння, дослідіть на збіжність ряди:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2n+3}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{5^n+3}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(n+5)}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$;

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{3n^2+2}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n^2+n+2}{n^4-3n^3-1}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi}{n^2}$; д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi}{3n-1}$.

2. Використовуючи ознаку Д'Аламбера, дослідіть на збіжність ряди:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{(n+1)!}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n+5}{4^n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3n-1}{9^n(n+2)!}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)!}{(n-1)!2^n}$;

д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\dots\cdot(2n-1)}{2\cdot 7\cdot 12\cdot\dots\cdot(5n-3)}$; е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4\cdot 5\cdot 6\cdot\dots\cdot(n+3)}{5\cdot 7\cdot 9\cdot\dots\cdot(2n+3)}$;

ж) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{(2n+1)!}$; з) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{(n+2)!}$; и) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(n+1)\sin\frac{\pi}{5^n}$.

3. Використовуючи радикальну ознаку Коші, дослідіть на збіжність ряди:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+2}{2n+1}\right)^n$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{6n^3+2n-3}{2n^3+1}\right)^n$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\arcsin^n\left(\frac{2n^2}{4n^2-3}\right)$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}arctg^n\left(\frac{n}{3^n}\right)$; д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin^n\left(\frac{1}{2^n}\right)$; е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n+1}}{\ln^n(n+1)}$;

ж) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5^n}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$; з) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}3^n\cdot\left(\frac{n}{n+3}\right)^{n^2}$; и) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4n-1}{4n}\right)^{n^2}$.

4. Використовуючи інтегральну ознаку Коші, дослідіть на збіжність ряди:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}$; б) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(1+\ln^2 n)}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+2)\ln(n+3)}$;

г) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{\ln n}{n(2+\ln^2 n)}$; д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{arctg\, n}{1+n^2}$; е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{e^{n^3}}$; ж) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$;

з) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n^2+1)\ln^2(n+3)}$; и) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{1}{n}}{\ln^2(n+1)}$; к) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{tg\frac{3}{n}}{\ln(n+3)}$.

Лекція 3. Знакопочергові ряди. Теорема Лейбніца. Знакозмінні ряди. Абсолютна та умовна збіжність

Знакопочергові ряди. Теорема Лейбніца

Означення. *Знакопочерговим рядом* називається ряд, у якого будь-які два сусідні члени мають протилежні знаки.

Знакопочерговий ряд можна записати так:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 \ldots + (-1)^{n-1}a_n + \ldots \ , \qquad (9)$$

де всі числа $a_n > 0 \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$.

Теорема 7 (ознака Лейбніца). Якщо для знакопочергового ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n = a_1 - a_2 + a_3 - \ldots + (-1)^{n-1}a_n + \ldots \qquad (a_n > 0)$$

виконуються умови:

1) $a_{n+1} < a_n$ для всіх $n = 1, 2, 3, \ldots;$

2) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$,

то ряд збігається, його сума S додатна і не перевищує першого члена ряду: $0 \le S \le a_1$.

Ряди, для яких справедлива теорема Лейбніца, називаються *рядами Лейбніца* або *лейбніцевими рядами*, або *рядами лейбніцевого типу*.

Приклад 16. Дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$.

Розв'язання. Маємо знакопочерговий ряд. Перевіримо виконання умов теореми Лейбніца:

1) $a_{n+1} = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} = a_n$ для всіх $n = 1, 2, 3, \ldots$,

2) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$.

Отже, ряд збігається за теоремою Лейбніца.

Для рядів лейбніцевого типу неважко оцінити похибку.

Наслідок (оцінка залишку лейбніцевого ряду). Від заміни суми S лейбніцевого ряду його частинною сумою S_n похибка має знак першого з відкинутих членів і не перевищує його за абсолютною величиною:

$$|S - S_n| \le a_{n+1}. \tag{10}$$

Справді, $S = S_n + r_n$, де залишок

$$r_n = S - S_n = (-1)^n (a_{n+1} - a_{n+2} + a_{n+3} - \ldots\ ).$$

Вираз в дужках є лейбніцевим рядом і за теоремою Лейбніца його сума додатна і не перевищує першого члена.

Від заміни суми ряду частинною сумою отримуємо наближене значення з недостачею, якщо перший з відкинутих членів має знак плюс, і з надлишком – якщо знак мінус.

Приклад 17. Знайти з точністю $\varepsilon = 0{,}01$ суму ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^3} = 1 - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{6^3} + \ldots$$

Розв'язання. Маємо знакопочерговий ряд. Перевіримо виконання умов теореми Лейбніца:

1) $a_n = \dfrac{1}{n^3}$, $\quad a_{n+1} = \dfrac{1}{(n+1)^3}$, $\quad \dfrac{1}{n^3} > \dfrac{1}{(n+1)^3} \Rightarrow a_n > a_{n+1}$, $n \ge 1$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^3} = 0$.

Отже, ряд збігається за ознакою Лейбніца. Оскільки $\frac{1}{4^3} > \varepsilon$, а $\frac{1}{5^3} < \varepsilon$, то, відкинувши всі члени ряду починаючи з $\frac{1}{5^3}$, отримаємо суму із заданою похибкою:

$$S_4 = 1 - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^3} = 1 - \frac{1}{8} + \frac{1}{27} - \frac{1}{64} = \frac{1549}{1728}.$$

Перший відкинутий член має знак плюс, тобто отримана наближена сума з недостачею.

Знакозмінні ряди. Абсолютна і умовна збіжність

Означення. Ряд називається *знакозмінним*, якщо він має як від'ємні, так і додатні члени.

Вважається, що ряд має нескінченну кількість додатних членів і нескінченну кількість від'ємних. Інакше, відкинувши частину ряду, що містить скінченну кількість членів одного знаку, можна отримати знакосталий ряд.

Розглянуті у попередньому пункті знакопочергові ряди є частинним випадком знакозмінних рядів.

Нехай

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots \qquad (11)$$

знакозмінний ряд, тобто його члени можуть мати довільні знаки. Разом зі знакозмінним рядом (11) розглядають знакододатний ряд, утворений з модулів його членів:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = |a_1| + |a_2| + \dots + |a_n| + \dots . \qquad (12)$$

Теорема 8. Якщо знакододатний ряд (12), утворений з модулів членів ряду (11), збігається, то збігається і знакозмінний ряд (11).

Доведення. Запишемо n-й член ряду a_n у вигляді

$$a_n = (a_n + |a_n|) - |a_n|.$$

Оскільки справедливі нерівності $0 \le a_n + |a_n| \le 2|a_n|$ і за умовою ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ збігається, то за першою ознакою порівняння знакододатних рядів ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n + |a_n|)$ збігається.

Отже, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ збігається, бо є різницею двох збіжних рядів $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n + |a_n|)$ та $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$. ■

Зауваження. Ця теорема дає лише достатню умову збіжності знакозмінного ряду (11). Збіжність ряду (12) не є необхідною умовою збіжності ряду (11).

Означення. Знакозмінний ряд (11) називається *абсолютно збіжним*, якщо ряд (12), складений з модулів його членів, збігається. Якщо знакозмінний ряд (11) збігається, а складений з модулів ряд (12) розбігається, то ряд (11) називається *умовно збіжним*.

Наприклад, вище розглядався ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$, який є збіжним як ряд Лейбніца. Водночас, гармонічний ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ розбігається, тобто ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ збігається умовно.

Приклад 18. Дослідити на абсолютну та умовну збіжність ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}\cdot(2n+1)}{n(n+1)}.$$

Розв'язок. Спочатку дослідимо ряд на абсолютну збіжність. Складений з модулів ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+1)}{n(n+1)}$ порівняємо з гармонічним рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ за другою ознакою порівняння:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(2n+1)}{n(n+1)}}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)\cdot n}{n(n+1)}=2=const\neq 0.$$

Оскільки ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ розбігається, то за другою ознакою порівняння розбігається і ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+1)}{n(n+1)}$.

Отже, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}\cdot(2n+1)}{n(n+1)}$ не є абсолютно збіжним.

Заданий ряд є знакопочерговим. Для його дослідження на збіжність перевіримо виконання умов теореми Лейбніца 7:

1) $a_n = \dfrac{(2n+1)}{n(n+1)} = \dfrac{n+(n+1)}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n}$, $\quad a_{n+1} = \dfrac{1}{n+2} + \dfrac{1}{n+1}$,

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n} > \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+1} \Rightarrow a_n > a_{n+1} \text{ для всіх } n \geq 1;$$

2) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(2n+1)}{n(n+1)} = 0$.

Отже, умови теореми Лейбніца виконуються, тому досліджуваний знакопочерговий ряд збігається і є умовно збіжним.

Приклад 19. Дослідити на абсолютну та умовну збіжність ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos na}{n^2}.$$

Розв'язання. Маємо знакозмінний ряд. Розглянемо ряд з модулів членів ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\cos na|}{n^2}.$$

Дослідимо цей знакододатний ряд за першою ознакою порівняння (теорема 2). Порівняємо ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{|\cos na|}{n^2}$ з рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$.

Нерівність $\dfrac{|\cos na|}{n^2} \leq \dfrac{1}{n^2}$ виконується для всіх $n \geq 1$. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ збігається, бо є узагальненим гармонічним рядом з $\alpha = 2 > 1$ (див. формула (6)).

Отже, за першою ознакою порівняння ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{|\cos na|}{n^2}$ збігається.

Оскільки ряд з модулів $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{|\cos na|}{n^2}$ збігається, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos na}{n^2}$ збігається абсолютно.

Зауважимо, що абсолютно збіжні і умовно збіжні ряди мають істотно відмінні властивості. Наведемо такі теореми.

Теорема 9 (Діріхле). Якщо ряд збігається абсолютно, то він залишається абсолютно збіжним у разі будь-якої перестановки його членів. При цьому сума ряду не залежить від порядку його членів.

Теорема 10 (Рімана). Якщо ряд збігається умовно, то можна так переставити його члени, що його сума дорівнюватиме будь-якому наперед заданому числу, або навіть ряд стане розбіжним.

Теорема 11. Якщо ряд збігається умовно, то ряди, складені з його додатних і від'ємних членів, обидва розбіжні. Якщо ряд збігається абсолютно, то ряди, складені з його додатних і від'ємних членів, обидва збіжні.

Контрольні запитання

1. Який числовий ряд називається знакопочерговим?
2. Сформулюйте достатню ознаку збіжності знакопочергового ряду – теорему Лейбніца. Який ряд називається лейбніцевим рядом?
3. Який числовий ряд називається знакозмінним?
4. Сформулюйте означення абсолютно збіжного та умовно збіжного знакозмінного ряду.

Вправи

Дослідіть на абсолютну та умовну збіжність знакозмінні ряди:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n+1}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2+4}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n\sqrt{\ln n}}$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{5^n}$; д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{n^2+2}$; е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^n$;

ж) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$; з) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\pi n}{n^3}$; и) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\pi n}{3^n}$.

Тема 2. Функціональні ряди

Лекція 4. Функціональні ряди, основні поняття та означення. Рівномірна збіжність функціонального ряду

Означення. Ряд

$$u_1(x)+u_2(x)+\ \dots\ +u_n(x)+\dots\ =\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x) \qquad (13)$$

називається *функціональним*, якщо його члени є функціями від x, що мають спільну область визначення.

За певного значення $x=x_0$ маємо числовий ряд

$$u_1(x_0)+u_2(x_0)+\ \dots\ +u_n(x_0)+\dots\ =\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x_0). \qquad (14)$$

Якщо числовий ряд (14) збігається, то кажуть, що функціональний ряд (13) збігається, якщо $x=x_0$, і x_0 називається *точкою збіжності функціонального ряду*. Якщо числовий ряд (14) розбігається, то функціональний ряд (13) розбігається, якщо $x=x_0$, і x_0 називається *точкою розбіжності функціонального ряду*. Множина всіх значень аргумента *x*, за яких функціональний ряд збігається, називається *областю збіжності функціонального ряду* (*або областю поточкової збіжністі)*.

Частинна сума функціонального ряду є функцією від *x*:

$$S_n(x)=u_1(x)+u_2(x)+\ \dots\ +u_n(x).$$

Для всіх значень x із області збіжності функціонального ряду існує скінченна границя

$$\lim_{n\to\infty}S_n(x)=S(x),$$

яка називається сумою ряду:

$$S(x)=u_1(x)+u_2(x)+\ \dots\ +u_n(x)+\dots\quad .$$

Приклад 20. Знайти область збіжності функціонального ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ \ldots \ .$$

Розв'язання. Цей ряд є рядом геометричної прогресії (2) із знаменником $q = x$. Отже, якщо $|x| < 1$, то ряд збігається, якщо $|x| \geq 1$, то ряд розбігається. Область збіжності ряду $(-1, 1)$ і для кожного значення $x \in (-1, 1)$ сума ряду дорівнює $S(x) = \dfrac{1}{1-x}$. Отже, в інтервалі $(-1, 1)$ даний ряд визначає функцію $S(x) = \dfrac{1}{1-x}$:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots \qquad x \in (-1, 1). \tag{15}$$

Приклад 21. Знайти область збіжності функціонального ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x} = 1 + \frac{1}{2^x} + \frac{1}{3^x} + \ldots + \frac{1}{n^x} + \ldots .$$

Це є узагальнений гармонічний ряд, який збігається, якщо $x > 1$, і розбігається, якщо $x \leq 1$ (ряд (6)). Областю збіжності ряду є проміжок $(1, +\infty)$.

Приклад 22. Знайти область збіжності функціонального ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx} = e^{-x} + e^{-2x} + \ldots + e^{-nx} + \ldots .$$

Розв'язання. Оскільки члени даного ряду приймають лише додатні значення, то в кожній точці x ряд є знакододатним. Застосуємо радикальну ознаку Коші:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{e^{-nx}} = e^{-x} \begin{cases} <1, \text{ якщо } \ x > 0, \\ >1, \text{ якщо } \ x < 0. \end{cases}$$

Отже, ряд збігається у разі додатних значень x і розбігається у разі від'ємних. Якщо $x = 0$, то маємо ряд

$$1 + 1 + 1 + \ldots + 1 + \ldots,$$

який є розбіжним. Таким чином, область збіжності досліджуваного ряду $(0, +\infty)$.

Рівномірна збіжність функціонального ряду

Означення. Функціональний ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ \dots \ + u_n(x) + \dots$$

називається *рівномірно збіжним* на множині $G \subseteq \mathbf{R}$ до функції $S(x)$, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує такий номер $N(\varepsilon) \in \mathbf{N}$, що для всіх $n > N(\varepsilon)$ та для всіх $x \in G$ справедлива нерівність

$$\left| S_n(x) - S(x) \right| < \varepsilon.$$

Відмінність звичайної поточкової і рівномірної збіжності функціонального ряду на множині G полягає в тому, що у разі звичайної збіжності нерівність $\left| S_n(x) - S(x) \right| < \varepsilon$ виконується для всіх $n > N$ за певного значення $x \in G$ і номер N залежить не тільки від ε, а і від значення $x \in G$. У разі рівномірної збіжності існує такий спільний для всіх $x \in G$ номер N, що залежить тільки від ε.

Рівномірна збіжність функціонального ряду на деякому відрізку $[a,b]$ означає, що для $n \geq N(\varepsilon)$ графіки (рис. 1) всіх частинних сум $S_n(x)$ на відрізку $[a,b]$ містяться всередині смуги, обмеженої лініями $y = S(x) - \varepsilon$ і $y = S(x) + \varepsilon$.

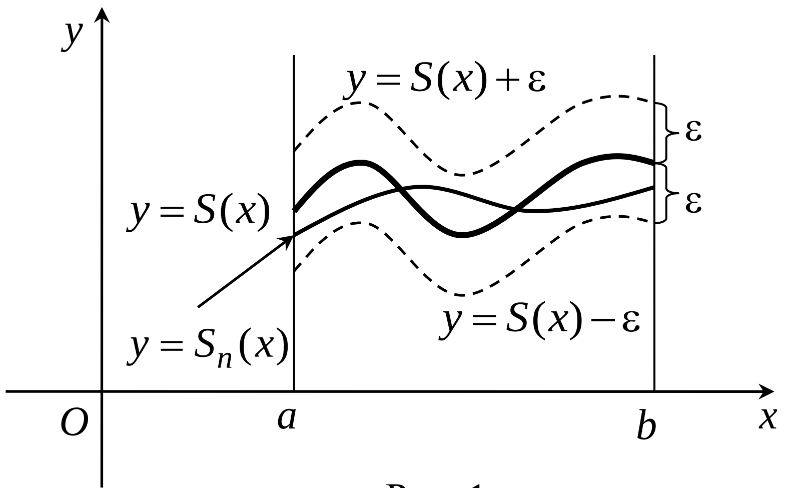


Рис. 1

Зауваження. Рівномірно збіжний на множині G функціональний ряд збігається на цій множині. Тому при дослідженні рівномірної збіжності на даній множині обмежуються розглядом рядів, які збігаються на цій множині.

Рівномірно збіжні функціональні ряди мають важливі властивості. Справедливі такі теореми.

Теорема 12 (неперервність суми функціонального ряду). Якщо функціональний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ рівномірно збігається на проміжку $X=[a,b]$ до функції $S(x)$ і члени ряду $u_n(x)$ є неперервними функціями на цьому проміжку, то сума ряду $S(x)$ неперервна в X.

Теорема 13 (почленне інтегрування функціонального ряду). Якщо на відрізку $[a,b]$ функціональний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ збігається рівномірно до функції $S(x)$ і члени ряду неперервні на $[a,b]$, то його можна почленно інтегрувати в межах (α,β), де $(\alpha,\beta)\subset[a,b]$:

$$\int_{\alpha}^{\beta} S(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta}\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right)dx = \sum_{n=1}^{\infty}\int_{\alpha}^{\beta} u_n(x)dx.$$

Теорема 14 (почленне диференціювання функціонального ряду). Якщо функції $u_n(x)$ $(n=1,2,\ldots)$ визначені в проміжку $[a,b]$, мають в цьому проміжку неперервні похідні $u_n'(x)$ і ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ збігається до функції $S(x)$, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$ збігається рівномірно, то сума $S(x)$ ряду $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ має в $[a,b]$ похідну і $S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$.

Зауваження. Вимога рівномірної збіжності ряду з похідних

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$ є істотною, її невиконання може призвести до неможливості почленного диференціювання ряду.

При дослідженні функціональних рядів на рівномірну збіжність корисною є теорема, що дає достатню умову рівномірної збіжності ряду.

Теорема 15 (ознака Вейерштрасса). Функціональний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ є абсолютно і рівномірно збіжним на відрізку $[a,b]$, якщо існує знакододатний збіжний числовий ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ такий, що

$$|u_n(x)| \le c_n, \ \forall x \in [a,b], \ n = 1,2,\ldots$$

У цьому разі кажуть, що функціональний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *мажорується* числовим рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ або, що числовий ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ є *мажорантним рядом* для функціонального ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$.

Зауваження. Існують ряди, які не мажоруються на відрізку $[a,b]$ збіжним числовим рядом, але є рівномірно збіжними на цьому відрізку.

Приклад 23. Показати, що функціональний ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n!} = \cos x + \frac{\cos 2x}{2!} + \frac{\cos 3x}{3!} + \ldots + \frac{\cos nx}{n!} + \ldots$$

є рівномірно збіжним на інтервалі $(-\infty, +\infty)$.

Доведення. Для всіх $x \in (-\infty, +\infty)$ і $n = 1,2,\ldots$ справедлива нерівність $\left|\dfrac{\cos nx}{n!}\right| \le \dfrac{1}{n!}$. Отже, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos nx}{n!}$ мажорується на інтервалі $(-\infty, +\infty)$ числовим рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n!}$. Цей ряд збігається за ознакою Д'Аламбера. Дійсно:

$$a_n = \frac{1}{n!}, \quad a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!},$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1.$$

Отже, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ збігається. Тому за теоремою Вейерштрасса функціональний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n!}$ рівномірно збігається на інтервалі $(-\infty, +\infty)$.

Зауважимо, що ряди $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$ і $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx$ мажоруються числовим рядом $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ в будь-якому проміжку. Тому, якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ збігається, то ряди $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$ та $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx$ рівномірно збігаються на інтервалі $(-\infty, +\infty)$ і їх сума є неперервною функцією.

Контрольні запитання

1. Який ряд називається функціональним? Що таке область збіжності функціонального ряду?
2. Який ряд називається рівномірно збіжним?
3. Сформулюйте теорему про неперервність суми функціонального ряду.
4. Сформулюйте теорему про почленне інтегрування функціонального ряду.
5. Сформулюйте теорему про почленне диференціювання функціонального ряду.
6. Сформулюйте достатню ознаку рівномірної збіжності функціонального ряду – ознаку Вейєрштрасса.

Вправи

1. Знайдіть область збіжності функціонального ряду:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{x^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{4+x^{2n}}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^4+x^4}$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin nx}{n(n+2)}$; д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos 2nx}{5^n}$; е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}e^{-nx}$;

ж) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(2x+3)^n}{4^{n+2}}$; з) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln^n(2x-1)$; и) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(25-x^2)^n$;

к) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{x+2}{x-2}\right)^{2n}$; л) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n!}{x^n}$; м) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(2n-1)^n}{(n+1)3^n}$.

2. Доведіть рівномірну збіжність функціонального ряду на вказаному проміжку:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{x^2+n^3}$, $x\in(-\infty;+\infty)$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin nx}{\sqrt{n^5+1}}$; $x\in(-\infty;+\infty)$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2^n+\cos^2 x}$, $x\in(-\infty;+\infty)$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos 2nx}{n!+x^2}$, $x\in(-\infty;+\infty)$;

д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n^2+1}$, $x\in[-1;1]$; е) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{x^n}{n\ln^3 n}$, $x\in[-1;1]$;

ж) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x}{1+n^3x^2}$, $x\in[0;+\infty)$; з) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3^{-nx}}{n^4+1}$, $x\in[0;+\infty)$;

и) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{4^n(1+xn)}$, $x\in[0;+\infty)$; к) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(2x)^n}{n(n+1)}$, $x\in\left[-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right]$.

Лекція 5. Степеневі ряди

Означення. *Степеневим рядом* називається ряд виду

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ \ldots \ = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \ , \qquad (16)$$

де $a_0, a_1, a_2, ..., a_n, ...$ – числові коефіцієнти. У загальному випадку, якщо члени ряду є не степенями x, а степенями двочлена $x - x_0$, маємо ряд

$$a_0 + a_1(x - x_0) + \ldots + a_n(x - x_0)^n + \ \ldots \ = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \ . \qquad (17)$$

Далі розглядатимемо ряди виду (16), оскільки ряд (17) зводиться до (16) заміною змінної $x - x_0 = t$.

Якщо $x = 0$, то степеневий ряд (16) збігається і його сума $S = a_0$. Для визначення області збіжності степеневого ряду важливою є така теорема.

Теорема 16 (Абеля). Якщо степеневий ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ збігається для деякого значення $x_0 \neq 0$, то він абсолютно збігається для всіх значень x, що задовольняють нерівність $|x| < |x_0|$. Якщо для деякого значення x_1 ряд розбігається, то він розбігається для всіх значень x, для яких виконується $|x| > |x_1|$.

Теорема Абеля дозволяє визначити структуру області збіжності степеневого ряду. Дійсно, якщо x_0 є точкою збіжності, то ряд збігається абсолютно для всіх точок інтервалу $(-|x_0|, |x_0|)$. Якщо x_1 – точка розбіжності, то ряд розбігається для всіх точок зліва від точки $-|x_1|$ і справа від точки $|x_1|$, тобто ряд розбігається на інтервалах $(-\infty, -|x_1|)$ і $(|x_1|, +\infty)$. Звідси випливає, що існує таке число R, що для значень $|x| < R$ ряд абсолютно збігається, а для значень $|x| > R$ ряд розбігається. Тобто справедлива така теорема про структуру області збіжності степеневого ряду.

Теорема 17 (область збіжності степеневого ряду). Для кожного степеневого ряду $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, існує таке число R (може бути і $+\infty$), що ряд абсолютно збігається для всіх значень $|x| < R$ і ряд розбігається для всіх значень $|x| > R$ (якщо $R < \infty$). Це число R називається *радіусом збіжності степеневого ряду.*

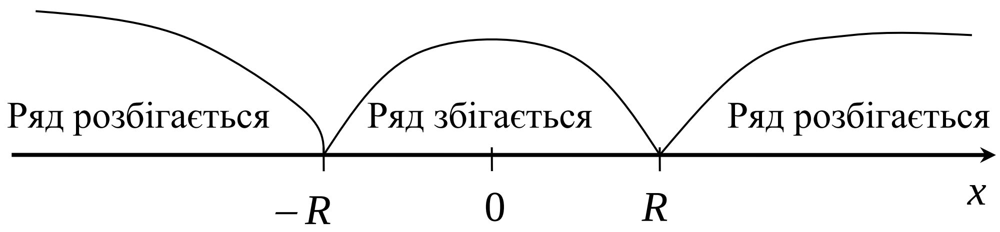


Рис. 2

Таким чином, область збіжності степеневого ряду $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ являє собою суцільний інтервал $(-R, R)$ (Рис. 2). У точках, що належать $(-R, R)$, ряд збігається абсолютно, поза інтервалом $(-R, R)$ ряд розбігається. Інтервал $(-R, R)$ називається *інтервалом збіжності степеневого ряду*. На кінцях інтервалу збіжності, тобто в точках $x = -R$ і $x = R$ ряд може як збігатися (абсолютно або ні), так і розбігатися. У кожному з кінців інтервалу збіжність ряду слід досліджувати окремо.

Інтервал збіжності ряду (17) знаходять з нерівності $|x - x_0| < R$, тобто інтервал має вигляд $(x_0 - R,\ x_0 + R)$.

Таким чином, для знаходження області збіжності степеневого ряду потрібно:

1) визначити радіус збіжності R;

2) дослідити збіжність ряду на кінцях інтервалу $x = -R$ і $x = R$.

Для визначення радіуса збіжності степеневого ряду можна використовувати ознаку Д'Аламбера або радикальну ознаку Коші.

Складемо ряд з модулів ряду (16):

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left|a_n x^n\right| \, . \tag{18}$$

Припустимо, що існує границя

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\cdot|x| = L\cdot|x| \neq 0,\ x\neq 0 \, .$$

За ознакою Д'Аламбера ряд (18) збігається, якщо $L\cdot|x|<1$, тобто якщо $|x|<\frac{1}{L}$ і розбігається, якщо $L|x|>1$, тобто $|x|>\frac{1}{L}$.

Отже, ряд (16) збігається абсолютно для значень $|x|<\frac{1}{L}$.

Якщо $|x|>\frac{1}{L}$ і $L|x|>1$, то ряд (18) розбігається. Крім того, в цьому разі члени ряду (18) зростають і його загальний член не прямує до нуля, тоді і загальний член ряду (16) не прямує до нуля. Отже, для нього не виконується необхідна ознака збіжності, і ряд розбігається для значень $|x|>\frac{1}{L}$.

Таким чином, інтервал $\left(-\frac{1}{L},\frac{1}{L}\right)$ є інтервалом збіжності степеневого ряду (16) і радіус збіжності $R=\frac{1}{L}$, тобто

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|. \tag{19}$$

Аналогічно, користуючись радикальною ознакою Коші, можна отримати

$$R=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}\, . \tag{20}$$

Якщо $L=0$, то ряд збігається абсолютно у всіх точках числової осі. У цьому разі вважають $R=\infty$. Якщо $R=0$, ряд збігається в одній точці $x=0$.

Зауваження. Радіус збіжності степеневого ряду за формулами (19) або (20) знаходять у випадку, коли степеневий ряд є повним, тобто містить всі степені x чи $x-x_0$. Якщо степеневий ряд містить не всі степені x чи $x-x_0$, тобто задано неповний степеневий ряд, то для визначення інтервалу збіжності користуються безпосередньо ознакою Д'Аламбера або радикальною ознакою Коші для ряду, складеного з модулів членів досліджуваного ряду.

Приклад 24. Знайти область збіжності ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{n\cdot 2^{n-1}}$.

Розв'язання. Оскільки степеневий ряд є повним, то радіус збіжності знайдемо за формулою (19):

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{n\cdot 2^{n-1}}}{\frac{1}{(n+1)\cdot 2^n}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)\cdot 2^n}{n\cdot 2^{n-1}}\right|=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)\cdot 2}{n}\right|=2\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=2.$$

Отже, радіус збіжності ряду $R=2$. Визначимо інтервал збіжності степеневого ряду:

$$-2-2<x<-2+2 \Rightarrow -4<x<0.$$

Інтервал збіжності $(-4,\ 0)$. Дослідимо збіжність ряду на кінцях інтервалу.

У точці $x=-4$ маємо ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-4+2)^n}{n\cdot 2^{n-1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)^n}{n\cdot 2^{n-1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 2^n}{n\cdot 2^{n-1}}=2\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}.$$

Це є знакопочерговий ряд, який збігається як ряд Лейбніца (Теорема 7).

У точці $x=0$ маємо ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(0+2)^n}{n\cdot 2^{n-1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n\cdot 2^{n-1}}=2\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}.$$

Цей ряд розбігається, оскільки розбігається гармонічний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$.

Отже, якщо $x=-4$, то ряд збігається, якщо $x=0$, то ряд розбігається. Областю збіжності заданого ряду є півінтервал $[-4,\,0)$.

Радіус збіжності степеневого ряду, незалежно від того є степеневий ряд повним чи неповним, на практиці часто знаходять, користуючись безпосередньо ознакою Д'Аламбера або радикальною ознакою Коші для ряду, складеного з модулів членів досліджуваного ряду.

Приклад 25. Знайти область збіжності ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{\ln^n(n+1)}$.

Розв'язання. Використаємо радикальну ознаку Коші:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{(x-2)^n}{\ln^n(n+1)}\right|}=\lim_{n\to\infty}\frac{|x-2|}{\ln(n+1)}=0<1.$$

Для даного ряду $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}<1$ незалежно від значення x. Отже, за радикальною ознакою Коші ряд збігається для всіх $x\in\mathbf{R}$. Радіус збіжності $R=\infty$, інтервал збіжності $(-\infty,+\infty)$.

Приклад 26. Знайти область збіжності степеневого ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^{2n-1}}{2n-1}=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\ldots\,.$$

Розв'язання. Заданий степеневий ряд неповний, оскільки містить не всі степені x.

Розглянемо ряд, складений з модулів його членів

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}x^{2n-1}}{2n-1}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|x|^{2n-1}}{2n-1}.$$

Застосуємо до отриманого ряду ознаку Д'Аламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{2(n+1)-1}}{2(n+1)-1}\cdot\frac{2n-1}{x^{2n-1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\cdot\frac{2n-1}{x^{2n-1}}\right| =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{2n-1}\cdot x^2}{2n+1}\cdot\frac{2n-1}{x^{2n-1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^2}{2n+1}\cdot\frac{2n-1}{1}\right| = x^2\lim_{n\to\infty}\left|\frac{2n-1}{2n+1}\right| =$$

$$= x^2\lim_{n\to\infty}\left|\frac{2-\frac{1}{n}}{2+\frac{1}{n}}\right| = x^2 < 1.$$

Ряд, складений з модулів, збігається за ознакою Д'Аламбера, якщо $x^2 < 1$ або $-1 < x < 1$. Тобто ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^{2n-1}}{2n-1}$ збігається абсолютно на інтервалі $(-1;1)$. Дослідимо збіжність ряду на кінцях інтервалу.

У точці $x=-1$ маємо ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(-1)^{2n-1}}{2n-1} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{3n}}{2n-1} = -1+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\ldots.\ .$$

Цей ряд збігається, оскільки є знакопочерговим лейбніцевим рядом (теорема 7).

У точці $x=1$ маємо ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(1)^{2n-1}}{2n-1} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} = 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots.\ .$$

Цей ряд збігається, оскільки є знакопочерговим лейбніцевим рядом (теорема 7).

Отже, областю збіжності заданого ряду є відрізок $[-1;1]$.

Теорема 18 (рівномірна збіжність степеневого ряду).

Нехай степеневий ряд

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + \ \ldots\ = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$$

має інтервал збіжності $(-R,R)$ і $0 < r < R$. Тоді ряд рівномірно збігається на відрізку $[-r,r]$.

Доведення. Оскільки $r \in (-R, R)$, то числовий ряд

$$|a_0| + |a_1| r + |a_2| r^2 + \ldots + |a_n| r^n + \ \ldots \ = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n$$

збігається. Оскільки для всіх $x \in [-r, r]$ виконується нерівність $|a_n x^n| \le |a_n| r^n$ $, n = 1, 2, \ldots,$ то за теоремою Вейерштрасса ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ рівномірно збігається на відрізку $[-r, r]$. ■

Для степеневих рядів справедливі такі теореми.

Теорема 19. Сума степеневого ряду всередині його інтервалу збіжності є неперервною функцією.

Доведення. Нехай $x_0 \in (-R, R)$ − будь-яка точка інтервалу збіжності. Виберемо додатне число r так, щоб $x_0 \in [-r, r]$ і $0 < r < R$. За теоремою 18 ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ рівномірно збіжний на $[-r, r]$, члени цього ряду − неперервні функції, отже сума ряду за теоремою 12 неперервна на $[-r, r]$, зокрема, в точці x_0.

Теорема 20. *Якщо* степеневий ряд $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ має радіус збіжності *R*, то ряд, утворений його почленним диференціюванням, має той самий радіус збіжності *R*, сума ряду $S(x)$ має похідну і

$$S'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n x^n)' = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}, \quad x \in (-R, R).$$

Тобто, степеневий ряд всередині його інтервалу збіжності можна почленно диференціювати довільну кількість разів і сума степеневого ряду має всередині інтервалу збіжності похідні будь-якого порядку.

Теорема 21. *Якщо* степеневий ряд $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ має радіус збіжності *R*, і відрізок $[\alpha, \beta] \subset (-R, R)$, то степеневий ряд, отриманий почленним інтегруванням даного ряду в межах від α до β, збігається, має той самий радіус збіжності і його сума дорівнює інтегралу від суми вихідного ряду:

$$\int_{\alpha}^{\beta} S(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_{\alpha}^{\beta} x^n dx \ .$$

Зокрема, якщо $|x| < R$, то

$$\int_{0}^{x} S(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{0}^{x} a_n x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} .$$

Тобто степеневий ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, що має радіус збіжності R, на відрізку $[0, x]$, $|x| < R$ можна інтегрувати і диференціювати почленно довільну кількість разів для будь-якої точки x. У цьому разі радіус збіжності R не змінюється.

Теорема 22. Якщо степеневий ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ має інтервал збіжності $(-R, R)$ і збігається (хоча б неабсолютно) у разі $x = R$, то його сума $S(x)$ в точці $x = R$ неперервна зліва, тобто

$$S(R-0) = \lim_{x \to R-0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n .$$

Таке твердження справедливе і для лівого кінця інтервалу збіжності $x = -R$.

Наслідок. Якщо для деякої функції $f(x)$ отримано розклад в степеневий ряд у відкритому проміжку $(-R < x < R)$, але функція визначена і неперервна, а ряд збігається і на кінці цього проміжку, скажімо в точці $x = R$, то розклад в степеневий ряд є вірним і для значення $x = R$.

Приклад 27. Знайти суму ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$.

Розв'язання. У прикладі 20 показано, що степеневий ряд

$\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}$ у разі $|x|<1$ збігається і має суму $\dfrac{1}{1-x}$ (розклад (15)):

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\ldots+x^n+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}\ , \quad |x|<1.$$

Проінтегруємо цей ряд почленно в межах від нуля до x, $|x|<1$ (теорема 21):

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}=-\ln(1-x).$$

Отже, сума ряду $S(x)=-\ln(1-x)$, а область збіжності ряду є інтервал $(-1;1)$.

Приклад 28. Знайти суму ряду $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$.

Розв'язання. Запишемо розклад (15) у вигляді

$$\frac{1}{1-x}=1+\sum_{n=1}^{\infty} x^n\ , \quad |x|<1.$$

$$\frac{1}{1-x}-1=\sum_{n=1}^{\infty} x^n, \qquad \frac{x}{1-x}=\sum_{n=1}^{\infty} x^n.$$

Диференціюємо цей ряд почленно (теорема 20):

$$\left(\frac{x}{1-x}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} \Rightarrow \frac{1-x+x}{(1-x)^2}=\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} \Rightarrow \frac{1}{(1-x)^2}=\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}.$$

Помножимо ліву і праву частини отриманого розкладу на x і остаточно дістанемо

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^n=\frac{x}{(1-x)^2}.$$

Отже, сума ряду $S(x)=\dfrac{x}{(1-x)^2}$, а область збіжності ряду є інтервал $(-1;1)$.

Контрольні запитання

1. Який ряд називається степеневим рядом?
2. Що таке радіус збіжності та інтервал збіжності степеневого ряду?
3. Сформулюйте теорему про почленне диференціювання степеневого ряду в інтервалі збіжності.
4. Сформулюйте теорему про почленне інтегрування степеневого ряду в інтервалі збіжності.

Вправи

1. Знайдіть область збіжності степеневого ряду:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^3}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n-1}{2n+1}\right)^n x^n$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n \cdot 5^n}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)\ln(n+1)}$;

д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^{n^2} \cdot x^n$; е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (3n+2) \cdot 6^n (x-1)^n$;

ж) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(5n-3)(x-2)^n}{n^2 3^{n+1}}$; з) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (n+1)! \cdot (x+1)^n$;

и) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x+5)^n}{n^2+1}$; к) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(x-1)^n}{(4n-3)^{2n}}$;

л) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^{2n}}{(n+1)8^n}$; м) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n}}{5^n}$;

н) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-4)^{2n-1}}{3n-2}$; о) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^n (x+1)^{4n}}{(16n+3)^n}$.

2. Знайдіть суму степеневого ряду:

а) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (3n+1)x^{3n}$; б) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n5^n}$; г) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n(x-2)^{n-1}$.

Лекція 6. Ряди Тейлора та Маклорена

Досі розглядалися властивості заданих збіжних степеневих рядів. Оскільки відрізками степеневого ряду є многочлени, то степеневі ряди є зручним засобом для наближених обчислень. Тому важливо вміти розкладати наперед задану функцію $f(x)$ за степенями x або $x-a$, тобто представляти функцію у вигляді суми степеневого ряду.

Нехай $a \in \mathbf{R}$, $0 < R \le +\infty$.

Твердження 5. Якщо функція $f(x)$ в деякому околі $(a-R; a+R)$ точки a має всі похідні до $(n+1)$-го порядку включно, то $f(x)$ можна подати у вигляді суми многочлена n-го степеня і залишкового члена $R_n(x)$:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x), \tag{21}$$

де

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(a+\theta(x-a))}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}, \quad 0 < \theta < 1. \tag{22}$$

Формула (21) називається *формулою Тейлора*, а $R_n(x)$ – *залишковим членом у формі Лагранжа*.

Означення. Нехай функція $f(x)$ диференційовна довільну кількість разів в околі точки *а*. *Рядом Тейлора* для функції $f(x)$ в околі точки a називається ряд виду

$$f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \ \ldots \ = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n . \tag{23}$$

Теорема 23. Для того, щоб ряд Тейлора (23) функції $f(x)$ збігався до вихідної функції $f(x)$ в околі $(a-R; a+R)$ точки a необхідно і достатньо, щоб у цьому околі функція $f(x)$ мала похідні всіх порядків і виконувалася умова

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0, \quad x \in (a-R; a+R). \tag{24}$$

Якщо умова (24) не виконується, то ряд може розбігатися або збігатися до іншої функції.

Отже, для того, щоб переконатися, що формально записаний для функції $f(x)$ ряд Тейлора має суму $f(x)$, треба перевірити умову (24), або довести це в інший спосіб.

Наведемо теорему, яка дає досить просту достатню умову розкладу функції в ряд Тейлора і якою часто користуються на практиці.

Теорема 24. Якщо функція $f(x)$ в околі $(a-R; a+R)$ точки a має похідні всіх порядків та існує число $M > 0$ таке, що

$$| f^{(n)}(x) | \le M,\ x \in (a-R; a+R),\ n = 1, 2, \dots ,$$

то функцію $f(x)$ можна розкласти у збіжний до цієї функції ряд Тейлора

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \text{, для } \forall x \in (a-R; a+R),$$

причому для $R < +\infty$ збіжність ряду рівномірна на $(a-R; a+R)$, а для $R = +\infty$ збіжність ряду рівномірна на будь-якому відрізку $[a-\tilde{R}; a+\tilde{R}]$, $\tilde{R} < +\infty$.

Твердження 6 (єдиність ряду Тейлора). Якщо в деякому околі $(a-R; a+R)$ точки a функція $f(x)$ представляється у вигляді суми ряду

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \ldots + c_n(x-a)^n + \ldots , \tag{25}$$

то цей ряд є її рядом Тейлора, тобто

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \quad .$$

Доведення. Послідовно продиференціюємо степеневий ряд (25):

$$f'(x) = c_1 + 2c_2(x-a) + 3c_3(x-a)^2 + \ldots + nc_n(x-a)^{n-1} + \ldots;$$

$$f''(x) = 1\cdot 2\cdot c_2 + 3\cdot 2\cdot c_3(x-a) + \ldots + n(n-1)c_n(x-a)^{n-2} + \ldots;$$

$$f'''(x) = 1\cdot 2\cdot 3\cdot c_3 + 4\cdot 3\cdot (x-a) + \ldots + n(n-1)(n-2)c_n(x-a)^{n-3} + \ldots;$$

…………………………………………………………………

$$f^{(n)}(x) = 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n\cdot c_n + (n+1)n(n-1)\cdot \ldots \cdot 1\cdot c_{n+1}(x-a) + \ldots.$$

…………………………………………………………………

Покладаючи в усіх цих формулах і у виразі (25) $x = a$, знайдемо вирази для коефіцієнтів ряду (25):

$$c_0 = f(a);$$

$$f'(a) = c_1 \quad \Rightarrow \quad c_1 = \frac{f'(a)}{1!};$$

$$f''(a) = 1\cdot 2\cdot c_2 \Rightarrow c_2 = \frac{f''(a)}{2!};$$

$$f'''(a) = 1\cdot 2\cdot 3\cdot c_3 \Rightarrow c_3 = \frac{f'''(a)}{3!};$$

………………………………

$$f^{(n)}(a) = 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n\cdot c_n \quad \Rightarrow c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!};$$

……………………………… ■

Означення. *Рядом Маклорена* називається частинний випадок ряду Тейлора (23), коли $a = 0$:

$$f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots \qquad (26)$$

Приклад 29. Розкласти в ряд Маклорена функцію $f(x) = e^x$.

Розв'язання. Для знаходження коефіцієнтів ряду Маклорена (26) послідовно диференціюємо:

$$f'(x) = e^x, \quad f''(x) = e^x, \quad f'''(x) = e^x, \ldots, \ f^{(n)}(x) = e^x, \ldots$$

Тоді для $x = 0$ маємо

$$f(0) = f'(0) = f''(0) = f'''(0) = \ldots = f^{(n)}(0) = e^0 = 1$$

і, підставивши знайдені значення у ряд (26), дістанемо

$$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ \ldots \tag{27}$$

За формулою (19) радіус збіжності цього ряду

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n\to\infty}(n+1) = \infty .$$

Отже, ряд (27) збігається в інтервалі $(-\infty, +\infty)$.

Покажемо, що ряд (27) збігається до функції e^x користуючись теоремою 24. Розглянемо довільний проміжок $[-R;R]$ Для довільного $n \geq 1$ та довільного $x \in [-R;R]$ виконується умова

$$| f^{(n)}(x) | = | e^x | \leq e^R = M .$$

Отже, за теоремою 24 ряд Маклорена (27) збігається до функції e^x в інтервалі $(-\infty, +\infty)$:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ \ldots \ .$$

У багатьох випадках розклад функції в степеневий ряд можна отримати, використовуючи інші відомі розклади. Наведемо таблицю розкладів в ряд Маклорена деяких функцій, які часто використовуються.

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ \ldots \ (-\infty < x < +\infty) \ ; \tag{28}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ \ldots \ (-\infty < x < +\infty) \ ; \tag{29}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ \ldots \ (-\infty < x < +\infty) \ ; \tag{30}$$

$$(1+x)^m = 1+\frac{m}{1!}\cdot x+\frac{m\cdot(m-1)}{2!}x^2+\frac{m\cdot(m-1)\cdot(m-2)}{3!}x^3+\ldots+$$

$$+\frac{m\cdot(m-1)\cdot\ldots\cdot(m-n+1)}{n!}x^n+\ldots \qquad (-1<x<1) \qquad (31)$$

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\ldots+x^n+\ldots \qquad (-1<x<1); \qquad (32)$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots+(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}+\ \ldots\ (-1<x\le 1); \qquad (33)$$

$$arctgx=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)}+\ \ldots\ (-1\le x\le 1); \qquad (34)$$

$$\arcsin x = x+\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{x^5}{5}+\ldots+\frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot(2n)}\cdot\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)}+\ \ldots$$

$$(-1\le x\le 1); \qquad (35)$$

$$shx=x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\ldots+\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots \quad x\in(-\infty;+\infty); \qquad (36)$$

$$ch\ x=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^6}{6!}+\ldots+\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\ldots \quad x\in(-\infty;+\infty). \qquad (37)$$

Ряд (31) називається *біноміальним*. Якщо m – натуральне число, маємо відомий розклад двочлена (біном Ньютона). Збіжність біноміального ряду до функції $f(x)=(1+x)^m$ в кінцевих точках інтервалу залежить від m:

$x\in[-1,\ 1]$, якщо $m\ge 0$;

$x\in(-1,\ 1]$, якщо $-1<m<0$;

$x\in(-1,\ 1)$, якщо $m\le -1$.

Розкладати функції в ряд Тейлора інколи можна досить просто, використовуючи наведені розклади або інші, раніше знайдені. Наприклад, ряди можна додавати, множити ряд на деяке число або замінити у відомому розкладі x на довільну степеневу функцію.

Розкладаючи функцію в ряд Тейлора, можна також використовувати диференціювання і інтегрування рядів. Наприклад, формулу (33) можна отримати з формули (32), поклавши $(-x)$ замість x і проінтегрувавши почленно отриманий ряд. Так само, поклавши в формулі (32) $(-x^2)$ замість x і проінтегрувавши почленно, дістанемо ряд (34). Ряд (33) для функції $\ln(1+x)$ у разі $x=1$ і ряд (34) для $arctgx$ у разі $x=\pm 1$ збігаються як ряди Лейбніца.

Зауважимо, що із розкладу (34) у разі $x=1$, враховуючи наслідок з теореми 22, маємо

$$arctg\,1 = 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)}+\ \ldots\ ,$$

або

$$\frac{\pi}{4} = 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)}+\ \ldots$$

Це є відомий ряд Лейбніца − перший ряд розкладу числа π.

Приклад 30. Розкласти в ряд Тейлора за степенями x функцію

$$f(x)=\frac{e^x-1}{x}.$$

Розв’язання. Використаємо розклад (28):

$$e^x = 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ \ldots \qquad (-\infty < x < +\infty)\ .$$

З цього розкладу

$$e^x-1 = \frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ \ldots \qquad (-\infty < x < +\infty)\ .$$

Поділивши праву та ліву частину виразу на x, дістанемо

$$\frac{e^x-1}{x} = 1+\frac{x}{2!}+\frac{x^2}{3!}+\ldots+\frac{x^{n-1}}{n!}+\ \ldots \qquad (-\infty < x < +\infty)\ .$$

Приклад 31. Розкласти в ряд Тейлора за степенями x функцію

$$f(x)=x\cdot\ln(1+x^2).$$

Розв'язання. Використаємо розклад (33):

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \ \ldots \ (-1 < x \le 1).$$

Замінивши в цьому розкладі x на x^2, дістанемо

$$\ln(1+x^2) = x^2 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+2}}{n+1} + \ \ldots \quad (-1 < x \le 1).$$

Помножимо на x:

$$x \cdot \ln(1+x^2) = x^3 - \frac{x^5}{2} + \frac{x^7}{3} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+3}}{n+1} + \ \ldots \quad (-1 < x \le 1).$$

Приклад 32. Розкласти в ряд Тейлора за степенями $x-1$ функцію $f(x) = \dfrac{1}{x+2}$.

Розв'язання. Перетворимо цю функцію таким чином, щоб можна було використати розклад (32) функції $\dfrac{1}{1-x}$. Позначимо $t = x-1$, тоді $x = t+1$ і $\dfrac{1}{x+2} = \dfrac{1}{t+3} = \dfrac{1}{3\cdot\left(1-\dfrac{t}{-3}\right)} = \dfrac{1}{3\cdot\left(1-\dfrac{x-1}{-3}\right)}$.

У розкладі $\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots \qquad (-1 < x < 1)$

замінимо x на $\dfrac{x-1}{-3}$ і дістанемо

$$\frac{1}{x+2} = \frac{1}{3}\left[1 - \frac{x-1}{3} + \frac{(x-1)^2}{3^2} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{(x-1)^n}{3^n} + \ldots\right].$$

Цей розклад справедливий, якщо $\left|\dfrac{x-1}{-3}\right| < 1$, тобто

$$-1 < \frac{x-1}{3} < 1, \quad -3 < x-1 < 3, \quad -2 < x < 4.$$

Отже, інтервал $-2 < x < 4$ є інтервалом збіжності отриманого ряду.

Контрольні запитання

1. Який степеневий ряд називається рядом Тейлора функції $f(x)$ в околі точки a?

2. Сформулюйте необхідну і достатню умову збіжності ряду Тейлора функції $f(x)$ в околі точки a для функції $f(x)$.

3. Запишіть розклади в ряд Маклорена основних елементарних функцій.

Вправи

Розвинути функцію $f(x)$ в ряд Тейлора за степенями $(x-a)$ та вказати область збіжності ряду:

1. $f(x)=3^x,\ a=0;$
2. $f(x)=\ln(1-x-6x^2),\ a=0;$
3. $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt[5]{1+x^2}},\quad a=0;$
4. $f(x)=\dfrac{x^2}{x-1},\quad a=0;$
5. $f(x)=\ln\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}},\quad a=0;$
6. $f(x)=\dfrac{1}{x},\ a=1;$
7. $f(x)=\dfrac{1}{2x+4},\quad a=1;$
8. $f(x)=\ln(x^2+2x+2),\quad a=-1;$
9. $f(x)=\ln\dfrac{1}{x^2+4x+5},\quad a=-2;$
10. $f(x)=\dfrac{1}{x^2+4x+7},\quad a=-2.$

Лекція 7. Застосування рядів для наближених обчислень

У разі обчислення наближених значень функцій сума ряду замінюється частинною сумою, тобто в розкладі функції у степеневий ряд зберігається певна кількість членів. Щоб оцінити похибку наближення треба оцінити суму членів, що відкидаються. У разі, коли використовуваний ряд є рядом Лейбніца, похибка оцінюється досить просто: для лейбніцевих рядів від заміни суми ряду частинною сумою похибка не перевищує за абсолютною величиною першого з членів, які відкидаються.

Якщо ряд є знакосталим, для оцінки похибки ряд, утворений відкинутими членами, порівнюють з іншим рядом з більшими членами, який легко сумується, наприклад, з геометричною прогресією.

Наближене обчислення значень тригонометричних функцій

Для обчислення наближених значень тригонометричних функцій використовуються відповідні розвинення тригонометричних функцій.

Приклад 33. Обчислити значення $\cos 10^\circ$ з точністю $\varepsilon = 0{,}0001$

Розв'язання. Для обчислень використаємо розклад (30)

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ \ldots$$

Оскільки $\cos 10^\circ = \cos \frac{\pi}{18}$ підставимо значення $x = \frac{\pi}{18}$ в ряд:

$$\cos \frac{\pi}{18} = 1 - \frac{\left(\frac{\pi}{18}\right)^2}{2!} + \frac{\left(\frac{\pi}{18}\right)^4}{4!} - \ \ldots \tag{38}$$

Отримали знакопочерговий числовий ряд, який є рядом

Лейбніца. Другий член розкладу (38) $\frac{1}{2!}\left(\frac{\pi}{18}\right)^2 \approx 0,0152 > 0,0001$.

Третій член розкладу $\frac{1}{4!}\left(\frac{\pi}{18}\right)^4 < 0,0001$, тому для отримання результату із заданою точністю $\varepsilon = 0,0001$ достатньо залишити в розкладі (38) два перших члени:

$$\cos\frac{\pi}{18} \approx 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{18}\right)^2 .$$

Третій член розкладу додатний, тобто це є наближення з недостачею.

Наближене обчислення коренів

Для наближеного обчислення коренів використовують біноміальний ряд (31):

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1!}\cdot x + \frac{m\cdot(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m\cdot(m-1)\cdot(m-2)}{3!}x^3 + \ldots +$$

$$+\frac{m\cdot(m-1)\cdot\ldots\cdot(m-n+1)}{n!}x^n + \ldots \quad (-1 < x < 1).$$

Приклад 34. Обчислити $\sqrt[3]{130}$ з точністю $\varepsilon = 0,0001$.

Розв'язання. Зробимо перетворення

$$\sqrt[3]{130} = \sqrt[3]{125+5} = \sqrt[3]{125\left(1+\frac{1}{25}\right)} = 5\left(1+\frac{1}{25}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Використаємо біноміальний ряд, вважаючи $x = \frac{1}{25}$, $m = \frac{1}{3}$.

$$\sqrt[3]{130} = 5\left(1+\frac{1}{25}\right)^{\frac{1}{3}} =$$

$$=5\cdot\left(1+\frac{1}{3\cdot 25}+\frac{\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}-1\right)}{2!}\cdot\left(\frac{1}{25}\right)^2+\frac{\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}-1\right)\cdot\left(\frac{1}{3}-2\right)}{3!}\cdot\left(\frac{1}{25}\right)^3+\ldots\right)=$$

$$=5+\frac{1}{3\cdot 5}-\frac{1\cdot 2}{2\cdot 3^2\cdot 5^3}+\frac{1\cdot 2\cdot 5}{6\cdot 3^3\cdot 5^5}-\ldots=5+\frac{1}{3\cdot 5}-\frac{1}{3^2\cdot 5^3}+\frac{1}{3^4\cdot 5^4}-\ldots.$$

Маємо ряд Лейбніца. Знайдемо значення членів отриманого ряду: $a_2=\frac{1}{3\cdot 5}\approx 0{,}0667>0{,}0001,\quad a_3=\frac{1}{3^2\cdot 5^3}\approx 0{,}0009>0{,}0001.$

Четвертий член ряду $\frac{1}{3^4\cdot 5^4}<0{,}0001.$

Отже, щоб отримати значення з заданою точністю, достатньо залишити три перші члени ряду:

$$\sqrt[3]{130}\approx 5+\frac{1}{3\cdot 5}-\frac{1}{3^2\cdot 5^3}\approx 5+0{,}0667-0{,}0009=5{,}0658.$$

Оскільки четвертий член ряду додатний, це значення отримане з недостачею.

Приклад 35. Обчислити $\sqrt[4]{e}$ з точністю $\varepsilon=0{,}0001.$

Розв’язання. Використаємо розклад функції e^x (28):

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ \ldots\qquad(-\infty<x<+\infty)\ .$$

Цей ряд у разі додатного значення x є знакододатним. Залишок ряду після відкидання n перших членів:

$$R_n(x)=\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}+\frac{x^{n+2}}{(n+2)!}+\frac{x^{n+3}}{(n+3)!}+\ldots,$$

або

$$R_n(x)=\frac{x^n}{n!}\cdot\left[\frac{x}{(n+1)}+\frac{x^2}{(n+1)(n+2)}+\frac{x^3}{(n+1)(n+2)(n+3)}+\ldots\right]<$$

$$<\frac{x^n}{n!}\cdot\left[\frac{x}{(n+1)}+\frac{x^2}{(n+1)(n+1)}+\frac{x^3}{(n+1)(n+1)(n+1)}+\ldots\right].$$

У квадратних дужках в правій частині нерівності маємо суму спадної геометричної прогресії зі знаменником $\dfrac{x}{(n+1)}$. Просумувавши цю прогресію, дістанемо

$$R_n(x) < \frac{x^n}{n!} \cdot \frac{\frac{x}{(n+1)}}{1-\frac{x}{(n+1)}}, \quad \text{або} \quad R_n(x) < \frac{x^n}{n!} \cdot \frac{x}{n+1-x}. \qquad (39)$$

Для обчислення $\sqrt[4]{e} = e^{\frac{1}{4}}$ маємо ряд

$$e^{\frac{1}{4}} = 1 + \frac{\frac{1}{4}}{1!} + \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^2}{2!} + \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^3}{3!} + \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^4}{4!} + \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^5}{5!} + \ \ldots \ . \qquad (40)$$

Шляхом підбору, знайдемо n так, щоб виконувалась нерівність

$$R_n(\frac{1}{4}) < \frac{1}{(4n+3)n!4^n} < \varepsilon \ .$$

$$R_2(\frac{1}{4}) < \frac{1}{11 \cdot 2!4^2} = \frac{1}{352} \approx 0,00284;$$

$$R_3(\frac{1}{4}) < \frac{1}{15 \cdot 3!4^3} = \frac{1}{5760} \approx 0,00017;$$

$$R_4(\frac{1}{4}) < \frac{1}{19 \cdot 4!4^4} = \frac{1}{116736} \approx 0,000009 < 0,0001 \ .$$

Отже, щоб отримати значення із заданою точністю $\varepsilon = 0,0001$ достатньо залишити перші п’ять членів ряду:

$$\sqrt[4]{e} = 1 + \frac{1}{4 \cdot 1!} + \frac{1}{4^2 \cdot 2!} + \frac{1}{4^3 \cdot 3!} + \frac{1}{4^4 \cdot 4!} \quad .$$

Зазначимо, що взявши суму меншої кількості членів ряду, задана точність не забезпечується.

Обчислення логарифмів

Зауважимо, що у разі обчислення логарифмів не є доцільним використання ряду (33) для функції $\ln(1+x)$ оскільки цей ряд збігається дуже повільно, і досягнення необхідної точності потребує врахування великої кількості членів ряду і великої кількості обчислень.

Для наближеного обчислення логарифмів натуральних чисел зручніше використовувати ряд

$$\ln(N+1)=\ln N+\frac{2}{(2N+1)}+\frac{2}{3\cdot(2N+1)^3}+\frac{2}{5\cdot(2N+1)^5}+\ldots\quad, \qquad (41)$$

де N – натуральне число.

З'ясуємо, якою є похибка у разі застосування цієї формули.

$$R_n(N)=2\left(\frac{1}{(2n+1)(2N+1)^{2n+1}}+\frac{1}{(2n+3)(2N+1)^{2n+3}}+\ldots\right)<$$

$$<2\frac{1}{(2n+1)(2N+1)^{2n+1}}\left(1+\frac{1}{(2N+1)^2}+\frac{1}{(2N+1)^4}+\ldots\right)=$$

$$=2\frac{1}{(2n+1)(2N+1)^{2n+1}}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{1}{(2N+1)^2}}=\frac{1}{2(2n+1)N(N+1)(2N+1)^{2n-1}}.$$

Отже, похибка формули (41) визначається нерівністю

$$R_n(N)<\frac{1}{2(2n+1)N(N+1)(2N+1)^{2n-1}}. \qquad (42)$$

Приклад 36. Обчислити $\ln 2$ з точністю $\varepsilon=0,00001$.

Розв’язання. У формулі (41) вважатимемо $N=1$ і отримаємо

$$\ln 2=2\cdot\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3\cdot3^3}+\frac{1}{5\cdot3^5}+\frac{1}{7\cdot3^7}+\frac{1}{9\cdot3^9}+\frac{1}{11\cdot3^{11}}+\ldots\right).$$

Шляхом підбору, знайдемо n так, щоб виконувалась нерівність (42)

$$R_n(1) < \frac{1}{4(2n+1)\cdot 3^{2n-1}} < \varepsilon\,.$$

Маємо:

$$R_2(1) < \frac{1}{4\cdot 5\cdot 3^{2n-1}} = \frac{1}{180} \approx 0,005556 > 0,00001;$$

$$R_3(1) < \frac{1}{4\cdot 7\cdot 3^{5}} = \frac{1}{6804} \approx 0,000147 > 0,00001;$$

$$R_4(1) < \frac{1}{4\cdot 9\cdot 3^{7}} = \frac{1}{78732} \approx 0,0000127 > 0,00001;$$

$$R_5(1) < \frac{1}{4\cdot 11\cdot 3^{9}} = \frac{1}{866052} \approx 0,00000115 < 0,00001.$$

Отже, залишивши п’ять перших членів ряду, отримаємо значення $\ln 2$ з заданою точністю $\varepsilon = 0,00001$:

$$\ln 2 \approx 2\cdot\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3\cdot 3^3} + \frac{1}{5\cdot 3^5} + \frac{1}{7\cdot 3^7} + \frac{1}{9\cdot 3^9}\right).$$

Наближене обчислення визначених інтегралів

Використання формули Ньютона-Лейбніца для обчислення визначеного інтеграла $\int\limits_a^b f(x)dx$ можливе, якщо для $f(x)$ існує первісна, що виражається в елементарних функціях. В іншому разі, якщо "інтеграл не береться", але підінтегральна функція $f(x)$ розкладається у степеневий ряд, а відрізок інтегрування $[a, b]$ належить області збіжності цього ряду, то ряд згідно з теоремою 21 можна інтегрувати почленно у заданих межах. Наближене значення інтеграла обчислюється як частинна сума отриманого ряду. Кількість необхідних доданків у сумі визначається наперед заданою точністю.

Приклад 37. Обчислити інтеграл $\int\limits_0^{\frac{1}{4}} e^{-x^2}dx$ з точністю $\varepsilon = 0,0001$.

Розв’язання. Для розвинення підінтегральної функції у степеневий ряд використаємо розклад (28):

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ \ldots \qquad (-\infty < x < +\infty) \ .$$

Замінимо в цьому розкладі x на $-x^2$:

$$e^{-x^2} = 1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!} \qquad (-\infty < x < +\infty) \ .$$

Інтегруючи ряд почленно, дістанемо

$$\int_0^{\frac{1}{4}} e^{-x^2} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^{\frac{1}{4}} x^{2n} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \cdot \left. \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \right|_0^{\frac{1}{4}} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \cdot (2n+1) \cdot 4^{2n+1}} == \frac{1}{4} - \frac{1}{3 \cdot 4^3} + \frac{1}{2 \cdot 5 \cdot 4^5} - \frac{1}{7 \cdot 6 \cdot 4^7} + \ldots \quad .$$

Отриманий ряд є рядом Лейбніца. Для третього члена ряду $\left| \frac{1}{2 \cdot 5 \cdot 4^5} \right| < 0{,}0001$. Отже, для забезпечення заданої точності достатньо залишити два перші члени ряду:

$$\int_0^{\frac{1}{4}} e^{-x^2} dx \approx \frac{1}{4} - \frac{1}{3 \cdot 4^3} = 0{,}25 - 0{,}0052 = 0{,}2448 .$$

Це є наближення з недостачею, оскільки третій член ряду додатний.

Застосування рядів для розв'язання диференціальних рівнянь

Якщо інтегрування диференціального рівняння неможливе в елементарних функціях, або для інтегрування не підходять інші методи, розв'язок задачі Коші для рівняння n-го порядку

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)})$$

з початковими умовами

$$y(x_0)=y_0,\ y'(x_0)=y_0',\ \ldots,\ y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)}$$

інколи можна шукати у вигляді ряду Тейлора

$$y(x)=y(x_0)+\frac{y'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\ldots+\frac{y^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\ \ldots\ =$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{y^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n\,.$$

Перші n коефіцієнтів ряду визначаються початковими умовами. Значення $y^{(n)}(x_0)$ знаходять, підставляючи $x=x_0$ і початкові умови в рівняння. Наступні коефіцієнти знаходять послідовно, диференціюючи рівняння і підставляючи $x=x_0$ та вже відомі значення похідних менших порядків.

Приклад 38. Знайти перші чотири ненульові члени розвинення у степеневий ряд розв'язку задачі Коші

$$y''=x+y^2,\quad y(0)=0,\ \ y'(0)=1.$$

Розв'язання. Оскільки за умовою $x_0=0$ частинний розв'язок шукатимемо у вигляді

$$y(x)=y(0)+\frac{y'(0)}{1!}x+\frac{y''(0)}{2!}x^2+\frac{y'''(0)}{3!}x^3+\ldots+\frac{y^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ \ldots \quad (43)$$

За умовою $y(0)=0$, $y'(0)=1$. Підставивши $x=x_0=0$ в рівняння, дістанемо значення $y''(0)=0$. Для знаходження інших коефіцієнтів послідовно диференціюємо рівняння і підставляємо $x=x_0=0$:

$$y'''=1+2yy',$$

$$y^{IV}=2y'^2+2yy'',$$

$$y^{V}=4y'y''+2y'y''+2yy'''=6y'y''+2yy'''.$$

$$y^{VI}=6y''y''+6y'y'''+2y'y'''+2yy^{IV}=6y''^2+8y'y'''+2yy^{IV}.$$

У разі, коли $x=0$, дістанемо

$$y'''=1,\quad y^{IV}=2,\quad y^{V}=0,\quad y^{VI}=8.$$

Підставимо знайдені значення у (43) і отримаємо розв'язок:

$$y(x) = \frac{1}{1!}x + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{2}{4!}x^4 + \frac{8}{6!}x^6 + \ \dots$$

або

$$y(x) = x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{12} + \frac{x^6}{90} + \ \dots \quad .$$

Крім використаного у наведеному прикладі методу послідовного диференціювання розв'язок диференціального рівняння можна шукати у вигляді степеневого ряду, записаного з невідомими коефіцієнтами:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \, .$$

Для знаходження невідомих коефіцієнтів a_n $(n = 0,1,2,\dots)$ ряд підставляється у рівняння і прирівнюються коефіцієнти при однакових степенях $x - x_0$ у правій і лівій частинах отриманої рівності.

Приклад 39. Знайти перші чотири ненульові члени розвинення у степеневий ряд розв'язку задачі Коші

$$y'' = xy, \qquad y(0) = 1, \;\; y'(0) = 1.$$

Розв’язання. Шукатимемо розв'язок у вигляді степеневого ряду

$$y(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \ \dots \quad . \tag{44}$$

Диференціюємо:

$$y'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + 5a_5 x^4 + 6a_6 x^5 + \dots \quad ,$$

$$y''(x) = 2a_2 + 6a_3 x + 12a_4 x^2 + 20a_5 x^3 + 30a_6 x^4 + \dots \quad .$$

Із початкових умов маємо

$$a_0 = y(0) = 1, \; a_1 = y'(0) = 1.$$

Підставляємо $y(x)$ і $y''(x)$ у рівняння:

$$2a_2 + 6a_3 x + 12a_4 x^2 + 20a_5 x^3 + \ 30a_6 x^4 + \dots \quad =$$

$$= a_0 x + a_1 x^2 + a_2 x^3 + a_3 x^4 + a_4 x^5 + \ \dots \quad .$$

Прирівнюємо коефіцієнти при однакових степенях x у лівій і правій частинах:

$a_2 = 0$,

$6a_3 = a_0 \Rightarrow \qquad a_3 = \frac{1}{6}$,

$12a_4 = a_1 \Rightarrow \qquad a_4 = \frac{1}{12}$,

$20a_5 = a_2 \Rightarrow \qquad a_5 = 0$,

$30a_6 = a_3 \Rightarrow \qquad a_6 = \frac{1}{180}$.

Підставляючи знайдені коефіцієнти у (44), отримаємо шуканий розв'язок:

$$y(x) = 1 + x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{12} + \frac{x^6}{180} + \dots$$

Контрольні запитання

1. Як наближено обчислюються значення тригонометричних функцій?
2. Як наближено обчислюються значення коренів?
3. Як наближено обчислюються значення логарифмів?
4. Як наближено обчислюються значення визначених інтегралів?
5. Як застосовуються ряди до розв’язання диференціальних рівнянь?

Вправи

1. Застосовуючи відповідні степеневі ряди, обчислити із заданою точністю ε значення величини:

а) $\sqrt[4]{630}$, $\varepsilon = 0{,}001$; б) $\sin 15^\circ$, $\varepsilon = 0{,}00001$;

в) $arctg\,\frac{1}{10}$, $\varepsilon = 0{,}00001$; г) $\sqrt[3]{1.05}$, $\varepsilon = 0{,}00001$;

д) $\sqrt[3]{8.32}$, $\varepsilon = 0{,}0001$; е) $\sqrt[3]{66}$, $\varepsilon = 0{,}0001$;

ж) $\cos 375^\circ$, $\varepsilon = 0,00001$; з) $\dfrac{1}{\sqrt[4]{e}}$, $\varepsilon = 0,0001$;

и) $\arcsin\dfrac{1}{4}$, $\varepsilon = 0,001$; к) $arctg(0,2)$, $\varepsilon = 0,0001$;

л) $\ln(1.06)$, $\varepsilon = 0,00001$; м) $\ln\sqrt{1,08}$, $\varepsilon = 0,001$.

2. Обчислити інтеграл з точністю $\varepsilon = 0,001$:

а) $\int\limits_0^{0,2} \dfrac{1-e^{-x}}{x}dx$, б) $\int\limits_0^1 \cos\sqrt{x}dx$, в) $\int\limits_0^{0,5} \dfrac{dx}{1+x^3}$,

г) $\int\limits_0^1 e^{-x^2}dx$, д) $\int\limits_0^{0,25} \ln(1+\sqrt{x})dx$, е) $\int\limits_0^{\frac{1}{3}} \dfrac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$,

ж) $\int\limits_0^{0,5} \dfrac{\sin x}{x}dx$, з) $\int\limits_0^1 \sin x^2 dx$, и) $\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \sqrt[3]{1+x^2}dx$.

3. Знайти перші чотири ненульові члени розвинення у степеневий ряд розв'язку задачі Коші:

а) $y'' + y\cos x = 0,\ y(0) = 1,\ \ y'(0) = 0$;

б) $y''' = ye^x - x(y')^2,\ y(0) = y'(0) = y''(0) = 1$;

в) $y'' = \cos y' + y,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0$;

г) $y' + y\cos x - 3e^x y^2 - \sin x = 0,\ y(0) = 1$;

д) $y'' + 2y^2 - 3xy + e^x = 0,\ y(0) = 1,\ y'(0) = -1$;

е) $y'' + \sin x \cdot y + \cos x = 0,\ y(\pi) = 1,\ y'(\pi) = 0$;

ж) $y'' + x^3 + y^3 = 0,\ y(0) = -2,\ y'(0) = -1$;

з) $(1+x^2)y'' - 3xy^2 + 4y' = 0,\ y(0) = 2,\ y'(0) = -2$;

и) $4y'' - ye^{2x} + xy' = 0,\ y(0) = 2,\ y'(0) = 1$;

к) $y' = x + x^2 + y^2,\ y(0) = 1$.

Тема 3. Ряди Фур'є

Лекція 8. Ряди Фур'є. Основні поняття та означення

Процеси, які повторюються через певні проміжки часу, називаються періодичними. Такі процеси зустрічаються в теорії пружності, механіці, електроніці, теорії автоматичного регулювання та ін. Моделюються періодичні процеси за допомогою періодичних функцій, для дослідження яких доцільніше розкладати їх не в степеневий ряд, а у так званий тригонометричний ряд.

Нагадаємо, що функція $f(x)$ називається *періодичною*, якщо існує таке число $T \neq 0$, що для всіх значень x, які належать області визначення функції $f(x)$, виконується рівність

$$f(x) = f(x+T).$$

Число T називається *періодом* функції $f(x)$. Якщо T − період функції, то її періодами також є числа kT, де $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$. Найменший з додатніх періодів функції, якщо такий існує, називається *основним періодом* функції.

Найпростішими періодичними функціями є функції $\sin x$ та $\cos x$, основний період яких $T = 2\pi$.

Періодична функція $x = f(t)$ зображує періодичний рух, або коливання точки, що має в момент часу t координату x.

Найпростішим коливанням є *просте гармонічне коливання*, яке задається формулою

$$x(t) = a \cdot \sin(\omega t + \varphi_0),\ t \geq 0, \tag{45}$$

де a − амплітуда коливання, ω − циклічна частота, φ_0 − початкова фаза.

Функцію (45) називають *простою гармонікою.* Основний період цієї функції $T = \frac{2\pi}{\omega}$. Зробимо перетворення простої гармоніки:

$$x(t) = a \cdot \sin(\omega t + \varphi_0) = a \cdot \sin\omega t \cdot \cos\varphi_0 + a \cdot \cos\omega t \cdot \sin\varphi_0 =$$
$$= A \cdot \cos\omega t + B \cdot \sin\omega t, \tag{46}$$

де $A = a \cdot \sin\varphi_0$, $B = a \cdot \cos\varphi_0$. Отже, просте гармонічне коливання описується періодичними функціями $\sin\omega t$ та $\cos\omega t$.

Складне гармонічне коливання – це коливання, що виникає внаслідок накладання скінченної (або нескінченної) кількості простих гармонік.

Функція

$$\varphi(t) = a_1 \cdot \sin(t + \varphi_1) + a_2 \cdot \sin(t + \varphi_2) + ... + a_n \cdot \sin(t + \varphi_n)$$

задає складне гармонічне коливання, оскільки є результатом накладання n простих гармонік. Основний період функції $\varphi(t)$ дорівнює найменшому спільному кратному всіх періодів простих гармонік $T_1 = 2\pi$, $T_2 = \frac{2\pi}{2} = \pi$, $T_3 = \frac{2\pi}{3}$, … , $T_n = \frac{2\pi}{n}$, тобто $T = 2\pi$.

Постає питання: чи всяку періодичну функцію, що описує періодичний процес, можна подати у вигляді суми простих гармонік (45) або (46)?

Тригонометричний ряд Фур'є. Теорема Діріхле

Означення. Функціональний ряд виду

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos nx + b_n \sin nx\right) \tag{47}$$

називається *тригонометричним рядом*, сталі числа a_0, a_n, b_n $(n = 1,2,\ldots)$ називаються *коефіцієнтами тригонометричного ряду*.

Припустимо, що ряд (47) на відрізку $[-\pi, \pi]$ рівномірно збігається до функції $f(x)$:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos nx + b_n \sin nx\right). \tag{48}$$

Оскільки $\sin nx$ і $\cos nx$ є періодичними функціями з періодом $\frac{2\pi}{n}$, сума ряду $f(x)$ є 2π-періодичною функцією. Проінтегруємо ряд (48) почленно на відрізку $[-\pi, \pi]$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_{-\pi}^{\pi} a_n \cos nx dx + \int_{-\pi}^{\pi} b_n \sin nx dx \right).$$

Обчислимо інтеграли від членів ряду:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} dx = \pi a_0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} a_n \cos nx dx = \frac{a_n \sin nx}{n} \Bigg|_{-\pi}^{\pi} = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} b_n \sin nx dx = -\frac{b_n \cos nx}{n} \Bigg|_{-\pi}^{\pi} = 0.$$

Отже,

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} dx = \pi a_0,$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx.$$

Помножимо ряд (48) на $\cos kx$ і проінтегруємо почленно на відрізку $[-\pi, \pi]$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx = \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx dx +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos kx dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos kx dx \right). \qquad (49)$$

Оскільки

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx dx = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos kx dx = \begin{cases} 0, & \text{якщо } k \neq n, \\ \pi, & \text{якщо } k = n, \end{cases} \qquad \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos kx dx = 0,$$

то із рівності (49) у разі $k = n$ дістанемо

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = a_n \pi,$$

тобто

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx, \quad n = 1,2,\ldots$$

Аналогічно, помноживши ряд (48) на $\sin kx$ і проінтегрувавши почленно на відрізку $[-\pi, \pi]$, отримаємо:

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx, \quad n = 1,2,\ldots$$

Нехай $f(x)$ − періодична з періодом 2π функція визначена на відрізку $[-\pi, \pi]$. Коефіцієнти

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx, \tag{50}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx, \quad n = 1,2,\ldots$$

називаються *коефіцієнтами Фур'є* функції $f(x)$.

Тригонометричний ряд (47), коефіцієнти якого є коефіцієнтами Фур'є (50), називається *рядом Фур'є* функції $f(x)$:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos nx + b_n \sin nx \right).$$

Позначення ~ означає, що інтегровній на відрізку $[-\pi, \pi]$ функції $f(x)$ ставиться у відповідність її ряд Фур'є.

Тобто справедлива теорема.

Теорема 25. Якщо функція $f(x)$ представляється на відрізку $[-\pi, \pi]$ рівномірно збіжним на цьому відрізку тригонометричним рядом, то цей ряд є її рядом Фур'є, коефіцієнти якого визначаються формулами (50).

Означення. Функція $f(x)$ називається *кусково-монотонною* на відрізку $[a, b]$, якщо цей відрізок можна розділити скінченною кількістю точок $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ на інтервали $(a, x_1), (x_1, x_2), \ldots, (x_{n-1}, b)$ так, щоб на кожному з цих інтервалів функція була монотонною.

Означення. Функція $f(x)$ називається *кусково-неперервною* на відрізку $[a, b]$, якщо вона на цьому відрізку або неперервна, або має скінченну кількість точок розриву першого роду.

Наступна теорема дає достатню умову представлення функції її рядом Фур'є.

Теорема 26 (Діріхле). Нехай періодична з періодом 2π функція $f(x)$ є кусково-неперервною і кусково-монотонною на відрізку $[-\pi, \pi]$. Тоді ряд Фур'є функції $f(x)$ збігається на всій числовій осі. Якщо $S(x) -$ сума цього ряду Фур'є, то:

1) в усіх точках неперервності функції $f(x)$ інтервалу $(-\pi; \pi)$

$$S(x) = f(x);$$

2) в усіх точках x_0 розриву (першого роду) функції $f(x)$

$$S(x) = \frac{f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0)}{2};$$

3) в кінцевих точках відрізка $[-\pi, \pi]$

$$S(-\pi) = S(\pi) = \frac{f(-\pi + 0) + f(\pi - 0)}{2}.$$

Тобто за умов теореми Діріхле справедливий розклад

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos nx + b_n \sin nx \right), \tag{51}$$

де коефіцієнти обчислюються за формулами (50).

Умови, які накладаються на функцію $f(x)$ для можливості її подання рядом Фур'є, значно простіші, ніж у разі розкладання в степеневий ряд. Для розкладу в ряд Тейлора функція має бути скільки завгодно разів диференційовною. Для розкладу в ряд Фур'є достатньо вимагати, щоб функція мала на відрізку скінченну кількість точок розриву першого роду і була кусково-монотонною. При дослідженні періодичних процесів, доцільніше розкладати періодичні функції не в степеневі ряди, а у ряди Фур'є.

Зауваження. Існують функції, що не задовольняють умови теореми Діріхле, але розкладаються в ряд Фур'є. Тобто теорема Діріхле дає тільки достатню умову представлення функції рядом Фур'є, але не необхідну.

Твердження 7. Якщо $f(x)$ − періодична функція з періодом T, то

$$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_b^{b+T} f(x)dx \text{ для всіх } a,b \in R.$$

Тобто інтеграл від періодичної функції по будь-якому відрізку, довжина якого дорівнює періоду, має те саме значення.

Доведення. Дійсно,

$$\int_{a+T}^{b+T} f(x)dx = \left| \begin{matrix} x = y + T \\ dx = dy \end{matrix} \right| = \int_a^b f(y+T)dy = \int_a^b f(y)dy.$$

Тому

$$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^{b+T} f(x)dx + \int_{b+T}^{a+T} f(x)dx =$$

$$= \int_b^{b+T} f(x)dx + \left(\int_a^b f(x)dx - \int_{a+T}^{b+T} f(x)dx \right) = \int_b^{b+T} f(x)dx. \qquad \blacksquare$$

Отже, коефіцієнти (50) ряду Фур'є для 2π-періодичної функції $f(x)$ можна обчислювати за формулами

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_a^{a+2\pi} f(x)dx,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_a^{a+2\pi} f(x)\cos nx dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_a^{a+2\pi} f(x)\sin nx dx, \; n = 1,2,\ldots$$

Ці формули зручніше використовувати у разі, коли 2π-періодична функція задана на проміжку $[0,2\pi]$.

Приклад 40. Розкласти в ряд Фур'є 2π-періодичну функцію (рис. 3)

$$f(x)=\begin{cases}0, & -\pi<x<0,\\ x, & 0\le x\le\pi.\end{cases}$$

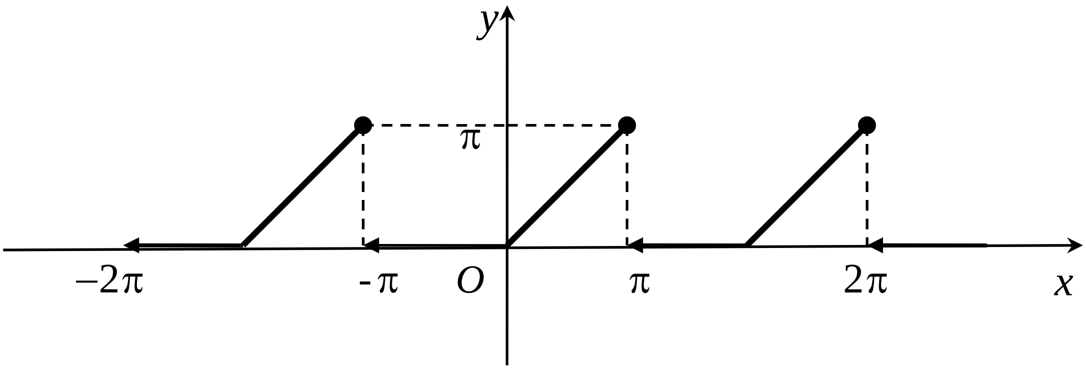


Рис. 3

Розв’язання. Функція кусково-монотонна та кусково-неперервна. Знайдемо коефіцієнти ряду Фур'є.

$$a_0=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}0\cdot dx+\int_{0}^{\pi}xdx\right]=\left.\frac{x^2}{2\pi}\right|_0^{\pi}=\frac{\pi}{2};$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}0\cdot\cos nxdx+\int_{0}^{\pi}x\cos nxdx\right]=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos nxdx=\left|\begin{matrix}u=x,\ du=dx,\\ dv=\cos nxdx,\\ v=\dfrac{\sin nx}{n}\end{matrix}\right|=\left.\frac{x\sin nx}{\pi n}\right|_0^{\pi}-\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin nx}{n}dx=$$

$$=\left.\frac{\cos nx}{\pi n^2}\right|_0^{\pi}=\frac{(-1)^n-1}{\pi n^2};$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}0\cdot\sin nxdx+\int_{0}^{\pi}x\sin nxdx\right]=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin nx dx = \left| \begin{array}{l} u = x,\ du = dx, \\ dv = \sin nx dx, \\ v = -\dfrac{\cos nx}{n} \end{array} \right| = -\left.\frac{x\cos nx}{\pi n}\right|_0^{\pi} + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\cos nx}{n}dx =$$

$$=\frac{(-1)^{n+1}}{n} + \left.\frac{\sin nx}{\pi n^2}\right|_0^{\pi} = \frac{(-1)^{n+1}}{n};$$

Отже, ряд Фур'є має вигляд

$$f(x) = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n - 1}{\pi n^2}\cos nx + \frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx\right) =$$

$$=\frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \ldots\right) +$$

$$+\left(\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \ldots\right).$$

Цей ряд збігається до функції $f(x)$ для всіх $x \neq \pm(2n-1)\pi,\ n \in \mathbf{N}$. У точках $x = \pm(2n-1)\pi$ сума ряду дорівнює

$$S(\pm(2n-1)\pi) = \frac{\pi + 0}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

Зауваження. Обчислюючи коефіцієнти Фур’є, доцільно враховувати:

1) $\cos n\pi = (-1)^n,\ n \in \mathbf{Z}$;

2) $\sin n\pi = 0,\ n \in \mathbf{Z}$;

3) $\cos\dfrac{n\pi}{2} = \begin{cases} (-1)^k, & \text{якщо } n = 2k,\ k \in \mathbf{Z}, \\ 0, & \text{якщо } n = 2k-1,\ k \in \mathbf{Z}; \end{cases}$

4) $\sin\dfrac{n\pi}{2} = \begin{cases} 0, & \text{якщо } n = 2k,\ k \in \mathbf{Z}, \\ (-1)^{k+1}, & \text{якщо } n = 2k-1,\ k \in \mathbf{Z}. \end{cases}$

Розклад в ряд Фур'є парних і непарних функцій

Якщо функція $f(x)$ інтегровна на симетричному відрізку $[-a,a]$, то

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \begin{cases} 2\int_{0}^{a} f(x)dx, & \text{якщо } f(x) - \text{парна функція}, \\ 0, & \text{якщо } f(x) - \text{непарна функція}. \end{cases}$$

Якщо $f(x)$ − парна, то $f(x)\cos nx$ − парна функція, а $f(x)\sin nx$ −непарна функція.

Якщо $f(x)$ − непарна, то $f(x)\cos nx$ − непарна функція, а $f(x)\sin nx$ −парна функція.

Тому у разі розкладу *парної* 2π*-періодичної функції* у ряд Фур'є коефіцієнти Фур'є можна обчислювати за формулами

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)dx, \quad a_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos nxdx, \; b_n = 0, \; n = 1,2,\ldots \quad (52)$$

Для *непарної* 2π*-періодичної* функції

$$a_0 = a_n = 0, \quad b_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin nxdx, \; n = 1,2,\ldots \quad (53)$$

Для парної функції маємо розклад *по косинусах*, для непарної − *по синусах*.

Приклад 41. Розкласти в ряд Фур'є періодичну з періодом 2π функцію:

$$\begin{cases} f(x) = -1 & \text{якщо } -\pi < x < 0, \\ f(x) = 1 & \text{якщо } 0 \le x \le \pi. \end{cases}$$

Розв’язок. Функція кусково-монотонна та кусково-неперервна на відрізку $[-\pi,\pi]$.

Функція непарна, отже $a_0 = a_n = 0$.

$$b_n = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}(-1)\sin nxdx + \int_{0}^{\pi}\sin nxdx\right] = \frac{1}{\pi}\left[\left.\frac{\cos nx}{n}\right|_{-\pi}^{0} - \left.\frac{\cos nx}{n}\right|_{0}^{\pi}\right] =$$

$$= \frac{2}{n\pi}(1-\cos n\pi) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } n \text{ парне,} \\ \dfrac{4}{n\pi}, & \text{якщо } n \text{ непарне.} \end{cases}$$

Отже, ряд Фур'є має вигляд

$$f(x) = \frac{4}{\pi}\left[\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \ldots + \frac{\sin(2k+1)x}{2k+1} + \ldots\right].$$

На рисунку 4 показано, як частинні суми ряду наближають функцію $f(x)$.

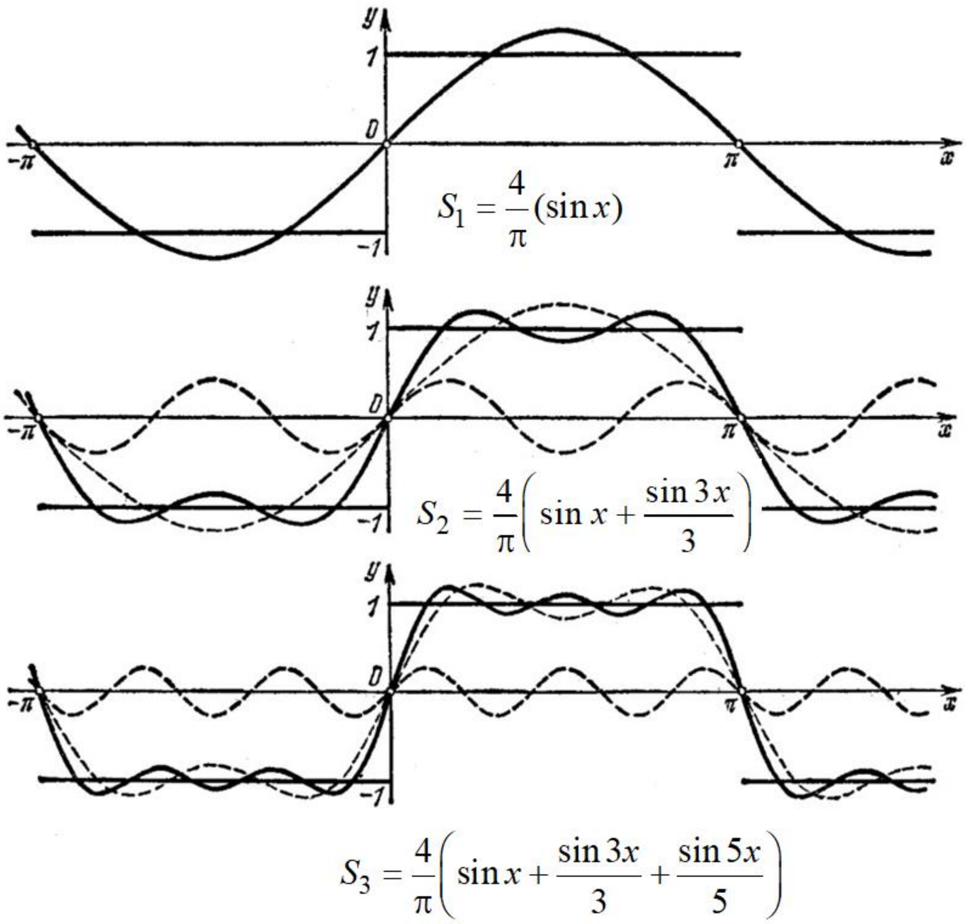


Рис. 4

Ряд Фур\`є для функції з періодом $2l$

Нехай $f(x)$ − періодична функція з періодом $2l$, взагалі кажучи відмінним від 2π. Якщо зробити заміну змінної $x = \frac{l}{\pi}t$, то функція

$f\left(\frac{l}{\pi}t\right)$ буде періодичною функцією від t з періодом 2π. Дійсно, якщо $t=-\pi$, то $x=-l$, якщо $t=\pi$, то $x=l$ і за умови $t\in[-\pi,\pi]$ маємо $x\in[-l,l]$,

$$f\left(\frac{l}{\pi}(t+2\pi\right)=f\left(\frac{l}{\pi}t+2l\right)=f\left(\frac{l}{\pi}t\right).$$

Розкладемо функцію $f\left(\frac{l}{\pi}t\right)$ в ряд Фур'є на відрізку $[-\pi,\pi]$:

$$f\left(\frac{l}{\pi}t\right)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nt+b_n\sin nt),$$

де

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\left(\frac{l}{\pi}t\right)dt,$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\left(\frac{l}{\pi}t\right)\cos ntdt,\quad b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\left(\frac{l}{\pi}t\right)\sin ntdt,$$

Зробимо перетворення: $x=\frac{l}{\pi}t,\quad t=\frac{\pi}{l}x,\quad dt=\frac{\pi}{l}dx$.

Повернувшись до змінної *x*, дістанемо коефіцієнти ряду Фур’є для періодичної функції $f(x)$ з періодом $T=2l$:

$$a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)dx,$$

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{\pi nx}{l}dx,\ b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{\pi nx}{l}dx,\ n=1,2,\ldots \quad (54)$$

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{\pi nx}{l}+b_n\sin\frac{\pi nx}{l}\right). \quad (55)$$

Ряд (55) з коефіцієнтами (54) називається *рядом Фур'є функції* $f(x)$ *з періодом* $T=2l$.

Всі наведені теореми для рядів Фур'є 2π-періодичних функцій справедливі і для рядів Фур'є функцій з періодом $T=2l$.

Розклад в ряд Фур'є неперіодичної функції

Неперіодичну функцію $f(x)$, визначену на всій числовій осі, розкласти в ряд Фур'є не можна, оскільки сума ряду Фур'є є періодичною функцією і тому не може збігатися з функцією $f(x)$ для всіх x. Однак неперіодичну функцію можна подати у вигляді суми ряду Фур'є на будь-якому скінченному проміжку $[a,b]$, на якому вона задовольняє умови теореми Діріхле. Для цього розглянемо довільну періодичну кусково-неперервну і кусково-монотонну функцію $f^*(x)$ з періодом $T = 2l = |b-a|$, яка збігається з функцією $f(x)$ на відрізку $[a,b]$, тобто

$$f^*(x) = f(x),\ x \in [a,b].$$

Розкладемо функцію $f^*(x)$ в ряд Фур'є. Сума цього ряду у всіх точках відрізка $[a,b]$ (крім точок розриву) збігається з функцією $f(x)$, тобто функцію $f(x)$ розкладено в ряд Фур'є на відрізку $[a,b]$. Поза межами цього відрізка сума отриманого ряду з функцією $f(x)$ не збігається.

Розглянемо важливий частинний випадок. Нехай неперіодична функція $f(x)$ задана на відрізку $[0,l]$. Цю функцію можна довизначити на відрізку $[-l,0]$ довільним чином (зберігаючи кусково-неперервність і кусково-монотонність) і далі, розклавши отриману функцію у ряд Фур'є на відрізку $[-l,l]$, матимемо розклад функції $f(x)$ на відрізку $[0,l]$.

Зокрема, на відрізку $[-l,0]$ можна вважати $f(x) = f(-x)$, тоді отримаємо парну функцію. В цьому разі її розклад у ряд Фур'є містить тільки косинуси. Якщо на відрізку $[-l,0]$ вважати $f(x) = -f(-x)$, отримаємо непарну функцію. В цьому разі її розклад у ряд Фур'є містить тільки синуси.

Таким чином, визначену на відрізку $[0,l]$ кусково-монотонну і кусково-неперервну функцію $f(x)$ можна розкласти в ряд Фур'є і тільки по косинусах і тільки по синусах.

Приклад 42. Функцію $f(x)=1-2x$, задану на інтервалі (0,2) розкласти в ряд Фур'є за косинусами.

Розв’язання. Функція задана на інтервалі $(0,2)$. Оскільки функцію потрібно розкласти в ряд за косинусами, довизначимо її на інтервалі $(-2,0)$ парним чином (рис. 5). Далі продовжимо цю функцію періодично з періодом $T=2l=4$ на всю числову пряму і розкладемо в ряд Фур'є (55) з коефіцієнтами (54) для значення $l=2$.

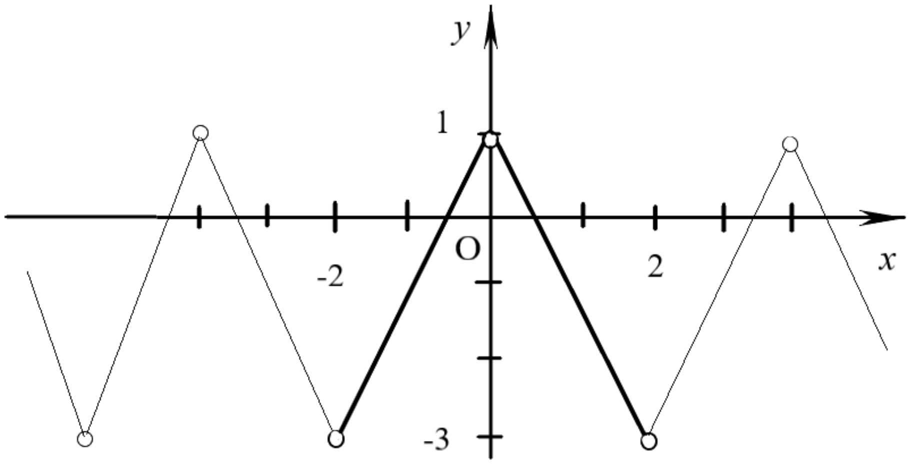


Рис. 5

Для парної функції коефіцієнти ряду Фур'є обчислимо за формулами (52):

$$a_0=\frac{2}{2}\int_0^2(1-2x)dx=(x-x^2)\Big|_0^2=-2.$$

$$a_n=\frac{2}{2}\int_0^l f(x)\cos\frac{\pi nx}{l}dx=\int_0^2(1-2x)\cos\frac{\pi nx}{2}dx=\left|\begin{array}{l} u=(1-2x),\;\; du=-2dx, \\ dv=\dfrac{\cos\pi nx}{2}dx, \\ v=\dfrac{2}{\pi n}\sin\dfrac{\pi nx}{2} \end{array}\right|=$$

$$=\left((1-2x)\frac{2}{\pi n}\sin\frac{\pi nx}{2}\Big|_0^2+\frac{4}{\pi n}\int_0^2\sin\frac{\pi nx}{2}dx\right)=+\frac{4}{\pi n}\int_0^2\sin\frac{\pi nx}{2}dx=$$

$$=-\frac{8}{\pi^2n^2}\cos\frac{\pi nx}{2}\Big|_0^2=-\frac{8((-1)^n-1)}{\pi^2n^2};\quad b_n=0;$$

Таким чином, в точках неперервності ряд має вигляд

$$f(x) = -1 + \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty} - \frac{8((-1)^n - 1)}{\pi^2 n^2}\cos\frac{\pi n x}{2}.$$

У граничних точках маємо:

$$S(0) = \frac{1+1}{2} = 1, \quad S(2) = S(-2) = \frac{-3-3}{2} = -3.$$

Відповідь:

$$f(x) = -1 + \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty} - \frac{8((-1)^n - 1)}{\pi^2 n^2}\cos\frac{\pi n x}{2},$$

$$S(0) = 1, \quad S(2) = S(-2) = -3.$$

Приклад 43. Розкласти в ряд Фур'є функцію $f(x) = x^2$, $-1 \le x \le 1$.

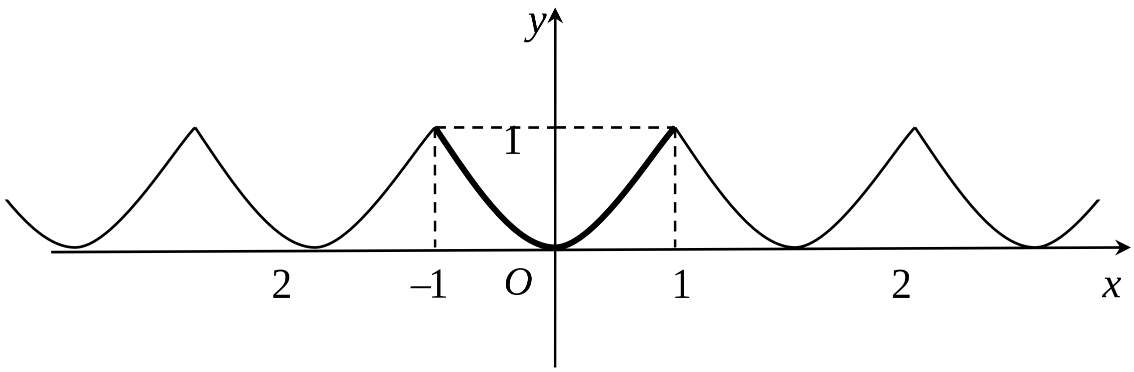


Рис. 6

Розв’язання. Функція задана на відрізку $[-1,1]$. Продовжимо цю функцію періодично з періодом $T = 2l = 2$ на всю числову пряму і розкладемо в ряд Фур'є (55) з коефіцієнтами (54) для значення $l = 1$.

Оскільки функція парна, скористаємося формулами (52):

$$a_0 = \frac{2}{1}\int_0^l x^2 dx = \frac{2}{3}x^3\Big|_0^1 = \frac{2}{3}.$$

$$a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{\pi nx}{l}dx=2\int_0^1 x^2\cos\pi nxdx=\left|\begin{array}{l}u=x^2,\ du=2xdx,\\ dv=\cos\pi nxdx,\\ v=\frac{1}{\pi n}\sin\pi nx\end{array}\right|=$$

$$=2\left(\frac{x^2}{\pi n}\sin\pi nx\Big|_0^1-\frac{2}{\pi n}\int_0^l x\sin\pi nxdx\right)=-\frac{4}{\pi n}\int_0^l x\sin\pi nxdx=$$

$$=\left|\begin{array}{l}u=x,\ du=dx,\\ dv=\sin\pi nxdx,\\ v=-\frac{1}{\pi n}\cos\pi nx\end{array}\right|=-\frac{4}{\pi n}\left(-\frac{x}{\pi n}\cos\pi nx\Big|_0^1+\frac{1}{\pi n}\int_0^l\cos\pi nxdx\right)=$$

$$=\frac{4x}{\pi^2n^2}\cos\pi nx\Big|_0^1=\frac{4(-1)^n}{\pi^2n^2};\quad b_n=0.$$

Отже,

$$f(x)=\frac{1}{3}+\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos\pi nx=$$

$$=\frac{1}{3}+\frac{4}{\pi^2}\left(-\frac{\cos\pi x}{1^2}+\frac{\cos 2\pi x}{2^2}-\frac{\cos 3\pi x}{3^2}+\frac{\cos 4\pi x}{4^2}-\ldots\right).$$

Контрольні запитання

1. Який функціональний ряд називається тригонометричним рядом?

2. Який функціональний ряд називається рядом Фур'є?

3. Сформулюйте теорему Діріхле про достатні умови розкладу 2π-періодичної функції в ряд Фур'є?

4. Який вигляд мають коефіцієнти Фур'є для парних та непарних 2π-періодичних функцій?

5. Як розкладається в ряд Фур'є функція довільного періоду?

6. Як розкладається в ряд Фур'є неперіодична функція?

Вправи

1. Розкладіть в ряд Фур'є 2π-періодичну функцію $f(x)$, задану на інтервалі $(-\pi;\pi]$.

а) $f(x) = 2x$, $x \in (-\pi;\pi]$;

б) $f(x) = x + \pi$, $x \in (-\pi;\pi]$;

в) $f(x) = x^2$, $x \in (-\pi;\pi]$;

в) $f(x) = \begin{cases} 2, & \text{якщо } x \in (-\pi;0); \\ -1, & \text{якщо } x \in [0;\pi]. \end{cases}$

г) $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \in (-\pi;0); \\ x-3, & \text{якщо } x \in [0;\pi]. \end{cases}$

д) $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \in (-\pi;0); \\ x-2, & \text{якщо } x \in [0;\pi]. \end{cases}$

е) $f(x) = \begin{cases} 5x+1, & \text{якщо } x \in (-\pi;0); \\ 0, & \text{якщо } x \in [0;\pi]. \end{cases}$

ж) $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x \in (-\pi;0); \\ \pi - 2x, & \text{якщо } x \in [0;\pi]. \end{cases}$

2. Розкладіть у ряд Фур'є 2π-періодичні функції:

а) $f(x) = 2x$, $x \in (0;2\pi]$; б) $f(x) = x^2$, $x \in (0;2\pi]$.

3. Розкладіть у ряд Фур'є за косинусами функції, задані на півінтервалі $x \in (0;\pi]$:

а) $f(x) = \dfrac{1}{2}x^2$;

б) $f(x) = \sin\dfrac{x}{2}$;

в) $f(x) = \begin{cases} x, & \text{якщо } x \in (0;\frac{\pi}{2}); \\ \pi - x, & \text{якщо } x \in [\frac{\pi}{2};\pi]. \end{cases}$

4. Розкладіть у ряд Фур'є за синусами функції, задані на півінтервалі $x \in (0;\pi]$:

а) $f(x) = x(\pi - x)$;

б) $f(x) = \cos 2x$;

в) $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x \in (0;\frac{\pi}{2}); \\ 0, & \text{якщо } x \in [\frac{\pi}{2};\pi]. \end{cases}$

5. Розкладіть у ряд Фур'є функції:

а) $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x \in (-1;0); \\ -1, & \text{якщо } x \in [0;1]. \end{cases}$ б) $f(x) = \begin{cases} x, & \text{якщо } x \in (-2;1); \\ -1, & \text{якщо } x \in [1;2]. \end{cases}$

6. Розкладіть у ряд Фур'є функцію $f(x)$, задану на відрізку $[0,l]$: а) за синусами; б) за косинусами.

1) $f(x) = 3 - x$, $x \in [0;3]$;

2) $f(x) = x(1 - x)$, $x \in [0;1]$;

3) $f(x) = \begin{cases} 1 - x, & \text{якщо } x \in [0;2); \\ -1, & \text{якщо } x \in (2;4]. \end{cases}$

4) $f(x) = \begin{cases} x, & \text{якщо } x \in [0;1); \\ 2 - x, & \text{якщо } x \in [1;2]. \end{cases}$

Список літератури

1. *Денисюк В.П.* Вища математика: навчальний посібник/ Денисюк В.П., Репета В.К., Гаєва К.А., Клешня Н.О. – Ч. 3 – К.: Книжкове видавництво НАУ, 2005. – 444 с.

2. *Дубовик В.П.* Вища математика: навчальний посібник/ Дубовик В.П., Юрик І.І. – К.: Вища школа,1993. – 648 с.

3. *Дубовик В.П.* Вища математика: збірник задач/ Дубовик В.П., Юрик І.І. – К.: «А.С.К.», 2005. – 480 с.

4. *Дороговцев А.Я* Математичний аналіз: Підручник. У 2 ч. Частина 1. – К.: Либідь, 1994. – 304 с.

5. *Овчинніков П.П.* Вища математика: підручник: У 2 ч. – Ч. 2: Диференціальні рівняння. Операційне числення. Ряди та їх застосування. Стійкість за Ляпуновим. Рівняння математичної фізики. Оптимізація і керування. Теорія ймовірностей. Числові методи. – К.: Техніка, 2004. – 792 с.

6. *Пискунов Н.С.* Дифференциальное и интегральное исчисление: Учебное пособие для втузов. – М.: Наука, 1985. – 560 с.

Навчальне видання

БОНДАРЕНКО Наталія В’ячеславівна
ОТРАШЕВСЬКА Валентина Володимирівна

ЧИСЛОВІ ТА ФУНКЦІОНАЛЬНІ РЯДИ

Конспект лекцій

Випусковий редактор *Ю.М. Долгополова*
Комп’ютерне верстання *А.П. Селівестрової*

Підписано до друку 12.02.2024 . Формат $60\times80_{1/16}$
Ум. друк. арк. 4,88. Обл.-вид. акр. 5,25.
Електронний документ. Вид. № 6/І-24

Видавець і виготовлювач

Київський національний університет будівництва і архітектури

Повітрофлотський проспект, 31, Київ, Україна, 03037

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру суб'єктів видавничої справи ДК № 808 від 13.02.2002 р.