МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Київський національний університет
будівництва та архітектури

С.К. Полянський
В.І. Лесько
Г.К. Чернега

РОЗРАХУНОК ПОКАЗНИКІВ НАДІЙНОСТІ МАШИН ЗА СТАТИСТИЧНИМИ ДАНИМИ

Рекомендовано науково-методичною радою Київського національного університету будівництва і архітектури як навчальний посібник для студентів, які навчаються за напрямом підготовки 6.010104 «Професійна освіта», 6.050502 «Інженерна механіка»

Київ 2010

УДК 629.017
ББК 34.41я73
П54

Рецензенти: Л.Є. Пелевін, д-р техн. наук, професор
Ю.Х. Савін, канд. техн. наук, доцент
А.С. Жерновий, канд. техн. наук, доцент

Рекомендовано науково-методичною радою Київського національного університету будівництва і архітектури як навчальний посібник, протокол № 8 від 25 червня 2008 року.

Полянський С.К., Лесько В.І., Чернега Г.К.

П54 Розрахунок показників надійності машин за статистичними даними: навчальний посібник / С.К. Полянський, В.І. Лесько, Г.К. Чернега. – К.: КНУБА, 2010. – 124 с.

У навчальному посібнику наведено короткі теоретичні відомості з теорії надійності та теорії імовірностей, запропоновано для використання в навчальному процесі методи та приклади розрахунку показників надійності машин на стадії експлуатації за статистичними даними.

Призначено для студентів всіх форм навчання. Навчальний посібник може бути корисний аспірантам, науковим працівникам та інженерам, які займаються дослідженням і розрахунками надійності машин.

УДК 629.017
ББК 34.41я73

ЗМІСТ

ВСТУП

Практичне використання теорії надійності, тобто набуття навичок оцінки показників надійності дорожньої та будівельної техніки, транспортних засобів (далі машин або об’єктів), є досить важливим компонентом у визначенні доцільності прийняття інженерних рішень з підтримання їх експлуатаційної надійності.

У процесі експлуатації та випробовувань машин на надійність накопичується значний статистичний матеріал з напрацювання машин та їх складових частин (далі об’єктів, елементів) до відмови, на відмову та строку служби (ресурсу). Отриманий статистичний матеріал може з більшою чи меншою імовірністю забезпечити справедливість того, що напрацювання до відмови чи на відмову описується тією чи іншою теоретичною моделлю відмов. Випадковий характер виникнення відмов дозволяє використовувати математичний апарат математичної статистики і теорії ймовірності.

Таким чином, для отримання необхідної інформації про надійність системи та її елементів потрібно провести в повному обсязі випробовування за умови і в режимах якомога ближчих до реальних умов експлуатації, а потім, використовуючи методи математичної статистики, обробити дані цих випробовувань.

Мета навчального посібника — викласти основні, найбільш часто вживані методи статистичної обробки інформації про надійність машин з використанням положень теорії надійності, математичної статистики та теорії ймовірностей. Для кращого розуміння викладеного матеріалу та вироблення практичних навичок з обробки статистичної інформації про надійність машин у дод. 4 наведено варіанти масивів невпорядженої інформації про надійність машин, які рекомендується використати для самостійного опрацювання.

1. ВЛАСТИВОСТІ НАДІЙНОСТІ

У теорії надійності розглядаються працездатний, непрацездатний, справний, несправний і граничний стани машини.

1. *Працездатний стан* – стан машини, при якому значення всіх параметрів, що характеризують здатність виконувати задані функції, відповідають вимогам нормативно-технічної та конструкторської документації. Працездатність не враховує вимоги, які не впливають на експлуатаційні показники, наприклад, дефекти фарбування і т. д.

2**.** *Непрацездатний стан* – стан машини, при якому значення хоча б одного з параметрів, що характеризують здатність виконувати задані функції, не відповідають вимогам нормативно-технічної та конструкторської документації.

3. *Справний стан* – стан машини, при якому вона відповідає всім вимогам нормативно-технічної та конструкторської документації.

Справний і працездатний стани не тотожні. Справний стан включає в себе працездатний стан. Справна машина обов'язково працездатна. Працездатна машина може бути несправною.

4. *Несправний стан* – стан машини, при якому вона не відповідає хоча б одній вимозі технічної документації. В несправному стані машина може бути працездатною, якщо невідповідність вимогам технічної документації не відноситься до функціональних параметрів, які визначають експлуатаційні показники машини та її працездатність, наприклад, незначні пошкодження кузова, дефекти фарбування і т. д.

5. *Граничний стан* – стан машини, при якому її подальше використання за призначенням або відновлення працездатного стану недопустимі чи недоцільні. Експлуатація машини, яка знаходиться в граничному стані, неможлива чи недоцільна, через неможливість убезпечення експлуатації чи ефективності. Використання машини за призначенням завжди супроводжується витратами її ресурсу та переходом у непрацездатний граничний

стан у результаті поступової відмови з причин старіння та зношування матеріалів. Машина може перейти в непрацездатний граничний стан у результаті миттєвої відмови у разі перевищення діючих навантажень над несучою здатністю конструкції.

Надійність будівельних машин є однією з найважливіших властивостей їхньої якості.

Надійність – це властивість об’єкта (системи машин, машини, агрегату, складової одиниці машини, деталей та інших виробів, що входять до складу машини) виконувати необхідні функції, зберігаючи в часі значення встановлених експлуатаційних показників у заданих межах, які відповідають заданим режимам і умовам використання, технічного обслуговування, ремонтів, транспортування та зберігання.

Надійність – це комплексна властивість, яка залежно від призначення об’єкта і умов його експлуатації може включати безвідмовність, довговічність, ремонтопридатність і збережність відокремлено чи поєднання цих властивостей як машини в цілому, так і її складових. Для конкретних об’єктів і умов їх експлуатації ці властивості можуть мати різну відносну значущість.

Безвідмовність – це властивість об’єкта безперервно зберігати працездатний стан протягом заданого (певного) часу чи заданого напрацювання. Визначальною особливістю властивості безвідмовності є неперервне збереження працездатності протягом заданого часу. Ця властивість особливо важлива для об’єктів, відмова в роботі яких пов’язана або з небезпекою для життя людей, або зі значними економічними витратами. Наприклад, безвідмовність має першочергове значення для пасажирських ліфтів, для вантажопідйомних кранів, які транспортують рідкий метал.

Довговічність – це властивість об’єкта зберігати працездатність до настання граничного стану при встановленій системі технічного обслуговування та ремонту. Для об’єктів, які не підлягають відновленню, поняття довговічності та безвідмовності практично збігаються. Ця властивість особливо важлива для об’єктів великої вартості, які мають значний термін морального старіння. До таких об'єктів можна віднести екскаватори зі значною місткістю ковша, гірничорудні комплекси, основу яких складають роторні екскаватори та ін.

Ремонтопридатність – це властивість об'єкта, яка полягає, в придатності до попередження та виявлення причин виникнення відмов, пошкоджень і усунення їх наслідків шляхом проведення технічного обслуговування та ремонтів. Ремонтопридатність закладається в процесі розробки об'єкта вибором раціональної конструкції, забезпечується при виготовленні об'єкта дотриманням технології виробництва та підтримується під час його експлуатації оптимальною системою обслуговування і ремонту. Ремонтопридатність визначається експлуатаційною та ремонтною технологічністю об'єкта, тобто придатністю об'єкта до зручного і швидкого виконання окремих технологічних операцій під час технічного обслуговування, контролю технічного стану, ремонту розбирання та збирання вузлів і деталей об'єкта, їх контролю та заміні. Ремонтопридатність визначається доступністю, контролепридатністю, агрегатуванням, легким зняттям, взаємозамінністю, стандартизацією, уніфікацією, змащуваністю та ін.

Багато елементів будівельних і дорожніх машин мають високу ремонтопридатність за рахунок застосування агрегатування, наприклад, двигуни внутрішнього згоряння, агрегати гідроприводу, коробки передач та ін.

Збережність – це властивість об'єкта зберігати безвідмовність, довговічність і ремонтопридатність протягом та після зберігання і транспортування.

Збережність визначається умовами зберігання і транспортування, а також заходами, прийнятими для захисту його від шкідливих впливів зовнішньої температури, вологості повітря, пилу, сонячної радіації, вібрації і т. д. Найбільш ефективні методи підвищення збережності – консервація, застосування спеціальних захисних покриттів, просочувальних розчинів, профілактичне обслуговування об'єктів, що зберігаються, та ін.

Всі розглянуті стани об'єкта і їх властивості залежать від багатьох факторів (причин). Неможливо враховувати вплив на ці властивості всіх факторів, оскільки закони їхньої дії невідомі, а кількість їх дуже велика. Тому неможливо завчасно та з великою точністю передбачити, які будуть властивості конкретного об'єкта. Показники, які оцінюють ці властивості носять випадковий характер.

2. МАТЕМАТИЧНІ ТА ФІЗИЧНІ ОСНОВИ ТЕОРІЇ НАДІЙНОСТІ МАШИН

2.1. Випадкові події та величини

Подія – будь-яке явище, що при здійсненні певної сукупності умов може здійснитись або не здійснитись.

Ймовірністю події називається числова міра ступеня об'єктивної можливості цієї події. Ймовірність події A позначається $P(A)$. Природні події можна поділити на три види: достовірні, неможливі і випадкові.

Випадковою називається подія, яка при здійсненні певної сукупності умов може здійснитись або не здійснитись. Ймовірність випадкової події A знаходиться в межах між нулем і одиницею $0 < P(A) < 1$.

Кожна випадкова подія є наслідком дії багатьох випадкових факторів. Неможливо врахувати вплив на подію всіх цих факторів, оскільки закони їх дії невідомі, а кількість їх значна. Тому неможливо завчасно передбачити здійсниться та чи інша подія. Однак масові однорідні випадкові події: незалежно від їх конкретної природи, при виконанні одних і тих самих умов підпорядковуються імовірнісним закономірностям. Імовірнісні закономірності масових однорідних випадкових подій дозволяють передбачати частоту їх появи при здійсненні певної сукупності умов.

У теорії надійності машин розглядаються такі масові однорідні випадкові події: пошкодження, відмова, відновлення, ремонт.

Пошкодження – подія, яка полягає в порушенні справного стану об’єкта при збереженні працездатного стану.

Відмова – подія, яка полягає в порушенні працездатного стану об’єкта.

У непрацездатному стані функціональні параметри об’єкта виходять за допустимі межі й об’єкт нездатний виконувати хоча б одну із заданих функцій. Наприклад, у разі виходу з ладу двигуна повністю втрачається його працездатність і він переходить у непрацездатний стан – це відмова. Відмова – це окремий випадок пошкодження. Виникнення відмови обов’язково пов’язано з появою функціонального дефекту. Існує багато таких нефункціональних дефектів, за яких об’єкт може продовжувати виконувати свої функції. Ці дефекти не вимагають прийняття термінових заходів і можуть бути усунені під час появи першої перерви в роботі чи при черговому ремонті.

Відновлення – це процес пошуку й усунення функціональних дефектів для відновлення працездатного стану об’єкта. Процес усунення дефектів об’єкта включає заміну деталей, вузлів і агрегатів, очищення, промивання, продування, регулювання, підтяжку та ін.

Випадкова подія, яка полягає в переході об’єкта з непрацездатного стану в працездатний у результаті усунення функціональних дефектів, також позначається терміном "*відновлення*".

Ремонт – це комплекс операцій щодо встановлення справного чи працездатного стану об’єкта і встановлення ресурсів об’єкта і його складових. Ремонт включає всі роботи з усунення функціональних і нефункціональних дефектів.

Випадкова подія, яка полягає в переході об’єкта з несправного стану в справний у результаті усунення будь-яких дефектів, також позначається терміном: "*ремонт*".

Раптові та поступові відмови з часом призводять до переходу об'єкта з працездатного стану в непрацездатний граничний стан. Цей перехід може здійснюватися або миттєво, або поступово залежно від причин, які його викликають у результаті раптової чи поступової відмови.

Раптова відмова виникає у разі перевищення діючих навантажень несучої знатності конструкції чи в результаті похибок розрахунків і конструювання, чи внаслідок наявності прихованих дефектів виготовлення, чи в результаті порушення правил експлуатації. Раптова відмова, як правило, пов'язана з поломками деталей, появою залишкових деформацій, втратою стійкості, заїданням або розплавленням.

Поступова відмова настає при повному використанні ресурсу об'єкта внаслідок природного старіння чи зношування матеріалу об'єкта. Більшість деталей підйомно-транспортних, будівельних та інших подібних машин переходять в непрацездатний граничний стан у результаті поступової відмови. Поступової відмови не можна запобігти забезпеченням виконання правил експлуатації. Покращання чи погіршення умов експлуатації може лише уповільнити чи прискорити появу поступової відмови. Повне виключення поступових відмов можливе лише профілактичною заміною елементів, близьких до граничного стану. Профілактична заміна елементів є важливим засобом підвищення надійності об'єктів.

Причинами раптових і поступових відмов є крихке руйнування, пластична деформація, повзучість, втома матеріалів, зношування, корозія металів, старіння матеріалів.

Крихке руйнування деталей відбувається у разі виникнення значних ударних навантажень під час роботи за умови низьких температур (сталі з добавками фосфору, азоту), значних залишкових напружень, наприклад, у зварних з'єднаннях, наявності місцевих дефектів у матеріалі, значній концентрації напружень, дії факторів, які не пов'язані з механічними напруженнями (теплова та радіаційна крихкість). Крихке руйнування є причиною виходу з ладу зварних з’єднань, чавунних відливок, фасонних деталей з об’ємною термообробкою до високої твердості і т. д.

Пластична деформація виникає при перевантаженнях деталей з в’язких (пластичних) матеріалів, до яких, наприклад, відносяться незагартовані та високовідпущені сталі. Внаслідок пластичної деформації змінюється геометрія форми деталей (викривлення осей і валів, осадка пружин, вм’ятини на поверхнях кочення бандажів, рейок, доріжок кочення кульок підшипників шпонок, шліців і т. д.).

Повзучість – повільна та неперервна пластична деформація деталей, яка виникає при тривалій дії напружень вище межі пружності, нагріві до температур рекристалізації.

Втома матеріалів – процес зміни субструктури, мікроструктури та макроструктури матеріалу під тривалою дією циклічно змінюваних у часі механічних напружень і деформацій, які супроводжуються зміною механічних і фізичних властивостей. Найбільше практичне значення має втомлене погіршення механічних властивостей матеріалу. Втома матеріалу суттєво залежить від багатьох факторів, до яких відносяться: масштабний фактор (абсолютні розміри поперечного перерізу), фактори навантаження (вид напруженого стану, концентрація напружень, залишкові напруження, які залежать від умов виготовлення деталі, частота навантаження, історія навантаження), стан поверхневого шару (хімічній склад, механічні властивості, якість обробки поверхні), експлуатаційні фактори (навколишнє середовище, температура, корозія).

Знос (спрацювання) є результатом зношування. Зношуванням називається процес зміни розмірів, форми, маси чи стану поверхні деталі внаслідок руйнування мікрооб’ємів поверхневого шару деталі під час тертя. Розрізняють механічне, молекулярно-механічне, корозійно-механічне та інші види зношування.

Випадкова величина – величина, яка може прийняти будь-яке невідоме завчасно можливе значення, що залежить від випадкових факторів, які не можуть бути враховані. Випадкові величини можуть бути дискретними та неперервними.

Дискретною (перервною) називається випадкова величина, яка приймає відокремлені одне від одного можливі значення, що можна перенумерувати, тобто записати у вигляді послідовності $t_1, t_2, ..., t_n$. Кількість можливих значень дискретної випадкової величини може бути кінцевою або нескінченною. Дискретними випадковими величинами в теорії надійності є: кількість невідновлених об'єктів, що відновили в заданому інтервалі часу; кількість відмов відновлюваного об'єкта, в заданому інтервалі часу; кількість об'єктів, відновлених у заданому інтервалі часу.

Неперервною називається випадкова величина, можливі значення якої безперервно заповнюють певний кінцевий або нескінченний проміжок. Число можливих значень безперервної випадкової величини, очевидно, нескінченне. Неперервними випадковими величинами в теорії надійності є: напрацювання, ресурс, строк служби, час відновлення, строк зберігання.

Напрацювання – тривалість або обсяг роботи об'єкта. Напрацювання може вимірюватись в одиницях часу, маси, довжини, площі, об'єма, в циклах і т. д. Наприклад, напрацювання вантажопідйомного крана – в тонах вантажу, напрацювання автомобільної шини – в кілометрах пробігу, напрацювання екскаватора – в кубометрах ґрунту, напрацювання реле – в циклах вмикання, напрацювання двигуна – в годинах роботи і т. д.

Напрацювання може бути добовим, місячним, до першої відмови, між відмовами, до граничного стану і т. д. У процесі роботи об'єкта з перервами враховується сумарне напрацювання. У разі експлуатації об'єкта в різних режимах навантажень кожний їхній рівень враховується окремо. Напрацювання не слід плутати з календарною тривалістю експлуатації. Напрацювання – це узагальнене поняття для тривалості чи обсягу роботи об'єкта, яке дозволяє застосувати одні й ті самі математичні методи до об'єктів різного виду та призначення.

Ресурс – напрацювання об'єкта від початку його експлуатації чи її поновлення після ремонту певного виду до переходу в граничний стан. Ресурс об'єкта є випадковою величиною, зміну якої викликають багато приблизно рівнозначних за дією технологічних і експлуатаційних факторів: відхилення розмірів об'єкта, відхилення механічних характеристик об'єкта, відхилення макро- та мікроструктури матеріалу об'єкта, відхилення режимів термообробки, зміну механічних, теплових та інших навантажень, зміну атмосферних умов, зміну абразивного середовища на поверхнях тертя, зміну умов змащення і т. д.

Ресурс є основним показником довговічності деталей, вузлів і агрегатів машин. Розрізняють: ресурс середній, медіанний, гамма-процентний, до першого капітального ремонту, міжремонтний, сумарний, назначений.

Строк служби – календарна тривалість від початку експлуатації об'єкта чи її поновлення після ремонту певного виду до переходу в граничний стан. Строк служби також є випадковою величиною, оскільки назначається ресурсом об'єкта і часом, протягом якого об'єкт не працює та який також є випадковою величиною. Строк служби – основний показник довговічності машин. Розрізняють: строк служби середній, медіанний, гамма-процентний, до першого капітального ремонту, міжремонтний, до морального старіння, до граничного стану.

Час поновлення працездатного стану – це тривалість поновлення працездатного стану об'єкта. Час поновлення об'єкта – випадкова величина, оскільки кожна складова цього часу є випадковою величиною.

Строк зберігання – календарна тривалість зберігання та (або) транспортування об'єкта, протягом і після якої зберігаються значення показників безвідмовності, довговічності та ремонто-придатності в заданих межах. Строк зберігання також є випадковою величиною, оскільки його визначають багато змінних в часі факторів: умови зберігання, захист від шкідливих зовнішніх впливів, захист від корозії, стійкість до старіння матеріалів і т. д.

2.2. Розподіл випадкових величин і його основні імовірнісні характеристики

Об’єкт у процесі зберігання та експлуатації може знаходитись у працездатному чи в непрацездатному стані. Час перебування об’єкта в будь-якому з цих станів є неперервною випадковою величиною.

Математичний опис випадкових величин у теорії надійності здійснюється методами теорії ймовірностей і математичної статистики. Універсальною імовірнісною характеристикою випадкової величини є закон її розподілу.

Використовуються також числові характеристики випадкової величини, які відображають найбільш суттєві особливості її розподілу.

Статистична оцінка одиничних показників (характеризують будь-яку одну властивість) безвідмовності та довговічності проводиться на основі моделі експлуатації (випробування) невідновлювальних об’єктів.

Модель експлуатації невідновлювальних об’єктів використовується для визначення імовірнісних характеристик ресурсу та строку служби, а також напрацювання до першої відмови. Статистичну інформацію про відмови отримують зі спостережень за експлуатацією чи випробуваннями в заданих умовах N однакових об’єктів. Кожний об’єкт працює від початку його експлуатації до першої відмови та після відмови не відновлюється і не замінюється працездатними. Випробування вважаються закінченими після відмови всіх об’єктів. При цьому визначаються напрацювання кожного об’єкта від початку його експлуатації до першої відмови та записуються у вигляді варіаційного ряду, тобто:

$$t_1 < t_2 < ... < t_i < ... < t_n .$$

У цій моделі експлуатації випадковою подією є відмова об’єкта, а випадковою величиною – ресурс, напрацювання об’єкта від початку експлуатації до переходу в граничний стан. Випадкові події будуть повністю описані з позицій імовірності, якщо задати розподіл імовірностей відповідних їм випадкових величин.

Законом розподілу ймовірностей випадкових величин називається будь-яке співвідношення, що встановлює зв'язок між можливими значеннями випадкової величини та відповідними їм імовірностями. Закон розподілу має різні форми: інтегральна та диференціальна функції розподілу.

Інтегральною функцією розподілу ймовірностей випадкових величин T називається функція $F(t)$ (рис. 2.1), що визначає для кожного значення аргументу t ймовірність події $T < t$, яка полягає в тому, що випадкова величина T приймає значення, менше t, тобто, $F(t) = P(T < t)$. Геометрично це означає, що $F(t)$ – ймовірність того, що випадкова величина T прийме значення, яке зображується на числовій осі точкою, розміщеною лівіше точки t.

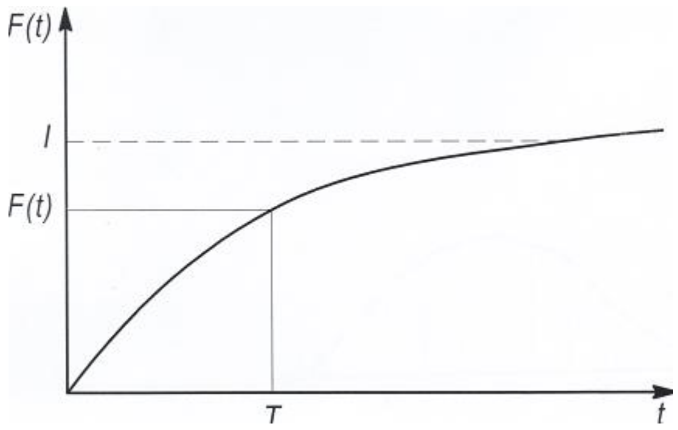


Рис. 2.1. Графік інтегральної функції розподілу

Інтегральна функція $F(t)$ як будь-яка ймовірність – безрозмірна величина. Вона повністю характеризує випадкову величину з імовірнісної точки зору.

Доповнення інтегральної функції розподілу ймовірностей випадкової величини T визначає ймовірність протилежної події $T > t$. Це функція $P(t)$ (рис. 2.2), що визначає для кожного значення аргументу ймовірність події $T > t$, яка полягає в тому, що випадкова величина T приймає значення, більше t, тобто $T > t$.

$$P(t) = P(T > t). \tag{2.1}$$

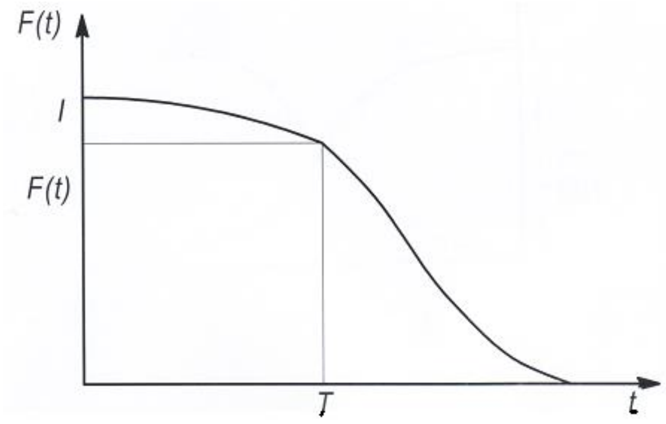


Рис. 2.2. Графік доповнення інтегральної функції розподілу

Геометрично це означає, що $P(t)$ – ймовірність, випадкова величина T якої прийме значення, що зображується на числовій осі точкою, розміщеною правіше точки t. Події $T < t$ і $T > t$ (наприклад, відмова та відсутність відмови об’єкта) — випадкові несумісні протилежні події, які утворюють повну групу. Сума ймовірностей подій, які утворюють повну групу, дорівнює одиниці, тобто:

$$F(t) + P(t) = 1. \qquad (2.2)$$

Інтегральна функція розподілу та її доповнення в теорії надійності характеризують різні випадкові величини: час роботи об’єкта до відмови, ресурс і строк служби об’єкта, час відновлення працездатності об’єкта, строк збереження об’єкта. *У теорії надійності інтегральна функція розподілу є тотожною функції імовірності відмови об’єкта і часто позначається як Q(t), а доповнення інтегральної функції розподілу імовірностей $P(t)$ використовується для визначення імовірності безвідмовної роботи об’єкта в інтервалі часу t. Їх іноді називають відповідно моделями відмови та моделями надійності.*

Імовірність відмови об’єкта – це функція $F(t)$, що визначає для кожного значення часу t ймовірність події $T < t$, яка полягає в тому, що час T роботи до відмови прийме значення, менше t, тобто $F(t) = P(T < t)$. Функція $P(T < t)$ – інтегральна функція розподілу ймовірностей часу роботи об’єкта до відмови, що визначає ймовірність виникнення відмови в інтервалі часу t.

Ймовірність $F^*(t)$ відмови може бути визначена за статистичною інформацією такою залежністю

$$F^*(t)=\frac{n(t)}{N(0)}=\frac{n(0)-N(t)}{N(0)}=1-\frac{N(t)}{N(0)}=1-P^*(t), \qquad (2.3)$$

де $n(t)$ – число об’єктів, які відмовили за час t; $N(t)$ – число працездатних об’єктів до моменту часу t; $N(0)$ – число об’єктів на початку випробувань, t = 0; $P^*(t)$ – імовірність безвідмовної роботи, яка визначена за статистичною інформацією.

Імовірність безвідмовної роботи – це функція $P(t)$, що визначає для кожного моменту t ймовірність події $T > t$, яка полягає в тому, що час T роботи об’єкта до відмови прийме значення більше t, тобто:

$$P(t)=P(T>t)=1-F(t). \qquad (2.4)$$

Ймовірність $P^*(t)$ безвідмовної роботи за статистичною інформацією визначається залежністю:

$$P^*(t)=\frac{N(t)}{N(0)}=\frac{N(0)-n(t)}{N(0)}=1-\frac{n(t)}{N(0)}=1-F^*(t). \qquad (2.5)$$

Диференціальна функція розподілу ймовірностей випадкової величини – перша похідна від інтегральної функції розподілу (рис. 2.3)

$$f(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{F(t+\Delta t)-F(t)}{\Delta t}=\frac{dF(t)}{dt}=\frac{dP(t)}{dt}, \qquad (2.6)$$

де Δt – інтервал часу.

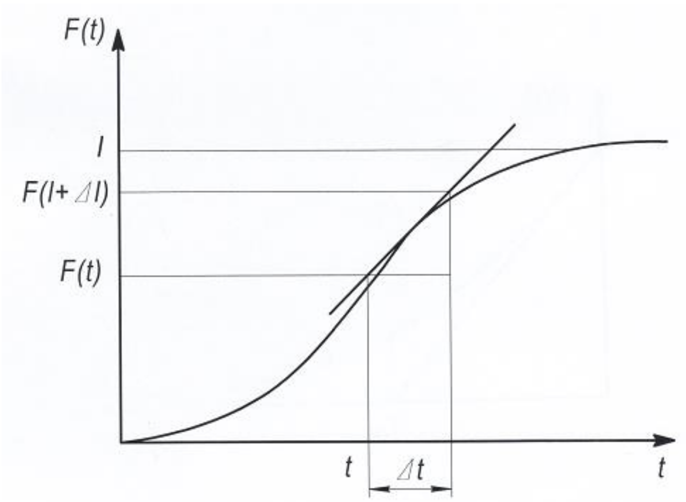


Рис. 2.3. Графік визначення диференціальної функції розподілу

Геометрично диференціальна функція визначає тангенс кута між віссю абсцис і дотичною до інтегральної функції в даній точці.

Цю функцію називають "густиною чи щільністю розподілу" або "густиною (щільністю) ймовірностей", тому що диференціальна функція характеризує густину, з якою розподіляються значення випадкової величини в даній точці.

Диференціальна функція визначає ймовірність появи подій в одиницю часу, тобто це – частота появи подій (частота відмов та ін.).

Густина розподілу часу роботи об’єкта до відмови (частота відмов) за статистичною інформацією:

$$f^*(t) = \frac{n(t+\Delta t) - n(t)}{N(0)\Delta t} = \frac{n(\Delta t)}{N(0)\Delta t}, \qquad (2.7)$$

де Δt – інтервал часу від t до $t+\Delta t$; $n(\Delta t)$ – число об’єктів, що відмовили в інтервалі Δt; $n(t)$ – число об’єктів, що відмовили за час t; $N(0) = N(t) + n(t)$ – число об’єктів на початку випробувань.

Графік диференціальної функції розподілу ймовірностей випадкової величини, побудований за статистичною інформацією, називається *гістограмою* (рис. 2.4).

Ймовірність попадання неперервної випадкової величини в заданий інтервал (a,b) (рис.2.5) визначається залежністю:

$$P(a \le t \le t) = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b dF = F(b) - F(a). \qquad (2.8)$$

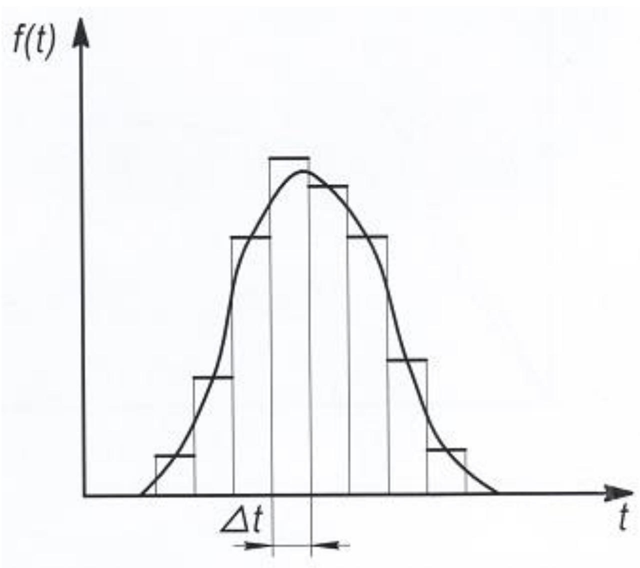


Рис. 2.4. Гістограма

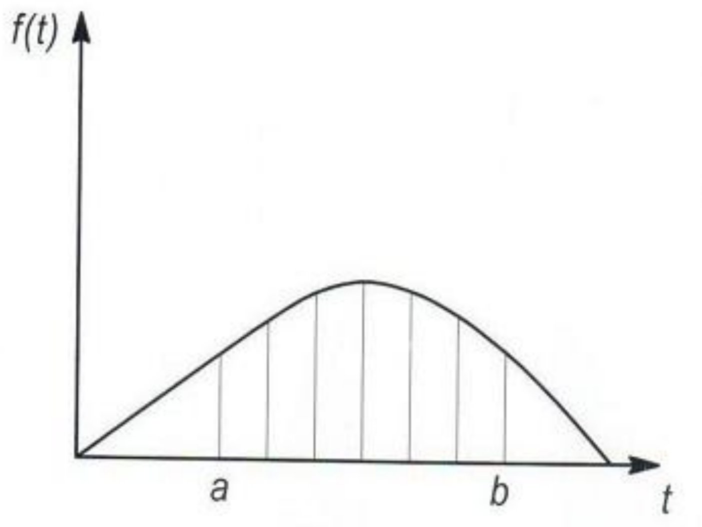


Рис. 2.5. Інтервал розподілу

Геометричний зміст імовірності попадання неперервної випадкової величини T в інтервал (a,b) визначається площею криволінійної трапеції, що обмежена віссю абсцис, графіком диференціальної функції $f(t)$ та прямими $t=a$ і $t=b$ (рис. 2.5).

Властивості диференціальної функції:

1) $f(t)\geq 0$, оскільки похідна неспадної функції не від'ємна;

2) $\int\limits_{-\infty}^{t} f(t)dt=1$, у межах області існування всіх можливих значень випадкової величини від a до b.

За диференціальною функцією може бути визначена інтегральна функція розподілу:

$$F(t)=\int\limits_{-\infty}^{t} f(t)dt. \tag{2.9}$$

Геометрично інтерпретація функції $F(t)$ дорівнює площі криволінійної трапеції (рис. 2.6).

Доповнення інтегральної функції розподілу визначається виразом:

$$P(t)=1-F(t)=1-\int\limits_{-\infty}^{t} f(t)dt=\int\limits_{-\infty}^{t} f(t)dt+\int\limits_{t}^{\infty} f(t)dt-\int\limits_{-\infty}^{t} f(t)dt=\int\limits_{t}^{\infty} f(t)dt. \tag{2.10}$$

Геометрично функція $P(t)$ дорівнює площі криволінійної трапеції (рис. 2.7).

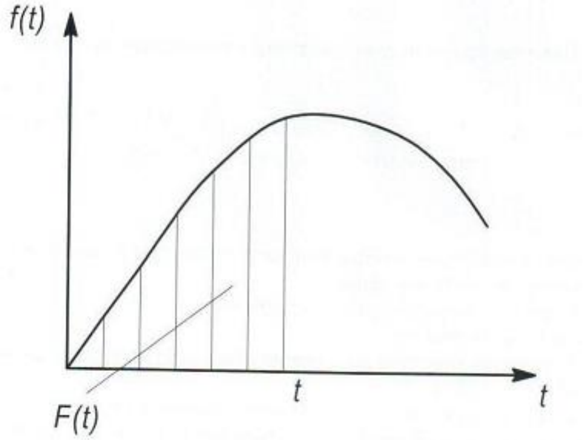


Рис. 2.6. Геометрична інтерпретація функції $F(t)$

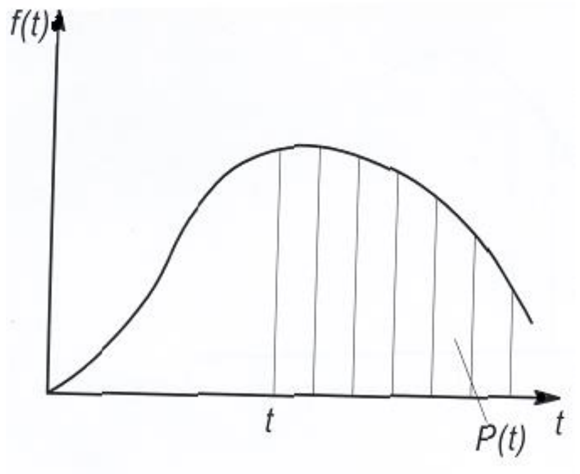


Рис. 2.7. Геометрична інтерпретація функції $P(t)$

Інтенсивність подій (відмов та ін.) – це функція $\lambda(t)$, що визначає ймовірність появи події в одиницю часу в момент t за умови, що подія не з'явилась до моменту t.

$$\lambda(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{F_t(\Delta t)}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1-P_t(\Delta t)}{\Delta t}, \tag{2.11}$$

де $F_t(\Delta t)$ – ймовірність появи події на інтервалі Δt за умови, що подія не з'явилась до моменту t.

Згідно з теоремою множення ймовірностей маємо $P(t+\Delta t)=P(t)\cdot P_t(\Delta t)$. Тоді

$$P_t(\Delta t)=\frac{P(t+\Delta t)}{P(t)}. \tag{2.12}$$

Підставивши вираз (2.12) в залежність (2.11), будемо мати:

$$\lambda(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1 - \dfrac{P(t+\Delta t)}{P(t)}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P(t) - P(t+\Delta t)}{\Delta t} = -\frac{1}{P(t)} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P(t+\Delta t) - P(t)}{\Delta t} = \tag{2.13}$$

$$= -\frac{1}{P(t)} - \frac{dP(t)}{dt}.$$

Оскільки $\dfrac{dP(t)}{dt} = -\dfrac{dF(t)}{dt} = -f(t)$,

тоді $$\lambda(t) = +\frac{f(t)}{P(t)}. \tag{2.14}$$

Інтенсивність відмов за статистичною інформацією може бути визначена такого залежністю:

$$\lambda^*(t) = \frac{n(t+\Delta t) - n(t)}{N(t)\Delta t} = \frac{n(\Delta t)}{N(t)\Delta t}, \tag{2.15}$$

де Δt – інтервал часу; $n(\Delta t)$ – кількість об’єктів, які відмовили в інтервалі Δt; $N(t)$ – кількість працездатних об’єктів в момент часу t.

Залежність $\lambda^*(t)$ можна отримати на основі залежності $\lambda(t)$:

$$f(t) = \frac{F(t+\Delta t) - F(t)}{\Delta t} = \frac{n(t+\Delta t) - n(t)}{N_0 \Delta t} = \frac{n(\Delta t)}{N_{(0)}\Delta t}; \tag{2.16}$$

$$P(t) = \frac{N(t)}{N(0)};\ \lambda(t) = \frac{f(t)}{P(t)} = \frac{n(\Delta t) \cdot N(0)}{N(0) \cdot \Delta t \cdot N(t)}. \tag{2.17}$$

Тоді маємо $\lambda(t) = \dfrac{n(\Delta t)}{N(t) \cdot \Delta t}$.

Визначимо ймовірність появи подій через їх інтенсивність. Для цього використаємо вираз (2.13) і отримаємо:

$$\lambda(t) = 1 - \frac{1}{P(t)} \cdot \frac{dP(t)}{dt};\ -\lambda(t)dt = \frac{dP(t)}{P(t)}. \tag{2.18}$$

Проінтегруємо цей вираз

$$-\int_0^t \lambda(t)dt = \int_0^t \frac{dP(t)}{P(t)} = \ln P(t) - \ln P(0) = \ln P(t). \tag{2.19}$$

Звідки $P(t) = \exp\left[-\int_0^t \lambda(t)dt\right]$. Якщо $\lambda = \mathrm{const}$,

то $$P(t) = e^{\lambda t}. \tag{2.20}$$

2.3. Числові характеристики випадкових величин

При вирішенні більшості практичних задач надійності немає необхідності знати всі можливі значення імовірнісної величини та відповідні їм імовірності, а зручніше використовувати деякі кількісні показники, які дають достатньо інформації про випадкову величину. Такі показники відображають найбільш суттєві особливості статистичного розподілу та називаються числовими характеристиками випадкової величини. Основні числові характеристики, які вивчаються та часто використовуються в математичній статистиці та теорії надійності, – математичне сподівання (середнє значення випадкової величини), медіана, мода, дисперсія або середнє квадратичне відхилення, початкові та центральні моменти третього та четвертого порядків, коефіцієнти асиметрії й ексцесу, коефіцієнт варіації.

Цілком достатніми для використання в практичних розрахунках є обчислення найважливіших статистичних характеристик – середнього статистичного $\bar{t}$, статистичної дисперсії D і середньоквадратичного відхилення σ, які визначають основні особливості статистичного ряду, що аналізується, – центр групування і ступінь розсіювання випадкових величин відносно центра.

Математичне сподівання (*середнє значення*) випадкової величини T на інтервалі (a,b) визначається інтегралом

$$T_{\text{ср}} = (T) = \int_a^b t \cdot f(t)dt. \qquad (2.21)$$

Виразимо його через доповнення інтегральної функції розподілу

$$T_{\text{ср}} = \int_a^b t \cdot f(t)dt = \int_a^b t \cdot \left(-\frac{dP(t)}{dt}\right)dt = -\int_a^b tdP(t) = -tP(t)\Big|_a^b + \int_a^b P(t)dt =$$

$$= -bP(b) + aP(a) + \int_a^b P(t)dt = a + \int_a^b P(t)dt.$$

Для випадку, коли $a = 0$ будемо мати:

$$T_{\text{ср}} = \int_0^b t \cdot f(t) dt = \int_0^b P(t) dt, \tag{2.22}$$

тобто математичне сподівання невід'ємної випадкової величини на інтервалі (a,b) дорівнює площі під графіком доповнення інтегральної функції розподілу випадкової величини (рис. 2.8).

Середнє значення вибірки напрацювання об'єкта до відмови за статистичною інформацією визначається залежністю

$$T_{\text{ср}}^* = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} t_i, \tag{2.23}$$

де t_i – напрацювання об'єкта до відмови i-го об'єкта; N – кількість об'єктів.

У деяких випадках використовують такі характеристики, як мода та медіана, початкові та центральні моменти.

Модою випадкової величини називається її найбільш імовірне значення, тобто це значення дискретної випадкової величини L, яке відповідає найбільшій ординаті кривої розподілу випадкової величини.

Медіана – це середнє значення емпіричної сукупності, відносно якої сукупність поділяється на дві рівні частини. В разі симетрії розподілу медіана збігається з модою і математичним сподіванням.

Крім характеристик положення, визначається також ряд характеристик, кожна з яких описує ту чи іншу властивість розподілу. В якості таких характеристик найчастіше використовують так звані *моменти.* У теорії імовірностей для опису основних властивостей розподілу випадкової величини використовують початкові та центральні моменти.

Перший початковий момент – це математичне сподівання випадкової величини, а *початковий момент S порядку* випадкової величини (наприклад, t) називається математичне сподівання S степеня цієї випадкової величини.

Центральним моментом S порядку випадкової величини називається математичне сподівання *S* степеня відповідної *центрованої* випадкової величини.

Центрована випадкова величина – це відхилення випадкової величини від її математичного сподівання. Центральний момент *першого порядку* дорівнює нулю.

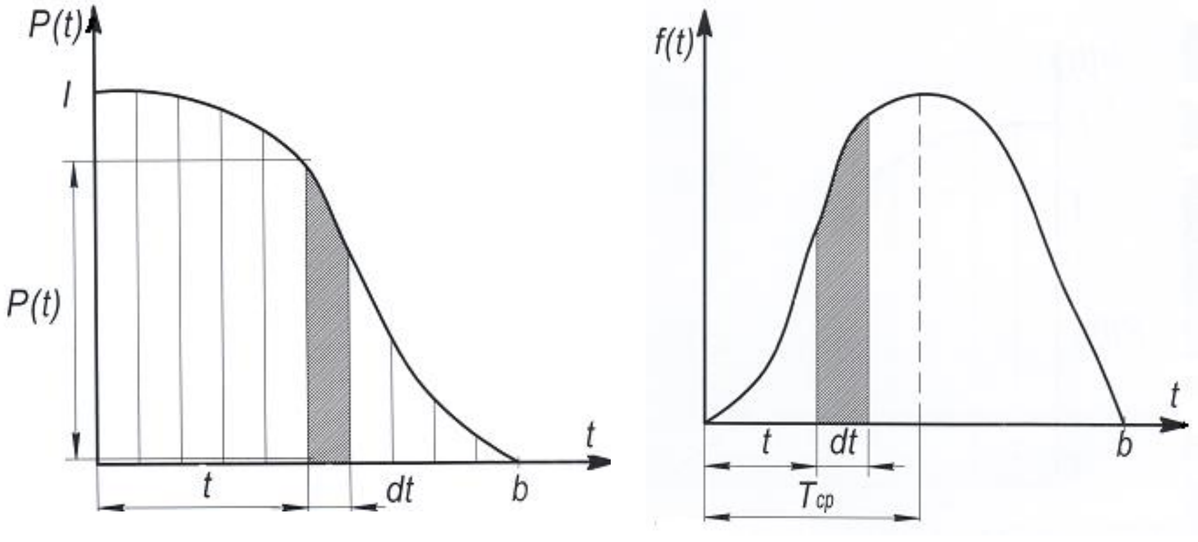
Другий центральний момент, або, ще як його прийнято називати – *дисперсія,* використовується як характеристика розсіювання випадкової величини навколо середнього значення.

Третій і четвертий центральні моменти використовуються відповідно для характеристик асиметрії (скошеності) функції щільності (кривої) розподілу і так званої „*крутості*" (гостровершинності чи плосковершинності) кривої розподілу.

При малій кількості даних ($N \leq 10$) використовують як міру розсіювання *розмах (R):*

$$R = l_{\max} - l_{\min} .$$

Розсіювання випадкової величини біля її математичного сподівання оцінюється за допомогою дисперсії, середньоквадратичного відхилення (СКВ) та коефіцієнта варіації.



а *б*

Рис. 2.8. Визначення середнього значення через: $a - P(t)$; $б - f(t)$

Дисперсія визначається за таким співвідношенням

$$D_t = \left(T - T_{\text{ср}}\right)^2_{\text{ср}} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(t - T_{\text{ср}}\right)^2 f(t)dt. \qquad (2.24)$$

За статистичною інформацією, коли кількість об'єктів більше 25, наближено дисперсія може бути визначена за залежністю

$$D_t^* = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(t_i - T_{\text{ср}}^*\right)^2. \qquad (2.25)$$

Механічною інтерпретацією дисперсії є момент інерції заданого розподілу мас відносно центра мас (математичного сподівання).

Дисперсія має розмірність квадрата випадкової величини, яким не завжди зручно оцінювати відхилення. Тому використовується *середнє квадратичне відхилення*

$$S_t = \sqrt{D_t}. \qquad (2.26)$$

Коефіцієнт варіації характеризує відносне розсіювання випадкової величини і має вигляд

$$V_t = \frac{S_t}{T_{\text{ср}}}. \qquad (2.27)$$

Для отримання більш повної характеристики вибірки можна використовувати значення *коефіцієнта асиметрії A*, характеризуючого "скошеність" функції щільності розподілу $f(t)$ випадкових величин, тобто відхилення кривої розподілення від симетричної та *коефіцієнт ексцесу E,* який є показником "гостровершинності" емпіричного розподілу.

Коеффіцієнт асиметрії A й ексцесу E визначають відповідно за формулами:

$$A = \frac{1}{N} D^{3/2} \sum_{j=1}^{N}\left(t_j - \bar{t}\right)^3 = \frac{M_3}{M_2^{3/2}} = \frac{M_3}{\sigma^3}; \qquad (2.28)$$

$$E = 1/ND^2 \sum_{j=1}^{N}(t_j - t)^4 = M_4 / M_2^2 - 3 = M_4 / \sigma^4 - 3, \qquad (2.29)$$

де M_2, M_3, M_4 – центральний момент відповідно другого, третього та четвертого порядків, які розраховуємо за формулами:

$$M_3 = 1/N\sum_{j=1}^{N}(t_j - \bar{t})^3; \tag{2.30}$$

$$M_4 = 1/N\sum_{j=1}^{N}(t_j - \bar{t})^4. \tag{2.31}$$

Знаючи коефіцієнти A і E, можна зробити припущення про зовнішній вигляд кривої розподілу. Якщо A=0, крива $f(t)$ симетрична відносно середнього значення (нормальний розподіл), якщо $A > 0$, крива розподілення має правосторонню (додатну) асиметрію, а якщо $A < 0$ – лівосторонню (від'ємну) асиметрію.

При значенні коефіцієнта ексцесу $E < 0$ крива розподілу більш полога (менш гостровершинна), а при $E > 0$ – крива розподілу більш гостровершинна, ніж при нормальному закону розподілу, при якому $E = 0$, тобто вираз $M_4 / \sigma^4 = 3$.

Гамма-процентне значення випадкової величини – це значення t_γ випадкової величини T, яке відповідає заданій ймовірності $P(t_\gamma) = \gamma\%/100$ того, що випадкова величина T приймає значення, більше t_γ,

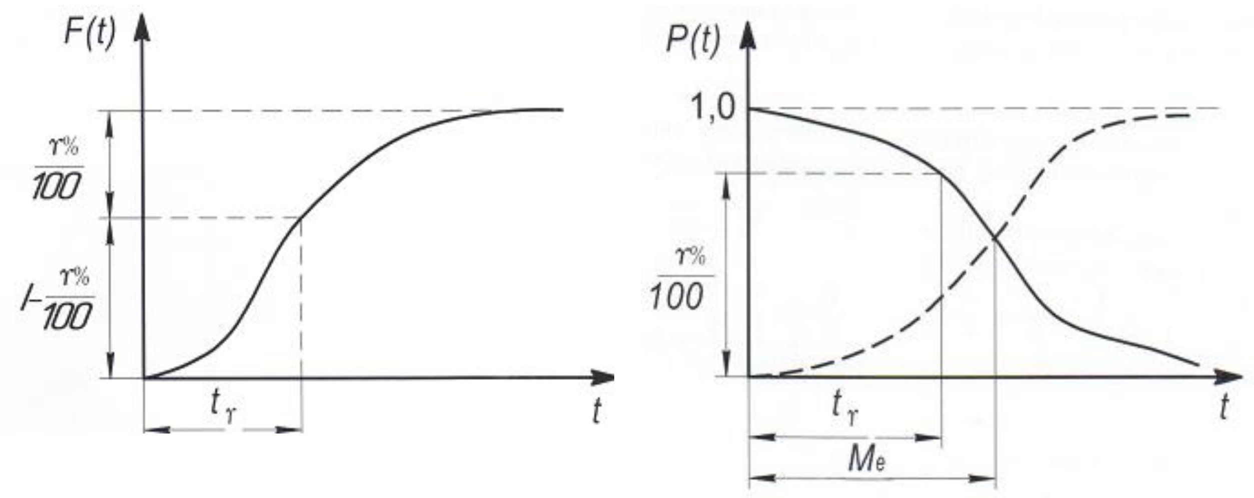
$$P(t_\gamma) = \gamma\%/100 = P(T > t_\gamma) = \int_{T_\gamma}^{\infty} f(t)dt. \tag{2.32}$$

Гамма-процентне значення випадкової величини є квантилем ймовірності

$$F(t_\gamma) = 1 - P(t_\gamma) = 1 - \gamma\%/100. \tag{2.33}$$

У теорії надійності гамма-процентним називається ресурс, строк служби, строк зберігання, який має ймовірність $\gamma\%$ і більше.

Гамма-процентний ресурс характеризує довговічність при вибраному рівні $\gamma\%/100$ ймовірності керування. Він назначається з урахуванням значущості об'єкта. Так, для підшипників кочення вибирають 90% ресурс. Гамма-процентний ресурс може бути визначений через інтегральну функцію розподілу та її доповнення (рис. 2.9).



а *б*

Рис. 2.9. Визначення t_γ: *а* – через $F(t)$; *б* – через $P(t)$

Медіана випадкової величини відповідає $\gamma = 50\%$. Для медіани $M_e(t)$ (рис. 2.9, *б*)

$$P[T > M_e(t)] = P[T < M_e(t)].$$

Геометрично медіана є абсцисою точки перетину інтегральної функції розподілу та її доповнення (рис. 2.9, *б*).

Між показниками надійності існує функціональний зв'язок. Знаючи одну з функцій $F(t), P(t), f(t), \gamma(t)$, можна визначити всі показники надійності.

3. ТЕОРЕТИЧНІ ЗАКОНИ РОЗПОДІЛУ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН

3.1. Експоненціальний закон розподілу

Експоненціальний розподіл визначається одним параметром λ – інтенсивністю подій (відмов, відновлення працездатності та ін.).

Інтенсивністю подій називається середня кількість подій, що з'явилися в одиницю часу. При $\lambda = \text{const}$ час появи подій має експоненціальний розподіл. Час появи раптових відмов має також експоненціальний розподіл.

Доповнення інтегральної функції експоненціального розподілу ймовірностей випадкових величин показано на рис. 3.1 і визначається залежністю

$$P(t) = \exp(-\lambda t) = \exp\left(-t/T_{\text{ср}}\right), \tag{3.1}$$

де $\lambda = 1/T_{\text{ср}}$ – параметр розподілу; $T_{\text{ср}}$ – середнє значення (математичне сподівання) випадкової величини T.

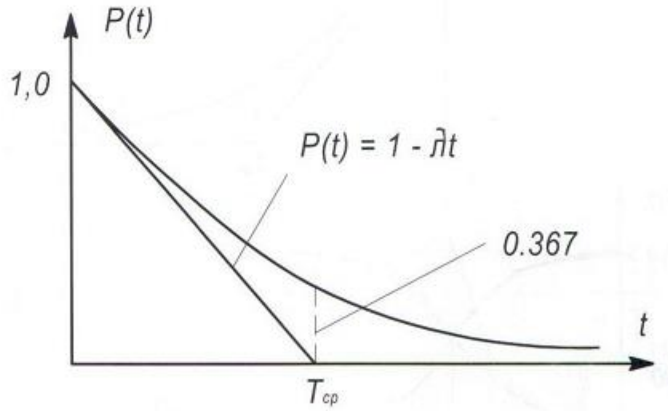


Рис. 3.1. Експоненціальний розподіл доповнення інтегральної функції

Інтегральна функція експоненціального розподілу ймовірностей випадкової величини показана на рис. 3.2 і математично описується співвідношенням

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t} = 1 - e^{-t/T_{\text{ср}}}. \tag{3.2}$$

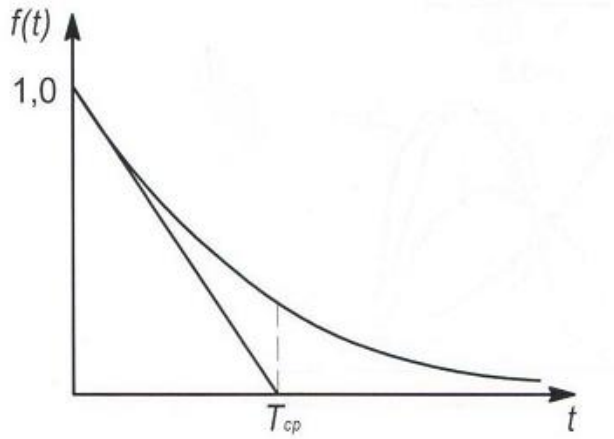


Рис. 3.2. Інтегральна функція

Диференціальна функція розподілу ймовірностей випадкової величини наведена на рис. 3.3 і визначається залежністю:

$$f(t)=\lambda e^{-\lambda t}=\frac{-1}{T_{\text{ср}}}e^{-t/T_{\text{ср}}}. \tag{3.3}$$

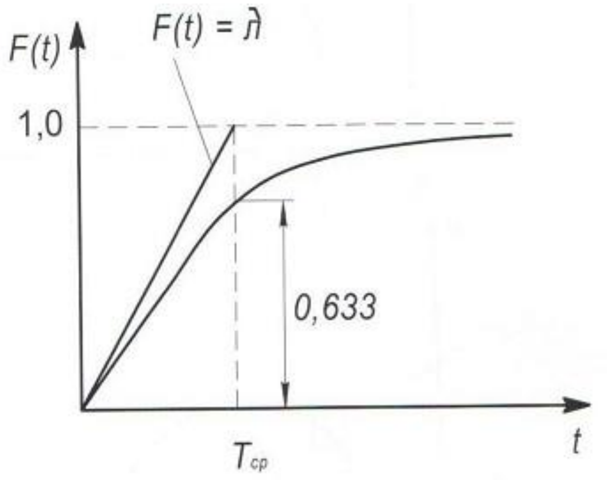


Рис. 3.3. Диференціальна функція

Інтенсивність подій (відмов):

$$\lambda(t)=\frac{f(t)}{P(t)}=\frac{\lambda e^{-\lambda t}}{e^{-t/T_{\text{ср}}}}=\lambda=\frac{1}{T_{\text{ср}}}, \tag{3.4}$$

де $\lambda=\text{const}$ тільки при експоненціальному розподілі випадкової величини.

Середнє значення (математичне сподівання) випадкової величини

$$\begin{aligned}T_{\text{ср}}&=\int_0^\infty tf(t)dt=\int_0^\infty t\lambda e^{-\lambda t}dt=\lambda\int_0^\infty te^{-\lambda t}dt=\lambda\left[-t\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda t}\Big|_0^\infty+\int_0^\infty\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda t}dt\right]=-te^{-\lambda t}\Big|_0^\infty+\\&+\int_0^\infty e^{-\lambda t}dt=-te^{-\lambda t}\Big|_0^\infty-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda t}\Big|_0^\infty=-\infty\cdot e^{-\infty}+0\cdot e^{-0}-\frac{1}{\lambda}e^{-\infty}+\frac{1}{\lambda}e^{-0}=\frac{1}{\lambda};\end{aligned} \tag{3.5}$$

$$\lim_{t\to\infty}te^{-\lambda t}=\lim_{t\to\infty}\frac{t}{e^{\lambda t}}=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{\lambda e^{\lambda t}}=0.$$

Ймовірність появи події на інтервалі Δt не залежить від довжини t попереднього інтервалу часу, на якому подія не з’явилась, а залежить тільки від довжини інтервалу Δt при заданій інтенсивності подій.

Ймовірність відсутності події

$$P(t+\Delta t)=e^{-\lambda(t+\Delta t)}=e^{-\lambda t-\lambda\Delta t}=e^{-\lambda t}\cdot e^{-\lambda\Delta t};$$

$$P(t) = e^{-\lambda t};\ P(\Delta t) = e^{-\lambda \Delta t}; P(t+\Delta t) = P(t) \cdot P(\Delta t).$$

Умовна ймовірність $P_t(\Delta t)$ відсутності події на інтервалі $(t,\ t+\Delta t)$ за умови, що подія на інтервалі $(0,\ t)$ не з’явилась.

$$P(t+\Delta t) = P(t) \cdot P_t(\Delta t);$$

$$P_t(\Delta t) = \frac{P(t+\Delta t)}{P(t)} = \frac{e^{-\lambda t} \cdot e^{-\lambda \Delta t}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda \Delta t}.$$

Умовна ймовірність дорівнює безумовній ймовірності

$$P_t(\Delta t) = P(\Delta t) = e^{-\lambda \Delta t}.$$

Лінеаризація експоненціальної функції дозволяє спростити розрахунки безвідмовності високонадійних об’єктів $(P(t) > 0{,}9)$.

Лінеаризація – це заміна нелінійної функції лінійною на деякому інтервалі. Зазвичай при лінеаризації нелінійну функцію замінюють дотичною до неї в бажаній точці. Для цього функцію розкладають за формулою Тейлора і відкидають нелінійні члени. В даному випадну функцію можна розкласти за формулою Тейлора, коли абсциса точки, в околі якої розкладаємо функцію, дорівнює нулю

$$P(t) = P(0) + \frac{P'(0)}{1!}t + \frac{P''(0)}{2!}t^2 + ... + \frac{P^n(0)}{n!}t^n + \frac{P^{(n+1)}(\xi t)}{(n+1)!}t^{n+1},$$

де $0 < \xi < 1$.

Для експоненціального закону розподілу $P(t) = e^{-\lambda t}$ формула Тейлора має вигляд:

$$P(t) = 1 - \lambda t + \frac{\lambda^2}{2!}t^2 - \frac{\lambda^3}{3!}t^3 + ... + (-1)^n \frac{\lambda^n}{n!}t^n.$$

Відкидаючи нелінійні члени, отримаємо

$$P(t) = e^{-\lambda t} \approx 1 - \lambda t;\ F(t) = 1 - e^{-\lambda t} \approx \lambda t.$$

Експоненціальний закон розподілу добре описує розподіл випадкових величин домінуючого (визначального) фактора. Так, експоненціальному закону розподілу підпорядковується розподіл напрацювання на раптову відмову.

Застосування експоненціального закону розподілу різко спрощує усі розрахунки, особливо при аналізі надійності складних систем. Однак, про можливість застосування цього закону для оцінки надійності механічних систем існує багато думок. Справа в тому, що цей закон уперше був використаний в радіоелектроніці, де на імовірність відмови впливають тільки раптові відмови (при цьому $\lambda = \text{const}$).

Дійсно, якщо $P(t) \to 1$ вираз $\lambda(t) = \dfrac{f(t)}{P(t)}$ перетвориться на $\lambda(t) = f(t)$. Тому для $\lambda(t) = f(t)$ можна говорити і про експоненціальний закон, і про закон рівної імовірності.

Якщо проаналізувати поведінку «хвостів» різних законів щільності імовірностей $f(t)$ в області малих значень $F(t)$ (порядку 0,001 і нижче), то всі вони дають однаковий результат з достатньою для практики точністю. Тому можна вважати допустимим і виправданим застосування експоненціального закону для розрахунку надійності систем з високими вимогами безвідмовності для будь-якої схеми відмов (для раптових або поступових).

Однак, слід завжди мати на увазі, що поширення цього правила на області з великими значеннями t » T може призвести до грубих помилок і неправильних висновків.

Для високонадійних систем, таких як, наприклад, авіаційна та космічна техніка і, деякою мірою, для гальмових систем машин, значення $P(t)$ = 0,99...0,9999 і вище. Тому імовірність відмови $F(t) = 1 - P(t)$, яка характеризується площею $F(t) = \int_0^t f(t)dt$, дуже мала. У випадку застосування нормального закону розподілу використовується лише ділянка кривої центра групування (математичного сподівання).

У цій області закони розподілу втрачають свою індивідуальність і набувають загальних рис, характерних для рідкісних подій. Так, у даній області інтенсивність відмов $\lambda(t)$ будь-якого закону розподілу та густина його розподілу $f(t)$ практично не відрізняються одна від одної.

Загальний висновок, який можна зробити про застосування експоненціального закону розподілу для сучасних машин такий.

Експоненціальний закон – це констатація, статика явищ. Його застосування допустиме та виправдане при розрахунку надійності систем, що вже мають високу безвідмовність. Закон не можна застосовувати для випадків прогнозування поведінки цих систем при підвищенні ресурсу та для оцінки тих заходів, які будуть потрібні для підвищення надійності їх у межах, що виходять за значення прийнятого ресурсу.

Некритичне відношення до використання різноманітних методів і закономірностей математичної теорії надійності може призвести до недооцінки їхніх можливостей, а в окремих випадках до дискредитації математичного апарату.

3.2. Нормальний закон розподілу

Закон нормального розподілу має виключно важливе значення та займає серед інших особливе положення як такий, що найчастіше застосовується на практиці. Крім того, він є граничним законом, до якого наближаються інші закони за типових умов.

Нормальний розподіл виникає тоді, коли відхилення випадкової величини створюють багато приблизно рівнозначних за дією незалежних між собою факторів, кожний з яких має вплив на випадкову величину.

Відхилення ΔT випадкової величини можна показати як суму відхилень

$$\Delta T = \Delta t_1 + \Delta t_2 + ... + \Delta t_n .$$

Задовільне наближення до нормального розподілу одержимо, якщо число доданків близьке до 10. Однак, якщо один з доданків має значно більший вплив на суму ніж інші, то цей доданок визначає, в основному, розподіл суми.

Нормальний розподіл добре описує ресурс і строк служби об’єктів при зношенні, навантаження в машинах, механічні властивості матеріалів (границю міцності, границю текучості, границю витривалості), несучу здатність деталей машин.

Диференціальну функцію (густину розподілу ймовірностей) нормального розподілу неперервних випадкових величин у загальному випадку можна записати так:

$$f(t) = \frac{1}{\sigma_t \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{\left(t - T_{\text{ср}}\right)^2}{2\sigma_t^2} \right], \tag{3.6}$$

де $T_{\text{ср}}$ – математичне сподівання випадкової величини *T*; σ_t – середньоквадратичне відхилення випадкової величини *T*; *t* – випадкова величина.

Нормальний розподіл визначається двома параметрами: $T_{\text{ср}}$, σ_t. Крива розподілу за нормальним законом має симетричний горбоподібний вигляд (рис. 3.4). Максимальна ордината кривої, що дорівнює $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$ відповідає точці ($t = T_{\text{ср}}$).

Математичне сподівання $T_{\text{ср}}$ за нормальним законом розподілу є центром асиметрії розсіювання випадкової величини *t*. Якщо змінити положення $T_{\text{ср}}$ по осі абсцис праворуч або ліворуч, крива розподілу буде також зміщатися праворуч або ліворуч не змінюючи своєї форми, тобто центр розсіювання характеризує положення кривої на осі 0*t*.

Параметр розподілу σ є характеристикою найбільшої ординати кривої. При збільшенні σ максимальна ордината під кривою розподілу зменшується, і навпаки. Оскільки площа під кривою розподілу завжди дорівнює одиниці, то при збільшенні σ крива розподілу стає більш плоскою, розтягуючись вздовж осі абсцис (розсіювання збільшується), а при зменшенні крива розподілу витягується (розсіювання зменшується). Розмірність σ збігається з розмірністю випадкової величини *t*.

Випадкова величина, що підпорядковується нормальному розподілу, має такі основні властивості:

- функція визначена на всій осі t: $-\infty \le t \le \infty$;
- $f(t) \ge 0$;
- вісь t є горизонтальною асимптотою графіка функції;

- графік функції симетричний відносно осі $t = T_{\text{ср}}$;
- однакові за значеннями додатні та від'ємні відхилення від середнього значення $T_{\text{ср}}$ є рівнозміщеними;
- менші відхилення ймовірніші, ніж більші;
- досить великі відхилення від $T_{\text{ср}}$ дуже малоймовірні;
- при $t = T_{\text{ср}}$ значення функції досягає максимуму.

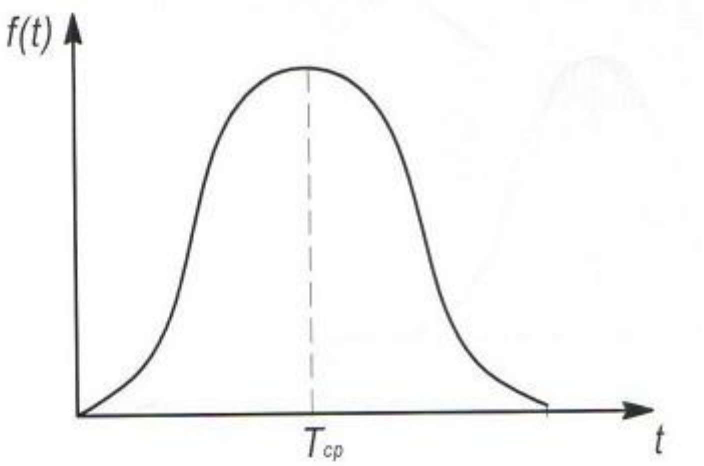


Рис. 3.4. Диференціальна функція нормального розподілу

При використанні нормального закону розподілу на практиці застосовують правило *трьох сигм (середньоквадратичних відхилень (СКВ))*: якщо випадкова величина розподілена нормально, то абсолютна величина її відхилення від математичного сподівання не перевищує трьох середньоквадратичних відхилень (СКВ). Ймовірність того, що абсолютна величина відхилення перевищує $3\sigma_t$ дорівнює 0,0027 = 0,27%, тобто майже все розсіювання нормально розподіленої випадкової величини з імовірністю приблизно 97% уміщується в інтервалі $T_{\text{ср}} \pm 3\ \sigma_t$. Правило трьох СКВ дозволяє орієнтовано визначити інтервал практично можливих значень випадкової величини за відомим математичним сподіванням і середньоквадратичним відхиленням.

Інтегральну функцію нормального розподілу загалом можна подати так:

$$F(l) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(l-a)^2}{2\sigma^2}} dl. \qquad (3.7)$$

Крім того, існує нормований нормальний розподіл (рис. 3.5) з параметрами $a = 0$ і $\sigma = 1$.

Щільність нормованого нормального розподілу:

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}, \qquad (3.8)$$

де $z = \dfrac{l-a}{\sigma}$.

Ця функція є табульованою. Інтегральна функція нормованого нормального розподілу виглядає таким чином:

$$F_0(z) = \frac{1}{\sqrt{2\sigma}} \int_0^l e^{-\frac{z^2}{2}} dz. \qquad (3.9)$$

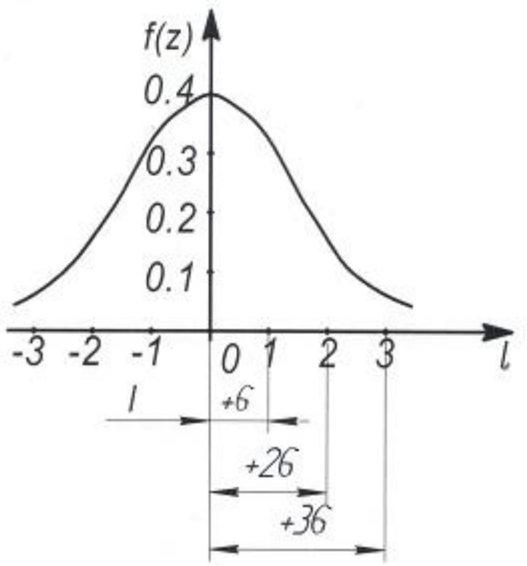


Рис. 3.5. Графік нормованої функції нормального розподілу

Імовірність попадання нормованої випадкової величини t в інтервалі (0, t) знаходять, користуючись функцією Лапласа ($F(t) = \Phi(z)$):

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-\frac{z^2}{2}} dz. \qquad (3.10)$$

Тоді:

$$P(t) = \int_0^t f(t)dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t e^{\frac{z^2}{2}} dz = \Phi(z). \qquad (3.11)$$

Враховуючи, що $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 1$, а також беручи до уваги симетричність *f(t)* відносно нуля, для якої вираз $\int_{-\infty}^{0} f(t)dt = 0{,}5$, отримаємо $P(-\infty < t < 0) = 0{,}5$.

Таким чином,

$$F_0(t) = 0{,}5 + \Phi(z). \qquad (3.12)$$

Значення функції *Ф(z)* визначається за таблицею дод. 1.

Графічно інтерпретацію функції Лапласа показано на рис. 3.6.

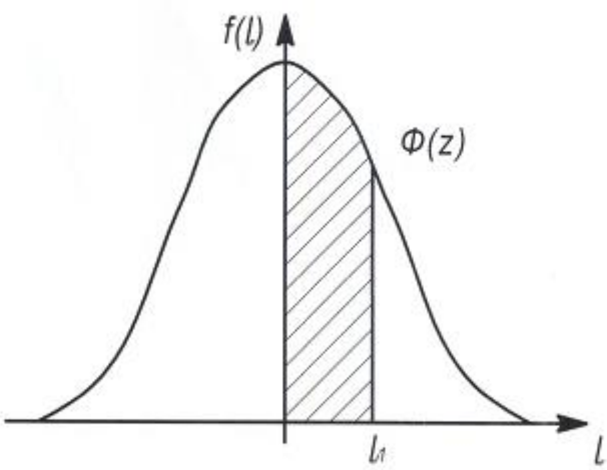


Рис. 3.6. Графічна інтерпретація функції Лапласа

За функцією розподілу, задаючись значенням випадкової величини, за допомогою функції Лапласа, зазвичай, визначають імовірність того, що значення випадкової величини *T* при випробуваннях виявиться меншим за значення *t* або перебуватиме в певному інтервалі.

Для розв'язання зворотної задачі визначення значення випадкової величини *t* для заданого рівня імовірності *P*, який позначають α, використовують квантиль нормального розподілу, що дає змогу визначити значення *t* при заданому рівні імовірності [$\alpha = F_0(t)$]:

$$t_\alpha = Z_\alpha \sigma + a \qquad (3.13)$$

де Z_α – квантиль нормального розподілу; α – довірча імовірність α = 0,8; 0,9; 0,95; 0,99 і т.д.

На рис. 3.7 показано графічну інтерпретацію квантиля нормального розподілу.

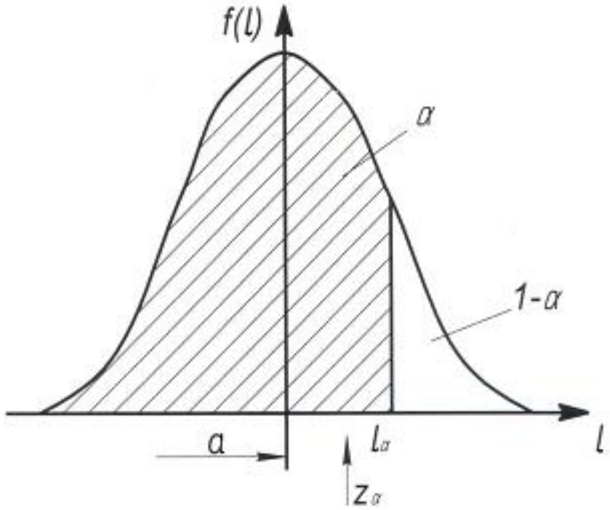


Рис. 3.7. Графічна інтерпретація квантиля нормального розподілу

Використовуючи квантиль нормального розподілу, знаходять область, у яку потрапляє випадкова величина із заданим рівнем імовірності α або із заданим рівнем значимості 1 - α.

Закон нормального розподілу використовують для визначення характеристик розсіювання:

– міжремонтних і повних ресурсів і термінів служби машин, агрегатів та складальних одиниць;
– часу та вартості відновлення працездатності машин та їх елементів;
– часу напрацювання на поступову відмову.

Інтенсивність події за нормального розподілу випадкових величин визначається залежністю:

$$\lambda(t) = \frac{f(z)}{P(t)} = \frac{f(t)}{1 - F(t)} = \frac{1}{\sigma_t} \frac{f_0\left(\frac{t - T_{\text{ср}}}{\sigma_t}\right)}{1 - F_0\left(\frac{t - T_{\text{ср}}}{\sigma_t}\right)} = \frac{1}{\sigma} \lambda_0\left(\frac{t - T_{\text{ср}}}{\sigma_t}\right) = \frac{1}{\sigma_t} \lambda_0(z),$$

де $\lambda_0(z)$ – функція інтенсивності подій нормованого нормального розподілу, для якого є табличні дані.

Зрізаний нормальний розподіл використовується при кінцевому інтервалі (t_0, t_1) зміни випадкової величини, в якому розміщені всі можливі значення. Цей розподіл досить точний на інтервалі: $t_0 < T_{\text{ср}} - 3\sigma_t$ і $t_1 > T_{\text{ср}} + 3\sigma_t$. Якщо $t_0 > T_{\text{ср}} - 3\sigma_t$ та $t_1 < T_{\text{ср}} + 3\sigma_t$ похибка апроксимації стає суттєвою і вводиться множник $C > 1$.

Тоді $C\int\limits_{t_0}^{t_1} f(t)dt = \dfrac{c}{\sigma_t\sqrt{2\pi}}\int\limits_{t_0}^{t_1}\exp\left[-\dfrac{\left(t - T_{\text{ср}}\right)^2}{2\sigma_t^2}\right]dt = 1$, яке визначає ймовірність події, що випадкова величина набуде значення, яке належать інтервалу (t_0, t_1), в який входять усі можливі значення, тобто $P(t) = 1$.

3.3. Логарифмічно-нормальний закон розподілу

Для логарифмічно-нормального закону розподілу логарифм випадкової величини розподілений за нормальним законом. Випадкова величина, яка має даний розподіл, описує ресурс об’єктів за опором втомленості, тобто число циклів навантаження до руйнування об’єкта часто використовується тоді, коли випадкові величини є добутком значної кількості вихідних випадкових величин, або коли значення випадкової величини складає випадкову частку раніше досліджених величин. Цей закон має успішне застосування в теорії надійності для описування: напрацювання на відмову складних технічних систем (наприклад, будівельних машин, тракторів, автомобілів, кранів та інших виробів); процесів відновлення; відмов, які виникають у результаті зношування; напрацювання при швидкому “вигоранні” ненадійних елементів; відмов, які викликані втомленістю матеріалів. Статистично встановлено, що напрацювання на відмову підшипників кочення, електронного обладнання, також підкоряється логарифмічно-нормальному закону.

Логарифмічно-нормальний закон має достатньо прості вирази для своїх характеристик внаслідок зведення його до широко табульованої функції Лапласа (нормований, нормальний закон), добрі спроможності вирівнювання дуже розсіяних статистичних даних. Як розподіл позитивних величин, він певною мірою точніше, ніж нормальний закон, описує напрацювання до відмови.

Такі властивості, а також велика протяжність і асиметричність розподілу даних втомної довговічності стали підставою для застосування логарифмічно-нормального закону, як теоретичної моделі відмов у разі втоми.

Густина розподілу випадкової величини T за логарифмічно-нормальним законом має вигляд:

$$f(t)=\frac{1}{t\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{(\ln t-\mu)^2}{2\sigma^2}\right], \qquad (3.14)$$

де μ та σ – параметри, які оцінюються за статистичними даними.

У даному випадку μ – математичне сподівання логарифму випадкової величини; σ – середнє квадратичне відхилення логарифму випадкової величини.

Параметри μ та σ – логарифмічно-нормального закону пов'язані з математичним сподіванням $M(t)$ та дисперсією $D(t)$ випадкової величини T такими виразами:

$$M(t)=\exp(\mu+\sigma^2/2)\,; \qquad (3.15)$$

$$D(t)=\left[\exp(\sigma^2)-1\right]\ \exp(2\mu+\sigma^2)\,. \qquad (3.16)$$

Величина $M(t)$ у рівнянні (3.15) відображає середнє напрацювання до відмови, середній ресурс, середній термін служби, середній час відновлення тощо.

Для позитивних випадкових величин логарифмічно-нормальний розподіл може приймати найрізноманітніші форми, які показані на рис. 3.8.

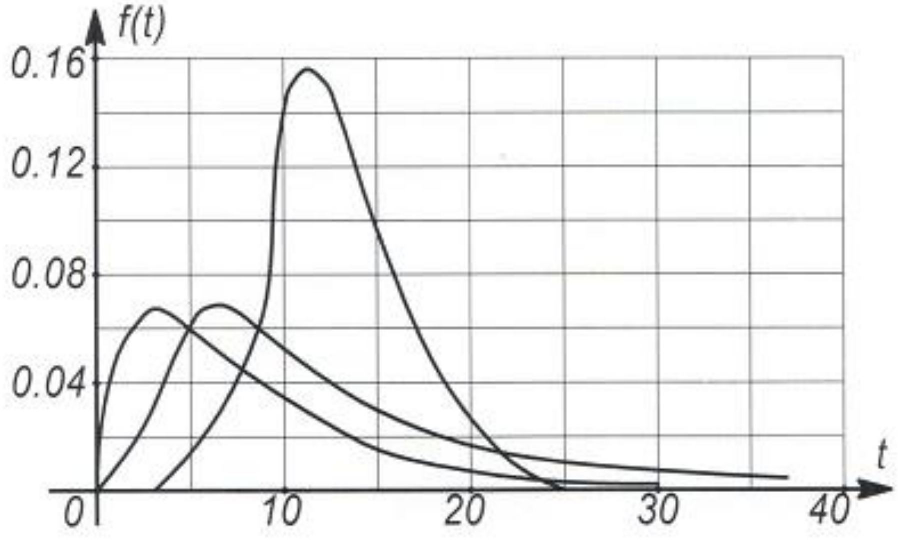


Рис. 3.8. Криві щільності логарифмічно-нормального розподілу
для різних значень σ

Інтегральна функція логарифмічно-нормального розподілу визначається за залежністю:

$$F(t) = \frac{1}{\sigma\ \sqrt{2\pi}} \int_0^t \frac{1}{t} \exp[-\frac{(\ln t - \mu)^2}{2\sigma^2}] dt \,. \qquad (3.17)$$

Функцію розподілу й імовірність безвідмовної роботи можна визначити за табульованими таблицями нормального розподілу (див. табл. дод. 1) залежно від значення квантиля:

$$U = \frac{\ln t - \mu}{\sigma} \qquad (3.18)$$

Звідси:

$$F(t) = 0{,}5 + \Phi(\frac{\ln t - \mu}{\sigma})\,; \qquad (3.19)$$

$$P(t) = 0{,}5 - \Phi(\frac{\ln t - \mu}{\sigma})\,. \qquad (3.20)$$

Часто для густини логарифмічно-нормального розподілу застосовують розподіл випадкової величини в десяткових логарифмах:

$$f(t) = \frac{0{,}4343}{\sigma t \sqrt{2\pi}} \exp[-\frac{(\lg t - \lg t_0)^2}{2\sigma^2}], \qquad (3.21)$$

де
$$\lg t_0 = \sum_{j=1}^{N} \lg t_j / N; \tag{3.22}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{(N-1)} \sum_{j=1}^{N} (\lg t_j - \lg t_0)^2}. \tag{3.23}$$

Логарифмічно-нормальний розподіл має такі властивості:

- логарифмічно-нормальний розподіл має одну моду, якщо t = exp (μ–σ) та медіану, якщо t = exp(μ). Розподіл має позитивну асиметрію;
- інтенсивність відмов логарифмічно-нормального розподілу має немонотонний характер зі зменшенням у кінці розподілу. Багато дослідників ототожнює асимптотичну зменшувану інтенсивність цього розподілу з властивістю "зміцнюватися з часом" деяких циклічно-навантажуваних об'єктів.

3.4. Закон розподілу Вейбула

У теорії надійності закон розподілу Вейбула займає одне з центральних місць при дослідженнях характеристик надійності складних технічних систем і машин. Він є найбільш загальним розподілом наробітку безвідмовної роботи елементів, тривалості роботи машини до граничного стану, для опису розподілів термінів служби машин і характеристик втомленості металів, які призводять до відмови.

Розподіл Вейбула – достатньо гнучка функція, здатна добре вирівнювати різноманітну статистику відмов. На відміну від багатьох інших, він більш універсальний, оскільки для певних значень параметрів він може трансформуватись в експоненціальний (показниковий) розподіл, нормальний та ін. Розподіл ресурсів машин за законом Вейбула слід очікувати при умовах експлуатації, які змінюються в широких межах, при середньому рівні технології виготовлення та середніх навантаженнях.

Розподіл Вейбула може бути трипараметричним або двопараметричним.

Трипараметричний розподіл. Інтегральна та диференціальна функції цього розподілу визначаються такими залежностями:

$$F(t) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{t-m}{a}\right)^b\right]; \tag{3.24}$$

$$f(t) = \frac{b}{a}\left(\frac{t-m}{a}\right)^{b-1} \exp\left[-\left(\frac{t-m}{a}\right)^b\right], \tag{3.25}$$

де a – параметр масштабу, який характеризує ступінь розтягнення кривої розподілу вздовж осі t і пов'язаний із середнім значенням випадкової величини; b – параметр форми; m – параметр зміщення, який є мінімально можливим значенням випадкової величини T.

Для цього розподілу, доповнення інтегральної функції (імовірність безвідмовної роботи) має вигляд

$$P(t) = \exp\left[-\left(\frac{t-m}{a}\right)^b\right]. \tag{3.26}$$

Інтенсивність подій визначається через диференціальну функцію, доповнення до інтегральної функції має вигляд:

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{P(t)} = \frac{\frac{b}{a}\left(\frac{t-m}{a}\right)^{b-1} \exp\left[-\left(\frac{t-m}{a}\right)^b\right]}{\exp\left[-\left(\frac{t-m}{a}\right)^b\right]} = \frac{b}{a}\left(\frac{t-m}{a}\right)^{b-1}. \tag{3.27}$$

Математичне сподівання для трипараметричного розподілу Вейбула визначається інтегралом:

$$T_{\text{ср}} = \int_0^\infty P(t)dt = \int_0^\infty \exp\left[-\left(\frac{t-m}{a}\right)^b\right]dt.$$

Розрахунок цього інтегралу дає можливість записати такий вираз

$$T_{\text{ср}} = a\Gamma\left(1 + \frac{1}{b}\right) + m, \tag{3.28}$$

де $\Gamma\left(1 + \frac{1}{b}\right)$ – гамма-функція.

Гамма-функцією аргументу *n* називається функція $\Gamma(n) = \int_0^\infty t^{n-1} e^{-t} dt$.

Для гамма-функції складено спеціальні таблиці, за допомогою яких за формулою (3.28) можна визначити математичне сподівання трипараметричного розподілу Вейбула.

Розподіл Вейбула займає проміжне положення між нормальним і експоненціальним розподілами. Графіки кривих розподілу Вейбула показані на рис. 3.9, 3.10 і 3.11.

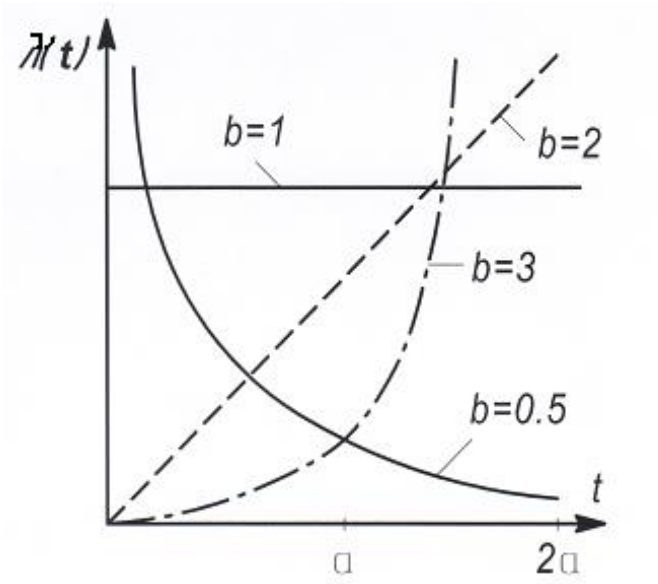


Рис. 3.9. Інтенсивність подій (відмов)

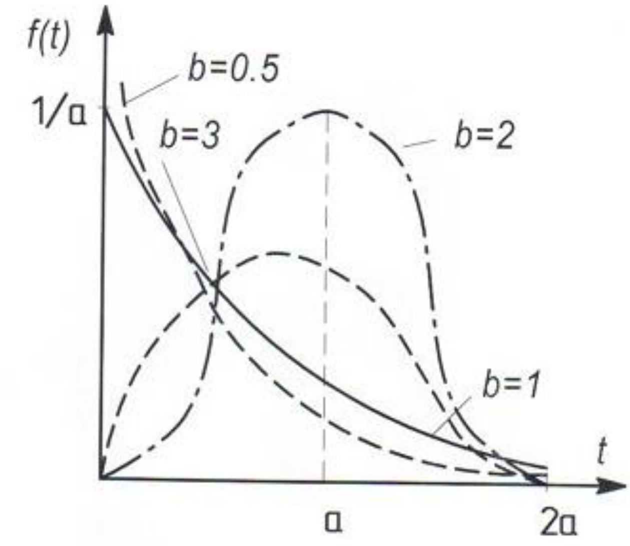


Рис. 3.10. Диференціальна функція

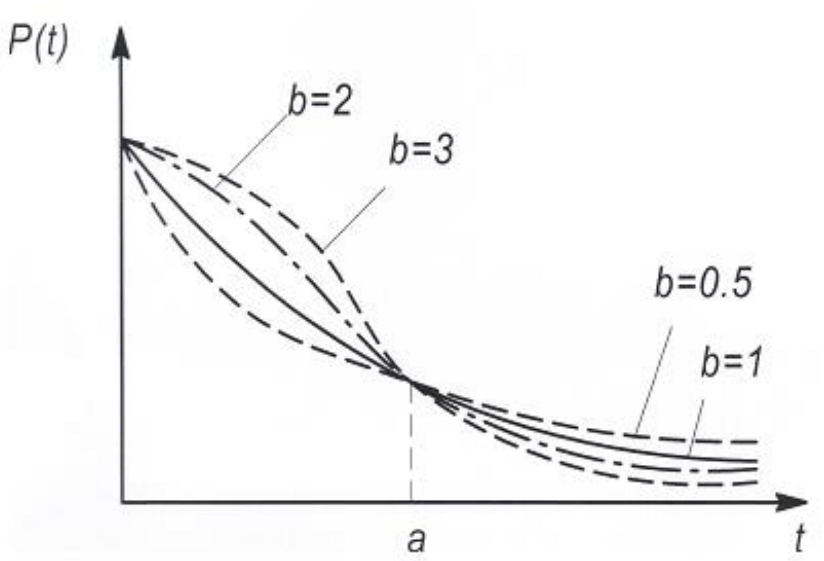


Рис. 3.11. Доповнення інтегральної функції

Якщо $b=1, m=0$ розподіл Вейбула трансформується в експоненціальний розподіл, тоді $\lambda = \mathrm{const}$. При цьому $a = T_{\text{ср}}$ – математичне сподівання. Якщо $b>1$ інтенсивність подій λ монотонно зростає і розподіл може бути близьким до нормального, а якщо b = 2 матимемо так званий розподіл Релея. У разі $b<1$ λ монотонно спадає. Швидкість зміни інтенсивності подій визначається параметром b.

Таку саму гнучкість має і гамма-розподіл, тому ці закони можуть описувати різноманітні види відмов, характерні для складних виробів.

Завдяки своїй універсальності та гнучкості трипараметричний розподіл Вейбула часто використовується для опису безвідмовності технічних об’єктів протягом трьох періодів експлуатації: а) припрацювання; б) нормальної експлуатації; в) старіння.

Розподілом Вейбула описуються випадкові величини ресурсів підшипників кочення $(b=1{,}4 \ldots 1{,}5)$, зубчастих муфт $(b=1{,}8)$, гальмових накладок $(b=1{,}4)$, гальмових шківів $(b=1{,}5)$, ходових коліс вантажопідйомних кранів $(b=2)$.

На практиці частіше використовують двопараметричний закон Вейбула (при m=0), для якого характерні такі залежності

$$\begin{cases} f(t) = \dfrac{b}{a}\left(\dfrac{t}{a}\right)^{b-1} \exp\left[-\left(\dfrac{t}{a}\right)^{b}\right] \\ F(t) = 1 - \exp\left[-\left(\dfrac{t}{a}\right)^{b}\right] \end{cases}. \tag{3.29}$$

Імовірність безвідмовної роботи визначається за формулою:

$$P(t) = \exp\left[-\left(\frac{t}{a}\right)^{b}\right], \tag{3.30}$$

де a і b – параметри закону розподілу (масштабу та форми), які визначаються на основі інформації, отриманої у процесі досліджень.

Математичне сподівання та середнє квадратичне відхилення випадкової величини *T*, розподіленої за законом Вейбула визначають за формулами:

$$M(t) = a \cdot K_B; \tag{3.31}$$

$$\sigma = a \cdot C_b, \tag{3.32}$$

де коефіцієнти K_b та C_b визначають за формулами:

$$C_B = \sqrt{\Gamma\left(1 + \frac{2}{b}\right) - K_b^2}, \tag{3.33}$$

тут

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt, \tag{3.34}$$

де $\Gamma(x)$ – відома гамма-функція, табличні значення якої наведені в спеціальній літературі [4].

Гамма-розподіл в теорії надійності також набуває значного поширення. Його щільність має вигляд:

$$f(l) = \frac{l^{m-1}}{T_0 \Gamma(m)} e^{-\frac{l}{2}}, \tag{3.35}$$

де m і $T_о$ – параметри закону розподілу; $\Gamma(a)$ – гамма-функція.

Композиція законів розподілу. Якщо випадкова величина являє собою суму незалежних випадкових величини, кожна з яких підпорядковується своєму закону розподілу, то закон розподілу суми може бути визначено за законами розподілу складових:

$$U = x + y + z, \qquad (3.36)$$

де U – складна величина, що дорівнює сумі складових випадкових величини; x , y , z – випадкові величини.

Тоді щільність розподілу $f(U)$ є композицією розподілу $f(x)$, $f(y)$, $f(z)$, а закон розподілу величини U називається композицією законів розподілу величин x, y, z. Композиція може існувати для будь-якої кількості випадкових величин і має ряд спільних і часткових властивостей.

Загальні властивості композиції не залежать від виду законів розподілу, що розглядаються. При цьому математичне сподівання і дисперсія композиції розподілу відповідно дорівнюють сумі математичних сподівань незалежних випадкових величин, що утворюють складну випадкову величину.

Часткові властивості застосовуються лише до певних законів розподілу. Наприклад, композиція випадкових величин з нормальним розподілом – це також нормальний розподіл, композиція розподілів Вейбула дає також розподіл Вейбула тощо.

Якщо маємо велику кількість будь-яких розподілів, за умови, що дисперсії складових розподілу мало відрізняються одна від одної, то розподіл композиції їх буде близьким до нормального.

Це положення в теорії імовірностей називається центральною граничною теоремою.

Загалом можна визначити лише наближене значення невідомого параметра розподілу, яке називають оцінкою параметра. Щоб зробити її, використовують кілька методів: метод моментів, метод максимальної правдоподібності, метод квантилів, графічний метод.

Під час вибору методу оцінки параметрів, намагаються вибрати найпростіший, проте бажано, щоб обраний метод забезпечував одержання незміщеної, ефективної та обґрунтованої оцінки.

За числові значення параметрів беруть точкову оцінку або надійні межі інтервалу, які із заданою надійною ймовірністю покривають справжні значення параметра. Точкову оцінку приймають за наближене значення невідомого параметра.

Правила визначення точкових оцінок і надійних меж для параметрів різних законів розподілу з урахуванням можливих особливостей викладено в ряді стандартів і методик. Далі наведено деякі методи визначення параметрів основних законів розподілів.

4. ОЦІНКА ПАРАМЕТРІВ ЗАКОНІВ РОЗПОДІЛУ

4.1. Оцінка параметрів експоненціального розподілу

Експоненціальний закон розподілу оцінюється одним параметром λ. Максимально правдоподібну оцінку параметра у разі повної вибірки розраховують за формулою:

$$\lambda = N / \sum_{i=1}^{N} t_i \, . \tag{4.1}$$

Для відомих числових характеристик емпіричного розподілу (див. розділ 2.3, формули (2.1) – (2.3)) параметр λ розраховують за формулою:

$$\lambda = 1/T_{\text{сер.}}, \qquad (4.2.)$$

де $T_{\text{сер.}}$– статистичне середнє значення випадкової величини t.

4.2. Оцінка параметрів нормального розподілу

Максимально правдоподібні оцінки параметрів нормального закону оцінюють за формулами (2.1) – (2.6) (розд. 2.3), де за оцінку параметра a нормального розподілу приймають вибіркове середнє значення випадкової величини $T_{\text{сер.}}$, а параметр σ дорівнює вибірковому середньому квадратичному відхиленню $\widehat{\sigma}$.

Статистичні оцінки коефіцієнтів асиметрії A та ексцесу E визначають за формулами (2.8), (2.9).

4.3.Оцінка параметрів логарифмічно-нормального розподілу

Максимально правдоподібні оцінки параметрів у випадку повної вибірки розраховують за формулами:

$$\hat{\mu} = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} \ln t_i; \qquad (4.3)$$

$$\sigma_{\wedge} = \left[\frac{1}{N-1}\sum_{j=1}^{N} (\ln t_j - \hat{\mu})^2\right]^{1/2}. \qquad (4.4)$$

Моментні оцінки розраховують за формулами:

$$\hat{\mu} = \ln S - \frac{1}{2}\ln(D/S^2 + 1); \qquad (4.5)$$

$$\sigma_{\wedge} = \left[\ln(D/S^2 + 1)\right]^{1/2}, \qquad (4.6)$$

де

$$S = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} t_j, \qquad D = \frac{1}{N-1}\sum_{j=1}^{N} (t_j - S)^2. \qquad (4.7)$$

4.4. Оцінка параметрів закону розподілу Вейбула

У практичних розрахунках для визначення невідомих параметрів закону Вейбула *a* і *b* інколи використовують наближене значення коефіцієнта варіації вибірки V **:**

$$V = \sigma / \bar{t},$$

де середнє квадратичне відхилення σ та середнє значення вибірки t розраховують за формулами (2.5), (2.6) та за методикою, описаною в розд. 9.

За одержаною величиною коефіцієнта V знаходять табульовані значення параметра b та значення коефіцієнтів K_b та C_b, які наведені в дод. 2.

Потім за відомими значеннями K_b та C_b визначають оцінку параметра a:

$$a = \frac{\sigma}{C_b}; \tag{4.8}$$

або
$$a = \frac{\bar{t}}{K_b}. \tag{4.9}$$

Більш точним, але і більш складним методом, за яким отримують оцінки параметрів Вейбула, є метод максимальної правдоподібності. Максимально правдоподібні оцінки параметрів a і b у випадку повної вибірки отримують з рішення системи рівнянь:

$$Na^b - \sum_{j=1}^{N} t^b{}_j = 0; \tag{4.10}$$

$$\left(\frac{N}{b} + \sum_{j=1}^{N} \ln t_j\right) \sum_{j=1}^{N} t^b{}_j - N \sum_{j=1}^{N} t^b{}_j \ln t_j = 0. \tag{4.11}$$

Параметр a визначають безпосередньо за формулою (4.10) з припущенням, що параметр b відомий:

$$a = \sqrt[b]{\frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} t_j^b}\,. \tag{4.12}$$

Оцінку параметра b отримують розв’язанням рівняння (4.11) відносно b методом послідовного наближення, тобто послідовним підбором різних значень b. За шукану оцінку параметра беруть таке значення, яке задовольнить рівність (4.11).

Для визначення параметра b запропоновано таку послідовність наближення:

а) розраховують початкове наближення b_0

$$b_0 = (l-1) \Big/ \left[\left(\frac{1}{l} \sum_{j=1}^{l} \ln \mathrm{t_j} - \ln \mathrm{t_1} \right) (0{,}23 \cdot l + 3{,}71) \right], \tag{4.13}$$

де l – кількість об’єктів, які відмовили під час спостережень:

$$l = \begin{cases} N \text{ для планів } [\mathrm{N} \cup \mathrm{N}] \\ r \text{ для планів } [\mathrm{N} \cup r] \text{ і } [\mathrm{N} \cup \mathrm{T}]; \end{cases}$$

t_1 – мінімальне значення вибірки.

б) розраховують таке наближення $b_k = (k = 1,2,...l)$:

$$b_k = \left(\frac{\sum_{i=1}^{l} \mathrm{t_j}^{b_{k-1}} \ln \mathrm{t_i} + \sum_{i=1}^{n} \tau_i^{b_{k-1}} \ln \tau_i}{\sum_{j=1}^{l} t_i^{b_{k-1}} + \sum_{i=1}^{n} \tau_i^{b_{k-1}}} - \frac{\sum_{\mathrm{j=1}}^{l} \ln \mathrm{t_j}}{\mathrm{l}} \right), \tag{4.14}$$

де *n* – кількість об’єктів, які не відмовили під час спостережень.

$$\tau_i = \begin{cases} t_r \text{ для плану } [\mathrm{N} \cup \mathrm{r}], \\ \mathrm{T} \text{ для плану} [\mathrm{N} \cup \mathrm{T}]. \end{cases}$$

в) ітеративний процес наближення припиняють тоді, коли буде досягнута необхідна точність:

$$\left| \frac{b_k - b_{k-1}}{b_{k-1}} \right| \le \delta, \tag{4.15}$$

де значення δ вибирають із ряду 0,0001;0,001;0,1;

г) значення δ_k, що відповідає останній нерівності, приймають за шукану оцінку δ_k;

д) знайдену оцінку δ_k підставляють у вираз (4.12) для визначення параметра *a*.

Як видно із формул (4.13) та (4.14) вони є загальними для розрахунків наближення параметра до δ_k при планах нагляду за машинами $[\mathrm{N} \cup \mathrm{N}], [\mathrm{N} \cup \mathrm{r}]$ та $[\mathrm{N} \cup \mathrm{T}]$. Для плану $[\mathrm{N} \cup \mathrm{T}]$ розрахунки дещо спрощуються, оскільки *l*=N, а *n*=0.

У деяких випадках на практиці за початкове наближення параметра b_0 приймають табульовані значення оцінки параметра *b* (таблиця дод. 2), які визначаються через коефіцієнти варіації *V*.

Якщо відомі числові характеристики інтервального статистичного ряду вибірки безперервних випадкових величин замість формул (4.11), (4.12) можна використовувати такі вирази:

$$\left(\frac{N}{b} + \sum_{i=1}^{K} \ln t_{\mathrm{cp}_i} n_i \right) \sum_{i=1}^{K} t^b{}_{\mathrm{cp}_i} n_i - N \sum_{i=1}^{K} t^b{}_{\mathrm{cp}_i} \cdot \ln t_{\mathrm{cp}_i} \cdot n_i = 0; \tag{4.16}$$

$$a = \sqrt[b]{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{K} t^b{}_{\mathrm{cp}_i} \cdot n_i} = \sqrt[b]{\sum_{i=1}^{K} t^b{}_{\mathrm{cp}_i} \cdot P_i}, \tag{4.17}$$

де $t_{\text{ср}_i}$ – значення середини i-го інтервалу статистичного ряду; n_i – частота в i-м інтервалі; P_i – частість в i-м інтервалі.

5. МЕТОД СТРУКТУРНИХ СХЕМ

Метод структурних схем у теорії надійності використовується для аналізу та розрахунку показників надійності об’єктів, які складаються з декількох елементів. За допомогою цього методу визначається безвідмовність об’єкта за відомою безвідмовністю кожного елемента. Об’єкт подають у вигляді структурної схеми, на якій стан елементів має вигляд послідовного та паралельного їх з’єднання, для показу безвідмовності окремих елементів.

Безвідмовність об’єкта при послідовному з’єднанні елементів за умови, що відмова кожного елемента – випадкова незалежна подія (рис. 5.1). Відмова будь-якого елемента призводить до відмови всієї системи.

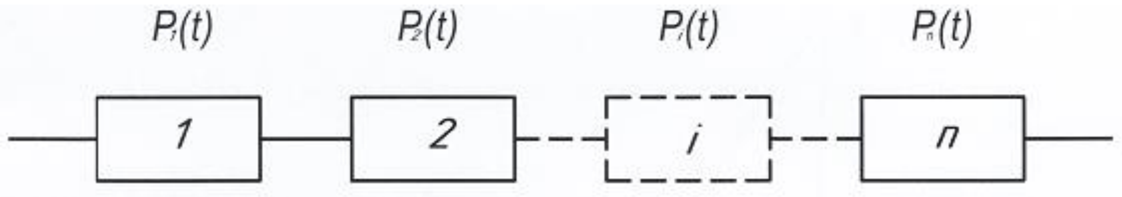


Рис. 5.1. Послідовне з’єднання елементів

Ймовірність $P_c(t)$ безвідмовної роботи системи протягом часу визначається за теоремою множення ймовірностей незалежних подій як добуток ймовірностей безвідмовної роботи її елементів

$$P_c(t) = P_1(t) \cdot P_2(t) \cdot \ldots \cdot P_i(t) \cdot \ldots \cdot P_n(t) = \prod_{i=1}^{n} P_i(t), \qquad (5.1)$$

де $P_i(t)$ – ймовірність безвідмовної роботи i-го елемента; n – кількість послідовно з’єднаних елементів.

Ймовірність безвідмовної роботи системи можна визначити через інтенсивність відмови її елементів

$$P_c(t)=\exp\left[-\int_0^t\lambda_1(t)dt\right]\exp\left[-\int_0^t\lambda_2(t)dt\right]...\exp\left[-\int_0^t\lambda_n(t)dt\right]=\exp\left[-\sum_{i=1}^n\int_0^t\lambda_i(t)dt\right].\quad(5.2)$$

Ймовірність безвідмовної роботи рівнонадійних елементів

$$P_c(t)=P^n(t)\left[-n\int_0^t\lambda(t)dt\right].\qquad(5.3)$$

Інтенсивність відмов системи в момент часу t $\lambda_c(t)$ дорівнює сумі інтенсивностей відмов складових елементів при будь-яких розподілах ймовірностей напрацювання до відмови системи

$$\lambda_c(t)=\lambda_1(t)+\lambda_2(t)+...+\lambda_n(t)=\sum_{i=1}^n\lambda_i(t)\qquad(5.4)$$

За нормальних умов експлуатації об’єкта, коли явища старіння та зношування малі чи можна їх не враховувати, безвідмовність – результат дії випадкових факторів за незмінних зовнішніх умов. У цьому випадку інтенсивність відмов $\lambda(t)=\lambda=\text{const}$.

Тоді

$$P_c(t)=\exp\left[-\sum_{i=1}^n\lambda_i t\right]=\exp(-\lambda_c t),\qquad(5.5)$$

де λ_i – інтенсивність відмов *i*-го елемента; $\lambda_c=\sum_{i=1}^n\lambda_i$.

Середній час $T_{\text{ср}}$ безвідмовної роботи при $\lambda=\text{const}$ може бути визначений через доповнення інтегральної функції розподілу таким співвідношенням

$$P_{cp_c}=\int_0^\infty P_c(t)dt=\int_0^\infty e^{-\lambda_c T}dt=-\frac{1}{\lambda_c}e^{-\lambda_c T}\Big|_0^\infty=\frac{1}{\lambda_c}=\frac{1}{\sum\limits_{i=1}^n\lambda_i}=\frac{1}{\sum\limits_{i=1}^n\frac{1}{T_{\text{ср}_i}}},$$

де $T_{\text{ср}_i}$ – середній час безвідмовної роботи i -го елемента.

Для однотипних елементів $\lambda_i=\lambda$, $T_{\text{ср}_i}=T_{\text{ср}}$. Тоді $\lambda_c=n\lambda$ і $T_{\text{ср},c}=T_{\text{ср}}/n$.

З розглянутого можна зробити такі висновки:

1) $P_c(t)$ зменшується зі збільшенням кількості послідовно з'єднаних елементів, тому при розробці будь-якої технічної системи необхідно зменшувати кількість таких елементів;

2) $P_c(t)$ завжди менше $P_i(t)\min$ (ймовірність безвідмовної роботи найменш надійного елемента), тому необхідно виявляти найменш надійний елемент і підвищувати ймовірність його безвідмовної роботи.

Безвідмовність об'єкта при паралельному з'єднанні елементів визначається за умови, що відмова кожного елемента – випадкова незалежна подія (рис. 5.2). У цьому випадку відмова будь-якого елемента не призводить до відмови всієї системи. Відмова системи відбудеться тоді, коли відмовлять всі паралельно з'єднані елементи.

Ймовірність відмови $F_c(t)$ системи протягом часу t при паралельному з'єднанні елементів визначається за теоремою множення ймовірностей незалежних подій:

$$F_c(t) = F_1(t) \cdot F_2(t) \cdot \ldots \cdot F_n(t) = \prod_{i=1}^{n} F_i(t), \tag{5.6}$$

де $F_i(t)$ – ймовірність відмови *i*-го елемента.

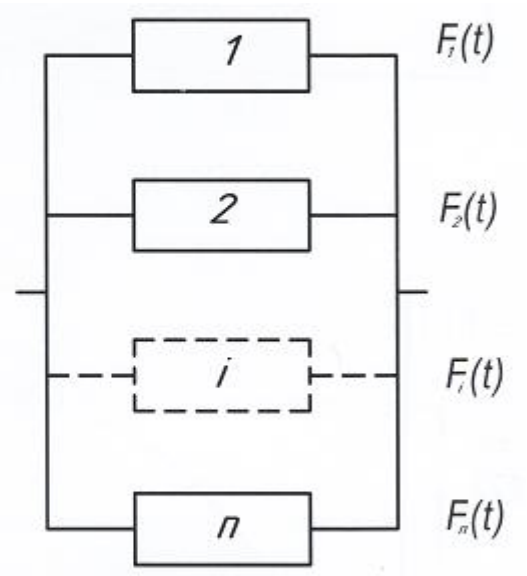


Рис. 5.2. Паралельне з'єднання елементів

Ймовірність $P_c(t)$ безвідмовної роботи системи при паралельному з'єднанні елементів визначається залежністю

$$P_c(t)=1-F_c(t)=1-\prod_{i=1}^{n}F_i(t)=1-\prod_{i=1}^{n}[1-P_i(t)]. \qquad (5.7)$$

При рівнонадійних елементах ймовірності відмови та безвідмовної роботи всієї системи мають вигляд

$$F_c(t)=F''(t);\ P_c(t)=1-F''(t).$$

Паралельне з'єднання елементів дозволяє ефективно підвищувати надійність системи. Це справедливо тільки при постійному резервуванні, коли основний і резервний елементи знаходяться в однакових умовах протягом всього часу роботи системи.

Безвідмовність об'єкта при змішаному з'єднанні елементів. Ймовірність безвідмовної роботи технічної системи при змішаному з'єднанні елементів розраховується спочатку для кожної групи паралельно з'єднаних елементів у послідовному ланцюгу, а потім – ймовірність цього послідовного ланцюга (рис. 5.3).

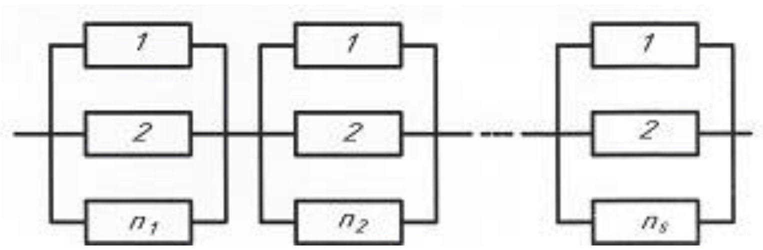


Рис. 5.3. Змішане з'єднання елементів

Основним достоїнством методу структурних схем є його наочність та простота розрахунку. Але зручність його використання обмежується лише застосуванням для розрахунку надійності систем при допущенні про взаємну незалежність безвідмовної роботи елементів системи. Ще одним його недоліком є далеко не повна інформація про функціонування системи, а структурна схема не є математичною моделлю функціонування системи.

6. ПЛАНИ СПОСТЕРЕЖЕНЬ

У процесі обробки інформації про надійність застосовують параметричні (імовірнісні) та непараметричні (статистичні) способи оцінки показників. Оцінки називаються непараметричними тоді, коли під час обробки даних не роблять будь-яких передбачень (гіпотез) про вигляд функції розподілу досліджуваної випадкової величини. *При непараметричному методі* застосовують апарат математичної статистики.

Основним недоліком непараметричних методів є обмежені можливості, які дають змогу мати точкові оцінки показників і в деяких випадках одну з границь довірчого інтервалу.

При параметричних оцінках розрахунок ведуть на підставі параметрів законів розподілу випадкової величини, яка досліджується, застосовуючи математичний апарат теорії імовірностей. Закон розподілу визначають на підставі апріорної інформації або у процесі обробки статистичної інформації. В цьому випадку для прийнятого чи визначеного розподілу знаходять параметри, а потім за ними оцінки показників надійності. Похибки розрахунків істотно зменшуються, тому даний метод при порівняно великій кількості статистичних даних має перевагу.

Застосування непараметричних методів виправдане тоді, коли немає достовірної попередньої інформації про закон розподілу випадкових величин і він не може бути виявлений через малий об'єм вибірки. При цьому, неправильний вибір виду розподілу може призвести до більш грубих помилок в оцінках показників, ніж за непараметричним методом.

Розглядаючи надійність об'єкта, ми не можемо оцінити цю властивість однозначно і конкретно яким-небудь одним показником, бо надійність будь-якого об'єкта – властивість комплексна і характеризується безвідмовністю, довговічністю, ремонтопридатністю та збережуваністю. Кожна з цих властивостей оцінюється низкою одиничних і комплексних показників надійності. Оцінка деяких з них залежить від обраного плану спостережень (випробувань).

Передбачено основні типи планів, які умовно записують так:

$$[NUN],\ [NUT],\ [NUr],\ [NU(T, r)],\ [NRT],\ [NRr],$$
$$[NR(T, r)],\ [NMT],\ [NMr],\ [NMT_{\sum}],\ [NM(r, T_{\sum}],$$

де ***N*** – кількість виробів, встановлених під спостереження;

U – плани, за яких спостереження (випробування) ведуть до першої відмови (вироби, що відмовили, не замінюють на нові);

T – встановлене напрацювання чи календарна тривалість випробувань (спостережень);

r – кількість відмов або граничних станів, до виникнення яких ведуть випробування (спостереження);

R – плани, за яких випробування ведуть до першої відмови, вироби, що відмовили, замінюють на нові;

M – плани, за яких випробовують об'єкти, які випробовуються, після кожної відмови об'єкт відновлюють;

$T_{\sum}$ – наперед задане сумарне напрацювання або час випробування за всіма об'єктами.

Плани спостережень трактують так:

[*NUN*] – під спостереження (випробування) поставлено *N* виробів; вироби, що відмовили, не відновлюються і не замінюються на нові; спостереження ведуть до виникнення відмов усіх виробів; Літера *N*, що стоїть у кінці шифру плану [*NUN*] позначає, що спостереження ведеться до виникнення відмов або граничних станів усіх, встановлених під спостереження виробів ($N = r$);

[*NUT*] – під спостереження поставлено *N* виробів, вироби, що відмовили, не відновлюються і не замінюються новими, спостереження ведуть до наперед заданого часу *T*;

[*NUr*] – під спостереження (випробування) поставлено *N* виробів, вироби, що відмовили, не відновлюються і не замінюються на нові, випробування ведуть до наперед заданої сумарної кількості відмов *r*;

[NRT] – під спостереження поставлено N виробів, вироби, що відмовили, замінюють на нові, спостереження ведуть до наперед заданого часу T;

[NMT] – план випробувань, згідно з яким випробовують одночасно N об'єктів, після кожної відмови об'єкт відновлюють, кожний об'єкт випробовують до закінчення часу випробовування або напрацювання T;

[$NMT_{\sum}$] – план випробувань, згідно з яким одночасно випробовують N об'єктів, після кожної відмови об'єкт відновлюють, випробовування припиняють у разі закінчення сумарного по всіх об'єктах часу випробовування або напрацювання $T_{\sum}$.

При планах типів [$NU(T,\ r)$] та [$NR(T,\ r)$] випробовування припиняють, коли кількість відмов, сумарна за всіма позиціями, досягла r або після проходження сумарного за всіма об'єктами часу випробовування (напрацювання) T залежно від того, яка з цих умов виконана раніше.

При плані [$NM(r,\ T_{\sum}$] випробовування припиняють, коли сумарна за всіма об'єктами кількість відмов досягла r або з проходженням сумарного за всіма об'єктами часу випробування (напрацювання) $T_{\sum}$ залежно від того, яка з цих умов виконана раніше.

При планах [NUN], [NUT], [NUr] вироби, що відмовили, можуть ремонтуватися, але дані про відмови їх після ремонту виключаються з подальшого розгляду.

Плани спостережень вибирає головна організація залежно від типу виробів, умов їх експлуатації, з урахуванням економічної доцільності та технічної потреби.

Рекомендації щодо застосування планів спостережень наведено у табл. 6.1.

Таблиця 6.1

Рекомендації щодо застосування планів спостережень

План спостережень (шифр)	Показники надійності	Розподіл випадкової величини
[NUN]	Середнє напрацювання до відмови, середній ресурс, середній термін служби, гамма-відсотковий ресурс. Імовірність безвідмовної роботи	Нормальний, експоненціальний, Вейбула, логарифмічно-нормальний
[NUr]	Гамма-відсотковий ресурс, гамма-відсотковий термін служби, імовірність безвідмовної роботи	Невідомий
[NUT]	Середнє напрацювання до відмови, середній ресурс, середній термін служби	Вейбула, експоненціальний, нормальний
[NRT] *[NRr]*	Середнє напрацювання до відмови	Експоненціальний
[NMr]	Середнє напрацювання на відмову	Експоненціальний
[NMT]	Коефіцієнт готовності, середнє напрацювання на відмову	Невідомий, експоненціальний

7. ПОКАЗНИКИ НАДІЙНОСТІ

7.1. Одиничні показники

Одиничні показники відображають яку-небудь одну властивість машини. До них належать показники безвідмовності, довговічності, ремонтопридатності та збережності. Ці показники регламентуються ГОСТ 27.002-89 і ДСТУ 2860-94. Методи розрахунку показників надійності загалом наведені в ДСТУ 2862-94. Розрахунок показників надійності за відомими функціями розподілу напрацювання до відмови (ресурсу, терміну служби, терміну збережності та тривалості відновлення) рекомендується проводити за формулами, які містить табл.7.1.

Показники безвідмовності. В теорії надійності розглядається безвідмовність невідновлюваних і відновлюваних об'єктів.

Безвідмовність невідновлюваних об'єктів оцінюється такими показниками надійності: ймовірністю безвідмовної роботи, ймовірністю відмови, середнім напрацюванням до відмови, інтенсивністю відмов і гамма-процентним напрацюванням до відмови.

1. *Ймовірність безвідмовної роботи* – це ймовірність того, що в межах заданого напрацювання об'єкта відмова не виникає. Позначається вона функцією $P(t)$, що визначає для кожного моменту часу t ймовірність події $T > t$, яка полягає в тому, що час T роботи об'єкта до першої відмови приймає значення більше t, тобто:

$$P(t) = P(T \geq t) = 1 - F(t).$$

Ймовірність безвідмовної роботи має певний сенс лише тоді, коли вона поставлена відповідно до заданого неперервного напрацювання *T*, протягом якого можливе виникнення відмови.

На практиці, для визначення ймовірності безвідмовної роботи об'єкта, користуються статистичною інформацією:

$$P^*(t_3) = \frac{N(t_3)}{N(0)} = \frac{N(0) - n(t_3)}{N(0)} = 1 - \frac{n(t_3)}{N(0)},$$

де $N(0)$ – кількість працездатних об'єктів у момент часу $t = 0$; $N(t_3)$ – кількість працездатних об'єктів до моменту заданого часу t_3; $n(t_3)$ – кількість об'єктів, які відмовили до моменту часу t_3.

2. *Імовірність відмови об'єкта* – це функція $Q(t) = F(t)$, що визначає для кожного значення часу t ймовірність події $T < t$, яка полягає в тому, що час T роботи до відмови прийме значення, менше t, тобто $F(t) = P(T < t)$. Функція $P(T < t)$ є інтегральною функцією розподілу ймовірностей часу роботи об'єкта до відмови, що визначає ймовірність виникнення відмови в інтервалі часу t.

Таблиця 7.1

Формули для розрахунку показників надійності за деякими законами розподілу

Закон розподілу з густиною $f(t)$	Середній показник ($T_{СР}$, $T_{Р}$, $T_{С}$, $T_{В}$)	Гамма-відсотковий показник (T_{γ}, $T_{Р\gamma}$, $T_{СЛ\gamma}$, $T_{С\gamma}$)	Імовірність безвідмовної роботи $P(t)$	Інтенсивність відмов $\lambda(t)$
Експоненціальний: $\lambda\, e^{-\lambda t}$ λ–параметр масштабу розподілу; $\lambda > 0$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda}(-\ln\frac{\gamma}{100})$	$e^{-\lambda t}$	λ
Нормальний закон: $\frac{1}{\delta\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{(t-\alpha)^2}{2\delta^2}\right]$ a – параметр масштабу; σ– параметр форми; $a > 0$; $\sigma > 0$;	α	$0.5 = 0.5\Phi\left(\frac{t_y - a}{\sigma}\right) = \frac{\gamma}{100}$	$0.5 - \Phi\left(\frac{t-\alpha}{\delta}\right)$	$\frac{\exp\left[-\frac{(t-a)^2}{2\delta^2}\right]}{\delta\sqrt{2\pi}\left[0.5-\Phi\left(\frac{t-a}{\delta}\right)\right]}$

Закінчення табл. 7.1

Закон розподілу з густиною $f(t)$	Середній показник ($T_{СР}$, $T_{Р}$, $T_{С}$, $T_{В}$)	Гамма-відсотковий показник (T_{γ}, $T_{Р\gamma}$, $T_{СЛ\gamma}$, $T_{С\gamma}$)	Імовірність безвідмовної роботи $P(t)$	Інтенсивність відмов $\lambda(t)$
Логарифмічно-нормальний: $\dfrac{\exp\left[-\dfrac{(\ln t-a)^2}{2\sigma^2}\right]}{\sigma\cdot t\sqrt{2\pi}}$ a − параметр масштабу; σ − параметр форми; $a>0$; $\sigma>0$;	$\exp(a+\dfrac{\sigma^2}{2})$	$\exp\left[a(1-u_{\gamma}\dfrac{\sigma}{a})\right]$	$\Phi\left(\dfrac{a-\ln t}{\sigma}\right)$	$\dfrac{\exp\left[-\dfrac{(\ln t-a)^2}{2\sigma^2}\right]}{\sigma t\sqrt{2\pi}\Phi(\dfrac{a-\ln t}{\sigma})}$
Вейбула: $\dfrac{b}{a}(\dfrac{t}{a})^{b-1}\exp\left[-\left(\dfrac{t}{a}\right)^{b}\right]$ a − параметр масштабу; b − параметр форми; $a>0$; $b>0$;	$a\Gamma(1+\dfrac{1}{b})$	$a(-\ln\dfrac{\gamma}{100})^{1/b}$	$\exp\left[-\left(\dfrac{t}{a}\right)^{b}\right]$	$\dfrac{b}{a^{b}}t^{b-1}$

Примітка 1. U_{γ} − квантиль нормованого нормального розподілу рівня γ.
Примітка 2. Ф (…) − нормальний розподіл.
Примітка 3. Г (…) − гамма-функція.
Примітка 4. χ (1 − γ/100:ν) − визначають з розв'язку рівняння: $\Phi(\dfrac{\chi-1}{\nu\sqrt{\chi}})+e^{2/\nu^2}\Phi(-\dfrac{\chi+1}{\nu\sqrt{\chi}})=1-\gamma/100.$

Примітка 5. Значення функцій Ф (…) наведено у дод.1.

Ймовірність відмови *Q(t)* може бути визначена за статистичною інформацією такою залежністю

$$Q(t) = F^*(t) = \frac{n(t)}{N(0)} = \frac{n(0) - N(t)}{N(0)} = 1 - \frac{N(t)}{N(0)} = 1 - P^*(t),$$

де $n(t)$ – число об'єктів, які відмовили за час t; $N(t)$ – число працездатних об'єктів до моменту часу t; $N(0)$ – число об'єктів на початку випробувань, в момент часу t = 0; $P^*(t)$ – ймовірність безвідмовної роботи, яка визначена за статистичною інформацією.

Іноді зручно користуватися ймовірністю відмов об'єкта $Q(t)$, використовуючи умову, що сума ймовірностей протилежних подій дорівнює одиниці

$$P(t) + Q(t) = 1.$$

Тоді

$$Q(t) = 1 - P(t).$$

3. *Середнє напрацювання до відмови* – це математичне сподівання напрацювання об'єкта до першої відмови, яке за теорією ймовірності визначається залежністю

$$T_{\text{ср}} = \int_0^\infty t dF(t) = \int_0^\infty t f(t) dt = \int_0^\infty P(t) dt.$$

За статистичною інформацією цей показник визначається за співвідношенням

$$T^*_{\text{ср}} = \sum_{i=1}^{k} t_i \Delta F(t_i) = \sum_{i=1}^{k} t_i f(t_i) \Delta t_i = \sum_{i=1}^{k} P(t_i) \Delta t_i,$$

де $\Delta F(t_i) = F(t_{i+1})$; $f(t_i) = n(t_i)/N(0)$; $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i$; t_i – тривалість безвідмовної роботи *i*-го об'єкта; k – загальна кількість розглянутих інтервалів.

Середнє напрацювання до відмови визначається відношенням сумарного напрацювання до відмови об'єктів, що спостерігаються, до кількості відмов цих об'єктів. На підставі цього визначення знайдено середні напрацювання об'єктів для різних планів спостережень.

При плані спостережень $[NUN]$ середнє напрацювання до відмови визначається залежністю:

$$T_{\text{ср}} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} t_i \,,$$

де N – кількість об’єктів, що спостерігаються; t_i – напрацювання до відмови i-го об’єкта.

При плані спостережень $[NUT]$ середнє напрацювання до відмови має вигляд:

$$T_{\text{ср}} = \frac{\sum_{i=1}^{r(T)} t_i + \left(N - r(T)\right)T}{r(T)}, \qquad (7.1)$$

де T – час спостереження; $r(T)$ – кількість об’єктів, що відмовили за час T.

При плані спостережень $[NUr]$:

$$T_{\text{ср}} = \frac{\sum_{i=1}^{r} t_i + (N - r)t_r}{r}, \qquad (7.2)$$

де r – призначена кількість відмов, що обмежують спостереження; t_r – час виникнення r-ї відмови об’єкта.

Якщо час відновлення об’єктів малий і ним можна знехтувати, то для планів $[NRT]$ і $[NRr]$ середнє напрацювання до відмови може бути визначено за формулами:

$$T_{\text{ср}} = \frac{NT}{r(T)};\; T_{\text{ср}} = \frac{Nt_r}{r}. \qquad (7.3)$$

4. *Інтенсивність відмови* – це функція $\lambda(t)$, що визначає ймовірність появи відмови в одиницю часу в момент t за умови, що відмова не з’явилась до моменту t. Формули для визначення інтенсивності відмов, згідно з теорією ймовірності та за статистичною інформацією, були наведені раніше.

5. *Гамма-процентне напрацювання до відмови* – це напрацювання, протягом якого відмова об’єкта не виникає з ймовірністю γ, вираженою в процентах. Гамма-процентне

напрацювання до відмови T_γ визначають графічно (див. рис. 2.2) за розподілом функції $P(T_\gamma)$ з умови $P(T_\gamma)=\gamma/100$.

Безвідмовність відновлюваних об'єктів оцінюється параметром потоку відмов і напрацюванням на відмову.

При експлуатації відновлюваних об'єктів у початковий момент часу об'єкт працює без відмови, а після відмови відбувається його відновлення і він знову працює до відмови. Так продовжується до настання граничного стану. Моменти відмов, без урахування часу відновлення, на часовій осі утворюють потік відмов. Він оцінюється параметром потоку відмов.

6. *Параметр потоку відмов* – це відношення математичного сподівання кількості відмов відновлюваного об'єкта за досить мале його напрацювання до його значення.

Як характеристику потоку відмов використовують провідну його функцію, яка визначається математичним сподіванням кількістю відмов за час t

$$\Omega(t)=M\left[r(t)\right], \tag{7.4}$$

де $r(t)$ – кількість відмов за час t.

Інтенсивність потоку відмов називається параметром потоку відмов і позначається $\omega(t)$. Ця функція є похідною за часом від функції $\Omega(t)$, тобто

$$\omega(t)=\frac{d\Omega(t)}{dt}. \tag{7.5}$$

Параметр потоку відмов за статистичною інформацією визначається як відношення кількості об'єктів, що відмовили в одиницю часу до кількості об'єктів, що спостерігаються при їхньому миттєвому відновленні

$$\omega^*(t)=\frac{\sum_{i=1}^{N} r_i(t+\Delta t)-\sum_{i=1}^{N} r_i(t)}{N\Delta t}=\frac{\sum_{i=1}^{N} r_i(\Delta t)}{N\Delta t}, \tag{7.6}$$

де N – кількість об'єктів, що спостерігаються; Δt – інтервал часу; $r_i(t)$ – кількість відмов кожного об'єкта до напрацювання t; $r_i(t+\Delta t)$ – кількість відмов кожного об'єкта до напрацювання $t+\Delta t$.

Зміна параметра потоку відмов за час експлуатації будь-якої машини характеризується трьома періодами (рис. 7.1). Період припрацювання t_n на початку експлуатації характеризується підвищеними значеннями параметра потоку відмов за рахунок технологічних та експлуатаційних причин. Потік відмов на цій ділянці роботи машини має змінний характер. Період нормальної експлуатації машини t_e характеризується приблизно постійним значенням параметра потоку відмов за незмінних умов експлуатації. Цей період роботи машини – найбільш тривалий і є основним періодом експлуатації. В цей період виникають як раптові, так і поступові відмови.

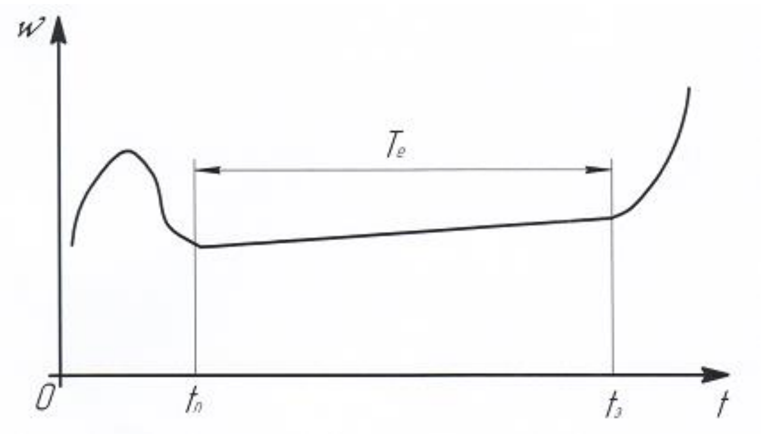


Рис. 7.1. Параметр потоку відмов в різні періоди експлуатації машини

Раптові відмови виникають через приховані дефекти, які не можуть бути виявлені існуючими методами контролю. Моменти їх виникнення не залежать від тривалості роботи машини і тому вони непрогнозовані. Раптові відмови дають постійне значення параметра потоку відмови протягом всього періоду. Поступові відмови виникають в елементах машини, ресурс яких значно менший за ресурс базових елементів, що визначають довговічність машини в цілому. У період нормальної експлуатації t_e потік відмов є стаціонарним, незалежно від виду розподілення ресурсу окремих елементів і залежить від їх профілактичної заміни. Період старіння та зношування з моменту часу $t_з$ характеризується монотонним зростанням параметра потоку відмов. У цей період значну роль відіграють поступові відмови елементів, які викликані старінням матеріалів, накопиченням втомних дефектів і зносом. У цей період машини піддають капітальному ремонту або знімають з експлуатації.

7. *Середнє напрацювання на відмову* – це відношення напрацювання відновлюваного об'єкта до математичного сподівання протягом кількості його відмов

$$T_{\text{Вср}} = \frac{\Delta t}{M\left[r(t,\, t+\Delta t)\right]}. \tag{7.7}$$

Середнє напрацювання на відмову, за статистичною інформацією, визначається відношенням сумарного напрацювання відновлюваних об'єктів до сумарної кількості відмов протягом цього напрацювання

$$T^{*}_{\text{Вср}} = \frac{\sum_{i=1}^{N} t_i}{\sum_{i=1}^{N} r_i}, \tag{7.8}$$

де t_i – напрацювання на відмову i-го об'єкта; r_i – кількість відмов i-го об'єкта; N – кількість об'єктів, що спостерігаються.

Показники довговічності машин та їхніх елементів дають змогу розробляти заходи з технічного обслуговування та ремонтів усіх видів, а також розраховувати потреби в запасних частинах. Відповідно до ДСТУ 2862-94 передбачено такі показники довговічності: призначений ресурс, призначений строк служби, середній ресурс, середній строк служби, гамма-процентний ресурс, гамма-процентний строк служби.

1. *Призначений ресурс* – це сумарне напрацювання, у разі досягнення якого експлуатація об'єкта має бути припинена незалежно від його технічного стану.

2. *Призначений строк служби* – це календарна тривалість експлуатації, у разі досягнення якої експлуатація об'єкта має бути припинена незалежно від його стану.

3. *Середній ресурс* – це математичне сподівання напрацювання об’єкта до настання граничного стану. Розрізняють середній ресурс до того чи іншого ремонту, середній ресурс між ремонтами та середній ресурс до списання.

За статистичною інформацією середній ресурс визначається як середнє арифметичне ресурсів групи об’єктів

$$T^{*}_{\text{Рср}} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} T_{Pi}\,,$$

де $T_{\text{Рср}}$ – ресурс i-го об’єкта до повного спрацювання; N – кількість об’єктів, для яких визначається середній ресурс.

4. *Гамма-процентний ресурс* $T_{p\gamma}$ – це напрацювання, протягом якого об’єкт не досягає граничного стану із заданою ймовірністю γ, вираженою в процентах. Імовірність забезпечення ресурсу $T_{p\gamma}$ визначається залежністю

$$P(T_{p\gamma}) = \gamma/100.$$

Визначення гамма-процентного ресурсу за теорією ймовірності показано на рис. 7.2.

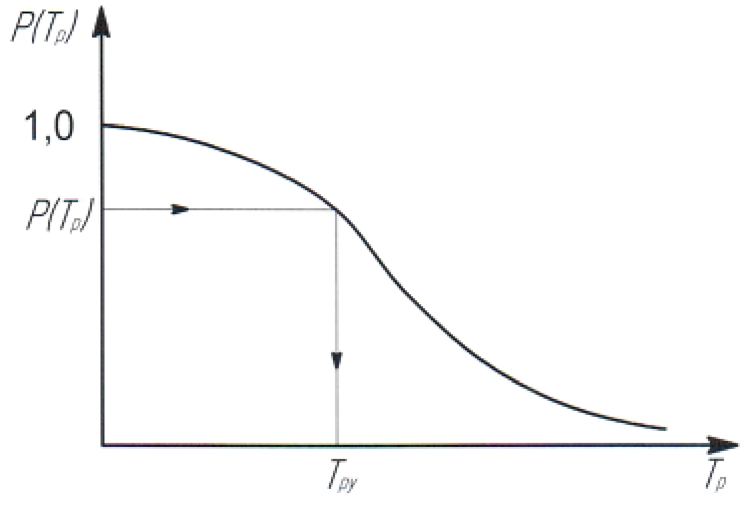


Рис. 7.2. Схема визначення $T_{p\gamma}$

На рис. 7.2 T_p – напрацювання об’єкта до граничного стану, а $P(T_p)$ – ймовірність забезпечення цього ресурсу.

Встановлення гамма-процентного ресурсу гарантує придатність об'єкта для застосування його за призначенням протягом зазначеного сумарного напрацювання. Вибір гамма-процентного ресурсу залежить від виду об'єкта та його техніко-економічних характеристик, найважливіші з яких пов'язані з аналізом наслідків відмови.

5. *Гамма-процентний строк служби* – це календарна тривалість експлуатації, протягом якої об'єкт не досягає граничного стану з ймовірністю γ, вираженою в процентах.

6. *Середній строк служби* – це математичне сподівання строку служби об'єкта до настання граничного стану.

За статистичною інформацією середній строк служби визначається залежністю:

$$T^{*}_{\text{Сл.ср}} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} T_{\text{Сл.}i},$$

де $T_{\text{Сл.}i}$ – строк служби i-го об'єкта до повного спрацьовування.

Показники ремонтопридатності. Надійність машин значною мірою залежить від їхньої пристосованості до ремонту та технічного обслуговування. Ця пристосованість визначається терміном "ремонтопридатність". Ремонтопридатність характеризується такими показниками: середнім часом відновлення, гамма-процентним часом відновлення, ймовірністю відновлення, інтенсивністю відновлення та середньою трудомісткістю відновлення.

1. *Середній час відновлення* – це математичне сподівання часу відновлення працездатного стану об'єкта після відмови. Ця величина суттєво залежить від конструкції об'єкта, а також умов і засобів для його відновлення.

Середній час відновлення визначають як середню величину за теорією ймовірності:

$$T_{\text{Вср}} = \int_{0}^{\infty} t f_{\text{В}}(t)\,dt \tag{7.9}$$

або за статистичною інформацією:

$$T^*_{\text{Вср}} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} t_{\text{В}i}, \tag{7.10}$$

де t – час; $f_{\text{В}}$ – функція густини часу відновлення; N – кількість об’єктів, що відновлюються; $t_{\text{В}i}$ – тривалість відновлення i-го об’єкта.

2. *Гамма-процентний час відновлення* – це час, протягом якого відновлення працездатного стану об’єкта буде здійснено із заданою ймовірністю, вираженою у процентах. Цей показник визначається аналогічно гамма-процентному ресурсу.

3. *Ймовірність відновлення* – це ймовірність того, що час відновлення працездатного стану об’єкта не перевищує надане значення.

Час відновлення $t_{\text{В}}$ включає в себе час, що витрачається на пошук причин відмови, а також на усунення наслідків відмови.

Ймовірність відновлення за теорією ймовірності та статистичною інформацією визначається за залежностями:

$$P(t_{\text{В}}) = P(t_{\text{В}} \le T_{\text{В}}); \tag{7.11}$$

$$P^*(t_{\text{В}}) = \frac{N(T_{\text{В}})}{r(0)}, \tag{7.12}$$

де $T_{\text{В}}$ – заданий (нормативний) час відновлення; $r(0)$ – кількість непрацездатних об’єктів на момент часу $t = 0$; $N(T_{\text{В}})$ – кількість відновлених (працездатних) об’єктів на момент часу $t = T_{\text{В}}$.

4. *Інтенсивність відновлення* – це щільність ймовірності відновлення працездатного стану об’єкта, яка за теорією ймовірності та статистичною інформацією визначається за залежностями:

$$\lambda(t_{\text{В}}) = \frac{f(t_{\text{В}})}{P(t_{\text{В}})}; \tag{7.13}$$

$$\lambda^*(t_{\text{В}}) = \frac{N(T_{\text{В}})}{r(0)T_{\text{В}}}. \tag{7.13}$$

5. *Середня трудомісткість відновлення* (ремонту даного виду, технічного обслуговування) – це математичне сподівання трудомісткості відновлення об’єкта після відмови, яка може бути

визначена як методами теорії ймовірності, так і за статистичною інформацією за формулами, аналогічними для середнього часу відновлення, в яких він замінюється на трудомісткість відновлення.

Показники зберігання оцінюють здатність об'єкта протидіяти негативному впливу умов зберігання та транспортування на показники безвідмовності, довговічності та ремонтопридатності, які були у об'єкта до початку його зберігання чи транспортування. Збережність об'єкта може бути оцінена середнім гамма-процентним строком зберігання, а також назначеним строком зберігання.

1. *Гамма-процентний строк зберігання* – це календарна тривалість зберігання чи транспортування, протягом та після яких показники безвідмовності, довговічності та ремонтопридатності об'єкта не вийдуть за встановлені межі з імовірністю γ, вираженою у процентах.

2. *Середній строк зберігання* – це математичне сподівання строку збережності об'єкта.

3. *Назначений строк зберігання* – це календарна тривалість зберігання в заданих умовах, після закінчення якої застосування об'єкта за призначенням не допускається, незалежно від його технічного стану.

7.2. Комплексні показники

Комплексні показники відображають одночасно декілька властивостей надійності об'єкта. До цих показників належать: коефіцієнт готовності, коефіцієнт технічного використання, коефіцієнт оперативної готовності та ін. Розглянемо деякі з цих показників надійності об'єктів.

1. *Коефіцієнт готовності* – це ймовірність того, що об'єкт виявляється працездатним у довільний момент часу, крім запланованих періодів, протягом яких застосування об'єкта за призначенням не передбачається. Коефіцієнт готовності оцінює властивості безвідмовності та ремонтопридатності на певному інтервалі експлуатації об'єкта.

Статистичне середнє значення коефіцієнта готовності об’єкта за певний інтервал визначається за залежністю

$$K_{\text{г}} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{N} t_i}{\sum\limits_{i=1}^{N} t_i + \sum\limits_{i=1}^{N} \tau_i}, \tag{7.13}$$

де t_i – сумарне напрацювання i-го об’єкта в заданому інтервалі експлуатації; τ_i – сумарна оперативна тривалість відновлення працездатності i-го об’єкта в тому ж інтервалі експлуатації; N – кількість об’єктів, для яких визначається коефіцієнт готовності.

Якщо в залежності (7.13) чисельник і знаменник розділити на $\sum\limits_{i=1}^{N} t_i$, то коефіцієнт готовності буде виражений через відносну величину оперативної тривалості відновлення працездатності об’єктів у певному періоді експлуатації

$$\tau_{\text{в}} = \sum_{i=1}^{N} t_i / \tau_i \,. \tag{7.14}$$

Тоді коефіцієнт готовності може бути записаний у такому вигляді:

$$K_{\text{г}} = \frac{1}{1 + \tau_{\text{в}}}. \tag{7.15}$$

2. *Коефіцієнт технічного використання* – це відношення математичного сподівання напрацювання об’єкта за певний період експлуатації до суми математичних сподівань напрацювання, тривалості технічних обслуговувань, планових ремонтів і відновлень за той же період експлуатації (наприклад, для міжремонтного циклу)

$$K_{\text{т.в}} = \frac{T_{\text{рср}}}{T_{\text{рср}} + \sum \tau_{\text{ТО}} + \sum \tau_{P} + \sum \tau_{\text{В}}}. \tag{7.16}$$

Як і в попередньому випадку, коефіцієнт технічного використання може бути виражений через відносні величини тривалостей технічних обслуговувань, планових ремонтів і відновлення працездатності об’єктів у певному періоді експлуатації:

$$\tau_{TO} = \sum \tau_{TO} / T_{\text{рср}}\,;\; \tau_P = \sum \tau_P / T_{\text{рср}}\,;\; \tau_B = \sum \tau_{TO} / T_{\text{рср}}\,.$$

У результаті отримуємо

$$K_{\text{т.в}} = \frac{1}{1 + \tau_{TO} + \tau_P + \tau_B}\,. \qquad (7.16)$$

3. *Коефіцієнт оперативної готовності* – це ймовірність того, що об'єкт виявиться працездатним у довільний момент часу, крім запланованих періодів на технічне обслуговування та ремонти

$$K_{0\Gamma} = K_\Gamma P(t_0; t_1),$$

де t_0 – момент часу, з якого виникає необхідність застосування об'єкта за призначенням; t_1 – момент часу, коли застосування об'єкта за призначенням закінчується; $P(t_0; t_1)$ – імовірність безвідмовної роботи об'єкта на інтервалі часу $(t_0; t_1)$.

Значення $K_{0\Gamma}$ розраховують на базі періоду очікування роботи перед t_0, коли виникає потреба в об'єкті.

8. ПЕРВИННА ОБРОБКА СТАТИСТИЧНОЇ ІНФОРМАЦІЇ

8.1. Загальні положення

Розглянутий у навчальному посібнику порядок обробки й аналіз інформації поширюється як на постійні, так і на періодичні спостереження. Необхідний обсяг обробки й аналізу в кожному конкретному випадку визначається встановленим технічним завданням на проведення робіт.

Періодичність проведення обробки й аналізу встановлюється робочими методиками, але не рідше, ніж один раз на півроку, а при періодичних спостереженнях – щорічно. Методика обробки інформації істотно залежить від виду статистичної вибірки.

Вихідні дані, які підлягають статистичній обробці, являють собою повну чи скорочену вибірку. Експлуатаційні спостереження, за яких машини доводять до граничного стану (при оцінці безвідмовності – до відмови, при оцінці довговічності – до втрати ресурсу), називають *завершеними*, а вибірку – *повною*. Таким чином, у повну вибірку входять лише дані про напрацювання виробів до *граничного стану*. Прикладом повної вибірки є вихідні дані з визначення показників безвідмовності та довговічності.

Спостереження, за яких не всі машини доводять до граничного стану, називають *незавершеними* чи *скороченими*, а результати їх утворюють скорочену вибірку.

Загалом результати незавершених спостережень являють собою вибірку з N значень, в яких міститься r значень напрацювань машин до граничного стану (втраченого ресурсу чи до відмови) і ($N(o)$-$r(l)$) значень напрацювань машин, що залишилися працездатними.

Якщо при незавершених спостереженнях напрацювання всіх машин, що залишилися працездатними, перевищують найбільше значення напрацювань машин, що досягли граничного стану, то вибірку називають *однократно-скороченою*. Якщо напрацювання на момент припинення випробувань при спостереженні мають значення як більші, так і менші, ніж у об'єктів, які досягли граничного стану, то вибірку називають *багатократно-скороченою*. У такій вибірці напрацювання виробів, що досягли граничного стану, і припинення напрацювання чергуються в довільному порядку.

Далі йтиметься лише про повні вибірки. Огляд методів обробки статистичної інформації, що являють собою скорочені вибірки, досить докладно викладено в роботі [1].

Результати спостережень за надійністю машин та їх елементів у тому вигляді, в якому їх отримали за даними експлуатуючих організацій (в управліннях механізації або АТП), являють собою масив або ряд невпорядкованих чисел. На першому етапі одержані дані слід розмістити в порядку збільшення числових значень показників, тобто скласти так званий варіаційний ряд. Якщо виникає необхідність поєднати декілька вибірок, зібраних у різних експлуатаційних організаціях, перевіряють однорідність результатів спостережень за одним із відомих методів: за допомогою критерію згоди, критерію χ^2 (Пірсона) або критерію Андерсена. Останній метод є найсприйнятливішим. Якщо встановлено, що інформація однорідна, можна почати її обробку.

Обробку інформації слід виконувати у такій *послідовності:*

– підготувати інформацію до статистичної обробки;
– перевірити однорідність результатів спостережень;
– побудувати інтегральний статистичний ряд інформації;
– визначити числові характеристики емпіричного розподілу;
– перевірити інформацію на випадаючі точки;
– побудувати гістограму, графіки *P(t),* інтегральної *F(t)* та диференціальної *f(t)* емпіричних функцій розподілу;
– вибрати найбільш прийнятний теоретичний закон розподілу для вирівнювання дослідної інформації;
– визначити значення параметрів закону розподілу;
– апроксимувати (вирівняти) емпіричну криву розподілу;
– перевірити емпіричний і теоретичний розподіл за критерієм згоди;
– визначити довірчі межі розсіювання одиночних і середніх значень показника надійності;
– провести аналіз отриманих результатів.

8.2. Попередня підготовка інформації до обробки

Низька вірогідність вихідних даних, що є основним недоліком інформації, може призвести до грубих помилок при кількісній оцінці надійності. Тому перед статистичною обробкою інформації потрібно провести її попередню обробку та інженерний аналіз. Ретельна підготовка інформації про надійність, як обов'язковий етап, має принципове значення для вірогідних кількісних оцінок. Тому попередню обробку повинні виконувати найбільш кваліфіковані спеціалісти. Без такої підготовки навіть найдосконаліший математичний апарат не забезпечить якості оцінки надійності машин.

Попередня обробка інформації має такі етапи: контроль первинної документації, класифікація відмов і формування масивів інформації для статистичної обробки. *На етапі контролю* первинної документації перевіряють повноту та вірогідність відомостей, зафіксованих у формах обліку та накопичувачів. При цьому проводять контроль даних, що особливо відрізняються, і які отримані в результаті помилок спостереження або в умовах грубих порушень правил експлуатації. Їх треба беззастережно вилучати.

У процесі підготовки інформації зібрані статистичні дані *класифікують за різними ознаками* залежно від розв'язуваних завдань. Наприклад, для виявлення елементів, що лімітують надійність машини і для оперативної розробки заходів щодо її підвищення потрібна класифікація за місцем виникнення та причинами відмов. Повинні бути виявлені відмови, причому досить чисельні, що не мають відношення до властивостей надійності внаслідок використання машин не за призначенням, у певних екстремальних умовах функціонування. Потім відмови поділяють на групи залежно від необхідності обліку їх у разі визначення характеристики довговічності, безвідмовності та ремонтопридатності. Така класифікація дає змогу чітко виділяти масиви інформації, які потребують статистичної обробки при визначенні показників надійності.

Заключний етап попередньої обробки – *формування інформаційних масивів (вибірок)* для проведення статистичної обробки.

У процесі формування масивів для визначення показників надійності враховують відмови, викликані процесами втомленості та природного спрацювання, конструкційні та виробничі (технологічні) відмови.

Виробничі та конструкційні відмови, які після проведених доробок не повторюються протягом спостережуваного періоду, не враховуються. Експлуатаційні відмови, виникнення яких пов'язане з неякісними ремонтами, обробляють окремо для пропозицій з усунення їх в експлуатаційних або ремонтних господарствах.

У масивах вихідних даних досить часто трапляються «сумнівні» значення, які різко виділяються серед останніх. Тому підготовка інформації включає відсіювання інформації, так звану «чистку», перевірку однорідності інформації та її класифікацію.

Якщо відомо, що деякі значення отримані в результаті можливої помилки спостережень, то їх треба відкинути. Також не слід враховувати дані про відмови, що відбулися через порушення вимог інструкції з експлуатації машин.

У процесі обробки інформації доводиться поєднувати дані, що зафіксовані в різний час із різних джерел. Під час підготовки такої інформації має бути *перевірена однорідність умов і режимів експлуатації* машин. Дані, що отримали в істотно різних умовах, не можна поєднувати та обробляти сумісно, а дані, що дістали приблизно в однакових умовах, після якісного аналізу однорідності можна оцінити кількісно.

Попередня підготовка інформації виконується висококваліфікованими фахівцями.

8.3. Перевірка однорідності спостережень

Для перевірки однорідності статистичних даних і можливості спільної обробки їх існує багато методів, які ґрунтуються на різних принципах.

Після того, як визначена мінімальна кількість необхідних даних, треба розв'язати питання, які саме дані мають бути вміщені в склад вибірки. Завдання полягає в тому, щоб із загальної кількості виробів виділити потрібну кількість машин, близьких між собою за напрацюванням, технічним станом та умовами експлуатації Це потрібно для забезпечення однорідності результатів спостереження.

Якщо за машинами спостерігають з початку їх експлуатації, завдання забезпечення однорідності спрощується та зводиться до підбору машин, які використовуються в одних експлуатаційних умовах. В іншому випадку завдання ускладнюється, бо воно стає багатофакторним і треба враховувати вплив кожного фактора за допомогою методу множинної кореляції та ін.

Загалом завдання перевірки однорідності спостережень зводиться до порівняння результатів спостереження двох серій:

$$l^{`}_1 ; l^{`}_2 ; l^{`}_3 ; l^{`}_N \quad \text{та}$$

$$l^{``}_1 ; l^{``}_2 ; l^{``}_3 ; l^{``}_N$$

Кожна із серій надає безперервний розподіл випадкової величини, відповідно, $F (l_1^{`})$ і $F (l_2^{``})$. Потрібно з'ясувати, чи можна вважати, що

$$F (l_1^{`}) = F (l_2^{``}).$$

Тут і далі випадкові значення досліджуваних величин і показників надійності як загалом, так і під час розгляду конкретних прикладів позначатимемо через l (L) або t (T), бо коли йдеться про машини та методи визначення їх показників надійності, перш за все ми маємо на увазі будівельні машини (автокрани, екскаватори, бульдозери та, в тому числі, на автошасі), напрацювання яких визначається в кілометрах пробігу чи мотогодинах роботи.

Одним з найвірогідніших критеріїв оцінки однорідності спостережень є критерій Андерсена. Основною перевагою цього критерію є те, що висновок про справедливість висунутої гіпотези роблять на підставі результатів аналізу всієї сукупності випадкових величин із урахуванням кожного окремого значення. Ця методика описана у спеціальній літературі.

9. МЕТОДИ ОБРОБКИ СТАТИСТИЧНОЇ ІНФОРМАЦІЇ

9.1. Побудова статистичного інтервального ряду та визначення його закономірностей

Для зручності обробки даних у ручному режимі отримана статистична інформація про надійність машин та їх елементів (напрацювання або пробіг до відмови, напрацювання на відмову, напрацювання на поточний або капітальний ремонт) заноситься у неупорядкованому вигляді в таблицю (рекомендується по 10 цифр у кожному рядку).

Приклад. Під спостереження поставлено N об’єктів (N=83). План спостережень [NUN]. Необхідно визначити деякі показники надійності.

Напрацювання до відмови (в км пробігу автокрана) характеризується (умовно) даними, які наведені у табл. 9.1. За попереднім аналізом інформації видно, що значення напрацювання автокрана до відмови „1251” значно відхиляється (як випадаюча точка) від решти напрацювань до відмови, а тому його не потрібно враховувати в подальших розрахунках. Тоді приймаємо, що N=82.

Таблиця 9.1

Статистичні дані напрацювання автокрана до відмови

Числові значення наробітку, км									
721	170	602	846	510	520	657	640	378	141
68	686	525	372	759	455	266	471	313	359
268	590	775	634	660	525	529	188	363	437
497	204	567	878	428	538	677	930	356	1251
248	966	56	276	596	297	503	942	407	213
868	377	334	490	316	263	753	251	195	681
606	396	679	278	385	688	751	886	848	942
388	709	527	759	791	374	443	978	508	490
375	236	215							

У такому вигляді інформація непридатна для обробки, тому її необхідно записати у вигляді впорядкованої вибірки, тобто $l_1<l_2<l_3<...<l_n$. Але за достатньо великої вибірці пошук цифр у неупорядкованій вибірці та розміщення їх у зростаючому порядку займає багато часу. Тому рекомендується скористатися такою методикою. Спочатку визначають кількість інтервалів K з умови виявлення закономірності розподілу значень показника залежно від обсягу вибірки N. Чим більший обсяг інформації, тим беруть більшу кількість інтервалів. Якщо кількість інтервалів велика, то картина розподілу буде спотворена відсутністю дослідних точок в окремих інтервалах, а в разі малої кількості інтервалів будуть

згладжені характерні особливості розподілу. Лише правильний вибір інтервалу дає уявлення про закон розподілу випадкової величини.

Приблизну кількість інтервалів K при $6 \le K \le 20$ визначають за формулою:

$$K = \sqrt{N}, \tag{9.1}$$

де K – кількість інтервалів; N – кількості даних у вибірці.

Якщо $20 \le K \le 30$ кількість інтервалів рекомендується визначати за формулою:

$$K = 10 \ln N. \tag{9.2}$$

Величину K після обчислення округлюють у бік збільшення до найближчого цілого числа. Однак, у деяких випадках у разі обробки статистичних даних розподілених досить нерівномірно іноді зручно в області найбільшої густини розподілу вибирати вужчі інтервали, ніж в області найменшої.

За необхідності, кількість інтервалів може бути зменшена чи збільшена на 1...2 інтервали.

На практиці для вибору кількості інтервалів переважно користуються формулою (9.1).

У даному прикладі кількість даних $N=82$, тоді:

$$K = \sqrt{N} = \sqrt{82} = 9.06 \approx 10,$$

де N – обсяг вибірки.

Далі визначають ширину інтервалу:

$$h = \frac{l_{\max} - l_{\min}}{K - 1}, \tag{9.3}$$

де l_{max} – максимальне значення вибірки (978); $l_{\min}$ – мінімальне значення вибірки (56).

Якщо обсяг вибірки більше 225, кількість інтервалів, визначених з формули (9.1), виявиться більш як 15. У цьому разі інтервал розряду рекомендується визначати за формулою Старджесса

$$h = \frac{l_{\max} - l_{\min}}{1 + 3{,}3 \cdot \lg \cdot N}. \tag{9.4}$$

Користуючись формулою (9.3) і табл. 9.1 вибірки знаходимо:

$$h = \frac{978 - 56}{10 - 1} = 102{,}4.$$

Для зручності (полегшення) подальших розрахунків знайдена величина h за формулою (9.3) округлюється в бік зменшення чи збільшення до цілого числа (50, 100, 150, 200, 250, ... , 1000). Отже приймаємо h = 100. Потім знаходять розширення лівої l_0 і правої l_k границь області розподілення на 0,5h:

$$l_0 = l_{\min} - 0{,}5h, \qquad (9.5)$$

де l_0 – ліва границя 1-го інтервалу; l_0 = 56 – 50.

Оскільки відмова може з'явитися у будь-який час, беремо l_0 = 0

$$l_k = l_{\max} + 0{,}5h, \qquad (9.6)$$

де l_k – права границя останнього інтервалу; l_k = 978 + 50 = 1028.

Приймаємо l_k = 1000.

На підставі отриманих даних можна скласти допоміжну таблицю для підрахунку частот n_i, що відповідають i-му інтервалу (табл. 9.2).

Таблиця 9.2

Підрахунок n_i в i-му інтервалі

№ інт.	Межа інтервалів	Вихідні дані табл. 2.1, що відповідають i-му інтервалу	n_i
1	$(0...1)\cdot 10^2$	68, 56	2
2	$(1...2)\cdot 10^2$	170, 141, 188, 195	4
3	$(2...3)\cdot 10^2$	266, 268, 204, 236, 248, 276, 297, 213, 218, 263, 251, 278	12
4	$(3...4)\cdot 10^2$	378, 388, 372, 313, 359, 375, 363, 356, 377, 344, 316, 374, 396, 385	14
5	$(4...5)\cdot 10^2$	455, 471, 437, 443, 497, 428, 490, 407, 490	9
6	$(5...6)\cdot 10^2$	510, 520, 508, 525, 590, 525, 529, 567, 538, 527, 596, 503	12
7	$(6...7)\cdot 10^2$	502, 657, 640, 686, 634, 660, 677, 681, 606, 679, 688	11
8	$(7...8)\cdot 10^2$	721, 759, 709, 775, 759, 753, 791, 751	8
9	$(8...9)\cdot 10^2$	846, 878, 868, 886, 848	5
10	$(9...10)\cdot 10^2$	930, 966, 942, 978	5
$\sum$	-	-	82

На підставі табл. 9.2 складається упорядкована вибірка (варіаційний ряд) досліджуваної величини (напрацювання до відмови), записуючи в кожному рядку (див. табл. 9.3) по 10 даних, а за даними табл. 9.2 підраховують частоту n_i , тобто кількість даних у кожному інтервалі, які заносять в табл. 9.4.

Таблиця 9.3

Упорядкований варіаційний ряд розподілу напрацювання до відмови

Числові значення напрацювання до відмови, км									
56	68	141	170	188	195	204	213	215	236
248	251	263	266	268	276	278	297	313	316
334	356	359	363	372	374	375	377	378	385
388	396	407	428	437	443	455	471	490	490
497	503	508	510	520	525	525	527	529	538
567	590	596	602	606	634	640	657	660	677
679	681	686	688	709	721	751	753	759	759
775	791	846	848	868	878	886	930	942	942
966	978								

Для спрощення подальших розрахунків у табл. 9.4 заносять також проміжні розрахункові значення деяких величин, що будуть використані у формулах:

– значення середини інтервалів $l_{\text{сер } i}$;
– квадрат величини середини інтервалів ($l^2_{\text{сер } i}$);
– добуток $n_i\, l_{\text{сер } i}$;
– добуток $n_i\, l^2_{\text{сер } i}$.

Далі знаходять суму значень отриманих чисел у колонках 4, 6 і 7 ($\sum n_i,\ \sum n_i\, l_{\text{сер}i},$ і $\sum n_i\, l^2_{\text{сер}i}$). У нашому випадку отримаємо числа відповідно 82, ($414\cdot10^2$) і ($2528{,}5\cdot10^4$), які записуємо внизу табл. 9.4.

Сума частот всіх інтервалів (графа 4) дорівнює обсягу вибірки:

$$\sum_{i=1}^{k} n_i = N . \qquad (9.7)$$

Таблиця 9.4

Розрахункові показники

№	Межі інтервалів $l_{i\text{-}1}$ - l_i	Середина інтервалу $l_{\text{сер } i}$	Частота n_i	$l^2_{\text{сер } i}$	$n_i\, l_{\text{сер } i}$	$n_i\, l^2_{\text{сер } i}$
1	2	3	4	5	6	7
1	$(0-1)\cdot 10^2$	$0{,}5\cdot 10^2$	2	$0{,}25\cdot 10^2$	$1\cdot 10^2$	$0{,}5\cdot 10^4$
2	$(1-2)\cdot 10^2$	$1{,}5\cdot 10^2$	4	$2{,}25\cdot 10^2$	$6\cdot 10^2$	$9\cdot 10^4$
3	$(2-3)\cdot 10^2$	$2{,}5\cdot 10^2$	12	$6{,}25\cdot 10^2$	$30\cdot 10^2$	$75\cdot 10^4$
4	$(3-4)\cdot 10^2$	$3{,}5\cdot 10^2$	14	$12{,}25\cdot 10^2$	$49\cdot 10^2$	$171{,}5\cdot 10^4$
5	$(4-5)\cdot 10^2$	$4{,}5\cdot 10^2$	9	$20{,}25\cdot 10^2$	$40{,}5\cdot 10^2$	$182{,}25\cdot 10^4$
6	$(5-6)\cdot 10^2$	$5{,}5\cdot 10^2$	12	$30{,}25\cdot 10^2$	$66\cdot 10^2$	$363\cdot 10^4$
7	$(6-7)\cdot 10^2$	$6{,}5\cdot 10^2$	11	$42{,}25\cdot 10^2$	$71{,}5\cdot 10^2$	$464{,}75\cdot 10^4$
8	$(7-8)\cdot 10^2$	$7{,}5\cdot 10^2$	8	$56{,}25\cdot 10^2$	$60\cdot 10^2$	$450\cdot 10^4$
9	$(8-9)\cdot 10^2$	$8{,}5\cdot 10^2$	5	$72{,}25\cdot 10^2$	$42{,}5\cdot 10^2$	$361{,}25\cdot 10^4$
10	$(9-10)\cdot 10^2$	$9{,}5\cdot 10^2$	5	$90{,}25\cdot 10^2$	$47{,}5\cdot 10^2$	$451{,}25\cdot 10^4$
$\sum$			$N = 82$		$414\cdot 10^2$	$2528{,}5\cdot 10^4$

Якщо кількість спостережень в окремих інтервалах дуже мала ($0 \le n_i < 5$), рекомендується об’єднувати інтервали, які розташовані поруч. У процесі групування спостережуваних значень випадкової величини l може виникнути питання, до якого розряду віднести значення, що знаходяться на межі двох інтервалів. У таких випадках слід вважати, що дане значення належить однаковою мірою до обох суміжних розрядів і його треба розділити порівну та підсумувати з числами n_i суміжних розрядів.

9.2. Графічні характеристики емпіричного розподілу

Статистичний розподіл досліджуваних величин характеризується:

– частістю розподілу $\hat{P}_i(l)$;

– емпіричною функцією розподілу $\hat{F}_i(l)$;

– емпіричною щільністю розподілу $\hat{f}_i(l)$.

Графічно ці характеристики можна подати у вигляді кривих розподілу. Для їх побудови на осі абсцис відкладають інтервали розподілу (у прикладі їх 10) у будь-якому масштабі, а на осі ординат відповідно значення $\hat{P}_i(l)$; $\hat{F}_i(l)$; $\hat{f}_i(l)$

$$\hat{P}_i(l) = \frac{n_i}{N}; \tag{9.8}$$

$$\hat{P}_i(l_1) = 2/82 = 0{,}024;$$

$$\hat{P}_i(l_2) = 4/82 = 0{,}049;$$

....

$$\hat{P}_i(l_{10}) = 5/82 = 0{,}06.$$

Емпірична функція розподілу $\hat{F}_i(l)$ в практичних ситуаціях є ступінчастою кривою зі стрибками в точках l_1 ; l_2 , а ширина кожного східця відповідатиме довжині інтервалу. При цьому стрибок функції розподілу в точках l дорівнює імовірності $\hat{P}_i(l)$. Значення функції $\hat{F}_1(l)$ (або її висота) для будь-якого i-го інтервалу відповідає значенню накопичених частостей, тобто визначається підсумовуванням усіх частостей інтервалів, що знаходяться лівіше, включаючи частоту i-го інтервалу

$$\hat{F}_1(l) = \hat{P}_1; \tag{9.9}$$

$$\hat{F}_2(l) = \hat{P}_1 + \hat{P}_2;$$

....

$$\hat{F}_{k-1}(l) = \sum_{i=1}^{k-1} \hat{P}_i;$$

$$\hat{F}_k(l) = \sum_{i=1}^{k} \hat{P}_i.$$

З’єднуючи отримані точки кривою дістанемо наближений графік емпіричної функції розподілу

$$\hat{F}_1(l) = 0{,}24;$$

$$\hat{F}_2(l) = 0{,}24 + 0{,}049 = 0{,}073 \text{ і т. д.}$$

Щоб отримати повнішу статистичну характеристику вибірки і для кращої наочності, статистичні дані оформлюють у вигляді гістограми чи полігону розподілу. *Гістограма є графічним зображенням або графіком диференціальної функції розподілу* ймовірностей випадкової величини, побудованим за статистичною інформацією.

Для її побудови використовують ширину інтервалів h_i та емпіричну щільність розподілу $\hat{f}(l_i)$, обчислену для кожного інтервалу за формулою:

$$\hat{f}(l_i) = \frac{P_i}{h_i} = \frac{n_i}{Nh_i}; \tag{9.10}$$

$$\hat{f}(l_1) = \frac{0{,}024}{100} = 2{,}4 \cdot 10^5;$$

$$\hat{f}(l_2) = \frac{0{,}049}{100} = 4{,}9 \cdot 10^5;$$

....

$$\hat{f}(l_{10}) = \frac{0{,}061}{100} = 6{,}1 \cdot 10^5.$$

Отримані за формулами (9.8)-(9.10) дані записують у табл. 9.5 (гр. 5, 6, 7). Показники в граф. 1, 2, 3, 4 переносять із табл. 9.4.

Таблиця 9.5

Результати статистичної обробки даних.

№	Межі інтервалів l_{i-1} - l_i	Середина інтервалу $l_{сер\ i}$	Частота n_i	Частість, $\hat{P}_i$	Емпірична щільність розподілу, $\hat{f}(l_i)$	Емпірична функція розподілу, $\hat{F}(l_i)$
1	2	3	4	5	6	7
1	$(0 – 1) \cdot 10^2$	$0{,}5 \cdot 10^2$	2	0,024	$2{,}4 \cdot 10^{-5}$	0,024
2	$(1 – 2) \cdot 10^2$	$1{,}5 \cdot 10^2$	4	0,049	$4{,}9 \cdot 10^{-5}$	0,072
3	$(2 – 3) \cdot 10^2$	$2{,}5 \cdot 10^2$	12	0,15	$15 \cdot 10^{-5}$	0,223
4	$(3 – 4) \cdot 10^2$	$3{,}5 \cdot 10^2$	14	0,17	$17 \cdot 10^{-5}$	0,392
5	$(4 – 5) \cdot 10^2$	$4{,}5 \cdot 10^2$	9	0,11	$11 \cdot 10^{-5}$	0,503
6	$(5 – 6) \cdot 10^2$	$5{,}5 \cdot 10^2$	12	0,15	$15 \cdot 10^{-5}$	0,652
7	$(6 – 7) \cdot 10^2$	$6{,}5 \cdot 10^2$	11	0,134	$13{,}4 \cdot 10^{-5}$	0,786
8	$(7 – 8) \cdot 10^2$	$7{,}5 \cdot 10^2$	8	0,098	$9{,}8 \cdot 10^{-5}$	0,884
9	$(8 – 9) \cdot 10^2$	$8{,}5 \cdot 10^2$	5	0,061	$6{,}1 \cdot 10^{-5}$	0,943
10	$(9 – 10) \cdot 10^2$	$9{,}5 \cdot 10^2$	5	0,061	$6{,}1 \cdot 10^{-5}$	1,00

На підставі даних табл. 9.4, 9.5 будуємо гістограму та криві емпіричної функції розподілу $\hat{F}(l_i)$ емпіричної щільності розподілу $\hat{f}(l_i)$ (рис. 9.1, 9.2, 9.3).

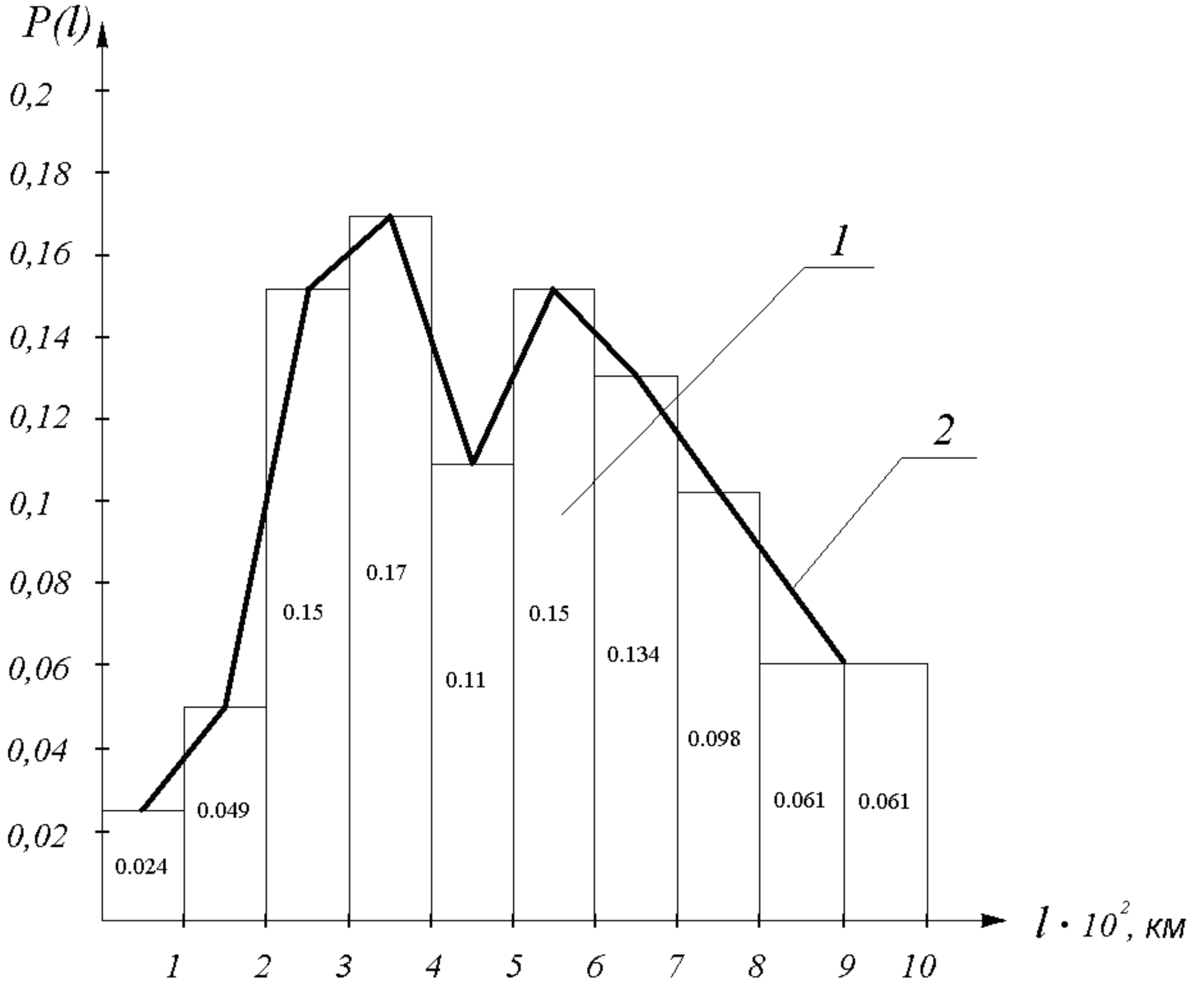


Рис. 9.1. Гістограма (*1*) і полігон відносних частот (*2*) емпіричного розподілу

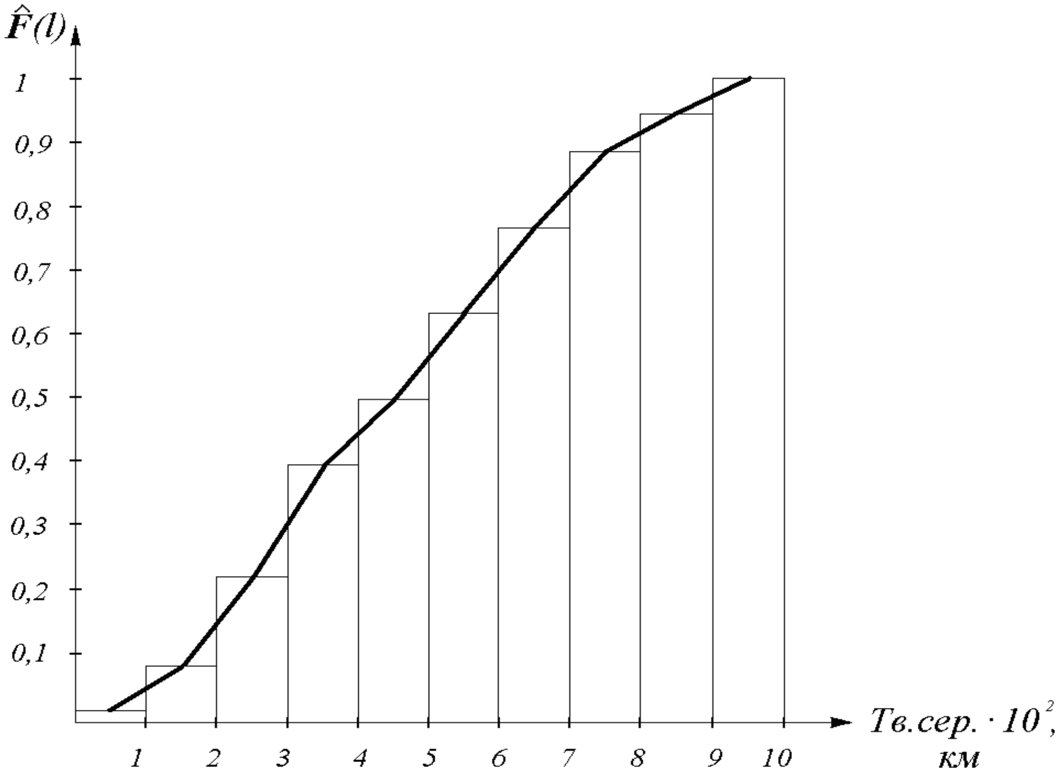


Рис. 9.2. Графік емпіричної функції розподілу $\hat{F}(l_i)$

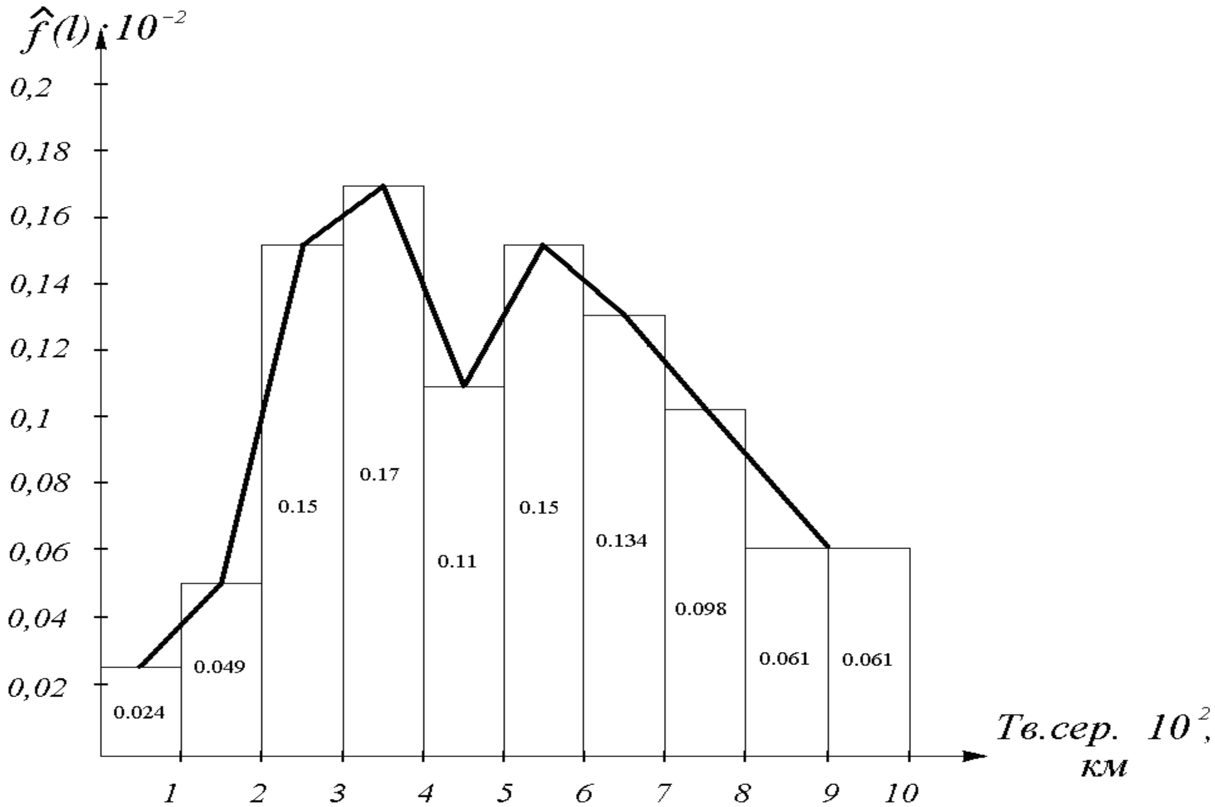


Рис. 9.3. Графік емпіричної щільності розподілу $\hat{f}(l_i)$

9.3. Визначення числових характеристик емпіричного розподілу

У процесі розв'язання більшості практичних завдань надійності немає потреби знати всі можливі значення випадкової величини та відповідні їм імовірності, а зручніше користуватися деякими кількісними показниками, які дають достатню інформацію про випадкову величину. Такі показники відтворюють найістотніші особливості статистичного розподілу та називаються числовими характеристиками випадкових величин. До них відносяться: математичне сподівання, дисперсія, середнє квадратичне відхилення, початкові та центральні моменти, медіана, мода, коефіцієнт асиметрії та ексцесу, коефіцієнт варіації.

У практичних розрахунках обчислення цілком достатньо найважливіших статистичних характеристик – статистичного середнього значення $L_{\text{сер}}$, статистичної дисперсії D і середнього квадратичного відхилення σ та коефіцієнта варіації V, які визначають основні особливості статистичного ряду, що аналізують (досліджують). Для визначення цих характеристик існують декілька методів:

- табличний метод;
- метод сум;
- метод центральних моментів.

9.4. Табличний метод розрахунків

Середнє напрацювання до відмови $L_{\text{сер}}$ визначають за формулою:

$$L_{\text{сер}} = \frac{\sum_{i=1}^{k} l_{\text{сер}\, i} \cdot n_i}{N}, \tag{9.11}$$

де $\sum_{i=1}^{k} l_{\text{сер}\ i}$ – сума значень в гр. 6 (табл. 9.3); n_i – частота; N_i – кількість даних у виборці (табл. 9.4).

Підрахувавши, отримаємо:

$$L_{\text{сер}} = \frac{414 \cdot 10^2}{82} = 505 \ (\text{км}).$$

Середнє квадратичне відхилення досліджуваної величини на підставі табл. 9.4 буде дорівнювати:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{k} n_i t_{\text{сер } i}^2}{W} - L_{\text{сер}}^2}; \tag{9.12}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{2528{,}5 \cdot 10^4}{82} - 505^2} = 23.$$

Коефіцієнт варіації *V* підраховують за формулою (2.7):

$$V = \frac{\sigma}{L_{\text{сер}}};$$

$$V = \frac{231}{505} = 0{,}46.$$

9.5. Розрахунок показників методом сум

Цей метод використовують для великої кількості інформації або для перевірки розрахунку табличним методом. Він значно простіший від попереднього методу, а розбіжність підрахованих величин дуже мала або майже відсутня.

Для підрахунку заповнюють табл. 9.6. У графу 1 записують середини інтервалів, у графу 2 – частість n_i (див. табл. 9.5, графи 3 і 4).

У графі 3 (табл. 9.6) проти найбільшого значення частоти (у нашому випадку 14) ставлять тире, частоту n_1 ($n_1 = 2$) переносять в гр. 3. Далі заносять суму величин за стрілками до тире і аналогічно ведуть підрахунок знизу до тире також за стрілками $n_к$ ($n_к = 5$) переносять в гр. 3 і далі записують суму (у нашому випадку: 5+5 = 10; 10+8 і т.д.). Після цього підраховують значення $К_I$ і $Л_I$ як суму цифр графи 4 зверху тобто (в нашому випадку)

$$К_I = \sum К_i = (2 + 6 + 18) = 26;$$

$$Л_I = \sum Л_i = (5 + 10 + 18 + 29 + 41 + 50) = 153.$$

Графу 4 заповнюють на підставі гр. 3 аналогічно. При цьому отримуємо $K_{II} = 10$, та $Л_{II} = 218$ (табл. 9.6).

Середнє значення напрацювання до відмови та середнє квадратичне відхилення знаходимо за формулами:

$$L_{\text{сер}} = l_{j\text{сер.}} - \frac{h\mu_1}{N}; \tag{9.13}$$

$$\sigma = h \cdot \sqrt{\frac{\mu_2 - \mu_1^2 / N}{N}}. \tag{9.14}$$

де $l_{j\text{сер.}}$ – найбільше значення частоти n_i (n_i = 14) проти якого стоїть тире; h – значення інтервалу; μ_1 і μ_2 – допоміжні коефіцієнти;

$$\mu_1 = k_I - Л_I = 26 - 153 = 127;$$

$$\mu_2 = k_I + Л_I + 2(k_{II} + Л_{II}) = 26 + 153 + 2 \cdot (10 + 218) = 635.$$

Таблиця 9.6

Допоміжна таблиця розрахунків за методом сум

Середина інтервалів, $l_{\text{ср}\, i}$	Частоти, n_i	$K_I = 26$	$K_{II} = 10$
1	2	3	4
$0,5 \cdot 10^2$	2	2	2
$1,5 \cdot 10^2$	4	6	8
$2,5 \cdot 10^2$	12	18	-
$3,5 \cdot 10^2$	14	-	-
$4,5 \cdot 10^2$	9	50	-
$5,5 \cdot 10^2$	12	41	103
$6,5 \cdot 10^2$	11	29	62
$7,5 \cdot 10^2$	8	18	33
$8,5 \cdot 10^2$	5	10	15
$9,5 \cdot 10^2$	5	5	5
$\sum$	$N = 82$	$Л_I = 153$	$Л_{II} = 218$

Отже,

$$L_{\text{сер}} = 350 - \frac{100 \cdot (-127)}{82} = 505;$$

$$\sigma = 100\sqrt{\frac{635 - (-127)^2 / 82}{82}} = 231;$$

$$V = \frac{\sigma}{T_{в.\text{сер.}}} = \frac{231}{505} = 0{,}46.$$

За підрахунком $L_{\text{сер}}$, σ і V методом сум, ми отримали ті ж самі значення, що і за підрахунком табличним методом.

9.6. Перевірка інформації на точки, що випадають

У отриманій статистичній інформації про показники надійності можуть бути помилкові дані, що випадають із варіаційного ряду. Тому перед кінцевою математичною обробкою інформацію перевіряють на так звані точки, що випадають.

Грубу перевірку інформації проводять за правилом $L_{\text{сер}} \pm 3\sigma$, де $L_{\text{сер}}$ – середнє значення вибірки. Якщо крайні точки інформації не виходять за межі $\pm\, 3\sigma$, то приймають гіпотезу, що всі дані справжні. Однак цей критерій виявиться досить вірогідним тоді, коли розподіл випадкової величини підпорядковується нормальному закону розподілу, що відомо з раніше проведених досліджень.

Виходячи з теореми Ляпунова про те, що розподіл середнього значення, яке дістали з N незалежних випробувань відносно однієї і тієї самої випадкової величини, завжди прямує до нормального закону розподілу, яким би не був сам розподіл випадкової величини. Перевірку приналежностей найбільших (найменших) значень до генеральної сукупності можна розрахувати за формулою

$$P = \left[0{,}5 + \Phi_0\left(\gamma\sqrt{\frac{N}{N-1}}\right)\right], \tag{9.15}$$

де $\Phi_о$ – функція Лапласа, значення якої подаються в спеціальній літературі; γ – коефіцієнт, що визначається за формулою:

$$\gamma = \frac{l_1 - l_{\text{сер}}}{\sigma}.$$

Якщо імовірність P нижча прийнятого рівня значущості, то значення l_n вилучають з розгляду. За рівень значущості можна прийняти значення порядку 0,05 і навіть менше, якщо це доцільно.

Для оцінки найменшого і найбільшого значень l_n беруть

$$\gamma_H = \frac{L_{\text{сер}} - l_1}{\sigma}; \qquad (9.16)$$

$$\gamma_B = \frac{l_{\max} - L_{\text{сер}}}{\sigma}. \qquad (9.17)$$

Якщо закон розподілу невідомий, перевірку як крайніх, так і будь-яких інших суміжних точок інформації на їхню належність до вибірки можна проводити за критерієм Ірвина (критерій λ).

Теоретичні значення критерію λ_T за різних значень інформації залежно від довірчої імовірності γ подано в табл. 9.7.

Таблиця 9.7

Коефіцієнт Ірвина $\lambda_Т$

Обсяг інформації N	10	20	30	50	100	400
$\lambda_Т$, якщо β = 0,95	1,5	1,3	1,2	1,1	1,0	0,9
$\lambda_Т$, якщо β = 0,99	2,0	1,8	1,7	1,6	1,5	1,3

Фактичне (розрахункове) значення критерію $\lambda_Р$ визначають за рівнянням:

$$\lambda_{\text{Н}} = \frac{1}{\sigma}(l_{i+1} - l_i);$$

$$\lambda_{\text{В}} = \frac{1}{\sigma}(l_{\text{К}} - l_{\text{К}-1}), \qquad J = \overline{1, N}. \qquad (9.18)$$

де l_{i+1} і l_1 – суміжні точки числа інформації.

При цьому має бути дотримана умова $\lambda_Р < \lambda_Т$. Якщо в результаті перевіряння ряд точок інформації виключається з вибірки, то середнє досліджуване значення та середнє квадратичне відхилення слід перерахувати за уточненою вибіркою.

Приклад. Для вибірки, що застосовують у прикладі, визначити залежність до неї крайніх членів.

а). При використанні рівностей (9.16) і (9.17) перевіряємо належність до вибірки $t_{(N)} = t_{\max}$.

Визначаємо значення γ_B за формулою

$$\gamma_B = \frac{978 - 505}{231} = 2{,}05.$$

Тоді

$$\Phi_0\left(\gamma\sqrt{\frac{N}{N-1}}\right) = \Phi_0\left(2{,}05\sqrt{\frac{82}{82-1}}\right) = \Phi_0(2{,}06) = 0{,}98.$$

Значення $P = 0{,}98 > 0{,}05$, тому $t_{max} = 978$ вилучати не слід. Для перевірки належності найменшого значення вибірки «56» знаходимо:

$$\gamma_H = \frac{505 - 56}{231} = 1{,}94;$$

$$\Phi_0\left(\gamma\sqrt{\frac{N}{N-1}}\right) = \Phi_0\left(1{,}94\sqrt{\frac{82}{82-1}}\right) = \Phi_0(1{,}95) = 0{,}97.$$

Значення $P = 0{,}97 > 0{,}05$, тому $t_{min} = 56$ вилучати теж не слід.

б). При використанні критерію Ірвина λ_p за формулою (9.18):

– для найбільшого значення

$$\lambda_B \frac{978 - 966}{231} = 0{,}05;$$

– для найменшого значення

$$\lambda_H = \frac{68 - 56}{231} = 0{,}05.$$

Теоретичне значення λ_T при $N = 82$ і $\beta = 0{,}95$ за табл. 9.7 становить 1,0.

Отже, $\lambda_H = 0{,}05 < \lambda_T = 1{,}0$ і $\lambda_B = 0{,}05 < \lambda_T = 1{,}0$, тобто і за критерієм Ірвина обидві крайні точки також вірогідні.

9.7. Попередній вибір теоретичного закону розподілу

Одним з головних завдань при статистичній обробці результатів спостережень є апроксимація емпіричних розподілів будь-яким теоретичним законом розподілу, який найкращим чином відтворював би характерні ознаки емпіричного ряду.

У процесі вибору функції розглядають не будь-які довільні розподіли, а такі, що однозначно визначаються невеликою кількістю параметрів. Зазвичай перевагу віддають одно-, двопараметричним розподілам.

Під час аналізу надійності виробів використовують різноманітні неперервні та дискретні розподіли, які детально описані в технічній літературі з теорії надійності. Найчастіше в практиці досліджень показників надійності машин використовують такі теоретичні закони розподілу, як: нормальний, логарифмічно-нормальний, експоненціальний, розподіл Вейбула, гамма-розподіл тощо.

Вибір одного з теоретичних законів для вирівнювання емпіричного розподілу та перевірки гіпотези про узгодженість їх на першій стадії здійснюється, виходячи з теоретичних міркувань, пов'язаних із суттю завдання чи з аналогічних завдань, досвіду, інтуїції, основних відомостей про закони розподілу. У деяких випадках теоретичну криву вибирають, враховуючи зовнішній вигляд статистичного розподілу (гістограми, кривої емпіричної щільності розподілу). Зручним показником для орієнтовної оцінки теоретичного закону розподілу є коефіцієнт варіації V.

- Так, якщо коефіцієнт варіації V знаходиться в межах $0 < V \leq 0{,}33$, то дані, які дістали в результаті розрахунків, зазвичай, відповідають *нормальному закону розподілу*. При цьому законі додатковими критеріями можуть бути коефіцієнти асиметрії: $A = 0$ та коефіцієнт ексцеса $E = 3$.
- Якщо $0{,}33 \leq V \leq 0{,}8$, то розсіювання випадкової величини може підкорятися як нормальному закону розподілу, так і *закону Вейбула-Гнеденко.* Тому допустимість їх несуперечливості слід ураховувати за критеріями узгодженості.
- Якщо дисперсія D випадкової величини дорівнює її математичному сподіванню, то можна чекати появи закону Пуассона.
- Якщо $0{,}8 < V < 1{,}0$, то діє закон Вейбула-Гнеденко, який в окремому випадку переходить у закон Реллея при $V = 0{,}52$ і $b = 2{,}0$ (b – параметр розподілу Вейбула) і в експоненціальний закон при $V = 1{,}0$ і $b = 1{,}0$.

За критерій вибору закону розподілу, як правило, беруть найкраще узгоджені теоретичний і статистичний розподіли. У разі доброї узгодженості із декількома розподілами перевагу надають законам розподілу, що мають мінімальну кількість параметрів і простоту визначення їх, а також відповідають фізичній суті досліджуваних явищ (з урахуванням раніше проведених досліджень).

Якщо вибрано передбачуваний теоретичний закон розподілу, то на наступному етапі (на підставі статистичних даних) визначають значення його параметрів, які входять до формули диференціальної $f(x)$ та інтегральної $F(x)$ функції розподілу. Якщо висувається не одна, а декілька гіпотез, то оцінюються параметри декількох законів розподілу. Методика та формули для визначення параметрів закону розподілу наведена в розд. 4. На цьому етапі проводиться так зване вирівнювання кривої розподілу. Для цього у формули щільності розподілу підставляють отримані значення параметрів передбачуваного закону (або декількох) розподілу і отримують теоретичні значення вирівняної кривої розподілу.

9.8. Визначення параметрів законів розподілу за даними розрахунку наведеного прикладу

Зовнішній вигляд гістограми, величина коефіцієнта варіації та ін. дають підстави зробити попередній висновок, що розподіл напрацювання на відмову може одночасно підкорятися як нормальному закону так і закону Вейбулла. Висуваючи дві гіпотези про вид теоретичної функції, визначимо параметри обох передбачуваних законів розподілів.

Визначення параметрів нормального закону розподілу

$$f(l_i) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(l_i - L_{\text{сер}})^2}{2\sigma^2}}; \qquad (9.19)$$

$$f(l_1)=\frac{1}{231\sqrt{2\cdot 3{,}14}}2{,}7183^{-\frac{(50-505)^2}{2\cdot 231^2}}=2{,}44\cdot 10^{-4};$$

$$f(l_2)=\frac{1}{231\sqrt{2\cdot 3{,}14}}2{,}7183^{-\frac{(150-505)^2}{2\cdot 231^2}}=5{,}22\cdot 10^{-4}\$$$

. . . .

$$f(l_{10})=\frac{1}{231\sqrt{2\cdot 3{,}14}}2{,}7183^{-\frac{(950-505)^2}{2\cdot 231^2}}=2{,}65\cdot 10^{-4}.$$

Підраховані дані диференціальної функції *f(l)* за формулою (9.19) заносимо в табл. 9.8.

Таблиця 9.8

Значення функції *f(l)* для нормального закону

№ інтервалу	Середина інтервалу l_i	Диференціальна функція, *f(l)*
1	$0{,}5\cdot 10^{12}$	$2{,}44\cdot 10^{-4}$
2	$1{,}5\cdot 10^{12}$	$5{,}22\cdot 10^{-4}$
3	$2{,}5\cdot 10^{12}$	$9{,}24\cdot 10^{-4}$
4	$3{,}5\cdot 10^{12}$	$13{,}5\cdot 10^{-4}$
5	$4{,}5\cdot 10^{12}$	$16{,}5\cdot 10^{-4}$
6	$5{,}5\cdot 10^{12}$	$16{,}7\cdot 10^{-4}$
7	$6{,}5\cdot 10^{12}$	$14\cdot 10^{-4}$
8	$7{,}5\cdot 10^{12}$	$9{,}71\cdot 10^{-4}$
9	$8{,}5\cdot 10^{12}$	$5{,}55\cdot 10^{-4}$
10	$9{,}5\cdot 10^{12}$	$2{,}65\cdot 10^{-4}$

Визначення параметрів закону розподілу Вейбула

$$f(l_i)=\frac{b}{a}\left(\frac{l_i}{a}\right)^{b-1}\cdot e^{\left(\left(\frac{l_i}{a}\right)^{b}\right)}, \qquad (9.20)$$

де $a=\dfrac{\sigma}{C\text{в}}$.

За таблицею дод. 2: при V =0,461 Св = 0,408; в = 2,3.

Отже, $a = \frac{231}{0,408} = 566,2$.

$$f(l_1) = \frac{2,3}{566,2}\left(\frac{50}{566,2}\right)^{2,3-1} \cdot 2,7183^{\left[-\left(\frac{50}{566,2}\right)^{2,3}\right]} = 1,73 \cdot 10^{-4};$$

$$f(l_2) = \frac{2,3}{566,2}\left(\frac{150}{566,2}\right)^{2,3-1} \cdot 2,7183^{\left[-\left(\frac{150}{566,2}\right)^{2,3}\right]} = 6,96 \cdot 10^{-4};$$

…………………………………………………………………..

$$f(l_{10}) = \frac{2,3}{566,2}\left(\frac{150}{566,2}\right)^{2,3-1} \cdot 2,7183^{\left[-\left(\frac{950}{566,2}\right)^{2,3}\right]} = 3 \cdot 10^{-4}.$$

Значення диференціальної функції розподілу $f(l_i)$ для закону Вейбула заносимо у табл. 9.9.

Таблиця 9.9

Значення функції *f(l)* для закону Вейбула

№ інтервалу	Середина інтервалу l_i	Диференціальна функція, $f(l)$
1	$0,5 \cdot 10^{12}$	$1,73 \cdot 10^{-4}$
2	$1,5 \cdot 10^{12}$	$6,96 \cdot 10^{-4}$
3	$2,5 \cdot 10^{12}$	$12,2 \cdot 10^{-4}$
4	$3,5 \cdot 10^{12}$	$15,8 \cdot 10^{-4}$
5	$4,5 \cdot 10^{12}$	$16,9 \cdot 10^{-4}$
6	$5,5 \cdot 10^{12}$	$15,6 \cdot 10^{-4}$
7	$6,5 \cdot 10^{12}$	$12,1 \cdot 10^{-4}$
8	$7,5 \cdot 10^{12}$	$8,8 \cdot 10^{-4}$
9	$8,5 \cdot 10^{12}$	$5,7 \cdot 10^{-4}$
10	$9,5 \cdot 10^{12}$	$3 \cdot 10^{-4}$

Теоретичні точки $f(l)$ за нормальним законом розподілу та розподілом Вейбула наносимо на вже отриманий графік емпіричної щільності $\hat{f}(l_i)$ (див. рис. 9.3) і з'єднуємо ці точки плавною кривою. Це і будуть теоретичні криві розподілу диференціальної функції $f(l)$ за нормальним законом і законом Вейбула (рис.9.4).

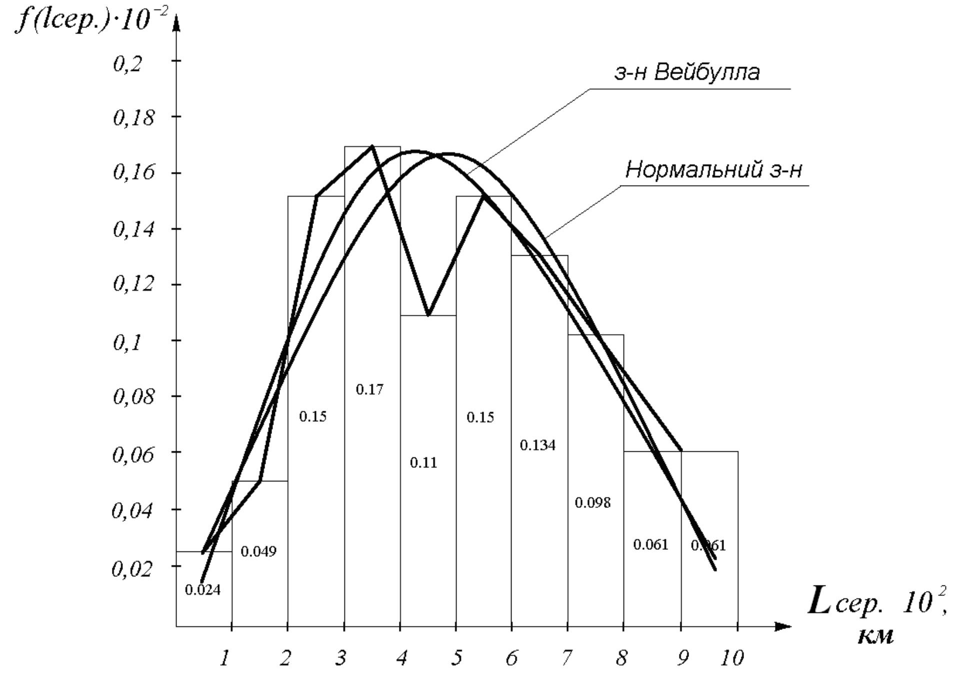


Рис. 9.4. Криві розподілу *f(l)*

Побудувавши і візуально зіставивши графіки теоретичної та емпіричної кривих розподілу, можна лише приблизно оцінити їх схожість і належність емпіричного розподілу до одного із його теоретичних законів. Але більш точну та науково обґрунтовану узгодженість із емпіричним розподілом проводять за одним із критеріїв (Пірсона – χ^2, Колмогорова та ін.).

9.9. Перевірка узгодженості емпіричного та теоретичного законів розподілу

Після вирівнювання емпіричної кривої визначають її відповідність вибраному теоретичному закону, оскільки навіть для добре підібраної теоретичної кривої розподілу завжди між нею та статистичним розподілом є деякі розходження.

Хоча в математичній статистиці й існують різні критерії узгодженості між ними, однак слід мати на увазі, що процедура перевірки гіпотези про вид функції розподілу будь-якого з критеріїв є перевіркою на відкидання, а не на прийняття гіпотези. Вона дає змогу дістати лише одну відповідь із двох:

1 – немає досить серйозних підстав відкинути гіпотезу;

2 – є досить серйозні підстави відкинути гіпотезу.

Стосовно до показників надійності сучасних машин для перевірки узгодженості теоретичного та статистичного розподілів найчастіше використовують критерії χ^2 Пірсона або Колмогорова.

Критерій χ^2 Пірсона для великої кількості спостережень зводить помилки до мінімуму, чим вигідно відрізняється від інших критеріїв згоди.

Обчислювальна схема визначення узгодженості за критерієм χ^2 зводиться до таких дій.

Визначають міру розбіжності за формулою

$$\chi^2 = Nh_i \sum_{i=1}^{k} \frac{\left[\hat{f}(l_{\text{сер}\,i}) - f(l_{\text{сер}\,i})\right]^2}{f(l_{\text{сер}\,i})}, \qquad (9.21)$$

де N – загальна кількість спостережень; h_i – ширина i-го інтервалу; k – кількість інтервалів; $\hat{f}(l_{\text{сер}\,i})$ та $f(l_{\text{сер}\,i})$ – емпірична і теоретична щільність імовірності розподілу; $\chi_{\text{сер}}$ – середина i-го інтервалу для неперервної випадкової величини чи можливі значення для дискретної.

Інтервали, в яких значення частоти $n_i < 5$ слід об'єднувати з інтервалами, що стоять поруч.

Після знаходження χ^2 визначають кількість степенів вільності

$$r = k - S - 1, \qquad (9.22)$$

де S –кількість параметрів теоретичної функції розподілу.

За отриманими значеннями r і χ^2 визначають імовірність узгодженості $P(r,\ \chi^2)$. Значення функції $P(r,\ \chi^2)$ наведені в дод. 3. Якщо $P(r,\ \chi^2) \geq 0{,}05$, то вважають, що немає достатньої підстави відхиляти висунуту гіпотезу, а статистичний розподіл достатньою мірою узгоджується з теоретичним. Якщо $P(r,\ \chi^2) < 0{,}05$, то зазначені розбіжності будуть невипадковими, а обраний теоретичний закон розподілу відхиляється на досить серйозній підставі.

Критерій Колмогорова відрізняється від критерію χ^2 Пірсона своєю простотою, однак дає свідомо завищені значення імовірності *P(λ)*. Його слід застосовувати лише тоді, коли закон розподілу завчасно відомий.

Обчислювальна схема використання критерію узгодженості Колмогорова містить кілька етапів. Визначають емпіричні та теоретичні значення функції розподілу $\hat{F}(l_{\text{сер}\,i})$ і $F(l_{\text{сер}\,i})$. Обчислюють абсолютні значення різниці між теоретичною й емпіричною функціями розподілу для однакових значень аргументу, а потім вибирають найбільшу:

$$D_{\max} = \max\left|\hat{F}(l_{\text{сер}\,i}) - F(l_{\text{сер}\,i})\right|. \tag{9.23}$$

На наступному етапі визначають значення критерію Колмогорова:

$$\lambda = D_{\max}\sqrt{N}. \tag{9.24}$$

Для обчислення значення λ за даними табл. 9.9 визначають імовірність узгодженості *P(λ)*.

Таблиця 9.10

Критерій Колмогорова P(λ)

λ	*P(λ)*	λ	*P(λ)*	λ	*P(λ)*
0,30	1,000	0,50	0,964	0,64	0,807
0,35	0,999	0,55	0,923	0,65	0,792
0,40	0,997	0,58	0,890	0,70	0,744
0,45	0,987	0,60	0,864	0,75	0,627
0,80	0,544	1,10	0,178	1,60	0,012
0,85	0,465	1,20	0,112	1,70	0,006
0,90	0,393	1,30	0,068	1,80	0,003
0,95	0,328	1,40	0,040	1,90	0,002
1,00	0,270	1,50	0,022	2,00	0,001

Якщо *P(λ)* >0,3 , то буде узгодженість, якщо *P(λ)* <0,2...0,3 гіпотеза відхиляється.

Якщо вибраний теоретичний закон розподілу відхиляється, тобто $P(r, \chi^2)$<0,05 або $P(\lambda)$ <0,2...0,3, то для описання статистичних даних треба знайти більш прийнятний закон розподілу. Якщо декілька теоретичних кривих не дають істотної розбіжності з емпіричною, то за вихідну беруть ту, яка відображає найбільшу імовірність узгодженості.

У разі рівних або близьких за значенням імовірностей узгодженості перевагу слід віддавати розподілам з меншою кількістю параметрів.

Продовжуючи розглядати вищенаведений приклад, проведемо перевірку узгодженості статистичного та теоретичних (нормального та закону Вейбула) розподілів за критерієм χ^2 Пірсона.

Міру розбіжності теоретичного та емпіричного розподілу визначаємо за формулою (9.21)

$$\chi^2 = Nh_i \sum_{i=1}^{k} \frac{\left[\hat{f}(l_{\text{сер}\,i}) - f(l_{\text{сер}\,i})\right]^2}{f(l_{\text{сер}\ i})}.$$

Для нормального закону розподілу:

$$\chi^2 = 82 \cdot 100 \sum_{i=1}^{k} \left[\frac{\left(2,4 \cdot 10^{-4} - 2,44 \cdot 10^{-4}\right)^2}{2,44 \cdot 10^{-4}} + \frac{\left(4,9 \cdot 10^{-4} - 5,22 \cdot 10^{-4}\right)^2}{5,22 \cdot 10^{-4}} + \right.$$

$$+ \frac{\left(15 \cdot 10^{-4} - 9,24 \cdot 10^{-4}\right)^2}{9,24 \cdot 10^{-4}} + \frac{\left(17 \cdot 10^{-4} - 13,5 \cdot 10^{-4}\right)^2}{13,5 \cdot 10^{-4}} + \frac{\left(11 \cdot 10^{-4} - 16,5 \cdot 10^{-4}\right)^2}{16,5 \cdot 10^{-4}} +$$

$$+ \frac{\left(15 \cdot 10^{-4} - 16,7 \cdot 10^{-4}\right)^2}{16,7 \cdot 10^{-4}} + \frac{\left(13,4 \cdot 10^{-4} - 14 \cdot 10^{-4}\right)^2}{14 \cdot 10^{-4}} + \frac{\left(9,8 \cdot 10^{-4} - 9,71 \cdot 10^{-4}\right)^2}{9,71 \cdot 10^{-4}} +$$

$$\left. + \frac{\left(6,1 \cdot 10^{-4} - 5,55 \cdot 10^{-4}\right)^2}{5,55 \cdot 10^{-4}} + \frac{\left(6,1 \cdot 10^{-4} - 2,65 \cdot 10^{-4}\right)^2}{2,65 \cdot 10^{-4}} \right] = 9,02.$$

Кількість степенів вільності:

$$r = k - S - 1,$$

де S – кількість параметрів теоретичної функції розподілу, (S=2); k – кількість інтервалів.

Отже, r = 10 – 2 – 1 = 7.

Для закону розподілу Вейбула

$$\chi^2 = 82 \cdot 100 \sum_{i=1}^{k} \left[\frac{\left(2{,}4 \cdot 10^{-4} - 1{,}73 \cdot 10^{-4}\right)^2}{1{,}73 \cdot 10^{-4}} + \frac{\left(4{,}9 \cdot 10^{-4} - 6{,}96 \cdot 10^{-4}\right)^2}{6{,}96 \cdot 10^{-4}} + \right.$$

$$+ \frac{\left(15 \cdot 10^{-4} - 12{,}2 \cdot 10^{-4}\right)^2}{12{,}2 \cdot 10^{-4}} + \frac{\left(17 \cdot 10^{-4} - 15{,}8 \cdot 10^{-4}\right)^2}{15{,}8 \cdot 10^{-4}} + \frac{\left(11 \cdot 10^{-4} - 16{,}9 \cdot 10^{-4}\right)^2}{16{,}9 \cdot 10^{-4}} +$$

$$+ \frac{\left(15 \cdot 10^{-4} - 15{,}6 \cdot 10^{-4}\right)^2}{15{,}6 \cdot 10^{-4}} + \frac{\left(13{,}4 \cdot 10^{-4} - 12{,}1 \cdot 10^{-4}\right)^2}{12{,}1 \cdot 10^{-4}} + \frac{\left(9{,}8 \cdot 10^{-4} - 8{,}8 \cdot 10^{-4}\right)^2}{8{,}8 \cdot 10^{-4}} +$$

$$\left. + \frac{\left(6{,}1 \cdot 10^{-4} - 5{,}7 \cdot 10^{-4}\right)^2}{5{,}7 \cdot 10^{-4}} + \frac{\left(6{,}1 \cdot 10^{-4} - 3 \cdot 10^{-4}\right)^2}{3 \cdot 10^{-4}} \right] = 5{,}9.$$

Кількість степенів вільності

$$r = 10 - 2 - 1 = 7.$$

Імовірність узгодженості $P(r, \chi^2)$ теоретичних та емпіричного розподілів визначаємо за таблицею дод. 3:

– для нормального закону $P(r, \chi^2) = 0{,}25$;

– для закону Вейбула $P(r, \chi^2) = 0{,}6$.

На базі результатів перевірки узгодженості, ми не маємо підстав відхилити гіпотезу, що статистичний розподіл напрацювання до відмови не узгоджується за цими законами. Розподіл достатньою мірою узгоджується з нормальним теоретичним законом ($P(r, \chi^2) = 0{,}25$) і набагато краще – із законом розподілу Вейбула ($P(r, \chi^2) = 0{,}6$).

Тому в подальших розрахунках будемо вважати, що напрацювання до відмови підпорядковується закону Вейбула.

10. ОЦІНКА ДЕЯКИХ ПОКАЗНИКІВ НАДІЙНОСТІ ЗА ДАНИМИ ДОСЛІДЖЕННЯ

На базі отриманих результатів статистичної обробки даних про напрацювання до відмови оцінюємо такі показники надійності, як імовірність безвідмовної роботи $P(l)$, та імовірність відмови $Q(l)$, гамма-відсоткове напрацювання на відмову L_γ та інтенсивність відмов $\lambda(l_i)$ об’єктів.

Оскільки прийнято рішення, що емпіричний розподіл найкращим чином узгоджується із законом Вейбула, то розрахунки показників надійності необхідно проводити за відповідними моделями для цього закону (див. табл. 7.1)

Імовірність безвідмовної роботи *P(l)* та імовірність відмови *Q(l)*, визначаємо для середин інтервалів за такими моделями:

$$Q(l_i) = 1 - e^{\left[-\left(\frac{l_{\text{сер}}}{a}\right)^b\right]}; \tag{10.1}$$

$$P(l_i) = e^{\left[-\left(\frac{l_{\text{сер}}}{a}\right)^b\right]}; \tag{10.2}$$

$$Q(l_1) = 1 - 2{,}7183^{\left[-\left(\frac{50}{566{,}2}\right)^{2{,}3}\right]} = 0{,}004 \text{ і т.д.};$$

$$P(l_1) = 2{,}7183^{\left[-\left(\frac{50}{566{,}2}\right)^{2{,}3}\right]} = 0{,}996 \text{ і т.д.}$$

Отримані результати заносять в табл. 10.1 і за ними будують графіки функцій *P(l)* і *Q(l)* (рис 10.1).

Таблиця 10.1

Значення функцій *P(l)*, і *Q(l)*

№	Середина інтервалів $l_{\text{сер } i}$, км	$Q(l_{\text{сер } i})$	$P(l_{\text{сер } i})$,	$\lambda(l_{\text{сер.}})$, від./км
1	50	0,004	0,996	1,429
2	150	0,05	0,95	5,961
3	250	0,14	0,86	11,581
4	350	0,28	0,72	17,935
5	450	0,45	0,55	24,865
6	550	0,61	0,39	32,276
7	650	0,75	0,25	40,106
8	750	0,85	0,15	48,332
9	850	0,92	0,08	56,841
10	950	0,96	0,04	65,684

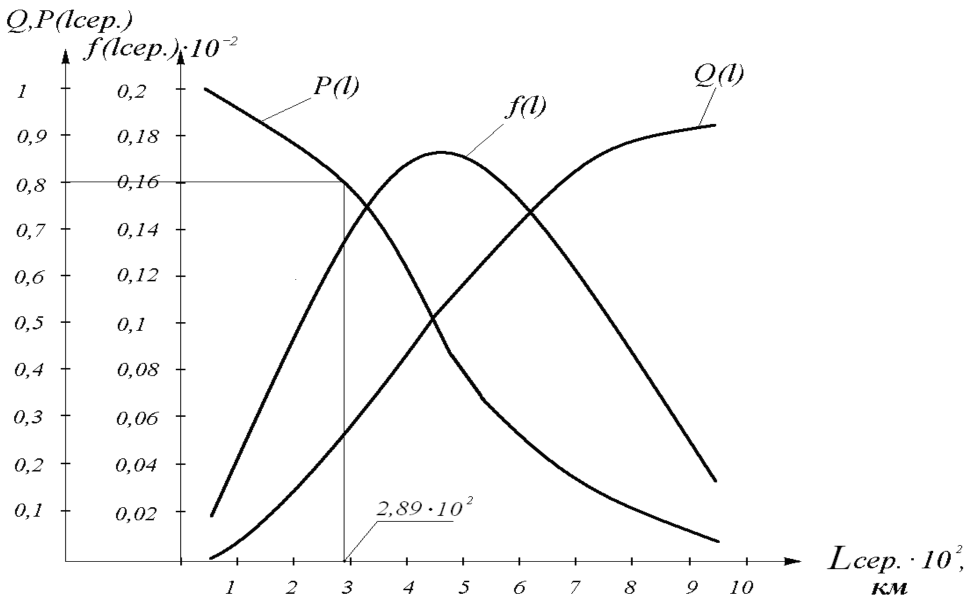


Рис. 10.1. Графіки імовірності відмов та імовірності безвідмовної роботи

Гамма-відсоткове напрацювання до відмови L_γ для закону Вейбула визначається за формулою:

$$L_\gamma = L_{\text{сер}}\left(-\ln\frac{\gamma}{100}\right)^{\frac{1}{b}}, \tag{10.3}$$

де γ – імовірність невиникнення відмови, виражена у відсотках (γ = 80%); *b* – коефіцієнт (параметр) закону Вейбула (*b* = 2,3) (див. п. 9.8).

Тоді:

$$L_\gamma = 505\left(-\ln 0{,}8\frac{80}{100}\right)^{\frac{1}{2{,}3}} = 289\ (\text{км}). \tag{10.4}$$

Величину гамма-відсоткового напрацювання до відмови можна визначити за графіками функцій рис.10.1. Для цього з точки на осі ординат *P(l)* (для механічних систем *P(l)* = 0,8) проводимо лінію паралельно осі абсцис до перетину з кривою *P(l)* і опускаємо перпендикуляр на вісь абсцис. Отже, відповідно до нашого прикладу L_γ = 289 (км), що свідчить про безпомилковість розрахунків.

Інтенсивність відмов для закону Вейбула визначається за формулою:

$$\lambda(l_i) = \frac{b}{a^b} \cdot l_{\text{сер } i}^{b-1}. \qquad (10.5)$$

де a і b – параметри розподілу закону Вейбула.

Отже:

$$\lambda(l_1) = \frac{2{,}3}{260{,}2} \cdot 50^{2{,}3-1} = 1{,}42;$$

$$\lambda(l_2) = \frac{2{,}3}{260{,}2} \cdot 150^{2{,}3-1} = 5{,}94 \text{ і т.д.}$$

Отримані результати, які підраховані за формулою (10.5) також заносимо у табл.10.1 і за ними будуємо графік інтенсивності відмов $\lambda(l_{\text{сер}})$ (рис. 10.2).

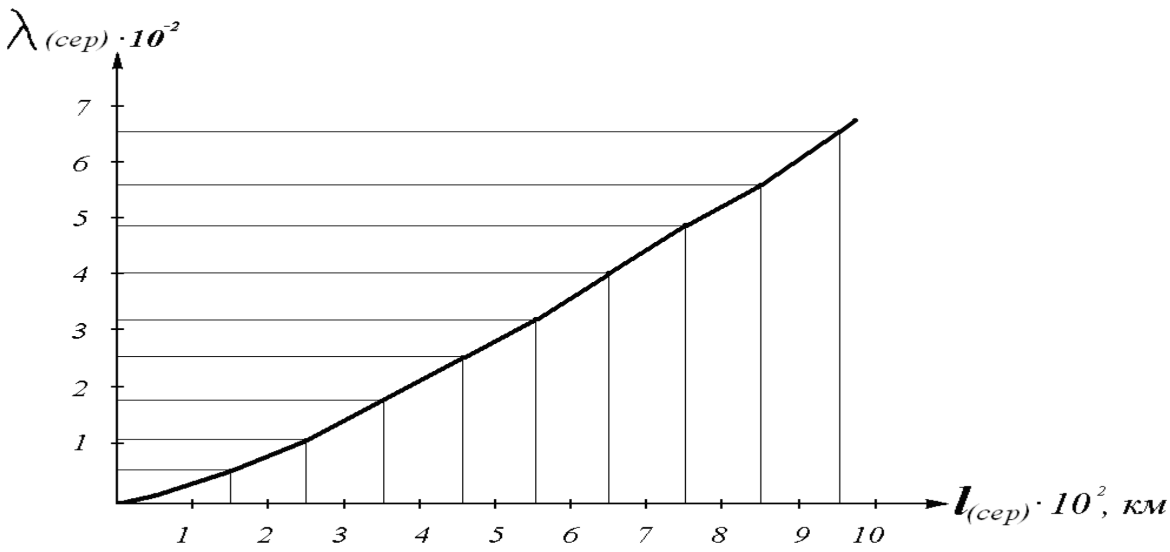


Рис. 10.2. Графік інтенсивності відмов $\lambda(l_{\text{сер}})$

Як уже зазначалось, показники надійності є випадковими величинами і мають значне розсіювання. Тому при статистичній обробці сукупності значень (вибірки) отримані вище результати мають лише наближені точкові оцінки показників, що визначаються.

Безумовною перевагою точкових оцінок є їх наочність та відносна простота одержання. Ці оцінки можуть бути знайдені навіть за досить незначним (порядку 15...20) статистичним матеріалом. Однак, будь-яка точкова оцінка має принциповий недолік, не даючи уявлення про похибки визначення показника. Насамперед точкова оцінка „нечутлива” до обсягу спостереження. Тому при статистичній обробці, як тільки закон розподілу встановлено, слід намагатися поряд з точковими оцінками знаходити довірчі межі визначуваних показників надійності та, насамперед, довірчого інтервалу значень математичного сподівання.

11. ВИЗНАЧЕННЯ ДОВІРЧИХ ІНТЕРВАЛІВ РОЗСІЮВАННЯ ДОСЛІДЖУВАНИХ ПОКАЗНИКІВ

Для визначення довірчих інтервалів розсіювання досліджуваних показників використовують два види оцінок:

– точкові оцінки, що дають наближене значення шуканого показника;

– інтервальні оцінки, що вказують на межі інтервалу, в границях, яких з певною (заданою) імовірністю знаходиться шуканий показник.

Для інтервальних оцінок вказують межі інтервалу, в границях якого з певною заданою імовірністю знаходиться шуканий показник надійності. Цей інтервал призначається довірчим інтервалом, а його нижня та верхня межі – відповідно нижньою і верхньою довірчими межами. Чим вужчий довірчий інтервал, тим вірогідніша оцінка показника.

Для нормального закону розподілу загалом за довірчий інтервал беруть інтервал, який відрізняється від середнього показника на значення ±3σ, а для закону розподілу Вейбула – від 0,1 до 2,5*a* (*a* – параметр розподілу Вейбула).

Площа між диференціальною кривою та віссю абсцис, обмежена значенням ±3σ, що становить 0,997 або 99,7% всієї площі. Тобто, в 997 випадках із 1000 значень одиночного показника (точкової оцінки) надійності знаходитиметься в інтервалі ±3σ.

Такий високий ступінь довіри розрахунку, що охоплює 99,7% усіх можливих варіантів, є зайвим при визначенні показників надійності сучасних машин та їх елементів.

Задаючись наперед меншими значеннями площі охоплення γ відповідно зближують межі розсіювання точкової оцінки показника надійності та, тим самим, зменшують можливу похибку розрахунку.

Площа обхвату β (в частках одиниці чи в відсотках) дорівнює кількості точкової оцінки показників надійності, числові значення яких вкладаються в межі відповідного цій площі інтервалу.

За іншими рівними умовами вибрана наперед площа обхвату β характеризує ступінь довіри розрахунку та гарантує імовірність потрапляння показника надійності у відповідний інтервал його значень. Тому вона називається довірчою імовірністю β. Інтервал, в який при заданій довірчій імовірності потрапляє 100 β % N називається довірчим.

Межі, в яких може коливатися значення показника надійності при заданому значенні β, називають довірчою межею. Відхилення від середнього значення ліворуч називається нижньою довірчою межею $l_н$, а праворуч – верхньою довірчою межею $l_{в.}$

Для визначення граничних значень довірчого інтервалу (укрупнено) використовують такі формули:

$$l_H = L_{сер} - l_\beta \frac{\sigma}{\sqrt{N}}, \tag{11.1}$$

$$l_B = L_{сер} + l_\beta \frac{\sigma}{\sqrt{N}}, \tag{11.2}$$

де l_β – коефіцієнт розподілу Стьюдента, який визначають з табл. 11.1, залежно від кількості степенів вільності r і прийнятого рівня довірчої імовірності β:

$$r = S' - 1. \tag{11.3}$$

Довірчий інтервал

$$J_\beta = l_B - l_H . \tag{11.4}$$

Таблиця 11.1

Коефіцієнт розподілу Стьюдента l_β

r	β			r	β		
	0,80	0,90	0,95		0,80	0,90	0,95
16	1,337	1,746	2,120	28	1,313	1,701	2,048
20	1,325	1,725	2,086	30	1,310	1,697	2,042
22	1,321	1,717	2,074	40*	1,303	1,684*	2,021
24	1,318	1,711	2,064	60	1,296	1,671	2,000
26	1,315	1,705	2,056	120	1,289	1,658	1,980

Довірчу імовірність добирають із ряду 0,80; 0,90; 0,95; 0,99. Для машин, що розглядаються, достатньо вибрати значення 0,80; 0,90.

12. ВИЗНАЧЕННЯ МІНІМАЛЬНО НЕОБХІДНОЇ КІЛЬКОСТІ ОБ’ЄКТІВ СПОСТЕРЕЖЕННЯ

Необхідна кількість об'єктів для спостереження залежить від характеру, мети спостережень, закону розподілу досліджуваної випадкової величини, розсіювання експериментальних даних і потрібної точності та вірогідності результатів випробувань.

Обсяг і повторність інформації повинні бути оптимальними, тобто не дуже великими ($N \leq 50$), щоб не збільшити вартість випробування чи спостереження, і не дуже малими ($N \geq 15$), щоб помилка перенесення одержаних результатів з одних умов у інші була мінімальною.

Мінімальна кількість об'єктів спостереження може бути визначена як за невідомим законом розподілу досліджуваної випадкової величини, так і за відомим законом розподілу.

За невідомим законом розподілу мінімальну кількість об'єктів спостереження визначають за формулою:

$$N = \frac{\ln(1-\beta)}{\ln P(l)}, \tag{12.1}$$

де β – довірча імовірність.

При цьому слід добирати односторонню довірчу імовірність з ряду β = 0,80; 0,90; 0,95; 0,99.

Наведена формула прийнятна для перевірки потрібної імовірності *P(l)* безвідмовної роботи протягом певного часу *t* або пробігу *l*. Значення *P(l)* з довірчою імовірністю β задають за умови відсутності відмов на *l* км пробігу.

Якщо в *N* об'єктах, що спостерігаються, з пробігом *l* не відмічено жодної відмови, результати спостережень приймаються як задовільні із заданою точністю. Якщо спостерігається хоча б одна відмова, потрібне значення імовірності безвідмовної роботи не підтверджується і треба провести додаткові спостереження.

Для визначення кількості *N* об'єктів спостережень можна скористатися табл. 12.1.

Таблиця 12.1

Кількість об’єктів спостереження в разі плану [NUN]

$P(t)$	β			
	0,80	0,90	0,95	0,99
0,500	-	-	-	-
0,800	8	10	13*	20
0,900	15	21	30	44
0,950	30	40	60	85
0,980	75	120	140	230
0,990	150	220	280	430
0,995	330	430	600	800

Приклад. Визначити число *N* із довірчою імовірністю β = 0,95 та перевірити, що імовірність безвідмовної роботи *P(l)* ≥ 0,8.

За формулою (12.1) маємо:

$$N = \frac{\ln(1-\beta)}{\ln P(t)} = \frac{\ln 0{,}05}{\ln 0{,}8} = 13{,}43.$$

У табл. 12.1 визначене число *N*=13 помічено зірочкою.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Методические* рекомендации по определению показателей надежности строительных машин на стадии эксплуатации / сост. С.К. Полянський. – К.: КИСИ, 1980. – 59 с.

2. *Визначення* показників надійності машин та обладнання на стадії експлуатації за статичними даними: методичні вказівки / уклад. С.К. Полянський, В.І. Лесько. – К.: КНУБА, 2003. – 58 с.

3. *Канарчук В.Є.* Надійність машин: підручник / В.Є. Канарчук, С.К. Полянський, М.М. Дмитрієв. – К.: Либідь, 2003. – 424 с.

4. *Вентцель Е.С.* Теория вероятностей. 10-е изд. / Е.С. Вентцель – М.: Наука, 2003. – 576 с.

5. *Полянський С.К.* Експлуатація будівельно-дорожних машин: підручник / С.К. Полянський, О.Т. Білякович. – К.: Вища школа, 2007. – 751 с.

6. *ДСТУ 2862-94*. Методи розрахунку показників надійності. Загальні вимоги. – К.: Держстандарт України,1995. – 38 с. – Чинний з 01.01.1997 р..

Додаток 1

Значення функції Ф (z).

Ф(-z) =1- Ф (z)

Z	0	2	4	6	8
0,0	0.500	0,508	0,516	0,524	0,532
0,1	0,540	0,548	0,556	0,564	0,571
0,2	0,579	0,587	0,595	0,603	0,610
0,3	0,618	0,626	0,633	0,641	0,648
0,4	0,655	0,663	0,670	0,677	0,684
0,5	0,692	0,698	0,705	0,712	0,719
0,6	0,726	0,732	0,739	0,745	0,752
0,7	0,758	0,764	0,770	0,776	0,782
0,8	0,788	0,794	0,800	0,805	0,811
0,9	0,816	0,821	0,826	0,832	0,836
1,0	0,841	0,846	0,851	0,855	0,860
1,1	0,864	0,869	0,873	0,877	0,881
1,2	0,885	0,889	0,892	0,896	0,900
1,3	0,903	0,907	0,910	0,913	0,916
1,4	0,919	0,922	0,925	0,928	0,931
1,5	0,983	0,936	0,938	0,941	0,943
1,4	0,945	0,947	0,950	0,952	0,954
1,7	0,955	0,957	0,959	0,961	0,962
1,8	0,964	0,966	0,967	0,969	0,970
1,9	0,971	0,973	0,974	0,975	0,976
2,0	0,977	0,978	0,979	0,980	0,981
2,1	0,982	0,983	0,984	0,985	0,985
2,2	0,986	0,987	0,987	0,988	0,989
2,3	0,989	0,989	0,990	0,991	0,991
2,4	0,992	0,992	0,993	0,993	0,993

Додаток 2

Параметри і коефіцієнти закону розподілу Вейбула

b	***Kb***	***Cb***	***V***	***b***	***Kb***	***Cb***	***V***
0,800	1,133	1,428	1,261	1,620	0,896	0,567	0,633
0,820	1,114	1,367	1,227	1,640	0,895	0,560	0,626
0,840	1,096	1,311	1,196	1,660	0,894	0,553	0,619
0,880	1,066	1,214	1,139	1,700	0,892	0,540	0,605
0,900	1,052	1,171	1,113	1,720	0,892	0,534	0,599
0,920	1,040	1,132	1,088	1,740	0,891	0,528	0,593
0,960	1,018	1,061	1,042	1,780	0,890	0,517	0,581
0,980	1,009	1,029	1,020	1,800	0,889	0,511	0,575
1,000	1,000	1,000	1,000	1,820	0,889	0,506	0,569
1,040	0,984	0,947	0,962	1,840	0,888	0,501	0,564
1,080	0,971	0,900	0,927	1,860	0,888	0,496	0,558
1,120	0,959	0,858	0,894	1,880	0,888	0,491	0,553
1,160	0,949	0,821	0,865	1,900	0,877	0,486	0,547
1,200	0,941	0,787	0,837	1,920	0,877	0,481	0,542
1,240	0,933	0,757	0,811	1,940	0,877	0,476	0,537
1,280	0,260	0,729	0,787	1,960	0,877	0,472	0,532
1,320	0,210	0,704	0,765	1,980	0,866	0,468	0,527
1,360	0,160	0,681	0,744	2,000	0,866	0,463	0,523
1,400	0,911	0,660	0,724	2,020	0,866	0,459	0,518
1,420	0,909	0,650	0,714	2,040	0,866	0,455	0,513
1,440	0,908	0,644	0,705	2,060	0,866	0,451	0,509
1,460	0,906	0,631	0,696	2,080	0,866	0,447	0,505
1,480	0,904	0,622	0,687	2,100	0,866	0,443	0,500
1,500	0,903	0,613	0,679	2,120	0,866	0,439	0,496
1,520	0,901	0,605	0,671	2,140	0,866	0,436	0,492
1,540	0,900	0,597	0,663	2,160	0,866	0,432	0,488
1,560	0,899	0,589	0,655	2,180	0,866	0,428	0,484
1,580	0,898	0,581	0,647	2,200	0,866	0,425	0,478
1,600	0,897	0,574	0,640	2,220	0,866	0,421	0,476
2,240	0,866	0,418	0,472	3,240	0,896	0,304	0,339
2,260	0,866	0,415	0,468	3,260	0,896	0,302	0,337

Закінчення дод. 2

b	***Kb***	***Cb***	***V***	***b***	***Kb***	***Cb***	***V***
2,280	0,866	0,412	0,465	3,280	0,897	0,301	0,335
2,300	0,866	0,408	0,461	3,300	0,897	0,299	0,334
2,320	0,866	0,405	0,457	3,320	0,897	0,298	0,332
2,340	0,866	0,402	0,454	3,340	0,898	0,296	0,330
2,360	0,866	0,399	0,451	3,360	0,898	0,295	0,328
2,380	0,836	0,960	0,447	3,380	0,898	0,293	0,326
2,400	0,886	0,393	0,444	3,400	0,898	0,292	0,325
2,420	0,887	0,391	0,441	3,420	0,899	0,290	0,323
2,440	0,887	0,388	0,437	3,440	0,899	0,289	0,321
2,460	0,887	0,385	0,434	3,460	0,899	0,287	0,320
2,480	0,887	0,382	0,431	3,480	0,899	0,286	0,316
2,520	0,887	0,377	0,425	3,520	0,900	0,283	0,315
2,540	0,888	0,347	0,422	3,540	0,900	0,282	0,130
2,560	0,888	0,372	0,419	3,560	0,901	0,281	0,312
2,580	0,888	0,369	0,416	3,580	0,901	0,279	0,310
2,600	0,888	0,367	0,413	3,600	0,901	0,278	0,080
2,640	0,889	0,361	0,407	3,640	0,902	0,275	0,050
2,680	0,889	0,357	0,402	3,660	0,902	0,274	0,040
2,720	0,889	0,353	0,970	3,700	0,902	0,272	0,010
2,760	0,890	0,348	0,920	3,740	0,903	0,269	0,298
2,800	0,890	0,344	0,387	3,780	0,903	0,267	0,295
2,840	0,891	0,340	0,382	3,382	0,904	0,264	0,292
2,880	0,891	0,336	0,377	3,860	0,905	0,262	0,290
2,920	0,892	0,332	0,372	3,900	0,905	0,260	0,287
2,960	0,892	0,328	0,368	3,940	0,906	0,258	0,282
3,000	0,893	0,250	0,363	3,980	0,906	0,255	0,282
3,040	0,893	0,321	0,359	4,020	0,907	0,253	0,279
3,080	0,894	0,317	0,355	4,060	0,907	0,251	0,277
3,120	0,895	0,314	0,351	4,100	0,908	0,246	0,274
3,160	0,895	0,310	0,347	4,140	0,908	0,247	0,272
3,200	0,896	0,307	0,343	4,180	0,909	0,245	0,270

Додаток 3

Значення *P* залежно від *r* і χ^2 (функція (*P [*χ^2*, r]*)

r/ *P*	0,99	0,98	0,95	0,90	0,80	0,70	0,50	0,30	0,20	0,10	0,05	0,02	0,01	0,001
1	0,000	0,001	0,004	0,016	0,064	0,148	0,455	1,074	1,642	2,71	3,84	5,41	6,64	10,83
2	0,020	0,040	0,103	0,211	0,446	0,713	1,386	2,41	3,22	4,60	5,99	7,82	9,21	13,82
3	0,115	0,185	0,352	0,584	1,005	1,424	2,37	3,66	4,64	6,25	7,82	9,84	11,34	16,27
4	0,297	0,429	0,711	1,064	1,649	2,20	3,36	4,88	5,99	7,78	9,49	11,67	13,28	18,46
5	0,554	0,752	1,145	1,610	2,34	3,00	4,35	6,06	7,29	9,24	11,07	13,39	15,09	20,5
6	0,872	1,134	1,635	2,20	3,07	3,83	5,35	7,23	8,56	10,64	12,59	15,03	16,81	22,5
7	1,239	1,564	2,17	2,83	3,82	4,67	6,35	8,38	9,80	12,02	14,07	16,62	18,48	24,3
8	1,646	2,03	2,73	3,49	4,09	5,53	7,34	9,52	11,03	13,36	15,51	18,17	20,01	26,1
9	2,09	2,53	3,32	4,17	5.38	6,39	8,34	10,66	12,24	14,68	16,92	19,68	21,7	27,9
10	2,56	3,06	3,94	4,86	6,18	7,27	9,34	11,78	13,44	15,99	18,31	21,2	23,2	29,6
11	3,05	3,61	4,58	5,58	6,99	8,15	10,34	12,90	14,63	17,28	19,68	22,6	24,7	31,3
12	3,57	4,18	5,23	6,30	7,81	9 03	11,34	14,01	15,81	18,55	21,0	24,1	26,2	32,9
13	4,11	4,76	5,89	7,04	8,63	9, 93	12,34	15,12	16,98	19,81	22,4	25,5	27,7	34,6
14	4,66	5,37	6,57	7,79	9,47	10,82	13,34	16,22	18,15	21,1	23,7	26,9	29,1	36,1
15	5,23	5,98	7,26	8,55	10,31	11,72	14,34	17,32	19 31	22,3	25,0	28,3	30,6	37,7
16	5,81	6,61	7,96	9,31	11,15	12,62	15,34	18,42	20,5	23,5	26,3	29,6	32,0	39,3
17	6,41	7,26	8,67	10,08	12,00	13,53	16,34	19,51	21,6	24,8	27,6	31,0	33,4	40,8
18	7,02	7,91	9,39	10,89	12,86	14,44	17,34	20,6	22,8	26,0	28,9	32,3	34,8	42,3
19	7,63	8,57	10,11	11,65	13,72	15,35	18,34	21,7	23,9	27,2	30,1	33,7	36,2	43,8
20	18,26	9,24	10,85	12,44	14,58	16,27	19 34	22,8	25,0	28,4	31,4	35,0	36,7	45,31

Додаток 4

Варіанти вибірок

Варіанти завдань являють собою масиви чисел умовної статистичної інформації про надійність машин. Їх можна використовувати як неупорядковані вибірки пробігу машин до відмови (варіанти №1-10) або напрацювань до відмови (варіанти №11-26), ресурсних показників тощо.

Варіант № 1

36130	1115	22844	53651	19844	12751	66812	73285	122698	12534
62115	121910	18400	3371	8977	12754	28354	21460	41648	59334
30718	88668	73468	77925	4705					
4631	14352	106108	39524	26703	8704	62354	134984	55524	24276
6304	64663	1147	91953	52282	70316	4592	39878	100143	95145
2042	85645	48858	92654	89165	6504	6706	16703	4804	65102
16541	100484	24700	7862	16480	26147	126843	68143	73546	16107
17568	15428	11145	29240	29280	19743	7347	16386	61165	19076
67788	92057	139123	6725	5947	4074	2320	18367	25280	70898
85560	7372	25743	2480	28703	19761	60671	25500	29403	127550

Варіант № 2

8470	79705	135203	41432	76900	56840	63875	87600	78543	93404
41632	75481	93460	69460	86947	96947	72004	64749	101696	58708
59460	56804	63945	81734	101727	90354	59460	102025	62864	73449
70754	31619	88077	79786	58850	102108	70766	94947	59240	94480
109836	71280	74627	65131	70147	80147	83404	87760	101888	67076
51420	73743			81374	101957	93687	89668	81145	77490
124952	139762	66748	62480	78400	75992	85020	52703	113604	85600
80345	114374	79240	85420	21430	69432	111950	87594	67280	89280
70703	48692	50280	82087	85234	76511	44218	68114		

Варіант № 3

3150	12514	32556	14417	25619	10313	41714	17268	15918	13560
	27619	12817	18111	39668	20674	9716	24190	18141	31694
17417	21214	29515	17113	9156	14116	22478	18419	11918	17194
14638	30448	1399	22417	19678	38618	13113	28111	17569	38494
20212	14514	24818	13717	23618	9888	26558	15814	39111	10171
19414	36363	16214	19338	38118	19847	16918	7811	20814	42447
13218	27411	8115	32776				16864	26413	15222
18152	45614	19617	22819	29194	15111	11212	19469	11414	21989
21657	12715	25417	11117	18717	28434	37464	30616	23191	12217
23154	53918	36768	56298	37211	16217	21619	13383	43816	47517

Продовження дод.4

Варіант № 4

84477	164419	10143	277415	19747	131111	221189	21417	264718	129184
149519	174741	18447	151890	63333	201947	97288	241518	58418	111770
94618	64850	219414	11417	200914	88194	178313	145515	139919	19914
181192	20474	127417	143218	111418	185694	105690	79419	223111	62114
175890	43215	247719		277668	36660	154619	88314	224819	155686
161817	141870	268190	212212	134333	20969	85214	189947	47918	
281490	107170	254769	54214	223948	123819	163794	111268	254915	164717
158891	295518	77172	214790	227713	78488	168825	65514	243318	95514
223417	124681	177923	339147	88144	201188	168319	124816	126616	184843
251874	296420	321417	361215				171814	264314	366222

Варіант № 5

20416	30419	33969		29644	28814	44868	39111	22417	47214
40197	32515	25619	35618	44419	45914	23617	56313	37841	31431
26444	37717	43918	15618	34866	39204	30941	34791	27319	40417
31978	41178	28111	40917	29819	20694	41784	24917	42618	25438
42115	24916	49198	33677	32619	22113	38614	53417	34223	33741
33917	39710	34514	21148	36612	31777	37468	17420	43168	26817
27113	46719	29943	47814	25808	42194	26943	30717	35112	44778
49734	38715	19690	34758	44314	33111	40738	41911	28614	36840
36420	31656	45797	30194	20417	43671	25918	32221	23918	45113
51219	26616	43515	42868	32447		35555	30412	38413	29747

Варіант № 6

10441	9063	11144	10020	8375	11715	12830	10030	11233	13317
12468	17784	12405	8851	12241	10774	5722	12225	12122	13724
7620	8610	13261	6833	6227	11430	9037	11117	4752	12599
9991	8214	9481	9020	13944	4972	13725	10555	5786	5751
10024	899	5784	13820	7301	9964	9942	8645	9180	12961
11451	10554	5752	9162	12565	9931	1011	11601	5964	5764
12310	13720	10021	10704	12731	13353	7624	11851	13833	11999

9484	4578	8999	13100	10715	6840	6735	9850	9670	13930
7452	1321	11451	11261	6560	11290	6838	14500	8340	6715
11411	14930				9666	7130	8980	11790	1071

Продовження дод.4

Варіант № 7

65500	1200	31200	60130	5001	491	2419		214	10150
45111	117	50130	2315	7777	40200	55100		46211	8313
98151	24900	15200	20010	83418	12895	27300		1818	19455
168	38114	9611	48717	20919	22444	33214		23818	425
59918	16200	26400	30500	52215	14800	64218	8417	69153	7613
218	16800	43445	56214	7968	92244	25555	24800	26216	14200
16814	81413	6666	26900	37215	19818	14444	53300	2221	718
42817	6814	30300	18400	31200	36214	399	37665	19800	1814
314	2215	500	23777	5600	133333	24300	125	11218	5920

Варіант № 8

6817		19491	16211	20115	15114	11211	13414	19214	19111
10414		32151	20914	9314	18111	8514	25700	11917	15413
24915	16333	14200	7713	14813	12413	15913	14811	17514	14348
12111	8130	19317	18315	31918	22474	23514	10617	21900	20411
5814	15215	16314	17512	17400	25513	20515	19513	11214	18900
17900	12513	10919	22100	13133	17814	27915	17219	14313	17425
21817	29115	16814	13816	18213	11214	18411	12716	13557	17412
14222	16814	14919	21999	20666	15111	14518	19113	10900	20244
16713	13917	9713	15811	19213	23700	16666			21413

Варіант № 9

3111	7717	5461	9705		9234	15663	8319	12244	14613
4199	12442	3618	5332		7411	4288	2414	9691	20519
6112	2412	13371	4634		2711	6981	6436	3813	7913
5499	8412	9836	7624	3912	8517	5572	10474	4535	16424
13568	8724	4721	9114	6213	4555	1813	7314	11787	8614
3719	12466	11565	6547	5418	13914	14214	6325	2515	7219
8888	4819	7536	2001	4371	8554	4814	4475	10162	4883
9942	3715	6658	8491	10368	2819	9471	3616	5683	13917

4953	6870	5213	11998	3517	15119	7814	12411	3418	18667
8361	7121	9582	6769	13468	5994	10243			7677

Продовження дод.4

Варіант № 10

44512	84287	93244	93529	37411	108318	80290	65918	121468	78739
69112	34914	136283	41284	201487	28184	101214	73190	42211	154814
92421	51987	145214	5219	66441	83447	57320		65218	53466
43989	113214	37192	102815	43813	13817	134115	67334	48914	91190
76500	12614	82519	43314	72386	46318	33916	25115	119218	74320
115600	68221	94618	47412	79999	64248	17213	58913	53765	96313
81680	174718	28173	128881	72051	52876	45618	64211	107717	184915
85214	78731	105413	46719	64817	117900	95712	22118	56431	126314
					85650	63718	77619	149915	83719

Варіант № 11

249	231	177	252	175	166	171	322	285	252	202	105
81	403	214	137	142	285	236	137	240	199	240	71
211	200	153	172	227	319	286	267	128	123	244	219
235	253	170	299	356	213	185	164	223	265	151	355
264	339	166	217	202	207	225	205	174	187	278	259
190	172	202	228	123	195	257	202	323	190	187	202
261	238	139	301	254	160	102	272	89	253	10	

Варіант №12

70	168	97	404	431	1277	253	100	154	794	286	235
668	63	1353	83	1070	124	1122	493	855	43	131	573
210	2238	2156	241	771	342	551	98	294	1076	92	388
606	2076	488	349	660	533	41	1283	438	627	405	344
366	430	16	618	468	88	642	54	343	154	165	1071
53	1362	230	315	112	752	262	227	455	575	133	297
1064	186	898	490	8	645	49	482	512	142	538	576
210	89	780	65	359	936	183	20	473	483	1404	1704

151	23	23	119	255	152	1807	1277	13	17	161	197
1009	404	47	506	464	83	341	220	1	6	65	252
201	145										

Продовження дод.4

Варіант №13

61	229	211	211	150	127	206	234	144	132	175	255
275	183	163	138	241	124	176	140	138	217	147	238
205	201	137	177	186	185	311	231	195	290	131	118
189	176	104	101	219	154	186	196	242	215	188	305
170	278	132	136	138	257	298	174	259	204	258	107
149	77	213	151	169	204	191	142	215	118	179	206
138	196	184	207	108	189	260	150	198	170	120	220
97	137	150	175	174	170	155	237	215	189	148	208
95	133	162	183	183	173	265	229	229	186	120	251
172	92	239	67	251	174	227	168	235	161	184	221
214	149	640									

Варіант №14

816	491	1264	1009	273	559	1575	153	102	4260	310	446
180	556	33	57	458	454	579	409	1348	2261	380	126
509	8	624	788	1736	12	686	409	1223	807	2093	2489
1599	39	492	142	955	2489	93	162	1243	100	462	114
1004	310	38	1036	2241	362	263	258	114	233	888	418
438	496	378	1818	39	782	1275	536	3709	152	26	1462
1380	546	374	82	109	736	58	1259	120	753	246	496
825	390	4932	1141	218	365	2823	675	122	257	930	316
624	609	627	881	355	404	375	1107	153	60	345	

Варіант №15

226	275	244	238	269	202	269	327	267	233	275	265
255	244	223	233	272	281	265	277	264	286	234	260

243	255	270	249	300	257		283	220	217	233	269
287	255	228	227	249	281	249	262	262	267	223	268
298	236	279	285	245	259	215	249	266	249	240	263
210	263	217	273	275	284	268	236	265	236	263	257
293	233	239	258	237	241	266	261	254	271	307	281
226	257	306	270	254	285	292	277	211	253	266	285
120	20	543									

Продовження дод.4

Варіант №16

79	774	175	459	575	171	846	271	270	1351	2047	810
336	113	191	354	17		2121	526	414	659	996	183
101	347	334	129	523	278	759	383	1140	182	130	359
1171	291	668	881	1008	169	753	1263	989	184	491	437
344	793	268	233	1091	172	481	251	1283	1654	334	1219
41	971	792	209	1483	409	65	810	15	1504	99	1008
64	365	535	448	1041	327	235	158	416	1460	39	233
218	238	595	106	311	145	644	257	382	721	234	346
115	507	278	541	1278	502	469	200	50	301	493	135
138	577	330	30	336	1026	256	130	206	710	105	

Варіант№17

111	428	24	1685	11	1102	334	451	186	223	866	684
224	427	649	408	643	875	480	339	935	206	1081	219
237	813	270	177	141			314	75	185	1068	385
908	360	435	204	946	248	30	1228	662	158	408	837
808	134	1623	17	1020	306	198	86	126	646	429	127
314	269	162	221	708	178	218	604	349	1002	1103	590
71	83	224	281	1050	238	711	423	269	551	793	458
31	944	402	475	603	155	328	348	1294	823	145	1065
1355	374	1425	1205	238	200	89	239	518	461	3	244
44	247	844	557	38							

Варіант№18

886	602	549	400	242	385	520	138	646	505	355	391

629	495	133	928	344	480			1164	263	382	689
281	210	738	254	225	386	902	915	137	174	155	253
329	327	372	472	521	836	221	135	640	294	669	161
254	382	325	557	1292	706	932	377	114	292	1309	591
726	255	143	377	857	581	308	396	484	576	770	127
137	191	352	694	502	592	201	336	1430	930	209	681
356	456	202	664	537	1090	961	137	411	734	194	561
768	952	818									

Продовження дод.4

Варіант №19

480	397	294	453	403	470	394	413	459	361	477	415
339	334	314	447	384			398	466	456	302	210
395	296	504	372	406	498	311	497	418	381	374	179
407	286	321	542	446	425	177	425	424	462	351	317
334	418	357	427	336	449	378	330	411	400	330	405
374	215	342	284	335	334	332	312	282	300	422	498
455	374	398	552	294	384	349	282	163	360	445	431
471	258	406	216	307	268	397	322	309	448	376	368
476	219	396	369	467	332	359	396	387	418	547	446
239	372	401	277	356	368	378	403	376	519	411	257
236	356	381	310	70							

Варіант №20

646	794	627	951	511	691	508	434	596	981	711	675
502	835	652	473	1056	550	781	399	815	529	560	855
611	524	720	613		872	761	523	505	246	294	721
717	811	698	525	586	593	644	574	554	469	670	475
736	415	753	361	716	504	691	473	600	955	776	524
655	515	927	678	820	581	531	454	513	786	605	801
487	790	619	725	765	884	499	668	592	924	738	750
629	596	388	706	447	621	955	848	670	849	662	568
547	756	645	729	556	599	705	540	490	629	692	144
560											

Варіант №21

1114	1002	837	1171	1283	1003	1123	1354	1331	1246	1240	1378

885	847	1241	1077	572	1222			1308	762	861	1326
683	622	1143	903	1111	1259	999	821	948	902	1394	497
1372	1055	578	575	1002	899	1145	1231	948	745	1141	1493
1231	1219	1088	982	872	1208	1255	1126	1310	1070	916	1382
730	1256	1273	1071	656	800	966	898	713	683	673	762
1011	994	996	993	1335	682	1129	889	1450	985	1185	1160
864	918	596	1383	967	834	1779	1063	1237	731	580	999
867	1290	576	1199	1396	671	167	1235	1098	1106	1334	930
1445	351	1571	870	973	862	1002	968	1075	398	458	

Продовження дод.4

Варіант №22

160	80	292	277	771	315	221	573	293	354	309	276
385	122	86	224	495	393	590	158	493	411	394	570
743	241	39	354	47	147	164	306	565	294	332	251
230	297	584	464	321	129	795	241	259	518	368	512
288	190	147	169	378	474	584	315	565	177	255	226
467	339	570	533	529	177	407	449	535	185	129	366
268	378	126	101		340	162	308	216	418	565	145
134	302	369	406	489	94	479	162	265	403	342	378
209	181	433	201	70	258	420	611	675	751	364	385
509	101	300	901	393	196	45	355	118	378	74	348

Варіант № 23

1340	232	689	783	389	50	608	2139	563	276	931	338
174	1288	55	150	250	163	593	329	79	340	909	727
1759	488	208	322	356	75	1495	516	169	210	123	253
3407	1162	20	802	140	292	384	2901	303	266	884	575
515	1426	69	376	2084	139	1111	132	2218	1158	1230	106
458	492	209	957	1883	358	26	1033	247	1611	67	50
682	991	1158	709	437	190	1304	74	232	94	928	249
1934	550	233	17	741	620	575	356	852	13	51	926
297	1709	1887	522	35	536	876	906	391	515	46	431
395	632	152	397	2715	373	166	39	319	2369	435	385

Варіант №24

1685	11	1102	334	451	186	223	866	684	224	427	649

408	643	875	480	339	935	206	1081	219	237	813	270
177	141	136	356	314	75	185	1068	385	908	360	435
204	946	248	30	1228	662	158	408	837	808	134	1623
17	1020	306	198	86	126	646	429	127	314	269	162
221	708	178	218	604	349	1002	1103	590	71	83	224
281	1050	238	711	423	269	551	793	458	31	944	402
475	603	155	328	348	1294	823	145	1065	1355	374	1425
1205	238	200	89	239	518	461	3	244	44	247	844
557	38	198	1206	98							

Закінчення дод.4

Варіант №25

815	808	865	1060	997	942	831	1140	1075	1094	644	560
214	1113	938	642	569	1029	660	672	804	1020	162	681
1153	540	844	606	882	1110	741	721	582	911	849	807
875	472	1142	660	372	737	586	1043	984	877	926	838
1027	695	703	725	1296	937	660	559	668	610	913	849
868	822	954	651	772	941	406	1135	663	695	879	468
626	415	633	911	1008	774	789	865	980	887	748	634
427	814	691	869	478	710	769	786	1165	939	795	60
71	825	310									

Варіант №26

1044	906	284	1114	1002	837	1171	1283	1003	1123	1354	1331
1246	1240	1378	885	847	1241	1077	572	1222	1212	1372	1308
762	861	1326	683	622	1143	903	1111	475	1259	999	821
948	902	1394	497	1372	1055	578	575	1002	899	1145	1231
948	745	1141	1493	1231	459	1219	1088	982	872	1208	1255
1126	1310	1070	916	1382	730	1256	1273	1071	656	800	966
898	713	683	673	762	1011	994	996	993	1335	682	1129
889	1450	985	1185	1160	864	918	596	1383	967	834	1779
1063	1237	731	580	999	867	1290	576	1199	1396	671	167
1235	1098	1106	1334	930	1445	351	1571	870	973	862	1002
968											

Навчальне видання

ПОЛЯНСЬКИЙ Станіслав Костянтинович
ЛЕСЬКО Віталій Іванович
ЧЕРНЕГА Григорій Кирилович

РОЗРАХУНОК ПОКАЗНИКІВ НАДІЙНОСТІ МАШИН ЗА СТАТИСТИЧНИМИ ДАНИМИ

Навчальний посібник

Редагування та коректура *Т.В. Чорної*
Комп'ютерне верстання *Т.І. Кукарєвої*

Підписано до друку 25.03.2010. Формат 60 × 84 $_{1/16}$
Ум. друк. арк. 7,21. Обл.-вид. арк. 7,75.
Тираж 75 прим. Вид. № 13/І-08. Зам. № 56/1-10.

КНУБА, Повітрофлотський проспект, 31, Київ, Україна, 03680

E-mail: red-isdat@knuba.edu.ua

Віддруковано в редакційно-видавничому відділі
Київського національного університету будівництва і архітектури

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру суб′єктів
Видавничої справи ДК № 808 від 13.02.2002 р.