

Вступ

Запропонований збірник задач містить 30 варіантів індивідуальних завдань, а кожний варіант – завдання з розділів: кратні та криволінійні інтеграли.

Тема "Кратні та криволінійні інтеграли" вивчається в другому навчальному семестрі студентами КНУБА всіх спеціальностей і форм навчання.

Даний збірник підготовлено з метою організації регулярної роботи студентів з вивчення курсу. Кожний студент розв'язує завдання одного з тридцяти варіантів.

Завдання для конкретних груп студентів викладач підбирає індивідуально з врахуванням програми, часу, який виділяється для відповідного виду роботи, можливостей аудиторії.

Варіант 1

1. Змінити порядок інтегрування:

$$\int_{-2}^{-1} dy \int_{-\sqrt{2+y}}^0 f dx + \int_{-1}^0 dy \int_{-\sqrt{-y}}^0 f dx.$$

2. Обчислити:

$$1) \iint_{D: y=\ln 2, y=\ln 3, x=2, x=4} y \exp\left(\frac{xy}{2}\right) dx dy. \quad 2) \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}} dy.$$

$$3) \iiint_{V: x^2+y^2+z^2=4, x, y, z \geq 0} (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz.$$

3. Знайти площі фігур, обмежених лініями:

$$1) y = \frac{3}{x}, y = 4e^x, y = 3, y = 4.$$

$$2) y^2 - 2y + x^2 = 0, y^2 - 4y + x^2 = 0; y = \frac{x}{\sqrt{3}}, y = \sqrt{3}x.$$

4. Знайти масу пластинки D з густиною $\mu = y^2$, $D: x^2 + \frac{y^2}{4} \leq 1$.

5. Знайти об'єми тіл, обмежених поверхнями:

$$1) y = 16\sqrt{2x}, y = \sqrt{2x}, z = 0, x + z = 2.$$

$$2) z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}, 9z = 2(x^2 + y^2).$$

$$3) z = 2 - 12(x^2 + y^2), z = 24x + 2.$$

6. Знайти масу тіла V з густиною μ :

$$V: 64(x^2 + y^2) = z^2; x^2 + y^2 = 4; y, z \geq 0; \mu = \frac{5(x^2 + y^2)}{4}.$$

7. Знайти координати центра мас однорідного тіла, обмеженого поверхнями: $x = 6(y^2 + z^2), y^2 + z^2 = 3, x = 0$.

8. Знайти довжину дуги кривої:

$$1) y = \ln x, \sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{15}.$$

$$2) \rho = 3e^{\frac{3\varphi}{4}}, -\frac{\pi}{2} \leq \varphi < \frac{\pi}{2}.$$

9. Знайти масу кривої $x = t \cos t, y = t \sin t, z = t, 0 \leq t \leq 2\pi$ з густиною $\mu = 2z - \sqrt{x^2 + y^2}$.

10. Знайти роботу сили $\mathbf{F} = (x^2 - 2y)\mathbf{i} + (y^2 - 2x)\mathbf{j}$ при переміщенні вздовж відрізка MN від точки $M(-4, 0)$ до точки $N(0, 2)$.

Варіант 2

1. Змінити порядок інтегрування:

$$\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y}}^0 f dx + \int_1^{\sqrt{2}} dy \int_{-\sqrt{2-y^2}}^0 f dx.$$

2. Обчислити:

$$1) \iint_{D: x=0, y=\sqrt{\pi}, y=\frac{x}{2}} y^2 \sin \frac{xy}{2} dx dy. \quad 2) \int_{-\sqrt{3}}^0 dx \int_0^{\sqrt{3-x^2}} \frac{dy}{\sqrt{1+x^2+y^2}}.$$

$$3) \iiint_{V: z^2=4x^2+4y^2, z=2, y \geq \pm x, z \geq 0} y \sqrt{x^2+y^2} dx dy dz.$$

3. Знайти площі фігур, обмежених лініями:

$$1) x = \sqrt{36-y^2}, x = 6 - \sqrt{36-y^2}.$$

$$2) x^2 - 4x + y^2 = 0; x^2 - 8x + y^2 = 0; y = 0; y = \frac{x}{\sqrt{3}}.$$

4. Знайти масу пластинки D з густиною

$$\mu = \frac{y}{x}, D: 1 \leq \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \leq 2, 0 \leq y \leq \frac{2}{3}x.$$

5. Знайти об'єми тіл, обмежених поверхнями:

$$1) y = 5\sqrt{x}, y = \frac{5x}{3}, z = 0, z = 5 + \frac{5}{3}\sqrt{x}. \quad 2) z = \frac{15}{2}\sqrt{x^2+y^2}, z = \frac{17}{2} - x^2 - y^2.$$

$$3) z = 10\left((x-1)^2 + y^2\right) + 1, z = 21 - 20x.$$

6. Знайти масу тіла V з густиною μ :

$$V: x^2 + y^2 + z^2 = 4; x^2 + y^2 \leq 1; x \geq 0, \mu = 4|z|.$$

7. Знайти координати центра мас однорідного тіла, обмеженого поверхнями:

$$y = 3\sqrt{x^2+z^2}, x^2+z^2 = 36, y = 0.$$

8. Знайти довжину дуги кривої:

$$1) y = x^2/4 - (\ln x)/2, 1 \leq x \leq 2.$$

$$2) \rho = 2e^{\frac{4\varphi}{3}}, -\pi/2 \leq \varphi < \pi/2.$$

9. Знайти масу кривої $x = \cos t, y = \sin t, z = \sqrt{3}t, 0 \leq t \leq 2\pi$ з густиною $\mu = x^2 + y^2 + z^2$.

10. Знайти роботу сили $\mathbf{F} = (x^2 + 2y)\mathbf{i} + (y^2 + 2x)\mathbf{j}$ при переміщенні вздовж відрізка MN від точки $M(-4, 0)$ до точки $N(0, 2)$.

Варіант 3

1. Змінити порядок інтегрування:

$$\int_0^1 dy \int_0^y f dx + \int_1^{\sqrt{2}} dy \int_0^{\sqrt{2-y^2}} f dx.$$

2. Обчислити:

$$1) \iint_{D: y=\frac{\pi}{2}, y=\pi, x=1, x=2} y \cos xy dx dy. \quad 2) \int_0^R dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \frac{\operatorname{tg} \sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} dy.$$

$$3) \iiint_{V: \begin{matrix} 1 \leq x^2+y^2 \leq 36, \\ y \geq x, x, z \geq 0, z \leq 2 \end{matrix}} z^2 dx dy dz.$$

3. Знайти площі фігур, обмежених лініями:

$$1) x^2 + y^2 = 72, 6y = -x^2 (y \leq 0).$$

$$2) y^2 - 6y + x^2 = 0, y^2 - 8y + x^2 = 0,$$

$$\sqrt{3}y = x, y = \sqrt{3}x.$$

4. Знайти масу пластинки D з густиною $\mu = x^2 y$, $D: \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} \leq 1, y \geq 0$.

5. Знайти об'єми тіл, обмежених поверхнями:

$$1) x^2 + y^2 = 2, y = \sqrt{x}, y, z = 0, z = 15x. \quad 2) z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}, 15z = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

$$3) z = 8(x^2 + y^2) + 3, z = 16x + 3.$$

6. Знайти масу тіла V з густиною μ :

$$V: x^2 + y^2 = 1, x^2 + y^2 = 2z,$$

$$x, y \geq 0, z = 0; \mu = 10x.$$

7. Знайти координати центра мас однорідного тіла, обмеженого поверхнями:

$$x = 7(y^2 + z^2), x = 28.$$

8. Знайти довжину дуги кривої:

$$1) y = \sqrt{1-x^2} + \arcsin x, 0 \leq x \leq \frac{7}{9}. \quad 2) \rho = \sqrt{2}e^\varphi, -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}.$$

9. Знайти масу кривої $x = 2 \cos t, y = 2 \sin t, z = 2t, 0 \leq t \leq 2\pi$ з густиною $\mu = z^2(x^2 + y^2)^{-1}$.

10. Знайти роботу сили $\mathbf{F} = (x^2 + 2y)\mathbf{i} + (y^2 + 2x)\mathbf{j}$ при переміщенні вздовж параболи $y = 2 - \frac{x^2}{8}$ від точки $M(-4, 0)$ до точки $N(0, 2)$.

Варіант 4

1. Змінити порядок інтегрування:

$$\int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{y}} f dx + \int_1^2 dy \int_0^{\sqrt{2-y}} f dx.$$

2. Обчислити:

$$1) \iint_{D: x=0, y=2, y=x} y^2 \exp\left(-\frac{xy}{4}\right) dx dy. \quad 2) \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \ln(1+x^2+y^2) dy.$$

$$3) \iiint_{V: \begin{matrix} x^2+y^2+z^2=32, \\ y^2=x^2+z^2, y \geq 0 \end{matrix}} y dx dy dz.$$

3. Знайти площі фігур, обмежених лініями:

$$1) x = 8 - y^2, x = -2y.$$

$$2) x^2 - 2x + y^2 = 0, x^2 - 4x + y^2 = 0,$$

$$y = 0, y = x.$$

4. Знайти масу пластинки D з густиною $\mu = \frac{7x^2y}{18}$, $D: \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} \leq 1, y \geq 0$.

5. Знайти об'єми тіл, обмежених поверхнями:

$$1) x + y = 2, y = \sqrt{x}, z = 12y, z = 0. \quad 2) z = \sqrt{64 - x^2 - y^2}, z = 1, x^2 + y^2 \leq 60.$$

$$3) 2 - z = 20((x+1)^2 + y^2), z = -40x - 38.$$

6. Знайти масу тіла V з густиною μ :

$$V: x^2 + y^2 = \frac{16}{49}z^2; x^2 + y^2 = \frac{4}{7}z; x, y \geq 0; \mu = 80yz.$$

7. Знайти координати центра мас однорідного тіла, обмеженого поверхнями:

$$z = 2\sqrt{x^2 + y^2}, z = 8.$$

8. Знайти довжину дуги кривої:

$$1) y = \ln \frac{5}{2x}, \sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{8}.$$

$$2) \rho = 3e^{\frac{5\varphi}{12}}, -\frac{\pi}{2} \leq \varphi < \frac{\pi}{2}.$$

9. Знайти масу кривої $x = \frac{a}{\sqrt{2}} \cos t, y = \frac{a}{\sqrt{2}} \cos t, z = a \sin t, 0 \leq t \leq 2\pi$ з

$$\text{густиною } \mu = \sqrt{2y^2 + z^2}.$$

10. Знайти роботу сили $\mathbf{F} = (x+y)\mathbf{i} + 2x\mathbf{j}$ при переміщенні вздовж кола $x^2 + y^2 = 4$ ($y \geq 0$) від точки $M(2,0)$ до точки $N(-2,0)$.

Варіант 5

1. Змінити порядок інтегрування:

$$\int_{-\sqrt{2}}^{-1} dy \int_{-\sqrt{2-y^2}}^0 f dx + \int_{-1}^0 dy \int_y^0 f dx.$$

2. Обчислити:

$$1) \iint_{D: y=\frac{\pi}{2}, y=\pi, x=1, x=2} y \sin xy dx dy. \quad 2) \int_{-2}^2 dx \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} \sqrt{4-x^2-y^2} dy.$$

$$3) \iiint_{V: \begin{matrix} x^2+y^2+z^2=8, \\ x^2=y^2+z^2, x \geq 0 \end{matrix}} x dx dy dz.$$

3. Знайти площі фігур, обмежених лініями:

$$1) y = \frac{3}{x}, y = 8e^x, y = 3, y = 8.$$

$$2) y^2 - 8y + x^2 = 0, y^2 - 10y + x^2 = 0, y = \frac{x}{\sqrt{3}}, y = \sqrt{3}x.$$

4. Знайти масу пластинки D з густиною $\mu = \frac{8y}{x^3}$,

$$D: 1 \leq x^2/4 + y^2 \leq 4; \quad 0 \leq y \leq x/2.$$

5. Знайти об'єми тіл, обмежених поверхнями:

$$1) x = 20\sqrt{2y}, x = 5\sqrt{2y}, z = 0, z + y = \frac{1}{2}. \quad 2) 3z = \sqrt{16 - 9x^2 - 9y^2}, 2z = x^2 + y^2.$$

$$3) z = 4 - 14(x^2 + y^2), z = 4 - 28x.$$

6. Знайти масу тіла V з густиною μ :

$$V: x^2 + y^2 + z^2 = 1, x^2 + y^2 = 4z^2, \quad x, y \geq 0 \quad (z \geq 0); \mu = 20z.$$

7. Знайти координати центра мас однорідного тіла, обмеженого поверхнями:

$$z = 5(x^2 + y^2)x^2 + y^2 = 2, z = 0.$$

8. Знайти довжину дуги кривої:

$$1) y = -\ln \cos x, 0 \leq x \leq \frac{\pi}{6}. \quad 2) \rho = 5e^{\frac{12\varphi}{5}}, -\frac{\pi}{2} \leq \varphi < \frac{\pi}{2}.$$

9. Знайти масу кривої $x = \frac{1}{2} \cos t, y = \frac{1}{2} \cos t, z = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin t, 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ з густиною $\mu = xyz$.

10. Знайти роботу сили $\mathbf{F} = x^3 \mathbf{i} - y^3 \mathbf{j}$ при переміщенні вздовж кола $x^2 + y^2 = 4 (x, y \geq 0)$ від точки $M(2, 0)$ до точки $N(0, 2)$.

Варіант 6

1. Змінити порядок інтегрування:

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} dy \int_0^{\arcsin y} f dx + \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 dy \int_0^{\arccos y} f dx.$$

2. Обчислити:

$$1) \iint_{D: x=0, y=\sqrt{\frac{\pi}{2}}, y=\frac{x}{2}} y^2 \cos \frac{xy}{2} dx dy. \quad 2) \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dx \int_{-\sqrt{2-x^2}}^{\sqrt{2-x^2}} \frac{xy}{x^2 + y^2} dy.$$

$$3) \iiint_{V: 4 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 16, y \leq \sqrt{3}x; y, z \geq 0} y dx dy dz.$$

3. Знайти площі фігур, обмежених лініями:

$$1) y = \frac{\sqrt{x}}{2}; y = \frac{1}{2x}; x = 16.$$

$$2) x^2 - 4x + y^2 = 0; x^2 - 8x + y^2 = 0; y = 0, y = x.$$

4. Знайти масу пластинки D з густиною $\mu = 7xy^6$, $D: \frac{x^2}{9} + y^2 \leq 1, x \geq 0$.

5. Знайти об'єми тіл, обмежених поверхнями:

$$1) x = \frac{5\sqrt{y}}{2}, x = \frac{5y}{6}, z = 0, z = \frac{5}{6}(3 + \sqrt{y}). \quad 2) z = 3\sqrt{x^2 + y^2}, z = 10 - x^2 - y^2.$$

$$3) z = 28((x+1)^2 + y^2) + 3, z = 56x + 59.$$

6. Знайти масу тіла V з густиною μ :

$$V: 36(x^2 + y^2) = z^2, x^2 + y^2 = 1, x, z \geq 0; \mu = \frac{5(x^2 + y^2)}{6}.$$

7. Знайти координати центра мас однорідного тіла, обмеженого поверхнями:

$$x = 6\sqrt{y^2 + z^2}, y^2 + z^2 = 9, x = 0.$$

8. Знайти довжину дуги кривої:

$$1) y = e^x + 6, \ln \sqrt{8} \leq x \leq \ln \sqrt{15}. \quad 2) \rho = 3e^{\frac{3\varphi}{4}}, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3}.$$

9. Знайти масу кривої $x = a \cos t, y = a \sin t, z = bt, 0 \leq t \leq 2\pi$ з густиною $\mu = x^2 + y^2 + z^2$.

10. Знайти роботу сили $\mathbf{F} = (x+y)\mathbf{i} + (x-y)\mathbf{j}$ при переміщенні вздовж параболи $y = x^2$ від точки $M(-1,1)$ до точки $N(1,1)$.

Варіант 7

1. Змінити порядок інтегрування:

$$\int_{-2}^{-1} dy \int_0^{\sqrt{2+y}} f dx + \int_{-1}^0 dy \int_0^{\sqrt{-y}} f dx.$$

2. Обчислити:

$$1) \iint_{D: y=\ln 3, y=\ln 4, x=\frac{1}{2}, x=1} 4ye^{xy} dx dy. \quad 2) \int_{-R}^0 dx \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} \cos \sqrt{x^2+y^2} dy.$$

$$3) \iiint_V y dx dy dz.$$

$V: z=\sqrt{8-x^2-y^2},$
 $z=\sqrt{x^2+y^2}, y \geq 0$

3. Знайти площі фігур, обмежених лініями:

$$1) x = 5 - y^2, x = -4y.$$

$$2) y^2 - 4y + x^2 = 0, y^2 - 6y + x^2 = 0,$$
$$x = 0, y = x.$$

4. Знайти масу пластинки D з густиною $\mu = 4y^4$, $D: \frac{x^2}{4} + y^2 \leq 1$.

5. Знайти об'єми тіл, обмежених поверхнями:

$$1) x^2 + y^2 = 2, x = \sqrt{y}, x, z = 0, z = 30y. \quad 2) z = \sqrt{25 - x^2 - y^2}, z = \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{99}}.$$

$$3) z = 32(x^2 + y^2) + 3, z = 3 - 64x.$$

6. Знайти масу тіла V з густиною μ :

$$V: x^2 + y^2 + z^2 = 16, x^2 + y^2 \leq 4;$$
$$\mu = 2|z|.$$

7. Знайти координати центра мас однорідного тіла, обмеженого поверхнями:

$$z = 8(x^2 + y^2), z = 32.$$

8. Знайти довжину дуги кривої:

$$1) y = 2 + \arcsin \sqrt{x} + \sqrt{x - x^2}, x \in \left[\frac{1}{4}; 1 \right]. \quad 2) \rho = 4e^{\frac{4\varphi}{3}}, 0 \leq \varphi < \frac{\pi}{3}.$$

9. Знайти масу кривої $x = t \cos t$, $y = t \sin t$, $z = t$, $0 \leq t \leq 2\pi$ з густиною

$$\mu = 2z - \sqrt{x^2 + y^2}.$$

10. Знайти роботу сили $\mathbf{F} = x^2 y \mathbf{i} - y \mathbf{j}$ при переміщенні вздовж відрізка MN від точки $M(-1, 0)$ до точки $N(0, 1)$.

Варіант 8

1. Змінити порядок інтегрування:

$$\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y}}^0 f dx + \int_1^e dy \int_{-1}^{-\ln y} f dx.$$

2. Обчислити:

$$1) \iint_{D: x=0, y=\sqrt{\frac{\pi}{2}}, y=x} 4y^2 \sin xy dx dy. \quad 2) \int_{-R}^R dx \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} \operatorname{tg}(x^2 + y^2) dy.$$

$$3) \iiint_{V: 4 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 36, x, z \geq 0; y \geq \sqrt{3x}} \frac{y^2 dx dy dz}{x^2 + y^2 + z^2}.$$

3. Знайти площі фігур, обмежених лініями:

$$1) x^2 + y^2 = 12, -\sqrt{6}y = x^2 \quad (y \leq 0).$$

$$2) x^2 - 2x + y^2 = 0, x^2 - 10x + y^2 = 0, y = 0, y = \sqrt{3x}.$$

4. Знайти масу пластинки D з густиною $\mu = \frac{x}{y}$,

$$D: 1 \leq \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leq 4; x \geq 0; y \geq \frac{3x}{2}.$$

5. Знайти об'єми тіл, обмежених поверхнями:

$$1) x + y = 2, x = \sqrt{y}, z = 0, 5z = 12x. \quad 2) z = \sqrt{100 - x^2 - y^2}, z = 6, x^2 + y^2 \leq 51.$$

$$3) z = 4 - 6((x-1)^2 + y^2), z = 12x - 8.$$

6. Знайти масу тіла V з густиною μ :

$$V: x^2 + y^2 = 4, x^2 + y^2 = 8z,$$

$$x, y \geq 0, z = 0; \mu = 5x.$$

7. Знайти координати центра мас однорідного тіла, обмеженого поверхнями:

$$y = 3\sqrt{x^2 + z^2}, y = 9.$$

8. Знайти довжину дуги кривої:

$$1) y = \ln(x^2 - 1), 2 \leq x \leq 3. \quad 2) \rho = \sqrt{2}e^\varphi, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3}.$$

9. Знайти масу кривої $x = t, y = \frac{3}{\sqrt{2}}t^2, z = t^3, 0 \leq t \leq 1$ з густиною $\mu = x + z$.

10. Знайти роботу сили $\mathbf{F} = (2xy - y)\mathbf{i} + (x^2 + x)\mathbf{j}$ при переміщенні вздовж кола $x^2 + y^2 = 9 (y \geq 0)$ від точки $M(3, 0)$ до точки $N(-3, 0)$.

Варіант 9

1. Змінити порядок інтегрування:

$$\int_{-\sqrt{2}}^{-1} dy \int_0^{\sqrt{2-y^2}} f dx + \int_{-1}^0 dy \int_0^{y^2} f dx.$$

2. Обчислити:

$$1) \iint_{D: y=\frac{\pi}{2}, y=\pi, x=\frac{1}{2}, x=1} y \cos xy dx dy. \quad 2) \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}} dy.$$

$$3) \iiint_{V: z=3x^2+3y^2, 0 \leq y \leq \sqrt{3x}, z=3} \frac{y^2 z dx dy dz}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}.$$

3. Знайти площі фігур, обмежених лініями:

$$1) y = 2\sqrt{3} - \sqrt{12-x^2}, y = \sqrt{12-x^2}, x \geq 0;$$

$$2) y^2 - 6y + x^2 = 0, y^2 - 10y + x^2 = 0, x = 0, y = x.$$

4. Знайти масу пластинки D з густиною $\mu = x/y$,

$$D: 1 \leq \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} \leq 4; x \geq 0; y \geq \frac{x}{2}.$$

5. Знайти об'єми тіл, обмежених поверхнями:

$$1) y = 7\sqrt{2x}, y = 2\sqrt{2x}, z = 0, x + z = \frac{1}{2}. \quad 2) z = \frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}, z = \frac{23}{2} - x^2 - y^2.$$

$$3) z = 2 - 4(x^2 + y^2), z = 8x + 2.$$

6. Знайти масу тіла V з густиною μ :

$$V: x^2 + y^2 = \frac{4}{25}z^2; x^2 + y^2 = \frac{2}{5}z; x, y \geq 0; \mu = 28xz.$$

7. Знайти координати центра мас однорідного тіла, обмеженого поверхнями:

$$9y = x^2 + z^2, x^2 + y^2 = 4, y = 0.$$

8. Знайти довжину дуги кривої:

$$1) y = \sqrt{1-x^2} + \arccos x, 0 \leq x \leq \frac{8}{9}. \quad 2) \rho = 5e^{\frac{5\varphi}{12}}, 0 \leq \varphi < \frac{\pi}{3}.$$

9. Знайти масу кривої $x = \frac{R}{\sqrt{2}} \cos t, y = \frac{R}{\sqrt{2}} \cos t, z = R \sin t, 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ з густиною $\mu = x + y$.

10. Знайти роботу сили $\mathbf{F} = (x+y)\mathbf{i} + (x-y)\mathbf{j}$ при переміщенні вздовж еліпса

$$x^2 + \frac{y^2}{9} = 1 (x, y \geq 0) \text{ від точки } M(1,0) \text{ до точки } N(0,3).$$

Варіант 10

1. Змінити порядок інтегрування:

$$\int_{-2}^{-\sqrt{3}} dy \int_{-\sqrt{4-y^2}}^0 f dx + \int_{-\sqrt{3}}^0 dy \int_{\sqrt{4-y^2}-2}^0 f dx.$$

2. Обчислити:

$$1) \iint_{D: x=0, y=2, y=\frac{x}{2}} y^2 \exp\left(-\frac{xy}{8}\right) dx dy. \quad 2) \int_{-R}^R dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \sin \sqrt{x^2+y^2} dy.$$

$$3) \iiint_{V: x^2+y^2+z^2=16, z \geq 0} \frac{x^2 dx dy dz}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}.$$

3. Знайти площі фігур, обмежених лініями:

$$1) y = \frac{3\sqrt{x}}{2}, y = \frac{3}{2x}, x = 9.$$

$$2) y^2 - 2x + x^2 = 0, y^2 - 4x + x^2 = 0, \sqrt{3}y = x, y = \sqrt{3}x.$$

4. Знайти масу пластинки D з густиною $\mu = x^3 y$, $D: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leq 1, x, y \geq 0$.

5. Знайти об'єми тіл, обмежених поверхнями:

$$1) y = \frac{5\sqrt{x}}{3}, y = \frac{5x}{9}, z = 0, z = \frac{5(3+\sqrt{x})}{9}.$$

$$2) z = \sqrt{16-x^2-y^2}, 6z = x^2+y^2.$$

$$3) z = 22((x-1)^2+y^2), z = 44-44x.$$

6. Знайти масу тіла V з густиною μ :

$$V: x^2+y^2+z^2=4, x^2+y^2=z^2, x, y \geq 0 (z \geq 0); \mu = 6z.$$

7. Знайти координати центра мас однорідного тіла, обмеженого поверхнями:

$$3z = \sqrt{x^2+y^2}, x^2+y^2=4, z=0.$$

8. Знайти довжину дуги кривої:

$$1) y = \ln(1-x^2), 0 \leq x \leq \frac{1}{4}. \quad 2) \rho = 12e^{\frac{12\varphi}{5}}, 0 \leq \varphi < \frac{\pi}{3}.$$

9. Знайти масу кривої $x = a \cos t, y = a \sin t, z = bt, 0 \leq t \leq 2\pi$ з густиною $\mu = (x^2+y^2+z^2)^{-1}$.

10. Знайти роботу сили $\mathbf{F} = y\mathbf{i} - x\mathbf{j}$ при переміщенні вздовж кола $x^2+y^2=1$ ($y \geq 0$) від точки $M(1,0)$ до точки $N(-1,0)$.

Варіант 11

1. Змінити порядок інтегрування:

$$\int_0^1 dy \int_{1-y^2}^1 f dx + \int_1^e dy \int_{\ln y}^1 f dx.$$

2. Обчислити:

$$1) \iint_{D: y=\frac{\pi}{4}, y=\frac{\pi}{2}, x=2, x=3} 12y \sin 2xy dx dy. \quad 2) \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} dx \int_0^{\sqrt{3-x^2}} \sqrt{1+x^2+y^2} dy.$$

$$3) \iiint_{V: 0 \leq y \leq \frac{x}{\sqrt{3}}, z=18} \frac{xz dx dy dz}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

3. Знайти площі фігур, обмежених лініями:

$$1) y = \sqrt{24-x^2}; 2\sqrt{3}y = x^2; x \geq 0.$$

$$2) y^2 - 2y + x^2 = 0; y^2 - 4y + x^2 = 0; y = \sqrt{3}x; x = 0.$$

4. Знайти масу пластинки D з густиною $\mu = 6x^3y^3$, $D: \frac{x^2}{4} + y^2 \leq 1; x, y \geq 0$.

5. Знайти об'єми тіл, обмежених поверхнями:

$$1) x^2 + y^2 = 8, y = \sqrt{2x}, y, z = 0, z = \frac{15x}{11}. \quad 2) z = \sqrt{9-x^2-y^2}, \sqrt{80}z = \sqrt{x^2+y^2}.$$

$$3) z = 24(x^2 + y^2) + 1, z = 48x + 1.$$

6. Знайти масу тіла V з густиною μ :

$$V: 25(x^2 + y^2) = z^2, x^2 + y^2 = 4, x, y, z \geq 0; \mu = 2(x^2 + y^2).$$

7. Знайти координати центра мас однорідного тіла, обмеженого поверхнями:

$$x^2 + z^2 = 6y, y = 8.$$

8. Знайти довжину дуги кривої:

$$1) y = 2 + \operatorname{ch} x, 0 \leq x \leq 1. \quad 2) \rho = 1 - \sin \varphi, -\frac{\pi}{2} \leq \varphi < -\frac{\pi}{6}.$$

9. Знайти масу кривої $x = a \cos t, y = a \sin t, z = at, 0 \leq t \leq 2\pi$ з густиною

$$\mu = z^2 (x^2 + y^2)^{-1}.$$

10. Знайти роботу сили $\mathbf{F} = (x^2 + y^2)\mathbf{i} + (x^2 - y^2)\mathbf{j}$ при переміщенні вздовж

$$\text{кривої } L: \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1, \\ 2-x, & 1 \leq x \leq 2; \end{cases} \text{ від точки } M(2,0) \text{ до точки } N(0,0).$$

Варіант 12

1. Змінити порядок інтегрування:

$$\int_0^1 dy \int_0^{\sqrt[3]{y}} f dx + \int_1^2 dy \int_0^{2-y} f dx.$$

2. Обчислити:

$$1) \iint_{D: x=0, y=\sqrt{\pi}, y=x} y^2 \cos xy dx dy. \quad 2) \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dx \int_{-\sqrt{2-x^2}}^{\sqrt{2-x^2}} (1+x^2+y^2) dy.$$

$$3) \iiint_{V: z=x^2+y^2, 0 \leq y \leq x, z=4} \frac{xy dx dy dz}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}.$$

3. Знайти площі фігур, обмежених лініями:

$$1) y = x^2, y = -x.$$

$$2) x^2 - 2x + y^2 = 0, x^2 - 6x + y^2 = 0,$$

$$\sqrt{3}y = x, y = \sqrt{3}x.$$

4. Знайти масу пластинки D з густиною $\mu = \frac{x}{y^3}$,

$$D: 1 \leq x^2/4 + y^2 \leq 25, 0 \leq x \leq 2y.$$

5. Знайти об'єми тіл, обмежених поверхнями:

$$1) x + y = 4, y = \sqrt{2}x, z = 3y, z = 0.$$

$$2) z = \sqrt{81 - x^2 - y^2}, z = 5, x^2 + y^2 \leq 45.$$

$$3) z = 2 - 18((x+1)^2 + y^2), z = -36x - 34.$$

6. Знайти масу тіла V з густиною μ :

$$V: x^2 + y^2 + z^2 = 9, x^2 + y^2 \leq 4, y \geq 0, \mu = |z|.$$

7. Знайти координати центра мас однорідного тіла, обмеженого поверхнями:

$$8x = \sqrt{y^2 + z^2}, x = 1/2.$$

8. Знайти довжину дуги кривої:

$$1) y = 1 - \ln \cos x, 0 \leq x \leq \frac{\pi}{6}. \quad 2) \rho = 2(1 - \cos \varphi), -\pi \leq \varphi < -\frac{\pi}{2}.$$

9. Знайти масу кривої $x = \cos t + t \sin t; y = \sin t - t \cos t; z = 1; 0 \leq t \leq 2\pi$ з густиною $\mu = \sqrt{x^2 + y^2}$.

10. Знайти роботу сили $\mathbf{F} = y\mathbf{i} - x\mathbf{j}$ при переміщенні вздовж кола $x^2 + y^2 = 2$ ($y \geq 0$) від точки $M(\sqrt{2}, 0)$ до точки $N(-\sqrt{2}, 0)$.

Варіант 13

1. Змінити порядок інтегрування:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} dy \int_0^{\sin y} f dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} dy \int_0^{\cos y} f dx.$$

2. Обчислити:

$$1) \iint_{D: y=\ln 2, y=\ln 3, x=4, x=8} ye^{\frac{xy}{4}} dx dy. \quad 2) \int_0^2 dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \frac{dy}{1+x^2+y^2}.$$

$$3) \iiint_{V: x^2+y^2=4y, y+z=4, z \geq 0} \frac{z dx dy dz}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

3. Знайти площі фігур, обмежених лініями:

$$1) y = 20 - x^2, y = -8x.$$

$$2) y^2 - 4y + x^2 = 0, y^2 - 6y + x^2 = 0, y = \sqrt{3}x, x = 0.$$

4. Знайти масу пластинки D з густиною $\mu = x^2 y^2$, $D: \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \leq 1, y \geq 0$.

5. Знайти об'єми тіл, обмежених поверхнями:

$$1) x = \frac{5\sqrt{y}}{6}, x = \frac{5y}{18}, z = 0, z = \frac{5(3 + \sqrt{y})}{18}.$$

$$2) z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}, \frac{3z}{2} = x^2 + y^2.$$

$$3) 1 - z = 16(x^2 + y^2), z = -32x - 1.$$

6. Знайти масу тіла V з густиною μ :

$$V: x^2 + y^2 = 1, x^2 + y^2 = 6z,$$

$$x, y \geq 0, z = 0; \mu = 90y.$$

7. Знайти координати центра мас однорідного тіла, обмеженого поверхнями:

$$2x = y^2 + z^2, y^2 + z^2 = 4, x = 0.$$

8. Знайти довжину дуги кривої:

$$1) y = e^x + 13, \ln \sqrt{15} \leq x \leq \ln \sqrt{24}. \quad 2) \rho = 3(1 + \sin \varphi), -\frac{\pi}{6} \leq \varphi \leq 0.$$

9. Знайти масу кривої $x = 5 \cos t, y = 5 \sin t, z = t, 0 \leq t \leq 2\pi$ з густиною $\mu = (x^2 + y^2 + z^2)^{-1}$.

10. Знайти роботу сили $\mathbf{F} = xy\mathbf{i} + 2y\mathbf{j}$ при переміщенні вздовж кола $x^2 + y^2 = 1$ ($x, y \geq 0$) від точки $M(1, 0)$ до точки $N(-1, 0)$.

Варіант 14

1. Змінити порядок інтегрування:

$$\int_{-2}^1 dy \int_{-2-y}^0 f dx + \int_{-1}^0 dy \int_{\sqrt[3]{y}}^0 f dx.$$

2. Обчислити:

$$1) \iint_{D: x=0, y=\sqrt{2x}, y=2x} 4y^2 \sin 2xy dx dy. \quad 2) \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \frac{dy}{1+\sqrt{x^2+y^2}}.$$

$$3) \iiint_{V: x^2+y^2=2x, x+z=2, y \geq 0} \frac{y dx dy dz}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

3. Знайти площі фігур, обмежених лініями:

$$1) y = \sqrt{18-x^2}, y = 3\sqrt{2} - \sqrt{18-x^2}.$$

$$2) x^2 - 2x + y^2 = 0, x^2 - 8x + y^2 = 0, \sqrt{3}y = x, y = \sqrt{3}x.$$

4. Знайти масу пластинки D з густиною $\mu = 5xy^7$, $D: \frac{x^2}{16} + y^2 \leq 1; x, y \geq 0$.

5. Знайти об'єми тіл, обмежених поверхнями:

$$1) x = 19\sqrt{2y}, x = 4\sqrt{2y}, z = 0, z + y = 2.$$

$$2) z = 6\sqrt{x^2 + y^2}, z = 16 - x^2 - y^2.$$

$$3) z = 30((x+1)^2 + y^2) + 1, z = 60x + 61.$$

6. Знайти масу тіла V з густиною μ :

$$V: x^2 + y^2 = \frac{z^2}{25}, x^2 + y^2 = \frac{z}{5},$$

$$x, y \geq 0; \mu = 14yz.$$

7. Знайти координати центра мас однорідного тіла, обмеженого поверхнями:

$$4y = \sqrt{x^2 + z^2}, x^2 + z^2 = 16, y = 0.$$

8. Знайти довжину дуги кривої:

$$1) y = \sqrt{x-x^2} - \arccos \sqrt{x}, 0 \leq x \leq \frac{1}{4}. \quad 2) \rho = 4(1 - \sin \varphi), 0 \leq \varphi < \frac{\pi}{6}.$$

9. Знайти масу кривої $x = 4 \cos t, y = 4 \cos t, z = 3 \sin t, 0 \leq t \leq 2\pi$ з густиною $\mu = x^2 + y^2 + z^2$.

10. Знайти роботу сили $\mathbf{F} = y\mathbf{i} - x\mathbf{j}$ при переміщенні вздовж еліпса

$$2x^2 + y^2 = 1 \quad (y \geq 0) \text{ від точки } M\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) \text{ до точки } N\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right).$$

Варіант 15

1. Змінити порядок інтегрування:

$$\int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{y}} f dx + \int_1^e dy \int_{\ln y}^1 f dx.$$

2. Обчислити:

$$1) \iint_{D: y=\frac{\pi}{2}, y=\frac{\pi}{4}, x=1, x=2} 2y \cos 2xy dx dy. \quad 2) \int_{-R}^R dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^0 \frac{\sin \sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} dy.$$

$$3) \iiint_{V: x^2+y^2=16y, y+z=16; x, z \geq 0} \frac{x dx dy dz}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

3. Знайти площі фігур, обмежених лініями:

$$1) y = 32 - x^2, y = -4x.$$

$$2) y^2 - 2y + x^2 = 0, y^2 - 6y + x^2 = 0, \sqrt{3}y = x, x = 0.$$

4. Знайти масу пластинки D з густиною $\mu = 30x^3y^7$, $D: \frac{x^2}{4} + y^2 \leq 1; x, y \geq 0$.

5. Знайти об'єми тіл, обмежених поверхнями:

$$1) 3y = \sqrt{x}, y \leq x, x + y + z = 10, y = 1, z = 0.$$

$$2) z = \sqrt{36 - x^2 - y^2}, \sqrt{63}z = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

$$3) z = 26(x^2 + y^2) - 2, z = -52x - 2.$$

6. Знайти масу тіла V з густиною μ :

$$V: x^2 + y^2 + z^2 = 4, x^2 + y^2 = 9z^2,$$

$$x, y \geq 0 (z \geq 0); \mu = 10z.$$

7. Знайти координати центра мас однорідного тіла, обмеженого поверхнями:

$$y^2 + z^2 = 8x, x = 2.$$

8. Знайти довжину дуги кривої:

$$1) y = 2 - e^x, \ln \sqrt{3} \leq x \leq \ln \sqrt{8}. \quad 2) \rho = 5(1 - \cos \varphi), -\frac{\pi}{3} \leq \varphi < 0.$$

9. Знайти масу кривої $x = 9 \cos t, y = 9 \sin t, z = t, 0 \leq t \leq 2\pi$ з густиною

$$\mu = z^2 (x^2 + y^2)^{-1}.$$

10. Знайти роботу сили $\mathbf{F} = (x^2 + y^2)\mathbf{i} + (2x^2 + 2y^2)\mathbf{j}$ при переміщенні вздовж кола $x^2 + y^2 = R^2 (y \geq 0)$ від точки $M(R, 0)$ до точки $N(-R, 0)$.

Варіант 16

1. Змінити порядок інтегрування:

$$\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y}}^0 f dx + \int_1^2 dy \int_{-\sqrt{2-y}}^0 f dx.$$

2. Обчислити:

$$1) \iint_{D: x=0, y=\sqrt{2}, y=x} y^2 e^{-\frac{xy}{2}} dx dy. \quad 2) \int_0^R dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \frac{dy}{\sqrt{x^2+y^2} \cos^2 \sqrt{x^2+y^2}}.$$

$$3) \iiint_{V: x^2+y^2=2x, x+z=2, z \geq 0} \sqrt{x^2+y^2} dx dy dz.$$

3. Знайти площі фігур, обмежених лініями:

$$1) y = \frac{2}{x}, y = 5e^x, y = 2, y = 5.$$

$$2) y^2 - 2x + x^2 = 0, y^2 - 4x + x^2 = 0, y = 0, \sqrt{3}y = x.$$

4. Знайти масу пластинки D з густиною $\mu = y/x$,

$$D: 1 \leq \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \leq 3, 0 \leq y \leq \frac{2x}{3}.$$

5. Знайти об'єми тіл, обмежених поверхнями:

$$1) x + y = 4, x = \sqrt{2y}, 5z = 3x, z = 0. \quad 2) z = \sqrt{64 - x^2 - y^2}, z = 4, x^2 + y^2 \leq 39.$$

$$3) z = -2((x-1)^2 + y^2) - 1, z = 4x - 5.$$

6. Знайти масу тіла V з густиною μ :

$$V: 9(x^2 + y^2) = z^2, x^2 + y^2 = 4, x, y, z \geq 0; \mu = 5(x^2 + y^2)/3.$$

7. Знайти координати центра мас однорідного тіла, обмеженого поверхнями:

$$z = 9\sqrt{x^2 + y^2}, z = 36.$$

8. Знайти довжину дуги кривої:

$$1) y = \arcsin x - \sqrt{1-x^2}, 0 \leq x \leq 15/16. \quad 2) \rho = 6(1 + \sin \varphi), -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq 0.$$

9. Знайти масу кривої $x = R \cos t, y = R \sin t, z = at/2\pi, 0 \leq t \leq 2\pi$ з густиною

$$\mu = x^2 + y^2 + z^2.$$

10. Знайти роботу сили $\mathbf{F} = (y\sqrt{x^2 + y^2} + x)\mathbf{i} + (y - x\sqrt{x^2 + y^2})\mathbf{j}$ при

переміщенні вздовж кола $x^2 + y^2 = 1 (y \geq 0)$ від точки $M(1, 0)$ до точки $N(-1, 0)$.

Варіант 17

1. Змінити порядок інтегрування:

$$\int_0^1 dy \int_{-y}^0 f dx + \int_1^{\sqrt{2}} dy \int_{-\sqrt{2-y^2}}^0 f dx.$$

2. Обчислити:

$$1) \iint_{D: y=\pi, y=2\pi, x=\frac{1}{2}, x=1} y \sin xy dx dy. \quad 2) \int_{-R}^R dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^0 \frac{dy}{\sqrt{x^2+y^2} \cos^2 \sqrt{x^2+y^2}}.$$

$$3) \iiint_{V: \begin{matrix} 2 \leq x^2+y^2+z^2 \leq 8, \\ z^2 = x^2+y^2; x, y, z \geq 0 \end{matrix}} xy dx dy dz.$$

3. Знайти площі фігур, обмежених лініями:

$$1) x^2 + y^2 = 36; 3\sqrt{2}y = x^2 (y \geq 0).$$

$$2) x^2 - 2y + y^2 = 0, x^2 - 10y + y^2 = 0, y = \sqrt{3}x, y = \frac{x}{\sqrt{3}}.$$

4. Знайти масу пластинки D з густиною $\mu = 7x^4y$, $D: x^2 + \frac{y^2}{25} \leq 1, y \geq 0$.

5. Знайти об'єми тіл, обмежених поверхнями:

$$1) y = 6\sqrt{3x}, y = \sqrt{3x}, z = 0, x + z = 3.$$

$$2) z = \sqrt{144 - x^2 - y^2}, 18z = x^2 + y^2.$$

$$3) z = -2(x^2 + y^2) - 1, z = 4y - 1.$$

6. Знайти масу тіла V з густиною μ :

$$V: x^2 + y^2 + z^2 = 4, x^2 + y^2 \leq 1; \mu = 6|z|.$$

7. Знайти координати центра мас однорідного тіла, обмеженого поверхнями:

$$z = 3(x^2 + y^2), x^2 + y^2 = 9, z = 0.$$

8. Знайти довжину дуги кривої:

$$1) y = 1 - \ln \sin x, \frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{\pi}{2}. \quad 2) \rho = 7(1 - \sin \varphi), -\frac{\pi}{6} \leq \varphi < \frac{\pi}{6}.$$

9. Знайти масу кривої $x = \cos t, y = \sin t, z = \sqrt{3}t, 0 \leq t \leq 2\pi$ з густиною $\mu = x^2 + y^2 + z^2$.

10. Знайти роботу сили $\mathbf{F} = x^2y\mathbf{i} - xy^2\mathbf{j}$ при переміщенні вздовж кола $(x, y \geq 0) x^2 + y^2 = 4$ від точки $M(2, 0)$ до точки $N(0, 2)$.

Варіант 18

1. Змінити порядок інтегрування:

$$\int_0^1 dy \int_0^{y^2} f dx + \int_1^2 dy \int_0^{2-y} f dx.$$

2. Обчислити:

$$1) \iint_{D: x=0, y=\sqrt{\frac{\pi}{2}}, y=\frac{x}{2}} y^2 \cos 2xy dx dy. \quad 2) \int_0^2 dx \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} dy.$$

$$3) \iiint_{V: \begin{matrix} x^2+y^2=2y, z=6, \\ x^2+y^2=4y, x, z \geq 0 \end{matrix}} \frac{y dx dy dz}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

3. Знайти площі фігур, обмежених лініями:

$$1) y = 3\sqrt{x}, y = \frac{3}{x}, x = 4. \quad 2) y^2 - 2x + x^2 = 0, y^2 - 6x + x^2 = 0, y = 0, \sqrt{3}y = x.$$

4. Знайти масу пластинки D з густиною $\mu = 35x^4y^3$, $D: x^2 + \frac{y^2}{9} \leq 1, y \geq 0$.

5. Знайти об'єми тіл, обмежених поверхнями:

$$1) x^2 = 1 - y; x + y + z = 3; y, z \geq 0.$$

$$2) z = 26((x-1)^2 + y^2) - 2; z = 50 - 52x.$$

$$3) 2z = 3\sqrt{x^2 + y^2}, z = \frac{5}{2} - x^2 - y^2.$$

6. Знайти масу тіла V з густиною μ :

$$V: x^2 + y^2 = 1, x^2 + y^2 = z, x, y \geq 0, z = 0; \mu = 10y.$$

7. Знайти координати центра мас однорідного тіла, обмеженого поверхнями:

$$x = 2\sqrt{y^2 + z^2}, y^2 + z^2 = 4, x = 0.$$

8. Знайти довжину дуги кривої:

$$1) y = 1 - \ln(x^2 - 1), 3 \leq x \leq 4. \quad 2) \rho = 8(1 - \cos \varphi), -\frac{2\pi}{3} \leq \varphi \leq 0.$$

9. Знайти масу кривої $x = 2 \cos t, y = 2 \sin t, z = 2t, 0 \leq t \leq 2\pi$ з густиною $\mu = z^2(x^2 + y^2)^{-1}$.

10. Знайти роботу сили $\mathbf{F} = (y\sqrt{x^2 + y^2} + x)\mathbf{i} + (y - \sqrt{x^2 + y^2})\mathbf{j}$ при переміщенні вздовж параболи $8y = 16 - x^2$ від точки $M(4, 0)$ до точки $N(0, 4)$.

Варіант 19

1. Змінити порядок інтегрування:

$$\int_0^{\sqrt{3}} dy \int_{\sqrt{4-y^2}-2}^0 f dx + \int_{\sqrt{3}}^2 dy \int_{-\sqrt{4-y^2}}^0 f dx.$$

2. Обчислити:

$$1) \iint_{D: y=\ln 3, y=\ln 4, x=\frac{1}{4}, x=\frac{1}{2}} 8ye^{4xy} dx dy. \quad 2) \int_{-R}^0 dx \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} \frac{dy}{\sqrt{x^2+y^2} \operatorname{ctg} \sqrt{x^2+y^2}}.$$

$$3) \iiint_{V: x^2+y^2+z^2=36, y, z \geq 0, y \leq -x} \sqrt{x^2+y^2+z^2} dx dy dz.$$

3. Знайти площі фігур, обмежених лініями:

$$1) y^2 = 4x, x = \frac{8}{y^2 + 4}.$$

$$2) x^2 - 4y + y^2 = 0, x^2 - 10y + y^2 = 0, \sqrt{3}y = x, y = \sqrt{3}x.$$

4. Знайти масу пластинки D з густиною $\mu = \frac{7x^2y}{18}$, $D: \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} \leq 1, y \geq 0$.

5. Знайти об'єми тіл, обмежених поверхнями:

$$1) x = y^2, x = 1, x + y + z = 4, z = 0.$$

$$2) z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}, \sqrt{35}z = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

$$3) z = 30(x^2 + y^2) + 1, z = 60y + 1.$$

6. Знайти масу тіла V з густиною μ :

$$V: x^2 + y^2 = \frac{1}{49}z^2, x^2 + y^2 = \frac{1}{7}z, x, y \geq 0; \mu = 10xz.$$

7. Знайти координати центра мас однорідного тіла, обмеженого поверхнями:

$$x^2 + z^2 = 4y, y = 9.$$

8. Знайти довжину дуги кривої:

$$1) y = \sqrt{x - x^2} - \arccos \sqrt{x}, \frac{1}{9} \leq x \leq 1. \quad 2) \rho = 2\varphi, 0 \leq \varphi \leq \frac{3}{4}.$$

9. Знайти масу кривої $x = \frac{a}{\sqrt{2}} \cos t, y = \frac{a}{\sqrt{2}} \cos t, z = a \sin t, 0 \leq t \leq 2\pi$ з

$$\text{густиною } \mu = \sqrt{2y^2 + z^2}.$$

10. Знайти роботу сили $\mathbf{F} = y^2\mathbf{i} - x^2\mathbf{j}$ при переміщенні вздовж кола ($x, y \geq 0$) $x^2 + y^2 = 9$ від точки $M(3,0)$ до точки $N(0,3)$.

Варіант 20

1. Змінити порядок інтегрування:

$$\int_{-2}^{-1} dy \int_{-2-y}^0 f dx + \int_{-1}^0 dy \int_{\sqrt[3]{y}}^0 f dx.$$

2. Обчислити:

$$1) \iint_{D: x=0, y=\sqrt{\frac{4\pi}{3}}, y=\frac{2x}{3}} 3y^2 \sin \frac{xy}{2} dx dy. \quad 2) \int_{-3}^3 dx \int_{-\sqrt{9-x^2}}^0 \frac{xy}{x^2+y^2} dy.$$

$$3) \iiint_{V: \begin{matrix} x^2+y^2=2x; z \geq 0; z=4 \\ x^2+y^2=4x; 0 \leq y \leq x \end{matrix}} \frac{xdxdydz}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

3. Знайти площі фігур, обмежених лініями:

$$1) y = \frac{25}{4} - x^2, y = x - \frac{5}{2}.$$

$$2) y^2 - 8y + x^2 = 0, y^2 - 10y + x^2 = 0, \sqrt{3}y = x, y = \sqrt{3}x.$$

4. Знайти масу пластинки D з густиною $\mu = \frac{y}{x^3}$, $D: 1 \leq x^2 + \frac{y^2}{16} \leq 9$; $0 \leq y \leq 4x$.

5. Знайти об'єми тіл, обмежених поверхнями:

$$1) x + y = 6, y = \sqrt{3x}, z = 4y, z = 0.$$

$$2) z = \sqrt{49 - x^2 - y^2}; z = 3; x^2 + y^2 \leq 33.$$

$$3) z = -16((x+1)^2 + y^2) - 1; z = -32x - 33.$$

6. Знайти масу тіла V з густиною μ :

$$V: x^2 + y^2 + z^2 = 4, x^2 + y^2 = 4z^2, x, y \geq 0 (z \geq 0); \mu = 10z.$$

7. Знайти координати центра мас однорідного тіла, обмеженого поверхнями:

$$x = 5\sqrt{y^2 + z^2}, x = 20.$$

8. Знайти довжину дуги кривої:

$$1) y = \sqrt{1-x^2} - \arccos x, 0 \leq x \leq \frac{9}{16}. \quad 2) \rho = 2\varphi, 0 \leq \varphi \leq \frac{4}{3}.$$

9. Знайти масу кривої: $x = \frac{1}{2} \cos t, y = \frac{1}{2} \cos t, z = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin t, 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ з густиною $\mu = xyz$.

10. Знайти роботу сили $\mathbf{F} = (x+y)^2 \mathbf{i} - (x^2+y^2) \mathbf{j}$ при переміщенні вздовж відрізка MN від точки $M(1,0)$ до точки $N(0,1)$.

Варіант 21

1. Змінити порядок інтегрування:

$$\int_0^1 dy \int_0^y f dx + \int_1^e dy \int_{\ln y}^1 f dx.$$

2. Обчислити:

$$1) \iint_{D: y=\pi, y=3\pi, x=\frac{1}{2}, x=1} y \cos xy dx dy. \quad 2) \int_{-R}^0 dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^0 \cos(x^2 + y^2) dy.$$

$$3) \iiint_{V: \begin{matrix} 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 9, \\ y, z \geq 0; x \geq \sqrt{3}y \end{matrix}} \frac{z dx dy dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

3. Знайти площі фігур, обмежених лініями:

$$1) y = \sqrt{x}; y = \frac{1}{x}; x = 16.$$

$$2) x^2 - 2y + y^2 = 0; x^2 - 4y + y^2 = 0; x = 0; y = x.$$

4. Знайти масу пластинки D з густиною $\mu = 11xy^8$, $D: \frac{x^2}{9} + y^2 \leq 1, x \geq 0$.

5. Знайти об'єми тіл, обмежених поверхнями:

$$1) x = 7\sqrt{3y}, x = 2\sqrt{3y}, z = 0, z + y = 3.$$

$$2) z = \sqrt{36 - x^2 - y^2}, 9z = x^2 + y^2.$$

$$3) z = 2 - 18(x^2 + y^2), z = 2 - 36y.$$

6. Знайти масу тіла V з густиною μ :

$$V: 16(x^2 + y^2) = z^2, x^2 + y^2 = 1,$$

$$x, y, z \geq 0; \mu = 5(x^2 + y^2).$$

7. Знайти координати центра мас однорідного тіла, обмеженого поверхнями:

$$y = x^2 + z^2, x^2 + z^2 = 10, y = 0.$$

8. Знайти довжину дуги кривої:

$$1) y = \ln \sin x, \frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{\pi}{2}. \quad 2) \rho = 2\varphi, 0 \leq \varphi \leq \frac{5}{12}.$$

9. Знайти масу кривої: $x = t \cos t, y = t \sin t, z = t, 0 \leq t \leq 2\pi$ з густиною $\mu = 2z - \sqrt{x^2 + y^2}$.

10. Знайти роботу сили $\mathbf{F} = (x^2 + y^2)\mathbf{i} + y^2\mathbf{j}$ при переміщенні вздовж відрізка MN від точки $M(2,0)$ до точки $N(0,2)$.

Варіант 22

1. Змінити порядок інтегрування:

$$\int_0^1 dy \int_0^{y^2} f dx + \int_1^{\sqrt{2}} dy \int_0^{\sqrt{2-y^2}} f dx.$$

2. Обчислити:

$$1) \iint_{D: x=0, y=1, y=\frac{x}{2}} y^2 e^{-\frac{xy}{2}} dx dy. \quad 2) \int_{-R}^0 dx \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} \sin(x^2 + y^2) dy.$$

$$3) \iiint_{V: x^2-2x+y^2=0, y, z \geq 0; x+z=2} \sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz.$$

3. Знайти площі фігур, обмежених лініями:

$$1) x = 5 - y^2; x = -4y.$$

$$2) y^2 - 2x + x^2 = 0; y^2 - 4x + x^2 = 0; y = 0; y = \sqrt{3}x.$$

4. Знайти масу пластинки D з густиною $\mu = x/y$,

$$D: 1 \leq \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} \leq 5; x \geq 0; y \geq 2x.$$

5. Знайти об'єми тіл, обмежених поверхнями:

$$1) x = \frac{5}{3}\sqrt{y}, x = \frac{5y}{9}, z = 0, z = \frac{5}{9}(3 + \sqrt{y}).$$

$$2) z = 9\sqrt{x^2 + y^2}, z = 22 - x^2 - y^2.$$

$$3) z = 24((x+1)^2 + y^2) + 1, z = 48x + 49.$$

6. Знайти масу тіла V з густиною μ :

$$V: x^2 + y^2 + z^2 = 16; x^2 + y^2 \leq 4; x \geq 0, \mu = |z|.$$

7. Знайти координати центра мас однорідного тіла, обмеженого поверхнями:

$$y = 3\sqrt{x^2 + z^2}, x^2 + z^2 = 16, y = 0.$$

8. Знайти довжину дуги кривої:

$$1) y = \ln \frac{7}{x}, \sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{8}. \quad 2) \rho = 2\varphi, 0 \leq \varphi \leq \frac{12}{5}.$$

9. Знайти масу кривої: $x = \cos t, y = \sin t, z = \sqrt{3}t, 0 \leq t \leq 2\pi$ з густиною

$$\mu = x^2 + y^2 + z^2.$$

10. Знайти роботу сили $\mathbf{F} = x^2 \mathbf{j}$ при переміщенні вздовж кола $x^2 + y^2 = 9$ ($x, y \geq 0$) від точки $M(3, 0)$ до точки $N(0, 3)$.

Варіант 23

1. Змінити порядок інтегрування:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} dy \int_0^{\sin y} f dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} dy \int_0^{\cos y} f dx.$$

2. Обчислити:

$$1) \iint_D y \sin 2xy dx dy. \quad 2) \int_{-1}^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1+x^2+y^2} dy.$$

$D: y = \frac{\pi}{2}, y = \frac{3\pi}{2}, x = \frac{1}{2}, x = 2$

$$3) \iiint_V x^2 dx dy dz.$$

$V: 1 \leq x^2 + y^2 \leq 16,$
 $0 \leq y \leq x; z \geq 0$

3. Знайти площі фігур, обмежених лініями:

$$1) x = 27 - y^2, x = -6y.$$

$$2) x^2 - 6y + y^2 = 0; x^2 - 8y + y^2 = 0; y = x; x = 0.$$

4. Знайти масу пластинки D з густиною $\mu = x/y$,

$$D: 1 \leq \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \leq 5, x \geq 0, y \geq \frac{2x}{3}.$$

5. Знайти об'єми тіл, обмежених поверхнями:

$$1) x^2 + y^2 = 18, x = \sqrt{3y}, x, z = 0, z = \frac{10y}{11}.$$

$$2) z = \sqrt{16 - x^2 - y^2}, \sqrt{15}z = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

$$3) z = 22(x^2 + y^2) + 3, z = 3 - 44y.$$

6. Знайти масу тіла V з густиною μ :

$$V: x^2 + y^2 = 4, x^2 + y^2 = 4z, x, y \geq 0, z = 0; \mu = 5y.$$

7. Знайти координати центра мас однорідного тіла, обмеженого поверхнями:

$$y^2 + z^2 = 3x, x = 9.$$

8. Знайти довжину дуги кривої:

$$1) y = \operatorname{ch} x + 3, 0 \leq x \leq 1. \quad 2) \rho = 4\varphi, 0 \leq \varphi \leq \frac{3}{4}.$$

9. Знайти масу кривої $x = 2 \cos t, y = 2 \sin t, z = 2t, 0 \leq t \leq 2\pi$ з густиною $\mu = z^2(x^2 + y^2)^{-1}$.

10. Знайти роботу сили $\mathbf{F} = (y^2 - y)\mathbf{i} + (2xy + x)\mathbf{j}$ при переміщенні вздовж кола $x^2 + y^2 = 9$ ($y \geq 0$) від точки $M(3, 0)$ до точки $N(0, 3)$.

Варіант 24

1. Змінити порядок інтегрування:

$$\int_{-\sqrt{2}}^{-1} dy \int_{-\sqrt{2-y^2}}^0 f dx + \int_{-1}^0 dy \int_y^0 f dx.$$

2. Обчислити:

$$1) \iint_{D: x=0, y=\sqrt{\pi}, y=2x} y^2 \cos xy dx dy. \quad 2) \int_{-2}^2 dx \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \sqrt{x^2+y^2} e^{x^2+y^2} dy.$$

$$3) \iiint_{V: x^2+y^2=4y; y+z=4; z \geq 0} \frac{dx dy dz}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

3. Знайти площі фігур, обмежених лініями:

$$1) x = 4 - y^2, x - y + 2 = 0.$$

$$2) y^2 - 4x + x^2 = 0, y^2 - 8x + x^2 = 0, y = \sqrt{3}x, y = 0.$$

4. Знайти масу пластинки D з густиною $\mu = x^5 y$, $D: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leq 1; x, y \geq 0$.

5. Знайти об'єми тіл, обмежених поверхнями:

$$1) x + y = 6; x = \sqrt{3y}; z = \frac{4x}{5}; z = 0.$$

$$2) 2z = 21\sqrt{x^2 + y^2}; 2z = 23 - 2x^2 - 2y^2.$$

$$3) z = 2 - 4((x-1)^2 + y^2); z = 8x - 6.$$

6. Знайти масу тіла V з густиною μ :

$$V: x^2 + y^2 = \frac{4}{25}z^2; x^2 + y^2 = \frac{2}{5}z; x, y \geq 0; \mu = 80xz.$$

7. Знайти координати центра мас однорідного тіла, обмеженого поверхнями:

$$y = \sqrt{x^2 + z^2}, y = 4.$$

8. Знайти довжину дуги кривої:

$$1) y = 1 + \arcsin x - \sqrt{1-x^2}, 0 \leq x \leq \frac{3}{4}. \quad 2) \rho = 3\varphi, 0 \leq \varphi \leq \frac{4}{3}.$$

9. Знайти масу кривої $x = \frac{a}{\sqrt{2}} \cos t, y = \frac{a}{\sqrt{2}} \cos t, z = a \sin t, 0 \leq t \leq 2\pi$ з густиною $\mu = \sqrt{2y^2 + z^2}$.

10. Знайти роботу сили $\mathbf{F} = (x+y)\mathbf{i} + (x-y)\mathbf{j}$ при переміщенні вздовж кривої $y = \sin x$ від точки $M(\pi, 0)$ до точки $N(0, 0)$.

Варіант 25

1. Змінити порядок інтегрування:

$$\int_0^1 dy \int_0^{y^2} f dx + \int_1^2 dy \int_0^{2-y} f dx.$$

2. Обчислити:

$$1) \iint_{D: y=\ln 2, y=\ln 3, x=3, x=6} 6ye^{\frac{xy}{3}} dx dy. \quad 2) \int_0^3 dx \int_0^{\sqrt{9-x^2}} \ln(1+x^2+y^2) dy.$$

$$3) \iiint_{V: 4 \leq x^2+y^2+z^2 \leq 16, \sqrt{x^2+y^2+z^2}} \frac{y dx dy dz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}. \\ 0 \leq y \leq \sqrt{3}x, z \geq 0$$

3. Знайти площі фігур, обмежених лініями:

$$1) x = y^2; x = \sqrt{2-y^2}.$$

$$2) x^2 - 4y + y^2 = 0; x^2 - 8y + y^2 = 0; y = 0; y = x.$$

4. Знайти масу пластинки D з густиною $\mu = x^4$, $D: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{25} \leq 1$.

5. Знайти об'єми тіл, обмежених поверхнями:

$$1) y = \sqrt{15x}, y = \sqrt{15}x, z = 0, z = \sqrt{15}(1 + \sqrt{x}).$$

$$2) z = \sqrt{\frac{4}{9} - x^2 - y^2}, z = x^2 + y^2.$$

$$3) z = 22((x-1)^2 + y^2) + 3, z = 47 - 44x.$$

6. Знайти масу тіла V з густиною μ :

$$V: x^2 + y^2 + z^2 = 1, x^2 + y^2 = z^2, x, y \geq 0 (z \geq 0); \mu = 32z.$$

7. Знайти координати центра мас однорідного тіла, обмеженого поверхнями:

$$x = y^2 + z^2, y^2 + z^2 = 9, x = 0.$$

8. Знайти довжину дуги кривої:

$$1) y = \ln \cos x + 2, 0 \leq x \leq \frac{\pi}{6}. \quad 2) \rho = 5\varphi, 0 \leq \varphi \leq \frac{12}{5}.$$

9. Знайти масу кривої $x = \frac{1}{2} \cos t, y = \frac{1}{2} \cos t, z = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin t, 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ з густиною $\mu = xyz$.

10. Знайти роботу сили $\mathbf{F} = (xy - y^2)\mathbf{i} + x\mathbf{j}$ при переміщенні вздовж параболи $y = 2x^2$ від точки $M(0,0)$ до точки $N(1,2)$.

Варіант 26

1. Змінити порядок інтегрування:

$$\int_0^{\sqrt{3}} dy \int_0^{2-\sqrt{4-y^2}} f dx + \int_{\sqrt{3}}^2 dy \int_0^{\sqrt{4-y^2}} f dx.$$

2. Обчислити:

$$1) \iint_{D: x=0, y=\sqrt{\pi}, y=x} y^2 \sin \frac{xy}{2} dx dy. \quad 2) \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dx \int_{-\sqrt{2-x^2}}^{\sqrt{2-x^2}} e^{-(x^2+y^2)} dy.$$

$$3) \iiint_{V: x^2+y^2=2x; z=3; y, z \geq 0} z \sqrt{x^2+y^2} dx dy dz.$$

3. Знайти площі фігур, обмежених лініями:

$$1) y = \frac{3}{2}\sqrt{x}, y = \frac{3}{2x}, x = 4.$$

$$2) x^2 - 4x + y^2 = 0, x^2 - 8x + y^2 = 0, y = \sqrt{3}x, \sqrt{3}y = x.$$

4. Знайти масу пластинки D з густиною $\mu = 15x^5y^3$, $D: x^2 + \frac{y^2}{4} \leq 1; x, y \geq 0$.

5. Знайти об'єми тіл, обмежених поверхнями:

$$1) x^2 + y^2 = 50, y = \sqrt{5x}, y, z = 0, z = \frac{3x}{11}.$$

$$2) z = 12\sqrt{x^2 + y^2}, z = 28 - x^2 - y^2.$$

$$3) z = 32((x-1)^2 + y^2) + 3, z = 67 - 64x.$$

6. Знайти масу тіла V з густиною μ :

$$V: x^2 + y^2 = z^2, x^2 + y^2 = 4; x, y, z \geq 0; \mu = \frac{5(x^2 + y^2)}{2}.$$

7. Знайти координати центра мас однорідного тіла, обмеженого поверхнями:

$$x, y, z = 0; x + y + z = 3.$$

8. Знайти довжину дуги кривої:

$$1) y = e^x + 26, \ln \sqrt{8} \leq x \leq \ln \sqrt{24}. \quad 2) \rho = 2 \cos \varphi, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{6}.$$

9. Знайти масу кривої $x = a \cos t, y = a \sin t, z = bt, 0 \leq t \leq 2\pi$ з густиною $\mu = x^2 + y^2 + z^2$.

10. Знайти роботу сили $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ при переміщенні вздовж відрізка MN від точки $M(1,0)$ до точки $N(0,3)$.

Варіант 27

1. Змінити порядок інтегрування:

$$\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y}}^0 f dx + \int_1^2 dy \int_{-\sqrt{2-y}}^0 f dx.$$

2. Обчислити:

$$1) \iint_{D: y=\frac{\pi}{2}, y=\frac{3\pi}{2}, x=\frac{1}{2}, x=2} y \cos 2xy dx dy. \quad 2) \int_0^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \ln \frac{(1+\sqrt{x^2+y^2})}{\sqrt{x^2+y^2}} dy.$$

$$3) \iiint_{V: 1 \leq x^2+y^2+z^2 \leq 4, y \leq x; x, y, z \geq 0} \frac{x dx dy dz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

3. Знайти площі фігур, обмежених лініями:

$$1) y^2 = 4 - x, y = x + 2, y = 2, y = -2.$$

$$2) x^2 - 4y + y^2 = 0, x^2 - 8y + y^2 = 0, x = 0, y = \sqrt{3}x.$$

4. Знайти масу пластинки D з густиною $\mu = 9x/y^3$,

$$D: 1 \leq \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leq 36; x \geq 0; 2y \geq 3x.$$

5. Знайти об'єми тіл, обмежених поверхнями:

$$1) x + y = 8; y = \sqrt{4x}; z = 3y; z = 0.$$

$$2) z = \sqrt{81 - x^2 - y^2}; z = 5; x^2 + y^2 \leq 45.$$

$$3) z = 28(x^2 + y^2) + 3; z = 56y + 3.$$

6. Знайти масу тіла V з густиною μ :

$$V: x^2 + y^2 + z^2 = 9, x^2 + y^2 \leq 4; y \geq 0; \mu = |z|.$$

7. Знайти координати центра мас однорідного тіла, обмеженого поверхнями:

$$z = 2\sqrt{x^2 + y^2}, x^2 + y^2 = 9, z = 0.$$

8. Знайти довжину дуги кривої:

$$1) y = \operatorname{ch} x + 3, 0 \leq x \leq 2. \quad 2) \rho = 8 \cos \varphi, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}.$$

9. Знайти масу кривої $x = t \cos t, y = t \sin t, z = t, 0 \leq t \leq 2\pi$ з густиною

$$\mu = 2z - \sqrt{x^2 + y^2}.$$

10. Знайти роботу сили $\mathbf{F} = 2(xy - x)\mathbf{i} + x^2\mathbf{j}$ при переміщенні вздовж $y = 2\sqrt{x}$ від точки $M(0,0)$ до точки $N(1,2)$.

Варіант 28

1. Змінити порядок інтегрування:

$$\int_0^1 dy \int_0^y f dx + \int_1^{\sqrt{2}} dy \int_0^{\sqrt{2-y^2}} f dx.$$

2. Обчислити:

$$1) \iint_{D: x=0, y=\sqrt{\frac{\pi}{2}}, y=x} y^2 e^{-\frac{xy}{8}} dx dy. \quad 2) \int_0^2 dx \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \cos \sqrt{x^2 + y^2} dy.$$

$$3) \iiint_{V: x^2=2(y^2+z^2), x=4, x \geq 0} x dx dy dz.$$

3. Знайти площі фігур, обмежених лініями:

$$1) y = \frac{1}{x}, y = 6e^x, y = 1, y = 6.$$

$$2) x^2 - 4x + y^2 = 0, x^2 - 6x + y^2 = 0, \sqrt{3}y = x, y = x\sqrt{3}.$$

4. Знайти масу пластинки D з густиною $\mu = 6xy^9$, $D: \frac{x^2}{100} + y^2 \leq 4; x, y \geq 0$.

5. Знайти об'єми тіл, обмежених поверхнями:

$$1) x = 16\sqrt{2y}, x = \sqrt{2y}, z + y = 2, z = 0.$$

$$2) z = \sqrt{25 - x^2 - y^2}, z = 1, x^2 + y^2 \leq 21.$$

$$3) z = 4 - 14((x+1)^2 + y^2), z = -28x - 24.$$

6. Знайти масу тіла V з густиною μ :

$$V: x^2 + y^2 = 1, x^2 + y^2 = 3z,$$

$$x, y \geq 0, z = 0; \mu = 15x.$$

7. Знайти координати центра мас однорідного тіла, обмеженого поверхнями:

$$x^2 + y^2 = 2z, z = 3.$$

8. Знайти довжину дуги кривої:

$$1) y = \arccos \sqrt{x} - \sqrt{x - x^2} + 4, x \in \left[0; \frac{1}{2}\right]. \quad 2) \rho = 6 \cos \varphi, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3}.$$

9. Знайти масу кривої $x = t, y = \frac{3}{\sqrt{2}}t^2, z = t^3, 0 \leq t \leq 1$ з густиною $\mu = x + z$.

10. Знайти роботу сили $\mathbf{F} = y\mathbf{j} - x\mathbf{i}$ при переміщенні вздовж еліпса ($x, y \geq 0$)

$$x^2 + \frac{y^2}{9} = 1 \text{ від точки } M(1, 0) \text{ до точки } N(0, 3).$$

Варіант 29

1. Змінити порядок інтегрування:

$$\int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{y}} f dx + \int_1^{\sqrt{2}} dy \int_0^{\sqrt{2-y^2}} f dx.$$

2. Обчислити:

$$1) \iint_{D: y=\frac{\pi}{2}, y=3\pi, x=1, x=3} 3y \sin xy dx dy. \quad 2) \int_0^R dx \int_{-\sqrt{R-x^2}}^{\sqrt{R-x^2}} \sin(x^2 + y^2) dy.$$

$$3) \iiint_{V: 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 9, \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \geq 0} x dx dy dz.$$

3. Знайти площі фігур, обмежених лініями:

$$1) y = 3\sqrt{x}, y = \frac{3}{x}, x = 9.$$

$$2) y^2 - 2y + x^2 = 0, y^2 - 10y + x^2 = 0, x = 0, x = \sqrt{3}y.$$

4. Знайти масу пластинки D з густиною $\mu = 105x^3y^9$, $D: \frac{x^2}{16} + y^2 \leq 1; x, y \geq 0$.

5. Знайти об'єми тіл, обмежених поверхнями:

$$1) y = 15\sqrt{y}; x = 15y; z = 0; z = 15(1 + \sqrt{y}).$$

$$2) z = \sqrt{64 - x^2 - y^2}; 12z = x^2 + y^2.$$

$$3) z = 2 - 20(x^2 + y^2); z = 2 - 40y.$$

6. Знайти масу тіла V з густиною μ :

$$V: x^2 + y^2 = \frac{4}{49}z^2; x^2 + y^2 = \frac{2}{7}z; x, y \geq 0; \mu = 20xz.$$

7. Знайти координати центра мас однорідного тіла, обмеженого поверхнями:

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}, z = 4.$$

8. Знайти довжину дуги кривої:

$$1) y = \frac{1}{2} \operatorname{ch} 2x + \frac{3}{4}, 0 \leq x \leq 2. \quad 2) \rho = 2 \sin \varphi, 0 \leq \varphi < \frac{\pi}{6}.$$

9. Знайти масу кривої $x = y = \frac{1}{\sqrt{2}a} \cos t$, $z = \frac{\sin t}{a}$, $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ з густиною $\mu = x + y$.

10. Знайти роботу сили $\mathbf{F} = x\mathbf{j} - y\mathbf{i}$ при переміщенні вздовж $y = x^3$ від точки $M(0,0)$ до точки $N(2,8)$.

Варіант 30

1. Змінити порядок інтегрування:

$$\int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{y}} f dx + \int_1^2 dy \int_0^{\sqrt{2-y}} f dx.$$

2. Обчислити:

$$1) \iint_{D: x=0, y=\sqrt{2\pi}, y=2x} y^2 \cos \frac{xy}{2} dx dy. \quad 2) \int_0^R dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \frac{\operatorname{tg} \sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} dy.$$

$$3) \iiint_{V: \begin{matrix} z=\sqrt{18-x^2-y^2}, \\ z=\sqrt{x^2+y^2}, x \geq 0 \end{matrix}} x dx dy dz.$$

3. Знайти площі фігур, обмежених лініями:

$$1) y = 11 - x^2, y = -10x.$$

$$2) y^2 - 6x + x^2 = 0, y^2 - 10x + x^2 = 0, \sqrt{3}y = x, y = \sqrt{3}x.$$

4. Знайти масу пластинки D з густиною $\mu = 27y/x^5$,

$$D: 1 \leq \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} \leq 2; 0 \leq y \leq \frac{4x}{3}.$$

5. Знайти об'єми тіл, обмежених поверхнями:

$$1) x^2 + y^2 = 50, x = \sqrt{5y}, x, z = 0, z = \frac{6}{11}y.$$

$$2) 2z = 9\sqrt{x^2 + y^2}, 2z = 11 - 2x^2 - 2y^2.$$

$$3) z = 8((x+1)^2 + y^2) + 3, z = 16x + 19.$$

6. Знайти масу тіла V з густиною μ :

$$V: x^2 + y^2 + z^2 = 16, x^2 + y^2 = 9z^2, x, y \geq 0 (z \geq 0); \mu = 5z.$$

7. Знайти координати центра мас однорідного тіла, обмеженого поверхнями:

$$z = x^2 + y^2, x^2 + y^2 = 4, z = 0.$$

8. Знайти довжину дуги кривої:

$$1) y = e^x + e, \ln \sqrt{3} \leq x \leq \ln \sqrt{15}. \quad 2) \rho = 8 \sin \varphi, 0 \leq \varphi < \frac{\pi}{4}.$$

9. Знайти масу кривої $x = a \cos t, y = a \sin t, z = bt, 0 \leq t \leq 2\pi$ з густиною $\mu = (x^2 + y^2 + z^2)^{-1}$.

10. Знайти роботу сили $\mathbf{F} = (x^2 - y^2)\mathbf{i} + (x^2 + y^2)\mathbf{j}$ при переміщенні вздовж

$$\text{еліпса } \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1 (y \geq 0) \text{ від точки } M(3, 0) \text{ до точки } N(-3, 0).$$

