

## Варіант 1

- Показати, що задана функція є розв'язком відповідного диференціального рівняння.  
 $y = Cx$   $y dx - x dy = 0$ .
- Для даного диференціального рівняння дослідити поле напрямів, зробити рисунок.  
 $y' = x^2 + y^2 - 1$ .
- Знайти диференціальне рівняння, загальним розв'язком якого є криві, задані відповідним рівнянням.  
 $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$ .
- Знайти ортогональні траєкторії заданої сім'ї ліній  $y = ax^2$ .
- Знайти загальний розв'язок диференціальних рівнянь:
  - з відокремлюваними змінними  $(1 + x^2) dy - \sqrt{1 - y^2} dx = 0$ ;
  - однорідного диференціального рівняння першого порядку  $(x^2 - xy) dy + y^2 dx = 0$ ;
  - того, що приводиться до однорідного диференціального рівняння першого порядку  $(x + 2y + 1) dx - (2x - 3) dy = 0$ ;
  - в повних диференціалах  $e^y dx + (xe^y - 2y) dy = 0$ ;
  - лінійного диференціального рівняння першого порядку  $y' \cos x - y \sin x = \sin 2x$ ;
  - диференціального рівняння Бернуллі  $y' - y \operatorname{tg} x + y^2 \cos x = 0$ .
- Розв'язати задачу Коші для лінійного диференціального рівняння першого порядку. Знайти загальний розв'язок для диференціальних рівнянь вищих порядків
  - $y' - \frac{y}{x} = x^2$ ,  $y(1) = 0$ ;
  - $y''' = e^{2x} + x^2$ ;
  - $y''(x^2 + 1) - 2xy' = 0$ ;
  - $yy'' - (y')^2 + (y')^3 = 0$
  - лінійного однорідного диференціального рівняння вищого порядку зі сталими коефіцієнтами  $y'''' + 3y''' + 2y'' = 0$ .
- Розв'язати задачу Коші для лінійного однорідного диференціального рівняння вищого порядку зі сталими коефіцієнтами  $y'''' + y'' = 0$ ,  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 0$ ,  $y''(0) = 1$ .
- Знайти загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння другого порядку:
  - $y'' + 2y' + y = xe^x$ ;
  - $y'' + 2y' = 3x$ .
- Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння, використовуючи метод суперпозиції  
 $y'' + y = x + \sin x$ .
- Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння, використовуючи метод варіації довільних сталих  $y'' + y = \frac{1}{\sin x}$ .
- Знайти загальний розв'язок системи лінійних однорідних диференціальних рівнянь. 
$$\begin{cases} \dot{x} = -x - 2y, \\ \dot{y} = 3x + 4y. \end{cases}$$
- За умовою задачі записати диференціальне рівняння та проінтегрувати його. Знайти рівняння кривої, що проходить через точку  $(1; 1)$  і має таку властивість, що кутовий коефіцієнт дотичної в довільній точці  $M$  кривої вдвічі більший кутового коефіцієнта радіус вектора точки дотику.
- За умовами протікання фізичного процесу скласти диференціальне рівняння та проінтегрувати його. На тіло діє сила, пропорційна часу. Крім того, воно витримує протидію середовища, пропорційну його швидкості. Знайти закону руху тіла (залежність шляху від часу).

## Варіант 2

1. Показати, що задана функція є розв'язком відповідного диференціального рівняння.

$$y = \frac{Cx}{\cos x} \qquad y' - \operatorname{tg} x \cdot y = 0.$$

2. Для даного диференціального рівняння дослідити поле напрямів, зробити рисунок.

$$y' = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

3. Знайти диференціальне рівняння, загальним розв'язком якого є криві, задані відповідним рівнянням.

$$y = Cx.$$

4. Знайти ортогональні траєкторії заданої сім'ї ліній  $y^2 = ax$ .

5. Знайти загальний розв'язок диференціальних рівнянь:

5.1. з відокремлюваними змінними  $x^2 y' + y^2 = 0$ ;

5.2. однорідного диференціального рівняння першого порядку  $xy' \cos \frac{y}{x} = y \cos \frac{y}{x} - x$ ;

5.3. того, що приводиться до однорідного диференціального рівняння першого порядку  $(5x - 7y + 1)dx + (x + y - 1)dy = 0$ ;

5.4. в повних диференціалах  $(x^3 - 3xy^2)dx + (y^3 - 3x^2y)dy = 0$ ;

5.5. лінійного диференціального рівняння першого порядку  $xy' + 2y = e^{-x^2}$ ;

5.6. диференціального рівняння Бернуллі  $y' + \frac{xy}{1-x^2} = x\sqrt{y}$ .

6. Розв'язати задачу Коші для лінійного диференціального рівняння першого порядку. Знайти загальний розв'язок для диференціальних рівнянь вищих порядків

а)  $y' - y \operatorname{ctg} x = 2x \sin x$ ,  $y(\pi/2) = 0$ ;    б)  $y^{IV} = x^3 + \cos 3x$ ;

в)  $y'' = \frac{y'}{x}$ ;    г)  $y''y^3 + 1 = 0$

д) лінійного однорідного диференціального рівняння вищого порядку зі сталими коефіцієнтами  $y^{IV} - 6y''' + 9y'' = 0$ .

7. Розв'язати задачу Коші для лінійного однорідного диференціального рівняння вищого порядку зі сталими коефіцієнтами  $y'' - 2y' + 3y = 0$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 1$ .

8. Знайти загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння другого порядку:

а)  $y'' + y = 1 + x$ ;    б)  $y'' + 4y = x \cos 2x$ .

9. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння, використовуючи метод суперпозиції  $y'' - 4y' + 3y = xe^x + \cos 2x$ .

10. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння, використовуючи метод варіації довільних сталих  $y'' + 4y = 18 \operatorname{ctg} 2x$ .

11. Знайти загальний розв'язок системи лінійних однорідних диференціальних рівнянь. 
$$\begin{cases} \dot{x} = x + y, \\ \dot{y} = -2x + 4y. \end{cases}$$

12. За умовою задачі записати диференціальне рівняння та проінтегрувати його. Знайти криві, у яких довжина відрізка, що відтинається довільною дотичною від осі ординат, дорівнює квадрату ординати точки дотику.

13. За умовами протікання фізичного процесу скласти диференціальне рівняння та проінтегрувати його. Матеріальна точка маси  $m$  без початкової швидкості повільно занурюється в рідину. Знайти шлях, пройдений точкою за час  $t = 2$  с, беручи до уваги те, що при повільному зануренні сила опору рідини пропорційна швидкості занурення (коефіцієнт пропорційності  $k = 3$ ).

### Варіант 3

1. Показати, що задана функція є розв'язком відповідного диференціального рівняння.

$$x = \ln \frac{C}{e^y - 1} \qquad e^y (y' + 1) = 1.$$

2. Для даного диференціального рівняння дослідити поле напрямів, зробити рисунок.

$$y' = x^2 + 4y^2.$$

3. Знайти диференціальне рівняння, загальним розв'язком якого є криві, задані відповідними рівняннями.

$$y + x = C(1 - xy).$$

4. Знайти ортогональні траєкторії заданої сім'ї ліній  $y^2 = 2(x - a)$ .

5. Знайти загальний розв'язок диференціальних рівнянь:

5.1. з відокремлюваними змінними  $y dx - x dy = 0$ ;

5.2. однорідного диференціального рівняння першого порядку  $xy' = x \sin \frac{y}{x} + y$ ;

5.3. того, що приводиться до однорідного диференціального рівняння першого порядку  $(3y - 7x + 7) dx - (3x - 7y - 3) dy = 0$ ;

5.4. в повних диференціалах  $(x^2 - 4xy - 2y^2) dx + (y^2 - 4xy - 2x^2) dy = 0$ ;

5.5. лінійного диференціального рівняння першого порядку  $(2x + 1)y' + y = x$ ;

5.6. диференціального рівняння Бернуллі  $y' + \frac{2y}{x} = x^4 y^2$ .

6. Розв'язати задачу Коші для лінійного диференціального рівняння першого порядку. Знайти загальний розв'язок для диференціальних рівнянь вищих порядків

а)  $y' + y \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$ ,  $y(0) = 0$ ;      б)  $y^{IV} = \cos x + x$ ;

в)  $(x - 3)y'' + y' = 0$ ;      г)  $y'' = \frac{1}{\sqrt{y}}$

д) лінійного однорідного диференціального рівняння вищого порядку зі сталими коефіцієнтами  $y'''' - 5y''' + 6y'' = 0$ .

7. Розв'язати задачу Коші для лінійного однорідного диференціального рівняння вищого порядку зі сталими коефіцієнтами  $y'''' + y' = 0$ ,  $y(0) = 2$ ,  $y'(0) = 1$ ,  $y''(0) = -1$ .

8. Знайти загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння другого порядку:

а)  $y'' - y' = (x^2 + 2)e^{2x}$ ;      б)  $y'' + 2y' + 5y = 7e^{-x} \sin 2x$ .

9. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння, використовуючи метод суперпозиції  $y'' - y = (x + 2)e^{-x} + 7 \sin 3x$ .

10. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння, використовуючи метод варіації довільних сталих  $y'' - y = \frac{1}{e^x + 1}$ .

11. Знайти загальний розв'язок системи лінійних однорідних диференціальних рівнянь.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 - x_2, \\ \dot{x}_2 = -4x_1 + 4x_2. \end{cases}$$

12. За умовою задачі записати диференціальне рівняння та проінтегрувати його. Знайти таку криву, яка проходить через точку  $(0; 2)$ , щоб кутовий коефіцієнт дотичної в довільній точці дорівнював ординаті цієї точки, збільшеній в три рази.

13. За умовами протікання фізичного процесу скласти диференціальне рівняння та проінтегрувати його. Точка маси  $m$  рухається прямолінійно: на неї діє сила, пропорційна часу з моменту, коли швидкість дорівнювала нулю (коефіцієнт пропорційності  $k_1$ ). Крім того, точка витримує опір середовища, пропорційний швидкості (коефіцієнт пропорційності дорівнює  $k_2$ ). Знайти залежність швидкості від часу.

## Варіант 4

1. Показати, що задана функція є розв'язком відповідного диференціального рівняння.

$$y = 2x^5 + C \qquad \frac{dy}{x^4} = dx.$$

2. Для даного диференціального рівняння дослідити поле напрямів, зробити рисунок.

$$y' = x - y^2.$$

3. Знайти диференціальне рівняння, загальним розв'язком якого є криві, задані відповідними рівняннями.

$$y = Cxe^x.$$

4. Знайти ортогональні траєкторії заданої сім'ї ліній  $y^2 = x + a$ .

5. Знайти загальний розв'язок диференціальних рівнянь:

5.1. з відокремлюваними змінними  $\sqrt{1-x^2} \cdot dy - \sqrt{1-y^2} \cdot dx = 0$ ;

5.2. однорідного диференціального рівняння першого порядку  $xy' = y\left(1 + \ln \frac{y}{x}\right)$ ;

5.3. того, що приводиться до однорідного диференціального рівняння першого порядку  $(6x + y - 1)dx + (4x + y - 2)dy = 0$ ;

5.4. в повних диференціалах  $(6xy + x^3 + 3)dy + (3y^2 + 2xy + 2x)dx = 0$ ;

5.5. лінійного диференціального рівняння першого порядку  $(a^2 + x^2)y' + xy = 1$ ;

5.6. диференціального рівняння Бернуллі  $y' = y^4 \cos x + y \operatorname{tg} x$ .

6. Розв'язати задачу Коші для лінійного диференціального рівняння першого порядку. Знайти загальний розв'язок для диференціальних рівнянь вищих порядків

а)  $y' + y \operatorname{tg} x = \cos^2 x$ ,  $y(\pi/4) = 1/2$ ;    б)  $y''' = x^{-1} + 2e^x$ ;

в)  $(1-x^2)y'' - xy' = 0$ ;    г)  $y'' = ae^y$

д) лінійного однорідного диференціального рівняння вищого порядку зі сталими коефіцієнтами  $y^{IV} + y''' = 0$ .

7. Розв'язати задачу Коші для лінійного однорідного диференціального рівняння вищого порядку зі сталими коефіцієнтами  $y'' - 2y' + 2y = 0$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 1$ .

8. Знайти загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння другого порядку:

а)  $y'' + 2y' = xe^{3x}$ ;    б)  $y'' + y = (x+3)\cos x$ .

9. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння, використовуючи метод суперпозиції  $y'' - 6y' + 9y = xe^{3x} + 2\cos 3x$ .

10. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння, використовуючи метод варіації довільних сталих  $y'' - 6y' + 8y = \frac{7}{2 + e^{-2x}}$ .

11. Знайти загальний розв'язок системи лінійних однорідних диференціальних рівнянь. 
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 4x_1 - x_2, \\ \dot{x}_2 = 4x_1 + 2x_2. \end{cases}$$

12. За умовою задачі записати диференціальне рівняння та проінтегрувати його. Знайти криву  $y = f(x)$ , для якої площа  $Q$ , обмежена лініями  $y = f(x)$ ,  $y = 0$ ,  $x = 0$ ,  $x = x$  є даною функцією від  $y$ :

$$Q = a^2 \ln \frac{y}{a}.$$

13. За умовами протікання фізичного процесу скласти диференціальне рівняння та проінтегрувати його. Швидкість розпаду радіо пропорційна його початковій кількості. Відомо, що по закінченню 1600 років залишається половина початкового запасу радіо. Знайти, який процент радіо розпадеться за 800 років.

## Варіант 5

1. Показати, що задана функція є розв'язком відповідного диференціального рівняння.  
 $y = \ln x + C \qquad dx - xdy = 0.$
2. Для даного диференціального рівняння дослідити поле напрямів, зробити рисунок.  
 $y' = x + y.$
3. Знайти диференціальне рівняння, загальним розв'язком якого є криві, задані відповідними рівняннями.  
 $(x - C)^2 + y^2 - C^2 = 0.$
4. Знайти ортогональні траєкторії заданої сім'ї ліній  $y = x^2 + a.$
5. Знайти загальний розв'язок диференціальних рівнянь:
  - 5.1. з відокремлюваними змінними  $(x - y^2x)dx + (y - x^2y)dy = 0;$
  - 5.2. однорідного диференціального рівняння першого порядку  $x dy = (y + \sqrt{x^2 + y^2})dx;$
  - 5.3. того, що приводиться до однорідного диференціального рівняння першого порядку  
 $(x + 2y + 1)dx - (2x + 4y + 3)dy = 0;$
  - 5.4. в повних диференціалах  $(2x - y)dx - xdy = 0;$
  - 5.5. лінійного диференціального рівняння першого порядку  $y' + y \operatorname{tg} x = \cos^2 x;$
  - 5.6. диференціального рівняння Бернуллі  $xy' + y = y^2 \ln x.$
6. Розв'язати задачу Коші для лінійного диференціального рівняння першого порядку. Знайти загальний розв'язок для диференціальних рівнянь вищих порядків
  - а)  $y' - \frac{y}{x+2} = x^2 + 2x, \quad y(-1) = \frac{3}{2};$       б)  $y^{IV} = 3x^2 + 2 \sin x;$
  - в)  $y''x = y' \ln x;$       г)  $yy'' + (y')^2 = 0$
  - д) лінійного однорідного диференціального рівняння вищого порядку зі сталими коефіцієнтами  
 $y^{IV} - 2y''' + y'' = 0.$
7. Розв'язати задачу Коші для лінійного однорідного диференціального рівняння вищого порядку зі сталими коефіцієнтами  $y'' - 3y' + 2y = 0, \quad y(0) = -3, \quad y'(0) = 0.$
8. Знайти загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння другого порядку:
  - а)  $y'' - 3y' + 2y = (x + 1) \sin 2x;$       б)  $y'' + 2y' + y = e^{-x} (x^2 + 6x).$
9. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння, використовуючи метод суперпозиції  
 $y'' + 2y' + 10y = e^{-x} \cos 3x + x^2.$
10. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння, використовуючи метод варіації довільних сталих  $y'' + y = \frac{8}{\cos^3 x}.$
11. Знайти загальний розв'язок системи лінійних однорідних диференціальних рівнянь.
 
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_1 - x_2, \\ \dot{x}_2 = 4x_1 - 2x_2. \end{cases}$$
12. За умовою задачі записати диференціальне рівняння та проінтегрувати його. Тіло масою 1 кг рухається прямолінійно під дією сили, прямо пропорційною часу, що відраховується з моменту  $t = 0$  і обернено пропорційною швидкості руху точки. В момент  $t = 10$  с швидкість дорівнювала 50 см/с, а сила 4 Н. Яка буде швидкість через хвилину після початку руху?
13. За умовами протікання фізичного процесу скласти диференціальне рівняння та проінтегрувати його. В силу закону Ньютона швидкість охолодження тіла на повітрі пропорційна різниці між температурою повітря і температурою тіла. Якщо температура повітря дорівнює  $20^\circ$  і тіло протягом години охолоджується від  $100^\circ$  до  $30^\circ$ , то через скільки хвилин (з моменту початку охолодження) його температура знизиться до  $60^\circ$ ?

## Варіант 6

1. Показати, що задана функція є розв'язком відповідного диференціального рівняння.  

$$y = a \cdot \operatorname{arctg} \frac{x+y}{a} + C \qquad (x+y)^2 \frac{dy}{dx} = a^2.$$
2. Для даного диференціального рівняння дослідити поле напрямів, зробити рисунок.  

$$y' = y - x.$$
3. Знайти диференціальне рівняння, загальним розв'язком якого є криві, задані відповідними рівняннями.  

$$\cos y = C \cos x.$$
4. Знайти ортогональні траєкторії заданої сім'ї ліній  $y^3 = ax$ .
5. Знайти загальний розв'язок диференціальних рівнянь:
  - 5.1. з відокремлюваними змінними  $(1+u)v du + (1-v)u dv = 0$ ;
  - 5.2. однорідного диференціального рівняння першого порядку  $2xy dx = -(y^2 - x^2) dy$ ;
  - 5.3. того, що приводиться до однорідного диференціального рівняння першого порядку  $(8y + 10x - 1)dx + (5y + 7x - 4)dy = 0$ ;
  - 5.4. в повних диференціалах  $\sin(x+y)dx + x \cos(x+y)(dx + dy) = 0$ ;
  - 5.5. лінійного диференціального рівняння першого порядку  $x(y' - y) = (1 - x^2)e^x$ ;
  - 5.6. диференціального рівняння Бернуллі  $y' - 2xy = y^2$ .
6. Розв'язати задачу Коші для лінійного диференціального рівняння першого порядку. Знайти загальний розв'язок для диференціальних рівнянь вищих порядків
  - а)  $y' - \frac{y}{x+1} = e^x(x+1)$ ,  $y(0) = 1$ ;      б)  $y''' = x^{-2} + 2^x$ ;
  - в)  $y'' = 1 + \frac{x(y' - x)}{1 - x^2}$ ;      г)  $y'' + 2y(y')^3 = 0$
  - д) лінійного однорідного диференціального рівняння вищого порядку зі сталими коефіцієнтами  $y''' - y'' - 9y' + 9y = 0$ .
7. Розв'язати задачу Коші для лінійного однорідного диференціального рівняння вищого порядку зі сталими коефіцієнтами  $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$ ,  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 2$ ,  $y''(0) = 3$ .
8. Знайти загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння другого порядку:
  - а)  $4y'' + 4y' + y = 4e^{-\frac{x}{2}} \cos 2x$ ;      б)  $y'' + 2y' + 10y = e^{-x} x \cos 3x$ .
9. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння, використовуючи метод суперпозиції  

$$y'' - 4y' + 3y = xe^x + \frac{x}{2}.$$
10. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння, використовуючи метод варіації довільних сталих  $y'' + y = \frac{1}{\sqrt{\sin^5 x \cos x}}$ .
11. Знайти загальний розв'язок системи лінійних однорідних диференціальних рівнянь. 
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 - x_2, \\ \dot{x}_2 = x_1 + 3x_2. \end{cases}$$
12. За умовою задачі записати диференціальне рівняння та проінтегрувати його. Довести, що крива, яка має таку властивість, що всі її нормалі проходять через сталу точку, є коло.
13. За умовами протікання фізичного процесу скласти диференціальне рівняння та проінтегрувати його. Гнучкий однорідний нерозтяжний канат, закріплений кінцями в двох точках, провисає під дією власної ваги. Визначити форму рівноваги каната, якщо  $q$  – питома вага (диференціальне рівняння лінії рівноваги  $dy/dx = W/H$ , де  $H$  – горизонтальний натяг (сталий).  $W = f(x)$  – вертикальне навантаження, прикладене на частину каната від нижчої його точки  $M(0; a)$  до точки з абсцисою  $x$ .

## Варіант 7

1. Показати, що задана функція є розв'язком відповідного диференціального рівняння.  

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} \qquad y'' - y = 0.$$
2. Для даного диференціального рівняння дослідити поле напрямів, зробити рисунок.  

$$y' = \frac{1}{2}(x - 2y + 3).$$
3. Знайти диференціальне рівняння, загальним розв'язком якого є криві, задані відповідними рівняннями.  

$$(1 + y)(1 - x) = C.$$
4. Знайти ортогональні траєкторії заданої сім'ї ліній  $x^2 y = a$ .
5. Знайти загальний розв'язок диференціальних рівнянь:
  - 5.1. з відокремлюваними змінними  $(1 + y)dx - (1 - x)dy = 0$ ;
  - 5.2. однорідного диференціального рівняння першого порядку  $(3x^2 - y^2)dx - 2xy dy = 0$ ;
  - 5.3. того, що приводиться до однорідного диференціального рівняння першого порядку  

$$(x + y + 2)dx + (y - x - 1)dy = 0$$
;
  - 5.4. в повних диференціалах  $(e^y + ye^x + 3)dx = (2 - e^y x - e^x)dy$ ;
  - 5.5. лінійного диференціального рівняння першого порядку  $\frac{ds}{dt} + s \cos t = \frac{1}{2} \sin 2t$ ;
  - 5.6. диференціального рівняння Бернуллі  $y' - xy = -y^3 e^{-x^2}$ .
6. Розв'язати задачу Коші для лінійного диференціального рівняння першого порядку. Знайти загальний розв'язок для диференціальних рівнянь вищих порядків
  - а)  $y' - \frac{y}{x} = x \sin x$ ,  $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ ;
  - б)  $y''' = \sin 2x + \cos \frac{x}{2}$ ;
  - в)  $xy'' = y'$ ;
  - г)  $y'' \operatorname{tg} y = 2(y')^2$
  - д) лінійного однорідного диференціального рівняння вищого порядку зі сталими коефіцієнтами  

$$y^{IV} - 3y''' + 3y'' - y' = 0.$$
7. Розв'язати задачу Коші для лінійного однорідного диференціального рівняння вищого порядку зі сталими коефіцієнтами  $y'' - 4y' + 3y = 0$ ,  $y(0) = 6$ ,  $y'(0) = 10$ .
8. Знайти загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння другого порядку:
  - а)  $y'' + 49y = e^{7x} \cos x$ ;
  - б)  $y'' - y' = -9x$ .
9. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння, використовуючи метод суперпозиції  

$$y'' - y = 7x^2 + x + \cos x.$$
10. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння, використовуючи метод варіації довільних сталих  

$$y'' + y = \frac{2}{\sin^3 x}.$$
11. Знайти загальний розв'язок системи лінійних однорідних диференціальних рівнянь.
 
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 - 2x_2, \\ \dot{x}_2 = x_1 + 3x_2. \end{cases}$$
12. За умовою задачі записати диференціальне рівняння та проінтегрувати його. Швидкість розмноження бактерій пропорційна їх кількості. За який проміжок часу кількість бактерій збільшиться в  $m$  разів, порівнюючи з їх початковою кількістю.
13. За умовами протікання фізичного процесу скласти диференціальне рівняння та проінтегрувати його. Тіло падає без початкової швидкості під дією сили тяжіння, витримуючи при цьому дію сили тертя, пропорційну швидкості руху. Визначити положення тіла (його висоту) через  $t_1$  секунд після початку падіння.

## Варіант 8

1. Показати, що задана функція є розв'язком відповідного диференціального рівняння.  

$$y = Cx + C - C^2 \qquad y = xy' + y' - (y')^2.$$
2. Для даного диференціального рівняння дослідити поле напрямів, зробити рисунок.  

$$y' = (y - 1)x.$$
3. Знайти диференціальне рівняння, загальним розв'язком якого є криві, задані відповідними рівняннями.  

$$y - a = Ce^{\frac{1}{x}}.$$
4. Знайти ортогональні траєкторії заданої сім'ї ліній  $x^2 - y^2 = a$ .
5. Знайти загальний розв'язок диференціальних рівнянь:
  - 5.1. з відокремлюваними змінними  $(t^2 - xt^2) \frac{dx}{dt} + x^2 + tx^2 = 0$ ;
  - 5.2. однорідного диференціального рівняння першого порядку  $(xy' - y) \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = x$ ;
  - 5.3. того, що приводиться до однорідного диференціального рівняння першого порядку  $(x + y - 2)dx - (3x - y - 2)dy = 0$ ;
  - 5.4. в повних диференціалах  $(3x^2y^2 + 7)dx + 2x^3y dy = 0$ ;
  - 5.5. лінійного диференціального рівняння першого порядку  $y' = \frac{1}{2x - y^2}$ ;
  - 5.6. диференціального рівняння Бернуллі  $y' + \frac{2}{x}y = \frac{2}{\cos^2 x} \sqrt{y}$ .
6. Розв'язати задачу Коші для лінійного диференціального рівняння першого порядку. Знайти загальний розв'язок для диференціальних рівнянь вищих порядків
  - а)  $y' + \frac{y}{x} = \sin x, \quad y(\pi) = \frac{1}{\pi}$ ;
  - б)  $y^{IV} = \cos x + \operatorname{sh} x$ ;
  - в)  $y'' + 2x(y')^2 = 0$ ;
  - г)  $2yy'' = 1 + (y')^2$
  - д) лінійного однорідного диференціального рівняння вищого порядку зі сталими коефіцієнтами  $y'''' + y'' - y' - y = 0$ .
7. Розв'язати задачу Коші для лінійного однорідного диференціального рівняння вищого порядку зі сталими коефіцієнтами  $y'''' + y' = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 2, \quad y''(0) = -1$ .
8. Знайти загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння другого порядку:
  - а)  $y'' - 4y' + 3y = e^{-x} \cos 3x$ ;
  - б)  $4y'' + 4y' + 1 = 4x^2 e^{\frac{x}{2}}$ .
9. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння, використовуючи метод суперпозиції  $y'' + y = x^2 + 2 + \cos 2x$ .
10. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння, використовуючи метод варіації довільних сталих  $y'' + 2y' + 2y = \frac{1}{e^x \sin x}$ .
11. Знайти загальний розв'язок системи лінійних однорідних диференціальних рівнянь. 
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -3x_1 - x_2, \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_2. \end{cases}$$
12. За умовою задачі записати диференціальне рівняння та проінтегрувати його. Крива  $y = \varphi(x)$  проходить через точку  $(1; 2)$ . Кожна дотична до цієї кривої перетинає пряму  $y = 1$  в точці з абсцисою, рівною подвоєній абсцисі точки дотику. Знайти криву  $y = \varphi(x)$ .
13. За умовами протікання фізичного процесу скласти диференціальне рівняння та проінтегрувати його. Важка матеріальна точка маси  $m$  падає без початкової швидкості в стримуєчому середовищі, сила опору  $f$  якого виражається формулою  $f = kv^2$ . Знайти закон зміни швидкості в часі, а також шлях, пройдений такою точкою за час  $\tau$ .

## Варіант 9

1. Показати, що задана функція є розв'язком відповідного диференціального рівняння.  
 $y = Ce^x \sin x$   $y'' - 2y' + 2y = 0$ .
2. Для даного диференціального рівняння дослідити поле напрямів, зробити рисунок.  
 $y' = (y - 1)^2$ .
3. Знайти диференціальне рівняння, загальним розв'язком якого є криві, задані відповідними рівняннями.  
 $x^2 + Cy^2 = 2y$ .
4. Знайти ортогональні траєкторії заданої сім'ї ліній  $2x^2 + y^2 = a^2$ .
5. Знайти загальний розв'язок диференціальних рівнянь:
  - 5.1. з відокремлюваними змінними  $(y - a)dx + x^2 dy = 0$ ;
  - 5.2. однорідного диференціального рівняння першого порядку  $(y^2 - 2xy)dx + x^2 dy = 0$ ;
  - 5.3. того, що приводиться до однорідного диференціального рівняння першого порядку  
 $(x + 7y - 8)dx - (9x - y - 8)dy = 0$ ;
  - 5.4. в повних диференціалах  $(3x^2 + 2y)dx + (2x - 3)dy = 0$ ;
  - 5.5. лінійного диференціального рівняння першого порядку  $y' = 1 - \frac{1 - 2x}{x^2}y$ ;
  - 5.6. диференціального рівняння Бернуллі  $y' + 2xy = 2x^3y^3$ .
6. Розв'язати задачу Коші для лінійного диференціального рівняння першого порядку. Знайти загальний розв'язок для диференціальних рівнянь вищих порядків
  - а)  $y' + \frac{y}{2x} = x^2$ ,  $y(1) = 1$ ;
  - б)  $y''' = x^{-1} + e^{\frac{x}{2}}$ ;
  - в)  $y'' \operatorname{tg} x = y' + 1$ ;
  - г)  $2(y')^2 = (y - 1)y''$
  - д) лінійного однорідного диференціального рівняння вищого порядку зі сталими коефіцієнтами  
 $y'''' - 64y' = 0$ .
7. Розв'язати задачу Коші для лінійного однорідного диференціального рівняння вищого порядку зі сталими коефіцієнтами  $y^{IV} + y'''' = 0$ ,  $y(0) = 2$ ,  $y'(0) = 1$ ,  $y''(0) = y'''(0) = 0$ .
8. Знайти загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння другого порядку:
  - а)  $y'' + 4y' + 4y = 10e^x \cos 2x$ ;
  - б)  $y'' + y' = x^2 + 7x$ .
9. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння, використовуючи метод суперпозиції  
 $y'' - 6y' + 10y = e^{3x} \cos x + 2 \sin x$ .
10. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння, використовуючи метод варіації довільних сталих  
 $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x^2 + 1}$ .
11. Знайти загальний розв'язок системи лінійних однорідних диференціальних рівнянь.
 
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 - x_2, \\ \dot{x}_2 = -4x_1 - x_2. \end{cases}$$
12. За умовою задачі записати диференціальне рівняння та проінтегрувати його. Крива  $y = \varphi(x)$  проходить через точку  $(0;1)$  і має таку властивість, що в кожній її точці тангенс кута дотичної дорівнює подвоєному добутку координат точки дотику. Знайти цю точку.
13. За умовами протікання фізичного процесу скласти диференціальне рівняння та проінтегрувати його. Тіло маси  $m$  ковзає по горизонтальній площині під дією поштовху, що надав йому початкової швидкості  $v_0$ . На тіло діє сила тертя, рівна  $-km$ .

## Варіант 10

1. Показати, що задана функція є розв'язком відповідного диференціального рівняння.  

$$x^2 - y^2 = Cx \qquad (y^2 + x^2)dx - 2xydy = 0.$$
2. Для даного диференціального рівняння дослідити поле напрямів, зробити рисунок.  

$$y' = x^2 - y^2.$$
3. Знайти диференціальне рівняння, загальним розв'язком якого є криві, задані відповідними рівняннями.  

$$y = C_1x + \frac{C_2}{x}.$$
4. Знайти ортогональні траєкторії заданої сім'ї ліній  $x^2 + y^2 = 2ax$ .
5. Знайти загальний розв'язок диференціальних рівнянь:
  - 5.1. з відокремлюваними змінними  $z dt - (t^2 - a^2)dz = 0$ ;
  - 5.2. однорідного диференціального рівняння першого порядку  $xy' - x \cos \frac{y}{x} - y = 0$ ;
  - 5.3. того, що приводиться до однорідного диференціального рівняння першого порядку  

$$(x + 3y + 3)dx - (9x - 3y + 4)dy = 0$$
;
  - 5.4. в повних диференціалах  $(x \cos 2y + 1)dx - x^2 \sin 2y dy = 0$ ;
  - 5.5. лінійного диференціального рівняння першого порядку  $y' + ay = e^{mx}$ ;
  - 5.6. диференціального рівняння Бернуллі  $y' + \frac{y}{x+1} + y^2 = 0$ .
6. Розв'язати задачу Коші для лінійного диференціального рівняння першого порядку. Знайти загальний розв'язок для диференціальних рівнянь вищих порядків
  - а)  $y' + \frac{2xy}{1+x^2} = \frac{2x^2}{1+x^2}$ ,  $y(0) = \frac{2}{3}$ ;
  - б)  $y''' = x^{-3} + 3^x$ ;
  - в)  $y'' = y' + x$ ;
  - г)  $y''y^3 = 1$
  - д) лінійного однорідного диференціального рівняння вищого порядку зі сталими коефіцієнтами  

$$y^{IV} + 2y'' + y = 0.$$
7. Розв'язати задачу Коші для лінійного однорідного диференціального рівняння вищого порядку зі сталими коефіцієнтами  $y^{IV} + y'' = 0$ ,  $y(0) = 2$ ,  $y'(0) = 1$ ,  $y''(0) = y'''(0) = 0$ .
8. Знайти загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння другого порядку:
  - а)  $y'' + 2y' + 5y = (x^2 + 3x)e^x$ ;
  - б)  $y'' + 3y' = 8x^2$ .
9. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння, використовуючи метод суперпозиції  

$$y'' - 3y' + 2y = e^{2x} + 3x^2 + 1.$$
10. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння, використовуючи метод варіації довільних сталих  

$$y'' + 4y = \frac{1}{\cos 2x}.$$
11. Знайти загальний розв'язок системи лінійних однорідних диференціальних рівнянь.
 
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 3x_1 - x_2, \\ \dot{x}_2 = 4x_1 - x_2. \end{cases}$$
12. За умовою задачі записати диференціальне рівняння та проінтегрувати його. В прямолинійній трубці радіуса  $R$  тече рідина. Швидкість течії  $v$  кожного шару рідини збільшується з наближенням цього шару до центра труби (осі циліндра). Знайти  $v$ , як функцію відстані  $r$  відповідного шару рідини від осі циліндра. (Примітка:  $dv = -\frac{\gamma i}{2\varepsilon} r \cdot dr$ , де  $\varepsilon$  – коефіцієнт пружності,  $i$  – гідравлічний спад,  $\gamma$  – питома вага рідини).
13. За умовами протікання фізичного процесу скласти диференціальне рівняння та проінтегрувати його. Матеріальна точка маси  $m$  кинута вертикально вгору зі швидкістю  $v_0$ . Вважаючи опір повітря пропорційним квадрату швидкості руху точки, знайти швидкість падіння її на землю.

## Варіант 11

1. Показати, що задана функція є розв'язком відповідного диференціального рівняння.  
 $\ln xy + x - y = C \qquad (1+x)y + (1-y)x \cdot y'' = 0.$
2. Для даного диференціального рівняння дослідити поле напрямів, зробити рисунок.  
 $y' = y - x^2.$
3. Знайти диференціальне рівняння, загальним розв'язком якого є криві, задані відповідними рівняннями.  
 $y^2 = Cx.$
4. Знайти ортогональні траєкторії заданої сім'ї ліній  $y^3 = ax^4.$
5. Знайти загальний розв'язок диференціальних рівнянь:
  - 5.1. з відокремлюваними змінними  $\frac{dx}{dy} = \frac{1+x^2}{1+y^2};$
  - 5.2. однорідного диференціального рівняння першого порядку  $y^2 + x^2y' = xy y';$
  - 5.3. того, що приводиться до однорідного диференціального рівняння першого порядку  
 $(x - 2y + 3)dx + (2x + y + 2)dy = 0;$
  - 5.4. в повних диференціалах  $(3x^2y - 4xy^2)dx + (x^3 - 4x^2y + 12y^3)dy = 0;$
  - 5.5. лінійного диференціального рівняння першого порядку  $y' + y = \cos x;$
  - 5.6. диференціального рівняння Бернуллі  $xy' - 4y - x^2\sqrt{y} = 0.$
6. Розв'язати задачу Коші для лінійного диференціального рівняння першого порядку. Знайти загальний розв'язок для диференціальних рівнянь вищих порядків
  - а)  $y' - \frac{2x-5}{x^2}y = 5, y(2) = 4;$       б)  $y^{IV} = \cos x + \operatorname{ch} x;$
  - в)  $xy'' = -y' \ln x;$       г)  $2yy'' - (y')^2 = 0$
  - д) лінійного однорідного диференціального рівняння вищого порядку зі сталими коефіцієнтами  
 $y^{IV} + 4y'' + 4y = 0.$
7. Розв'язати задачу Коші для лінійного однорідного диференціального рівняння вищого порядку зі сталими коефіцієнтами  $y'''' + 3y'' + 2y' = 0, y(0) = 0, y'(0) = 2, y''(0) = -4.$
8. Знайти загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння другого порядку:
  - а)  $y'' - y = x^2 \cos x;$       б)  $y'' + y' = x^2 + 2x.$
9. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння, використовуючи метод суперпозиції  
 $9y'' + 6y' + y = e^{\frac{x}{3}} + x \cos x.$
10. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння, використовуючи метод варіації довільних сталих  $y'' - y = \frac{4x^2 + 1}{x\sqrt{x}}.$
11. Знайти загальний розв'язок системи лінійних однорідних диференціальних рівнянь.
 
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + 8x_2, \\ \dot{x}_2 = x_1 + x_2. \end{cases}$$
12. За умовою задачі записати диференціальне рівняння та проінтегрувати його. Знайти криву, для якої тангенс кута нахилу її дотичної в  $n$  разів більше тангенса кута нахилу прямої, що з'єднує ту ж точку з початком координат.
13. За умовами протікання фізичного процесу скласти диференціальне рівняння та проінтегрувати його. Еластичний однорідний шнур довжини  $\ell$  під дією сили  $F$  подовжується на величину  $k\ell F$ , де  $k = \text{const}$ . Знайти подовження  $S$  цього шнура під дією власної його ваги  $Q$ , якщо він підвішений за один кінець.

## Варіант 12

1. Показати, що задана функція є розв'язком відповідного диференціального рівняння.  

$$\arcsin \frac{y}{x} = C - x \qquad xy' - y + x\sqrt{x^2 - y^2} = 0.$$
2. Для даного диференціального рівняння дослідити поле напрямів, зробити рисунок.  

$$y' = x^2 + 2x - y.$$
3. Знайти диференціальне рівняння, загальним розв'язком якого є криві, задані відповідними рівняннями.  

$$x^2 + (y - 1)^2 = r^2.$$
4. Знайти ортогональні траєкторії заданої сім'ї ліній  $y = ae^{\frac{x}{y}}$ .
5. Знайти загальний розв'язок диференціальних рівнянь:
  - 5.1. з відокремлюваними змінними  $(1 + s^2) dt - \sqrt{t} \cdot ds = 0$ ;
  - 5.2. однорідного диференціального рівняння першого порядку  $(x - y) dx + (x + y) dy = 0$ ;
  - 5.3. того, що приводиться до однорідного диференціального рівняння першого порядку  

$$(2x + y - 2) dx - (2x + 2y - 1) dy = 0$$
;
  - 5.4. в повних диференціалах  $3x^2 e^y dx + (x^3 e^y - 1) dy = 0$ ;
  - 5.5. лінійного диференціального рівняння першого порядку  $(1 + x^2) y' - 2xy = (1 + x^2)^2$ ;
  - 5.6. диференціального рівняння Бернуллі  $xy' + xy^2 = y$ .
6. Розв'язати задачу Коші для лінійного диференціального рівняння першого порядку. Знайти загальний розв'язок для диференціальних рівнянь вищих порядків
  - а)  $y' + \frac{y}{x} = \frac{x+1}{x} e^x$ ,  $y(1) = e$ ;
  - б)  $y''' = x^{-2} + \operatorname{sh} x$ ;
  - в)  $x(y'' + 1) + y' = 0$ ;
  - г)  $(y'')^2 + (y')^2 = a^2$
  - д) лінійного однорідного диференціального рівняння вищого порядку зі сталими коефіцієнтами  

$$y^{IV} + 8y'' + 16y = 0.$$
7. Розв'язати задачу Коші для лінійного однорідного диференціального рівняння вищого порядку зі сталими коефіцієнтами  $y'''' + y' = 0$ ,  $y(0) = 2$ ,  $y'(0) = 3$ ,  $y''(0) = -1$ .
8. Знайти загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння другого порядку:
  - а)  $y'' - 2y' + y = -2e^x \sin x$ ;
  - б)  $y'' - 2y' + 10y = 6e^x \cdot \sin 3x$ .
9. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння, використовуючи метод суперпозиції  

$$y'' + 9y = -2 \cos 3x + e^{-3x}.$$
10. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння, використовуючи метод варіації довільних сталих  

$$y'' - 2y' + y = \frac{x^2 + 2x + 2}{x^3}.$$
11. Знайти загальний розв'язок системи лінійних однорідних диференціальних рівнянь.
 
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 3x_1 + 8x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1 - 3x_2. \end{cases}$$
12. За умовою задачі записати диференціальне рівняння та проінтегрувати його. Матеріальна точка маси  $m = 1$  рухається прямолінійно, наближаючись до центра, який відштовхує її з силою, рівною  $kx^2$  ( $x$  – відстань точки до центра). При  $t = 0$ ,  $x = a$ ,  $\frac{dx}{dt} = ka$ . Знайти закон руху
13. За умовами протікання фізичного процесу скласти диференціальне рівняння та проінтегрувати його. Знайти закон руху тіла, вільно падаючого без початкової швидкості, вважаючи опір повітря пропорційним квадрату швидкості руху тіла і величину  $75 \text{ м/с}$  граничним значенням цієї швидкості.

## Варіант 13

1. Показати, що задана функція є розв'язком відповідного диференціального рівняння.

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = C \qquad y' = -\frac{1+y^2}{1+x^2}.$$

2. Для даного диференціального рівняння дослідити поле напрямів, зробити рисунок.

$$y' = 2x - y.$$

3. Знайти диференціальне рівняння, загальним розв'язком якого є криві, задані відповідними рівняннями.

$$x^2 + y^2 - Cx = 0.$$

4. Знайти ортогональні траєкторії заданої сім'ї ліній  $x^3 + y^3 = a^3$ .

5. Знайти загальний розв'язок диференціальних рівнянь:

5.1. з відокремлюваними змінними  $x(1+y^2)dx - y(1+x^2)dy = 0$ ;

5.2. однорідного диференціального рівняння першого порядку  $x dy - y dx = \sqrt{x^2 + y^2} \cdot dx$ ;

- 5.3. того, що приводиться до однорідного диференціального рівняння першого порядку

$$(x + 3y + 4)dx - (3x + y - 6)dy = 0;$$

5.4. в повних диференціалах  $(2y - 3)dx + (2x + 3y^2)dy = 0$ ;

5.5. лінійного диференціального рівняння першого порядку  $y' + 2xy = xe^{-x^2}$ ;

5.6. диференціального рівняння Бернуллі  $y' + 4x^3y^3 + 2xy = 0$ .

6. Розв'язати задачу Коші для лінійного диференціального рівняння першого порядку. Знайти загальний розв'язок для диференціальних рівнянь вищих порядків

а)  $y' - \frac{y}{x} = -2\frac{\ln x}{x}$ ,  $y(1) = 1$ ;      б)  $y''' = 2^x + \sin \frac{x}{2}$ ;

в)  $y'' \sin x = (1 + y') \cos x$ ;      г)  $(y')^2 + 2yy'' = 0$

- д) лінійного однорідного диференціального рівняння вищого порядку зі сталими коефіцієнтами  $y''' + 4y'' + 3y' = 0$ .

7. Розв'язати задачу Коші для лінійного однорідного диференціального рівняння вищого порядку зі сталими коефіцієнтами  $y''' - 3y' + 2y = 0$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = -2$ ,  $y''(0) = 0$ .

8. Знайти загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння другого порядку:

а)  $y'' + 2y' + 10y = (x + 7)e^{3x}$ ;      б)  $y'' - 4y' + 3y = (x^2 + 2)e^{3x}$ .

9. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння, використовуючи метод суперпозиції  $y'' - 2y' + y = xe^x + 7 \cos x$ .

10. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння, використовуючи метод варіації довільних сталих  $y'' + 9y = \frac{9}{\sin 3x}$ .

11. Знайти загальний розв'язок системи лінійних однорідних диференціальних рівнянь. 
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_1 - 9x_2, \\ \dot{x}_2 = x_1 + 8x_2. \end{cases}$$

12. За умовою задачі записати диференціальне рівняння та проінтегрувати його. Конденсатор ємності  $Q$  підключений до ланцюга з напругою  $E$  та опором  $R$ . Визначити заряд  $q$  конденсатора в момент після вмикання.

13. За умовами протікання фізичного процесу скласти диференціальне рівняння та проінтегрувати його. Матеріальна точка занурюється в рідину, витримуючи опір рідини, пропорційний швидкості руху. Знайти закон руху матеріальної точки, що занурюється в цю рідину зі стану спокою.

## Варіант 14

1. Показати, що задана функція є розв'язком відповідного диференціального рівняння.  

$$y = C_1 + C_2 \sin(x + C_3) \qquad y''' + y' = 0.$$
2. Для даного диференціального рівняння дослідити поле напрямів, зробити рисунок.  

$$y' = x^2 + y.$$
3. Знайти диференціальне рівняння, загальним розв'язком якого є криві, задані відповідними рівняннями.  

$$y = \sin x + C \cos x.$$
4. Знайти ортогональні траєкторії заданої сім'ї ліній  $y = ae^{-2x}$ .
5. Знайти загальний розв'язок диференціальних рівнянь:
  - 5.1. з відокремлюваними змінними  $xy' = y \ln y$ ;
  - 5.2. однорідного диференціального рівняння першого порядку  $\frac{ds}{dt} = \frac{s}{t} - \frac{t}{s}$ ;
  - 5.3. того, що приводиться до однорідного диференціального рівняння першого порядку  

$$(x + 8y - 9)dx - (10x - y - 9)dy = 0;$$
  - 5.4. в повних диференціалах  $2x \cos^2 y dx + (2y - x^2 \sin 2y) dy = 0$ ;
  - 5.5. лінійного диференціального рівняння першого порядку  $y' + 2y = 4x$ ;
  - 5.6. диференціального рівняння Бернуллі  $x(2x - 1)y' + y^2 = (4x + 1)y$ .
6. Розв'язати задачу Коші для лінійного диференціального рівняння першого порядку. Знайти загальний розв'язок для диференціальних рівнянь вищих порядків
  - а)  $y' - \frac{y}{x} = -\frac{12}{x^3}$ ,  $y(1) = 4$ ;
  - б)  $y^{IV} = x + \sin 2x$ ;
  - в)  $y'' - 2x(x^2 - y') = 0$ ;
  - г)  $y'' = \frac{1}{a}[1 + (y')^2]$
  - д) лінійного однорідного диференціального рівняння вищого порядку зі сталими коефіцієнтами  

$$y'''' - 3y'' + 2y' = 0.$$
7. Розв'язати задачу Коші для лінійного однорідного диференціального рівняння вищого порядку зі сталими коефіцієнтами  $y^{IV} + 2y'' + y = 0$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 1$ ,  $y''(0) = -1$ ,  $y'''(0) = -5$ .
8. Знайти загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння другого порядку:
  - а)  $y'' + 4y = xe^x$ ;
  - б)  $y'' - 4y' + 4y = 8e^{2x}$ .
9. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння, використовуючи метод суперпозиції  

$$y'' - y = 2xe^{-x} - 4 \sin 2x.$$
10. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння, використовуючи метод варіації довільних сталих  

$$y'' - 3y' + 2y = \frac{e^x}{1 + e^{-x}}.$$
11. Знайти загальний розв'язок системи лінійних однорідних диференціальних рівнянь.  

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -7x_1 + x_2, \\ \dot{x}_2 = -2x_1 - 5x_2. \end{cases}$$
12. За умовою задачі записати диференціальне рівняння та проінтегрувати його. Знайти криву, для якої трикутник, утворений нормаллю з координатними осями, рівновеликий трикутнику, утвореному віссю абсцис, дотичною і нормаллю.
13. За умовами протікання фізичного процесу скласти диференціальне рівняння та проінтегрувати його. Потяг рухається горизонтальним шляхом. Вага потягу –  $P$ , сила тяги тепловоза –  $T$ , сила опору при русі –  $\vec{F} = a + bv$ , де  $a$  та  $b$  – сталі,  $v$  – швидкість руху. Визначити закон руху, приймаючи нульові початкові умови.

## Варіант 15

1. Показати, що задана функція є розв'язком відповідного диференціального рівняння.  
 $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x \qquad y'' + y = 0.$
2. Для даного диференціального рівняння дослідити поле напрямів, зробити рисунок.  
 $y' = -\frac{y}{x}.$
3. Знайти диференціальне рівняння, загальним розв'язком якого є криві, задані відповідними рівняннями.  
 $x + y + C(1 - xy) = 0.$
4. Знайти ортогональні траєкторії заданої сім'ї ліній  $y^2 + x^3 = a.$
5. Знайти загальний розв'язок диференціальних рівнянь:
  - 5.1. з відокремлюваними змінними  $(1 + x^2)y^3 dx - x^3(1 + y^2)dy = 0;$
  - 5.2. однорідного диференціального рівняння першого порядку  $x^2 y' = y^2 + xy;$
  - 5.3. того, що приводиться до однорідного диференціального рівняння першого порядку  
 $(2x + 3y - 1)dx - (5x + y - 5)dy = 0;$
  - 5.4. в повних диференціалах  $(2x^3 - xy^2)dx + (2y^3 - x^2y)dy = 0;$
  - 5.5. лінійного диференціального рівняння першого порядку  $y' + \frac{n}{x}y = \frac{a}{x^n};$
  - 5.6. диференціального рівняння Бернуллі  $ay' + y = xy^{1-n}.$
6. Розв'язати задачу Коші для лінійного диференціального рівняння першого порядку. Знайти загальний розв'язок для диференціальних рівнянь вищих порядків
  - а)  $y' + \frac{2y}{x} = x^3, \quad y(1) = -\frac{5}{6};$
  - б)  $y''' = \operatorname{sh} x + x^2;$
  - в)  $y'' - 2y' \operatorname{ctg} x = \sin^3 x;$
  - г)  $yy'' - \sqrt{1 + (y')^2} = 0$
  - д) лінійного однорідного диференціального рівняння вищого порядку зі сталими коефіцієнтами  
 $2y^{IV} + 4y'' + 2y = 0.$
7. Розв'язати задачу Коші для лінійного однорідного диференціального рівняння вищого порядку зі сталими коефіцієнтами  $y^{IV} - 2y''' + y'' = 0, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = 2, \quad y'''(0) = 0.$
8. Знайти загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння другого порядку:
  - а)  $y'' - 6y' + 9y = 6 \cos x \cdot e^{3x};$
  - б)  $y'' + 16y = 7 \cos 4x.$
9. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння, використовуючи метод суперпозиції  
 $y'' + 4y' - 5y = -3e^{-5x} + 2 \sin x.$
10. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння, використовуючи метод варіації довільних сталих  $y'' + 4y' = \frac{1}{\sin 2x}.$
11. Знайти загальний розв'язок системи лінійних однорідних диференціальних рівнянь.
 
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 - 3x_2, \\ \dot{x}_2 = 3x_1 + x_2. \end{cases}$$
12. За умовою задачі записати диференціальне рівняння та проінтегрувати його. Балка довжини  $\ell$ , що лежить кінцями на двох опорах, знаходиться під дією рівномірно розподіленого навантаження інтенсивності  $g$ . Знайти рівняння вигнутої осі балки та її максимальний прогин, обравши початок координат посередині ненавантаженої балки.
13. За умовами протікання фізичного процесу скласти диференціальне рівняння та проінтегрувати його. Куля входить в дошку завтовшки  $h = 0,1 \text{ м}$  із швидкістю  $v_0 = 200 \text{ м/с}$ , а вилітає з дошки, пробивши її зі швидкістю  $v_1 = 80 \text{ м/с}$ . Приймаючи, що сила опору дошки рухові кулі пропорційна квадратові швидкості руху, знайти, скільки часу продовжувався рух кулі через дошку.

## Варіант 16

1. Показати, що задана функція є розв'язком відповідного диференціального рівняння.

$$y = x \left( \int \frac{e^x}{x} dx + C \right) \qquad xy' - y = xe^x.$$

2. Для даного диференціального рівняння дослідити поле напрямів, зробити рисунок.

$$y' = y.$$

3. Знайти диференціальне рівняння, загальним розв'язком якого є криві, задані відповідними рівняннями.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{c^2} = 1 \text{ (виключити } c \text{)}.$$

4. Знайти ортогональні траєкторії заданої сім'ї ліній  $y^2 = ax^3$ .

5. Знайти загальний розв'язок диференціальних рівнянь:

5.1. з відокремлюваними змінними  $\frac{dy}{dx} + \sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}} = 0$ ;

5.2. однорідного диференціального рівняння першого порядку  $\frac{dx}{x^2 - xy + y^2} = \frac{dy}{2y^2 - xy}$ ;

5.3. того, що приводиться до однорідного диференціального рівняння першого порядку  $(x - 3y - 1)dx - (5x - y + 1)dy = 0$ ;

5.4. в повних диференціалах  $(x^2 + y)dx + (x - 2y)dy = 0$ ;

5.5. лінійного диференціального рівняння першого порядку  $y' - ny/x = e^x x^n$ ;

5.6. диференціального рівняння Бернуллі  $y' - \frac{y}{2a} = \frac{2x}{y}$ .

6. Розв'язати задачу Коші для лінійного диференціального рівняння першого порядку. Знайти загальний розв'язок для диференціальних рівнянь вищих порядків

а)  $y' + \frac{y}{x} = 3x, \quad y(1) = 1$ ;

б)  $y''' = \operatorname{ch} x + x^{-2}$ ;

в)  $y''x \ln x - y' = 0$ ;

г)  $yy'' = y'$

д) лінійного однорідного диференціального рівняння вищого порядку зі сталими коефіцієнтами  $y''' - y'' + y' - y = 0$ .

7. Розв'язати задачу Коші для лінійного однорідного диференціального рівняння вищого порядку зі сталими коефіцієнтами  $y''' + 2y'' + y' = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1, \quad y''(0) = -1$ .

8. Знайти загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння другого порядку:

а)  $y'' + y = 6e^{-x} \sin x$ ;

б)  $y'' - 2y' + y = (x^2 + 1)e^x$ .

9. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння, використовуючи метод суперпозиції  $y'' - 3y' + 2y = xe^{2x} + 7x^2 + x$ .

10. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння, використовуючи метод варіації довільних сталих  $y'' - y' = e^{2x} \cos e^x$ .

11. Знайти загальний розв'язок системи лінійних однорідних диференціальних рівнянь. 
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_1 + x_2, \\ \dot{x}_2 = 3x_1 + 4x_2. \end{cases}$$

12. За умовою задачі записати диференціальне рівняння та проінтегрувати його. Знайти криві, що перетинають всі прямі  $y = kx$  під кутом  $\pi/4$ .

13. За умовами протікання фізичного процесу скласти диференціальне рівняння та проінтегрувати його. Точка маси  $m = 1$  рухається прямолінійно: на неї діє сила, пропорційна квадрату часу, що пройшов з моменту, коли швидкість дорівнювала нулю (коефіцієнт пропорційності дорівнює 2). Крім того, точка витримує опір середовища, пропорційний швидкості (коефіцієнт пропорційності дорівнює 1). Знайти залежність шляху від часу.

## Варіант 17

1. Показати, що задана функція є розв'язком відповідного диференціального рівняння.  

$$e^{-y} - Cx = 1 \qquad xy' + 1 = e^y.$$
2. Для даного диференціального рівняння дослідити поле напрямів, зробити рисунок.  

$$y' = y^2.$$
3. Знайти диференціальне рівняння, загальним розв'язком якого є криві, задані відповідними рівняннями.  

$$e^x y = x + C.$$
4. Знайти ортогональні траєкторії заданої сім'ї ліній  $x^4 + y^4 = a^4$ .
5. Знайти загальний розв'язок диференціальних рівнянь:
  - 5.1. з відокремлюваними змінними  $\frac{x^2}{y^3} dx + e^{x+y} dy = 0$ ;
  - 5.2. однорідного диференціального рівняння першого порядку  $xy' + 2\sqrt{xy} = y$ ;
  - 5.3. того, що приводиться до однорідного диференціального рівняння першого порядку  

$$(x + 4y - 5) dx - (x - y - 1) dy = 0$$
;
  - 5.4. в повних диференціалах  $y dx + (x - y^3) dy = 0$ ;
  - 5.5. лінійного диференціального рівняння першого порядку  $\frac{ds}{dt} \cos t + s \sin t = 1$ ;
  - 5.6. диференціального рівняння Бернуллі  $(1 + x^2) y' - 2xy = 4\sqrt{y(1 + x^2)} \operatorname{arctg} x$ .
6. Розв'язати задачу Коші для лінійного диференціального рівняння першого порядку. Знайти загальний розв'язок для диференціальних рівнянь вищих порядків
  - а)  $y' - \frac{2xy}{1 + x^2} = 1 + x^2, y(1) = 3$ ;
  - б)  $y''' = e^{3x} + 3^x$ ;
  - в)  $xy'' - y' = 1$ ;
  - г)  $yy'' - 2yy' \ln y = (y')^2$
  - д) лінійного однорідного диференціального рівняння вищого порядку зі сталими коефіцієнтами  

$$y''' - 2y'' + 5y' = 0.$$
7. Розв'язати задачу Коші для лінійного однорідного диференціального рівняння вищого порядку зі сталими коефіцієнтами  $y''' - 5y'' + 6y' = 0, y(0) = 0, y'(0) = 0, y''(0) = 3$ .
8. Знайти загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння другого порядку:
  - а)  $y'' - 5y' + 6y = e^{-x} \sin 2x$ ;
  - б)  $y'' - 3y' + 2y = 2xe^x$ .
9. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння, використовуючи метод суперпозиції  

$$y'' + 49y = 3 \cos 7x + 2e^{7x}.$$
10. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння, використовуючи метод варіації довільних сталих  $y'' - y' = \frac{e^{-x}}{2 + e^{-x}}$ .
11. Знайти загальний розв'язок системи лінійних однорідних диференціальних рівнянь.
 
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_1 + x_2, \\ \dot{x}_2 = x_1 + 2x_2. \end{cases}$$
12. За умовою задачі записати диференціальне рівняння та проінтегрувати його. Вітер, проходячи через ліс і зустрічаючи опір дерев, втрачає швидкість. На нескінченно малому шляху ця шляху ця втрата пропорційна швидкості вітру на початку шляху та його довжині. Знайти швидкість вітру, що пройшов в лісі 150 м, знаючи, що початкова швидкість була 12 м/с, після проходження в лісі шляху  $S = 1$  м швидкість його зменшилась до 11,8 м/с.
13. За умовами протікання фізичного процесу скласти диференціальне рівняння та проінтегрувати його. Два однакових вантажі підвішені до кінця жорстко закріпленої іншим кінцем пружини. Знайти закон руху одного з вантажів, якщо інший зірветься. Відомо, що вільно підвішений до пружини вантаж видовжує її на  $a$  см.

## Варіант 18

1. Показати, що задана функція є розв'язком відповідного диференціального рівняння.

$$y = Ce^{-2x} + \frac{1}{3}e^x \qquad y' + 2y = e^x.$$

2. Для даного диференціального рівняння дослідити поле напрямів, зробити рисунок.

$$y' = y - 2x^2.$$

3. Знайти диференціальне рівняння, загальним розв'язком якого є криві, задані відповідними рівняннями.

$$y = C_1 + C_2e^x.$$

4. Знайти ортогональні траєкторії заданої сім'ї ліній  $x + y = axy$ .

5. Знайти загальний розв'язок диференціальних рівнянь:

5.1. з відокремлюваними змінними  $\frac{1}{4y}e^{2x^2 + \ln x} dx - \frac{1}{\sqrt{2 + 2y^2}} dy = 0$ ;

5.2. однорідного диференціального рівняння першого порядку  $y' = \frac{y^2}{x^2} + \frac{y}{x}$ ;

5.3. того, що приводиться до однорідного диференціального рівняння першого порядку  $(2x + 2y - 2)dx - (x + y + 8)dy = 0$ ;

5.4. в повних диференціалах  $2(3xy^2 + 2x^3)dx + 3(2x^2y + y^2)dy = 0$ ;

5.5. лінійного диференціального рівняння першого порядку  $(x - x^3)y' + (2x^2 - 1)y - ax^3 = 0$ ;

5.6. диференціального рівняння Бернуллі  $2yx' - x = -x^3 \sin y$ .

6. Розв'язати задачу Коші для лінійного диференціального рівняння першого порядку. Знайти загальний розв'язок для диференціальних рівнянь вищих порядків

а)  $y' + \frac{1 - 2x}{x^2}y = 1, y(1) = 1$ ;                      б)  $y^{IV} = 2^{-x}$ ;

в)  $x(y'' + 4) + y' = 0$ ;                                      г)  $2yy' + y'' = 0$

д) лінійного однорідного диференціального рівняння вищого порядку зі сталими коефіцієнтами  $y'''' - 3y''' + 7y'' - 5y' = 0$ .

7. Розв'язати задачу Коші для лінійного однорідного диференціального рівняння вищого порядку зі сталими коефіцієнтами  $y^{IV} - 6y''' + 9y'' = 0, y(0) = 0, y'(0) = 2, y''(0) = 1, y'''(0) = -1$ .

8. Знайти загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння другого порядку:

а)  $9y'' - 6y' + y = -\cos x$ ;                                      б)  $y'' + 25y = (2 - x)\cos 5x$ .

9. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння, використовуючи метод суперпозиції  $y'' - 4y' + 5y = 3e^{2x} \sin x + 2 \cos 2x$ .

10. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння, використовуючи метод варіації довільних сталих  $y'' + y = 3 \operatorname{tg} x$ .

11. Знайти загальний розв'язок системи лінійних однорідних диференціальних рівнянь. 
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + 5x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1 - 3x_2. \end{cases}$$

12. За умовою задачі записати диференціальне рівняння та проінтегрувати його. Цегляна стіна має товщину 30 см. Знайти залежність температури від відстані точки від зовнішнього краю стіни, якщо температура дорівнює 20° на внутрішній і 0° на зовнішній поверхні стіни. (швидкість  $Q$ , з якою теплота розповсюджується через площадку  $A$ , перпендикулярну до осі  $Ox$ ,  $Q = -kS \frac{dT}{dt}$ , де  $k = 0,0015$ ,

$T$  – температура,  $t$  – час,  $S$  – площа  $A$ ).

13. За умовами протікання фізичного процесу скласти диференціальне рівняння та проінтегрувати його. Зісковзування важкого ланцюга з крюка починається в момент, коли довжина однієї його гілки дорівнює 10 м, а іншої – 8 м. Сила тертя дорівнює вазі 1 м ланцюга. Знайти час зісковзування ланцюга з крюка.

## Варіант 19

1. Показати, що задана функція є розв'язком відповідного диференціального рівняння.
 
$$\begin{cases} x = te^t; \\ y = e^{-t}. \end{cases} \quad (1 + xy)y' + y^2 = 0.$$
2. Для даного диференціального рівняння дослідити поле напрямів, зробити рисунок.
 
$$y' = 2y + 8x.$$
3. Знайти диференціальне рівняння, загальним розв'язком якого є криві, задані відповідними рівняннями.
 
$$y = Ce^{-2x}.$$
4. Знайти ортогональні траєкторії заданої сім'ї ліній  $x - y = axy$ .
5. Знайти загальний розв'язок диференціальних рівнянь:
  - 5.1. з відокремлюваними змінними  $x(1 + y^4)dx + e^{-x}(1 + x^2)(1 + y^2)dy = 0$ ;
  - 5.2. однорідного диференціального рівняння першого порядку  $y + (2\sqrt{xy} - x)y' = 0$ ;
  - 5.3. того, що приводиться до однорідного диференціального рівняння першого порядку  $(-2x + 3y + 1)dx - (x + y - 2)dy = 0$ ;
  - 5.4. в повних диференціалах  $(2x + 3y^2)dx + (6xy - y + 1)dy = 0$ ;
  - 5.5. лінійного диференціального рівняння першого порядку  $y' - \frac{3y}{x} = x$ ;
  - 5.6. диференціального рівняння Бернуллі  $y' + 2y = e^x y^2$ .
6. Розв'язати задачу Коші для лінійного диференціального рівняння першого порядку. Знайти загальний розв'язок для диференціальних рівнянь вищих порядків
  - а)  $y' + \frac{3y}{x} = \frac{2}{x^3}$ ,  $y(1) = 1$ ;
  - б)  $y''' = 10^x + x^{10}$ ;
  - в)  $x^3 y'' + x^2 y' = 1$ ;
  - г)  $y'' = \frac{1}{4} y^{-\frac{1}{2}}$ ;
  - д) лінійного однорідного диференціального рівняння вищого порядку зі сталими коефіцієнтами  $y^{IV} - 3y''' + 2y'' = 0$ .
7. Розв'язати задачу Коші для лінійного однорідного диференціального рівняння вищого порядку зі сталими коефіцієнтами  $y''' - 3y'' - y' + 3y = 0$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 2$ ,  $y''(0) = -1$ .
8. Знайти загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння другого порядку:
  - а)  $y'' + 2y' + 10y = x^2 + 3x$ ;
  - б)  $9y'' - 9y' + y = (x + 6)e^{\frac{x}{3}}$ .
9. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння, використовуючи метод суперпозиції  $y'' - y = xe^{-x} + x^2 + 1$ .
10. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння, використовуючи метод варіації довільних сталих  $y'' - 3y' + 2y = -\frac{4}{2 + e^{-x}}$ .
11. Знайти загальний розв'язок системи лінійних однорідних диференціальних рівнянь.
 
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 4x_1 - x_2, \\ \dot{x}_2 = x_1 + 2x_2. \end{cases}$$
12. За умовою задачі записати диференціальне рівняння та проінтегрувати його. Знайти рівняння руху точки, якщо прискорення в залежності від часу виражається формулою  $a = 1,2t$ , за умови що при  $t = 0$ ,  $S = 0$ , а при  $t = 5$ ,  $S = 20$ .
13. За умовами протікання фізичного процесу скласти диференціальне рівняння та проінтегрувати його. Крапля води, що має початкову масу  $m_0 \text{ г}$  і рівномірно випаровується зі швидкістю  $m \text{ г/с}$ , рухається за інерцією з початковою швидкістю  $v_0 \text{ см/с}$ . Сила опору середовища пропорційна швидкості руху краплі та її радіусу. В початковий момент ( $t = 0$ ) вона дорівнює  $f_0 \text{ дін}$ . Знайти залежність швидкості краплі від часу.

## Варіант 20

1. Показати, що задана функція є розв'язком відповідного диференціального рівняння.

$$y = x \int_0^x \sin t^2 dt \qquad xy' - y = x^2 \sin x^2.$$

2. Для даного диференціального рівняння дослідити поле напрямів, зробити рисунок.

$$2(y + y') = x + 3.$$

3. Знайти диференціальне рівняння, загальним розв'язком якого є криві, задані відповідними рівняннями.

$$y = C_1 + C_2 x^2.$$

4. Знайти ортогональні траєкторії заданої сім'ї ліній  $x^2 + y^2 = a^2 x^2 y^2$ .

5. Знайти загальний розв'язок диференціальних рівнянь:

5.1. з відокремлюваними змінними  $y' = e^{x+y}$ ;

5.2. однорідного диференціального рівняння першого порядку  $(x^2 - 2xy + y^2)y' + y^2 = 0$ ;

5.3. того, що приводиться до однорідного диференціального рівняння першого порядку  $(x + 6y - 3)dx - (8x - y - 7)dy = 0$ ;

5.4. в повних диференціалах  $(y - 3x^2)dx - (4y - x)dy = 0$ ;

5.5. лінійного диференціального рівняння першого порядку  $y' - \frac{2y}{x+1} = (x+1)^3$ ;

5.6. диференціального рівняння Бернуллі  $2y' + 2y = xy^2$ .

6. Розв'язати задачу Коші для лінійного диференціального рівняння першого порядку. Знайти загальний розв'язок для диференціальних рівнянь вищих порядків

а)  $y' + 2xy = -2x^3$ ,  $y(1) = e^{-1}$ ;      б)  $y''' = 5^x + x^5$ ;

в)  $y'' + y' \operatorname{tg} x = \sin 2x$ ;      г)  $y'' = ay'$

д) лінійного однорідного диференціального рівняння вищого порядку зі сталими коефіцієнтами  $y''' - 5y'' - 6y' = 0$ .

7. Розв'язати задачу Коші для лінійного однорідного диференціального рівняння вищого порядку зі сталими коефіцієнтами  $y''' - 9y' = 0$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 1$ ,  $y''(0) = 3$ .

8. Знайти загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння другого порядку:

а)  $y'' - 5y' + 4y = 9 \cos 3x$ ;      б)  $y'' - 6y' + 10y = e^{3x} \cos x$ .

9. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння, використовуючи метод суперпозиції  $y'' + 8y' + 16y = 3e^{-4x} + x \cos x$ .

10. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння, використовуючи метод варіації довільних сталих  $y'' + y = 6 \operatorname{ctg} x$ .

11. Знайти загальний розв'язок системи лінійних однорідних диференціальних рівнянь. 
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 - x_2, \\ \dot{x}_2 = x_1 + 3x_2. \end{cases}$$

12. За умовою задачі записати диференціальне рівняння та проінтегрувати його. Знайти рівняння кривої, що проходить через точку  $(2; 5)$  і має таку властивість, що відрізок довільної її дотичної, обмежений між осями координат, ділиться навпіл в точці дотику.

13. За умовами протікання фізичного процесу скласти диференціальне рівняння та проінтегрувати його. Ланцюг довжиною 6 м зісковзує зі столу без тертя. Рух цього ланцюга починається з моменту, коли звисає 1 м ланцюга. Обчислити час, по закінченню якого він впаде з столу.

## Варіант 21

1. Показати, що задана функція є розв'язком відповідного диференціального рівняння.  

$$y = x + C\sqrt{1+x^2} \qquad (xy+1)dx - (x^2+1)dy = 0.$$
2. Для даного диференціального рівняння дослідити поле напрямів, зробити рисунок.  

$$y' = \frac{x^2 + y^2}{2} - 1.$$
3. Знайти диференціальне рівняння, загальним розв'язком якого є криві, задані відповідними рівняннями.  

$$x^2 + 2xy = C.$$
4. Знайти ортогональні траєкторії заданої сім'ї ліній  $(1+x^2)y = a$ .
5. Знайти загальний розв'язок диференціальних рівнянь:
  - 5.1. з відокремлюваними змінними  $e^y \left( \frac{dy}{dx} + 1 \right) = 1$ ;
  - 5.2. однорідного диференціального рівняння першого порядку  $(2\sqrt{st} - s)dt + tds = 0$ ;
  - 5.3. того, що приводиться до однорідного диференціального рівняння першого порядку  $(5x + 4y - 3)dx - (6x - 4y - 1)dy = 0$ ;
  - 5.4. в повних диференціалах  $(x^2 + y^2 + x)dx + (2xy - e^y + 1)dy = 0$ ;
  - 5.5. лінійного диференціального рівняння першого порядку  $y' + y = e^{-x}$ ;
  - 5.6. диференціального рівняння Бернуллі  $-2xy' + 3y = (5x^2 + 3)y^3$ .
6. Розв'язати задачу Коші для лінійного диференціального рівняння першого порядку. Знайти загальний розв'язок для диференціальних рівнянь вищих порядків
  - а)  $y' + \frac{xy}{2(1-x^2)} = \frac{x}{2}$ ,  $y(0) = \frac{2}{3}$ ;
  - б)  $y''' = \cos 2x + 11e^x$ ;
  - в)  $xy'' - y' = x^2e^x$ ;
  - г)  $y^3y'' = -1$
  - д) лінійного однорідного диференціального рівняння вищого порядку зі сталими коефіцієнтами  $y''' - 3y'' + 2y' = 0$ .
7. Розв'язати задачу Коші для лінійного однорідного диференціального рівняння вищого порядку зі сталими коефіцієнтами  $y''' + 4y'' + 3y' = 0$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 0$ ,  $y''(0) = -1$ .
8. Знайти загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння другого порядку:
  - а)  $-y'' + 2y' - y = e^{2x} \sin 4x$ ;
  - б)  $y'' + y = (x-3) \sin x$ .
9. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння, використовуючи метод суперпозиції  $y'' - 6y' + 8y = e^{3x} + x^2 + 4x$ .
10. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння, використовуючи метод варіації довільних сталих  $y'' + 3y' = \frac{5e^{3x}}{1+e^{3x}}$ .
11. Знайти загальний розв'язок системи лінійних однорідних диференціальних рівнянь.
 
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 - 2x_2, \\ \dot{x}_2 = 3x_1 + 6x_2. \end{cases}$$
12. За умовою задачі записати диференціальне рівняння та проінтегрувати його. Знайти рівняння кривої, що проходить через точку  $(1;1)$  і має таку властивість, що відстань від початку координат до довільної її дотичної дорівнює абсцисі точки дотику.
13. За умовами протікання фізичного процесу скласти диференціальне рівняння та проінтегрувати його. Моторний човен в спокійній воді рухається зі швидкістю  $v_0 = 9$  км/г. На повному ходу його мотор було вимкнено і через 20 с швидкість човна зменшилась до 4,5 км/г. Визначити шлях, пройдений човном за 1 хв. (з моменту вимкнення мотора).

## Варіант 22

1. Показати, що задана функція є розв'язком відповідного диференціального рівняння.

$$y = Cx^m \qquad y' - \frac{m}{x}y = 0.$$

2. Для даного диференціального рівняння дослідити поле напрямів, зробити рисунок.

$$y'(y^2 + 1) + x = 0.$$

3. Знайти диференціальне рівняння, загальним розв'язком якого є криві, задані відповідними рівняннями.  
 $\ln x \ln y = C$ .

4. Знайти ортогональні траєкторії заданої сім'ї ліній  $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ .

5. Знайти загальний розв'язок диференціальних рівнянь:

5.1. з відокремлюваними змінними  $\frac{dy}{dx} = \frac{xy^2 + y^2}{x^2y - x^2}$ ;

5.2. однорідного диференціального рівняння першого порядку  $xy' - y = x \operatorname{tg} \frac{y}{x}$ ;

5.3. того, що приводиться до однорідного диференціального рівняння першого порядку  
 $(2x + y - 4)dx - (3x + 5y + 1)dy = 0$ ;

5.4. в повних диференціалах  $\frac{x}{(x+y)^2}dx + \frac{2x+y}{(x+y)^2}dy = 0$ ;

5.5. лінійного диференціального рівняння першого порядку  $y' + xy = x^3$ ;

5.6. диференціального рівняння Бернуллі  $x^3dy + (2x^2y - y^3x)dx = 0$ .

6. Розв'язати задачу Коші для лінійного диференціального рівняння першого порядку. Знайти загальний розв'язок для диференціальних рівнянь вищих порядків

а)  $y' + xy = -x^3$ ,  $y(0) = 3$ ;                      б)  $y''' = \sin 2x + \frac{1}{x}$ ;

в)  $x^2y'' + xy' - 1 = 0$ ;                                      г)  $yy'' + y = (y')^2$

д) лінійного однорідного диференціального рівняння вищого порядку зі сталими коефіцієнтами  
 $y^{IV} + y'' = 0$ .

7. Розв'язати задачу Коші для лінійного однорідного диференціального рівняння вищого порядку зі сталими коефіцієнтами  $y''' + 4y' = 0$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 2$ ,  $y''(0) = 0$ .

8. Знайти загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння другого порядку:

а)  $y'' - 2y' + 17y = x \cos 4x$ ;                      б)  $y'' - 4y' + 4y = 5e^{3x}$ .

9. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння, використовуючи метод суперпозиції  
 $y'' + 2y' + y = 4x^2 + \sin 2x$ .

10. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння, використовуючи метод варіації довільних сталих  $y'' + \pi^2y = \frac{4}{\cos \pi x}$ .

11. Знайти загальний розв'язок системи лінійних однорідних диференціальних рівнянь. 
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 - 3x_2, \\ \dot{x}_2 = x_1 + 5x_2. \end{cases}$$

12. За умовою задачі записати диференціальне рівняння та проінтегрувати його. Знайти рівняння кривої, що проходить через точку (1;2) і має таку властивість, що відрізок, який відтинає на осі ординат довільна дотична, дорівнює абсцисі точки дотику.

13. За умовами протікання фізичного процесу скласти диференціальне рівняння та проінтегрувати його. Температура вийнятого з печі тіла протягом 20 хв. Знижується з 200°C до 160°C. Температура повітря 25°C. Через який час від початку охолодження температура тіла знизиться до 30°C.

## Варіант 23

1. Показати, що задана функція є розв'язком відповідного диференціального рівняння.  

$$y = \frac{C_1}{x} + C_2 \qquad y'' + \frac{2}{x}y' = 0.$$
2. Для даного диференціального рівняння дослідити поле напрямів, зробити рисунок.  

$$(x^2 + 1)y' = y - 2x.$$
3. Знайти диференціальне рівняння, загальним розв'язком якого є криві, задані відповідними рівняннями.  

$$y = C\sqrt{x}.$$
4. Знайти ортогональні траєкторії заданої сім'ї ліній  $xe^{2y} = a$ .
5. Знайти загальний розв'язок диференціальних рівнянь:
  - 5.1. з відокремлюваними змінними  $\sqrt{1 - y^2} \cdot dx + y\sqrt{1 - x^2} \cdot dy = 0$ ;
  - 5.2. однорідного диференціального рівняння першого порядку  $\frac{x dx + y dy}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{x dy - y dx}{x^2} = 0$ ;
  - 5.3. того, що приводиться до однорідного диференціального рівняння першого порядку  $(7x - y - 6)dx - (x + 5y - 6)dy = 0$ ;
  - 5.4. в повних диференціалах  $(3x^2y + \cos x)dx + (x^3 + 2y)dy = 0$ ;
  - 5.5. лінійного диференціального рівняння першого порядку  $\frac{dy}{dx} + 2xy = 2xe^{-x^2}$ ;
  - 5.6. диференціального рівняння Бернуллі  $y' - y \sin x = y^2 \sin x$ .
6. Розв'язати задачу Коші для лінійного диференціального рівняння першого порядку. Знайти загальний розв'язок для диференціальних рівнянь вищих порядків
  - а)  $y' - \frac{2y}{x+1} = e^x(x+1)^2$ ,  $y(0) = 1$ ;      б)  $xy''' = x^2 + x \cos x$ ;
  - в)  $(1 + x^2)y'' + (y')^2 + 1 = 0$ ;      г)  $yy'' - (y')^2 = y^3$
  - д) лінійного однорідного диференціального рівняння вищого порядку зі сталими коефіцієнтами  $y''' - 3y'' - y' + 3y = 0$ .
7. Розв'язати задачу Коші для лінійного однорідного диференціального рівняння вищого порядку зі сталими коефіцієнтами  $y''' - y'' = 0$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 6$ ,  $y''(0) = 2$ .
8. Знайти загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння другого порядку:
  - а)  $y'' - 6y' + 8y = x \sin 2x$ ;      б)  $y'' + 2y' + 17y = 7e^{-x} \cos 4x$ .
9. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння, використовуючи метод суперпозиції  

$$y'' - 2y' + y = xe^x + \frac{1}{2}(\cos^2 x - \sin^2 x).$$
10. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння, використовуючи метод варіації довільних сталих  $y'' + \frac{1}{\pi^2}y = \frac{1}{\pi^2 \cos(x/\pi)}$ .
11. Знайти загальний розв'язок системи лінійних однорідних диференціальних рівнянь. 
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_1 + x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1. \end{cases}$$
12. За умовою задачі записати диференціальне рівняння та проінтегрувати його. Знайти рівняння кривої, що проходить через точку  $(-1; 1)$  і має таку властивість, що відрізок, який відтинає на осі  $Ox$  дотична, проведена в довільній точці кривої, дорівнює квадрату абсциси точки дотику.
13. За умовами протікання фізичного процесу скласти диференціальне рівняння та проінтегрувати його. Точка маси  $m = 1$  рухається прямолінійно: на неї діє сила, пропорційна часу, що протікає з моменту коли швидкість дорівнювала нулю (коефіцієнт пропорційності дорівнює 3). Крім того, точка витримує опір середовища, пропорційний швидкості (коефіцієнт пропорційності дорівнює 2). Знайти шлях, пройдений точкою за час  $t = 4$  с.

## Варіант 24

1. Показати, що задана функція є розв'язком відповідного диференціального рівняння.

$$y = \sin x - 1 + Ce^{-\sin x} \qquad y' + y \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x .$$

2. Для даного диференціального рівняння дослідити поле напрямів, зробити рисунок.

$$y' = \frac{x}{y} .$$

3. Знайти диференціальне рівняння, загальним розв'язком якого є криві, задані відповідними рівняннями.

$$y = \frac{C_1}{x} + C_2 .$$

4. Знайти ортогональні траєкторії заданої сім'ї ліній  $x^3 y^2 = a$  .

5. Знайти загальний розв'язок диференціальних рівнянь:

5.1. з відокремлюваними змінними  $x + xy + y'(y + xy) = 0$  ;

5.2. однорідного диференціального рівняння першого порядку  $2x^3 y' = y(2x^2 - y^2)$  ;

5.3. того, що приводиться до однорідного диференціального рівняння першого порядку  $(x + y + 2)dx - (2x + 1)dy = 0$  ;

5.4. в повних диференціалах  $(5x - y)dx - xdy = 0$  ;

5.5. лінійного диференціального рівняння першого порядку  $y' + y \cos x = \sin x \cos x$  ;

5.6. диференціального рівняння Бернуллі  $(x^2 + y^2 + 1)dy + xy dx = 0$  .

6. Розв'язати задачу Коші для лінійного диференціального рівняння першого порядку. Знайти загальний розв'язок для диференціальних рівнянь вищих порядків

а)  $y' + 2xy = xe^{-x^2} \sin x$ ,  $y(0) = 1$ ;      б)  $e^x y''' = e^{2x} + 2$  ;

в)  $(y''x - y')y' = x^3$  ;      г)  $y^2 - (y')^2 - 2yy'' = 0$

д) лінійного однорідного диференціального рівняння вищого порядку зі сталими коефіцієнтами  $y''' + y' = 0$  .

7. Розв'язати задачу Коші для лінійного однорідного диференціального рівняння вищого порядку зі сталими коефіцієнтами  $y'' + 6y' + 13y = 0$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 1$  .

8. Знайти загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння другого порядку:

а)  $y'' - 9y = x^2 e^x$  ;

б)  $y'' + 9y = x \sin 3x$  .

9. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння, використовуючи метод суперпозиції  $y'' - 4y = 3e^{2x} - 7x \cos x$  .

10. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння, використовуючи метод варіації довільних сталих  $y'' + 4y = 6 \operatorname{tg} 2x$  .

11. Знайти загальний розв'язок системи лінійних однорідних диференціальних рівнянь. 
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 4x_1 + 6x_2, \\ \dot{x}_2 = 4x_1 + 2x_2. \end{cases}$$

12. За умовою задачі записати диференціальне рівняння та проінтегрувати його. Знайти рівняння кривої, що проходить через точку  $(3;1)$  і має таку властивість, що відрізок дотичної між точкою дотику і віссю  $Ox$  ділиться навпіл в точці перетину з віссю  $Oy$  .

13. За умовами протікання фізичного процесу скласти диференціальне рівняння та проінтегрувати його. Резервуар містить 100 л розсолу, в якому розчинено 10 кг солі. В цю посудину вливається вода зі швидкістю 3 л/хв., а виливається з неї розчин зі швидкістю 2 л/хв., при цьому концентрація розчину підтримується рівномірним шляхом помішування. Скільки солі опиниться в резервуарі по закінченню 1 години від початку такого процесу?

## Варіант 25

1. Показати, що задана функція є розв'язком відповідного диференціального рівняння.  

$$y^2 = 2Cx + C^2 \qquad y(y')^2 + 2xy' - y = 0.$$
2. Для даного диференціального рівняння дослідити поле напрямів, зробити рисунок.  

$$y' = \frac{x + y}{x - y}.$$
3. Знайти диференціальне рівняння, загальним розв'язком якого є криві, задані відповідними рівняннями.  
 $y = C \cos x.$
4. Знайти ортогональні траєкторії заданої сім'ї ліній  $9y^2 - 2x^3 = a.$
5. Знайти загальний розв'язок диференціальних рівнянь:
  - 5.1. з відокремлюваними змінними  $x^2y' + y = 0;$
  - 5.2. однорідного диференціального рівняння першого порядку  $(x^2 + y^2)y' = 2xy;$
  - 5.3. того, що приводиться до однорідного диференціального рівняння першого порядку  
 $(2x + 3y - 5)dx - (5x - 5)dy = 0;$
  - 5.4. в повних диференціалах  $\frac{2x - y}{x^2 + y^2}dx + \frac{2y + x}{x^2 + y^2}dy = 0;$
  - 5.5. лінійного диференціального рівняння першого порядку  $x \ln xy' + y = 2 \ln x;$
  - 5.6. диференціального рівняння Бернуллі  $y' - y \cos x = y^2 \cos x.$
6. Розв'язати задачу Коші для лінійного диференціального рівняння першого порядку. Знайти загальний розв'язок для диференціальних рівнянь вищих порядків
  - а)  $y' - \frac{2y}{x+1} = (x+1)^3, \quad y(0) = \frac{1}{2};$       б)  $xy''' = 2;$
  - в)  $(1+x^2)y'' + 2xy' = x^3;$       г)  $y(1 - \ln y)y'' + (1 + \ln y)(y')^2 = 0$
  - д) лінійного однорідного диференціального рівняння вищого порядку зі сталими коефіцієнтами  
 $y''' - 8y = 0.$
7. Розв'язати задачу Коші для лінійного однорідного диференціального рівняння вищого порядку зі сталими коефіцієнтами  $y''' + 2y'' + 5y' = 0, \quad y(0) = -1, \quad y'(0) = 2.$
8. Знайти загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння другого порядку:
  - а)  $y'' + 2y' + y = 17 \sin 2x;$       б)  $y'' - 5y' + 6y = (x^2 + x)e^{2x}.$
9. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння, використовуючи метод суперпозиції  
 $4y'' - 4y' + y = 6e^{\frac{x}{2}} + 8x.$
10. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння, використовуючи метод варіації довільних сталих  $y'' - 3y' + 2y = \frac{1}{9 + e^{-x}}.$
11. Знайти загальний розв'язок системи лінійних однорідних диференціальних рівнянь.
 
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 3x_1 + x_2, \\ \dot{x}_2 = 8x_1 + x_2. \end{cases}$$
12. За умовою задачі записати диференціальне рівняння та проінтегрувати його. Знайти рівняння лінії, яка перетинає вісь абсцис в точці  $x = 1$  і має таку властивість: довжина піднормалі в кожній точці лінії дорівнює середньому арифметичному координат цієї точки.
13. За умовами протікання фізичного процесу скласти диференціальне рівняння та проінтегрувати його. Знайти час падіння тіла на Землю з висоти  $4 \times 10^5$  км. (відстань до Місяця) ( $R_{\text{Землі}} = 6400$  км).

## Варіант 26

1. Показати, що задана функція є розв'язком відповідного диференціального рівняння.  

$$y = Cx + C - C^2 \qquad (y')^2 - y' - xy' + y = 0.$$
2. Для даного диференціального рівняння дослідити поле напрямів, зробити рисунок.  

$$y' = x^2 + y^2.$$
3. Знайти диференціальне рівняння, загальним розв'язком якого є криві, задані відповідними рівняннями.  

$$y = kx + C.$$
4. Знайти ортогональні траєкторії заданої сім'ї ліній  $x^2 - y^2 = ax^2y^2$ .
5. Знайти загальний розв'язок диференціальних рівнянь:
  - 5.1. з відокремлюваними змінними  $yy' + x = 0$ ;
  - 5.2. однорідного диференціального рівняння першого порядку  

$$4x^2 + xy - 3y^2 + (y^2 + 2xy - 5x^2)y' = 0;$$
  - 5.3. того, що приводиться до однорідного диференціального рівняння першого порядку  

$$(4x + 3y - 1)dx - (5y + x + 5)dy = 0;$$
  - 5.4. в повних диференціалах  $e^{-y}dx + (1 - xe^{-y})dy = 0$ ;
  - 5.5. лінійного диференціального рівняння першого порядку  $xy' + y = x \cos x$ ;
  - 5.6. диференціального рівняння Бернуллі  $2(xy' + y) = xy^2$ .
6. Розв'язати задачу Коші для лінійного диференціального рівняння першого порядку. Знайти загальний розв'язок для диференціальних рівнянь вищих порядків
  - а)  $y' - y \cos x = -\sin 2x$ ,  $y(0) = 3$ ;
  - б)  $y^{(n)} = x^m$ ;
  - в)  $y''(2y' + x) = 1$ ;
  - г)  $yy'' - (y')^2 = y^2y'$
  - д) лінійного однорідного диференціального рівняння вищого порядку зі сталими коефіцієнтами  

$$y'''' + 5y''' - 6y'' = 0.$$
7. Розв'язати задачу Коші для лінійного однорідного диференціального рівняння вищого порядку зі сталими коефіцієнтами  $y'' - 4y' + 8y = 0$ ,  $y(0) = -1$ ,  $y'(0) = 0$ .
8. Знайти загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння другого порядку:
  - а)  $y'' + 4y = x^2 + 2x$ ;
  - б)  $y'' + 4y' - 5y = 4e^{-5x}$ .
9. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння, використовуючи метод суперпозиції  

$$y'' + 2y' + 5y = 4e^{-x} \cos x + x \sin 2x.$$
10. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння, використовуючи метод варіації довільних сталих  $y'' + \frac{1}{4}y = \frac{1}{8} \operatorname{ctg} \frac{x}{2}$ .
11. Знайти загальний розв'язок системи лінійних однорідних диференціальних рівнянь.
 
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + 5x_2, \\ \dot{x}_2 = x_1 + 3x_2. \end{cases}$$
12. За умовою задачі записати диференціальне рівняння та проінтегрувати його. Знайти лінію, яка має таку властивість: відрізок дотичної в довільній її точці між віссю  $Ox$  і прямою  $y = ax + b$ , ділиться точкою дотику навпіл.
13. За умовами протікання фізичного процесу скласти диференціальне рівняння та проінтегрувати його. Катер рухається в спокійній воді зі швидкістю  $v_0 = 10$  км/г. На повному ході двигун катер було вимкнено і через 2 хв. Швидкість катера зменшилася до  $v_1 = 0,5$  км/г. Визначити швидкість, з якою рухався катер через 40 с після підключення двигуна, вважаючи, що опір води пропорційний швидкості руху катеру.

## Варіант 27

1. Показати, що задана функція є розв'язком відповідного диференціального рівняння.

$$y = C_1 x + \frac{C_2}{x} + C_3 \qquad y''' + \frac{3}{x} y'' = 0.$$

2. Для даного диференціального рівняння дослідити поле напрямів, зробити рисунок.

$$y' = \frac{1}{1 + x^2}.$$

3. Знайти диференціальне рівняння, загальним розв'язком якого є криві, задані відповідними рівняннями.  
 $x = C_1 \cos nt + C_2 \sin nt$ .

4. Знайти ортогональні траєкторії заданої сім'ї ліній  $y^2 + 2x^2 = a(y^2 + x^2)^2$ .

5. Знайти загальний розв'язок диференціальних рівнянь:

5.1. з відокремлюваними змінними  $\sin \theta \cos \varphi \cdot d\theta - \cos \theta \sin \varphi \cdot d\varphi = 0$ ;

5.2. однорідного диференціального рівняння першого порядку  $(y^2 - 4x^2) dy + xy dx = 0$ ;

5.3. того, що приводиться до однорідного диференціального рівняння першого порядку  
 $(x + y + 2) dx - (2x + y - 4) dy = 0$ ;

5.4. в повних диференціалах  $\left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right) dx - 2\frac{y}{x} dy = 0$ ;

5.5. лінійного диференціального рівняння першого порядку  $y' - y \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos^3 x}$ ;

5.6. диференціального рівняння Бернуллі  $y' - y = y^2 e^{-x} \cos x$ .

6. Розв'язати задачу Коші для лінійного диференціального рівняння першого порядку. Знайти загальний розв'язок для диференціальних рівнянь вищих порядків

а)  $y' - 4xy = -4x^3$ ,  $y(0) = -\frac{1}{2}$ ;      б)  $y''' = 6e^{3x}$ ;

в)  $xy'' = y'(\ln y' - \ln x)$ ;      г)  $y'' \sin y - 2(y')^2 \cos y = 0$

д) лінійного однорідного диференціального рівняння вищого порядку зі сталими коефіцієнтами  
 $9y^{IV} + 6y'' + y = 0$ .

7. Розв'язати задачу Коші для лінійного однорідного диференціального рівняння вищого порядку зі сталими коефіцієнтами  $y''' - 5y'' + 4y' = 0$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 4$ ,  $y''(0) = 3$ .

8. Знайти загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння другого порядку:

а)  $y'' + y = -\sin 2x$ ;      б)  $4y'' - 4y' + y = (x + 7)e^{\frac{x}{2}}$ .

9. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння, використовуючи метод суперпозиції  
 $y'' + 16y = x \cos 4x + 8$ .

10. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння, використовуючи метод варіації довільних сталих  $4y'' + y = 7 \sin^{-3}(x/2)$ .

11. Знайти загальний розв'язок системи лінійних однорідних диференціальних рівнянь.  

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 - 5x_2, \\ \dot{x}_2 = -7x_1 - 3x_2. \end{cases}$$

12. За умовою задачі записати диференціальне рівняння та проінтегрувати його. Знайти рівняння кривої, що проходить через точку  $M(\sqrt{10}; \sqrt{10})$  і має таку властивість: відрізок, який відтинає на осі абсцис дотична, проведена в довільній точці кривої, дорівнює кубу абсциси точки дотику.

13. За умовами протікання фізичного процесу скласти диференціальне рівняння та проінтегрувати його. Крапля води, яка мала початкову масу  $m_0 z$ , рівномірно випаровується на повітрі. Сила опору пропорційна швидкості руху краплі (коефіцієнт пропорційності дорівнює  $k$ ). Знайти залежність швидкості руху краплі, якщо в початковий момент часу швидкість краплі дорівнювала нулю. Вважати, що  $k \neq 2m$ .

## Варіант 28

1. Показати, що задана функція є розв'язком відповідного диференціального рівняння.
 
$$x = \frac{y + C}{1 - Cy} \qquad \frac{dx}{dy} = \frac{1 + x^2}{1 + y^2}.$$
2. Для даного диференціального рівняння дослідити поле напрямів, зробити рисунок.
 
$$yy' + x = 0.$$
3. Знайти диференціальне рівняння, загальним розв'язком якого є криві, задані відповідними рівняннями.
 
$$x \cos \alpha + y \sin \alpha = \alpha.$$
4. Знайти ортогональні траєкторії заданої сім'ї ліній  $y = ae^{-\frac{2}{3x}}$ .
5. Знайти загальний розв'язок диференціальних рівнянь:
  - 5.1. з відокремлюваними змінними  $\sec^2 \theta \operatorname{tg} \varphi \cdot d\varphi + \sec^2 \varphi \operatorname{tg} \theta \cdot d\theta = 0$ ;
  - 5.2. однорідного диференціального рівняння першого порядку  $(xye^{\frac{x}{y}} + y^2) dx - x^2 e^{\frac{x}{y}} dy = 0$ ;
  - 5.3. того, що приводиться до однорідного диференціального рівняння першого порядку
 
$$(x + 5y - 1) dx - (2x + 11y + 1) dy = 0$$
;
  - 5.4. в повних диференціалах  $2e^y dx + (x^2 e^y - 3y) dy = 0$ ;
  - 5.5. лінійного диференціального рівняння першого порядку  $y' - y \operatorname{ctg} x = \operatorname{tg}^2 x$ ;
  - 5.6. диференціального рівняння Бернуллі  $y' - y = xy^2$ .
6. Розв'язати задачу Коші для лінійного диференціального рівняння першого порядку. Знайти загальний розв'язок для диференціальних рівнянь вищих порядків
  - а)  $y' - \frac{y}{x} = -\frac{\ln x}{x}$ ,  $y(1) = 1$ ;
  - б)  $y''' = 5x + 2e^{\frac{x}{2}}$ ;
  - в)  $xy'' = y' + x \sin x$ ;
  - г)  $2yy'' - 3(y')^2 = 4y^2$
  - д) лінійного однорідного диференціального рівняння вищого порядку зі сталими коефіцієнтами
 
$$4y^{IV} + 4y'' + y = 0.$$
7. Розв'язати задачу Коші для лінійного однорідного диференціального рівняння вищого порядку зі сталими коефіцієнтами  $y^{IV} + 2y''' + y'' = 0$ ,  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = -1$ ,  $y''(0) = 0$ ,  $y'''(0) = 11$ .
8. Знайти загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння другого порядку:
  - а)  $y'' - 2y' + 26y = 2e^{-5x} \cos 2x$ ;
  - б)  $y'' + 25y' = 2x \cos 5x$ .
9. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння, використовуючи метод суперпозиції
 
$$9y'' - 6y' + y = -3e^{\frac{x}{3}} + x^2 + 2x.$$
10. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння, використовуючи метод варіації довільних сталих
 
$$y'' + 3y' + 2y = \frac{4e^{-x}}{6 + e^x}.$$
11. Знайти загальний розв'язок системи лінійних однорідних диференціальних рівнянь.
 
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -5x_1 - 4x_2, \\ \dot{x}_2 = -2x_1 - 3x_2. \end{cases}$$
12. За умовою задачі записати диференціальне рівняння та проінтегрувати його. Знайти лінію, для якої співвідношення відстаней від нормалі в довільній її точці до початку координат по відношенню до відстані від тієї ж нормалі до точки  $(a; b)$  дорівнює сталій  $k$ .
13. За умовами протікання фізичного процесу скласти диференціальне рівняння та проінтегрувати його. Сила струму  $I$  у електричному ланцюзі задовольняє диференціальне рівняння  $Z\dot{I} + RI = U$ , де  $Z$  – індуктивність,  $R$  – активний опір ланцюга,  $U$  – напруга на зажимах джерела струму. Знайти силу струму в цьому ланцюгу через  $t = t_0 c$  після увімкнення, якщо  $U = U_0 \sin(2\pi nt)$ , а при  $t = 0$  сила струму  $I = I_0$ .

## Варіант 29

1. Показати, що задана функція є розв'язком відповідного диференціального рівняння.  
 $\rho = C \cos \theta$   $d\rho + \rho \operatorname{tg} \theta d\theta = 0$ .
2. Для даного диференціального рівняння дослідити поле напрямів, зробити рисунок.  
 $y' = y / (x + y)$ .
3. Знайти диференціальне рівняння, загальним розв'язком якого є криві, задані відповідними рівняннями.  
 $x^3 + y^3 = C$ .
4. Знайти ортогональні траєкторії заданої сім'ї ліній  $x^3 - y^3 = a^3$ .
5. Знайти загальний розв'язок диференціальних рівнянь:
  - 5.1. з відокремлюваними змінними  $xy' - y = 0$ ;
  - 5.2. однорідного диференціального рівняння першого порядку  $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \operatorname{tg} \frac{y}{x}$ ;
  - 5.3. того, що приводиться до однорідного диференціального рівняння першого порядку  
 $(-2x + 3y + 1)dx - (x - 2)dy = 0$ ;
  - 5.4. в повних диференціалах  $yx^{y-1}dx + x^y \ln x dy = 0$ ;
  - 5.5. лінійного диференціального рівняння першого порядку  $y' + 2y = x^2 + 2x$ ;
  - 5.6. диференціального рівняння Бернуллі  $y' - y \sin x = y^2 \sin x$ .
6. Розв'язати задачу Коші для лінійного диференціального рівняння першого порядку. Знайти загальний розв'язок для диференціальних рівнянь вищих порядків
  - а)  $y' - 3x^2y = x^2(1 + x^3)/3$ ,  $y(0) = 0$ ;    б)  $y''' = \sin \frac{x}{2} + \cos 2x$ ;
  - в)  $(x + 1)y'' - (x + 2)y' + x + 2 = 0$ ;    г)  $yy' = \sqrt{y^2 + (y')^2}y'' - y'y''$
  - д) лінійного однорідного диференціального рівняння вищого порядку зі сталими коефіцієнтами  
 $y'''' + 2y'' + 10y' = 0$ .
7. Розв'язати задачу Коші для лінійного однорідного диференціального рівняння вищого порядку зі сталими коефіцієнтами  $y^{IV} + 4y'' + y = 0$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 8$ ,  $y''(0) = 0$ ,  $y'''(0) = 11$ .
8. Знайти загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння другого порядку:
  - а)  $y'' + 4y' - 5y = \cos 2x$ ;
  - б)  $y'' + y' = x \cos x$ .
9. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння, використовуючи метод суперпозиції  
 $y'' - 2y' + y = 8e^x + x \sin x$ .
10. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння, використовуючи метод варіації довільних сталих  $9y'' + y = 7 \operatorname{tg}(x/3)$ .
11. Знайти загальний розв'язок системи лінійних однорідних диференціальних рівнянь.  

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -7x_1 + 5x_2, \\ \dot{x}_2 = 4x_1 - 8x_2. \end{cases}$$
12. За умовою задачі записати диференціальне рівняння та проінтегрувати його. Знайти лінію, у якій довільна дотична перетинається з віссю ординат в точці, однаково віддаленій від точки дотику і від початку координат.
13. За умовами протікання фізичного процесу скласти диференціальне рівняння та проінтегрувати його. Знайти прогин осі балки постійного перерізу довжини  $2\ell$ , розміщеної вільно кінцями на опорах і навантаженої рівномірно з інтенсивністю  $q$ . (Потрібно знайти рівняння прогину балки і найбільший її прогин). Диференціальне рівняння прогину такої балки:  $EJ \frac{d^2u}{dx^2} = \sum_{i=1}^n M_i$ , де  $E$  – модуль Юнга матеріалу балки, перпендикулярного до її відносно тієї ж осі;  $\sum_{i=1}^n M_i$  – алгебраїчна сума моментів всіх сил, що діють на балку, відносно її перерізу з абсцисою  $x$ ;  $y$  – прогин балки в цьому перерізі.

## Варіант 30

1. Показати, що задана функція є розв'язком відповідного диференціального рівняння.  

$$S = \sin t + C \cos t \qquad \frac{dS}{dt} \cos t + S \cdot \sin t = 1.$$
2. Для даного диференціального рівняння дослідити поле напрямів, зробити рисунок.  

$$y' = x - e^y.$$
3. Знайти диференціальне рівняння, загальним розв'язком якого є криві, задані відповідними рівняннями.  

$$y = Cx^{n-1}.$$
4. Знайти ортогональні траєкторії заданої сім'ї ліній  $(2a - x)y^2 = x^3$ .
5. Знайти загальний розв'язок диференціальних рівнянь:
  - 5.1. з відокремлюваними змінними  $(1 - e^x)yy' = e^x$ ;
  - 5.2. однорідного диференціального рівняння першого порядку  $\frac{dy}{dx} = \frac{xy + y^2 e^{-\frac{x}{y}}}{x^2}$ ;
  - 5.3. того, що приводиться до однорідного диференціального рівняння першого порядку  $(x + 6y - 1)dx - (5x - y + 7)dy = 0$ ;
  - 5.4. в повних диференціалах  $(1 + x\sqrt{x^2 + y^2})dx + (-1 + \sqrt{x^2 + y^2})ydy = 0$ ;
  - 5.5. лінійного диференціального рівняння першого порядку  $y' - \frac{y}{1 - x^2} = 1 + x$ ;
  - 5.6. диференціального рівняння Бернуллі  $3xy' + 5y = (4x - 5)y^4$ .
6. Розв'язати задачу Коші для лінійного диференціального рівняння першого порядку. Знайти загальний розв'язок для диференціальних рівнянь вищих порядків
  - а)  $y' - y \cos x = \sin 2x$ ,  $y(0) = -1$ ;      б)  $y''' = e^{3x} + 3^x$ ;
  - в)  $y''(1 + \ln x) + \frac{1}{x}y' = 2 + \ln x$ ;      г)  $yy'' = (y')^2 + y'\sqrt{y^2 + (y')^2}$
  - д) лінійного однорідного диференціального рівняння вищого порядку зі сталими коефіцієнтами  $y''' + 4y'' + 5y' = 0$ .
7. Розв'язати задачу Коші для лінійного однорідного диференціального рівняння вищого порядку зі сталими коефіцієнтами  $y''' + 4y'' + 3y' = 0$ ,  $y(0) = 4$ ,  $y'(0) = 0$ ,  $y''(0) = 2$ .
8. Знайти загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння другого порядку:
  - а)  $y'' - 4y' + 5y = xe^x$ ;      б)  $y'' - 5y' + 4y = (x - 1)e^x$ .
9. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння, використовуючи метод суперпозиції  $y'' - 5y' + 6y = 7e^{2x} - 3 \cos 5x$ .
10. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння, використовуючи метод варіації довільних сталих  $y'' + 16y = \frac{8}{\sin 4x}$ .
11. Знайти загальний розв'язок системи лінійних однорідних диференціальних рівнянь.
 
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -5x_1 - 8x_2, \\ \dot{x}_2 = -3x_1 - 3x_2. \end{cases}$$
12. За умовою задачі записати диференціальне рівняння та проінтегрувати його. Знайти лінію, для якої відстань від початку координат до дотичної в довільній її точці дорівнює відстані від початку координат до нормалі в тій же точці.
13. За умовами протікання фізичного процесу скласти диференціальне рівняння та проінтегрувати його. Маятник, що складається з матеріальної точки маси  $m$ , закріпленої на нерозтяжній нитці довжини  $\ell$ , підвішений до нерухомої точки. Він качається в середовищі, опір якого пропорційний швидкості руху точки. Знайти період коливання маятника. (Колівання вважати малим і тому  $\sin \theta \sim \theta$ ).