Теорія ймовірностей та математична статистика

Чорноіван Юрій

19 жовтня 2024 р.

Зміст

1 Елементи теорії множин

1.1 Визначення множини. Зліченні і незліченні множини

Поняття множини належить до первісних неозначуваних понять, а тому воно може бути лише у той чи інший спосіб роз'яснене за допомогою прикладів чи синонімів.

Визначення. Множина – набір, сукупність деяких об'єктів (які називаються її елементами), які мають загальну для всіх них характеристичну властивість.

Множини прийнято позначати великими буквами латинського алфавіту, а їхні елементи – малими літерами латинського алфавіту. Запис $a \in A$ означає, що елемент a належить множині A. Запис $b \notin A$ означає, що b не є елементом множини A.

За кількістю елементів множини можуть бути скінченними, зліченними і незліченними.

Визначення. Скінченною називається множина, якщо існує таке натуральне число n, що кількість її елементів дорівнює n.

Визначення. Множина є **зліченною**, якщо між нею та множиною натуральних чисел можна встановити взаємно однозначну відповідність, тобто кожному елементу цієї множини можна поставити у відповідність натуральне число, і навпаки – кожному натуральному числу можна поставити у відповідність один елемент множини, причому різним елементам відповідають різні числа і різним числам відповідають різні елементи.

Визначення. Нескінченна множина, яка не є зліченною, називається **незліченною** множиною.

Якщо скінченна множина A складається з елементів a, b, c, то це записують так: $A = \{a; b; c\}$.

Визначення. **Порожньою** множиною називають множину, яка не містить жодного елемента, і позначають її символом $\varnothing$.

Визначення. Універсальною множиною U називається сукупність усіх множин, які можуть розглядатись у контексті певної задачі.

Визначення. Говорять, що множина A **міститься** в множині B, якщо довільний елемент множини A належить множині B і записують це так: $A \subset B$.

Визначення. Якщо $A \subset B$ і $B \subset A$, то говорять, що множини A та B **є рівними** і позначають $A = B$.

Рівні множини містять однакові елементи, записані в довільному порядку.

1.2 Дії над множинами

1. **Об'єднанням** (сумою) двох множин A та B називають множину $A \cup B$, яка складається з усіх елементів, які належать або множині A, або множині B.

2. **Перетином** (добутком) двох множин A та B називають множину $A \cap B$, яка складається з усіх елементів, які належать множинам A та B одночасно.

3. **Різницею** множин A та B називають множину $A \setminus B$, яка складається з усіх елементів, які належать множині A і не належать множині B.

4. Симетричною різницею множин A та B називають множину $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

5. **Доповненням** до множини A називають множину $\bar{A} = U \setminus A$.

1.3 Властивості дій над множинами

1. Комутативність:
$$A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A$$

2. Асоціативність:
$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C).$$

3. Дистрибутивність:
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C),$$
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

4. Правила де Моргана:
$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}, \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}.$$

5. $A \cup A, A \cap A = A$.

6. $A \cup U = U, A \cap U = A$.

7. $A \cup \varnothing = A, A \cap \varnothing = \varnothing$.

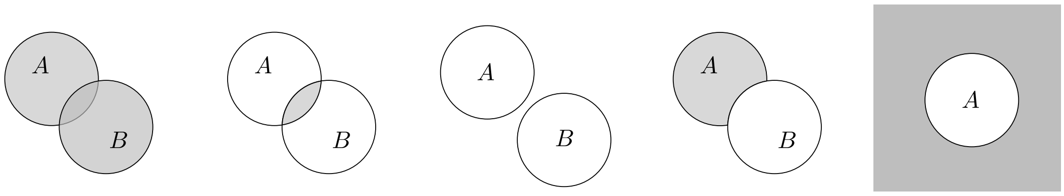
8. $A \cup \bar{A} = U, A \cap \bar{A} = \varnothing$.

9. $\bar{\bar{A}} = A$.

1.4 Діаграми Венна

Дії з множинами зручно подавати у вигляді діаграм, у яких множини подаються умовними кругами, а універсальна множина — усією площиною рисунка. Такі діаграми називають *діаграмами Венна.*

Нижче наведено приклади діаграм Венна для дій над множинами.



(а) $A \cup B$ (б) $A \cap B$ (в) $A \cap B = \varnothing$ (г) $A \setminus B$ (д) $\bar{A}$

1.5 Потужність множин

Для порівняння нескінченних множин використовують поняття потужності.

Визначення. *Потужність* – характеристика множин (у тому числі нескінченних), що узагальнює поняття кількості (числа) елементів скінченної множини.

В основі цього поняття лежать природні уявлення про порівняння множин:

- Будь-які дві множини, між елементами яких може бути встановлено взаємно однозначну відповідність (біекція), містять однакову кількість елементів (мають однакову потужність).
- Зворотно: множини, рівні за потужністю, мусять допускати таку взаємно однозначну відповідність.
- Частина множини не перевершує повної множини за потужністю (тобто за кількістю елементів).

1.6 Декартів добуток множин

Поряд з множинами розглядають **впорядковані множини** або впорядковані набори, тобто сукупність елементів, записаних у певному порядку. Впорядковану множину A, яка складається з елементів a, b, c, причому елемент a стоїть на першому місці, елемент b – на другому, елемент c – на третьому, записують у вигляді $A = (a, b, c)$.

Визначення. Декартовим добутком множин A та B називають набір впорядкованих пар (a, b): $a \in A$, $b \in B$ і позначають $A \times B$.

Декартовим добутком множин A_1, A_2, $\ldots A_n$ називається впорядкований набір $(a_1, a_2, ..., a_n)$: $a_1 \in A_1$, $a_2 \in A_2$, $\ldots$, $a_n \in A_n$.

Декартові добутки використовують для побудови теорії взаємозв'язку між множинами.

2 Елементи комбінаторики

Комбінаторика – розділ математики, що вивчає розміщення та вибір об'єктів відповідно до певних правил і методи підрахунку кількості всіх можливих способів, якими ці розміщення та вибір можуть бути виконані.

Методи комбінаторики відіграють важливу роль в обчисленні ймовірностей різноманітних подій, пов'язаних з експериментами, що мають скінченну кількість результатів.

Сформулюємо два універсальні правила, які застосовують для розв'язання комбінаторних задач.

Правило суми. Якщо деякий об'єкт A_1 можна вибрати n_1 способами, об'єкт A_2 – іншими n_2 способами, A_3 – відмінними від перших двох n_3 способами тощо, об'єкт A_k – n_k способами, відмінними від перших $(k-1)$, то вибір «або A_1, або A_2, $\ldots$, або A_k» можна здійснити $(n_1 + n_2 + \ldots n_k)$ способами.

Приклад. В ящику лежать дві червоних, три зелених і чотири чорних кулі. Скількома способами можна вибрати кольорову кулю?

Розв'язок. Вибрати кольорову кулю – це вибрати червону або зелену кулю. Червону кулю можна вибрати двома способами, а зелену кулю – трьома способами. Отже, кольорову кулю можна вибрати $2 + 3$ способами.

Приклад. В будівельно-конструкторському відділі працюють двоє аналітиків, п'ятеро програмістів і 10 інженерів. Для понаднормової роботи в святковий день керівник відділу повинен вибрати одного співробітника. Скільки у керівника є способів це зробити?

Розв'язок. Керівник відділу може вибрати одного аналітика $n_1 = 2$ способами, одного програміста – $n_2 = 5$ способами, а одного інженера $n = 10$ способами. Оскільки за умовою задачі керівник відділу може вибрати будь-кого із своїх співробітників, то згідно з правилом суми в нього є $n_1 + n_2 + n_3 = 2 + 5 + 10 = 17$ різних способів вибрати співробітника для понаднормової роботи.

Правило множення (основне правило комбінаторики). Якщо деякий об'єкт A_1 можна вибрати n_1 способами, об'єкт A_2 (після того, як об'єкт A_1 вже вибраний) можна вибрати n_2 способами тощо, об'єкт A_k (після того як всі попередні об'єкти вже вибрано) можна вибрати n_k способами, то вибрати всі об'єкти $A_1 A_2 \dots A_k$ у такій послідовності можна $n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_k$ способами.

Приклад. Скільки чотиризначних чисел можна скласти з цифр «1», «2», «3», «4», «5», якщо 1) цифри не повторюються; 2) цифри можуть повторюватися?

Розв'язок. 1) Маємо п'ять різних способів, щоб вибрати цифру на першому місці зліва в чотиризначному числі. Після того як перше місце зайняте якоюсь цифрою, залишилося чотири цифри для заповнення другого місця в числі. Для заповнення третього місця залишився вибір з трьох цифр, для четвертого — двох цифр. Тому, згідно з правилом множення маємо $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ способи розставляння цифр, тобто з даних п'яти цифр можна скласти 120 чотиризначних числа (ось деякі з цих чисел: 1543, 4321, 1234, ...).

2) Зрозуміло, якщо цифри можуть повторюватись, то чотиризначних чисел буде $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 625$ (наприклад, 1244, 1333, 1313).

Приклад. З трьох студентських груп потрібно обрати делегацію на конференцію, взявши по одному студенту з кожної групи. Скільки різних делегацій можна скласти, якщо в першій групі навчається 18, у другій – 20, в третій – 22 студенти?

Розв'язок. Скористаємося правилом множення. З першої групи одного студента можна вибрати 18 способами, з другої – 20, з третьої 22 способами. Кількість команд дорівнює добутку чисел 18, 20 і 22, тобто становить 7920.

2.1 Схема вибору без повторень

Нехай дано деяку скінченну множину A, що містить n різних елементів $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$.

2.1.1 Перестановки

Перестановкою з n елементів називається довільне розміщення всіх n різних елементів множини A у визначеному порядку. Кількість всіх можливих перестановок з n елементів дорівнює

$$P = n!,$$

де $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$, $0! = 1$.

Приклад. 1) $A = \{a, b, c\}$. Випишемо всі перестановки з трьох елементів: (a, b, c), (a, c, b), (b, a, c), (b, c, a), (c, a, b), (c, b, a) – всього шість перестановок. 2) Скількома способами можна на полиці шафи розставити шість книг? Кількість таких способів дорівнює $6! = 720$.

Приклад. Дванадцять осіб розсаджуються випадковим чином в ряд. Скільки є можливостей того, що дві особи сядуть поруч?

Розв'язок. Множину людей поділяємо на дві підмножини: 10 осіб і дві певні особи. 10 осіб можуть бути впорядковані 10! способами, дві особи можуть бути впорядковані 2! способами, крім того, є 11 можливостей розмістити ці дві конкретні людини поруч з десятьма іншими. Таким чином, $n = 10! \cdot 2! \cdot 11 = 11! \cdot 2$.

2.1.2 Розміщення

Розміщеннями з n елементів по k елементів ($k \leqslant n$) називаються впорядковані k-елементні підмножини множини A, що складаються з k різних елементів і відрізняються одна від одної складом елементів або порядком їхнього розміщення. Кількість всіх можливих розміщень з n елементів по k елементів позначають як A_n^k і обчислюють за формулою

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = n(n-1)(n-2) \cdot ... \cdot (n-k+1).$$

Приклад. 1) $A = \{a, b, c\}$. Випишемо всі розміщення з трьох елементів по два елементи: (a, b), (b, a), (a, c), (c, a), (b, c), (c, b) – всього шість розміщень.

2) Студентська рада складається з 8 осіб. Зі свого складу вони обирають президію у складі трьох осіб: голови ради, заступника та секретаря. Скільки є різних способів утворення президії ради?

Президію студентської ради можна обрати $A_8^3 = \frac{8!}{3!} = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 6720$ способами.

2.1.3 Комбінації

Комбінаціями з n елементів по k елементів ($k \leqslant m$) називаються k-елементні підмножини множини A, які містять k різних елементів і відрізняються одна від одної тільки складом елементів; порядок в якому вони розміщені, не має значення. Кількість всіх можливих комбінацій з n елементів по k позначають символом C_n^k і обчислюють за формулою:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{A_n}{P_k}.$$

Для кількості комбінацій справедливі такі формули:

$$C_n^k = C_n^{n-k};$$

$$C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1};$$

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots C_n^n = 2^n.$$

.

Приклад. 1) $A = \{a, b, c\}$. Випишемо всі комбінації з трьох елементів по два елементи: (a, b), (a, c), (b, c) – всього три комбінації. 2) Скількома способами можна вибрати дві деталі з ящика, що містить 10 деталей? Це можна зробити $C_{10}^2 = \frac{10!}{2!\cdot 8!} = 45$ способами.

2.2 Схема вибору з повтореннями

2.2.1 Перестановки з повтореннями

Нехай $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ – множина, що має n елементів m різних типів ($m \leqslant n$). Елементи одного типу не відрізняються між собою. Нехай k_1 елементів належать до першого типу, k_2 елементів належать до другого типу тощо, k_m елементів належать до m-го типу, причому $k_1 + k_2 + \dots + k_m = n$. Всі можливі різні n-елементні впорядковані набори з цих n елементів називаються **перестановками з повтореннями**. Їхня кількість дорівнює

$$P_n(k_1, k_2, k_3, \dots, k_m) = \frac{n!}{k_1!k_2! \cdot \dots \cdot k_m!}.$$

Приклад. Скільки різних семизначних чисел можна утворити з двох «1», однієї «2» і чотирьох «3»?

Розв'язок. Це можна зробити $P_7(2; 1; 4) = \dfrac{7!}{2! \cdot 1! \cdot 4!} = 105$ способами.

2.2.2 Комбінації з повтореннями

Нехай маємо m типів елементів (в кожній групі достатньо багато елементів) таких, що елементи всередині групи однакові, елементи різних груп відрізняються між собою. Із сукупності всіх елементів візьмемо підмножину, що містить n елементів. Ця підмножина із n елементів визначається кількістю взятих елементів з першої групи, кількістю взятих елементів з другої групи тощо. Ці числа можуть набувати значень від 0 до n, але так, щоб сума елементів дорівнювала n.

Кількість різних способів утворення n-елементної невпорядкованої множини знаходять за так званою формулою кількості різних комбінацій з повтореннями:

$$\overline{C_m^n} = C_{m+n-1}^{m-1} = C_{m+n-1}^n.$$

Приклад. На пошті є сім різних типів марок. Скільки є способів купити 12 марок?

Розв'язок. В цьому випадку $m = 7$ типів марок. Марки, що належать до різних типів, відрізняються між собою, а ті, що належать до одного типу, не відрізняються. Потрібно вибрати підмножину з $n = 12$ куплених марок. Спосіб утворення такої множини визначається кількістю куплених марок 1-го типу, 2-го типу,..., 7-го типу, причому їхня загальна сума має дорівнювати 12. Отже, маємо справу з комбінаціями з повтореннями, де $m = 7$, $n = 12$. Тому кількість різних способів купити 12 марок знаходимо за формулою

$$\overline{C_7^{12}} = C_{12+7-1}^{12} = C_{18}^{12} = \frac{18!}{12! \cdot 6!} = 18564.$$

2.2.3 Розміщення з повтореннями

Розміщеннями з повтореннями з n елементів по m елементів називається довільне впорядковане розміщення m елементів (серед яких можуть бути й однакові) з даних n різних елементів. Кількість всіх можливих розміщень з повтореннями з n елементів по m дорівнює

$$\tilde{A}_n^m = n^m$$

Приклад. Скільки п'ятизначних чисел можна скласти, використовуючи цифри «2», «5», «7», «8»?

Таких чисел буде $\tilde{A}_4^5 = 4^5 = 1024$.

3 Випадкові події. Класифікація подій

Визначення. **Подією** називається всякий факт, що може відбутися або не відбутися в результаті досліду.

При цьому той або інший результат досліду може бути отриманий з різним ступенем можливості. Тобто у деяких випадках можна сказати, що одна подія відбудеться практично напевно, інші практично ніколи.

Стосовно одна одної події також мають особливості, тобто в одному випадку подія A може відбутися разом з подією B, в іншому – ні.

Визначення. Події називаються **несумісними**, якщо поява одної з них виключає появу інших.

Класичним прикладом несумісних подій є результат підкидання монети – випадання лицьової сторони монети виключає випадання зворотної сторони (у тому самому досліді).

Визначення. **Достовірною подією** називається подія, що напевно відбудеться в результаті досліду. Подія називається **неможливою**, якщо вона ніколи не відбудеться в результаті досліду.

Наприклад, якщо з коробки, що містить тільки червоні й зелені кулі, навмання виймають одну кулю, то поява серед вийнятих куль білої – неможлива подія. Поява червоної та поява зеленої куль утворять повну групу подій.

Визначення. Події називаються **рівноможливими**, якщо немає підстав вважати, що одна з них стане результатом досліду з більшою ймовірністю.

У наведеному вище прикладі поява червоної й зеленої куль – рівноможливі події, якщо в коробці перебуває однакова кількість червоних і зелених куль.

Якщо ж у коробці червоних куль більше, ніж зелених, то поява зеленої кулі – подія менш імовірна, ніж поява червоної.

4 Простір елементарних подій. Класичне означення ймовірності

Визначення. Повною групою подій називається сукупність всіх можливих результатів досліду.

Визначення. Елементарними результатами досліду називаються такі результати досліду, які взаємно виключаються і у результаті досліду відбувається одна з цих подій; також яка б не була подія A, за елементарним результатом, що відбувся, можна судити про те, відбувається чи не відбувається ця подія.

Сукупність всіх елементарних результатів досліду називається **простором елементарних подій**.

Виходячи із цих загальних понять можна дати визначення ймовірності.

Визначення. Імовірністю події A називається математична оцінка можливості появи цієї події в результаті досліду. Імовірність події A дорівнює відношенню числа, сприятливих події A результатів досліду до загального числа попарно несумісних результатів досліду, що утворюють повну групу подій.

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

Результат досліду є сприятливим до події A, якщо поява в результаті досліду цього результату спричиняє появу події A.

Очевидно, що ймовірність достовірної події дорівнює одиниці, а ймовірність неможливої – дорівнює нулю. Таким чином, значення ймовірності будь-якої події є додатне число, розміщене між нулем і одиницею.

$$0 \leqslant P(A) \leqslant 1$$

Приклад. У коробці перебуває 10 куль. 3 з них червоні, 2 – зелені, інші білі. Знайти ймовірність того, що вийнята навмання куля буде червоною, зеленою або білою.

Поява червоної, зеленої й білої куль становлять повну групу подій. Позначимо появу червоної кулі – подія A, поява зеленої – подія B, поява білої – подія C.

Тоді у відповідністю із записаними вище формулами одержуємо:

$$P(A) = \frac{3}{10}; \quad P(B) = \frac{2}{10}; \quad P(C) = \frac{5}{10};$$

Відзначимо, що ймовірність настання однієї з двох попарно несумісних подій дорівнює сумі ймовірностей цих подій.

Визначення. Відносною частотою події A називається відношення числа дослідів, у результаті яких відбулася подія A до загального числа дослідів.

Відмінність відносної частоти від імовірності полягає в тому, що ймовірність обчислюється без безпосереднього виконання дослідів, а відносна частота – після досліду.

Так у розглянутому вище прикладі, якщо з коробки навмання витягнуто 5 куль і 2 з них виявилися червоними, то відносна частота появи червоної кулі дорівнює:

$$W(A) = \frac{2}{5}$$

Як видно, ця величина не збігається зі знайденою ймовірністю.

При досить великій кількості виконаних дослідів відносна частота змінюється мало, коливаючись навколо одного числа. Це число може бути прийняте за ймовірність події.

Загалом кажучи, класичне визначення ймовірності досить відносне.

Це обумовлено тим, що на практиці складно представити результат досліду у вигляді сукупності елементарних подій, довести, що події рівноімовірні.

Наприклад, при проведенні досліду з підкиданням монети на результат досліду можуть впливати такі фактори як несиметричність монети, вплив її форми на аеродинамічні характеристики польоту, атмосферні умови та інше.

Класичне визначення ймовірності незастосовне до випробувань з нескінченним числом результатів. Щоб перебороти цей недолік вводиться поняття **геометричної ймовірності**, тобто ймовірності потрапляння точки в якийсь відрізок або частину площини (простору).

Так, якщо на відрізку довжиною L виділений відрізок довжини l, то ймовірність потрапляння навмання взятої точки у відрізок l дорівнює відношенню l/L.

5 Операції над подіями

<u>Визначення.</u> Події A та B називаються **рівними**, якщо здійснення події A спричиняє здійснення події B та навпаки.

<u>Визначення.</u> **Об'єднанням** або **сумою** подій A_k називається подія A, що означає появу **хоча б одної** з подій A_k.

$$A = \bigcup_k A_k$$

<u>Визначення.</u> **Перетином** або **добутком** подій A_k називається подія A, що полягає в здійсненні **всіх** подій A_k.

$$A = \bigcap_k A_k$$

<u>Визначення.</u> **Різницею** подій A та B називається подія C, що означає, що відбувається подія A, але не відбувається подія B.

$$C = A \backslash B$$

<u>Визначення.</u> **Додатковою** до події A називається подія $\bar{A}$, що означає, що подія A **не відбувається**.

<u>Теорема</u> (додавання ймовірностей). *Імовірність суми двох несумісних подій дорівнює сумі ймовірностей цих подій.*

$$P(A+B) = P(A) + P(B)$$

<u>Наслідок 1:</u> *Якщо події $A_1, A_2, ..., A_n$ утворюють повну групу несумісних подій, то сума їхніх імовірностей дорівнює одиниці.*

$$\sum_{i=1}^{n} P(A_i) = 1$$

<u>Визначення.</u> **Протилежними** називаються дві несумісних події, що утворюють повну групу.

<u>Теорема.</u> *Імовірність появи хоча б одної з двох сумісних подій дорівнює сумі ймовірностей цих подій без імовірності їхньої спільної появи.*

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

<u>Наслідок 2:</u> *Сума ймовірностей протилежних подій дорівнює одиниці.*

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1$$

<u>Визначення.</u> Подія A називається **незалежною** від події B, якщо імовірність події A не залежить від того, відбулася подія B чи ні. Подія A називається **залежною** від події B, якщо ймовірність події A міняється залежно від того, відбулася подія B чи ні.

<u>Визначення.</u> Імовірність події B, обчислена за умови, що мала місце подія A, називається **умовною ймовірністю** події B.

$$P_A(B) = P(B/A) = P(AB)/P(A)$$

<u>Теорема.</u> (Множення ймовірностей) *Імовірність добутку двох подій (спільної появи цих подій) дорівнює добутку ймовірності однієї з них на умовну ймовірність іншої, обчислену за умови, що перша подія вже відбулася.*

$$P(AB) = P(A)P(B/A) = P(A)P_A(B)$$

Також можна записати: $P(AB) = P(A)P(B/A) = P(B)P(A/B) = P(B)P_B(A)$

Доведення цієї теореми безпосередньо випливає з визначення умовної ймовірності.

Якщо події незалежні, то $P(B/A) = P(B)$, і теорема множення ймовірностей набуває виду:

$$P(AB) = P(A)P(B)$$

У випадку добутку декількох залежних подій імовірність дорівнює добутку імовірності однієї з них на умовні ймовірності всіх інших за умови, що ймовірність кожної наступної обчислюється в припущенні, що всі інші події вже відбулися.

$$P(A_1A_2...A_n) = P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3/A_1A_2)...P(A_n/A_1A_2...A_{n-1})$$

З теореми добутку ймовірностей можна зробити висновок про ймовірності появи хоча б однієї події.

Якщо в результаті випробування може з'явитися n подій, незалежних у сукупності, то ймовірність появи хоча б однієї з них дорівнює

$$P(A) = 1 - q_1q_2...q_n$$

Тут подія A позначає настання хоча б однієї з подій A_i, а q_i – імовірність протилежних подій $\bar{A}_1, \bar{A}_2, ..., \bar{A}_n$.

Приклад. З повної колоди карт (52 шт.) одночасно виймають чотири карти. Знайти ймовірність того, що серед цих чотирьох карт буде хоча б одна бубнова або одна чирвова карта.

Позначимо появу хоча б однієї бубнової карти через подію A, появу хоча б однієї чирвової карти через подію B. У такий спосіб нам треба визначити ймовірність події $C = A + B$.

Крім того, події A та B – сумісні, тобто поява однієї з них не виключає появи іншої.

Всього в колоді 13 чирвових і 13 бубнових карт.

При витаскуванні першої карти ймовірність того, що не з'явиться ні чирвової ні бубнової карти дорівнює $\frac{26}{52}$, при витаскуванні другої карти – $\frac{25}{51}$, третьої – $\frac{24}{50}$, четвертої – $\frac{23}{49}$.

Тоді ймовірність того, що серед вийнятих карт не буде ні бубнових, ні чирвових дорівнює $P(\bar{C}) = \frac{26}{52} \cdot \frac{25}{51} \cdot \frac{24}{50} \cdot \frac{23}{49}$.

Тоді $P(C) = 1 - P(\bar{C}) \approx 0,945$

Приклад. Чому дорівнює ймовірність того, що при киданні трьох гральних кісток 6 очок випаде хоча б на одній з кісток?

Імовірність випадання 6 очок при одному кидку кістки дорівнює $\frac{1}{6}$. Імовірність того, що не випаде 6 очок – $\frac{5}{6}$. Імовірність того, що при кидку трьох костей не випаде жодного разу 6 очок дорівнює $p = \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{125}{216}$.

Тоді ймовірність того, що хоча б один раз випаде 6 очка дорівнює $1 - \frac{125}{216} = \frac{91}{216}$.

Приклад. У барабані револьвера перебувають 4 патрона із шести в довільному порядку. Барабан розкручують, після чого натискають на спусковий гачок два рази. Знайти ймовірності хоча б одного пострілу, двох пострілів, двох осічок.

Імовірність пострілу при першому натисканні на курок (подія A) дорівнює $P(A) = \frac{4}{6}$, імовірність осічки – $P(\bar{A}) = \frac{2}{6}$. Імовірність пострілу при другому натисканні на курок залежить від результату першого натискання.

Так якщо в першому випадку відбувся постріл, то в барабані залишилося тільки 3 патрона, причому вони розподілені по 5 гніздам, тому що при другому натисканні на курок напроти ствола не може виявитися гніздо, у якому був патрон при першому натисканні на курок.

Умовна ймовірність пострілу при другій спробі – $P(B/A) = \frac{3}{5}$, якщо в перший раз був постріл, $P(B/\bar{A}) = \frac{4}{5}$ – якщо в перший раз відбулася осічка.

Умовна ймовірність осічки другого разу – $P(\bar{B}/A) = \frac{2}{5}$, якщо в перший раз відбувся постріл, $P(\bar{B}/\bar{A}) = \frac{1}{5}$ – якщо в перший раз була осічка.

Розглянемо ймовірності того, що в другому випадку відбудеться постріл (подія B) або відбудеться осічка (подія $\bar{B}$) за умови, що в першому випадку відбувся постріл (подія A) або осічка (подія $\bar{A}$).

$P(B) = P(A)P(B/A) = \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{5} = \frac{6}{15} = 0,4$ – два постріли поспіль

$P(B) = P(\bar{A})P(B/\bar{A}) = \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{4}{15} \approx 0,267$ – перша осічка, другий постріл

$P(\bar{B}) = P(A)P(\bar{B}/A) = \frac{4}{6} \cdot \frac{2}{5} = \frac{4}{15} \approx 0,267$ – перший постріл, друга осічка

$P(\bar{B}) = P(\bar{A})P(\bar{B}/\bar{A}) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{15} \approx 0,067$ – дві осічки поспіль

Ці чотири випадки утворять повну групу подій (сума їхніх імовірностей дорівнює одиниці)

Аналізуючи отримані результати, бачимо, що ймовірність хоча б одного пострілу дорівнює сумі $P_1 = \frac{6}{15} + \frac{4}{15} + \frac{4}{15} = \frac{14}{15} \approx 0,933$

Тепер розглянемо інший випадок. Припустимо, що після першого натискання на курок барабан розкрутили й знову натиснули на курок.

Імовірності першого пострілу й першої осічки не змінилися – $P(A) = \frac{4}{6}$, $P(\bar{A}) = \frac{2}{6}$. Умовні ймовірності другого пострілу й осічки обчислюються з умови, що напроти ствола може виявитися те ж гніздо, що й у перший раз.

Умовна ймовірність пострілу при другій спробі – $P(B/A) = \frac{3}{6}$, якщо в перший раз був постріл, $P(B/\bar{A}) = \frac{4}{6}$ – якщо в перший раз відбулася осічка.

Умовна ймовірність осічки другого разу – $P(\bar{B}/A) = \frac{3}{6}$, якщо в перший раз відбувся постріл, $P(\bar{B}/\bar{A}) = \frac{2}{6}$ – якщо була осічка.

Тоді:

$P(B) = P(A)P(B/A) = \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{6} = \frac{3}{9} \approx 0,333$ – два постріли поспіль

$P(B) = P(\bar{A})P(B/\bar{A}) = \frac{2}{6} \cdot \frac{4}{6} = \frac{2}{9} \approx 0,222$ – перша осічка, другий постріл

$P(\bar{B}) = P(A)P(\bar{B}/A) = \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{6} = \frac{3}{9} \approx 0,333$ – перший постріл, друга осічка

$P(\bar{B}) = P(\bar{A})P(\bar{B}/\bar{A}) = \frac{2}{6} \cdot \frac{2}{6} = \frac{1}{9} \approx 0,111$ – дві осічки поспіль

У цьому випадку ймовірність того, що відбудеться хоча б один постріл, дорівнює

$$P_2 = \frac{3}{9} + \frac{2}{9} + \frac{3}{9} = \frac{8}{9} \approx 0,889$$

Нижче наведено діаграми ймовірностей для перших і другого розглянутих випадків.

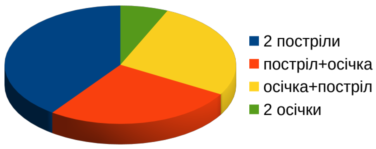
Приклад. Два стрільці стріляють по мішені. Імовірність влучення в мішень при одному пострілі для першого стрільця дорівнює 0,7, а для другого – 0,8. Знайти ймовірність того, що при одному залпі в мішень влучає тільки один зі стрільців.

Позначимо влучення у ціль першим стрільцем – подія A, другим – подія B, промах першого стрільця – подія $\bar{A}$, промах другого – подія $\bar{B}$.

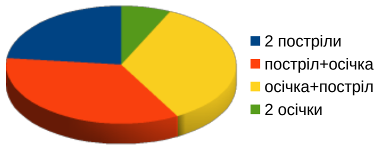
$$P(A) = 0,7; \quad P(\bar{A}) = 0,3; \quad P(B) = 0,8; \quad P(\bar{B}) = 0,2.$$

Імовірність того, що перший стрілець влучить у мішень, а другий – ні, дорівнює

$$P(A)P(\bar{B}) = 0,7 \cdot 0,2 = 0,14$$



(а)



(б)

Імовірність того, що другий стрілець влучить у ціль, а перший – ні, дорівнює

$$P(\bar{A})P(B) = 0,3 \cdot 0,8 = 0,24$$

Тоді ймовірність влучення в ціль тільки одним стрільцем дорівнює

$$P = 0,14 + 0,24 = 0,38$$

Той же результат можна одержати іншим способом – знаходимо ймовірності того, що обоє стрільців влучили в ціль й обидва промахнулися. Ці ймовірності відповідно рівні:

$$P(A)P(B) = 0,7 \cdot 0,8 = 0,56; \quad P(\bar{A})P(\bar{B}) = 0,3 \cdot 0,2 = 0,06.$$

Тоді ймовірність того, що в ціль влучить лише один стрілець дорівнює:

$$P = 1 - 0,56 - 0,06 = 0,38.$$

Приклад. Імовірність того, що взята навмання деталь із деякої партії деталей, буде бракованою дорівнює 0,2. Знайти ймовірність того, що із трьох взятих деталей 2 виявляться не бракованими.

Позначимо взято браковану деталь – подія A, не браковану – подія $\bar{A}$.

$$P(A) = 0,2; \quad P(\bar{A}) = 0,8;$$

Якщо серед трьох деталей виявляється тільки одна бракована, то це можливо в одному із трьох випадків: бракована деталь буде першою, другою або третьою.

$$P = P(A)P(\bar{A})P(\bar{A}) + P(\bar{A})P(A)P(\bar{A}) + P(\bar{A})P(\bar{A})P(A)$$

$$P = 3 \cdot 0,2 \cdot 0,8 \cdot 0,8 = 0,384$$

Приклад. Імовірності того, що потрібна деталь перебуває в першому, другому, третьому або четвертому ящику, відповідно рівні 0,6, 0,7, 0,8, 0,9. Знайти ймовірності того, що ця деталь перебуває: а) не більш, ніж у трьох ящиках; б) не менш, ніж у двох ящиках.

а) Імовірність того, що дана деталь перебуває у всіх чотирьох ящиках, дорівнює

$$P = P_1 P_2 P_3 P_4 = 0,6 \cdot 0,7 \cdot 0,8 \cdot 0,9 = 0,3024.$$

Імовірність того, що потрібна деталь перебуває не більш, ніж у трьох ящиках дорівнює ймовірності того, що вона не перебуває у всіх чотирьох ящиках.

$$P(A) = 1 - P = 1 - 0,3024 = 0,6976.$$

б) Імовірність того, що потрібна деталь перебуває не менш, ніж у двох ящиках, складається з імовірностей того, що деталь перебуває тільки у двох ящиках, тільки в трьох ящиках, тільки в чотирьох ящиках. Звичайно, ці ймовірності можна порахувати, а потім скласти, однак, простіше вчинити інакше. Та ж імовірність дорівнює ймовірності того, що деталь не перебуває тільки в одному ящику і є взагалі.

Імовірність того, що деталь перебуває тільки в одному ящику, дорівнює

$$P = P_1 q_2 q_3 q_4 + q_1 P_2 q_3 q_4 + q_1 q_2 P_3 q_4 + q_1 q_2 q_3 P_4$$

$$\begin{gathered} P = 0,6 \cdot 0,3 \cdot 0,2 \cdot 0,1 + 0,4 \cdot 0,7 \cdot 0,2 \cdot 0,1 + 0,4 \cdot 0,3 \cdot 0,8 \cdot 0,1 + 0,4 \cdot 0,3 \cdot 0,2 \cdot 0,9 = \\ = 0,0036 + 0,0056 + 0,0096 + 0,0216 = 0,0404 \\ Q = 1 - 0,0404 = 0,9596 \end{gathered}$$

Імовірність того, що потрібної деталі немає в жодному ящику, дорівнює:

$$P_0 = q_1 q_2 q_3 q_4 = 0,4 \cdot 0,3 \cdot 0,2 \cdot 0,1 = 0,0024$$

$$Q_0 = 1 - 0,0024 = 0,9976$$

Шукана ймовірність дорівнює $P(B) = Q \cdot Q_0 = 0,9596 \cdot 0,9976 = 0,9573.$

6 Геометричне означення ймовірності

Класична формула обчислення ймовірності події незастосовна, якщо простір Ω елементарних результатів випробування є нескінченна або навіть незлічення множина, наприклад, деяка область на прямій, площині чи в просторі. В цьому випадку застосовують геометричний підхід до знаходження ймовірності.

Випробування інтерпретується як випадкове позначення точки в області Ω , а подія A – як попадання цієї точки в підобласть A області Ω. Тоді для випадкової події $A \subset \Omega$ її ймовірність визначається за формулою

$$P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)},$$

$m(\cdot)$ – міра на прямій, площині або в просторі (довжина, площа чи об'єм відповідно). Крім того, розглядаємо випадки, коли $0 < m(\Omega) < +\infty$.

<u>Приклад.</u> У колі радіусом R навмання позначають точку. Якою є ймовірність того, що вибрана точка виявиться від центра кола на відстані, більшій ніж $R/2$?

Розв'язок. Випробування полягає в тому, що навмання позначають точку в колі радіусом R. Простором елементарних подій є внутрішня частина кола радіусом R, тобто $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leqslant R^2\}$. Міра області Ω у просторі $\mathbb{R}^2$ дорівнює площі круга радіусом R, тобто $m(\Omega) = S(\Omega) = \pi R^2$. Випадкова подія A – множина точок круга, що знаходяться від центра на відстані, більшій, ніж $R/2$, тобто $A = \{(x, y) \in R^2 | R^2/4 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant R^2\}$. Тоді

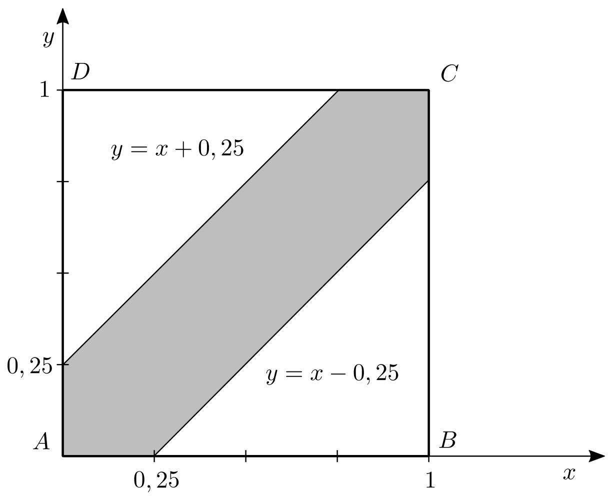
$$m(A) = \pi R^2 - \pi(R/2)^2 = 3\pi R^2/4.$$

За геометричним означенням ймовірності маємо:

$$P(A) = \frac{3\pi R^2}{4\pi R^2} = \frac{3}{4}.$$

<u>Приклад («Задача про зустріч»).</u> Два студенти домовились про зустріч у визначеному місці між 12-ю та 13-ю годиною дня. Відомо, що моменти їхнього приходу до місця зустрічі – випадкові. Той, хто прийшов першим, чекає другого студента протягом 15 хвилин, після чого йде геть (якщо зустріч не відбулася). Визначити ймовірність того, що зустріч відбудеться.

Розв'язок. Позначимо як x та y час приходу першого та другого студента відповідно.



У прямокутній системі координат Oxy візьмемо за початок відліку 12 год, а за одиницю виміру – 1 год. За умовою $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$. Цим нерівностям задовольняють координати довільної точки $(x; y)$, що належить квадрату $ABCD$ зі стороною, рівною 1 (рисунок), тобто

$$\Omega = \{(x; y) \in R^2 : 0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1\}.$$

Подія A – зустріч двох студентів відбудеться, якщо різниця між моментами приходу x та y студентів буде не більшою, ніж $1/4$ години (за модулем), тобто $A = \{(x; y) \in \Omega : |x - y| \leqslant 1/4\}$. Або, що те саме, точки з координатами $(x; y)$ смуги між лініями $y = x + 1/4$ і $y = x - 1/4$ сприятливі події A.

Площа $S(\Omega)$ області Ω дорівнює 1. Площа смуги A (на рисунку тонована область) дорівнює площі квадрата мінус площа двох однакових за площею трикутників, тобто $S(A) = S_{ABCD} - 2 \cdot S_{\text{трик.}} = 1 - (9/16) = 7/16$.

За геометричним означенням ймовірності

$$P(A) = \frac{S(A)}{S(\Omega)} = \frac{7}{16}.$$

<u>Приклад.</u> На площині проведено паралельні лінії, відстань між якими дорівнює $2a$. На площині навмання малюють коло радіусом r, $(r < a)$. Якою є ймовірність того, що коло не буде перетнуто жодною з цих ліній?

Розв'язок. Навмання намальоване на площині коло не буде перетнуте жодною прямою, якщо центр кола потрапить на смугу шириною $2a-2r$. Завдання зводиться до такого: на відрізку довжиною $2a$ навмання ставлять точку, потрібно знайти ймовірність того, що вона потрапить на частину цього відрізка довжиною $2a-2r$. За геометричним означенням ймовірності

$$P = \frac{2a-2r}{2a} = 1 - \frac{r}{a}.$$

7 Статистичне означення ймовірності

Класична формула означення ймовірності є незастосовною, якщо простір Ω елементарних результатів – це нескінченна множина або немає достатніх підстав вважати результати випробування ω_i рівноможливими.

У таких випадках застосовують статистичне означення ймовірності події, яке ґрунтується на понятті відносної частоти події. Це поняття, як і ймовірність, належить до основних понять теорії ймовірностей. Експериментальне означення ймовірності події A полягає в проведенні серії n випробувань, в кожному з яких відбувається чи не відбувається подія A.

Відносна частота $W(A)$ події A – це відношення кількості m випробувань, в яких подія A відбулася, до кількості n всіх фактично проведених випробувань:

$$W(A) = \frac{m}{n}.$$

Повторення серії випробувань дасть в загальному випадку інший результат – $m_1/n_1 \neq m/n$. Але в разі збільшення кількості n випробувань відносна частота появи події виявляє тенденцію стабілізуватися, наближаючись до деякої сталої величини. Кажуть, що відносній частоті притаманна стійкість.

Приклад. Багато разів проводили випробування – підкидання симетричної монети і підраховували кількість випадінь «герба».

Результати деяких випробувань наведено в таблиці.

Експериментатор	Кількість підкидань	Кількість випадінь «герба»	Відносна частота
Ж. Бюффон	4040	2048	0,5069
К. Пірсон	12000	6019	0,5016
К. Пірсон	24000	12012	0,5005

Імовірність появи «герба» після одного підкидання, що визначається за класичним означенням ймовірності, дорівнює 0,5. Результати, наведені в таблиці, переконують в тому, що за збільшення кількості випробувань відносна частота наближається до теоретично обчисленої ймовірності випадіння «герба».

Якщо дослідним шляхом встановлено відносну частоту деякої події, то її можна вважати наближеним значенням імовірності.

Відносну частоту події називають її **статистичною ймовірністю** і позначають так:

$$P^*(A) = \frac{m}{n}.$$

Я. Бернуллі показав, що за необмеженого збільшення кількості однорідних незалежних випробувань можна стверджувати, що відносна частота події буде досить мало відрізнятись від її ймовірності в окремому випробуванні.

Таким чином, імовірність може бути визначена статистично, дослідним шляхом. Для цього треба мати можливість виконати необмежену кількість випробувань. При цьому відносна частота повинна виявити стійкість в різних серіях випробувань.

Зіставляючи означення ймовірності за класичною формулою і означення відносної частоти, доходимо висновку: ймовірність обчислюють безпосередньо до випробування, а відносна частота є характеристикою експериментальною, обчислюваною після випробування.

8 Формула повної ймовірності

Нехай деяка подія A може відбутися разом з однією з несумісних подій $H_1, H_2, ..., H_n$, що утворюють повну групу подій. Нехай відомі ймовірності цих подій $P(H_1), P(H_2), ..., P(H_n)$ і умовні ймовірності настання події A при настанні події H_i – $P(A/H_1), P(A/H_2), ..., P(A/H_n)$.

Теорема. *Імовірність події A, що може відбутися разом з однією з подій $H_1, H_2, ..., H_n$, дорівнює сумі парних добутків ймовірностей кожної з цих подій на відповідні їм умовні ймовірності настання події A.*

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A/H_i)$$

Фактично ця формула **повної ймовірності** вже використовувалася при розв'язанні прикладів, наведених вище, наприклад, у задачі з револьвером.

Доведення.

Оскільки події $H_1, H_2, ..., H_n$ утворюють повну групу подій, то подію A можна представити у вигляді наступної суми:

$$A = AH_1 + AH_2 + ... + AH_n = \sum_{i=1}^{n} AH_i$$

Оскільки події $H_1, H_2, ..., H_n$ несумісні, то й події AH_i теж несумісні. Тоді можна застосувати теорему про додавання ймовірностей несумісних подій:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(AH_i)$$

При цьому $P(AH_i) = P(H_i)P(A/H_i)$

Остаточно одержуємо: $P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A/H_i)$

Теорему доведено.

Приклад. Один із трьох стрільців робить два постріли. Імовірність влучення в ціль при одному пострілі для першого стрільця дорівнює 0,4, для другого – 0,6, для третього – 0,8. Знайти ймовірність того, що в ціль влучать два рази.

Імовірність того, що постріли робить перший, другий або третій стрілець дорівнює $\frac{1}{3}$.

Імовірності того, що один зі стрільців, що роблять постріли, два рази влучає в ціль, рівні:

– для першого стрільця: $p_1^2 = 0,4^2 = 0,16$;

– для другого стрільця: $p_2^2 = 0,6^2 = 0,36$;

– для третього стрільця: $p_3^2 = 0,8^2 = 0,64$;

Шукана ймовірність дорівнює:

$$p = \frac{1}{3}p_1^2 + \frac{1}{3}p_2^2 + \frac{1}{3}p_3^3 = \frac{1}{3}(0,16 + 0,36 + 0,64) = \frac{29}{75}$$

9 Формула Баєса (формула гіпотез)

Нехай є повна група несумісних гіпотез H_1, H_2,..., H_n із відомими ймовірностями їхнього настання $P(H_1)$, $P(H_2)$,..., $P(H_n)$. Нехай у результаті досліду відбулася подія A, умовні ймовірності якої по кожній з гіпотез відомі, тобто відомі ймовірності $P(A/H_1), P(A/H_2), ..., P(A/H_n)$.

Потрібно визначити, які ймовірності мають гіпотези $H_1, H_2, ..., H_n$ щодо події A, тобто умовні ймовірності $P(H_i/A)$.

Теорема. *Імовірність гіпотези після випробування дорівнює добутку ймовірності гіпотези до випробування на відповідну їй умовну ймовірність події, що відбулося при випробуванні, діленому на повну ймовірність цієї події.*

$$P(H_i/A) = \frac{P(H_i)P(A/H_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A/H_i)}$$

Ця формула називається **формулою Баєса**.

Доведення.

За Теоремою множення ймовірностей одержуємо:

$$P(A)P(H_i/A) = P(H_i)P(A/H_i)$$

Тоді якщо $P(A) \neq 0$, $P(H_i/A) = \frac{P(H_i)P(A/H_i)}{P(A)}$.

Для знаходження ймовірності $P(A)$ використаємо формулу повної імовірності.

$$P(H_i/A) = \frac{P(H_i)P(A/H_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A/H_i)}$$

Якщо до випробування всі гіпотези рівноімовірні з імовірністю $P(H_i) = p$, то формула Баєса набуває вигляду:

$$P(H_i/A) = \frac{P(A/H_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(A/H_i)}$$

10 Повторення випробувань. Формула Бернуллі

Якщо проводиться деяка кількість випробувань, у результаті яких може відбутися або не відбутися подія A, і ймовірність появи цієї події в кожному з випробувань не залежить від результатів інших випробувань, то такі випробування називаються **незалежними щодо події** A.

Припустимо, що подія A відбувається в кожному випробуванні з імовірністю $P(A) = p$. Визначимо ймовірність $P_{m,n}$ того, що в результаті n випробувань подія A відбулася рівно m разів.

Цю ймовірність у принципі можна порахувати, використовуючи теореми додавання й множення ймовірностей, як це робилося в розглянутих вище прикладах. Однак, при досить великій кількості випробувань це приводить до значних обчислень. Таким чином, виникає необхідність розробити загальний підхід до розв'язання поставленої задачі. Цей підхід реалізований у формулі Бернуллі. (Якоб Бернуллі (1654–1705) – швейцарський математик)

Нехай у результаті n незалежних випробувань, проведених в однакових умовах, подія A відбувається з імовірністю $P(A) = p$, а протилежна їй подія $\bar{A}$ з імовірністю $P(\bar{A}) = 1 - p$.

Позначимо A_i – настання події A в випробуванні з номером i. Оскільки умови проведення дослідів однакові, то ці ймовірності рівні.

Якщо в результаті n дослідів подія A відбувається рівно m разів, то інші $n - m$ раз ця подія не відбувається. Подія A може з'явитися m раз у n випробуваннях у різних комбінаціях, число яких дорівнює кількості сполучень із n елементів по m. Ця кількість сполучень знаходиться за формулою:

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

Імовірність кожної комбінації дорівнює добутку ймовірностей:

$$p^m(1-p)^{n-m}$$

Застосовуючи теорему додавання ймовірностей несумісних подій, одержуємо **формулу Бернуллі:**

$$P_{m,n} = \frac{n!}{m!(n-m)!}p^m(1-p)^{n-m}$$

Формула Бернуллі важлива тим, що справедлива для будь-якої кількості незалежних випробувань, тобто того самого випадку, у якому найбільше чітко проявляються закони теорії ймовірностей.

Приклад. По цілі проводиться 5 пострілів. Імовірність влучення для кожного пострілу дорівнює 0,4. Знайти ймовірність того, що в ціль влучили не менше трьох разів.

Імовірність не менш трьох влучень складається з імовірності п'яти влучень, чотирьох влучень і трьох влучень.

Оскільки постріли незалежні, то можна застосувати формулу Бернуллі ймовірності того, що в m випробуваннях подія з імовірністю p відбувається рівно n раз.

$$P_{m,n} = \frac{n!}{m!(n-m)!}p^m(1-p)^{n-m}$$

У випадку п'яти влучень із п'яти можливих:

$$P_{5,5} = p^5 = 0,4^5 = 0,01024$$

Чотири влучення з п'яти пострілів:

$$P_{4,5} = \frac{5!}{4! \cdot 1!}p^4(1-p) = 0,0768$$

Три влучення з п'яти:

$$P_{3,5} = \frac{5!}{3! \cdot 2!}p^3(1-p)^2 = 0,2304$$

Остаточно, одержуємо ймовірність не менш трьох влучень із п'яти пострілів:

$$P = 0,01204 + 0,0768 + 0,2304 = 0,31744$$

11 Випадкові величини

Вище розглядалися випадкові події, що є якісною характеристикою випадкового результату досліду. Для одержання кількісної характеристики вводиться поняття випадкової величини.

Визначення. Випадковою величиною називається величина, що у результаті досліду може приймати те або інше значення, причому заздалегідь відомо яке саме.

Випадкові величини можна розділити на дві категорії.

Визначення. Дискретною випадковою величиною називається така величина, що у результаті досліду може приймати певні значення з певною ймовірністю, що утворять зліченну множину (множину, елементи якої можуть бути занумеровані).

Ця множина може бути як скінченною, так і нескінченною.

Наприклад, кількість пострілів до першого влучення у ціль є дискретною випадковою величиною, тому що ця величина може приймати й нескінченне, хоча й зліченну кількість значень.

Визначення. Неперервною випадковою величиною називається така величина, що може приймати будь-які значення з деякого скінченного або нескінченного проміжку.

Очевидно, що число можливих значень неперервної випадкової величини нескінченне.

Для задання випадкової величини недостатньо просто вказати її значення, необхідно також указати ймовірність цього значення.

11.1 Закон розподілу дискретної випадкової величини

<u>**Визначення.**</u> Співвідношення між можливими значеннями випадкової величини і їх ймовірностями називається **законом розподілу дискретної** випадкової величини.

Закон розподілу може бути заданий аналітично, у вигляді таблиці або графічно.

Таблиця відповідності значень випадкової величини і їхніх імовірностей називається **рядом розподілу**.

Графічне подання цієї таблиці називається **багатокутником розподілу**. При цьому сума всіх ординат багатокутника розподілу являє собою ймовірність всіх можливих значень випадкової величини, а отже, дорівнює одиниці.

<u>Приклад.</u> По цілі проводиться 5 пострілів. Імовірність влучення для кожного пострілу дорівнює 0,4. Знайти ймовірності числа влучень і побудувати багатокутник розподілу.

Імовірності п'яти влучень з п'яти можливих, чотирьох з п'яти й трьох з п'яти минулого знайдені вище за формулою Бернуллі й рівні відповідно:

$$P_{5,5} = 0,01024, P_{4,5} = 0,0768, P_{3,5} = 0,2304$$

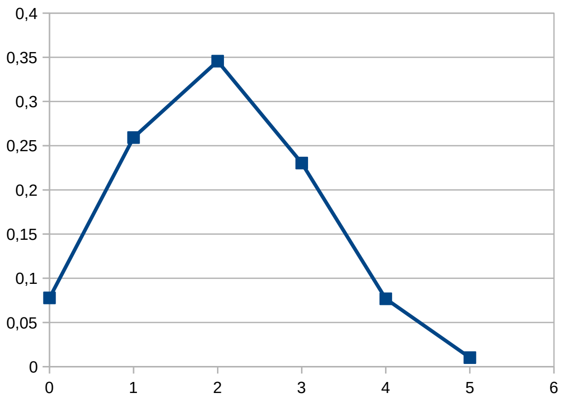
Аналогічно знайдемо:

$$P_{2,5} = \frac{5!}{2! \cdot 3!} 0,4^2 \cdot 0,6^3 = 0,3456$$

$$P_{1,5} = \frac{5!}{1! \cdot 4!} 0,4^1 \cdot 0,6^4 = 0,2592$$

$$P_{0,5} = \frac{5!}{0! \cdot 5!} 0,4^0 \cdot 0,6^5 = 0,6^5 = 0,0778$$

Представимо графічно залежність числа влучень від їхніх імовірностей.



При побудові багатокутника розподілу треба пам'ятати, що з'єднання отриманих точок носить умовний характер. У проміжках між значеннями випадкової величини ймовірність не приймає ніякого значення. Точки з'єднані тільки для наочності.

<u>Приклад.</u> Імовірність хоча б одного влучення в мішень стрільцем при трьох пострілах дорівнює 0,875. Знайти ймовірність влучення в мішень при одному пострілі.

Якщо позначити p – імовірність влучення стрільцем у мішень при одному пострілі, то ймовірність промаху при одному пострілі має дорівнювати $(1 - p)$.

Імовірність трьох промахів із трьох пострілів дорівнює $(1-p)^3$. За умовою задачі ця ймовірність дорівнює $1-0,875 = 0,125$, тобто в ціль не влучають жодного разу.

Одержуємо: $(1 - p)^3 = 0,125; \qquad 1 - p = 0,5; \qquad p = 0,5.$

<u>Приклад.</u> У першій коробці міститься 10 куль, з них 8 білих; у другій коробці 20 куль, з них 4 білих. З кожної коробки навмання витягли по одній кулі, а потім із цих двох куль навмання беруть одну кулю. Знайти ймовірність того, що ця куля біла.

Імовірність того, що взята з першої коробки куля біла – $P_1(\text{Б}) = 0,8$, що не біла – $P_1(\text{НБ}) = 0,2$.

Імовірність того, що взята із другої коробки куля біла – $P_2(\text{Б}) = 0,2$, що не біла – $P_2(\text{НБ}) = 0,8$.

Імовірність того, що повторно обрано кулю, витягнуту з першої коробки й імовірність того, що повторно обрано кулю, витягнуту з другої коробки, рівні $0,5$.

Імовірність того, що повторно обрано кулю, витягнуту з першої коробки, і вона біла – $p_1 = 0,5 \cdot P_1(\text{Б}) = 0,5 \cdot 0,8 = 0,4$.

Імовірність того, що повторно обрано кулю, витягнуту з другої коробки, і вона біла – $p_2 = 0,5 \cdot P_2(\text{Б}) = 0,5 \cdot 0,2 = 0,1$.

Імовірність того, що повторно буде обрано білу кулю, дорівнює

$$P = p_1 + p_2 = 0,4 + 0,1 = 0,5.$$

<u>Приклад.</u> Є п'ять гвинтівок, три з яких обладнані оптичним прицілом. Імовірність того, що стрілець вразить ціль при пострілі з гвинтівки з оптичним прицілом, дорівнює 0,95, для гвинтівки без оптичного прицілу ця ймовірність дорівнює 0,7. Знайти ймовірність того, що ціль буде уражена, якщо стрілець зробить один постріл з навмання обраної гвинтівки.

Імовірність того, що обрано гвинтівку з оптичним прицілом, позначимо $P_0 = \frac{3}{5}$, а ймовірність того, що обрано гвинтівку без оптичного прицілу, позначимо $P_{\text{БО}} = \frac{2}{5}$.

Імовірність того, що вибрали гвинтівку з оптичним прицілом, і при цьому ціль була уражена $P_1 = P_0 \cdot P(\text{ЦУ}/\text{О})$, де $P(\text{ЦУ}/\text{О})$ – імовірність враження цілі з гвинтівки з оптичним прицілом.

Аналогічно, імовірність того, що вибрали гвинтівку без оптичного прицілу, і при цьому ціль була уражена $P_1 = P_{\text{БО}} \cdot P(\text{ЦУ}/\text{БО})$, де $P(\text{ЦУ}/\text{БО})$ – імовірність враження цілі з гвинтівки без оптичного прицілу.

Остаточна ймовірність враження цілі дорівнює сумі ймовірностей P_1 і P_2, тому що для враження цілі досить, щоб відбулася одна із цих несумісних подій.

$$P = P_1 + P_2 = 0,95 \cdot 0,6 + 0,7 \cdot 0,4 = 0,57 + 0,28 = 0,85$$

Приклад. Троє мисливців одночасно вистрілили по ведмедю, що був убитий однією кулею. Визначити ймовірність того, що ведмідь був убитий першим стрільцем, якщо ймовірності влучення для цих стрільців рівні відповідно $0,3$, $0,4$, $0,5$.

У цій задачі потрібно визначити ймовірність гіпотези вже після того, як подія відбулася. Для визначення шуканої ймовірності треба скористатися формулою Баєса. У нашому випадку вона має вигляд:

$$P(H_1/A) = \frac{P(H_1)P(A/H_1)}{P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2) + P(H_3)P(A/H_3)}$$

У цій формулі H_1, H_2, H_3 – гіпотези, що ведмедя вб'є перший, другий і третій стрілець відповідно. До пострілів ці гіпотези рівноімовірні і їхня ймовірність дорівнює $\frac{1}{3}$.

$P(H_1/A)$ – імовірність того, що ведмедя вбив перший стрілець за умови, що постріли вже виконані (подія A).

Імовірності того, що ведмедя вб'є перший, другий або третій стрілець, обчислені до пострілів, рівні відповідно:

$$P(A/H_1) = p_1 q_2 q_3 = 0,3 \cdot 0,6 \cdot 0,5 = 0,09$$
$$P(A/H_2) = q_1 p_2 q_3 = 0,7 \cdot 0,4 \cdot 0,5 = 0,14$$
$$P(A/H_3) = q_1 q_2 p_3 = 0,7 \cdot 0,6 \cdot 0,5 = 0,21$$

Тут $q_1 = 0,7$; $q_2 = 0,6$; $q_3 = 0,5$ – імовірності промаху для кожного зі стрільців, розраховані як $q = 1 - p$, де p – імовірності влучення для кожного зі стрільців.

Підставимо ці значення у формулу Баєса:

$$P(H_1/A) = \frac{0,09}{0,44} = \frac{9}{44}.$$

Приклад. Послідовно послано чотири радіосигнали. Імовірності прийому кожного з них не залежать від того, чи прийняті інші сигнали, чи ні. Імовірності прийому сигналів рівні відповідно $0,2$, $0,3$, $0,4$, $0,5$. Визначити ймовірність прийому трьох радіосигналів.

Подія прийому трьох сигналів із чотирьох можлива в чотирьох випадках:

$$P_A = p_1 p_2 p_3 q_4 = 0,2 \cdot 0,3 \cdot 0,4 \cdot 0,5 = 0,012$$
$$P_B = p_1 p_2 q_3 p_4 = 0,2 \cdot 0,3 \cdot 0,6 \cdot 0,5 = 0,018$$
$$P_C = p_1 q_2 p_3 p_4 = 0,2 \cdot 0,7 \cdot 0,4 \cdot 0,5 = 0,028$$
$$P_D = q_1 p_2 p_3 p_4 = 0,8 \cdot 0,3 \cdot 0,4 \cdot 0,5 = 0,048$$

Для прийому трьох сигналів необхідне здійснення однієї з подій A, B, C або D. Таким чином, знаходимо шукану ймовірність:

$$P = 0,012 + 0,018 + 0,028 + 0,048 = 0,106.$$

Приклад. Двадцять екзаменаційних білетів містять по два питання, які не повторюються. Екзаменований знає відповіді тільки на 35 питань. Визначити ймовірність того, що іспит буде зданий, якщо для цього досить відповісти на два питання одного білета або на одне питання одного білета й на зазначене додаткове питання з іншого білета.

У цілому є 40 питань (по 2 у кожному з 20 білетів). Імовірність того, що випадає питання, на який відповідь відома, мабуть, дорівнює $\frac{35}{40}$.

Для того, щоб скласти іспит, потрібне здійснення однієї із трьох подій:

1) Подія A – відповіли на перше питання (імовірність $\frac{35}{40}$) і відповіли на друге питання (імовірність $\frac{34}{39}$). Оскільки після успішної відповіді на перше питання залишається ще 39 питань, на 34 з яких відповіді відомі.

$$P(A) = \frac{35}{40} \cdot \frac{34}{39} = 0,7628$$

2) Подія B – на перше питання відповіли (імовірність $\frac{35}{40}$), на другий – ні (імовірність $\frac{5}{39}$), на третє – відповіли (імовірність $\frac{34}{38}$).

$$P(B) = \frac{35}{40} \cdot \frac{5}{39} \cdot \frac{34}{38} = 0,1004$$

3) Подія C – на перше питання не відповіли (імовірність $\frac{5}{40}$), на друге – відповіли (імовірність $\frac{35}{39}$), на третє – відповіли (імовірність $\frac{34}{38}$).

$$P(C) = \frac{5}{40} \cdot \frac{35}{39} \cdot \frac{34}{38} = 0,1004$$

Імовірність того, що при заданих умовах іспит буде зданий, дорівнює:

$$P = P(A) + P(B) + P(C) = 0,9636$$

Приклад. Є дві партії однорідних деталей. Перша партія складається з 12 деталей, 3 з яких – браковані. Друга партія складається з 15 деталей, 4 з яких – браковані. З першої й другої партій витягають по дві деталі. Яка ймовірність того, що серед них немає бракованих деталей.

Імовірність, що перша деталь, витягнута з першої партії виявиться бракованою, дорівнює $p_1 = \frac{9}{12}$, для другої деталі, витягнутої з першої партії, за умови, що перша деталь не була бракованою – $p_2 = \frac{8}{11}$.

Імовірність, перша деталь, витягнута з другої партії, виявиться не бракованою, дорівнює $p_3 = \frac{11}{15}$, для другої деталі, витягнутої із другої партії за умови, що перша деталь була не бракованою – $p_4 = \frac{10}{14}$.

Імовірність того, що серед чотирьох витягнутих деталей немає бракованих, дорівнює:

$$P = \frac{9 \cdot 8 \cdot 11 \cdot 10}{12 \cdot 11 \cdot 15 \cdot 14} = 0,2857.$$

Розгляньмо той же приклад, але трохи з іншою умовою.

Приклад. Є дві партії однорідних деталей. Перша партія складається з 12 деталей, 3 з яких – браковані. Друга партія складається з 15 деталей, 4 з яких – браковані. З першої партії витягають навмання 5 деталей, а із другої – 7 деталей. Ці деталі утворять нову партію. Яка ймовірність дістати з них браковану деталь?

Для того, щоб обрана навмання деталь була бракованою, необхідне виконання одної з двох несумісних умов:

1) Обрана деталь була з першої партії (імовірність - $\frac{5}{12}$) і при цьому вона – бракована (імовірність - $\frac{3}{12}$). Остаточно:

$$p_1 = \frac{5}{12} \cdot \frac{3}{12} = 0,1041;$$

2) Обрана деталь була із другої партії (імовірність – $\frac{7}{12}$) і при цьому вона – бракована (імовірність – $\frac{4}{15}$). Остаточно:

$$p_2 = \frac{7}{12} \cdot \frac{4}{15} = 0,1556;$$

Остаточно, одержуємо:$p = p_1 + p_2 = 0,2597$.

Приклад. В урні 3 білих і 5 чорних куль. З урни виймають навмання дві кулі. Знайти ймовірність того, що ці кулі не одного кольору.

Подія, що полягає в тому, що обрані кулі різних кольорів, відбудеться в одному із двох випадків:

1) Перша куля біла (імовірність – $\frac{3}{8}$), а друга – чорна (імовірність – $\frac{5}{7}$).

2) Перша куля чорна (імовірність – $\frac{5}{8}$), а друга – біла (імовірність – $\frac{3}{7}$).

Остаточно одержуємо: $p = \frac{3}{8} \cdot \frac{5}{7} + \frac{5}{8} \cdot \frac{3}{7} = \frac{15}{28}$.

11.2 Біноміальний розподіл

Якщо проводиться n незалежних випробувань, у кожному з яких подія A може з'явитися з однаковою ймовірністю p у кожному з випробувань, то ймовірність того, що подія не з'явиться, дорівнює $q = 1 - p$.

Приймемо число появ події в кожному з випробувань за деяку випадкову величину X.

Щоб знайти закон розподілу цієї випадкової величини, необхідно визначити значення цієї величини і її ймовірності.

Значення знайти досить просто. Очевидно, що в результаті n випробувань подія може не з'явитися зовсім, з'явитися один раз, два рази, три тощо, до n раз.

Імовірність кожного значення цієї випадкової величини можна знайти за формулою Бернуллі.

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}, \qquad k = 0, 1, 2, ...$$

Ця формула аналітично виражає шуканий закон розподілу. Цей закон розподілу називається **біноміальним**.

Приклад. У партії 10% нестандартних деталей. Навмання відібрані 4 деталі. Написати біноміальний закон розподілу дискретної випадкової величини X – числа нестандартних деталей серед чотирьох відібраних і побудувати багатокутник отриманого розподілу.

Імовірність появи нестандартної деталі в кожному випадку дорівнює $0,1$.

Знайдемо ймовірності того, що серед відібраних деталей:

1) Взагалі немає нестандартних.

$$P_4(0) = \frac{4!}{0! \cdot 4!} 0,1^0 \cdot 0,9^4 = 0,6561$$

2) Одна нестандартна.

$$P_4(1) = \frac{4!}{1! \cdot 3!} 0,1^1 \cdot 0,9^3 = 0,2916$$

3) Дві нестандартні деталі.

$$P_4(2) = \frac{4!}{2! \cdot 2!} 0,1^2 \cdot 0,9^2 = 0,0486$$

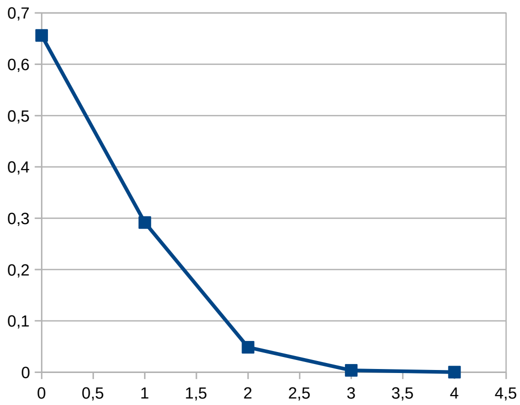
4) Три нестандартні деталі.

$$P_4(3) = \frac{4!}{3! \cdot 1!} 0,1^3 \cdot 0,9^1 = 0,0036$$

5) Чотири нестандартних деталі.

$$P_4(4) = \frac{4!}{4! \cdot 0!} 0,1^4 \cdot 0,9^0 = 0,0001$$

Побудуємо багатокутник розподілу.



Приклад. Дві гральні кістки одночасно кидають 2 рази. Написати біноміальний закон розподілу дискретної випадкової величини X – числа випадань парного числа очок на двох гральних кістках.

Кожна гральна кістка має три варіанти парних очок – 2, 4 і 6 із шести можливих, таким чином, імовірність випадання парного числа очок на одній кістці дорівнює $0,5$.

Імовірність одночасного випадання парних очок на двох кістках дорівнює $0,25$.

Імовірність того, що при двох випробуваннях обидва рази випали парні очок на обох кістках, дорівнює:

$$P_2(2) = \frac{2!}{0! \cdot 2!} 0,25^2 \cdot 0,75^0 = 0,0625$$

Імовірність того, що при двох випробуваннях один раз випали парні очки на обох кістках:

$$P_2(1) = \frac{2!}{1! \cdot 1!} 0,25^1 \cdot 0,75^1 = 0,375$$

Імовірність того, що при двох випробуваннях жодного разу не випаде парного числа очок на обох кістках:

$$P_2(0) = \frac{2!}{0! \cdot 2!} 0,25^0 \cdot 0,75^2 = 0,5625.$$

11.3 Розподіл Пуассона

(Сімеон Дені Пуассон (1781–1840) – французький математик)

Нехай проводиться n незалежних випробувань, у яких поява події A має ймовірність p. Якщо число випробувань n досить велике, а ймовірність появи події A в кожному випробуванні мала ($p \leqslant 0,1$), то для знаходження ймовірності появи події A k раз існує такий спосіб.

Зробимо важливе припущення – добуток np зберігає стале значення:

$$np = \lambda$$

Практично це припущення означає, що середнє число появи події в різних серіях випробувань (при різному n) залишається незмінним.

За формулою Бернуллі одержуємо:

$$P_n(k) = \frac{n(n-1)(n-2)...(n-(k-1))}{k!} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$P_n(k) = \frac{n(n-1)(n-2)...(n-(k-1))}{k!} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}$$

Знайдемо межу цієї ймовірності при $n \to \infty$.

$$P_n(k) \cong \lim_{n\to\infty} \frac{n(n-1)(n-2)...(n-(k-1))}{k!}\frac{\lambda^k}{n^k}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} =$$

$$= \frac{\lambda^k}{k!}\lim_{n\to\infty}\left[\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)...\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}\right] = \frac{\lambda^k}{k!}\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n}\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k} = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$$

Одержуємо формулу **розподілу Пуассона:**

$$\boxed{P_n(k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}}$$

Якщо відомі числа λ і k, то значення ймовірності можна знайти за відповідними таблицями розподілу Пуассона.

11.4 Локальна теорема Муавра-Лапласа

Справедливою є наближена рівність

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi\left(\frac{k-np}{\sqrt{npq}}\right), \text{ де } \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}, q = 1-p.$$

Функція $\varphi(x)$ парна: $\varphi(-x) = \varphi(x)$.
Формула дає добре наближення, якщо n достатньо велике, p і q не дуже близькі до нуля, $npq > 9$.
Приклад. Ймовірність успіху у кожному випробуванні дорівнює 0,25. Яка ймовірність того, що при 300 випробуваннях успішними будуть а) рівно 75 випробувань, б) рівно 85 випробувань.
а) За умовою $n = 300$, $k = 75$, $p = 0,25$, тоді $q = 1-p = 0,75$,

$$\frac{k-np}{\sqrt{npq}} = \frac{75-300\cdot 0,25}{\sqrt{300\cdot 0,25\cdot 0,75}} = \frac{0}{7,5} = 0,$$

$$P_{300}(75) \approx \frac{1}{7,5}\varphi(0) = \frac{0,3989}{7,5} = 0,0532.$$

б) За умовою $n = 300$, $k = 85$, $p = 0,25$, тоді $q = 1-p = 0,75$,

$$\frac{k-np}{\sqrt{npq}} = \frac{85-300\cdot 0,25}{\sqrt{300\cdot 0,25\cdot 0,75}} = \frac{10}{7,5} = 1,33,$$

$$P_{300}(85) \approx \frac{1}{7,5}\varphi(1,33) = \frac{0,1647}{7,5} = 0,0219.$$

11.5 Інтегральна теорема Муавра-Лапласа

Ймовірність того, що в n незалежних випробуваннях, в кожному з яких подія A може відбутися з ймовірністю p $(0 < p < 1)$, подія A відбудеться не менше k_1 і не більше k_2 разів, наближено дорівнює

$$P_n(k_1 \leqslant k \leqslant k_2) \approx \Phi\left(\frac{k_2-np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{k_1-np}{\sqrt{npq}}\right), \text{ де } \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t.$$

Функція $\Phi(x)$ називається *функцією Лапласа*. Вона непарна: $\Phi(-x) = -\Phi(x)$. $\lim\limits_{x\to\infty}\Phi(x) = 0,5$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\Phi(x) = -0,5$
Формула дає добре наближення, якщо n достатньо велике, p і q не дуже близькі до нуля, $npq > 9$.
Приклад. Ймовірність виходу з ладу за час t одного приладу дорівнює 0,1. Визначити ймовірність того, що за час t зі 100 приладів вийде з ладу а) від 6 до 18 приладів, б) не менше 20.
а) За умовою $n = 100$, $k_1 = 6$, $k_2 = 18$, $p = 0,1$, тоді $q = 1-p = 0,9$,

$$\frac{k_2-np}{\sqrt{npq}} = \frac{18-100\cdot 0,1}{\sqrt{100\cdot 0,1\cdot 0,9}} = \frac{8}{3} = 2,66,$$

$$\frac{k_1-np}{\sqrt{npq}} = \frac{6-100\cdot 0,1}{\sqrt{100\cdot 0,1\cdot 0,9}} = -\frac{4}{3} = -1,33,$$

$$P_{100}(6 \leqslant k \leqslant 18) \approx \Phi(2,66) - \Phi(-1,33) = \Phi(2,66) + \Phi(1,33) = 0,49609 + 0,40824 = 0,90433.$$

б) За умовою $n = 100$, $k_1 = 20$, $k_2 = 100$, $p = 0,1$, тоді $q = 1-p = 0,9$,

$$\frac{k_2-np}{\sqrt{npq}} = \frac{100-100\cdot 0,1}{\sqrt{100\cdot 0,1\cdot 0,9}} = \frac{90}{3} = 30,$$

$$\frac{k_1-np}{\sqrt{npq}} = \frac{20-100\cdot 0,1}{\sqrt{100\cdot 0,1\cdot 0,9}} = -\frac{10}{3} = 3,3,$$

$$P_{100}(20 \leqslant k \leqslant 100) \approx \Phi(30) - \Phi(3,3) = 0,5 - 0,4995 = 0,0005.$$

12 Числові характеристики дискретних випадкових величин

Закон розподілу повністю характеризує випадкову величину. Однак, коли неможливо знайти закон розподілу, або цього не потрібно, можна обмежитися знаходженням значень, які називаються числовими характеристиками випадкової величини. Ці величини визначають деяке середнє значення, навколо якого групуються значення випадкової величини, і ступінь їхньої розпорошеності навколо цього середнього значення.

12.1 Математичне сподівання

<u>Визначення.</u> Математичним сподіванням дискретної випадкової величини називається сума добутків всіх можливих значень випадкової величини на їхні імовірності.

$$m_x = M(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + ... + x_np_n = \sum_{i=1}^{n} x_ip_i$$

Математичне сподівання існує, якщо ряд, що стоїть в правій частині рівності, збігається абсолютно.

З погляду ймовірності можна сказати, що математичне сподівання приблизно дорівнює середньому арифметичному спостережуваних значень випадкової величини.

12.1.1 Властивості математичного сподівання

1) Математичне сподівання сталої величини дорівнює самій сталій.

$$M(C) = C$$

2) Сталий множник можна виносити за знак математичного сподівання.

$$M(Cx) = CM(x)$$

3) Математичне сподівання добутку двох незалежних випадкових величин дорівнює добутку їхніх математичних сподівань.

$$M(XY) = M(X)M(Y)$$

Ця властивість справедлива для довільного числа випадкових величин.

4) Математичне сподівання суми двох випадкових величин дорівнює сумі математичних сподівань доданків.

$$M(X+Y) + M(X) + M(Y)$$

Ця властивість також справедлива для довільного числа випадкових величин.

Нехай проводиться n незалежних випробувань, імовірність появи події A в яких дорівнює p.

<u>Теорема.</u> *Математичне сподівання $M(X)$ числа появи події A в n незалежних випробуваннях дорівнює добутку числа випробувань на ймовірність появи події в кожному випробуванні.*

$$M(X) = np$$

12.2 Дисперсія

Однак, математичне сподівання не може повністю характеризувати випадковий процес. Крім математичного сподівання треба ввести величину, що характеризує відхилення значень випадкової величини від математичного сподівання.

Це відхилення дорівнює різниці між випадковою величиною і її математичним сподіванням. При цьому математичне сподівання відхилення дорівнює нулю. Це пояснюється тим, що одні можливі відхилення додатні, інші від'ємні, і в результаті їхнього взаємного погашення виходить нуль.

<u>Визначення.</u> Дисперсією (розсіюванням) дискретної випадкової величини називається математичне сподівання квадрата відхилення випадкової величини від її математичного сподівання.

$$D(X) = M\left[X - M(X)\right]^2$$

<u>Приклад.</u> Для розглянутого вище прикладу закон розподілу випадкової величини має вигляд:

X	0	1	2
p	0,0625	0,375	0,5625

Знайти математичне сподівання й дисперсію випадкової величини.

Математичне сподівання випадкової величини дорівнює:

$$M(X) = 0 \cdot 0,0625 + 1 \cdot 0,375 + 2 \cdot 0,5625 = 1,5$$

Можливі значення квадрата відхилення:

$$[x_1 - M(X)]^2 = (0 - 1,5)^2 = 2,25$$

$$[x_2 - M(X)]^2 = (1 - 1,5)^2 = 0,25$$

$$[x_3 - M(X)]^2 = (2 - 1,5)^2 = 0,25$$

Тоді

$[[X - M(X)]^2$	2,25	0,25	0,25
p	0,0625	0,375	0,5625

Дисперсія дорівнює:

$$D(X) = 2,25 \cdot 0,0625 + 0,25 \cdot 0,375 + 0,25 \cdot 0,5625 = 0,375$$

Однак, на практиці подібний спосіб обчислення дисперсії незручний, тому що приводить при великій кількості значень випадкової величини до громіздких обчислень.

Тому застосовується інший спосіб.

12.2.1 Обчислення дисперсії

Теорема. *Дисперсія дорівнює різниці між математичним сподіванням квадрата випадкової величини X та квадратом її математичного сподівання.*

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2$$

Доведення. З врахуванням того, що математичне сподівання $M(X)$ і квадрат математичного сподівання $M^2(X)$ – величини сталі, можна записати:

$$D(X) = M[X - M(X)]^2 = M\left[X^2 - 2XM(X) + M^2(X)\right] =$$

$$= M(X^2) - 2M(X)M(X) + M^2(X) = M(X^2) - M^2(X).$$

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2$$

Застосуємо цю формулу для розглянутого вище прикладу:

X	0	1	2
X^2	0	1	4
p	0,0625	0,375	0,5625

$$M(X^2) = 0 \cdot 0,0625 + 1 \cdot 0,375 + 4 \cdot 0,5625 = 2,625$$

$$D(X) = 2,625 - [1,5]^2 = 0,375$$

12.2.2 Властивості дисперсії

1. Дисперсія постійної величини дорівнює нулю.

$$D(C) = 0$$

2. Сталий множник можна виносити за знак дисперсії, підносячи його у квадрат.

$$D(CX) = C^2 D(X)$$

3. Дисперсія суми двох незалежних випадкових величин дорівнює сумі дисперсій цих величин.

$$D(X + Y) = D(X) + D(Y)$$

4. Дисперсія різниці двох незалежних випадкових величин дорівнює сумі дисперсій цих величин.

$$D(X - Y) = D(X) + D(Y)$$

Справедливість цієї рівності випливає із властивості 2.

Теорема. *Дисперсія числа появи події A в n незалежних випробувань, у кожному з яких імовірність p появи події стала, дорівнює добутку числа випробувань на ймовірності появи й непояви події в кожному випробуванні.*

$$D(X) = npq$$

12.3 Середнє квадратичне відхилення

<u>**Визначення.**</u> **Середнім квадратичним відхиленням** випадкової величини X називається квадратний корінь із дисперсії.

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$$

<u>**Теорема.**</u> *Середнє квадратичне відхилення суми кінцевого числа взаємно незалежних випадкових величин дорівнює квадратному кореню із суми квадратів середніх квадратичних відхилень цих величин.*

$$\sigma(X_1 + X_2 + ... + X_n) = \sqrt{\sigma^2(X_1) + \sigma^2(X_2) + ... + \sigma^2(X_n)}$$

<u>Приклад.</u> Завод випускає 96% виробів першого сорту й 4% виробів другого сорту. Навмання вибирають 1000 виробів. Нехай X – число виробів першого сорту в даній вибірці. Знайти закон розподілу, математичне сподівання й дисперсію випадкової величини X.

Вибір кожного з 1000 виробів можна вважати незалежним випробуванням, у якому ймовірність появи виробу першого сорту однакова й дорівнює $p = 0,96$.

Таким чином, закон розподілу може вважатися біноміальним.

$$m_x = pn = 1000 \cdot 0,96 = 960;$$

$$D_x = npq = 1000 \cdot 0,96 \cdot 0,04 = 38,4;$$

<u>Приклад.</u> Знайти дисперсію дискретної випадкової величини X – числа появ події A в двох незалежних випробуваннях, якщо ймовірності появи цієї події в кожному випробуванні рівні й відомо, що $M(X) = 0{,}9$.

Оскільки випадкова величина X розподілена по біноміальному законі, то

$$M(X) = np = 2p = 0,9; \quad \Rightarrow \quad p = 0,45;$$

$$D(X) = npq = 2p(1-p) = 2 \cdot 0,45 \cdot 0,55 = 0,495.$$

<u>Приклад.</u> Проводяться незалежні випробування з однаковою ймовірністю появи події A в кожному випробуванні. Знайти ймовірність появи події A, якщо дисперсія числа появ події в трьох незалежних випробуваннях дорівнює 0,63.

За формулою дисперсії біноміального закону одержуємо:

$$D(X) = npq = 3p(1-p) = 0,63;$$

$$3p^2 - 3p + 0,63 = 0$$
$$p^2 - p + 0,21 = 0;$$
$$p_1 = 0,7; \quad p_2 = 0,3;$$

<u>Приклад.</u> Випробовується пристрій, що складається із чотирьох незалежно працюючих приладів. Імовірності відмови кожного із приладів рівні відповідно $p_1 = 0,3$; $p_2 = 0,4$; $p_3 = 0,5$; $p_4 = 0,6$. Знайти математичне сподівання й дисперсію числа приладів, що відмовили.

Приймаючи за випадкову величину число приладів, що відмовили, бачимо що ця випадкова величина може приймати значення 0, 1, 2, 3 або 4.

Для складання закону розподілу цієї випадкової величини необхідно визначити відповідні ймовірності. Приймемо $q_i = 1 - p_i$.

1) Не відмовив жоден прилад.

$$p(0) = q_1q_2q_3q_4 = 0,7 \cdot 0,4 \cdot 0,5 \cdot 0,4 = 0,084.$$

2) Відмовив один із приладів.

$$p(1) = p_1q_2q_3q_4 + q_1p_2q_3q_4 + q_1q_2p_3q_4 + q_1q_2q_3p_4 = 0,302.$$

3) Відмовили два прилади.

$$p(2) = p_1p_2q_3q_4 + p_1q_2p_3q_4 + p_1q_2q_3p_4 + q_1p_2p_3q_4 + q_1p_2q_3p_4 + q_1q_2p_3p_4 = 0,38.$$

4) Відмовили три прилади.

$$p(3) = p_1p_2p_3q_4 + p_1p_2q_3p_4 + p_1q_2p_3p_4 + q_1p_2p_3p_4 = 0,198.$$

5) Відмовили всі прилади.

$$p(4) = p_1p_2p_3p_4 = 0,036.$$

Одержуємо закон розподілу:

x	0	1	2	3	4
x^2	0	1	4	9	16
p	0,084	0,302	0,38	0,198	0,036

Математичне сподівання:

$$M(X) = 0,302 + 2 \cdot 0,38 + 3 \cdot 0,198 + 4 \cdot 0,036 = 1,8.$$

$$M(X^2) = 0,302 + 4 \cdot 0,38 + 9 \cdot 0,198 + 16 \cdot 0,036 = 4,18.$$

Дисперсія:

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2 = 4,18 - 3,24 = 0,94.$$

13 Функція розподілу

У всіх розглянутих вище випадках випадкова величина визначалася шляхом задання значень самої величини й імовірностей цих значень.

Однак, такий метод застосовний далеко не завжди. Наприклад, у випадку неперервної випадкової величини, її значення можуть заповнювати деякий довільний інтервал. Очевидно, що в цьому випадку задати всі значення випадкової величини просто нереально.

Навіть у випадку, коли це зробити можна, найчастіше задача вирішується надзвичайно складно. Розглянутий тільки що приклад навіть при відносно простій умові (приладів тільки чотири) приводить до досить незручних обчислень, а якщо в задачі буде кілька сотень приладів?

Тому постає задача про можливість відмовитися від індивідуального підходу до кожної задачі й знайти по можливості найбільш загальний спосіб задання будь-яких типів випадкових величин.

Нехай x – дійсне число. Імовірність події, що полягає в тому, що X прийме значення, менше x, тобто $X < x$, позначимо через $F(x)$.

Визначення. **Функцією розподілу** називають функцію $F(x)$, що визначає ймовірність того, що випадкова величина X у результаті випробування прийме значення, менше x.

$$F(x) = P(X < x)$$

Функцію розподілу також називають **інтегральною функцією**.

Функція розподілу існує як для неперервних, так і для дискретних випадкових величин. Вона повністю характеризує випадкову величину і є однією з форм закону розподілу.

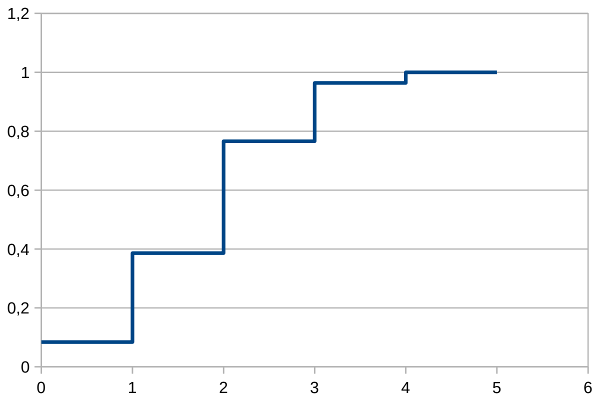
Для дискретної випадкової величини функція розподілу має вигляд:

$$F(x) = \sum_{x_i < x} P(X = x_i)$$

Знак нерівності під знаком суми показує, що підсумовування поширюється на ті можливі значення випадкової величини, які менше аргументу x.

Функція розподілу дискретної випадкової величини X розривна й зростає стрибками при переході через кожне значення x_i.

Так для прикладу, розглянутого вище, функція розподілу буде мати вигляд:



13.1 Властивості функції розподілу

1) значення функції розподілу належать відрізку $[0, 1]$.

$$0 \leqslant F(x) \leqslant 1$$

2) $F(x)$ – неспадна функція.
$F(x_2) \geqslant F(x_1)$ при $x_2 \geqslant x_1$
3) Імовірність того, що випадкова величина прийме значення, вкладене в інтервалі (a, b), дорівнює приросту функції розподілу на цьому інтервалі.

$$P(a \leqslant X < b) = F(b) - F(a)$$

4) На мінус нескінченності функція розподілу дорівнює нулю, на плюс нескінченності функція розподілу дорівнює одиниці.
5) Імовірність того, що неперервна випадкова величина X прийме одне певне значення, дорівнює нулю.
Таким чином, не має сенсу говорити про якесь конкретне значення випадкової величини. Інтерес представляє тільки ймовірність потрапляння випадкової величини в якийсь інтервал, що відповідає більшості практичних задач.

14 Щільність розподілу

Функція розподілу повністю характеризує випадкову величину, однак, має один недолік. По функції розподілу важко судити про характер розподілу випадкової величини в невеликому околі тієї чи іншої точки числової осі.
Визначення. **Щільністю розподілу** ймовірностей неперервної випадкової величини X називається функція $f(x)$ – перша похідна від функції розподілу $F(x)$.

$$f(x) = F'(x).$$

Щільність розподілу також називають **диференціальною функцією**. Для опису дискретної випадкової величини щільність розподілу неприйнятна.
Зміст щільності розподілу полягає в тому, що вона показує як часто з'являється випадкова величина X у деякому околі точки x при повторенні дослідів.
Після введення функцій розподілу й щільності розподілу можна дати наступне визначення неперервної випадкової величини.
Визначення. Випадкова величина X називається **неперервною**, якщо її функція розподілу $F(x)$ неперервна на всій осі OX, а щільність розподілу $f(x)$ існує скрізь, за винятком, можливо, скінченного числа точок.
Знаючи щільність розподілу, можна обчислити ймовірність того, що деяка випадкова величина X прийме значення, що належить заданому інтервалу.
Теорема. *Імовірність того, що неперервна випадкова величина X прийме значення, що належить інтервалу (a, b), дорівнює певному інтегралу від щільності розподілу, взятому в межах від a до b.*

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

Доведення цієї теореми засновано на визначенні щільності розподілу й третій властивості функції розподілу, записаній вище.
Геометрично це означає, що ймовірність того, що неперервна випадкова величина прийме значення, що належить інтервалу (a, b), дорівнює площі криволінійної трапеції, обмеженою віссю Ox, кривою розподілу $f(x)$ і прямими $x = a$ і $x = b$.
Функція розподілу може бути легко знайдена, якщо відома щільність розподілу, за формулою:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\mathrm{d}x$$

14.1 Властивості щільності розподілу

1) Щільність розподілу – невід'ємна функція.

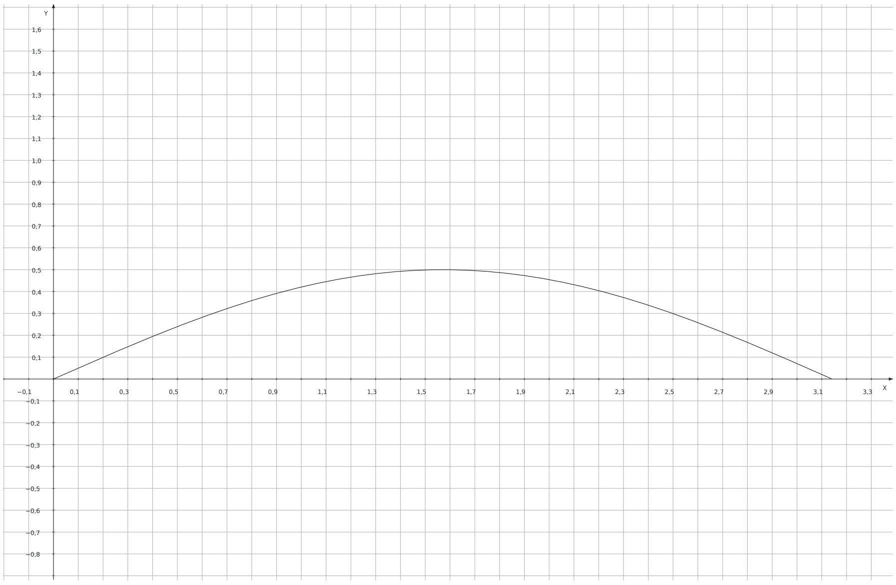
$$f(x) \geqslant 0$$

2) Невласний інтеграл від щільності розподілу в межах від $-\infty$ до ∞ дорівнює одиниці.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = 1.$$

Приклад. Випадкова величина підлягає закону розподілу із щільністю:

$$f(x) = \begin{cases} a\sin x, & \text{якщо} \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi \\ 0, & \text{якщо} \quad x < 0 \quad \text{або} \quad x > \pi \end{cases}$$



Потрібно знайти коефіцієнт a, побудувати графік функції щільності розподілу, визначити ймовірність того, що випадкова величина потрапить в інтервал від 0 до $\frac{\pi}{4}$.

Побудуємо графік щільності розподілу:

Для знаходження коефіцієнта a скористаємося властивістю $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = 1$.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{0} 0\mathrm{d}x + \int_{0}^{\pi} a\sin x\mathrm{d}x + \int_{\pi}^{\infty} 0\mathrm{d}x = a\int_{0}^{\pi} \sin x\mathrm{d}x = -\,a\cos x|_0^{\pi} = 2a = 1;$$

$$a = \frac{1}{2}.$$

Знаходимо ймовірність потрапляння випадкової величини в заданий інтервал.

$$P = \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2}\sin x\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{2-\sqrt{2}}{4}.$$

<u>Приклад.</u> Задано неперервну випадкову величину x своєю щільністю розподілу $f(x)$.

$$f(x) = \begin{cases} A\cos 2x, & \text{якщо} \quad -\frac{\pi}{4} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{4} \\ 0, & \text{якщо} \quad |x| > \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

Потрібно визначити коефіцієнт A, знайти функцію розподілу, побудувати графіки функції розподілу й щільності розподілу, визначити ймовірність того, що випадкова величина x потрапить в інтервал $\left(\frac{\pi}{6};\, 2\right)$.

Знайдемо коефіцієнт A.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{-\pi/4} 0\mathrm{d}x + \int_{-\pi/4}^{\pi/4} A\cos 2x\mathrm{d}x + \int_{\pi/4}^{\infty} 0\mathrm{d}x = \frac{A\sin 2x}{2}\Bigg|_{-\pi/4}^{\pi/4} = A = 1.$$

Знайдемо функцію розподілу:

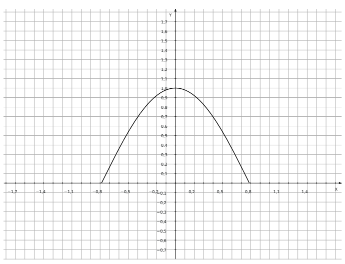
1) На ділянці $x < -\frac{\pi}{4}$: $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{x} 0\mathrm{d}x = 0$.

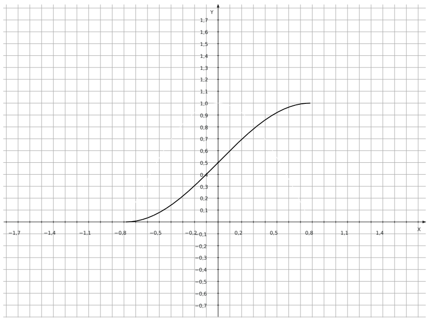
2) На ділянці $-\frac{\pi}{4} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{4}$: $F(x) = \int_{-\infty}^{-\pi/4} 0\mathrm{d}x + \int_{-\pi/4}^{x} \cos 2x\mathrm{d}x = \frac{\sin 2x}{2}\Big|_{-\pi/4}^{x} = \frac{\sin 2x}{2} + \frac{1}{2}$.

3) На ділянці $x > \frac{\pi}{4}$: $F(x) = \int_{-\infty}^{-\pi/4} 0\mathrm{d}x + \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos 2x\mathrm{d}x + \int_{\pi/4}^{x} 0\mathrm{d}x = \frac{\sin 2x}{2}\Big|_{-\pi/4}^{\pi/4} = 1$.

Отже: $f(x) = \begin{cases} \cos 2x, & \text{якщо} \quad -\frac{\pi}{4} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{4} \\ 0, & \text{якщо} \quad |x| > \frac{\pi}{4} \end{cases}$; $F(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad x < -\frac{\pi}{4} \\ \frac{\sin 2x + 1}{2}, & \text{якщо} \quad -\frac{\pi}{4} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{4} \\ 1, & \text{якщо} \quad x > \frac{\pi}{4} \end{cases}$;

Побудуємо графік щільності розподілу:





Побудуємо графік функції розподілу:
Знайдемо ймовірність потрапляння випадкової величини в інтервал $\left(\frac{\pi}{6};\ 2\right)$.

$$P\left(\frac{\pi}{6} < x < 2\right) = \int_{\pi/6}^{2} f(x)\mathrm{d}x = \int_{\pi/6}^{\pi/4} \cos 2x\mathrm{d}x + \int_{\pi/4}^{2} 0\mathrm{d}x = \left.\frac{\sin 2x}{2}\right|_{\pi/6}^{\pi/4} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4} = 0,067;$$

Ту саму ймовірність можна шукати й іншим способом:

$$P\left(\frac{\pi}{6} < x < 2\right) = F(2) - F\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1 - \frac{\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) + 1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4} = 0,067.$$

15 Числові характеристики неперервних випадкових величин

Нехай неперервна випадкова величина X задана функцією розподілу $f(x)$. Припустимо, що всі можливі значення випадкової величини належать відрізку $[a,b]$.

15.1 Математичне сподівання

Визначення. **Математичним сподіванням** неперервної випадкової величини X, можливі значення якої належать відрізку $[a,b]$, називається визначений інтеграл

$$M(X) = \int_a^b xf(x)\mathrm{d}x$$

Якщо можливі значення випадкової величини розглядаються на всій числовій осі, то математичне сподівання знаходиться за формулою:

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\mathrm{d}x$$

При цьому, звичайно, мається на увазі, що невласний інтеграл збігається.

15.2 Дисперсія

Визначення. **Дисперсією** неперервної випадкової величини називається математичне сподівання квадрата її відхилення.

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} [x - M(X)]^2 f(x)\mathrm{d}x$$

За аналогією з дисперсією дискретної випадкової величини, для практичного обчислення дисперсії використовують формулу:

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\mathrm{d}x - [M(X)]^2$$

15.3 Середнє квадратичне відхилення

Визначення. **Середнім квадратичним відхиленням** називається квадратний корінь із дисперсії.

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$$

15.4 Мода

Визначення. **Модою** M_0 дискретної випадкової величини називається її найбільш імовірне значення. Для неперервної випадкової величини мода – таке значення випадкової величини, при якому щільність розподілу має максимум.

$$f(M_0) = \max f(x).$$

Якщо багатокутник розподілу для дискретної випадкової величини або крива розподілу для неперервної випадкової величини має два або кілька максимумів, то такий розподіл називається **двомодальним** або **багатомодальным**.

Якщо розподіл має мінімум, але не має максимуму, то він називається **антимодальним**.

15.5 Медіана

Визначення. **Медіаною** M_D випадкової величини X називається таке її значення, щодо якого рівноімовірне одержання більшого або меншого значення випадкової величини.

$$P(X < M_D) = P(X > M_D)$$

Геометрично медіана – абсциса точки, у якій площа, обмежена кривою розподілу ділиться навпіл.

Відзначимо, що якщо розподіл одномодальний, то мода й медіана збігаються з математичним сподіванням.

15.6 Початковий момент

Визначення. **Початковим моментом** порядку k випадкової величини X називається математичне сподівання величини X^k.

$$\alpha_k = M[X^k].$$

Для дискретної випадкової величини: $\alpha_k = \sum_{i=1}^{n} x_i^k p_i$.

Для неперервної випадкової величини: $\alpha_k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x)\mathrm{d}x$. Початковий момент першого порядку дорівнює математичному сподіванню.

15.7 Центральний момент

Визначення. **Центральним моментом** порядку k випадкової величини X називається математичне сподівання величини $(X - m_x)^k$.

$$\mu_k = M[(X - m_x)^k]$$

Для дискретної випадкової величини: $\mu_k = \sum_{i=1}^{n} (x_i - m_x)^k p_i$.

Для неперервної випадкової величини: $\mu_k = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^k f(x)\mathrm{d}x$.

Центральний момент першого порядку завжди дорівнює нулю, а центральний момент другого порядку дорівнює дисперсії. Центральний момент третього порядку характеризує асиметрію розподілу.

15.8 Коефіцієнт асиметрії

Визначення. Відношення центрального моменту третього порядку до середнього квадратичного відхилення в третьому ступені називається **коефіцієнтом асиметрії**.

$$a_x = \frac{\mu_3}{\sigma_x^3}$$

15.9 Ексцес

Визначення. Для характеристики гостровершинності й плосковершинності розподілу використовується величина, названа **ексцесом**.

$$C_x = \frac{\mu_4}{\sigma_x^4} - 3$$

15.10 Абсолютні моменти

Крім розглянутих величин, використовують також так звані абсолютні моменти:

Абсолютний початковий момент: $\beta_k = M\left[|X|^k\right]$.

Абсолютний центральний момент: $\nu_k = M\left[|X - m_x|^k\right]$.

Абсолютний центральний момент першого порядку називається **середнім арифметичним відхиленням**.

Приклад. Для розглянутого вище прикладу визначити математичне сподівання й дисперсію випадкової величини X.

$$M(X)=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{-\pi/4}0\mathrm{d}x+\int_{-\pi/4}^{\pi/4}x\cos 2x\mathrm{d}x+\int_{\pi/4}^{\infty}0\mathrm{d}x=\int_{-\pi/4}^{\pi/4}x\cos 2x\mathrm{d}x=\left|\begin{array}{ll} u=x; & \mathrm{d}v=\cos 2x\mathrm{d}x; \\ \mathrm{d}u=\mathrm{d}x; & v=\frac{\sin 2x}{2}; \end{array}\right|=$$

$$=\frac{x\sin 2x}{2}\Bigg|_{-\pi/4}^{\pi/4}-\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\frac{\sin 2x}{2}\mathrm{d}x=\frac{\cos 2x}{4}\Bigg|_{-\pi/4}^{\pi/4}=0.$$

$$M(X^2)=\int_{-\infty}^{\infty}x^2f(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{-\pi/4}0\mathrm{d}x+\int_{-\pi/4}^{\pi/4}x^2\cos 2x\mathrm{d}x+\int_{\pi/4}^{\infty}0\mathrm{d}x=\int_{-\pi/4}^{\pi/4}x^2\cos 2x\mathrm{d}x=$$
$$=\left|\begin{array}{ll} u=x^2; & \mathrm{d}v=\cos 2x\mathrm{d}x; \\ \mathrm{d}u=2x\mathrm{d}x; & v=\frac{\sin 2x}{2}; \end{array}\right|=\frac{x^2\sin 2x}{2}\Big|_{-\pi/4}^{\pi/4}-\int_{-\pi/4}^{\pi/4}x\sin 2x\mathrm{d}x=\left|\begin{array}{ll} u=x; & \sin 2x\mathrm{d}x=\mathrm{d}v; \\ \mathrm{d}u=\mathrm{d}x; & v=-\frac{\cos 2x}{2}; \end{array}\right|=\frac{\pi^2}{16}+$$
$$+\frac{x\cos 2x}{2}\Big|_{-\pi/4}^{\pi/4}-\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\frac{\cos 2x}{2}\mathrm{d}x=\frac{\pi^2}{16}-\frac{\sin 2x}{4}\Big|_{-\pi/4}^{\pi/4}=\frac{\pi^2}{16}-\frac{1}{2}=0,1163.$$

$$D(X)=M(X^2)-[M(X)]^2=0,1163-0=0,1163.$$

Приклад. В урні 6 білих і 4 чорних кулі. З неї п'ять разів поспіль витягають кулю, причому щораз вийняту кулю повертають назад і кулі перемішують. Прийнявши за випадкову величину X число витягнутих білих куль, скласти закон розподілу цієї величини, визначити її математичне сподівання й дисперсію.

Оскільки кулі в кожному досліді повертають назад і перемішують, то випробування можна вважати незалежними (результат попереднього досліду не впливає на ймовірність появи або непояви події в іншому досліді).

Таким чином, імовірність появи білої кулі в кожному досліді стала й дорівнює $P_{\text{Б}}=\frac{6}{10}=0,6$.

Таким чином, у результаті п'яти послідовних випробувань біла куля може не з'явитися зовсім, з'явитися один раз, два, три, чотири або п'ять разів.

Для складання закону розподілу треба знайти ймовірності кожної з цих подій.

1) Біла куля не з'явилася зовсім: $P_{\text{Б}}(0)=(1-P_{\text{Б}})^5=0,0102$.

2) Біла куля з'явилася один раз: $P_{\text{Б}}(1)=C_5^1P_{\text{Б}}(1-P_{\text{Б}})^4=\frac{5!}{1!\cdot 4!}0,6\cdot 0,4^4=0,0768$

3) Біла куля з'явитися два рази: $P_{\text{Б}}(2)=\frac{5!}{2!\cdot 3!}0,6^2\cdot 0,4^3=0,2304$.

4) Біла куля з'явитися три рази: $P_{\text{Б}}(3)=\frac{5!}{3!\cdot 2!}0,6^3\cdot 0,4^2=0,3456$.

5) Біла куля з'явитися чотири рази: $P_{\text{Б}}(4)=\frac{5!}{4!\cdot 1!}0,6^4\cdot 0,4^1=0,2592$.

6) Біла куля з'явилася п'ять разів: $P_{\text{Б}}(5)=0,6^5=0,0778$.

Одержуємо такий закон розподілу випадкової величини X.

x	0	1	2	3	4	5
x^2	0	1	4	9	16	25
$p(x)$	0,0102	0,0768	0,2304	0,3456	0,2592	0,0778

$$M(X)=0,0768+2\cdot 0,2304+3\cdot 0,3456+4\cdot 0,2592+5\cdot 0,0778=3,0002.$$

$$M(X^2)=0,0768+4\cdot 0,2304+9\cdot 0,3456+16\cdot 0,2592+25\cdot 0,0778=10,201.$$

$$D(X)=M(X^2)-[M(X)]^2=10,201-9,0012=1,1998.$$

При розв'язанні практичних задач найчастіше точно знайти закон розподілу випадкової величини досить складно. Однак, всі процеси, що відбуваються, пов'язані з випадковими величинами, можна розділити на кілька типів, кожному з яких можна поставити у відповідність якийсь закон розподілу.

Вище були розглянуті деякі типи розподілів дискретної випадкової величини такі, як біноміальний розподіл і розподіл Пуассона.

Розглянемо тепер деякі типи законів розподілу для неперервної випадкової величини.

16 Рівномірний розподіл

Визначення. Неперервна випадкова величина має **рівномірний** розподіл на відрізку $[a;b]$, якщо на цьому відрізку щільність розподілу випадкової величини постійна, а поза ним дорівнює нулю.

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x<a \\ C, & a\leqslant x\leqslant b \\ 0, & x>b \end{cases}$$

Стала величина C може бути визначена з умови рівності одиниці площі, обмеженої кривою розподілу.

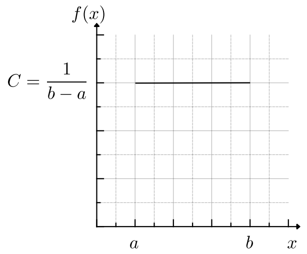
$$C=\frac{1}{b-a}$$

Одержуємо $C=\frac{1}{b-a}$.

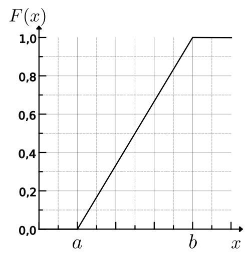
Знайдемо функцію розподілу $F(x)$ на відрізку $[a;b]$.

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\mathrm{d}x = \int_{a}^{x} \frac{1}{b-a}\mathrm{d}x = \left.\frac{x}{b-a}\right|_a^x = \frac{x-a}{b-a}.$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, & \text{якщо} \quad a \leqslant x \leqslant b \\ 1, & \text{якщо} \quad x > b \end{cases}$$



(а)



(б)

Для того, щоб випадкова величина підкорялася закону рівномірного розподілу, необхідно, щоб її значення лежали всередині деякого певного інтервалу, і всередині цього інтервалу значення цієї випадкової величини були б рівноімовірні.

Визначимо математичне сподівання й дисперсію випадкової величини, що підлягає рівномірному закону розподілу.

$$m_x = \int_a^b x f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b \frac{x}{b-a}\mathrm{d}x = \left.\frac{x^2}{2(b-a)}\right|_a^b = \frac{a+b}{2}.$$

$$m_{x^2} = \int_a^b x^2 f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b \frac{x^2}{b-a}\mathrm{d}x = \left.\frac{x^3}{3(b-a)}\right|_a^b = \frac{b^3-a^3}{3(b-a)} = \frac{b^2+ab+a^2}{3}.$$

$$D_x = m_{x^2} - m_x^2 = \frac{b^2+ab+a^2}{3} - \frac{a^2+2ab+b^2}{4} = \frac{b^2-2ab+a^2}{12} = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

$$\sigma_x = \sqrt{D_x} = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}.$$

Імовірність потрапляння випадкової величини в заданий інтервал:

$$P(\alpha < X < \beta) = \int_\alpha^\beta \frac{\mathrm{d}x}{b-a} = \frac{\beta-\alpha}{b-a}.$$

17 Показниковий розподіл

<u>Визначення.</u> Показниковим (експонентним) називається розподіл ймовірностей неперервної випадкової величини X, що описується щільністю

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x}, & \text{якщо} \quad x \geqslant 0 \end{cases}$$

де λ – додатне число.

Знайдемо закон розподілу.

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{0} 0\mathrm{d}x + \lambda\int_0^x e^{-\lambda x}\mathrm{d}x = 1 - e^{-\lambda x}.$$

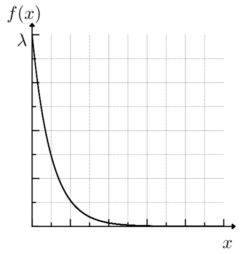
$$F(x) = \begin{cases} 0, \text{ якщо } x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x}, \text{ якщо } x \geqslant 0 \end{cases}$$

Графіки функції розподілу й щільності розподілу:

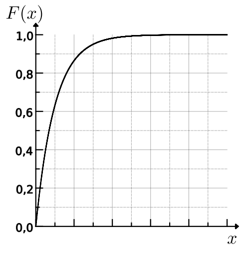
Знайдемо математичне сподівання випадкової величини, підлеглої показниковому розподілу.

$$m_x = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\mathrm{d}x = \int_0^{\infty} x\lambda e^{-\lambda x}\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{ll} u = x; & e^{-\lambda x}\mathrm{d}x = \mathrm{d}v; \\ \mathrm{d}u = \mathrm{d}x; & -\frac{e^{-\lambda x}}{\lambda} = v; \end{array} \right| = \lambda\left(-\left.\frac{x e^{-\lambda x}}{\lambda}\right|_0^{\infty} + \int_0^{\infty}\frac{e^{-\lambda x}}{\lambda}\mathrm{d}x\right) =$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-\lambda x}\mathrm{d}x = -\left.\frac{e^{-\lambda x}}{\lambda}\right|_0^{\infty} = \frac{1}{\lambda}.$$



(а)



(б)

Результат отриманий з використанням того факту, що

$$xe^{-\lambda x}\Big|_0^{\infty} = \lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^{\lambda x}} - 0 = \left|\begin{array}{c}\text{Правило}\\ \text{Лопіталя}\end{array}\right| = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{-\lambda e^{\lambda x}} = 0.$$

Для знаходження дисперсії знайдемо величину $M(X^2)$.

$$M(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^{\infty} \lambda x^2 e^{-\lambda x}\mathrm{d}x$$

Двічі інтегруючи частинами, аналогічно розглянутому випадку, одержимо:

$$M(X^2) = \frac{2}{\lambda^2};$$

Тоді $D\left(X\right) = M\left(X^2\right) - \left[M\left(X\right)\right]^2 = \frac{1}{\lambda^2}$.

Разом: $M(X) = \frac{1}{\lambda}$; $\quad D(X) = \frac{1}{\lambda^2}$; $\quad \sigma_x = \frac{1}{\lambda}$.

Видно, що у випадку показникового розподілу математичне сподівання й середнє квадратичне відхилення рівні.

Також легко визначити й імовірність потрапляння випадкової величини, підлеглої показниковому закону розподілу, у заданий інтервал.

$$P\left(a < x < b\right) = F(b) - F(a) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}.$$

Показниковий розподіл широко використовується в теорії надійності.

Припустимо, деякий пристрій починає працювати в момент часу $t_0 = 0$, а через якийсь час t відбувається відмова пристрою.

Позначимо T неперервну випадкову величину – тривалість безвідмовної роботи пристрою.

Таким чином, функція розподілу $F(t) = P(T < t)$ визначає ймовірність відмови за час тривалістю t.

Імовірність протилежної події (безвідмовна робота протягом часу t) дорівнює $R(t) = P(T > t) = 1 - F(t)$.

Визначення. **Функцією надійності** $R(t)$ називають функцію, що визначає ймовірність безвідмовної роботи пристрою протягом часу t.

Часто на практиці тривалість безвідмовної роботи підкоряється показниковому закону розподілу.

Загалом кажучи, якщо розглядати новий пристрій, то ймовірність відмови на початку його функціонування буде більше, потім кількість відмов знизиться й буде якийсь час мати практично те саме значення. Потім (коли пристрій виробить свій ресурс) кількість відмов буде зростати.

Інакше кажучи, можна сказати, що функціонування пристрою протягом всього існування (у змісті кількості відмов) можна описати комбінацією двох показникових законів (на початку й кінці функціонування) і рівномірного закону розподілу.

Функція надійності для якогось пристрою при показниковому законі розподілу дорівнює:

$$R(t) = 1 - F(t) = e^{-\lambda t}.$$

Дане співвідношення називають **показниковим законом надійності**.

Важливою властивістю, що дозволяє значно спростити розв'язання задач теорії надійності, є те, що ймовірність безвідмовної роботи пристрою на інтервалі часу t не залежить від часу попередньої роботи до початку розглянутого інтервалу, а залежить тільки від тривалості часу t.

Таким чином, безвідмовна робота пристрою залежить тільки від інтенсивності відмов λ і не залежить від безвідмовної роботи пристрою в минулому.

Оскільки подібною властивістю володіє тільки показниковий закон розподілу, цей факт дозволяє визначити, чи є закон розподілу випадкової величини показниковим, чи ні.

18 Нормальний закон розподілу

Визначення. Нормальним називається розподіл ймовірностей неперервної випадкової величини, що описується щільністю ймовірності

$$f(x) = \frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}};$$

Нормальний закон розподілу також називається **законом Гауса**.

Нормальний закон розподілу займає центральне місце в теорії ймовірностей. Це обумовлено тим, що цей закон проявляється у всіх випадках, коли випадкова величина є результатом дії великої кількості різних факторів. До нормального закону наближаються всі інші закони розподілу.

Можна легко показати, що параметри m_x й σ_x, що входять у щільність розподіли є відповідно математичним сподіванням і середнім квадратичним відхиленням випадкової величини X.

Знайдемо функцію розподілу $F(x)$.

$$F(x) = \frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}} \mathrm{d}x$$

Графік щільності нормального розподілу називається **нормальною кривою** або **кривою Гауса**.

Нормальна крива має наступні властивості:

1) Функція визначена на всій числовій осі.

2) При всіх x функція розподілу приймає тільки додатні значення.

3) Вісь Ox є горизонтальною асимптотою графіка щільності ймовірності, тому що при необмеженому зростанні по абсолютній величині аргументу x, значення функції прямує до нуля.

4) Знайдемо екстремум функції.

$$y' = -\frac{x-m_x}{\sigma_x^3\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}} = 0; \qquad x = m_x;$$

Оскільки при $y' > 0$ при $x < m_x$ і $y' < 0$ при $x > m_x$, то в точці $x = m_x$ функція має максимум, рівний $\frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}}$.

5) Функція є симетричною відносно прямої $x = m_x$, тому що різниця $(x - m_x)$ входить до функції щільності розподілу у квадраті.

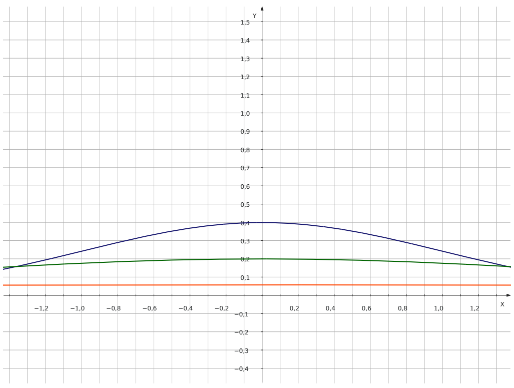
6) Для знаходження точок перегину графіка знайдемо другу похідну функції щільності.

$$y'' = -\frac{1}{\sigma_x^3\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}} \left[1 - \frac{(x-m_x)^2}{\sigma_x^2}\right]$$

При $x = m_x + \sigma_x$ і $x = m_x - \sigma_x$ друга похідна дорівнює нулю, а при переході через ці точки міняє знак, тобто в цих точках функція має перегин.

У цих точках значення функції дорівнює $\frac{1}{\sigma_x e\sqrt{2\pi}}$.

Побудуємо графік функції щільності розподілу.



Побудовано графіки при $m_x = 0$ і трьох можливих значеннях середнього квадратичного відхилення $\sigma_x = 1$, $\sigma_x = 2$ і $\sigma_x = 7$. Як видно, при збільшенні значення середнього квадратичного відхилення графік стає більш пологим, а максимальне значення зменшується.

Якщо $m_x > 0$, то графік зміститься в додатному напрямку, якщо $m_x < 0$ – у від'ємному.

При $m_x = 0$ і $\sigma_x = 1$ крива називається **нормованою**. Рівняння нормованої кривої:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

18.1 Функція Лапласа

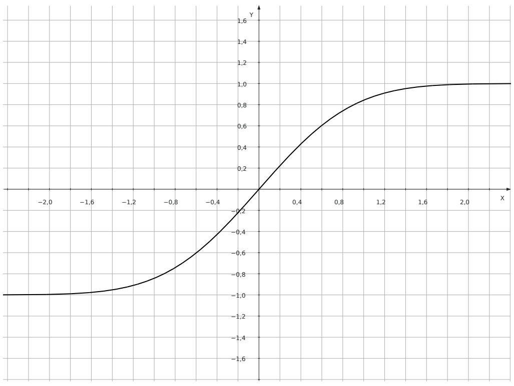
Знайдемо ймовірність потрапляння випадкової величини, розподіленої за нормальним законом, у заданий інтервал.

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}x$$

Позначимо $\frac{x-m}{\sigma\sqrt{2}} = t$; $\quad \frac{a-m}{\sigma\sqrt{2}} = \alpha$; $\quad \frac{b-m}{\sigma\sqrt{2}} = \beta$;
Тоді $P(a < X < b) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_\alpha^\beta e^{-t^2}\sigma\sqrt{2}\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_\alpha^\beta e^{-t^2}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left[\Phi(\beta) - \Phi(\alpha)\right]$
Оскільки інтеграл $\int e^{-t^2}\mathrm{d}t$ не виражається через елементарні функції, то вводиться в розгляд функція

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\mathrm{d}t,$$

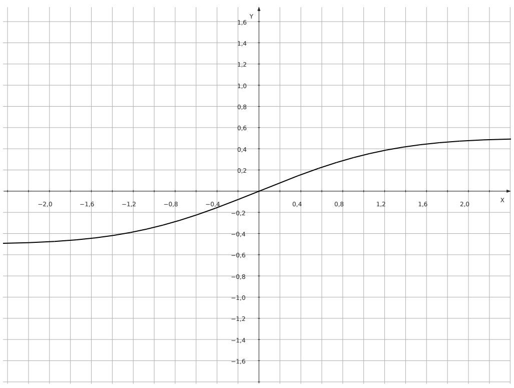
яка називається **функцією Лапласа** або **інтегралом імовірностей**.
Значення цієї функції при різних значеннях x розраховано і наведено в спеціальних таблицях.
Нижче показано графік функції Лапласа.



Функція Лапласа має наступні властивості:
1) $\Phi(0) = 0$;
2) $\Phi(-x) = -\Phi(x)$;
3) $\Phi(\infty) = 1$.
Функцію Лапласа також називають **функцією помилок** і позначають $\mathrm{erf}\, x$.
Крім того, використовується **нормована** функція Лапласа, що пов'язана з функцією Лапласа співвідношенням:

$$\bar{\Phi}(x) = \frac{1}{2}\Phi\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-t^2/2}\mathrm{d}t;$$

Нижче показаний графік нормованої функції Лапласа.



При розгляді нормального закону розподілу виділяється важливий окремий випадок, відомий як **правило трьох сигм**.

Запишемо ймовірність того, що відхилення нормально розподіленої випадкової величини від математичного сподівання менше заданої величини Δ:

$$P(|X - m| < \Delta) = \bar{\Phi}\left[\frac{m + \Delta - m}{\sigma}\right] - \bar{\Phi}\left[\frac{m - \Delta - m}{\sigma}\right] = \bar{\Phi}\left[\frac{\Delta}{\sigma}\right] - \bar{\Phi}\left[-\frac{\Delta}{\sigma}\right] = 2\bar{\Phi}\left[\frac{\Delta}{\sigma}\right]$$

Якщо прийняти $\Delta = 3\sigma$, то одержуємо з використанням таблиць значень функції Лапласа:

$$P(|X - m| < 3\sigma) = 2\bar{\Phi}(3) = 2 \cdot 0,49865 = 0,9973$$

Тобто імовірність того, що випадкова величина відхилиться від свого математичного сподівання на величину, більшу ніж потроєне середнє квадратичне відхилення, практично дорівнює нулю.

Це правило називається **правилом трьох сигм**.

На практиці вважається, що якщо для якоїсь випадкової величини виконується правило трьох сигм, то ця випадкова величина має нормальний розподіл.

Приклад. Поїзд складається з 100 вагонів. Маса кожного вагона – випадкова величина, розподілена за нормальним законом з математичним сподіванням $a = 65$ т і середнім квадратичним відхиленням $\sigma = 0,9$ т. Локомотив може везти поїзд масою не більше 6600 т, якщо вагу перевищено, необхідно причіпляти другий локомотив. Знайти ймовірність того, що другий локомотив не буде потрібним.

Другий локомотив не буде потрібним, якщо відхилення маси поїзду від очікуваного ($100 \cdot 65 = 6500$) не перевершує $6600 - 6500 = 100$ т.

Оскільки маса кожного вагона має нормальний розподіл, маса всього поїзду теж буде розподілена нормально.

Одержуємо:

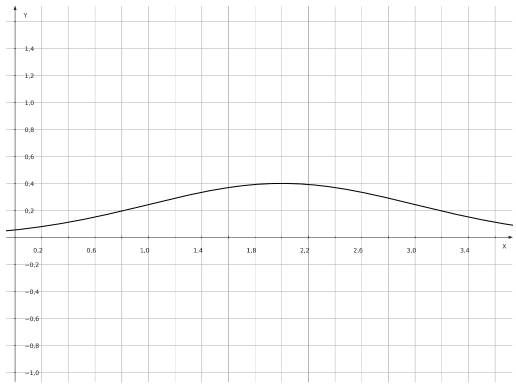
$$P(|X - M(X)| < 100 = 2\bar{\Phi}\left[\frac{100}{100\sigma}\right] = 2\bar{\Phi}\left[1,111\right] = 2 \cdot 0,3665 = 0,733$$

Приклад. Нормально розподілена випадкова величина X задана своїми параметрами – $a = 2$ – математичне сподівання й $\sigma = 1$ – середнє квадратичне відхилення. Потрібно написати щільність імовірності й побудувати її графік, знайти ймовірність того, X прийме значення з інтервалу $(1; 3)$, знайти ймовірність того, що X відхилиться (за модулем) від математичного сподівання не більше ніж на 2.

Щільність розподілу має вигляд:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-2)^2}{2}};$$

Побудуємо графік:



Знайдемо ймовірність потрапляння випадкової величини в інтервал $(1; 3)$.

$$P(1 < X < 3) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{\alpha}^{\beta} e^{-t^2}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left[\Phi\left(\frac{3-2}{\sqrt{2}}\right) - \Phi\left(\frac{1-2}{\sqrt{2}}\right)\right] = \frac{1}{2}\left[\Phi(0,7071) + \Phi(0,7071)\right] = 0,6778.$$

Знайдемо ймовірність відхилення випадкової величини від математичного сподівання на величину, не більшу чим 2.

$$P(|X - 2| < 2) = \Phi\left(\frac{\Delta}{\sigma\sqrt{2}}\right) = \Phi\left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right) = \Phi(\sqrt{2}) \approx 0,95.$$

Той же результат може бути отриманий з використанням нормованої функції Лапласа.

$$P(|X - 2| < 2) = 2\bar{\Phi}\left(\frac{\Delta}{\sigma}\right) = 2\bar{\Phi}\left(2\right) = 2 \cdot 0,4772 \approx 0,95.$$

18.2 Центральна гранична теорема

Теорема. *Якщо випадкова величина X являє собою суму дуже великого числа взаємно незалежних випадкових величин, вплив кожної з яких на всю суму мізерно малий, то X має розподіл, близький до нормального.*

На практиці для більшості випадкових величин виконуються умови теореми Ляпунова.

19 Система випадкових величин

Розглянуті вище випадкові величини були одновимірними, тобто визначалися одним числом, однак, існують також випадкові величини, які визначаються двома, трьома тощо числами. Такі випадкові величини називаються двовимірними, тривимірними тощо.

Залежно від типу, що входять у систему випадкових величин, системи можуть бути дискретними, неперервними або змішаними, якщо в систему входять різні типи випадкових величин.

Більш докладно розглянемо системи двох випадкових величин.

<u>Визначення.</u> Законом розподілу системи випадкових величин називається співвідношення, що встановлює зв'язок між областями можливих значень системи випадкових величин і ймовірностями появи системи в цих областях.

<u>Визначення.</u> Функцією розподілу системи двох випадкових величин називається функція двох аргументів $F(x, y)$, рівна ймовірності одночасного виконання двох нерівностей $X < x$, $Y < y$.

$$F(x, y) = P(X < x, Y < y)$$

Відзначимо наступні властивості функції розподілу системи двох випадкових величин:

1) Якщо один з аргументів прямує до плюс нескінченності, то функція розподілу системи прямує до функції розподілу однієї випадкової величини, що відповідає іншому аргументу.

$$\lim_{y\to\infty} F(x, y) = F_1(x);$$
$$\lim_{x\to\infty} F(x, y) = F_2(y);$$

2) Якщо обидва аргументи прямують до нескінченності, то функція розподілу системи прямує до одиниці.

$$F(\infty, \infty) = 1;$$

3) При прямуванні одного або обох аргументів до мінус нескінченності функція розподілу прямує до нуля.

$$F(-\infty, y) = F(x, -\infty) = F(-\infty, -\infty) = 0;$$

4) Функція розподілу є неспадною функцією за кожним аргументом.

5) Імовірність потрапляння випадкової точки (X, Y) у довільний прямокутник зі сторонами, паралельними координатним осям, обчислюється за формулою:

$$P(a \leqslant X \leqslant b, c \leqslant Y \leqslant d) = F(b, d) - F(a, d) - F(b, c) + F(a, c)$$

19.1 Щільність розподілу системи двох випадкових величин

<u>Визначення.</u> Щільністю спільного розподілу ймовірностей двовимірної випадкової величини (X, Y) називається друга змішана частинна похідна від функції розподілу.

$$f(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y}$$

Якщо відома щільність розподілу, то функція розподілу може бути легко знайдена за формулою:

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Двовимірна щільність розподілу ненегативна й подвійний інтеграл з нескінченними межами від двовимірної щільності дорівнює одиниці.

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 1$$

За відомою щільністю спільного розподілу можна знайти щільності розподілу кожної зі складових двовимірної випадкової величини.

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\mathrm{d}y; \qquad f_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\mathrm{d}x$$

$$F_1(x) = F(x, \infty) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y; F_2(y) = F(\infty, y) = \int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y;$$

19.2 Умовні закони розподілу

Як було показано вище, знаючи спільний закон розподілу можна легко знайти закони розподілу кожної випадкової величини, що входить у систему.

Однак, на практиці частіше стоїть зворотна задача – за відомими законами розподілу випадкових величин знайти їхній спільний закон розподілу.

У загальному випадку ця задача є нерозв'язною, тому що закон розподілу випадкової величини нічого не говорить про зв'язок цієї величини з іншими випадковими величинами.

Крім того, якщо випадкові величини залежні між собою, то закон розподілу не може бути виражений через закони розподілу складових, тому що повинен встановлювати зв'язок між складовими.

Все це приводить до необхідності розгляду умовних законів розподілу.

<u>Визначення.</u> Розподіл однієї випадкової величини, що входить у систему, знайдений за умови, що інша випадкова величина прийняла певне значення, називається **умовним законом розподілу**.

Умовний закон розподілу можна задавати як функцією розподілу так і щільністю розподілу.

Умовна щільність розподілу обчислюється за формулами:

$$f(x/y) = \frac{f(x,y)}{f_2(y)} = \frac{f(x,y)}{\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\mathrm{d}x}$$

$$f(y/x) = \frac{f(x,y)}{f_1(x)} = \frac{f(x,y)}{\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\mathrm{d}y}$$

Умовна щільність розподілу має всі властивості щільності розподілу однієї випадкової величини.

19.2.1 Умовне математичне сподівання

<u>Визначення.</u> **Умовним математичним сподіванням** дискретної випадкової величини Y при $X = x$ (x – певне можливе значення X) називається добуток всіх можливих значень Y на їхні умовні ймовірності.

$$M(Y/X = x) = \sum_{i=1}^{m} y_i p(y_i/x)$$

Для неперервних випадкових величин:

$$M(Y/X = x) = \int_{-\infty}^{\infty} y f(y/x)\mathrm{d}y,$$

де $f(y/x)$ – умовна щільність випадкової величини Y при $X = x$.

Умовне математичне сподівання $M(Y/x) = f(x)$ є функцією від x і називається **функцією регресії X на Y.**

<u>Приклад.</u> Знайти умовне математичне сподівання складової Y при $X = x_1 = 1$ для дискретної двовимірної випадкової величини, заданою таблицею:

Y	X			
	x_1=1	$x_2 = 3$	$x_3 = 4$	$x_4 = 8$
y_1=3	0,15	0,06	0,25	0,04
y_2=6	0,30	0,10	0,03	0,07

$$p(x_1) = 0,15 + 0,30 = 0,45$$

$$p(y_1/x_1) = p(x_1, y_1)/p(x_1) = 0,15/0,45 = 1/3;$$

$$p(y_2/x_1) = p(x_1, y_2)/p(x_1) = 0,30/0,45 = 2/3;$$

$$M(Y/X = x_1) = \sum_{j=1}^{2} y_j p(y_j/x_1) = y_1 p(y_1/x_1) + y_2 p(y_2/x_1) = 3/3 + 12/3 = 5.$$

Аналогічно визначаються умовна дисперсія й умовні моменти системи випадкових величин.

19.3 Залежні й незалежні випадкові величини

Випадкові величини називаються незалежними, якщо закон розподілу однієї з них не залежить від того, яке значення приймає інша випадкова величина.

Поняття залежності випадкових величин є дуже важливим у теорії ймовірностей.

Умовні розподіли незалежних випадкових величин рівні їхнім безумовним розподілам.

Визначимо необхідні й достатні умови незалежності випадкових величин.

<u>Теорема.</u> *Для того, щоб випадкові величини X та Y були незалежними, необхідно й достатньо, щоб функція розподілу системи $(X,\ Y)$ дорівнювала добутку функцій розподілу складових.*

$$F(x, y) = F_1(x)F_2(y)$$

Аналогічну теорему можна сформулювати й для щільності розподілу:

<u>Теорема.</u> *Для того, щоб випадкові величини X та Y були незалежними, необхідно й достатньо, щоб щільність спільного розподілу системи $(X,\ Y)$ була рівною добутку щільностей розподілу складових.*

$$f(x, y) = f_1(x)f_2(y)$$

<u>Визначення.</u> **Кореляційним моментом** μ_{xy} випадкових величин X та Y називається математичне сподівання добутку відхилень цих величин.

$$\mu_{xy} = M\left\{[X - M(X)][Y - M(Y)]\right\}$$

Практично використовують формули:

Для дискретних випадкових величин: $\mu_{xy} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}[x_i - M(X)][y_j - M(Y)]p(x_i, y_j)$

Для неперервних випадкових величин: $\mu_{xy} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}[x - M(X)][y - M(Y)]f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

Кореляційний момент служить для того, щоб охарактеризувати зв'язок між випадковими величинами. Якщо випадкові величини незалежні, то їхній кореляційний момент дорівнює нулю.

Кореляційний момент має розмірність, рівну добутку розмірностей випадкових величин X та Y. Цей факт є недоліком цієї числової характеристики, тому що при різних одиницях виміру виходять різні кореляційні моменти, що утрудняє порівняння кореляційних моментів різних випадкових величин.

Для того, щоб усунути цей недолік застосуються інша характеристика – коефіцієнт кореляції.

Визначення. **Коефіцієнтом кореляції r_{xy}** випадкових величин X та Y називається відношення кореляційного моменту до добутку середніх квадратичних відхилень цих величин.

$$r_{xy} = \frac{\mu_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}$$

Коефіцієнт кореляції є безрозмірною величиною. Коефіцієнт кореляції незалежних випадкових величин дорівнює нулю.

Властивість Абсолютна величина кореляційного моменту двох випадкових величин X та Y не перевищує середнього геометричного їхніх дисперсій.

$$|\mu_{xy}| \leqslant \sqrt{D_x D_y}$$

Властивість Абсолютна величина коефіцієнта кореляції не перевищує одиниці.

$$|r_{xy}| \leqslant 1$$

Випадкові величини називаються **корельованими**, якщо їхній кореляційний момент відмінний від нуля, і **некорельованими**, якщо їхній кореляційний момент дорівнює нулю.

Якщо випадкові величини незалежні, то вони й некорельовані, але з некорельованості не можна зробити висновок про їхню незалежність.

Якщо дві величини залежні, то вони можуть бути як корельованими, так і некорельованими.

Часто за заданою щільністю розподілу системи випадкових величин можна визначити залежність або незалежність цих величин.

Поряд з коефіцієнтом кореляції ступінь залежності випадкових величин можна охарактеризувати й іншою величиною, що називається **коефіцієнтом коваріації**. Коефіцієнт коваріації визначається формулою:

$$k(X, Y) = M(XY) - M(X) \cdot M(Y)$$

Приклад. Задано щільність розподілу системи випадкових величин X та Y.

$$f(x, y) = \frac{1}{\pi^2(x^2 + y^2 + x^2y^2 + 1)}$$

З'ясувати чи є незалежними випадкові величини X та Y.

Для розв'язання цієї задачі перетворимо щільність розподілу:

$$f(x, y) = \frac{1}{\pi^2(1 + x^2 + y^2(1 + x^2))} = \frac{1}{\pi^2(1 + x^2)(1 + y^2)} = \frac{1}{\pi(1 + x^2)}\frac{1}{\pi(1 + y^2)}$$

Таким чином, щільність розподілу вдалося представити у вигляді добутку двох функцій, одна з яких залежить тільки від x, а інша – тільки від y. Тобто випадкові величини X та Y незалежні. Зрозуміло, вони також будуть і некорельовані.

19.4 Лінійна регресія

Розглянемо двовимірну випадкову величину (X, Y), де X і Y – залежні випадкові величини.

Представимо приблизно одну випадкову величину як функцію іншої. Точна відповідність неможлива. Будемо вважати, що ця функція лінійна.

$$Y \cong g(X) = \alpha X + \beta$$

Для визначення цієї функції залишається тільки знайти сталі величини α і β.

Визначення. Функція $g(X)$ називається **найкращим наближенням** випадкової величини Y у сенсі методу найменших квадратів, якщо математичне сподівання $M[Y - g(X)]^2$ приймає найменше можливе значення. Також функція $g(x)$ називається **середньоквадратичною регресією** Y на X.

Теорема. *Лінійна середня квадратична регресія Y на X обчислюється за формулою:*

$$g(X) = m_y + r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(X - m_x)$$

у цій формулі $m_x = M(X)$, $m_y = M(Y)$, $\sigma_x = \sqrt{D(X)}$, $\sigma_y = \sqrt{D(Y)}$, $r = \mu_{xy}/(\sigma_x\sigma_y)$– коефіцієнт кореляції величин X та Y.

Величина $\beta = r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}$ називається **коефіцієнтом регресії** Y на X.

Пряма, рівняння якої

$$y - m_y = r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x - m_x),$$

називається **прямою середньоквадратичної регресії** Y на X.

Величина $\sigma_y^2(1 - r^2)$ називається **залишковою дисперсією** випадкової величини Y щодо випадкової величини X. Ця величина характеризує величину похибки, що утвориться при заміні випадкової величини Y лінійною функцією $g(X) = \alpha X + \beta$.

Видно, що якщо $r = \pm 1$, то залишкова дисперсія дорівнює нулю, і, отже, похибка дорівнює нулю й випадкова величина Y точно представляється лінійною функцією від випадкової величини X.

Пряма середньоквадратичної регресії X на Y визначається аналогічно за формулою:

$$x - m_x = r\frac{\sigma_x}{\sigma_y}(y - m_y)$$

Прямі середньоквадратичної регресії перетинаються в точці (m_x, m_y), що називають **центром спільного розподілу** випадкових величин X та Y.

19.5 Лінійна кореляція

Якщо дві випадкові величини X та Y мають у відношенні одна до одної лінійні функції регресії, то говорять, що величини X та Y зв'язані **лінійною кореляційною залежністю**.

Теорема. *Якщо двовимірна випадкова величина (X, Y) розподілена нормально, то X та Y зв'язані лінійною кореляційною залежністю.*

20 Закон великих чисел

20.1 Нерівність Чебишева

На практиці складно сказати, яке конкретне значення прийме випадкова величина, однак, при впливі великої кількості різних факторів поведінка великої кількості випадкових величин практично втрачає випадковий характер і стає закономірною.

Цей факт дуже важливий на практиці, тому що дозволяє передбачати результат досліду при впливі великої кількості випадкових факторів.

Однак, це можливо тільки при виконанні деяких умов, які визначаються законом великих чисел. До законів великих чисел відносяться теореми Чебишева (найбільш загальний випадок) і теорема Бернуллі (найпростіший випадок), які будуть розглянуті далі.

Розглянемо дискретну випадкову величину X (хоча все сказане нижче буде справедливе й для неперервних випадкових величин), задану таблицею розподілу:

X	x_1	x_2	$\ldots$	p_n
p	p_1	p_2	$\ldots$	p_n

Потрібно визначити ймовірність того, що відхилення значення випадкової величини від її математичного сподівання буде не більше, ніж задане число ε.

Теорема. (Нерівність Чебишева) *Імовірність того, що відхилення випадкової величини X від її математичного сподівання за абсолютною величиною менше додатного числа ϵ, не менше ніж $1 - D(X)/\varepsilon^2$.*

$$P(|X - M(X)| < \varepsilon) \geqslant 1 - D(X)/\varepsilon^2$$

Доведення цієї теореми наводити не будемо, воно є в літературі.

20.2 Теорема Чебишева

Теорема. *Якщо $X_1, X_2, \ldots, X_n$ – попарно незалежні випадкові величини, причому дисперсії їх рівномірно обмежені (не перевищують сталого числа C), то, яке б мале не було додатне число ϵ, імовірність нерівності*

$$\left[\frac{X_1 + X_2 + ... + X_n}{n} - \frac{M(X_1) + M(X_2) + ... + M(X_n)}{n}\right] < \varepsilon$$

буде як завгодно близька до одиниці, якщо число випадкових величин досить велике.

Тобто можна записати:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{X_1 + X_2 + ... + X_n}{n} - \frac{M(X_1) + M(X_2) + ... + M(X_n)}{n}\right| < \varepsilon\right) = 1$$

Часто буває, що випадкові величини мають однакове математичне сподівання. У цьому випадку теорема Чебишева трохи спрощується:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{X_1 + X_2 + ... + X_n}{n} - m\right| < \varepsilon\right) = 1$$

Дріб, що входить у записаний вище вираз є не що інше, як середнє арифметичне можливих значень випадкової величини.

Теорема стверджує, що хоча кожне окреме значення випадкової величини може досить сильно відрізнятися від свого математичного сподівання, але середнє арифметичне цих значень буде необмежено наближатися до середнього арифметичного математичних сподівань.

Відхиляючись від математичного сподівання як у додатний, так і у від'ємний бік, у середньому арифметичному відхилення взаємно скорочуються.

Таким чином, величина середнього арифметичного значень випадкової величини вже втрачає характер випадковості.

20.3 Теорема Бернуллі

Нехай проводиться n незалежних випробувань, у кожному з яких імовірність появи події A дорівнює p.

Можна визначити приблизно відносну частоту появи події A.

Теорема. *Якщо в кожному з n незалежних випробувань імовірність p появи події A стала, то як завгодно близька до одиниці ймовірність того, що відхилення відносної частоти від імовірності p за абсолютною величиною буде як завгодно малим, якщо число випробувань n досить велике.*

$$\lim_{n\to\infty} P(|m/n - p| < \varepsilon) = 1$$

Тут m – число появ події A. З всього сказаного вище не треба, що зі збільшенням число випробувань відносна частота неухильно прямує до ймовірності p, тобто $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{m}{n} = p$. У теоремі мається на увазі тільки ймовірність наближення відносної частоти до ймовірності появи події A в кожному випробуванні.

У випадку, якщо ймовірності появи події A в кожному досліді різні, то справедлива така теорема, відома як **теорема Пуассона.**

Теорема. *Якщо проводиться n незалежних дослідів і ймовірність появи події A в кожному досліді дорівнює p_i, то при збільшенні n частота події A збігається за ймовірністю до середнього арифметичного ймовірностей p_i.*

20.4 Граничні теореми

Як уже говорилося, при досить великій кількості випробувань, поставлених в однакових умовах, характеристики випадкових подій і випадкових величин стають майже невипадковими. Це дозволяє використати результати спостережень випадкових подій для прогнозування результату того або іншого досліду.

Граничні теореми теорії ймовірностей установлюють відповідність між теоретичними й експериментальними характеристиками випадкових величин при великій кількості випробувань.

У розглянутому вище законі великих чисел немає того, про що не говорилося про закон розподілу випадкових величин.

Поставимо задачу знаходження граничного закону розподілу суми

$$Y_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

коли число що складають n необмежено зростає. Цю задачу вирішує Центральна гранична теорема, яка була сформульована вище.

Залежно від умов розподілу випадкових величин X_i, що утворять суму, можливі різні формулювання центральної граничної теореми.

Припустимо, що випадкові величини X_i взаємно незалежні й однаково розподілені.

Теорема. *Якщо випадкові величини X_i взаємно незалежні й мають той самий закон розподілу з математичним сподіванням m і дисперсією σ^2, причому існує* третій абсолютний момент ν_3, *то при необмеженому збільшенні числа випробувань n закон розподілу суми $Y_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ необмежено наближається до нормального.*

При доведенні цієї теореми Ляпуновим використовувалися так звані **характеристичні функції**.

Визначення. **Характеристичною функцією** випадкової величини X називається функція

$$g(t) = M(e^{itX})$$

ця функція являє собою математичне сподівання деякої комплексної випадкової величини $U = e^{itX}$, що є функцією від випадкової величини X. При розв'язанні багатьох задач зручніше користуватися характеристичними функціями, а не законами розподілу.

Знаючи закон розподілу, можна знайти характеристичну функцію за формулою (для неперервних випадкових величин):

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f(x)\mathrm{d}x$$

Як бачимо, дана формула являє собою не що інше, як перетворення Фур'є для функції щільності розподілу. Очевидно, що за допомогою зворотного перетворення Фур'є можна за характеристичною функцією знайти закон розподілу.

Введення характеристичних функцій дозволяє спростити операції із числовими характеристиками випадкових величин.

У випадку нормального розподілу характеристична функція має вигляд:

$$g(t) = e^{-t^2/2}$$

Сформулюємо деякі властивості характеристичних функцій:

1) Якщо випадкові величини X та Y зв'язані співвідношенням

$$Y = aX,$$

де a – невипадковий множник, то

$$g_y(t) = g_x(at)$$

2) Характеристична функція суми незалежних випадкових величин дорівнює добутку характеристичних функцій доданків.

Випадкові величини X_i, розглянуті в центральній граничній теоремі, можуть мати довільні розподіли ймовірностей.

Якщо всі ці випадкові величини однаково розподілені, дискретні й приймають тільки два можливих значення 0 або 1, то виходить найпростіший випадок центральної граничної теореми, відомий як **теорема Муавра-Лапласа**.

Теорема. (Теорема Муавра-Лапласа) *Якщо проводиться n незалежних дослідів, у кожному з яких подія A з'являється з імовірністю p, то для будь-якого інтервалу (α, β) справедливе співвідношення:*

$$P\left(\alpha < \frac{Y - np}{\sqrt{npq}} < \beta\right) = \frac{1}{2}\left[\Phi\left(\frac{\beta}{\sqrt{2}}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha}{\sqrt{2}}\right)\right] = \bar{\Phi}(\beta) - \bar{\Phi}(\alpha)$$

де Y – число появ події A в n дослідах, $q = 1 - p$, $\Phi(x)$ – функція Лапласа, $\bar{\Phi}(x)$ – нормована функція Лапласа.

Теорема Муавра-Лапласа описує поводження біноміального розподілу при великих значеннях n.

Дана теорема дозволяє істотно спростити обчислення за формулою біноміального розподілу.

Розрахунок імовірності потрапляння значення випадкової величини в заданий інтервал

$$P(\alpha < Y < \beta) = \sum_{\alpha < k < \beta} C_n^k p^k q^{n-k}$$

при великих значеннях n вкрай складний. Набагато простіше скористатися формулою:

$$P(\alpha < Y < \beta) = \frac{1}{2}\left[\Phi\left(\frac{\beta - np}{\sqrt{2npq}}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - np}{\sqrt{2npq}}\right)\right]$$

Теорема Муавра-Лапласа дуже широко застосовується при розв'язанні практичних задач.

Приклад. Імовірність настання події A в кожному випробуванні дорівнює $0,3$. Використовуючи нерівність Чебишева, оцінити ймовірність того, що в 10000 випробуваннях відхилення відносної частоти появи події A від її ймовірності не перевершить за абсолютною величиною $0,01$.

Відповідно до нерівності Чебишева ймовірність того, що відхилення випадкової величини від її математичного сподівання буде менше деякого числа ϵ, обмежена відповідно до нерівності $P(|X - m_x| < \varepsilon) \geqslant 1 - \frac{D_x}{\varepsilon^2}$.

Треба визначити математичне сподівання й дисперсію числа появи події A при одному досліді. Для події A випадкова величина може приймати одне із двох значень: 1 – подія відбулася, 0 – подія не відбулася. При цьому ймовірність значення 1 дорівнює $p = 0,3$, а ймовірність значення 0 дорівнює ймовірності ненастання події A

$$q = 1 - p = 0,7.$$

За визначенням математичного сподівання маємо:

$$m_x = 0 \cdot q + 1 \cdot p = p = 0,3$$

Дисперсія: $D_x = (0 - p)^2 q + (1 - p)^2 p = pq = 0,3 \cdot 0,7 = 0,21$

У випадку n незалежних випробувань одержуємо $m_x = np$; $\quad D_x = npq$. Ці формули вже згадувалися вище.

У нашому випадку одержуємо: $m_x = 3000$; $\quad D_x = 2100$.

Імовірність відхилення відносної частоти появи події A в n випробуваннях від імовірності на величину, що не перевищує $\epsilon = 0,01$ дорівнює:

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right) = P(|m - np| < n\varepsilon) = P(|m - m_x| < n\varepsilon) = P(|m - 3000| < 100)$$

Вираз, отриманий в результаті цих простих перетворень, являє собою не що інше, як імовірність відхилення числа m появи події A від математичного сподівання на величину не більшу, ніж $\delta = 100$.

Відповідно до нерівності Чебишева ця ймовірність буде не менше, ніж величина $1-\frac{D_x}{\delta^2} = 1-\frac{2100}{10000} = 1-0,21 = 0,79$.

Приклад. Скільки варто перевірити деталей, щоб з імовірністю, не меншою 0,96, можна було очікувати, що абсолютна величина відхилення відносної частоти придатних деталей від імовірності того, що деталь придатна, рівна $0,98$, не перевищить $0,02$.

Умова задачі фактично означає, що виконується нерівність:

$$P\left(\left|\frac{n}{m} - 0,98\right| \leqslant 0,02\right) \geqslant 0,96$$

Тут n – кількість придатних деталей, m – кількість перевірених деталей. Для застосування нерівності Чебишева перетворимо отриманий вираз:

$$P(|n - 0,98m| \leqslant 0,02m) \geqslant 1 - \frac{D_x}{(0,02m)^2} \geqslant 0,96$$

Після множення виразу, що стоїть у дужках, на m одержуємо ймовірність відхилення за модулем кількості придатних деталей від свого математичного сподівання, отже, можна застосувати нерівність Чебишева, тобто ця ймовірність повинна бути не меншою, ніж величина $1 - \frac{D_x}{(0,02m)^2}$, а за умовою задачі ще й не менше, ніж $0,96$.

Таким чином, одержуємо нерівність $0,96 \leqslant 1 - \frac{D_x}{(0,02m)^2}$. Як уже говорилося в попередній задачі, дисперсія може бути знайдена за формулою $D_x = mpq$.

Отже, одержуємо: $D_x \leqslant (0,02m)^2 - 0,96 \cdot (0,02m)^2$; $m \cdot 0,98 \cdot 0,02 \leqslant 0,04 \cdot (0,02m)^2$;

$$m \geqslant \frac{0,98 \cdot 0,02}{0,04 \cdot 0,0004}; \qquad m \geqslant 1225$$

Тобто для виконання необхідних умов необхідно не менш 1225 деталей.

Приклад. Добова потреба електроенергії в населеному пункті є випадковою величиною, математичне сподівання якої дорівнює 3000 кВт/годину, а дисперсія становить 2500. Оцінити ймовірність того, що в найближчу добу витрата електроенергії в цьому населеному пункті буде від 2500 до 3500 кВт/годину.

Потрібно знайти ймовірність потрапляння випадкової величини в заданий інтервал:

$$P(2500 \leqslant X \leqslant 3500) = ?$$

Крайні значення інтервалу відхиляються від математичного сподівання на ту саму величину, а саме – на 500. Тоді можна записати з урахуванням нерівності Чебишева:

$$P(2500 \leqslant X \leqslant 3500) = P(|X - m_x| \leqslant 500) \geqslant 1 - \frac{D_x}{500^2}$$

Звідси одержуємо:

$$P \geqslant 1 - \frac{2500}{250000} = 0,99$$

Тобто шукана ймовірність буде не менше, ніж $0,99$.

Приклад. Середнє квадратичне відхилення кожної з 2500 незалежних випадкових величин не перевершує 3. Оцінити ймовірність того, що абсолютна величина відхилення середнього арифметичного цих випадкових величин від середніх арифметичних їхніх математичних сподівань не перевершує 0,3.

Потрібно знайти ймовірність

$$p = P\left(\left|\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} - \frac{\sum_{i=1}^{n} M_{xi}}{n}\right| \leqslant 0,3\right)$$

Нерівність Чебишева у випадку суми випадкових величин має вигляд:

$$P\left(\left|\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} - \frac{\sum_{i=1}^{n} M_{xi}}{n}\right| \leqslant \varepsilon\right) \geqslant 1 - \frac{\sum_{i=1}^{n} D_{xi}}{n^2\varepsilon^2}$$

Якщо середнє квадратичне відхилення не перевищує 3, то дисперсія не перевищує 9. Величина ε за умовою задачі дорівнює 0,3.

Тоді $p \geqslant 1 - \frac{\sum_{i=1}^{n} D_{xi}}{n^2\varepsilon^2} = 1 - \frac{9n}{n^2 \cdot 0,09}$. Звідси одержуємо при $n = 2500$:

$$p \geqslant 1 - 0,04 = 0,96$$

Приклад. Вибірковим шляхом потрібно визначити середню довжину деталей, що виготовляють. Скільки потрібно досліджувати деталей, щоб з імовірністю, більшою ніж 0,9, можна було стверджувати, що середня довжина відібраних виробів буде відрізнятися від математичного сподівання цього середнього (середня довжина деталей всієї партії) не більш, ніж на 0,001 см. Встановлено, що середнє квадратичне відхилення довжини деталі не перевищує 0,04 см.

За умовою, якщо середнє квадратичне відхилення не перевищує 0,04, то дисперсія не перевищує $0,04^2$. Також за умовою задано, що

$$p = P\left(\left|\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} - m_x\right| \leqslant 0,001\right) > 0,9$$

Якщо перетворити співвідношення, що стоїть у дужках, і після цього застосувати нерівність Чебишева, одержуємо:

$$P\left(\left|\sum_{i=1}^{n} X_i - nm_x\right| \leqslant 0,001n\right) \geqslant 1 - \frac{\sum_{i=1}^{n} D_{xi}}{n^2 \cdot 0,001^2} > 0,9$$

$$1 - \frac{n \cdot 0,04^2}{n^2 \cdot 0,001^2} > 0,9$$

$$0,1 \cdot 0,001^2 n > 0,04^2$$

$$n > \frac{0,04^2}{0,1 \cdot 0,001^2}$$

$$n > 16000$$

Тобто для досягнення необхідної ймовірності необхідно відібрати більше 16000 деталей.

Описаний підхід, як видно, дозволяє вирішити багато суто практичних задач.

Приклад. Імовірність того, що навздогад обрана деталь виявиться бракованою, при кожній перевірці та сама й дорівнює 0,2. Визначити ймовірність того, що серед 50 навмання обраних деталей бракованих виявиться не менше 6.

Для того, щоб скористатися теоремою Муавра-Лапласа знайдемо математичне сподівання й дисперсію кількості бракованих деталей в 50-ти відібраних:

$$m_x = np = 50 \cdot 0,2 = 10$$
$$D_x = npq = 50 \cdot 0,2 \cdot 0,8 = 8$$

Фактично в задачі потрібно визначити ймовірність того, що бракованих деталей буде не менш шести, але й, мабуть, не більше 50-ти.

$$P(6 \leqslant X \leqslant 50) = \frac{1}{2}\left(\Phi\left(\frac{50-10}{\sqrt{16}}\right) - \Phi\left(\frac{6-10}{\sqrt{16}}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(\Phi(10) + \Phi(1)\right) = 0,5 \cdot (1 + 0,8427) = 0,92135$$

Значення функції Лапласа знаходять за таблицею. Звичайно, значення функції Лапласа $\Phi(10)$ у таблиці немає, але тому що в таблицях зазначено, що $\Phi(3) = 1,0000$, то всі значення від величин, що перевищують 3 також рівні 1.

Приклад. Відомо, що 60% всього числа виробів, що виготовляють заводом, є виробами першого сорту. Приймальник бере перші що попалися 200 виробів. Чому дорівнює ймовірність того, що серед них виявиться з від 120 до 150 виробів першого сорту?

Імовірність того, що деталь виявиться першого сорту, дорівнює 0,6. Математичне сподівання числа виробів першого сорту дорівнює:

$$m_x = np = 200 \cdot 0,6 = 120$$

За теоремою Муавра-Лапласа одержуємо:

$$P(120 \leqslant X \leqslant 150) = \frac{1}{2}\left(\Phi\left(\frac{150-120}{\sqrt{96}}\right) - \Phi\left(\frac{120-120}{\sqrt{96}}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(\Phi(3,0619) + \Phi(0)\right) = 0,5 \cdot (1+0) = 0,5$$

Приклад. Перевіркою встановлено, що 96% виробів служать не менше гарантованого строку. Навмання вибирають 15000 виробів. Знайти ймовірність того, що з терміном служби менше гарантованого буде від 570 до 630 виробів.

Імовірність того, що термін служби виробу буде менше гарантованого дорівнює:

$$1 - 0,96 = 0,04$$

Математичне сподівання числа таких виробів дорівнює $m_x = np = 15000 \cdot 0,04 = 600$

За теоремою Муавра-Лапласа одержуємо:

$$P(570 \leqslant X \leqslant 630) = \tfrac{1}{2}\left(\Phi\left(\tfrac{630-600}{\sqrt{1152}}\right) - \Phi\left(\tfrac{570-600}{\sqrt{1152}}\right)\right) = \tfrac{1}{2}\left(\Phi(0,88) - \Phi(-0,88)\right) =$$
$$= \Phi(0,88) = 2\bar{\Phi}(1,25) = 2 \cdot 0,3944 = 0,7888$$

21 Теорія масового обслуговування

21.1 Випадкові процеси

Система масового обслуговування складається з деякого числа обслуговуючих одиниць або **каналів**, робота яких полягає у виконанні **заявок**, що надходять цими каналами.

Приклади систем масового обслуговування досить поширені на практиці. Це різні станції обслуговування, ремонтні майстерні та інше. Вигляд і кількість заявок, що надходять на ці канали, різні й, загалом кажучи, випадкові.

Теорія масового обслуговування описує закономірності функціонування таких систем.

Визначення. процес функціонування системи масового обслуговування називається **випадковим процесом.**

Щоб оптимізувати процес функціонування системи масового обслуговування його треба вивчити й описати математично.

Теорія масового обслуговування дуже швидко розвивається як розділ теорії ймовірностей, тому що її застосування на практиці надзвичайно широке.

Випадковий процес, що протікає в системі масового обслуговування полягає в тому, що система у випадкові моменти часу переходить із одного стану в інший. Міняється число заявок, число зайнятих каналів, число заявок у черзі та інше.

Визначення. Якщо перехід системи з одного стану в інший відбувається стрибком, а кількість станів системи (скінченну або нескінченну) можна пронумерувати, то така система називається **системою дискретного типу.**

Якщо кількість можливих станів зліченна, то сума ймовірностей знаходження системи в одному зі станів дорівнює 1.

$$\sum_k p_k(t) = 1$$

Сукупність ймовірностей $p_k(t)$ для кожного моменту часу характеризує даний **перетин** випадкового процесу.

Випадкові процеси зі зліченною множиною станів бувають двох типів: **з дискретним** або **неперервним часом**.

Якщо переходи системи з одного стану в інший можуть відбуватися тільки в строго визначені моменти часу, то випадковий процес буде процесом з дискретним часом, а якщо перехід можливий у будь-який момент часу, то процес буде процесом з неперервним часом.

Оскільки в реальності заявки на систему масового обслуговування можуть надходити в будь-який момент часу, то більшість реальних систем масового обслуговування будуть системами із процесом з неперервним часом.

Для того, щоб описати випадковий процес у системі з неперервним часом необхідно насамперед проаналізувати причини, що викликають зміну стану системи. Ці причини визначаються потоком заявок, що надходять на систему.

21.2 Потік подій

Визначення. **Потоком подій** називається послідовність подій, що відбуваються одна за одною у якісь моменти часу.

Характер подій, що утворять потік може бути різним, а якщо події відрізняються одна від одної тільки моментом часу, у який вони відбуваються, то такий потік подій називається **однорідним**.

Визначення. Потік подій називається **регулярним**, якщо події слідують одна за іншою через строго визначені проміжки часу.

Визначення. Потік подій називається **стаціонарним**, якщо ймовірність чи потрапляння того іншого числа подій на ділянку часу τ залежить тільки від довжини ділянки й не залежить від того, де саме на осі розташована ця ділянка.

Стаціонарність потоку подій означає, що щільність потоку постійна, відсутні проміжки часу, протягом яких подій більше ніж звичайно. Класичний приклад – "година пік" на транспорті.

Визначення. Потік подій називається **потоком без післядій**, якщо для будь-яких неперехресних ділянок часу число подій, що потрапляють на один з них, не залежить від числа подій, що потрапляють на інші.

Відсутність післядій означає, що заявки в систему надходять незалежно одна від одної. Потік вихідних подій систем масового обслуговування звичайно має післядію, навіть якщо вхідний потік її не має. Приклад – вхід пасажирів на станцію метро – потік без післядії, тому що причини приходу окремого пасажира не пов'язані із причинами приходу всіх інших, а вихід пасажирів зі станції – потік з післядією, тому що він обумовлений прибуттям поїзда.

Післядію, властиву вихідному потоку, варто враховувати, якщо цей потік у свою чергу є вхідним для якоїсь іншої системи.

Визначення. Потік подій називається **ординарним**, якщо ймовірність потрапляння на елементарну ділянку Δt двох або більше подій досить мала в порівнянні з імовірністю потрапляння однієї події.

Умова ординарності означає, що заявки на систему приходять по одній, а не парами, трійками та інше. Однак, якщо заявки надходять **тільки** парами, **тільки** трійками та інше, то такий потік легко звести до ординарного.

Визначення. Якщо потік подій стаціонарний, ординарний і без післядій, то такий потік називається **найпростішим (пуассонівським)** потоком.

Ця назва пов'язана з тим, що в цьому випадку кількість подій, що потрапляють на будь-який фіксований інтервал часу, розподілена за розподілом Пуассона.

Відповідно до цього закону розподілу математичне сподівання числа точок, що потрапляють на ділянку часу τ, має вигляд:

$$a = \lambda\tau$$

λ – щільність потоку – середнє число подій в одиницю часу.

Імовірність того, що за час τ відбудеться рівно m подій, дорівнює

$$P_m(\tau) = \frac{(\lambda\tau)^m}{m!}e^{-\lambda\tau}$$

Імовірність того, що протягом даного часу не відбудеться жодної події, дорівнює:

$$P_0(\tau) = e^{-\lambda\tau}$$

Нехай T – проміжок часу між двома довільними сусідніми подіями в найпростішому потоці. Знайдемо функцію розподілу

$$F(t) = P(T < t)$$

Відповідно до закону розподілу Пуассона, одержуємо:

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t}; \qquad f(t) = \lambda e^{-\lambda t};$$

Математичне сподівання, дисперсія й середнє квадратичне відхилення цієї величини відповідно рівні:

$$m_t = \frac{1}{\lambda}; \quad D_t = \frac{1}{\lambda^2}; \quad \sigma_t = \frac{1}{\lambda};$$

Таким чином, для величини T одержали показниковий закон розподілу.

Приклад. У бюро обслуговування в середньому надходить 12 заявок у годину. Вважаючи потік замовлень найпростішим, визначити ймовірність того, що: а) за 1 хвилину не надійде жодного замовлення, б) за 10 хвилин надійде не більше трьох замовлень.

Спочатку знайдемо щільність (інтенсивність) потоку, виразивши її в кількості заявок у хвилину. Очевидно, ця величина дорівнює $\lambda = \frac{12}{60} = 0,2$.

Далі знаходимо ймовірність того, що за час $\tau = 1$ хв не надійде жодного замовлення за формулою:

$$P_0(\tau) = e^{-\lambda\tau} = e^{-0,2} \approx 0,819$$

Імовірність того, що за 10 хвилин надійде не більше трьох замовлень буде складатися з ймовірностей того, що не надійде жодного замовлення, надійде одне, два або рівно три замовлення.

$$P(m \leqslant 3) = \sum_{m=0}^{3} \frac{(\lambda\tau)^m}{m!} e^{-\lambda\tau} = e^{-2} + 2e^{-2} + \frac{4}{2}e^{-2} + \frac{8}{6}e^{-2} = \frac{19}{3}e^{-2} = 0,8571$$

Приклад. У ресторан прибуває в середньому 20 відвідувачів у годину. Вважаючи потік відвідувачів найпростішим, і знаючи, що ресторан відкривається об 11.00, визначити:

а) імовірність того, що об 11.12 у ресторан прийде 20 відвідувачів за умови, що об 11.07 їх було 18;

б) імовірність того, що між 11.28 і 11.30 у ресторані виявиться новий відвідувач, якщо відомо, що попередній відвідувач прибув об 11.25.

Для відповіді на перше питання фактично треба знайти ймовірність того, що в проміжок від 11.07 до 11.12 ($\tau = 5$ хвилин) прийде рівно 2 відвідувачі. При цьому ми знаємо інтенсивність потоку відвідувачів – $\lambda = 20/60 = 1/3$ відвідувачів у хвилину. Звичайно, дана величина носить умовний характер, тому що відвідувачі не можуть приходити поодинці.

Шукана ймовірність дорівнює:

$$P_2(5) = \frac{\left(\frac{1}{3} \cdot 5\right)^2}{2!} e^{-\frac{1}{3} \cdot 5} \approx 0,2623$$

Тепер перейдемо до другого питання. Нам не сказано, скільки саме нових відвідувачів буде в проміжку від 11.28 до 11.30, головне, щоб був хоч один. Ця ймовірність дорівнює $1 - P_0(2) = 1 - e^{-\frac{2}{3}} \approx 0,4866$. Тут $P_0(2)$ – імовірність того, що в цьому проміжку не буде жодного відвідувача.

Якщо потік подій нестаціонарний, то його щільність λ уже не є сталою величиною, а залежить від часу.

Визначення. Миттєвою щільністю потоку подій називається границя відношення середнього числа подій, що припадає на елементарний відрізок часу $(t, t + \Delta t)$, до довжини цієї ділянки, що прямує до нуля.

$$\lambda(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{m(t + \Delta t) - m(t)}{\Delta t}$$

Як видно з наведеного визначення, з врахуванням того, що середнє число подій на ділянці часу дорівнює математичному сподіванню, то можна сказати, що *миттєва щільність потоку дорівнює похідній за часом від математичного сподівання числа подій на ділянці* $(0, t)$.

Визначення. Нестаціонарним пуассонівським потоком називається ординарний потік однорідних подій без післядій зі змінною щільністю $\lambda(t)$.

Для такого потоку число подій, що потрапляють на ділянку довжини τ, що починається в точці t_0, підкоряється закону Пуассона:

$$P_m(\tau, t_0) = \frac{a^m}{m!} e^{-a}; \qquad m = 0, 1, 2, ...$$

Тут a – математичне сподівання числа подій на ділянці від t_0 до $\tau + t_0$. Воно обчислюється за формулою:

$$a = \int_{t_0}^{t_0+\tau} \lambda(t) \mathrm{d}t$$

Величина a залежить не тільки від довжини ділянки τ, але й від її розташування в часі. Закон розподілу проміжку T між двома сусідніми подіями також буде залежати від того, де на часовій осі розташовано першу з подій, а також від функції $\lambda(t)$.

Імовірність того, що на ділянці часу від t_0 до $t + t_0$ не з'явиться жодної події, дорівнює

$$P(T \geqslant t) = e^{-a} = e^{-\int_{t_0}^{t+t_0} \lambda(t)dt}$$

Тоді, відповідно, імовірність появи хоча б однієї події на цьому інтервалі часу буде дорівнює:

$$F_{t_0}(t) = 1 - P(T \geqslant t) = 1 - e^{-\int_{t_0}^{t+t_0} \lambda(t)dt}$$

Щільність розподілу можна знайти диференціюванням:

$$f_{t_0}(t) = \lambda(t + t_0)e^{-\int_{t_0}^{t+t_0} \lambda(t)dt}$$

Ця щільність розподілу вже не буде показниковою. Вона залежить від параметра t_0 і вигляду функції $\lambda(t)$. Однак, умова відсутності післядії в цьому виді потоку зберігається.

21.3 Потік Пальма

Потік Пальма ще називають **потоком з обмеженою післядією.**

Визначення. **Потоком Пальма** називається ординарний потік однорідних подій, якщо проміжки між подіями $T_1,\ T_2, \ldots$ являють собою незалежні випадкові величини.

Якщо проміжки часу $T_1, T_2, \ldots$ розподілені за показниковим законом, то потік Пальма стає найпростішим потоком.

Прикладом потоку Пальма може слугувати рух колони автомобілів. Нехай рухається колона автомобілів, кожний з яких, рухаючись із однаковою швидкістю, прагне триматися на деякій заданій відстані від автомобілів, що йдуть попереду. Однак, внаслідок впливу багатьох випадкових факторів, ця відстань витримується не точно. Тоді часи перетину кожним автомобілем певного рубежу $T_1,\ T_2, \ldots$ будуть незалежними випадковими величинами й утворять потік Пальма.

Відзначимо, що якщо автомобілі будуть прагнути витримувати задану відстань не від сусідньої машини, а від головної, то моменти перетину цього рубежу вже не будуть утворювати потік Пальма.

Потік Пальма часто утворюється як вихідний потік систем масового обслуговування.

Теорема. (Теорема Пальма) *Нехай на систему масового обслуговування надходить потік заявок типу Пальма, причому заявка, що застала всі канали зайнятими, одержує відмову (не обслуговується). Якщо при цьому час обслуговування має показниковий закон розподілу, то потік заявок, що залишилися без обслуговування, є також потоком типу Пальма.*

Цей факт важливий, тому що на практиці заявки, що одержали відмову, звичайно перенаправляються на іншу систему масового обслуговування, тобто утворять для цієї системи вхідний потік.

Так, якщо на систему масового обслуговування надходить найпростіший вхідний потік, то потік заявок, що одержали відмову, уже не буде найпростішим, однак, буде потоком з обмеженою післядією.

21.4 Потоки Ерланга

Потоки Ерланга також є потоками з обмеженою післядією. Вони утворяться просіванням найпростішого потоку.

Суть цього просівання полягає в наступному. Якщо зобразити на часовій осі найпростіший потік, поставивши у відповідність кожній події деяку точку, і викинути з потоку кожну другу точку, то одержимо **потік Ерланга першого порядку.** Залишивши кожну третю точку й викинувши дві проміжні, одержуємо **потік Ерланга другого порядку** та інше.

Визначення. **Потоком Ерланга k-го порядку** називається потік, отриманий з найпростішого, якщо зберегти в найпростішому потоці кожну $(k + 1)$-у точку, а інші викинути.

Очевидно, що найпростіший потік може розглядатися як потік Ерланга нульового порядку.

Нехай є найпростіший потік з інтервалами $T_1, T_2, \ldots$ між подіями. Величина T – проміжок часу між двома сусідніми подіями в потоці Ерланга k-го порядку.

Очевидно, що $T = \sum_{i=1}^{k+1} T_i$. Оскільки первісний потік – найпростіший, випадкові величини $T_1,\ T_2, \ldots$ розподілені за показниковим законом:

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t};$$

Позначимо $f_k(t)$ – щільність розподілу величини T для потоку Ерланга k-го порядку. Якщо помножити цю щільність на елементарний відрізок часу dt, ми одержимо ймовірність того, що величина T прийме значення в деякому як завгодно малому околі точки t – $(t, t + dt)$. На цю ділянку повинна потрапити скінченна точка проміжку, а попередні k точок найпростішого потоку – на проміжок $(0, t)$.

Імовірність першої події дорівнює λdt, а другої – $P_k(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$. Ці події повинні відбутися разом, виходить, їх ймовірності треба перемножити.

$$f_k(t)dt = \frac{\lambda(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} dt$$

$$f_k(t) = \frac{\lambda(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$$

Отриманий закон розподілу називається **законом розподілу Ерланга k-го порядку**.

При $k = 0$ одержуємо показниковий закон розподілу.

Математичне сподівання, дисперсія й середнє квадратичне відхилення для розподілу Ерланга знаходяться за формулами:

$$m_k = \frac{k+1}{\lambda}; \qquad D_k = \frac{k+1}{\lambda^2}; \qquad \sigma_k = \frac{\sqrt{k+1}}{\lambda};$$

Щільність потоку Ерланга дорівнює

$$\Lambda_k = \frac{\lambda}{k+1};$$

Для проміжку часу між двома сусідніми подіями в потоці T розглянемо нормовану величину $\tilde{T} = \frac{T}{k+1}$. Такий потік буде називатися **нормованим потоком Ерланга**.

Закон розподілу для такого потоку буде мати вигляд:

$$\tilde{f}_k(t) = \frac{\Lambda_k(\Lambda_k t)^k}{k!} e^{-\Lambda_k t}, \Lambda_k = \lambda(k+1);$$

Математичне сподівання й дисперсія будуть рівні:

$$\tilde{m}_k = m_0 = \frac{1}{\lambda}; \qquad \tilde{D}_k = \frac{D_k}{(k+1)^2} = \frac{1}{\lambda^2(k+1)};$$

Виходить, що необмеженому збільшенні k нормований потік Ерланга наближається до регулярного потоку з постійними інтервалами, рівними $\frac{1}{\lambda}$.

Зміна порядку нормованого потоку Ерланга дозволяє одержати різний ступінь післядії. Післядія зростає зі збільшенням k.

На практиці це зручно для наближеного подання реального потоку з якоюсь післядією потоком Ерланга. При цьому порядок цього потоку визначається з того розрахунку, щоб характеристики потоку Ерланга (математичне сподівання й дисперсія) збігалися з характеристиками вихідного потоку.

21.5 Ланцюги Маркова

Визначення. Процес, що протікає у фізичній системі, називається **марковським**, якщо в будь-який момент часу ймовірність будь-якого стану системи в майбутньому залежить тільки від стану системи в поточний момент і не залежить від того, яким чином система прийшла в цей стан.

Визначення. **Ланцюгом Маркова** називається послідовність випробувань, у кожному з яких з'являється тільки одна з k несумісних подій A_i з повної групи. При цьому умовна ймовірність $p_{ij}(s)$ того, що в s-ому випробуванні відбудеться подія A_j за умови, що в $(s-1)$-ому випробуванні відбулася подія A_i, не залежить від результатів попередніх випробувань.

Незалежні випробування є частковим випадком ланцюга Маркова. Події називаються **станами системи**, а випробування – **змінами станів системи**.

За характером змін станів ланцюги Маркова можна розділити на дві групи.

Визначення. **Ланцюгом Маркова з дискретним часом** називається ланцюг, зміна станів якого відбувається в певні фіксовані моменти часу. **Ланцюгом Маркова з неперервним часом** називається ланцюг, зміна станів якого можлива в будь-які випадкові моменти часу.

Визначення. **Однорідним** називається ланцюг Маркова, якщо умовна ймовірність p_{ij} переходу системи зі стану i у стан j не залежить від номера випробування. Імовірність p_{ij} називається **перехідною ймовірністю**.

Припустимо, число станів звичайно й дорівнює k. Тоді матриця, складена з умовних ймовірностей переходу буде мати вигляд:

$$P_1 = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1k} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{k1} & p_{k2} & \cdots & p_{kk} \end{pmatrix}$$

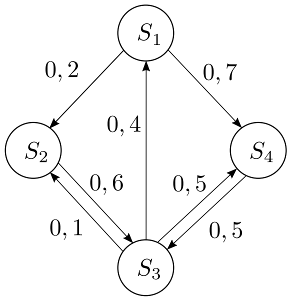
Ця матриця називається **матрицею переходу системи**.

Оскільки у кожному рядку містяться ймовірності подій, які утворять повну групу, то, очевидно, що сума елементів кожного рядка матриці дорівнює одиниці.

На основі матриці переходу системи можна побудувати так званий **граф станів системи**, його ще називають **розмічений граф станів**. Це зручно для наочного подання ланцюга. Порядок побудови графа розглянемо на прикладі.

Приклад. За заданою матрицею переходу побудувати граф станів.

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,2 & 0 & 0,7 \\ 0 & 0,4 & 0,6 & 0 \\ 0,4 & 0,1 & 0 & 0,5 \\ 0 & 0 & 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}$$



Оскільки матриця четвертого порядку, то, відповідно, система має 4 можливі стани.

На графі не позначаються ймовірності переходу системи з одного стану в той самий. При розгляді конкретних систем зручно спочатку побудувати граф станів, потім визначити ймовірність переходів системи з одного стану в той самий (виходячи з вимоги рівності одиниці суми елементів рядків матриці), а потім скласти матрицю переходів системи.

Нехай $P_{ij}(n)$ – імовірність того, що в результаті n випробувань система перейде зі стану i у стан j, r – деякий проміжний стан між станами i і j. Імовірності переходу з одного стану в інший $p_{ij}(1) = p_{ij}$.

Тоді ймовірність $P_{ij}(n)$ може бути знайдена за формулою, що називається **рівністю Маркова**:

$$P_{ij}(n) = \sum_{r=1}^{k} P_{ir}(m) P_{rj}(n-m)$$

Тут m – число кроків (випробувань), за яке система перейшла зі стану i у стан r.

У принципі, рівність Маркова є ні що інше як трохи видозмінена формула повної ймовірності.

Знаючи перехідні ймовірності (тобто знаючи матрицю переходу P_1), можна знайти ймовірності переходу зі стану в стан за два кроки $P_{ij}(2)$, тобто матрицю P_2, знаючи її – знайти матрицю P_3, і далі.

Безпосереднє застосування отриманої вище формули не дуже зручне, тому, можна скористатися прийомами матричного числення (адже ця формула по суті ні що інше як формула множення двох матриць).

Тоді в загальному виді можна записати:

$$P_n = P_1^n$$

Взагалі-то цей факт звичайно формулюється у вигляді теореми, однак, її доведення досить просте, тому наводити його не будемо.

Приклад. Задано матрицю переходів P_1. Знайти матрицю P_3.

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,9 \\ 0,3 & 0,7 \end{pmatrix}$$

$$P_2 = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,9 \\ 0,3 & 0,7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,1 & 0,9 \\ 0,3 & 0,7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,28 & 0,72 \\ 0,24 & 0,76 \end{pmatrix}$$

$$P_3 = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,9 \\ 0,3 & 0,7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,28 & 0,72 \\ 0,24 & 0,76 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,244 & 0,756 \\ 0,252 & 0,748 \end{pmatrix}$$

Визначення. Матриці, суми елементів всіх рядків яких дорівнюють одиниці, називаються **стохастичними**. Якщо при деякому n всі елементи матриці P^n не дорівнюють нулю, то така матриця переходів називається **регулярною**.

Інакше кажучи, регулярні матриці переходів задають ланцюг Маркова, у якому кожен стан може бути досягнутий через n кроків з будь-якого стану. Такі ланцюги Маркова також називаються **регулярними**.

Теорема. (теорема про граничні ймовірності) *Нехай даний регулярний ланцюг Маркова з n станами та P – його матриця ймовірностей переходу. Тоді існує межа $\lim\limits_{n\to\infty} P^n = P^{(\infty)}$ і матриця $P^{(\infty)}$ має вигляд:*

$$P^{(\infty)} = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & ... & u_n \\ u_1 & u_2 & ... & u_n \\ ... & ... & ... & ... \\ u_1 & u_2 & ... & u_n \end{pmatrix}$$

Тобто матриця складається з однакових рядків.

Тепер про величини u_i. Числа $u_1, u_2, \ldots, u_n$ називаються **граничними ймовірностями**. Ці ймовірності не залежать від вихідного стану системи і є компонентами власного вектора матриці P^T (транспонованої до матриці P).

Цей вектор повністю визначається з умов:

$$P^T \cdot \vec{u} = \vec{u}; \qquad \sum u_i = 1;$$

Приклад. Знайдемо граничні ймовірності для розглянутого вище прикладу.

$$P = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,9 \\ 0,3 & 0,7 \end{pmatrix}; \qquad P^T = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,3 \\ 0,9 & 0,7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0,1 & 0,3 \\ 0,9 & 0,7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l} u_1 = 0,1u_1 + 0,3u_2 \\ u_2 = 0,9u_1 + 0,7u_2 \end{array} \; 0,9u_1 = 0,3u_2; u_2 = 3u_1;$$

З врахуванням того, що $u_1 + u_2 = 1$, одержуємо:

$$u_1 + 3u_1 = 1; \qquad u_1 = 0,25; \qquad u_2 = 0,75;$$

А далі: $P^{(\infty)} = \begin{pmatrix} 0,25 & 0,75 \\ 0,25 & 0,75 \end{pmatrix}$

21.6 Процес загибелі-розмноження та циклічний процес

Визначення. Марковський процес із дискретними станами називають **процесом загибелі-розмноження**, якщо він має розмічений граф станів наступного вигляду:

Тобто кожен зі станів системи пов'язаний з двома сусідніми станами прямим й зворотним зв'язком, крайні стани мають тільки по одному сусідньому.

Тут λ_{ij} – **щільність імовірності переходу** системи зі стану S_i у стан S_j у момент часу t.

Ця щільність знаходиться за формулою:

$$\lambda_{ij}(t) = \lim_{\Delta t \to 0+0} \frac{P_{ij}(t, \Delta t)}{\Delta t}$$

Δt – час переходу з одного стану в інший.

22 Основні поняття математичної статистики

Математична статистика займається встановленням закономірностей, яким підпорядковані масові випадкові явища, на основі обробки статистичних даних, отриманих у результаті спостережень. Основні задачі математичної статистики:

1) визначення способів збору й групування статистичних даних;

2) розробка методів аналізу отриманих даних в залежності від цілей дослідження.

Цілі дослідження:

1) оцінка невідомої ймовірності події; оцінка невідомої функції розподілу; оцінка параметрів розподілу, вид якого відомий; оцінка залежності від інших випадкових величин тощо;

2) перевірка статистичних гіпотез про вид невідомого розподілу або про значення параметрів відомого розподілу.

Визначення. Вибірка — сукупність випадково відібраних об'єктів. Генеральна сукупність — уся множина наявних об'єктів, з яких проводиться вибірка.

Під об'ємом вибірки чи генеральної сукупності розуміють кількість об'єктів в цих сукупностях.

Вибірка може бути повторною (кожен відібраний об'єкт перед вибором наступних повертається в генеральну сукупність) і безповторною (відібраний об'єкт у генеральну сукупність не повертається). Вибірка має правильно представляти пропорції генеральної сукупності, тобто бути репрезентативною (представницькою).

Визначення. Нехай з генеральної сукупності взято вибірку і значення x_1 зустрічається в ній n_1 разів, x_2 – n_2 разів, …, x_k – n_k разів, причому $\sum\limits_{i=1}^{k} n_k = n$ де n – об'єм вибірки. Спостережені значення випадкової величини x_1, x_2, …, x_k називають варіантами, а n_1, n_2, …, n_k – частотами. Якщо розділити кожну частоту на об'єм вибірки, то одержимо відносні частоти $w_i = n_i/n$. Послідовність варіант, записаних у порядку зростання, називають варіаційним рядом, а перелік варіант і відповідних їм частот або відносних частот — статистичним рядом:

x_i	x_1	x_2	…	x_k
n_i	n_1	n_2	…	n_k

w_i	w_1	w_2	$\ldots$	w_k

Визначення. Якщо досліджується деяка неперервна ознака, то варіаційний ряд може складатися з великої кількості чисел. У цьому випадку використовують груповану вибірку. Для її отримання інтервал (a, b), у якому укладені всі спостережені значення ознаки, розбивають на кілька рівних часткових інтервалів $(x_{i-1},\ x_i)$ довжиною h, а потім знаходять для кожного часткового інтервалу суму частот n_i варіант, що потрапили в i-ий інтервал. Складена за цими результатами таблиця називається групованим статистичним рядом.

Номер інтервалу i	1	2	$\ldots$	k
Інтервал $(x_{i-1},\ x_i\ )$	$(a, a+h)$	$(a+h, a+2h)$	$\ldots$	$(b-h, b)$
Кількість варіант, що потрапили в інтервал	n_1	n_2	$\ldots$	n_k

Для визначення кількості часткових k інтервалів можна використати найбільше натуральне число, більше за $\log_2 n + 1$, де $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$.

Визначення. Для наочного уявлення про поведінку досліджуваної випадкової величини у вибірці можна побудувати полігон частот — ламану, відрізки якої з'єднують точки з координатами (x_1, n_1), (x_2, n_2), $\ldots$, (x_k, n_k), де x_i відкладаються на осі абсцис, а n_i – на осі ординат. Якщо на осі ординат відкладати не абсолютні (n_i), а відносні (w_i) частоти, то одержимо полігон відносних частот.

Визначення. Вибірковою (емпіричною) функцією розподілу (комулятою) називають функцію $F^*(x)$, що визначає для кожного значення x відносну частоту події $X < x$. Таким чином,

$$F^*(x) = \frac{n_x}{n},$$

де n_x – число варіант, менших за x, n – об'єм вибірки.

Зауваження. На відміну від емпіричної функції розподілу, знайденої дослідним шляхом, функцію розподілу $F(x)$ генеральної сукупності називають теоретичною функцією розподілу. При досить великих x, як випливає з теореми Бернуллі, $F^*(x)$ прямує по ймовірності до F(x).

Властивості комуляти:

- $0 \leqslant F^*(x) \leqslant 1$;
- $F^*(x)$ — не спадна функція;
- Якщо x_1 – найменша варіанта, то $F^*(x)\ = 0$ при $x \leqslant x_1$; якщо x_k – найбільша варіанта, то $F^*(x) = 1$ при $x > x_k$.

Для неперервної ознаки графічною ілюстрацією служить гістограма – східчаста фігура, що складається з прямокутників, основами яких є часткові інтервали довжиною $h = x_i - x_{i-1}$, а висотами – відрізки довжиною $g_i = n_i/h$ (гістограма частот) або w_i/h (гістограма відносних частот). У першому випадку площа гістограми дорівнює об'ємові вибірки, у другому – одиниці.

23 Статистичні оцінки параметрів розподілу

23.1 Точкові оцінки

Нехай необхідно вивчити кількісну ознаку генеральної сукупності. Якщо з теоретичних міркувань встановлено який розподіл має ознака, то виникає задача оцінки параметрів, якими визначається цей розподіл.

В розпорядженні дослідника є лише дані вибірки x_1, x_2, $\ldots$, x_n, що отримані в результаті n незалежних спостережень (спостережені значення ознаки).

Числові характеристики дискретного статистичного розподілу (точкові оцінки параметрів дискретної випадкової величини).

Визначення. Вибіркова середня — середнє арифметичне значень варіант:

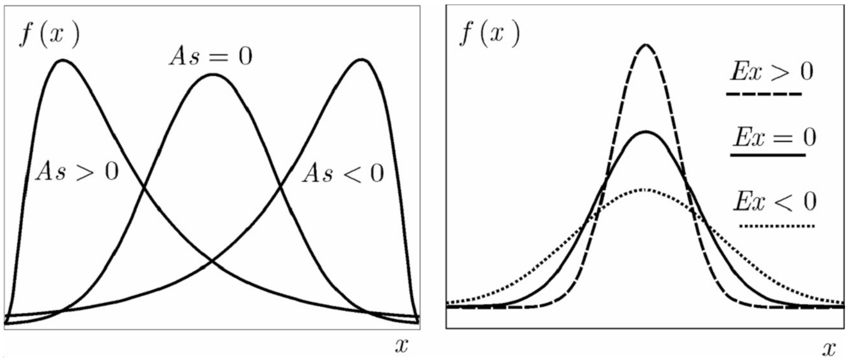
$$\overline{x}_{\text{В}} = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i.$$

Якщо варіанти x_1, x_2, $\ldots$, x_k мають частоти n_1, n_2, $\ldots$, n_k ($\sum_{i=1}^{k} n_i = n$), то

$$\overline{x}_{\text{В}} = \frac{n_1x_1 + n_2x_2 + ... + n_kx_k}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_ix_i$$

Визначення. Вибіркова дисперсія — середнє арифметичне квадратів відхилення значень ознаки від їх середнього значення

$$D_B = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x}_{\text{В}})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i(x_i - \bar{x}_{\text{В}})^2.$$



Формула для обчислення дисперсії:
$D = \overline{x^2} - (\bar{x})^2, \quad \overline{x^2} = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i)^2$ — дисперсія дорівнює середньому квадратів значень ознаки мінус квадрат середньої.

Визначення. Вибіркове середнє квадратичне відхилення $\sigma_\text{В} = \sqrt{D_\text{В}}$ визначає розсіювання варіант відносно $\overline{x}_\text{В}$ в тих самих одиницях, що і сама ознака.

Визначення. Розмах варіювання — різниця між найбільшою та найменшою варіантами

$$R = x_{\max} - x_{\min}. \tag{1}$$

Визначення. Коефіцієнт варіації — виражене у процентах відношення вибіркового середнього квадратичного відхилення до вибіркової середньої

$$V = \frac{\sigma_\text{В}}{\bar{x}_\text{В}} \cdot 100\%.$$

Визначення. Мода Mo – варіанта, що має найбільшу частоту.
Визначення. Медіана Me — варіанта, що поділяє варіаційний ряд на дві рівні за кількістю варіант частини.
Визначення. Початковий емпіричний момент порядку k
$\nu_k^* = \frac{1}{n}\sum n_i x_i^k$ (причому $\nu_1^* = \frac{1}{n}\sum n_i x_i = \bar{x}_\text{В}$).
Визначення. Центральний емпіричний момент порядку k
$\mu_k^* = \frac{1}{n}\sum n_i (x_i - \bar{x}_\text{В})^k$ (причому $\mu_2^* = \frac{1}{n}\sum n_i (x_i - \bar{x}_\text{В})^2 = D_\text{В}$).
Зауваження. Якщо початкові моменти відомі, то центральні моменти можна знайти з виразів

$$\mu_2 = \nu_2 - (\nu_1)^2, \mu_3 = \nu_3 - 3\nu_1\nu_2 + 2(\nu_1)^3, \mu_4 = \nu_4 - 4\nu_1\nu_3 + 6(\nu_1)^2\nu_2 - 3(\nu_1)^4. \tag{2}$$

Визначення. Коефіцієнт асиметрії $\text{As} = \frac{\mu_3^*}{\sigma_\text{В}^3}$.
$\text{As} = 0$, якщо варіанти розміщені симетрично відносно $\overline{x}_\text{В}$,
$\text{As} < 0$, якщо варіанти $x_i < \overline{x}_\text{В}$ переважають варіанти $x_i > \overline{x}_\text{В}$,
$\text{As} > 0$, якщо варіанти $x_i > \overline{x}_\text{В}$ переважають варіанти $x_i < \overline{x}_\text{В}$.

Визначення. Ексцес $\text{Ex} = \frac{\mu_4^*}{\sigma_B^4} - 3$ оцінює крутизну закону розподілу неперервної випадкової величини порівняно з нормальним (для нормального закону $\text{Ex} = 0$). У випадку, коли $\text{Ex} < 0$ варіанти більш розсіяні навколо свого середнього значення, ніж для випадку нормального розподілу, коли $\text{Ex} > 0$ — спостерігається зосередження варіант навколо середньої (дивись рисунок).

23.2 Числові характеристики інтервального статистичного розподілу

Для визначення $\overline{x}_\text{В}$, $D_\text{В}$, ν_k^*, μ_k^* переходять до дискретного розподілу, варіантами якого є середини часткових інтервалів $y_i = (x_{i-1} + x_i)/2$ і обчислюють характеристики для отриманого статистичного ряду.

Для визначення медіани знаходять медіанний частковий інтервал $[x_{i-1}, x_i]$:

$$F^*(x_{i-1}) < 0,5, F^*(x_i) > 0,5. \tag{3}$$

В медіанному частковому інтервалі функція розподілу досягає значення 0,5 ($F^*(\text{Me}) = 0,5$):

$$\text{Me} = x_{i-1} + \frac{0,5 - F^*(x_{i-1})}{F^*(x_i) - F^*(x_{i-1})} \cdot h.$$

Для визначення моди знаходять модальний частковий інтервал $[x_{i-1}, x_i]$ — інтервал, якому відповідає найбільша частота появи. Тоді

$$\mathrm{Mo} = x_{i-1} + \frac{n_{\mathrm{Mo}} - n_{\mathrm{Mo}-1}}{2n_{\mathrm{Mo}} - n_{\mathrm{Mo}-1} - n_{\mathrm{Mo}+1}} \cdot h,$$

де n_{Mo} — частота модального інтервалу, $n_{\mathrm{Mo}-1}$ — частота домодального інтервалу, $n_{\mathrm{Mo}+1}$ — частота післямодального інтервалу.

Приклад. За даними інтервального статистичного розподілу вибірки

i	1	2	3	4	5	6
$[x_{i-1}, x_i]$	0-3	3-6	6-9	9-12	12-15	15-18
n_i	5	10	20	25	30	10

1) побудувати гістограму частот;

2) функцію розподілу.
   Визначити

3) вибіркову середню $\overline{x}_{\mathrm{B}}$ та дисперсію D_{B};

4) моду Mo та медіану Me;

5) асиметрію As та ексцес Ex.

Розв'язання. Переходимо до дискретного розподілу:

$y_i = (x_{i-1} + x_i)/2$	$1,5$	$4,5$	$7,5$	$10,5$	$13,5$	$16,5$
n_i	5	10	20	25	30	10

Загальне число спостережень $n = \sum\limits_{i=1}^{6} n_i = 100$.

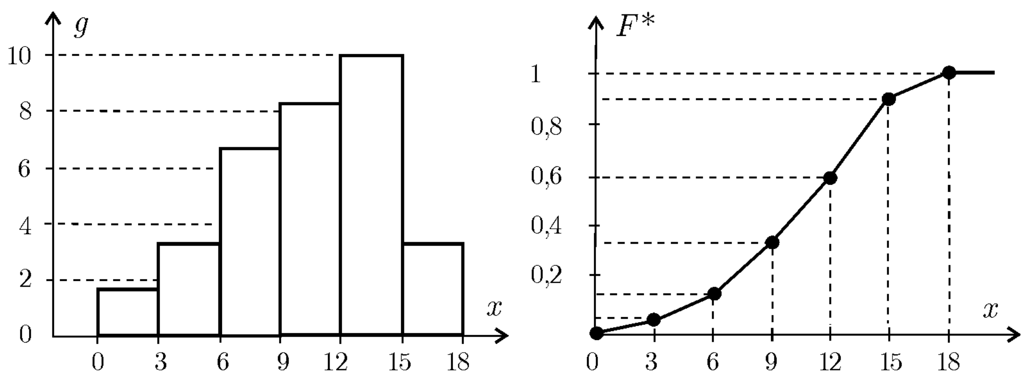
1) для побудови гістограми обчислимо: ширину прямокутників $h = x_i - x_{i-1} = 3$,
   висоти прямокутників:

$g_i = n_i/h$	5/3	10/3	20/3	25/3	30/3	10/3

2) обчислимо функцію розподілу в точках границь часткових інтервалів:
   $F(x_i) = \dfrac{n_1}{n} + \dfrac{n_2}{n} + ... + \dfrac{n_i}{n} = F(x_{i-1}) + \dfrac{n_i}{n}$, $i = 1, 2, \ldots, k$.

x_i	3	6	9	12	15	18
$F(x_i)$	$0,05$	$0,05+$ $0,1=$ $0,15$	$0,15+$ $0,2=$ $0,35$	$0,35$ $+$ $0,25=$ $0,6$	$0,6+$ $0,3=$ $0,9$	$0,9+$ $0,1$ 1

Гістограма та функція розподілу



3) $\overline{x}_{\mathrm{B}} = \dfrac{5 \cdot 1,5 + 10 \cdot 4,5 + 20 \cdot 7,5 + 25 \cdot 10,5 + 30 \cdot 13,5 + 10 \cdot 16,5}{100} = 10,35;$

$$D_{\mathrm{B}} = \frac{5 \cdot 1,5^2 + 10 \cdot 4,5^2 + 20 \cdot 7,5^2 + 25 \cdot 10,5^2 + 30 \cdot 13,5^2 + 10 \cdot 16,5^2}{100} - 10,4^2 = 15,7;$$

$$\sigma_{\mathrm{B}} = \sqrt{15,7} = 3,97;$$

4) медіанний інтервал $[x_{i-1}, x_i] = [9, 12]$, $\text{Me} = 9 + \dfrac{0,5 - 0,35}{0,6 - 0,35} \cdot 3 = 10,8$;

модальний інтервал $[x_{i-1}, x_i] = [12, 15]$, $\text{Mo} = 12 + \dfrac{30 - 25}{2 \cdot 30 - 25 - 10} \cdot 3 = 12,6$.

5) для знаходження асиметрії і ексцесу знайдемо початкові та теоретичні моменти:

y_i	n_i	$n_i y_i$	$n_i y_i^2$	$n_i y_i^3$	$n_i y_i^4$
1,5	5	7,50	11,25	16,88	25,31
4,5	10	45,00	202,50	911,25	4100,63
7,5	20	150,00	1125,00	8437,50	63281,25
10,5	25	262,50	2756,25	28940,63	303876,56
13,5	30	405,00	5467,50	73811,25	996451,88
16,5	10	165,00	2722,50	44921,25	741200,63
		$\Sigma n_i y_i =$ 1035,00	$\Sigma n_i y_i^2 =$ 12285,00	$\Sigma n_i y_i^3 =$ 157038,75	$\Sigma n_i y_i^4 =$ 2108936,25

$\nu_1^* = \dfrac{1}{n} \sum n_i y_i = \dfrac{1}{100} 1035 = 10,35$; $\nu_2^* = \dfrac{1}{n} \sum n_i y_i^2 = \dfrac{1}{100} 12285 = 122,85$;

$\nu_3^* = \dfrac{1}{n} \sum n_i y_i^3 = \dfrac{1}{100} 157038{,}75 = 1570,39$; $\nu_4^* = \dfrac{1}{n} \sum n_i y_i^4 = \dfrac{1}{100} 2108936,25 = 21089,36$;

$\mu_2^* = \nu_2 - (\nu_1)^2 = 122,85 - (10,35)^2 = 15,73$;

$\mu_3^* = \nu_3 - 3\nu_1\nu_2 + 2(\nu_1)^3 = 1570,39 - 3 \cdot 10,35 \cdot 122,85 = -26,67$;

$\mu_4^* = \nu_4 - 4\nu_1\nu_3 + 6(\nu_1)^2\nu_2 - 3(\nu_1)^4 =$

$= 21089,36 - 4 \cdot 10,35 \cdot 1570,39 + 6 \cdot (10,35)^2 \cdot 122,85 - 3 \cdot (10,4)^4 = 609,62.$

Асиметрія $\text{As} = \dfrac{\mu_3^*}{\sigma_\text{В}^3} = \dfrac{-26,67}{(3,97)^3} = -0,43$,

Ексцес $\text{Ex} = \dfrac{\mu_4^*}{\sigma_\text{В}^4} - 3 = \dfrac{609,62}{(3,97)^3} - 3 = -0,54$.

Зауваження. Якщо знайдено моменти ν_1^* і μ_2^*, то $\overline{x}_\text{В} = \nu_1^*$, $D_\text{В} = \mu_2^*$ і обрахунки пункту 3) проводити не потрібно.

Визначення. Статистична оцінка Θ^* називається незміщеною, якщо її математичне сподівання дорівнює параметру Θ, що оцінюється: $M(\Theta^*) = \Theta$. Зміщеною називають оцінку, математичне сподівання якої не дорівнює параметру, що оцінюється.

Визначення. Статистична оцінка називається ефективною, якщо вона при заданому об'ємі вибірки n має найменшу можливу дисперсію.

Визначення. Статистична оцінка Θ^* називається обґрунтованою, якщо уразі необмеженого збільшення об'єму вибірки Θ^* наближається до параметру, що оцінюється

$$\lim_{n\to\infty} P(|\Theta^* - \Theta| < \delta) = 1$$

Вибіркова середня $\overline{x}_\text{В}$ являє собою незміщену оцінку математичного сподівання: $M(\overline{x}_\text{В}) = \bar{X}_\text{В}$.

Вибіркова дисперсія є зміщеною оцінкою генеральної дисперсії. Можна довести, що

$$M(D_\text{В}) = \frac{n-1}{n} D_\text{В}.$$

$s^2 = \dfrac{n}{n-1} D_\text{В} = \dfrac{1}{n-1} \sum\limits_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x}_\text{В})^2$ – виправлена дисперсія ($M(s^2) = D_\Gamma$).

$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{\dfrac{n}{n-1} D_\text{В}}$ – виправлене середнє квадратичне відхилення.

23.3 Порівняння емпіричних та теоретичних частот.

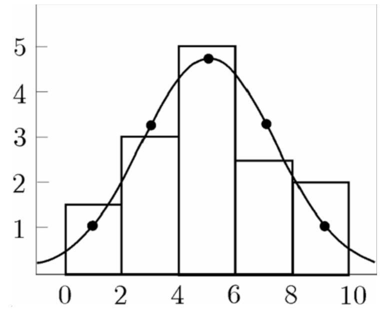
Нехай є підстава вважати, що неперервна випадкова величина X розподілена за деяким законом і треба перевірити це на підставі даних спостережень. Для цього знаходять теоретичні частоти n_i' у припущенні, що X розподілена за певним законом:

$$n_i' = n \cdot P_i, \tag{4}$$

де n — об'єм вибірки, P_i – ймовірність потрапляння випадкової величини X в i-ий частинний інтервал (x_{i-1}, x_i).

Для нормального розподілу

$$P_i = \Phi\left(\frac{x_i - \bar{x}_\text{В}}{\sigma_\text{В}}\right) - \Phi\left(\frac{x_{i-1} - \bar{x}_\text{В}}{\sigma_\text{В}}\right),$$



де $\bar{x}_B$ – вибіркова середня, σ_B – вибіркове середнє квадратичне відхилення, Φ – функція Лапласа. Наближена формула для визначення ймовірності потрапляння випадкової величини X в i-ий частинний інтервал:

$$P_i = \frac{h}{\sigma_{\text{B}}}\varphi\left(\frac{y_i - \bar{x}_{\text{B}}}{\sigma_{\text{B}}}\right),$$

де $y_i = (x_{i-1} + x_i)/2$ – середина i-го частинного інтервалу.

Приклад. Для наведеного в таблиці інтервального статистичного розподілу побудувати нормальну криву.

Розв'язання. Обчислимо вибіркову середню: $\bar{x}_{\text{B}} = 5,07$ і вибіркове середнє квадратичне відхилення: $\sigma_{\text{B}} = 2,36$. Результати подальших обчислень будемо заносити в таблицю:

i	1	2	3	4	5
(x_{i-1}, x_i)	$(0,2)$	$(2,4)$	$(4,6)$	$(6,8)$	$(8,10)$
n_i	3	6	10	5	4
n_i/h	$1,5$	$3,0$	$5,0$	$2,5$	$2,0$
$y_i = (x_i - x_{i-1})/2$	1	3	5	7	9
$y_i - \bar{x}_{\text{B}}$	$-4,07$	$-2,07$	$-0,07$	$1,93$	$3,93$
$u_i = \dfrac{y_i - \bar{x}_B}{\sigma_B}$	$-1,73$	$-0,88$	$-0,03$	$0,82$	$1,67$
$\varphi(u_i)$	$0,09$	$0,27$	$0,40$	$0,29$	$0,10$
n'_i	$2,14$	$6,44$	$9,46$	$6,78$	$2,37$
n'_i/h	$1,07$	$3,22$	$4,73$	$3,39$	$1,18$

За даними рядка n_i/h будуємо гістограму частот, а за даними рядка n'_i/h — точки нормальної кривої, з'єднуючи які, отримаємо нормальну криву для заданого інтервального розподілу.

24 Інтервальна оцінка параметрів розподілу

Нехай Θ^* – точкова статистична оцінка невідомого параметра Θ. Витягнемо з генеральної сукупності кілька вибірок об'єму n і обчислимо для кожної з них оцінку параметра Θ: $\Theta_1^*, \Theta_2^*, \ldots \Theta_n^*$. Тоді Θ^* є випадковою величиною і заміна Θ на Θ^* може призвести до суттєвих похибок, особливо коли об'єм вибірки є малим. В цьому випадку використовують інтервальні оцінки.

Визначення. Статистична оцінка, що визначається двома числами – кінцями інтервалів – називається інтервальною.

Визначення. Точністю оцінки називається величина δ ($\delta > 0$), така, що $|\Theta^* - \Theta| < \delta$ ($\Theta^* - \delta < \Theta < \Theta^* + \delta$)

Визначення. Довірчим називається інтервал $(\Theta^* - \delta, \Theta^* + \delta)$, який покриває параметр Θ із заданою ймовірністю γ: $P(|\Theta^* - \Theta| < \delta) = \gamma$. Іншими словами: ймовірність того, що довірчий інтервал $(\Theta^* - \delta, \Theta^* + \delta)$ містить в собі параметр Θ, дорівнює γ.

Визначення. Число γ називається надійністю (довірчою ймовірністю). Її задають наперед числом, близьким до одиниці ($0,95$; $0,99$; $0,999$).

24.1 Довірчий інтервал для оцінки математичного сподівання нормального розподілу при відомій дисперсії.

Нехай X – нормально розподілена випадкова величина, її середнє квадратичне відхилення відоме і дорівнює σ. Потрібно за значенням вибіркової середньої $\overline{x}_{\text{B}}$ оцінити математичне сподівання $M(X)$.

Будемо розглядати $\overline{x}_{\text{B}}$ як випадкову величину $\overline{X}$, а значення варіант вибірки x_1, x_2, ..., x_n як однаково розподілені незалежні випадкові величини X_1, X_2, ..., X_n.

Математичне сподівання кожної з X_i дорівнює a, а середнє квадратичне відхилення дорівнює σ. Тоді $M(\overline{X}) = a$, $\sigma(\overline{X}) = \sigma/\sqrt{n}$ (використовуємо властивості математичного сподівання і дисперсії середнього арифметичного незалежних випадкових величин). Ймовірності потрапляння нормально розподіленої випадкової величини в заданий інтервал

$$P(|X - a| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right). \tag{5}$$

Замінимо X на $\overline{X}$, а σ на $\sigma(\overline{X}) = \sigma/\sqrt{n}$. Отримаємо

$$P(|\bar{X} - a| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}\right) = 2\Phi(t), \tag{6}$$

де $t = \dfrac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}$, і $\delta = \dfrac{t\sigma}{\sqrt{n}}$.

Задамо надійність γ і знайдемо довірчий інтервал з рівняння

$$P\left(|\,\bar{x}_{\text{B}} - a\,| < \frac{t\cdot\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 2\Phi(t) = \gamma.$$

Отже, значення математичного сподівання a з надійністю γ потрапляє в інтервал

$$\left(\bar{x}_{\text{B}} - \frac{t\sigma}{\sqrt{n}};\ \ \bar{x}_{\text{B}} + \frac{t\sigma}{\sqrt{n}}\right),$$

де значення t визначається з рівняння $2\Phi(t) = \gamma$ $(\Phi(t) = \gamma/2)$.

Зауваження.

1) при зростанні об'єму вибірки n точність оцінки δ зменшується, тим самим точність зростає;
2) при зростанні надійності γ параметр t зростає, тим самим точність зменшується.

Приклад. Знайти довірчий інтервал для математичного сподівання нормально розподіленої випадкової величини, якщо об'єм вибірки $n = 49$, $\bar{x}_{\text{B}} = 2,8$, $\sigma = 1,4$, а довірча ймовірність $\gamma = 0,9$.

Розв'язання. Визначимо t, при якому $\Phi(t) = 0,9 : 2 = 0,45$: $t = 1,65$. Визначимо точність оцінки $\delta = \dfrac{t\sigma}{\sqrt{n}} = \dfrac{1,65\cdot 1,4}{\sqrt{49}} = 0,33$. Тоді довірчий інтервал $2,8 - 0,33 < a < 2,8 + 0,33$, тобто $2,47 < a < 3,13$.

24.2 Довірчий інтервал для оцінки математичного сподівання нормального розподілу при невідомій дисперсії.

Нехай X — нормально розподілена випадкова величина з невідомим середнім квадратичним відхиленням. Потрібно оцінити математичне сподівання $M(X)$ по середній вибірковій $\bar{x}_{\text{B}}$ та виправленому вибірковому середньому квадратичному відхиленню s.

Побудуємо випадкову величину

$$T = \frac{\bar{X} - a}{\dfrac{S}{\sqrt{n}}},$$

яка має розподіл Стьюдента з $k = n - 1$ ступенями свободи. $\overline{X}$ — вибіркове середнє, S — виправлене середнє квадратичне відхилення. Оскільки щільність розподілу Стьюдента $S(t, n)$ — парна функція, що не залежить від a і σ,

$$P\left(\left|\frac{\bar{X} - a}{\dfrac{S}{\sqrt{n}}}\right| < t_\gamma\right) = 2\int\limits_0^{t_\gamma} S(t, n)\mathrm{d}t = \gamma.$$

Замінюючи $\overline{X}$ на $\bar{x}_{\text{B}}$, а S на s, одержимо

$$P\left(\bar{x}_{\text{B}} - \frac{t_\gamma s}{\sqrt{n}} < a < \bar{x}_{\text{B}} + \frac{t_\gamma s}{\sqrt{n}}\right) = \gamma.$$

Таким чином, значення математичного сподівання a з надійністю γ потрапляє в інтервал

$$\left(\bar{x}_{\text{B}} - \frac{t_\gamma\sigma}{\sqrt{n}};\ \ \bar{x}_{\text{B}} + \frac{t_\gamma\sigma}{\sqrt{n}}\right),$$

де t_γ можна знайти за таблицею при заданих n і γ.

Приклад. Нехай об'єм вибірки $n = 25$, $\bar{x}_{\text{B}} = 3$, $s = 1,5$. Знайти довірчий інтервал для математичного сподівання a при надійності $\gamma = 0,99$.

Розв'язання. З таблиці знаходимо, що $t_\gamma(n = 25, \gamma = 0,99) = 2,8$. Точність оцінки $\delta = \dfrac{t_\gamma\sigma}{\sqrt{n}} = \dfrac{2,8\cdot 1,5}{\sqrt{25}} = 0,84$. Тоді довірчий інтервал $3 - 0,84 < a < 3 + 0,84$ або $2,16 < a < 3,84$.

24.3 Довірчі інтервали для оцінки середнього квадратичного відхилення нормального розподілу.

Нехай X — нормально розподілена випадкова величина. Потрібно оцінити середнє квадратичне відхилення σ за виправленим вибірковим середнім квадратичним відхиленням s.

Довірчий інтервал, який покриває σ із заданою ймовірністю γ знаходиться у вигляді

$$s(1-q) < \sigma < s(1+q), \tag{7}$$

де q знаходиться з таблиць по заданим n і γ.

Зауваження. Якщо $q > 1$, то з урахуванням умови $\sigma > 0$ довірчий інтервал для σ буде мати вигляд $0 < \sigma < s(1+q)$.

Приклад. За вибіркою об'єму $n = 20$ обчислено вибіркове виправлене середнє квадратичне відхилення $s = 1,3$. Знайти довірчий інтервал для середнього квадратичного відхилення генеральної сукупності σ при заданій надійності $\gamma = 0,95$.

Розв'язання. З відповідної таблиці знаходимо $q(n = 20, \gamma = 0,95) = 0,37$. Довірчий інтервал $1,3 \cdot (1 - 0,37) < \sigma < 1,3 \cdot (1 + 0,37)$. Отже $0,82 < \sigma < 1,78$.

25 Статистична перевірка статистичних гіпотез

Визначення. Статистичною називають гіпотезу про вигляд невідомого розподілу генеральної сукупності або про параметри відомих розподілів.

Визначення. Нульовою H_0 (основною) називають висунуту гіпотезу. Конкуруючою H_1 (альтернативною) називають гіпотезу, що суперечить нульовій. Наприклад, якщо H_0 полягає в тому, що математичне сподівання генеральної сукупності $a = 3$, то можливими варіантами альтернативної гіпотези H_1 є такі: а) $a \neq 3$; б) $a > 3$; в) $a < 3$.

Визначення. Простою називають гіпотезу, що містить тільки одне припущення, складною — гіпотезу, що складається з скінченого або нескінченного числа простих гіпотез. Наприклад, для показникового розподілу гіпотеза H_0: $\lambda = 2$ — проста, H_0: $\lambda > 2$ — складна, що складається з нескінченного числа простих (вигляду $\lambda = a$, де a — будь-яке число, більше 2).

Визначення. У результаті статистичної перевірки правильності висунутої нульової гіпотези можливі помилки двох родів.

Помилка першого роду полягає в тому, що буде відкинута правильна нульова гіпотеза. Ймовірність α помилки першого роду називається рівнем значущості.

Помилка другого роду полягає в тому, що буде прийнята невірна нульова гіпотеза. Ймовірність похибки другого роду позначається β.

Зауваження. Яка з помилок є на практиці більш небезпечною, залежить від конкретної задачі. Наприклад, якщо перевіряється правильність вибору методу лікування хворого, то помилка першого роду означає відмову від правильної методики, що може сповільнити лікування, а помилка другого роду (застосування неправильної методики) може призвести до погіршенням стану хворого і є більш небезпечною.

Основний прийом перевірки статистичних гіпотез полягає в тому, що по наявній вибірці обчислюється значення деякої випадкової величини, що має відомий закон розподілу.

Визначення. Статистичним критерієм називається випадкова величина K з відомим законом розподілу, що служить для перевірки нульової гіпотези.

Визначення. Критичною областю називають область значень критерію, при яких нульову гіпотезу відхиляють, областю прийняття гіпотези — область значень критерію, при яких нульову гіпотезу приймають.

Види критичних областей:
— правобічна — $K > k_{\text{кр}}$ ($k_{\text{кр}} > 0$);
— лівобічна — $K < k_{\text{кр}}$ ($k_{\text{кр}} < 0$);
— двобічна — $K < k_1, K > k_2 (k_2 > k_1)$.

Етапи перевірки гіпотези:

1) вибирається статистичний критерій K;

2) обчислюється його спостережене значення $K_{\text{спост}}$ за наявною вибіркою;

3) оскільки закон розподілу K відомий, за відомим рівнем значущості α визначається критичне значення $k_{\text{кр}}$, що розділяє критичну область і область прийняття гіпотези. $k_{\text{кр}}$ дуже часто знаходиться з відповідних таблиць;

4) якщо обчислене значення $K_{\text{спост}}$ потрапляє до області прийняття гіпотези, то нульова гіпотеза приймається, якщо в критичну область – нульова гіпотеза відхиляється.

Визначення. Потужністю критерію називають ймовірність потрапляння критерію до критичної області при вірній конкуруючій гіпотезі. Похибка другого роду — прийняти неправильну нульову гіпотезу — влучити в область прийняття гіпотези при вірній конкуруючій гіпотезі. Тому потужність критерію дорівнює $1 - \beta$. Отже, чим більше потужність критерію, тим менше ймовірність зробити помилку другого роду. Тому після вибору рівня значущості варто будувати критичну область так, щоб потужність критерію була максимальною.

26 Перевірка параметричних статистичних гіпотез

26.1 Перевірка гіпотези про математичне сподівання нормальної генеральної сукупності

Нехай генеральна сукупність X розподілена нормально, і треба при заданому рівні значущості α перевірити гіпотезу про те, що математичне сподівання $M(X)$ дорівнює деякому числу a.

Розглянемо два випадки.

1) Відома дисперсія σ^2 генеральної сукупності. Тоді по вибірці об'єму n знайдемо вибіркове середнє $\overline{x}_{\text{В}}$ і перевіримо нульову гіпотезу H_0: $M(X) = a$.

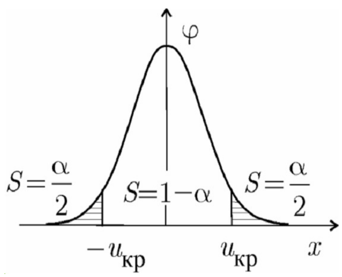
З огляду на те, що вибіркове середнє $\overline{X}$ є незміщеною оцінкою $M(X)$, тобто $M(\overline{X}) = M(X)$, можна записати нульову гіпотезу так: $M(\overline{X}) = a$. Для її перевірки виберемо нормовану нормально розподілену величину

$$U = \frac{\bar{X} - a}{\sigma(\bar{X})} = \frac{(\bar{X} - a)\sqrt{n}}{\sigma}.$$

Спостережене значення критерію $U_{\text{спост}} = \dfrac{(\bar{x}_B - a)\sqrt{n}}{\sigma}$.

Виберемо критичну область в залежності від вигляду конкуруючої гіпотези:

а) якщо $H_1 : M(X) \neq a$, то критична область двобічна і критичну точку знаходимо з рівності $P(-u_{\text{кр}} < U < u_{\text{кр}}) = 1 - \alpha$ (дивись рисунок).



Одержимо

$$P\left(\,|\,U\,| < u_{\text{кр}}\right) = 2\Phi\left(\frac{u_{\text{кр}}}{\sigma\left(U\right)}\right) = 2\Phi\left(u_{\text{кр}}\right),$$

оскільки $\sigma(U) = 1$.

Таким чином

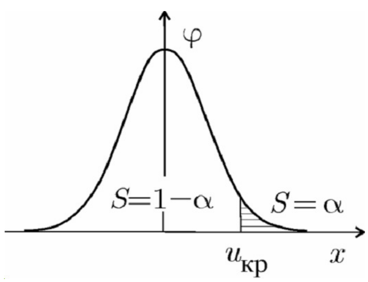
$$2\Phi\left(u_{\text{кр}}\right) = 1 - \alpha \quad \text{або} \quad \Phi\left(u_{\text{кр}}\right) = \frac{1 - \alpha}{2}$$

і $u_{\text{кр}}$ можна знайти з таблиць функції Лапласа.

Якщо $|U_{\text{спост}}| < u_{\text{ кр}}$, то нульова гіпотеза приймається; якщо $|U_{\text{спост}}| \geqslant u_{\text{кр}}$, то нульова гіпотеза відхиляється.

б) якщо H_1: $M(X) > a_0$, то критична область правобічна і критичну точку знаходимо з рівності

$P(U < u_{\text{кр}}) = 1 - \alpha$ (дивись рисунок).



Одержимо

$$P(U < 0) + P(0 < U < u_{\text{кр}}) = 1 - \alpha, \tag{8}$$

або

$$\frac{1}{2} + P(0 < U < u_{\text{кр}}) = 1 - \alpha.$$

Таким чином

$$\Phi\left(u_{\text{кр}}\right)=\frac{1}{2}-\alpha=\frac{1-2\alpha}{2}$$

і $u_{\text{кр}}$ можна знайти з таблиць функції Лапласа.

Якщо $U_{\text{спост}}<u_{\text{кр}}$ нульова гіпотеза приймається; якщо $U_{\text{спост}}\geqslant u_{\text{кр}}$ – відхиляється.

Аналогічно розглядається H_1: $M(X)<a_0$.

2) Дисперсія генеральної сукупності невідома і за вибіркою об'єму n обчислено виправлене середнє квадратичне відхилення s.

Критерієм для перевірки нульової гіпотези H_0: $M(X)=a$ виберемо випадкову величину

$$T=\frac{(\bar{X}-a)\sqrt{n}}{S},$$

де S — виправлене середнє квадратичне відхилення. Випадкова величина T має розподіл Стьюдента з $k=n-1$ степенями свободи.

Розглянемо ті ж, що й у попередньому випадку, конкуруючі гіпотези і відповідні їм критичні області. Попередньо обчислимо спостережене значення критерію

$$T_{\text{спост}}=\frac{(\overline{x}_{\text{В}}-a)\sqrt{n}}{s}.$$

а) якщо H_1: $M(X)\neq a_0$, то критична область двобічна і критична точка $t_{\text{кр}}$ знаходиться за таблицею критичних точок розподілу Стьюдента за відомими α і k.

При $|T_{\text{спост}}|<t_{\text{кр}}$ нульова гіпотеза приймається, при $|T_{\text{спост}}|\geqslant t_{\text{кр}}$ – відхиляється.

б) якщо H_1: $M(X)>a_0$, то за таблицею знаходять $t_{\text{кр}}(\alpha,k)$ – критичну точку правосторонньої критичної області. Нульова гіпотеза приймається, якщо $T_{\text{спост}}<t_{\text{кр}}$ і відхиляється в протилежному випадку.

Аналогічно розглядається H_1: $M(X)<a_0$.

26.2 Перевірка гіпотези про рівність дисперсій двох генеральних сукупностей

Нехай генеральні сукупності X_1 і X_2 розподілені нормально. З цих сукупностей взято незалежні вибірки об'ємом n_1 і n_2, за якими обчислено виправлені вибіркові дисперсії s_1^2 і s_2^2. При заданому рівні значущості α треба перевірити нульову гіпотезу H_0: $D(X_1)=D(X_2)$ про рівність дисперсій розглянутих сукупностей. Враховуючи незміщенність виправлених вибіркових дисперсій перепишемо нульову гіпотезу H_0: $M(s_1^2)=M(s_2^2)$.

В якості критерію приймається випадкова величина

$$F=\frac{S_A^2}{S_B^2}$$

— відношення більшої вибіркової дисперсії до меншої. F має розподіл Фішера-Снедекора зі степенями свободи $k_1=n_1-1$ і $k_2=n_2-1$.

Спостережене значення критерію $F_{\text{спост}}=\dfrac{s_A^2}{s_B^2}$.

а) якщо H_1: $D(X_1)\neq D(X_2)$, то критична точка розподілу Фішера $F_{\text{кр}}=F\left(\dfrac{\alpha}{2},k_1,k_2\right)$ знаходиться з відповідних таблиць.

При $|F_{\text{спост}}|<F_{\text{кр}}$ нульова гіпотеза приймається, при $|F_{\text{спост}}|\geqslant F_{\text{кр}}$ – відхиляється.

б) якщо H_1: $D(X_1)>D(X_2)$, то з таблиць критичних точок розподілу Фішера знаходиться $F_{\text{кр}}=F\left(\alpha,k_1,k_2\right)$.

При $F_{\text{спост}}<F_{\text{кр}}$ нульова гіпотеза приймається, при $F_{\text{спост}}\geqslant F_{\text{кр}}$ – відхиляється.

27 Перевірка непараметричних статистичних гіпотез. Критерій Пірсона

Усі перевірки параметричних статистичних гіпотез ґрунтуються на припущенні, що ознака генеральної сукупності має нормальний закон розподілу. Якщо закон розподілу є невідомим, але є підстави вважати (наприклад, за формою полігона частот чи гістограми), що він має певний вид (наприклад, нормальний), то перевіряють нульову гіпотезу про вид розподілу генеральної сукупності.

Визначення. Емпіричні частоти n_i — частоти, які спостерігаються при реалізації вибірки. Теоретичні частоти n_i' — частоти, обраховані у припущенні, що генеральна сукупність розподілена за певним законом. У випадку нормального закону розподілу:

$$P_i=\Phi\left(\frac{x_i-\bar{x}_{\text{В}}}{\sigma_{\text{В}}}\right)-\Phi\left(\frac{x_{i-1}-\bar{x}_{\text{В}}}{\sigma_{\text{В}}}\right),$$

де $\bar{x}_{\text{В}}$ — вибіркова середня, $\sigma_{\text{В}}$ — вибіркове середнє квадратичне відхилення, Φ — функція Лапласа.

Визначення. Критерієм узгодженості називають критерій про передбачуваний закон невідомого розподілу. Критеріями узгодженості є критерії Пірсона, Колмогорова, Смірнова та інші.

Розглянемо критерій Пірсона, перевагою якого є універсальність: з його допомогою можна перевіряти гіпотези про різні види закони розподілу (рівномірний, показниковий, нормальний). В основу критерію покладено порівняння емпіричних та теоретичних частот. З'ясовується, чи є випадковою розбіжність між цими частотами.

Нехай задано інтервальний статистичний розподіл

Номер інтервалу	1	2	...	k
Інтервал (x_{i-1}, x_i)	(x_0, x_1)	(x_1, x_2)	...	(x_{k-1}, x_k)
Кількість варіант, що потрапили в інтервал	n_1	n_2	...	n_k

і обчислено вибіркові середнє $\overline{x}_{\text{В}}$, середнє квадратичне відхилення $\sigma_{\text{В}}$ і теоретичні частоти n'_i.

Зауваження. Об'єм вибірки $n = \sum\limits_{i=1}^{k} n_k$ повинен бути не менше за 50. Кожний частинний інтервал повинен містити не менше 6 варіант ($n_i < 6$), інакше малі групи треба об'єднувати в одну, сумуючи частоти.

Перевіримо з рівнем значущості α припущення про те, що генеральна сукупність розподілена нормально. Для порівняння емпіричних і теоретичних частот використаємо критерій у вигляді випадкової величини – суми відношень квадратів відхилень емпіричних частот від теоретичних до відповідних теоретичних частот

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(n_i - n'_i)^2}{n'_i}.$$

Незалежно від закону розподілу генеральної сукупності закон розподілу розглянутої випадкової величини при $n \to \infty$ прямує до закону розподілу χ^2 з числом ступенів свободи

$$k = s - 1 - r, \tag{9}$$

де s – число груп (частинних інтервалів), r — число параметрів передбачуваного розподілу. Нормальний розподіл характеризується двома параметрами, тому $k = s - 3$.

Побудуємо правосторонню критичну область, виходячи з вимоги про те, щоб ймовірність потрапляння критерію в цю область у припущенні справедливості нульової гіпотези дорівнювала прийнятому рівню значущості:

$$P\left(\chi^2 > \chi^2_{\text{кр}}(\alpha, k)\right) = \alpha$$

Отже, критична область задається нерівністю $\chi^2 > \chi^2_{\text{кр}}(\alpha, k)$, а область прийняття гіпотези — $\chi^2 < \chi^2_{\text{кр}}(\alpha, k)$. Таким чином, для перевірки нульової гіпотези потрібно обчислити за вибіркою спостережене значення критерію

$$\chi^2_{\text{спост}} = \sum_{i=1}^{k} \frac{(n_i - n'_i)^2}{n'_i} \quad ,$$

і за таблицею критичних точок розподілу χ^2 знайти критичну точку $\chi^2_{\text{кр}}(\alpha, k)$, використовуючи відомі значення α і $k = s - 3$. Якщо $\chi^2_{\text{спост}} < \chi^2_{\text{кр}}$ – нульову гіпотезу приймають, при $\chi^2_{\text{спост}} \geqslant \chi^2_{\text{кр}}$ – відхиляють.

Приклад. За даними інтервального статистичного розподілу з рівнем значущості $\alpha = 0,05$ перевірити гіпотезу про нормальність дослідженої ознаки.

i	1	2	3	4	5
(x_{i-1}, x_i)	(0, 2)	(2, 4)	(4, 6)	(6, 8)	(8, 10)
n_i	3	6	10	5	4

Розв'язання. В прикладі з попередньої теми обчислено вибіркову середню $\bar{x}_{\text{В}} = 5,07$ і вибіркове середнє квадратичне відхилення $\sigma_{\text{В}} = 2,36$. Обчислимо теоретичні частоти та спостережене значення критерію. Процес обчислення відображено відповідно в таблицях.

i	x_{i-1}	x_i	$z_{i-1} = \dfrac{x_{i-1} - \overline{x}_{\text{В}}}{\sigma_{\text{В}}}$	$z_i = \dfrac{x_i - \overline{x}_{\text{В}}}{\sigma_{\text{В}}}$	$\Phi(z_{i-1})$	$\Phi(z_i)$	$P_i = \Phi(z_i) - \Phi(z_{i-1})$	$n'_i = n \cdot P_i$
1	0	2		$-1,301$	$-0,500$	$-0,403$	$0,097$	2,7
2	2	4	$-1,301$	$-0,453$	$-0,403$	$-0,175$	$0,228$	6,4
3	4	6	$-0,453$	$0,394$	$-0,175$	$0,153$	$0,328$	9,2
4	6	8	$0,394$	$1,242$	$0,153$	$0,393$	$0,240$	6,7
5	8	10	$1,242$		$0,393$	$0,500$	$0,107$	3,0
							$\Sigma P_i = 1$	$\Sigma n_i = n = 28$

i	n_i	n'_i	$n_i - n'_i$	$(n_i - n'_i)^2$	$\dfrac{(n_i - n'_i)^2}{n'_i}$

1	3	$2,71$	$0,29$	$0,09$	$0,03$
2	6	$6,40$	$-0,40$	$0,16$	$0,02$
3	10	$9,19$	$0,81$	$0,66$	$0,07$
4	5	$6,71$	$-1,71$	$2,92$	$0,43$
5	4	$3,00$	$1,00$	$1,00$	$0,33$
					$\sum \dfrac{(n_i - n_i')^2}{n_i'} = 0,9$

Таким чином, спостережене значення критерію
$\chi^2_{\text{спост}} = \sum\limits_{i=1}^{5} \dfrac{(n_i - n_i')^2}{n_i'} = 0,9.$

За таблицею критичних точок розподілу χ^2 при заданому рівні значущості $\alpha = 0,05$ і числу степенів свободи $k = 5-3 = 2$ (5 – число інтервалів групування вибірки) знаходимо критичну точку правосторонньої критичної області $\chi^2_{\text{кр}}(0,05,2) = 6$. $\chi^2_{\text{спост}} < \chi^2_{\text{кр}}$ $(0,9 < 6)$ і, таким чином, нема підстав відхилити нульову гіпотезу про нормальний розподіл генеральної сукупності.

Зауваження. Критерій Пірсона можна застосовувати при об'ємі вибірки $n > 50$, тому розглянутий приклад надано лише в навчальних цілях.

28 Пряма лінія регресії. Коефіцієнт кореляції та перевірка його значимості

Визначення. Випадкові величини, можливі значення яких визначаються двома числами, називаються двомірними і позначають (X, Y). Кожну з величин X і Y називають складовою або компонентою. Обидві випадкові величини X і Y, які розглядаються разом, утворюють систему двох випадкових величин. Законом розподілу двомірної випадкової величини називають перелік можливих значень цієї величини – пар (x_i, y_j) і відповідних їм ймовірностей $p_{ij} = p(x_i, y_j)$.

Визначення. Випадкова величина Y називається функцією випадкової величини X, якщо кожному можливому значенню випадкової величини X відповідає одне можливе значення Y.

Строга функціональна залежність реалізується рідко, оскільки обидві розглянуті випадкові величини або одна з них знаходяться під впливом інших випадкових факторів.

Визначення. Статистичною залежністю називають залежність, при якій зміна однієї з випадкових величин призводить до зміни розподілу іншої. Якщо статистична залежність проявляється в тому, що при зміні однієї з випадкових величин змінюється середнє значення другої, то така статистична залежність називається кореляційною.

Визначення. Умовним середнім $\bar{y}_x$ називається середнє арифметичне спостережених значень Y, що відповідають $X = x$. Наприклад, якщо при $x_1 = 1$ Y прийняла значення $y_1 = 2$, $y_2 = 3$, $y_3 = 4$, то умовне середнє $\bar{y}_{x_1} = (2+3+4)/3 = 3$.

Визначення. Вибірковим рівнянням регресії Y на X називається рівняння $\bar{y}_x = f^*(x)$, функція f^* називається вибірковою регресією Y на X, а її графік – вибірковою лінією регресії Y на X.

Далі розглянемо лише випадок, коли $f^*(x) = k \cdot x + b$ – лінійна функція.

Вибіркове рівняння прямої лінії середньоквадратичної регресії за незгрупованими даними.

Нехай вивчається система двох ознак (X, Y) і в результаті n спостережень отримано пари чисел $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$. Знайдемо вибіркове рівняння лінії регресії Y на X

$$y = \rho_{yx} \cdot x + b. \tag{10}$$

Число ρ_{yx} називається вибірковим коефіцієнтом регресії Y на X. Коефіцієнти ρ_{yx} і b вибирають так, щоб точки $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ лежали якомога ближче до прямої $y = \rho_{yx} \cdot x + b$. Застосування методу найменших квадратів дає

$$\rho_{yx} = \frac{\overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\sigma_x^2}, \quad b = \frac{\overline{x^2} \cdot \bar{y} - \bar{x} \cdot \overline{x \cdot y}}{\sigma_x^2},$$

де $\overline{x \cdot y} = \dfrac{1}{n} \sum x \cdot y$, $\sigma_x^2 = \overline{x^2} - (\bar{x})^2$.

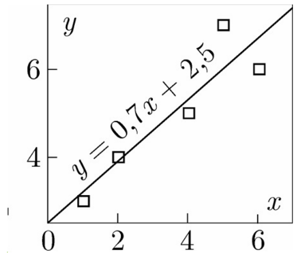
Вибірковий коефіцієнт кореляції $r_{\text{В}} = \dfrac{\sigma_x}{\sigma_y} \rho_{yx} = \dfrac{\overline{x \cdot y} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\sigma_x \sigma_y}$.

Властивості коефіцієнта кореляції:

1) якщо X і Y — незалежні, то $r_{\text{В}} = 0$;

2) якщо $r_{\text{В}} = \pm 1$, то X і Y пов'язані лінійною функціональною залежністю. Таким чином коефіцієнт кореляції вимірює силу лінійного зв'язку між X і Y. При $r_{\text{В}} = -1$ зростання значень однієї з ознак призводить до зменшення значень іншої ознаки – має місце так звана «протилежна залежність».

Приклад. Знайти 1) вибіркове рівняння прямої лінії регресії та 2) коефіцієнт кореляції для результатів спостереження



X	1	2	4	5	6
Y	3	4	5	7	6

Розв'язання. $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum x = \frac{1}{5}(1+2+4+5+6) = 3,6$; $\bar{y} = \frac{1}{n}\sum y = \frac{1}{5}(3\ +4\ +5\ +7\ +6)\ = 5$;
$\overline{x^2} = \frac{1}{n}\sum x^2 = \frac{1}{5}(1\ +4\ +16\ +25\ +36) = 16,4$;
$\overline{y^2} = \frac{1}{n}\sum y^2 = \frac{1}{5}(9\ +16\ +25\ +49\ +36) = 27$;
$\sigma_x^2 = \overline{x^2} - (\bar{x})^2 = 16,4 - 3,62 = 3,4$; $\sigma_x = 1,9$;
$\sigma_y^2 = \overline{y^2} - (\bar{y})^2 = 27 - 52\ = -25$; $\sigma_y = 1,4$;
$\overline{x\cdot y} = \frac{1}{n}\sum x\cdot y = \frac{1}{5}(1\cdot 3\ +2\cdot 4\ +4\cdot 5\ +5\cdot 7\ +6\cdot 6)\ = 20,4$;
1) $\rho_{yx} = \frac{\overline{x\cdot y} - \bar{x}\cdot\bar{y}}{\sigma_x^2} = \frac{20,4 - 3,6\cdot 5}{3,4} = 0,7$; $b = \frac{\overline{x^2}\cdot\bar{y} - \bar{x}\cdot\overline{x\cdot y}}{\sigma_x^2} = \frac{16,4\cdot 5 - 3,6\cdot 20,4}{1,9} = 2,5$;
$y = 0,7\cdot x + 2,5$ — рівняння прямої лінії регресії (дивись рисунок);
2) $r_{\text{В}} = \frac{\overline{x\cdot y} - \bar{x}\cdot\bar{y}}{\sigma_x\cdot\sigma_y} = \frac{20,4 - 3,6\cdot 5}{1,9\cdot 1,4} = 0,91$.

28.1 Вибіркове рівняння прямої лінії середньоквадратичної регресії за згрупованими даними.

При великій кількості спостережень одне й те саме значення x може зустрітися n_x раз, y — n_y раз, а пара чисел (x, y) — n_{xy} раз. В цьому випадку дані групують і заносять в кореляційну таблицю. Наприклад,

Y	X			
	1	2	3	n_y
0	2	1	1	4
2	0	2	4	6
n_x	2	3	5	$n = 10$

Вибірковий коефіцієнт регресії

$$\rho_{yx} = \frac{\overline{x\cdot y} - \bar{x}\cdot\bar{y}}{\sigma_x^2},$$

де $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum n_x\cdot x$, $\overline{x^2} = \frac{1}{n}\sum n_x\cdot x^2$, $\bar{y} = \frac{1}{n}\sum n_y\cdot y$, $\overline{x\cdot y} = \frac{1}{n}\sum n_{xy}\cdot x\cdot y$.

Коефіцієнт кореляції

$$r_{\text{В}} = \frac{\sigma_x}{\sigma_y}\rho_{yx} = \frac{\frac{1}{n}\sum n_{xy}\cdot x\cdot y - \bar{x}\cdot\bar{y}}{\sigma_x\sigma_y}.$$

Вибіркове рівняння прямої лінії регресії

$$\bar{y}_x - \bar{y} = \rho_{yx}(x - \bar{x}).$$

Приклад. Знайти 1) вибіркове рівняння прямої лінії регресії та 2) коефіцієнт кореляції для спостережень, занесених в кореляційну таблицю.

Розв'язання.

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum n_x\cdot x = \frac{1}{10}(2\cdot 1 + 3\cdot 2 + 5\cdot 3) = 2,3;$$

$$\overline{x^2} = \frac{1}{n}\sum n_x\cdot x^2 = \frac{1}{10}(2\cdot 1^2 + 3\cdot 2^2\ + 5\cdot 3^2) = 5,9;$$

$$\bar{y} = \frac{1}{n}\sum n_y\cdot y = \frac{1}{10}(4\cdot 0 + 6\cdot 2) = 1,2;$$

$$\overline{y^2} = \frac{1}{n}\sum n_y \cdot y^2 = \frac{1}{10}(4 \cdot 0^2 + 6 \cdot 2^2) = 2,4;$$

$$\sigma_x^2 = \overline{x^2} - (\bar{x})^2 = 5,9 - 2,32 = 0,61; \sigma_x = 0,78;$$

$$\sigma_y^2 = \overline{y^2} - (\bar{y})^2 = 2,4 - 1,22 = 0,96; \sigma_y = 0,98;$$

$$\overline{x \cdot y} = \frac{1}{n}\sum n_{xy} \cdot x \cdot y = \frac{1}{10}(2 \cdot 2 \cdot 2 + 4 \cdot 3 \cdot 2) = 3,2;$$

1) Вибірковий коефіцієнт регресії $\rho_{yx} = \dfrac{\overline{x \cdot y} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\sigma_x^2} = \dfrac{3,2 - 2,3 \cdot 1,2}{0,78^2} = 0,72.$

Вибіркове рівняння прямої лінії регресії $\bar{y}_x - 1,2 = 0,72 \cdot (x - 2,3)$ або $\bar{y}_x = 0,72x - 0,46$.

2) Коефіцієнт кореляції $r_{\text{В}} = \dfrac{\overline{x \cdot y} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\sigma_x \sigma_y} = \dfrac{3,2 - 2,3 \cdot 1,2}{0,78 \cdot 0,98} = 0,57$.

28.2 Перевірка гіпотези про значимість вибіркового коефіцієнта кореляції

Розглянемо вибірку об'єму n з нормально розподіленої двовимірної генеральної сукупності (X, Y). Нехай обрахований за вибіркою коефіцієнт кореляції не дорівнює нулю: $r_{\text{В}} \neq 0$. Але це ще не означає, що коефіцієнт кореляції генеральної сукупності $r_{\Gamma} \neq 0$. Тому при рівні значущості α треба перевірити нульову гіпотезу H_0: $r_{\Gamma} = 0$.

Для перевірки гіпотези використовується випадкова величина

$$T = \frac{r\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}},$$

яка має розподіл Стьюдента з $k = n - 2$ степенями свободи.

Спостережене значення критерію $T_{\text{спост}} = \dfrac{r_B\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r_B^2}}$.

Критична область є двосторонньою з границями $\pm T_{\text{кр}}$, які знаходяться з таблиць для двосторонньої критичної області розподілу Стьюдента.

При $|T_{\text{спост}}| < T_{\text{кр}}$ нульова гіпотеза приймається, при $|T_{\text{спост}}| \geqslant T_{\text{кр}}$ – відхиляється.

Приклад. За вибіркою $n = 10$ з двовимірної нормальної генеральної сукупності (X, Y) знайдено $r_{\text{В}} = 0,57$. При рівні значущості $\alpha = 0,1$ перевірити нульову гіпотезу H_0: $r_{\Gamma} = 0$, при конкуруючій H_1: $r_{\Gamma} \neq 0$.

Розв'язання. Знайдемо спостережене значення критерію та критичні точки:

$T_{\text{спост}} = \dfrac{r_{\text{В}}\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r_{\text{В}}^2}} = \dfrac{0,57 \cdot \sqrt{8}}{\sqrt{1-0,57^2}} = 2$; $T_{\text{кр}}(0,1; 10-2) = 1,86$.

$|T_{\text{спост}}| \geqslant T_{\text{кр}}$ і H_0 відхиляється. Тобто кореляція між X і Y існує.

29 Рангова кореляція. Коефіцієнти кореляції Спірмена та Кендала, перевірка їх значимості

Визначення. Якісна ознака — ознака, яку неможливо точно виміряти, але яка дозволяє порівнювати об'єкти і розташовувати їх в порядку погіршення якості.

29.1 Правило ранжування

Нехай вибірка об'єму n містить незалежні об'єкти, що мають дві якісні ознаки A і B. Треба з'ясувати степінь зв'язку ознак між собою, тобто встановити наявність або відсутність рангової кореляції.

Розташуємо спочатку об'єкти в порядку погіршення якості за ознакою A. Припишемо об'єкту, що стоїть на i-му місці ранг, рівний порядковому номеру: $x_i = i$. Далі розташуємо об'єкти в порядку погіршення якості за ознакою B і припишемо кожному з них ранг y_i, де номер i дорівнює порядковому номеру об'єкта за ознакою A, а самè значення рангу дорівнює порядковому номеру об'єкта за ознакою B. Одержимо дві послідовності рангів

за ознакою A	$x_1, x_2, \ldots, x_n$
за ознакою B	$y_1, y_2, \ldots, y_n$

Наприклад, якщо $y_1 = 2$, то це означає, що даний об'єкт займає в ряду за ознакою A перше місце, а в ряду за ознакою B – друге.

Для оцінки степені зв'язку між ознаками A і B користуються коефіцієнтом рангової кореляції Спірмена

$\rho_B = 1 - \dfrac{6\sum d_i^2}{n^3 - n}$, $d_i = x_i - y_i$.

Властивості коефіцієнта рангової кореляції:

1) $-1 \leqslant \rho_{\text{В}} \leqslant 1$;

2) залежність між A і B тим менша, чим ближче ρ_B до нуля;

3) якщо $\rho_{\text{В}} = \pm 1$, то A і B пов'язані лінійною залежністю. При $\rho_{\text{В}} = -1$ погіршення якості за однією з ознак призводить до покращення якості за іншою (має місце «протилежна залежність»).

Перевірка гіпотези про значимість коефіцієнта кореляції Спірмена.

Для того, щоб при рівні значущості α перевірити нульову гіпотезу H_0: $\rho_{\Gamma} = 0$ про рівність нулю коефіцієнта рангової кореляції Спірмена генеральної сукупності ρ_{Γ} при конкуруючій гіпотезі H_1: $\rho_{\Gamma} \neq 0$ треба обчислити критичну точку

$$T_{\text{кр}} = t_{\text{кр}}(\alpha, k)\sqrt{\frac{1-\rho_B^2}{n-2}},$$

де n – об'єм вибірки, $t_{\text{кр}}(\alpha, k)$ — критична точка двосторонньої критичної області, яку знаходять за таблицею критичних точок розподілу Стьюдента за рівнем значущості α і числу степенів свободи $k = n - 2$.

При $|\rho_{\text{В}}| < T_{\text{кр}}$ нульова гіпотеза приймається, при $|\rho_{\text{В}}| \geqslant T_{\text{кр}}$ — відхиляється.

Приклад. Для двох ознак об'єктів знайти коефіцієнт рангової кореляції Спірмена та перевірити його значимість при рівні значущості $\alpha = 0,05$.

A	1	2	4	5	6
B	3	4	5	7	6

Розв'язання. Складаємо таблицю рангів та обчислюємо їх різниці.

Ранги за ознакою A	x_i	1	2	3	4	5
Ранги за ознакою B	y_i	2	1	3	4	5
Різниця рангів	d_i	-1	1	0	0	0
	d_i^2	1	1	0	0	0

Вибірковий коефіцієнт рангової кореляції Спірмена

$$\rho_B = 1 - \frac{6\sum d_i^2}{n^3 - n} = 1 - \frac{6 \cdot (1+1)}{5^3 - 5} = 0,9.$$

Критична точка розподілу Стьюдента $t_{\text{кр}}(0,05, 5-2) = t_{\text{кр}}(0,05,\ 3) = 3,18$.

$$T_{\text{кр}} = t_{\text{кр}}(0,05,\ 3)\sqrt{\frac{1-0,9^2}{5-2}} = 3,18 \cdot 0,25 = 0,8$$

$|\rho_{\text{В}}| > T_{\text{кр}}$ $(0,9 > 0,8)$. Таким чином H_0 відхиляється. Тобто кореляція між ознаками A і B об'єкта існує.

Припустимо, що праворуч від y_1 є R_1 рангів, більших за y_1, праворуч від y_2 є R_2 рангів, більших за $y_2, \ldots$. Для оцінки степені зв'язку між ознаками A і B також користуються коефіцієнтом рангової кореляції Кендала:

$$\tau_{\text{В}} = \frac{4R}{n \cdot (n-1)} - 1, \quad R = \sum R_i,$$

який має такі ж самі властивості, як і коефіцієнт кореляції Спірмена.

29.2 Перевірка гіпотези про значимість коефіцієнта кореляції Кендала

Для того, щоб при рівні значущості α перевірити нульову гіпотезу H_0: $\tau_{\Gamma} = 0$ про рівність нулю коефіцієнта рангової кореляції Кендала генеральної сукупності τ_{Γ} при конкуруючій гіпотезі H_1: $\tau_{\Gamma} \neq 0$ треба обчислити критичну точку

$$T_{\text{кр}} = z_{\text{кр}}\sqrt{\frac{2(2n+5)}{9n(n-1)}},$$

де n — об'єм вибірки, $z_{\text{ кр}}$ — критична точка двосторонньої критичної області, яку знаходять за таблицею функції Лапласа з рівняння $\Phi\left(z_{\text{кр}}\right) = \dfrac{1-\alpha}{2}$.

При $|\tau_{\text{В}}| < T_{\text{кр}}$. нульова гіпотеза приймається, при $|\tau_{\text{В}}| \geqslant T_{\text{кр}}$ — відхиляється.

Приклад. За даними рангів ознак об'єкту знайти коефіцієнт рангової кореляції Кендала та перевірити його значимість при рівні значущості $\alpha = 0,05$

x_i	1	2	3	4	5
y_i	2	1	3	4	5

Розв'язання.

R_i	3	3	2	1	0

$R = \sum R_i = 3 \ +3 \ +2 \ +1 \ = 9.$

$$\tau_{\text{В}} = \frac{4R}{n \cdot (n-1)} - 1 = \frac{4 \cdot 9}{5 \cdot 4} - 1 = 0,8.$$

Критичну точку $z_{\text{кр}}$ знайдемо з рівняння
$\Phi\left(z_{\text{кр}}\right) = \dfrac{1-\alpha}{2} = \dfrac{1-0,05}{2} = 0,475$. З таблиці функції Лапласа $z_{\text{кр}} \ = 1,96$.

$$T_{\text{кр}} = 1,96\sqrt{\frac{2 \cdot 15}{45 \cdot 4}} = 1,96 \cdot 0,41 = 0,8.$$

$|\tau_{\text{В}}| = T_{\text{кр}}$ $(0,8 = 0,8)$. Таким чином H_0 відхиляється. Тобто кореляція між ознаками A і B об'єкта існує.

Таблиця значень функції $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3653	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1093	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

Таблиця значень функції $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x e^{-z^2/2} \mathrm{d}z$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,0000	0,32	0,1255	0,64	0,2389	0,96	0,3315
0,01	0,0040	0,33	0,1293	0,65	0,2422	0,97	0,3340
0,02	0,0080	0,34	0,1331	0,66	0,2454	0,98	0,3365
0,03	0,0120	0,35	0,1368	0,67	0,2486	0,99	0,3389
0,04	0,0160	0,36	0,1406	0,68	0,2516	1,00	0,3413
0,05	0,0199	0,37	0,1443	0,69	0,2549	1,01	0,3438
0,06	0,0239	0,38	0,1480	0,70	0,2580	1,02	0,3461
0,07	0,0279	0,39	0,1517	0,71	0,2611	1,03	0,3485
0,08	0,0319	0,40	0,1554	0,72	0,2642	1,04	0,3508

0,09	0,0359	0,41	0,1591	0,73	0,2673	1,05	0,3531
0,10	0,0398	0,42	0,1628	0,74	0,2703	1,06	0,3554
0,11	0,0438	0,43	0,1664	0,75	0,2734	1,07	0,3577
0,12	0,0478	0,44	0,1700	0,76	0,2764	1,08	0,3599
0,13	0,0517	0,45	0,1736	0,77	0,2794	1,09	0,3621
0,14	0,0557	0,46	0,1772	0,78	0,2823	1,10	0,3643
0,15	0,0596	0,47	0,1808	0,79	0,2852	1,11	0,3665
0,16	0,0636	0,48	0,1844	0,80	0,2881	1,12	0,3686
0,17	0,0675	0,49	0,1879	0,81	0,2910	1,13	0,3708
0,18	0,0714	0,50	0,1915	0,82	0,2939	1,14	0,3729
0,19	0,0753	0,51	0,1950	0,83	0,2967	1,15	0,3749
0,20	0,0793	0,52	0,1985	0,84	0,2995	1,16	0,3770
0,21	0,0832	0,53	0,2019	0,85	0,3023	1,17	0,3790
0,22	0,0871	0,54	0,2054	0,86	0,3051	1,18	0,3810
0,23	0,0910	0,55	0,2088	0,87	0,3078	1,19	0,3830
0,24	0,0948	0,56	0,2123	0,88	0,3106	1,20	0,3849
0,25	0,0987	0,57	0,2157	0,89	0,3133	1,21	0,3869
0,26	0,1026	0,58	0,2190	0,90	0,3159	1,22	0,3883
0,27	0,1064	0,59	0,2224	0,91	0,3186	1,23	0,3907
0,28	0,1103	0,60	0,2257	0,92	0,3212	1,24	0,3925
0,29	0,1141	0,61	0,2291	0,93	0,3228	1,25	0,3944
0,30	0,1179	0,62	0,2324	0,94	0,3264	1,26	0,3962
0,31	0,1217	0,63	0,2357	0,95	0,3289	1,27	0,3980

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
1,28	0,3997	1,61	0,4463	1,94	0,4738	2,54	0,4945
1,29	0,4015	1,62	0,4474	1,95	0,4744	2,56	0,4948
1,30	0,4032	1,63	0,4484	1,96	0,4750	2,58	0,4951
1,31	0,4049	1,64	0,4495	1,97	0,4756	2,60	0,4953
1,32	0,4066	1,65	0,4505	1,98	0,4761	2,62	0,4956
1,33	0,4082	1,66	0,4515	1,99	0,4767	2,64	0,4959
1,34	0,4099	1,67	0,4525	2,00	0,4772	2,66	0,4961
1,35	0,4115	1,68	0,4535	2,02	0,4783	2,68	0,4963
1,36	0,4131	1,69	0,4545	2,04	0,4793	2,70	0,4965
1,37	0,4147	1,70	0,4554	2,06	0,4803	2,72	0,4967
1,38	0,4162	1,71	0,4564	2,08	0,4812	2,74	0,4969
1,39	0,4177	1,72	0,4573	2,10	0,4821	2,76	0,4971
1,40	0,4192	1,73	0,4582	2,12	0,4830	2,78	0,4973
1,41	0,4207	1,74	0,4591	2,14	0,4838	2,80	0,4974
1,43	0,4236	1,76	0,4608	2,18	0,4854	2,84	0,4977
1,44	0,4251	1,77	0,4616	2,20	0,4861	2,86	0,4979
1,45	0,4265	1,78	0,4625	2,22	0,4868	2,88	0,4980
1,46	0,4279	1,79	0,4633	2,24	0,4875	2,90	0,4981
1,47	0,4292	1,80	0,4641	2,26	0,4881	2,92	0,4982
1,48	0,4306	1,81	0,4649	2,28	0,4887	2,94	0,4984
1,49	0,4319	1,82	0,4656	2,30	0,4893	2,96	0,4985
1,50	0,4332	1,83	0,4664	2,32	0,4898	2,98	0,4986
1,51	0,4345	1,84	0,4671	2,34	0,4904	3,00	0,49865
1,52	0,4357	1,85	0,4678	2,36	0,4909	3,20	0,49931
1,53	0,4370	1,86	0,4686	2,38	0,4913	3,40	0,49966
1,54	0,4382	1,87	0,4693	2,40	0,4918	3,60	0,499841
1,55	0,4394	1,88	0,4699	2,42	0,4922	3,80	0,499928
1,56	0,4406	1,89	0,4706	2,44	0,4927	4,00	0,499968
1,57	0,4418	1,90	0,4713	2,46	0,4931	4,50	0,499997
1,58	0,4429	1,91	0,4719	2,48	0,4934	5,00	0,499997
1,59	0,4441	1,92	0,4726	2,50	0,4938		
1,60	0,4452	1,93	0,4732	2,52	0,4941		

Таблиця значень $t_\gamma = t(\gamma, n)$

n	γ			n	γ		
	$0,95$	$0,99$	$0,999$		$0,95$	$0,99$	$0,999$
5	$2,78$	$4,60$	$8,61$	20	$2,093$	$2,861$	$3,883$
6	$2,57$	$4,03$	$6,86$	25	$2,064$	$2,797$	$3,745$
7	$2,45$	$3,71$	$5,96$	30	$2,045$	$2,756$	$3,659$
8	$2,37$	$3,50$	$5,41$	35	$2,032$	$2,720$	$3,600$
9	$2,31$	$3,36$	$5,04$	40	$2,023$	$2,708$	$3,558$
10	$2,26$	$3,25$	$4,78$	45	$2,016$	$2,692$	$3,527$
11	$2,23$	$3,17$	$4,59$	50	$2,009$	$2,679$	$3,502$
12	$2,20$	$3,11$	$4,44$	60	$2,001$	$2,662$	$3,464$
13	$2,18$	$3,06$	$4,32$	70	$1,996$	$2,649$	$3,439$
14	$2,16$	$3,01$	$4,22$	80	$1,991$	$2,640$	$3,418$
15	$2,15$	$2,98$	$4,14$	90	$1,987$	$2,633$	$3,403$
16	$2,13$	$2,95$	$4,07$	100	$1,984$	$2,627$	$3,392$
17	$2,12$	$2,92$	$4,02$	120	$1,980$	$2,617$	$3,374$
18	$2,11$	$2,90$	$3,97$	∞	$1,960$	$2,576$	$3,291$
19	$2,10$	$2,88$	$3,92$				

Таблиця значень $q = q(\gamma, n)$

n	γ			n	γ		
	$0,95$	$0,99$	$0,999$		$0,95$	$0,99$	$0,999$
5	$1,37$	$2,67$	$5,64$	20	$0,37$	$0,58$	$0,88$
6	$1,09$	$2,01$	$3,88$	25	$0,32$	$0,49$	$0,73$
7	$0,92$	$1,62$	$2,98$	30	$0,28$	$0,43$	$0,63$
8	$0,80$	$1,38$	$2,42$	35	$0,26$	$0,38$	$0,56$
9	$0,71$	$1,20$	$2,06$	40	$0,24$	$0,35$	$0,50$
10	$0,65$	$1,08$	$1,80$	45	$0,22$	$0,32$	$0,46$
11	$0,59$	$0,98$	$1,60$	50	$0,21$	$0,30$	$0,43$
12	$0,55$	$0,90$	$1,45$	60	$0,188$	$0,269$	$0,38$
13	$0,52$	$0,83$	$1,33$	70	$0,174$	$0,245$	$0,34$
14	$0,48$	$0,78$	$1,23$	80	$0,161$	$0,226$	$0,31$
15	$0,46$	$0,73$	$1,15$	90	$0,151$	$0,211$	$0,29$
16	$0,44$	$0,70$	$1,07$	100	$0,143$	$0,198$	$0,27$
17	$0,42$	$0,66$	$1,01$	150	$0,115$	$0,160$	$0,211$
18	$0,40$	$0,63$	$0,96$	200	$0,099$	$0,136$	$0,185$
19	$0,39$	$0,60$	$0,92$	250	$0,089$	$0,120$	$0,162$

Критичні точки розподілу Стьюдента

Число степенів свободи k	Рівень значущості α (двобічна критична область)					
	$0,1$	$0,05$	$0,02$	$0,01$	$0,002$	$0,001$
1	$6,31$	$12,7$	$31,82$	$63,7$	$318,3$	$637,0$
2	$2,92$	$4,30$	$6,97$	$9,92$	$22,33$	$31,6$
3	$2,35$	$3,18$	$4,54$	$5,84$	$10,22$	$12,9$
4	$2,13$	$2,78$	$3,75$	$4,60$	$7,17$	$8,61$
5	$2,01$	$2,57$	$3,37$	$4,03$	$5,89$	$6,86$
6	$1,94$	$2,45$	$3,14$	$3,71$	$5,21$	$5,96$
7	$1,89$	$2,36$	$3,00$	$3,50$	$4,79$	$5,40$
8	$1,86$	$2,31$	$2,90$	$3,36$	$4,50$	$5,04$
9	$1,83$	$2,26$	$2,82$	$3,25$	$4,30$	$4,78$
10	$1,81$	$2,23$	$2,76$	$3,17$	$4,14$	$4,59$
11	$1,80$	$2,20$	$2,72$	$3,11$	$4,03$	$4,44$

12	$1,78$	$2,18$	$2,68$	$3,05$	$3,93$	$4,32$
13	$1,77$	$2,16$	$2,65$	$3,01$	$3,85$	$4,22$
14	$1,76$	$2,14$	$2,62$	$2,98$	$3,79$	$4,14$
15	$1,75$	$2,13$	$2,60$	$2,95$	$3,73$	$4,07$
16	$1,75$	$2,12$	$2,58$	$2,92$	$3,69$	$4,01$
17	$1,74$	$2,11$	$2,57$	$2,90$	$3,65$	$3,96$
18	$1,73$	$2,10$	$2,55$	$2,88$	$3,61$	$3,92$
19	$1,73$	$2,09$	$2,54$	$2,86$	$3,58$	$3,88$
20	$1,73$	$2,09$	$2,53$	$2,85$	$3,55$	$3,85$
21	$1,72$	$2,08$	$2,52$	$2,83$	$3,53$	$3,82$
22	$1,72$	$2,07$	$2,51$	$2,82$	$3,51$	$3,79$
23	$1,71$	$2,07$	$2,50$	$2,81$	$3,49$	$3,77$
24	$1,71$	$2,06$	$2,49$	$2,80$	$3,47$	$3,74$
25	$1,71$	$2,06$	$2,49$	$2,79$	$3,45$	$3,72$
26	$1,71$	$2,06$	$2,48$	$2,78$	$3,44$	$3,71$
27	$1,71$	$2,05$	$2,47$	$2,77$	$3,42$	$3,69$
28	$1,70$	$2,05$	$2,46$	$2,76$	$3,40$	$3,66$
29	$1,70$	$2,05$	$2,46$	$2,76$	$3,40$	$3,66$
30	$1,70$	$2,04$	$2,46$	$2,75$	$3,39$	$3,65$
40	$1,68$	$2,02$	$2,42$	$2,70$	$3,31$	$3,55$
60	$1,67$	$2,00$	$2,39$	$2,66$	$3,23$	$3,46$
120	$1,66$	$1,98$	$2,36$	$2,62$	$3,17$	$3,37$
∞	$1,64$	$1,96$	$2,33$	$2,58$	$3,09$	$3,37$
Число степенів свободи k	$0,05$	$0,025$	$0,01$	$0,005$	$0,001$	$0,0005$
	Рівень значущості α (однобічна критична область)					

Критичні точки розподілу χ^2

Число степенів свободи k	Рівень значущості α					
	$0,01$	$0,025$	$0,05$	$0,95$	$0,975$	$0,99$
1	$6,6$	$5,0$	$3,8$	$0,0039$	$0,00098$	$0,00016$
2	$9,2$	$7,4$	$6,0$	$0,103$	$0,051$	$0,020$
3	$11,3$	$9,4$	$7,8$	$0,352$	$0,216$	$0,115$
4	$13,3$	$11,1$	$9,5$	$0,711$	$0,484$	$0,297$
5	$15,1$	$12,8$	$11,1$	$1,15$	$0,831$	$0,554$
6	$16,8$	$14,4$	$12,6$	$1,64$	$1,24$	$0,872$
7	$18,5$	$16,0$	$14,1$	$2,17$	$1,69$	$1,24$
8	$20,1$	$17,5$	$15,5$	$2,73$	$2,18$	$1,65$
9	$21,7$	$19,0$	$16,9$	$3,33$	$2,70$	$2,09$
10	$23,2$	$20,5$	$18,3$	$3,94$	$3,25$	$2,56$
11	$24,7$	$21,9$	$19,7$	$4,57$	$3,82$	$3,05$
12	$26,2$	$23,3$	$21,0$	$5,23$	$4,40$	$3,57$
13	$27,7$	$24,7$	$22,4$	$5,89$	$5,01$	$4,11$
14	$29,1$	$26,1$	$23,7$	$6,57$	$5,63$	$4,66$
15	$30,6$	$27,5$	$25,0$	$7,26$	$6,26$	$5,23$
16	$32,0$	$28,8$	$26,3$	$7,96$	$6,91$	$5,81$
17	$33,4$	$30,2$	$27,6$	$8,67$	$7,56$	$6,41$
18	$34,8$	$31,5$	$28,9$	$9,39$	$8,23$	$7,01$
19	$36,2$	$32,9$	$30,1$	$10,1$	$8,91$	$7,63$
20	$37,6$	$34,2$	$31,4$	$10,9$	$9,59$	$8,26$
21	$38,9$	$35,5$	$32,7$	$11,6$	$10,3$	$8,90$
22	$40,3$	$36,8$	$33,9$	$12,3$	$11,0$	$9,54$
23	$41,6$	$38,1$	$35,2$	$13,1$	$11,7$	$10,2$
24	$43,0$	$39,4$	$36,4$	$13,8$	$12,4$	$10,9$
25	$44,3$	$40,6$	$37,7$	$14,6$	$13,1$	$11,5$
26	$45,6$	$41,9$	$38,9$	$15,4$	$13,8$	$12,2$
27	$47,0$	$43,2$	$40,1$	$16,2$	$14,6$	$12,9$
28	$48,3$	$44,5$	$41,3$	$16,9$	$15,3$	$13,6$
29	$49,6$	$45,7$	$42,6$	$17,7$	$16,0$	$14,3$

30	50,9	47,0	43,8	18,5	16,8	15,0

Критичні точки розподілу F Фішера-Снедекора (k_1 – число степенів свободи більшої дисперсії, k_2 – число степенів свободи меншої дисперсії)

Рівень значущості $\alpha = 0,01$												
k_2	k_1											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	4052	4999	5403	5625	5764	5889	5928	5981	6022	6056	6082	6106
2	98,49	99,01	99,17	99,25	99,30	99,33	99,34	99,36	99,38	99,40	99,41	99,42
3	34,12	30,81	29,46	28,71	28,24	27,91	27,67	27,49	27,34	27,23	27,13	27,05
4	21,20	18,00	16,69	15,98	15,52	15,21	14,98	14,80	14,66	14,54	14,45	14,37
5	16,26	13,27	12,06	11,39	10,97	10,67	10,45	10,27	10,15	10,05	9,96	9,89
6	13,74	10,92	9,78	9,15	8,75	8,47	8,26	8,10	7,98	7,87	7,79	7,72
7	12,25	9,55	8,45	7,85	7,46	7,19	7,00	6,84	6,71	6,62	6,54	6,47
8	11,26	8,65	7,59	7,01	6,63	6,37	6,19	6,03	5,91	5,82	5,74	5,67
9	10,56	8,02	6,99	6,42	6,06	5,80	5,62	5,47	5,35	5,26	5,18	5,11
10	10,04	7,56	6,55	5,99	5,64	5,39	5,21	5,06	4,95	4,85	4,78	4,71
11	9,86	7,20	6,22	5,67	5,32	5,07	4,88	4,74	4,63	4,54	4,46	4,40
12	9,33	6,93	5,95	5,41	5,06	4,82	4,65	4,50	4,39	4,30	4,22	4,16
13	9,07	6,70	5,74	5,20	4,86	4,62	4,44	4,30	4,19	4,10	4,02	3,96
14	8,86	6,51	5,56	5,03	4,69	4,46	4,28	4,14	4,03	3,94	3,86	3,80
15	8,68	6,36	5,42	4,89	4,56	4,32	4,14	4,00	3,89	3,80	3,73	3,67
16	8,53	6,23	5,29	4,77	4,44	4,20	4,03	3,89	3,78	3,69	3,61	3,55
17	8,40	6,11	5,18	4,67	4,34	4,10	3,93	3,79	3,68	3,59	3,52	3,45

Рівень значущості $\alpha = 0,05$												
k_2	k_1											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	161	200	216	225	230	234	237	239	241	242	243	244
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,36	19,37	19,38	19,39	19,40	19,41
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,88	8,84	8,81	8,78	8,76	8,74
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00	5,96	5,93	5,91
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,78	4,74	4,70	4,68
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10	4,06	4,03	4,00
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68	3,63	3,60	3,57
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39	3,34	3,31	3,28
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18	3,13	3,10	3,07
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02	2,97	2,94	2,91
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,95	2,90	2,86	2,82	2,79
12	4,75	3,88	3,49	3,26	3,11	3,00	2,92	2,85	2,80	2,76	2,72	2,69
13	4,67	3,80	3,41	3,18	3,02	2,92	2,84	2,77	2,72	2,67	2,63	2,60
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,77	2,70	2,65	2,60	2,56	2,53
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,70	2,64	2,59	2,55	2,51	2,48
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,66	2,59	2,54	2,49	2,45	2,42
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,62	2,55	2,50	2,45	2,41	2,38