МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Київський національний університет будівництва і архітектури

Н.В. Бондаренко, В.В. Отрашевська

Аналітична геометрія

Конспект лекцій

для студентів спеціальності
192 «Будівництво і цивільна інженерія»

Київ 2022

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Київський національний університет будівництва і архітектури

Н.В. Бондаренко, В.В. Отрашевська

Аналітична геометрія

Конспект лекцій

для студентів спеціальності
192 «Будівництво і цивільна інженерія»

Київ 2022

УДК 514.12

Б 81

Рецензент З.І. Наголкіна, канд. фіз.-мат. наук, доцент

Затверджено на засіданні навчально-методичної вченої ради КНУБА, протокол № 3 від 17 листопада 2021 року.

В авторській редакції

Бондаренко Н.В.

Б81 Аналітична геометрія: конспект лекцій / Н.В. Бондаренко, В.В. Отрашевська. – Київ: КНУБА, 2022. – 84 с.

Викладено розділ «Аналітична геометрія» курсу «Вища математика», який включає такі теми: векторна алгебра, аналітична геометрія на площині та в просторі. Містить стислі теоретичні відомості, приклади розв'язання основних задач та вправи для самостійної роботи.

Призначено для студентів спеціальності 192 «Будівництво і цивільна інженерія».

УДК 514.123

Зміст

Вступ

Завданням аналітичної геометрії є вивчення геометричних образів методами алгебри. В основі цього підходу лежить метод координат, який був вперше сформульований і систематично застосований французьким математиком і філософом Рене Декартом (1596-1650). Геометричні образи в аналітичній геометрії – це точки, лінії, поверхні і з ними пов'язуються алгебраїчні поняття та вирази – числа, набори чисел, рівняння. Рене Декарт в 1637 р. у додатку «Геометрія» до філософської праці «Міркування про метод» вперше навів чіткий виклад основних ідей методу координат та геометричної інтерпретації рівнянь, на яких грунтуються основні поняття аналітичної геометрії. Метод координат полягає в тому, що положення точки відносно деякого геометричного образу (базису) визначається однозначно деякими числами (координатами). Геометрична інтерпретація рівнянь дозволяє алгебраїчному рівнянню з двома невідомими поставити у відповідність деяку лінію на площині і, навпаки, лінії, як геометричному місцю точок на площині, зіставити деяке рівняння. Рене Декарт показав, що пряма на площині задається рівнянням першого степеня з двома невідомими, а конічні перерізи – еліпс, гіпербола та парабола задаються рівняннями другого степеня з двома невідомими. Аналітична геометрія в просторі була розроблена пізніше в роботах французького математика і механіка А. Клеро (1713-1765), який переважно займався небесною механікою. В аналітичній геометрії вивчаються лише геометричні образи на площині та в просторі, що визначаються алгебраїчними рівняннями першого та другого порядку.

Використання векторів в аналітичній геометрії значно спростило викладення і дало можливість вказати загальний підхід до багатьох геометричних понять. Основні поняття і методи векторного числення були систематизовані та розвинені тільки у 80-тих роках XIX ст. відомим американським фізиком Дж. У. Гіббсом, який є одним з творців статичної механіки. З початку XX ст. в геометрії, механіці, фізиці та інших розділах науки поняття і методи векторного числення є широко застосовуваним апаратом.

Мета навчального видання – надати студентам математичні знання та навички, необхідні для успішного засвоєння загальних теоретичних та спеціальних дисциплін, передбачених навчальними програмами будівельних спеціальностей.

У результаті вивчення розділу «Аналітична геометрія» дисципліни «Вища математика» студенти повинні

знати:

- основи векторної алгебри, основні поняття та означення;
- види рівнянь прямої на площині;
- способи задавання площини в просторі;
- види рівнянь прямої в просторі;
- класифікацію рівнянь кривих другого порядку на площині та основні властивості еліпса, гіперболи і параболи;

уміти:

- застосовувати скалярний, векторний та мішані добутки векторів при розв'язанні задач геометрії;
- розв’язувати основні задачі геометрії на площині, використовуючи різні види рівнянь прямої;
- розв’язувати основні задачі геометрії в просторі, використовуючи різні види рівнянь площини та прямої у просторі;
- розв'язувати задачі, використовуючи рівняння кривих другого порядку;
- приводити загальне рівняння кривої другого порядку до канонічного виду.

Тема 1. Векторна алгебра

Лекція 1. Вектори. Лінійні операції над векторами. Поділ відрізка в заданому відношенні

Вектори. Лінійні операції над векторами

Величини, які характеризуються не тільки числом, а ще і напрямом у просторі, називаються *векторними величинами*, або просто *векторами*. Геометрично вектори зображуються напрямленими відрізками.

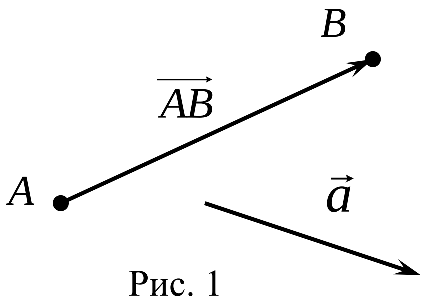


Рис. 1

Позначається вектор $\vec{a}$ або $\overrightarrow{AB}$, де A – початок вектора, B – його кінець (рис. 1). Довжина вектора називається його *модулем* і позначається $|\vec{a}|$ або $|\overrightarrow{AB}|$. Вектор, довжина якого дорівнює нулю, називається *нуль-вектором* і позначається $\vec{0}$. Нуль-вектор напрямку не має. Вектор, довжина якого дорівнює одиниці, називається *одиничним вектором* або *ортом*.

Вважатимемо, що вектори визначені з точністю до паралельного переносу, тобто *два вектори рівні,* якщо вони мають однакову довжину, паралельні і напрямлені в один бік.

Вектори називаються *колінеарними,* якщо вони знаходяться на одній прямій або на паралельних прямих, і *компланарними*, якщо вони лежать в одній площині або в паралельних площинах.

Для векторів визначені операції додавання і віднімання.

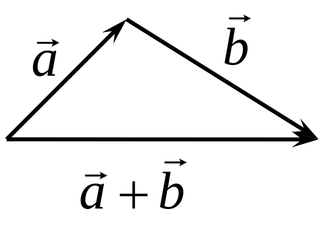


Рис. 2

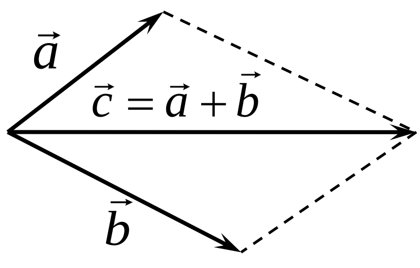


Рис. 3

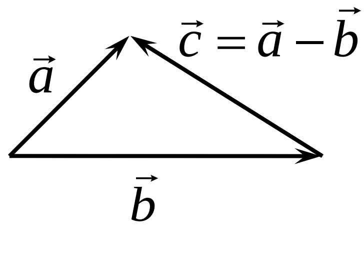


Рис. 4

Додавання векторів відбувається або за правилом трикутника, або за правилом паралелограма. За *правилом трикутника* сумою векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається вектор $\vec{a}+\vec{b}$, який іде із початку вектора $\vec{a}$ в кінець вектора $\vec{b}$, якщо початок вектора $\vec{b}$ сумістити з кінцем вектора $\vec{a}$ (рис. 2). За *правилом паралелограма* сумою $\vec{a}+\vec{b}$ векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ є діагональ $\vec{c}$ паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо їхні початки перенесені в одну точку (рис. 3).

Віднімання векторів – це операція, обернена до операції додавання. Різницею векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, початок яких знаходиться в одній точці, називається вектор $\vec{a}-\vec{b}$, напрямлений з кінця вектора $\vec{b}$ в кінець вектора $\vec{a}$ (рис. 4).

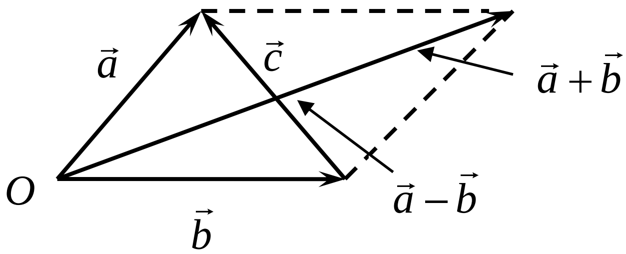


Рис. 5

На рис. 5 $\vec{c}=\vec{a}-\vec{b}$, $\vec{a}=\vec{b}+\vec{c}$. Сума і різниця векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, як видно з рисунку, є діагоналями паралелограма, побудованого на цих векторах.

Вектори можна не тільки додавати і віднімати, але і *множити на числа* (на скаляри). *Добутком вектора* $\vec{a}$ *на число* λ називається вектор $\lambda\vec{a}$, такий, що:

1) вектор $\lambda\vec{a}$ колінеарний вектору $\vec{a}$;

2) при $\lambda > 0$ $\vec{a}$ і $\lambda\vec{a}$ напрямлені в одну сторону, при $\lambda < 0$ $\vec{a}$ і $\lambda\vec{a}$ напрямлені в різні сторони;

3) довжина вектора $\lambda\vec{a}$ відрізняється від довжини вектора $\vec{a}$ в $|\lambda|$ разів: $|\lambda\vec{a}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$.

Віссю називається напрямлена пряма. Якщо початок і кінець вектора $\overrightarrow{AB}$ спроектувати на деяку вісь l, отримаємо на осі вектор $\overrightarrow{A_1B_1}$.

Проекцією вектора $\overrightarrow{AB}$ на вісь l називається *число*, яке дорівнює довжині вектора $\overrightarrow{A_1B_1}$, взятій зі знаком плюс або мінус в залежності від того, збігається напрямок вектора $\overrightarrow{A_1B_1}$ з напрямком осі, чи вектор $\overrightarrow{A_1B_1}$ має напрямок, протилежний напрямку осі l (рис. 6). Напрямок осі l можна задати за допомогою якого-небудь вектора $\vec{b}$, що лежить на осі і напрямлений в ту ж сторону. В такому разі говорять про проекцію вектора $\vec{a}$ на напрямок вектора $\vec{b}$ або просто на вектор $\vec{b}$ і позначають її $пр_{\vec{b}}\vec{a}$ (рис. 7).

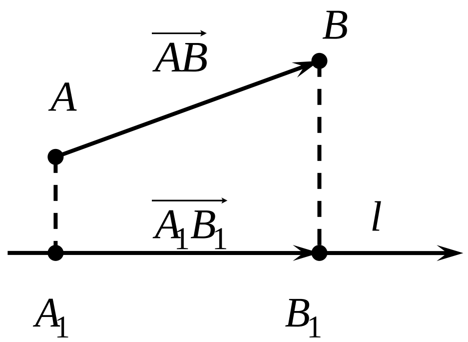


Рис. 6

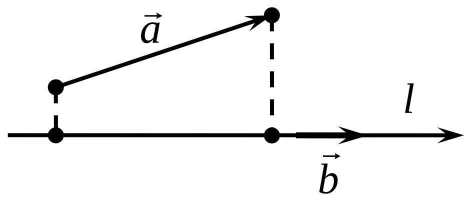


Рис. 7

Кутом між вектором і віссю або між двома векторами називається менший з кутів, на який треба повернути один вектор, щоб його напрямок збігався з напрямком іншого вектора.

Операції додавання векторів і множення вектора на число задовольняють всі властивості векторного простору. Вектори на площині і вектори у просторі утворюють векторні простори розмірності відповідно два і три, які позначаються $\boldsymbol{R}^2$ і $\boldsymbol{R}^3$. На площині в $\boldsymbol{R}^2$ два довільні неколінеарні вектори утворюють базис, у просторі в $\boldsymbol{R}^3$ базис утворюють три довільні некомпланарні вектори.

Базис називається *ортогональним*, якщо базисні вектори попарно перпендикулярні.

Базис називається *ортонормованим*, якщо він ортогональний і довжина кожного базисного вектора дорівнює одиниці. На рисунках 8, 9 зображені ортонормовані базиси в $\boldsymbol{R}^3$ і $\boldsymbol{R}^2$.

Прямокутна декартова система координат у просторі задається *початком координат* точкою O і ортонормованим базисом. Базисні вектори $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ визначають напрямок трьох взаємно перпендикулярних осей, що перетинаються в початку координат. Перша вісь називається *віссю абсцис* Ox, друга – *віссю ординат* Oy і третя – *віссю аплікат* Oz (рис. 8). У двовимірному випадку на площині базис складається з двох взаємно перпендикулярних векторів $\vec{i}, \vec{j}$, що визначають напрямок двох осей Ox і Oy (рис. 9).

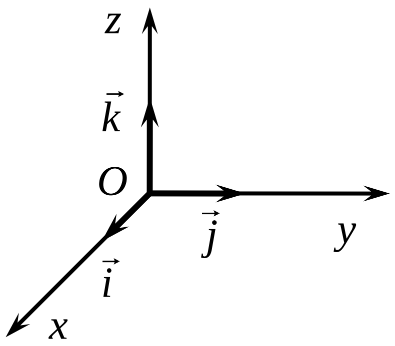


Рис. 8

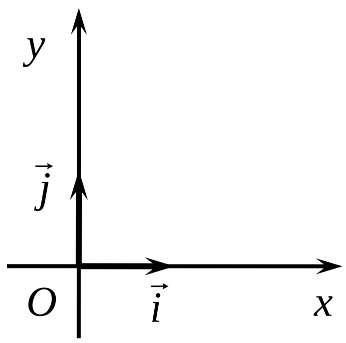


Рис. 9

Довільна точка M простору однозначно визначається вектором $\overrightarrow{OM}$, який називається радіус-вектором точки M. Кожен вектор простору, зокрема радіус-вектор довільної точки M, розкладається за базисними векторами $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, тобто

$$\overrightarrow{OM} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k} = \{x, y, z\}, \tag{1}$$

де числа x, y, z – координати вектора $\overrightarrow{OM}$.

Координатами точки $M(x; y; z)$ називаються координати її радіус-вектора $\overrightarrow{OM}$, які є координатами розкладу цього вектора за базисом $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ (рис. 10). Модуль радіус-вектора

$$|\overrightarrow{OM}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,. \tag{2}$$

Кути, які радіус-вектор $\overrightarrow{OM}$ утворює з координатними осями

$$\alpha = (\widehat{\overrightarrow{OM}, \vec{i}}), \ \ \beta = (\widehat{\overrightarrow{OM}, \vec{j}}), \ \ \ \gamma = (\widehat{\overrightarrow{OM}, \vec{k}}),$$

цілком визначають його напрямок. Їхні косинуси $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ називаються *напрямними косинусами радіус-вектора* $\overrightarrow{OM}$.

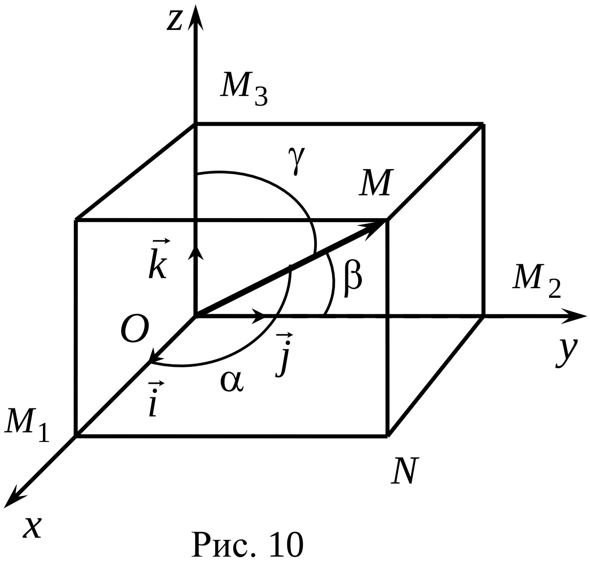


Рис. 10

Якщо $\left|\overrightarrow{OM}\right| = r$, то $x = r\cos\alpha$, $y = r\cos\beta$, $z = r\cos\gamma$ – проекції вектора на координатні осі. Враховуючи, що $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, дістанемо

$$r^2 = (r\cos\alpha)^2 + (r\cos\alpha)^2 + (r\cos\alpha)^2 = r^2(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma),$$

або

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1. \qquad (3)$$

Вектори додаються і віднімаються покоординатно. Якщо

$$\vec{a} = x_1 \cdot \vec{i} + y_1 \cdot \vec{j} + z_1 \cdot \vec{k} = \{x_1; y_1; z_1\},$$

$$\vec{b} = x_2 \cdot \vec{i} + y_2 \cdot \vec{j} + z_2 \cdot \vec{k} = \{x_2; y_2; z_2\},$$

то

$$\vec{a} + \vec{b} = (x_1 + x_2) \cdot \vec{i} + (y_1 + y_2) \cdot \vec{j} + (z_1 + z_2) \cdot \vec{k} =$$

$$=\{(x_1+x_2);(y_1+y_2);(z_1+z_2)\}.$$

Так само

$$\vec{a}-\vec{b}=\{(x_1-x_2);(y_1-y_2);(z_1-z_2)\}.$$

Координати точки є координатами її радіус-вектора. Якщо дві точки $A(x_1;y_1;z_1)$ і $B(x_2;y_2;z_2)$ з'єднані вектором (рис. 11)

$$\vec{a}=\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\{x_2;y_2;z_2\}-\{x_1;y_1;z_1\},$$

то

$$\overrightarrow{AB}=\{(x_2-x_1);(y_2-y_1);(z_2-z_1)\}. \qquad (4)$$

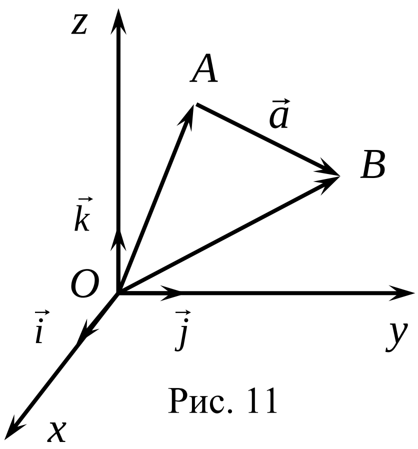


Рис. 11

Отже*, щоб записати координати вектора, що з'єднує дві точки, треба від координат його кінця відняти координати початку*.

Відстань між двома точками $A(x_1;y_1;z_1)$ і $B(x_2;y_2;z_2)$:

$$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}. \qquad (5)$$

Приклад. Знайти відстань між точками $A(3;0;-2)$ і $B(-4;1;-1)$.

Вектор $\overrightarrow{AB}=\{(-4-3);(1-0);(-1+2)\}=\{-7;1;1\}$. Відстань між точками A і B

$$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(-7)^2+1^2+1^2}=\sqrt{51}.$$

Поділ відрізка у заданому відношенні

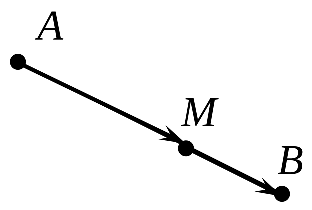


Рис. 12

Нехай відрізок AB, що з'єднує точки $A(x_1; y_1; z_1)$ і $B(x_2; y_2; z_2)$, треба поділити у заданому співвідношенні λ, тобто знайти координати такої точки $M(x; y; z)$ на відрізку, що $\dfrac{AM}{MB} = \lambda$ (рис. 12). Оскільки M ділить відрізок у співвідношенні λ, то для векторів

$\vec{AM} = \{(x - x_1); (y - y_1); (z - z_1)\}$ і $\vec{MB} = \{(x_2 - x); (y_2 - y); (z_2 - z)\}$

маємо $\vec{AM} = \lambda \vec{MB}$, тобто

$$(x - x_1) = \lambda(x_2 - x), \quad (y - y_1) = \lambda(y_2 - y), \quad (z - z_1) = \lambda(z_2 - z).$$

Звідки дістанемо

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}. \qquad (6)$$

Якщо $\lambda = \dfrac{p}{q}$, то

$$x = \frac{qx_1 + px_2}{p + q}, \quad y = \frac{qy_1 + py_2}{p + q}, \quad z = \frac{qz_1 + pz_2}{p + q}. \qquad (6')$$

Формули (6) і (6') називаються *формулами поділу відрізка у заданому відношенні*.

Зокрема, якщо $\lambda = 1$, тобто $AM = MB$ і точка M є серединою відрізка, то формули поділу відрізка набирають вигляду

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad z = \frac{z_1 + z_2}{2}. \qquad (6'')$$

Приклад. Знайти координати точки M, що ділить відрізок AB у відношенні $\lambda = \dfrac{2}{3}$, якщо точки $A(1; 2; 5)$ і $B(6; -8; 0)$.

За формулами (6) маємо

$$x=\frac{1+\frac{2}{3}\cdot 6}{1+\frac{2}{3}}=3,\quad y=\frac{2+\frac{2}{3}\cdot(-8)}{1+\frac{2}{3}}=-2\,,\ z=\frac{5+\frac{2}{3}\cdot 0}{1+\frac{2}{3}}=3\,,$$

Отже, шукана точка $M(3;-2;3)$.

Для векторів у двовимірному просторі $\boldsymbol{R}^2$ всі введені поняття аналогічні і відрізняються відсутністю третьої координати.

Лекція 2. Скалярний, векторний та мішаний добутки векторів

Скалярний добуток векторів

Означення. *Скалярним добутком* двох ненульових векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається *число*, яке дорівнює добутку модулів цих векторів на косинус кута між ними (позначається $\vec{a}\cdot\vec{b}$ або $(\vec{a},\vec{b})$). Тобто

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos(\vec{a},\widehat{\ }\vec{b}). \tag{7}$$

Якщо кут між векторами гострий, то $\cos(\vec{a},\widehat{\ }\vec{b})>0$ і $\vec{a}\cdot\vec{b}>0.$ Якщо кут між векторами тупий, то $\cos(\vec{a},\widehat{\ }\vec{b})<0$ і $\vec{a}\cdot\vec{b}<0.$

Якщо один із векторів є 0-вектор, то вважається, що скалярний добуток дорівнює нулю.

Із означення проекції вектора на напрям іншого вектора маємо

$$np_{\vec{b}}\vec{a}=|\vec{a}|\cdot\cos(\vec{a},\widehat{\ }\vec{b})=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|},\quad np_{\vec{a}}\vec{b}=|\vec{b}|\cdot\cos(\vec{a},\widehat{\ }\vec{b})=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|}. \tag{8}$$

Властивості скалярного добутку:

1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$ (комутативність);

2) $\vec{a}\cdot\vec{b}=0 \;\Leftrightarrow\; \vec{a}\perp\vec{b}$, або один з векторів є нуль-вектор;

3) $(\lambda\vec{a}\cdot\vec{b})=\lambda(\,\vec{a}\cdot\vec{b})$, $\lambda\in\boldsymbol{R}$ (асоціативність відносно множення на число);

4) $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$ (дистрибутивність).

З наведених властивостей випливає, що *скалярний добуток лінійний по кожному множнику*:

$$(\alpha\vec{a}+\beta\vec{b})\cdot\vec{c}=\alpha(\vec{a}\cdot\vec{c})+\beta(\vec{b}\cdot\vec{c}),\;\; \alpha,\beta\in\boldsymbol{R}$$

і аналогічно по другому множнику. Тобто при множенні скалярно лінійних комбінацій векторів можна виконувати дії як при множенні многочленів (відкривати дужки, збирати подібні доданки тощо).

Нехай два вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ задані своїми координатами:

$$\vec{a}=x_1\cdot\vec{i}+y_1\cdot\vec{j}+z_1\cdot\vec{k}=\{x_1;y_1;z_1\},$$

$$\vec{b}=x_2\cdot\vec{i}+y_2\cdot\vec{j}+z_2\cdot\vec{k}=\{x_2;y_2;z_2\}.$$

Тоді

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=(x_1\cdot\vec{i}+y_1\cdot\vec{j}+z_1\cdot\vec{k})\cdot(x_2\cdot\vec{i}+y_2\cdot\vec{j}+z_2\cdot\vec{k})=$$

$$=x_1x_2\vec{i}\cdot\vec{i}+y_1x_2\vec{j}\cdot\vec{i}+z_1x_2\vec{k}\cdot\vec{i}+\cdots+z_1z_2\vec{k}\cdot\vec{k}.$$

Із означення скалярного добутку (7) неважко бачити, що

$$\vec{i}\cdot\vec{i}=\vec{j}\cdot\vec{j}=\vec{k}\cdot\vec{k}=1,\quad \vec{i}\cdot\vec{j}=\vec{i}\cdot\vec{k}=\vec{j}\cdot\vec{k}=0. \tag{9}$$

Врахувавши (9), дістанемо *формулу для обчислення скалярного добутку векторів, заданих своїми координатами*

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2. \tag{10}$$

Із означення (7) маємо

$$\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|\cdot|\vec{a}|\cdot\cos 0=|\vec{a}|^2.$$

Тому *формула для обчислення модуля вектора* має вигляд

$$|\vec{a}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}. \qquad (11)$$

Якщо задані координати двох точок $A(x_1; y_1; z_1)$ і $B(x_2; y_2; z_2)$, то вектор, що з'єднує ці точки, має вигляд

$$\overrightarrow{AB} = \{(x_2 - x_1); (y_2 - y_1); (z_2 - z_1)\}.$$

Отже*, формула для обчислення відстані між двома точками* $A(x_1; y_1; z_1)$ і $B(x_2; y_2; z_2)$:

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \qquad (12)$$

Із (8) маємо *формулу для обчислення проекції вектора на вектор*:

$$np_{\vec{b}}\vec{a} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}. \qquad (13)$$

Із означення (7) дістанемо також *формулу для обчислення косинуса кута між векторами*:

$$\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}. \qquad (14)$$

Напрямні косинуси довільного ненульового вектора $\vec{a}$ – це косинуси кутів, які він утворює з координатними осями, тобто з базисними векторами

$$\vec{i} = \{1; 0; 0\}, \ \vec{j} = \{0; 1; 0\}, \ \vec{k} = \{0; 0; 1\}.$$

Користуючись формулою (14), обчислимо напрямні косинуси вектора $\vec{a} = \{x; y; z\}$.

$$\cos\alpha = \cos(\widehat{\vec{a},\vec{i}}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{i}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{i}|} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{x}{|\vec{a}|},$$

$$\cos\beta = \cos(\widehat{\vec{a},\vec{j}}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{j}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{j}|} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{y}{|\vec{a}|},$$

$$\cos\gamma = \cos(\hat{\vec{a},\vec{k}}) = \frac{\vec{a}\cdot\vec{k}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{j}|} = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{z}{|\vec{a}|}.$$

Орт вектора $\vec{a} = \{x; y; z\}$ – це одиничний вектор $\vec{e}_a$, що має напрямок вектора $\vec{a}$:

$$\vec{e}_a = \frac{1}{|\vec{a}|}\cdot\vec{a} = \left\{\frac{x}{|\vec{a}|}; \frac{y}{|\vec{a}|}; \frac{z}{|\vec{a}|}\right\} = \{\cos\alpha; \cos\beta; \cos\gamma\}. \qquad (15)$$

Отже, *напрямні косинуси – це координати орта* $\vec{e}_a$ *радіус-вектора* $\vec{a}$.

Приклад. Відомі координати трьох точок $A(2;-1;4)$, $B(3;0;-2)$ і $C(-1;1;5)$. Знайти косинус кута між векторами $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$.

Запишемо координати векторів (формула (4)):

$$\overrightarrow{AB} = \{1; 1; -6\},\ \overrightarrow{AC} = \{-3; 2; 1\}.$$

$$\cos(\hat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) = \frac{1\cdot(-3)+1\cdot 2+(-6)\cdot 1}{\sqrt{1^2+1^2+(-6)^2}\cdot\sqrt{(-3)^2+2^2+1^2}} = \frac{-7}{\sqrt{38}\cdot\sqrt{14}}.$$

Механічний зміст скалярного добутку характеризується як *робота* W сталої сили $\vec{F}$ при переміщенні матеріальної точки з початку в кінець вектора $\overrightarrow{AB}$:

$$W = \overrightarrow{AB}\cdot\vec{F}.$$

Векторний добуток векторів

Означення. Три некомпланарні вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ в просторі утворюють *праву трійку*, якщо з кінця вектора $\vec{c}$ найкоротший поворот від вектора $\vec{a}$ до вектора $\vec{b}$ спостерігається як такий, що здійснюється проти годинникової стрілки (рис. 13), і *ліву трійку*, якщо найкоротший поворот від вектора $\vec{a}$ до вектора $\vec{b}$ спостерігається як такий, що відбувається за годинниковою стрілкою (рис. 14).

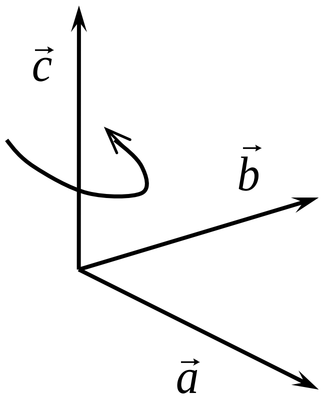


Рис. 13

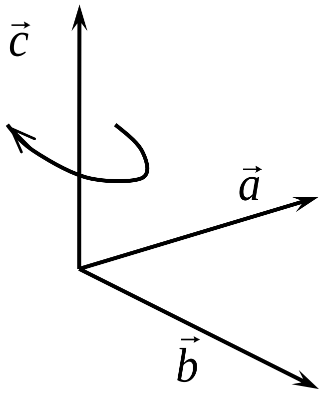


Рис. 14

Означення. *Векторним добутком неколінеарних векторів* $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається вектор $\vec{c}$ (рис. 15) такий, що

1) $\vec{c} \perp \vec{a}$ і $\vec{c} \perp \vec{b}$;

2) трійка $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ права;

3) $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin\varphi$, де $\varphi = (\vec{a}\hat{,}\vec{b})$.

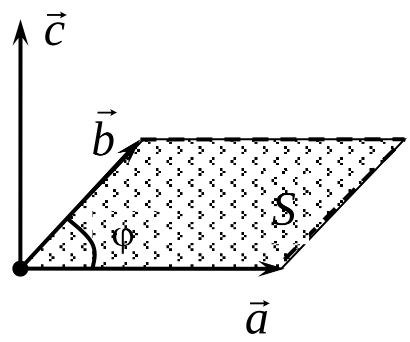


Рис. 15

Векторний добуток позначається $\vec{a} \times \vec{b}$ або $[\vec{a}, \vec{b}]$.

Модуль векторного добутку $|\vec{a} \times \vec{b}|$ дорівнює *площі паралелограма*, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$:

$$S_{пар} = |\vec{a} \times \vec{b}|. \tag{16}$$

Площа трикутника, побудованого на векторах $\vec{a}$ *і* $\vec{b}$, дорівнює половині модуля векторного добутку:

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} \cdot |\vec{a} \times \vec{b}|. \tag{17}$$

Властивості векторного добутку:

1) $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$ (антикомутативність);

2) $\vec{a}\times\vec{b}=0 \Leftrightarrow \vec{a}\parallel\vec{b}$, або один з векторів дорівнює нулю;

3) $\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}$ (дистрибутивність);

4) $(\lambda\vec{a})\times\vec{b}=\lambda(\vec{a}\times\vec{b})$, $\lambda\in\boldsymbol{R}$ (асоціативність відносно множення на число).

Із властивостей векторного добутку випливає, що *векторний добуток лінійний по кожному множнику*:

$$(\alpha\vec{a}+\beta\vec{b})\times\vec{c}=\alpha(\vec{a}\times\vec{c})+\beta(\vec{b}\times\vec{c}),\ \alpha,\beta\in\boldsymbol{R},$$

і аналогічно по другому множнику. Тобто при векторному множенні лінійних комбінацій векторів можна виконувати дії як при множенні многочленів (відкривати дужки, збирати подібні доданки тощо).

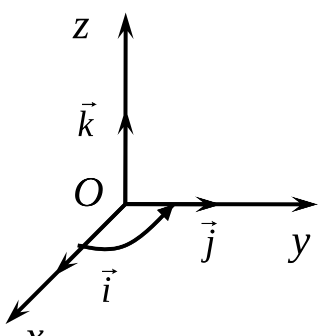


Рис. 16

Розглянемо праву ортонормовану систему координат (рис. 16). В такій системі координат трійка векторів ортів $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ права. Із означення векторного добутку маємо

$$\vec{i}\times\vec{i}=\vec{j}\times\vec{j}=\vec{k}\times\vec{k}=0, \qquad (18)$$

$$\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k},\quad \vec{j}\times\vec{k}=\vec{i},\quad \vec{k}\times\vec{i}=\vec{j},$$

$$\vec{j}\times\vec{i}=-\vec{k},\quad \vec{k}\times\vec{j}=-\vec{i},\quad \vec{i}\times\vec{k}=-\vec{j}. \qquad (19)$$

Нехай два вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ задані своїми координатами:

$$\vec{a}=x_1\cdot\vec{i}+y_1\cdot\vec{j}+z_1\cdot\vec{k}=\{x_1;y_1;z_1\},$$

$$\vec{b}=x_2\cdot\vec{i}+y_2\cdot\vec{j}+z_2\cdot\vec{k}=\{x_2;y_2;z_2\}.$$

Тоді

$$\vec{a}\times\vec{b}=(x_1\cdot\vec{i}+y_1\cdot\vec{j}+z_1\cdot\vec{k})\times(x_2\cdot\vec{i}+y_2\cdot\vec{j}+z_2\cdot\vec{k})=$$

$$=x_1x_2\vec{i}\times\vec{i}+y_1x_2\vec{j}\times\vec{i}+\dots+z_1z_2\vec{k}\times\vec{k}.$$

Врахувавши в останній рівності всі доданки, зауваживши значення добутків (18) і (19) і зібравши подібні доданки, дістанемо *формулу обчислення векторного добутку за координатами векторів*:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\vec{i}\,(y_1z_2-y_2z_1)+\cdot\vec{j}(x_2z_1-x_1z_2)+\vec{k}(x_1y_2-x_2y_1). \quad (20)$$

Цю формулу зручно подати у вигляді узагальненого визначника і його розкладу за першим рядком:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}=\vec{i}\cdot\begin{vmatrix}y_1 & z_1\\ y_2 & z_2\end{vmatrix}-\vec{j}\cdot\begin{vmatrix}x_1 & z_1\\ x_2 & z_2\end{vmatrix}+\vec{k}\cdot\begin{vmatrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{vmatrix}. \quad (21)$$

Механічний зміст векторного добутку характеризується тим, що векторний добуток $\vec{M}_A(\vec{F})=\overrightarrow{AB}\times\vec{F}$ – це момент сили $\vec{F}$, прикладеної в точці B, відносно точки A (рис. 17).

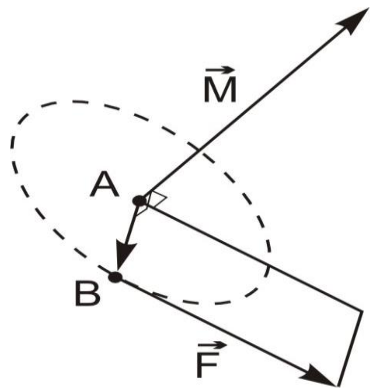


Рис. 17

Приклад. Знайти площу трикутника з вершинами в точках $A(2;-1;-2)$, $B(1;3;0)$ і $C(-1;1;4)$.

Площу трикутника шукатимемо за формулою (17)

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\cdot\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|.$$

$$\overrightarrow{AB}=\{1-2;\ 3-(-1);\ 0-(-2)\}=\{-1;4;2\},$$

$$\overrightarrow{AC}=\{-1-2;\ 1-(-1);\ 4-(-2)\}=\{-3;2;6\}.$$

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -1 & 4 & 2\\ -3 & 2 & 6\end{vmatrix}=\vec{i}\cdot\begin{vmatrix}4 & 2\\ 2 & 6\end{vmatrix}-\vec{j}\cdot\begin{vmatrix}-1 & 2\\ -3 & 6\end{vmatrix}+\vec{k}\cdot\begin{vmatrix}-1 & 4\\ -3 & 2\end{vmatrix}=$$

$$=20\vec{i}+0\cdot\vec{j}+10\vec{k}.$$

$$\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{20^2+0^2+10^2}=\sqrt{500}=10\sqrt{5},$$

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\cdot 10\sqrt{5}=5\sqrt{5}.$$

Мішаний добуток векторів

Означення. *Мішаним добутком* трьох векторів $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$, взятих у заданому порядку, називається скалярний добуток векторів $\vec{a}\times\vec{b}$ і $\vec{c}$, який позначається

$$(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}. \qquad (22)$$

З означення зрозуміло, що *мішаний добуток трьох векторів – це число*.

З'ясуємо *геометричний зміст мішаного добутку*. Побудуємо паралелепіпед, ребрами якого є три вектори $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$.

$$(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|\cdot\left|\vec{c}\right|\cdot\cos\varphi=S_{пар}\cdot(\pm H)=\pm V,$$

де $S_{пар}$ – площа паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$ (основи паралелепіпеда), H – висота паралелепіпеда, V – об'єм паралелепіпеда.

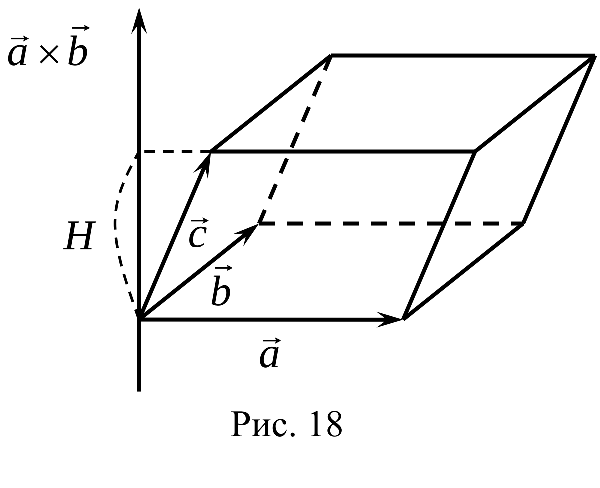


Рис. 18

Отже, мішаний добуток трьох векторів дорівнює об'єму паралелепіпеда, побудованого на цих векторах, взятому зі знаком "+", якщо трійка векторів права, і зі знаком "–", якщо трійка векторів ліва (рис. 18). Об'єм паралелепіпеда дорівнює модулю мішаного добутку:

$$V = \left|(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})\right|. \tag{23}$$

Об'єм трикутної піраміди, побудованої на векторах $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$,

$$V_{nip} = \frac{1}{6} \cdot \left|(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})\right|. \tag{24}$$

Якщо мішаний добуток дорівнює нулю, вектори компланарні і паралелепіпед не утворюється.

Властивості мішаного добутку

1) Мішаний добуток *дорівнює нулю* тоді і лише тоді, коли *три вектори компланарні* або хоча б один з них дорівнює нулю.

2) $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) > 0,$ коли $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – права трійка і

$(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) < 0$, коли $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – ліва трійка.

3) Мішаний добуток лінійний по кожній координаті:

$$(\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2, \vec{b}, \vec{c}) = \alpha_1(\vec{a}_1, \vec{b}, \vec{c}) + \alpha_2(\vec{a}_2, \vec{b}, \vec{c}),\ \alpha_1, \alpha_2 \in \boldsymbol{R}$$

і так само по двом іншим координатам.

4) Мішаний добуток не змінюється, якщо поміняти місцями знаки векторного і скалярного множення:

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}).$$

5) Мішаний добуток не змінюється при циклічній перестановці множників і змінює знак на протилежний при перестановці місцями будь-яких двох множників:

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}) = (\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}) = -(\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}) = -(\vec{a}, \vec{c}, \vec{b}) = -(\vec{c}, \vec{b}, \vec{a}).$$

Нехай вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ задані своїми координатами:

$$\vec{a} = x_1 \cdot \vec{i} + y_1 \cdot \vec{j} + z_1 \cdot \vec{k},$$

$$\vec{b} = x_2 \cdot \vec{i} + y_2 \cdot \vec{j} + z_2 \cdot \vec{k},$$

$$\vec{c} = x_3 \cdot \vec{i} + y_3 \cdot \vec{j} + z_3 \cdot \vec{k}.$$

За означенням, скориставшись (21), запишемо

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} =$$

$$= \left(\vec{i} \cdot \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} - \vec{j} \cdot \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} + \vec{k} \cdot \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right) \cdot \left(x_3 \cdot \vec{i} + y_3 \cdot \vec{j} + z_3 \cdot \vec{k} \right) =$$

$$= x_3 \cdot \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} - y_3 \cdot \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} + z_3 \cdot \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Отже,

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}. \qquad (25)$$

Ще раз зауважимо такі умови.

Умова перпендикулярності двох векторів – скалярний добуток дорівнює нулю.

Умова паралельності двох векторів – векторний добуток дорівнює нулю.

Умова компланарності трьох векторів – мішаний добуток дорівнює нулю.

Приклад. З'ясувати, чи лежать в одній площині чотири точки $A(1;0;-2), B(-1;4;2), C(-2;1;-1)$ і $D(5;2;0)$.

Розв'язок. Чотири точки лежать в одній площині, якщо вектори $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{AD}$ компланарні (рис. 19).

Умовою компланарності трьох векторів є рівність нулю їхнього мішаного добутку. Запишемо вектори:

$$\overrightarrow{AB} = \{-2;4;4\},\ \overrightarrow{AC} = \{-3;1;1\},\ \overrightarrow{AD} = \{4;2;2\}$$

і обчислимо їхній мішаний добуток:

$$(\vec{AB},\, \vec{AC},\, \vec{AD}) = \begin{vmatrix} -2 & 4 & 4 \\ -3 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= (-2)\cdot 1\cdot 2 + 4\cdot 1\cdot 4 + (-3)\cdot 2\cdot 4 -$$
$$-4\cdot 1\cdot 4 - (-3)\cdot 2\cdot 4 - (-2)\cdot 1\cdot 2 = 0.$$

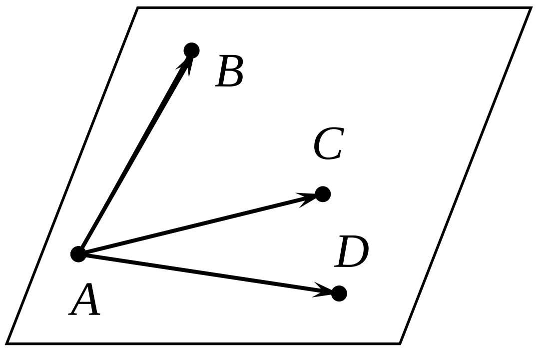


Рис. 19

Оскільки мішаний добуток дорівнює нулю, то вектори компланарні, тобто точки A, B, C, D лежать в одній площині.

Приклад. Знайти об'єм трикутної піраміди, побудованої на векторах

$$\vec{AB} = \{-1;3;0\}, \qquad \vec{AC} = \{2;-1;1\}, \qquad \vec{AD} = \{4;-2;1\}.$$

Знайдемо мішаний добуток заданих векторів

$$(\vec{AB},\, \vec{AC},\, \vec{AD}) = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 12 + 0 - 0 - 6 - 2 = 5.$$

Об’єм піраміди обчислимо за формулою (24)

$$V_{пір} = \frac{1}{6}\cdot\left|(\vec{AB},\, \vec{AC}\,,\, \vec{AD})\right| = \frac{5}{6}.$$

Контрольні запитання

1. Які операції можна робити з векторами і як вони визначаються?
2. Що називається проекцією вектора на напрямок іншого вектора?
3. Як задається прямокутна декартова система координат на площині та в просторі?
4. Як визначаються координати векторів та точок у прямокутній декартовій системі координат?
5. Що таке скалярний добуток векторів, які його властивості?
6. Який механічний зміст скалярного добутку?

7. Що таке векторний добуток векторів, які його властивості?

8. Який геометричний і механічний зміст векторного добутку?

9. Що таке мішаний добуток векторів, які його властивості?

10. Який геометричний зміст мішаного добутку?

11. Які умови перпендикулярності і колінеарності двох векторів і компланарності трьох векторів?

12. Як визначається довжина вектора, відстань між двома точками, косинус кута між векторами і проекція вектора на вектор?

13. Як визначаються напрямні косинуси вектора і його проекції на координатні осі?

Вправи

1. Визначити $|\vec{a}+\vec{b}|$ і $|\vec{a}-\vec{b}|$, якщо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ взаємно перпендикулярні, причому $|\vec{a}|=7$, $|\vec{b}|=24$.

2. Дано $|\vec{a}|=11$, $|\vec{b}|=23$ і $|\vec{a}+\vec{b}|=20$. Визначити $|\vec{a}-\vec{b}|$.

3. Вектори $\overrightarrow{AC}=\vec{a}$ і $\overrightarrow{BD}=\vec{b}$ є діагоналями паралелограма $ABCD$. Виразити вектори $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CD}$ і $\overrightarrow{DA}$ через вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

4. У трикутнику ABC проведено медіани AD, BM, CM. Довести рівність $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CN}=\vec{0}$.

5. Знайти координати векторів $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{BA}$ та їх довжину: $A(4;-1;2)$, $B(6;-3;1)$; б) $A(3;5;-2)$, $B(6;5;2)$.

6. Початок вектора $\vec{a}=(3;-2;1)$ збігається з точкою $A(-1;0;4)$. Знайти точку B, з якою збігається кінець цього вектора.

7. Знайти координати вектора $\vec{a}$, якщо відомі кути α, β, γ, які він утворює з координатними осями Ox, Oy, Oz, і його довжина:

а) $|\vec{a}|=6$, $\alpha=60^0, \beta=45^0, \gamma=120^0$;

б) $|\vec{a}|=10$, $\alpha=30^0, \beta=60^0, \gamma=90^0$.

8. Визначити, при яких значеннях α і β вектори $\vec{a}=(-6;\beta;3)$ і $\vec{b}=(\alpha;4;-2)$ колінеарні.

9. Знайти напрямні косинуси вектора $\vec{a}=(3;2;-6)$ та орт вектора $\vec{a}$.

10. Два вектори $\vec{a}=(2;-3;6)$ і $\vec{b}=(-1;2;-2)$ виходять з однієї точки. Визначити координати вектора $\vec{c}$, напрямленого по бісектрисі кута

між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$, за умови, що $|\vec{c}| = 2\sqrt{42}$.

11. Дано три вершини $A(2;3), B(4;-1), C(0;5)$ паралелограма $ABCD$. Знайти його четверту вершину D.

12. Дано координати вершин трикутника $A(1;-4;5)$, $B(3;5;7)$, $C(-1;5;-3)$. Знайти координати точки D перетину його медіан.

13. Відрізок, обмежений точками $A(2;-2)$, $B(5;4)$, поділено на три рівні частини. Знайти координати точок поділу.

14. Відомі вершини трикутника: $A(1;-1;0)$, $B(-2;0;1)$, $C(0;3;2)$. Знайти його внутрішній та зовнішній кути при вершині A.

15. Довжина вектора $\vec{a}$ дорівнює 1, довжина вектора $\vec{b}$ дорівнює 2, а скалярний добуток $(2\vec{a}+\vec{b})\cdot(-2a+3b)=12$. Знайти скалярний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

16. Знайти $|\vec{a}|$, якщо $\vec{a} = 4\vec{p} + \vec{r}$, де $|\vec{p}|=1, |r| = \sqrt{2}$, $(\overrightarrow{p,r}) = 45°$.

17. Дано три вектори: $\vec{a} = \vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{b} = -\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{c} = 2\vec{i} - \vec{k}$. Знайти вектор $\vec{x}$, що задовольняє умови: $(\vec{x},\vec{a}) = 9$, $(\vec{x},\vec{b}) = -2$, $(\vec{x},\vec{c}) = 1$.

18. Вектор $\vec{x}$, перпендикулярний до векторів $\vec{a} = (2;2;3)$ і $\vec{b} = (2;-1;-6)$, утворює тупий кут з віссю Oy. Знаючи, що $|\vec{x}| = 7$, знайти координати $\vec{x}$.

19. При якому значенні α вектори $\vec{p} = \vec{c} + \alpha\vec{d}$ і $\vec{r} = 2\vec{c} + 3\vec{d}$ перпендикулярні, якщо $|\vec{c}| = |\vec{d}| = 4$, $(\widehat{\vec{c},\vec{d}}) = 120°$?

20. Сила $\vec{F} = (4;7;-3)$ прикладена в точці $A(2;-7;2)$. Знайти роботу сили $\vec{F}$ при переміщенні матеріальної точки з точки $A(2;-7;2)$ в точку $B(5;-4;1)$.

21. Дано три вектори $\vec{a} = 3\vec{i} - 6\vec{j} - \vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} - 4\vec{j} - 3\vec{k}$, $\vec{c} = -3\vec{i} + 4\vec{j} + 12\vec{k}$. Знайти $\text{пр}_{\vec{c}}(\vec{a} - 2\vec{b})$.

22. Знайти вектор, перпендикулярний доплощини, що проходить через точки $A(4;3;1)$, $B(5;5;1)$, $C(4;4;0)$.

23. Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах

$\vec{a} = 3\vec{i} - 5\vec{j} - 2\vec{k}$ і $\vec{b} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - 10\vec{k}$.

24. Знайти площу трикутника ABC, якщо його вершини $A(1;-1;0)$, $B(-2;0;1)$, $C(0;3;2)$.

25. Перевірити, правою чи лівою буде трійка векторів $\vec{a} = (3;4;0)$, $\vec{b} = (0;-4;1)$, $\vec{c} = (0;2;5)$.

26. Чи компланарні вектори:

а) $\vec{a} = (-4;3;-1)$, $\vec{b} = (1;-2;3)$, $\vec{c} = (-2;-1;5)$;

б) $\vec{a} = (3;-2;1)$, $\vec{b} = (2;1;2)$, $\vec{c} = (3;-1;-2)$?

27. Чи лежать точки $A(1;2;-1)$, $B(4;1;5)$, $C(-1;2;-3)$, $D(2;1;3)$ в одній площині?

28. Дано вектори $\vec{a} = (8;4;1)$ і $\vec{b} = (2;2;-1)$. Знайти об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a}, \vec{b}, [\vec{a}, \vec{b}]$.

29. Вектор $\vec{c}$ перпендикулярний до векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ дорівнює $45°$. Знаючи, що $|\vec{a}| = 5$, $|\vec{b}| = 2\sqrt{2}$, $|\vec{c}| = 3$, обчислити $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$.

30. Дано вершини тетраедра $A(2;0;4)$, $B(0;3;7)$, $C(0;0;6)$, $D(4;3;5)$. Обчислити його об'єм і висоту H, опущену на грань ACD.

31. Сила $\vec{F} = (2;2;9)$ прикладена в точці $A(4;2;-3)$. Знайти величину і напрямні косинуси моменту $\vec{M}$ цієї сили відносно точки $B(2;4;0)$.

Тема 2. Пряма на площині

Лінія (крива) на площині – це геометричне місце точок площини, що мають певні спільні властивості, які аналітично описуються рівнянням цієї лінії в деякій системі координат.

Припустимо, що на площині вибрана прямокутна декартова система координат і розглянемо різні види рівнянь *прямої лінії*, які визначаються способом її задавання.

Лекція 3. Загальне рівняння прямої. Рівняння прямої у відрізках на осях. Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом. Нормальне рівняння прямої. Відстань від точки до прямої

Загальне рівняння прямої

Рівняння прямої – це рівняння, яке задовольняють координати всіх точок прямої і не задовольняють координати жодної точки, що не лежить на прямій.

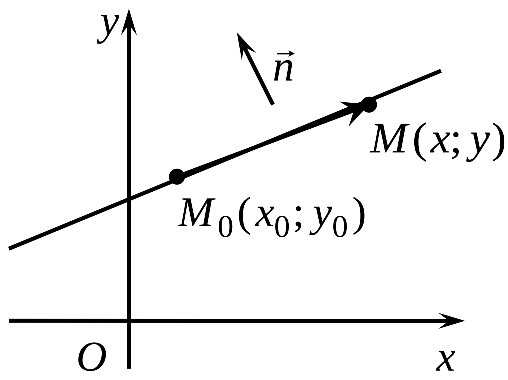


Рис. 20

Пряму можна однозначно задати точкою $M_0(x_0;y_0)$ і вектором $\vec{n}=\{A;B\}$, перпендикулярним до прямої (рис. 20). Для точки $M(x;y)$, що лежить на прямій, вектор

$$\overrightarrow{M_0M}=\{x-x_0;y-y_0\}$$

перпендикулярний вектору $\vec{n}=\{A;B\}$. Умова перпендикулярності двох векторів – скалярний добуток дорівнює нулю. Отже, рівняння прямої має вигляд

$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{M_0M}=0. \qquad (26)$$

Це рівняння називається *векторним рівнянням прямої*.

У координатному вигляді рівняння записується таким чином

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0. \qquad (27)$$

Це рівняння прямої, що *проходить через точку* $M_0(x_0;y_0)$ *і перпендикулярна вектору* $\vec{n}=\{A;B\}$.

Розкривши дужки в рівнянні (27), дістанемо

$$Ax+By-Ax_0-By_0=0.$$

Позначимо $C=-Ax_0-By_0$ і отримаємо рівняння

$$Ax+By+C=0, \qquad (28)$$

яке називається *загальним рівнянням прямої*. Коефіцієнти при змінних у цьому рівнянні є координатами перпендикулярного до прямої вектора $\vec{n}=\{A;B\}$, який називається *нормальним вектором прямої*.

Рівняння прямої у відрізках на осях

В частинному випадку, якщо $C=0$, пряма проходить через початок координат. Якщо $A=0$, пряма перпендикулярна осі Oy, тобто паралельна осі Ox, рівняння прямої $y=-\dfrac{C}{B}$. Аналогічно при $B=0$, пряма паралельна осі Oy.

Якщо у формулі (28) $C\neq 0$, тобто пряма не проходить через початок координат, то рівняння прямої можна подати у вигляді

$$\frac{x}{\frac{-C}{A}}+\frac{y}{\frac{-C}{B}}=1,$$

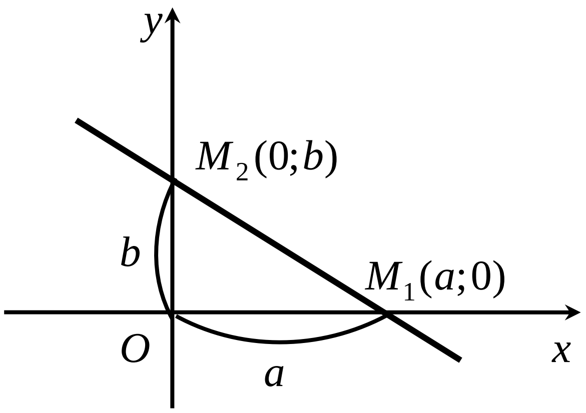


Рис. 21

або, позначивши

$a=\dfrac{-C}{A}$, $b=\dfrac{-C}{B}$, дістанемо

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1. \qquad (29)$$

Це рівняння називається *рівнянням прямої у відрізках на осях*, оскільки числа a і b показують, які відрізки пряма відтинає на осях Ox і Oy (рис. 21).

Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом

Нехай пряма L не перпендикулярна до осі Ox, $M(x;y)$ – довільна точка прямої, $M_0(x_0;y_0)$ – фіксована точка прямої, α – кут, який пряма утворює з додатнім напрямом осі Ox (рис. 22).

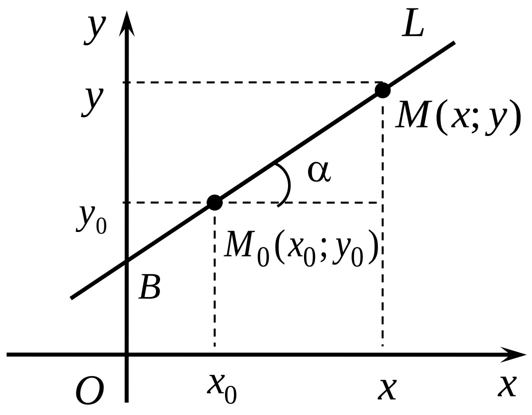


Рис. 22

Отримаємо

$$tg\alpha = \frac{y - y_0}{x - x_0}.$$

Позначивши $k = tg\alpha$, дістанемо

$$k = \frac{y - y_0}{x - x_0}$$

або

$$y - y_0 = k(x - x_0). \qquad (30а)$$

Коефіцієнт k називається *кутовим коефіцієнтом прямої*, а рівняння (30а) називається *рівнянням прямої з кутовим коефіцієнтом* k, *що проходить через точку* $M_0(x_0;y_0)$.

Зробимо перетворення в рівнянні (30а)

$$y - y_0 = kx - kx_0,\ y = kx + y_0 - kx_0.$$

Позначивши $b = y_0 - kx_0$, отримаємо рівняння

$$y = kx + b. \qquad (30)$$

Рівняння (30а) часто записують у вигляді (30) і називають *рівнянням прямої з кутовим коефіцієнтом*. Точка $B(0;b)$ – точка перетину прямої з віссю Oy.

Нормальне рівняння прямої

Припустимо, що $\vec{n}$ – нормальний вектор прямої одиничної довжини і p – відстань прямої від початку координат (рис. 23). Ці два параметри однозначно визначають пряму на площині. Координатами нормального вектора одиничної довжини є напрямні косинуси, тобто $\vec{n} = \{\cos\alpha, \cos\beta\}$. Враховуючи, що $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$, маємо $\vec{n} = \{\cos\alpha, \sin\alpha\}$.

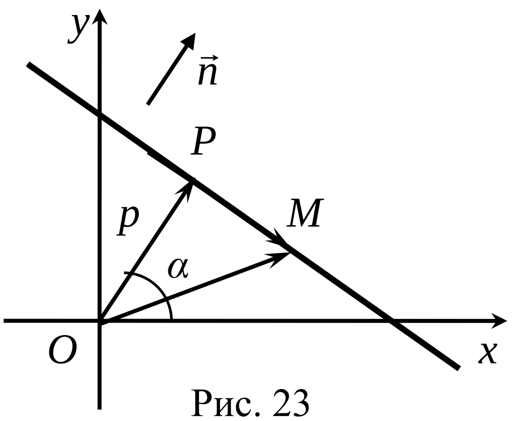


Рис. 23

Для точок $M(x, y)$, що лежать на прямій, проекція вектора $\overrightarrow{OM} = \{x, y\}$ на вісь вектора $\vec{n}$ дорівнює p. За формулою (8)

$$np_{\vec{n}}\, \overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OM} \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|} = \frac{x\cos\alpha + y\sin\alpha}{\sqrt{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}} = p.$$

Отже, рівняння прямої набирає вигляду

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0. \tag{31}$$

Це рівняння називається *нормальним рівнянням прямої*.

Щоб перейти від загального рівняння $Ax + By + C = 0$ до нормального рівняння прямої, загальне рівняння треба помножити на нормуючий множник

$$\mu = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Знак "+" або "–" у нормуючому множнику обирається протилежним знаку коефіцієнта C у загальному рівнянні. Після множення на нормуючий множник дістанемо рівняння

$$\pm\left(\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}x + \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}y + \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}}\right) = 0,$$

в якому сума квадратів коефіцієнтів при змінних x і y дорівнює одиниці, тобто ці коефіцієнти є косинусом і синусом одного кута.

Приклад. Записати нормальне рівняння прямої, заданої загальним рівнянням $4x - 3y + 15 = 0$.

Нормуючий множник $\mu = -\frac{1}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = -\frac{1}{5}$.

Знак множника зі знаком "–" через те, що коефіцієнт C у загальному рівнянні прямої має знак "+". Нормальне рівняння прямої:

$$-\frac{4}{5}x+\frac{3}{5}y-3=0.$$

Відстань від точки до прямої

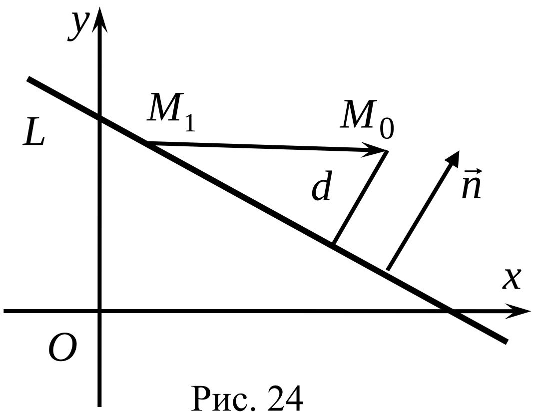


Рис. 24

Якщо пряма задана загальним рівнянням $Ax+By+C=0$ і $M_1(x_1;y_1)$ – довільна точка на цій прямій, то відстань d від точки $M_0(x_0;y_0)$ до прямої є модулем проекції вектора

$$\overrightarrow{M_1M_0}=\{x_0-x_1;\,y_0-y_1\}$$

на нормальний вектор прямої $\vec{n}=\{A;B\}$ (рис. 24):

$$d=\left|np_{\vec{n}}\,\overrightarrow{M_1M_0}\right|=\left|\frac{\overrightarrow{M_1M_0}\cdot\vec{n}}{|\vec{n}|}\right|=\left|\frac{A(x_0-x_1)+B(y_0-y_1)}{\sqrt{A^2+B^2}}\right|=$$

$$=\left|\frac{Ax_0+B\,y_0-Ax_1-By_1}{\sqrt{A^2+B^2}}\right|.$$

Оскільки точка $M_1(x_1;y_1)$ лежить на прямій, $-Ax_1-By_1=C$ і дістанемо

$$d=\left|\frac{Ax_0+By_0+C}{\sqrt{A^2+B^2}}\right|. \qquad (32)$$

Це *формула обчислення відстані від точки* $M_0(x_0;y_0)$ *до прямої.*

Для нормального рівняння прямої (34)

$$d=|x_0\cos\alpha+y_0\sin\alpha-p|. \qquad (33)$$

Величина

$$\delta = \frac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}},$$

або у разі нормального рівняння

$$\delta = x_0 \cos\alpha + y_0 \sin\alpha - p,$$

називається *відхиленням точки від прямої*. Відхилення $\delta = \pm d$. Зазначимо, що $\delta = +d$, якщо точка $M_0(x_0; y_0)$ і початок координат лежать по різні сторони від прямої (як на рисунку), і $\delta = -d$, якщо точка і початок координат лежать по одну сторону від прямої.

Приклад. Задана пряма $L: \ -2x - 3y + 2 = 0$ і точка $M_0(4; 3)$. Визначити відстань від точки M_0 до прямої, написати рівняння прямої L_1, що проходить через M_0 паралельно до прямої L, і рівняння прямої L_2, що проходить через M_0 і перпендикулярна до *L*.

Відстань від точки до прямої (формула (32))

$$d = \left| \frac{(-2)\cdot 4 + (-3)\cdot 3 + 2}{\sqrt{(-2)^2 + (-3)^2}} \right| = \left| \frac{-15}{\sqrt{13}} \right| = \frac{15}{\sqrt{13}}.$$

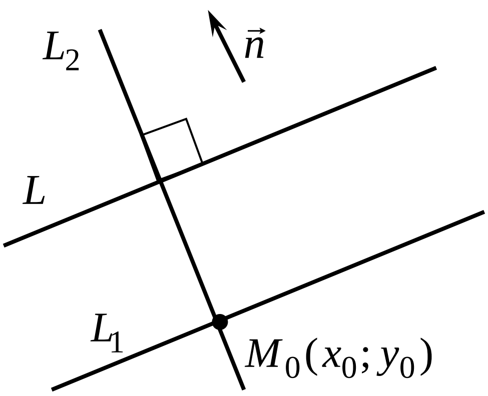


Рис. 24а

Вектор $\vec{n} = \{-2; -3\}$ є нормальним вектором прямої L, отже, цей вектор є нормальним вектором паралельної прямої L_1 Тому загальне рівняння паралельної прямої L_1, що проходить через точку $M_0(4; 3)$ (формула (27)):

$$L_1: -2(x-4) + (-3)(y-3) = 0,$$

або $L_1: -2x - 3y + 17 = 0.$

Розглянемо вектор $\vec{n}_2 = \{3; -2\}$ перпендикулярний до $\vec{n} = \{-2; -3\}$.

Дійсно $(\vec{n},\vec{n}_2)=3\cdot(-2)+(-2)\cdot(-3)=-6+6=0$. Вектор $\vec{n}_2=\{3;-2\}$ можна взяти за вектор нормалі до прямої L_2, перпендикулярної до L. За формулою (2) рівняння прямої L_2:

$$3(x-4)+(-2)(y-3)=0;$$

$$3x-12-2y+6=0;$$

$$L_2:\ 3x-2y-6=0.$$

Лекція 4. Канонічне і параметричні рівняння прямої. Рівняння прямої, що проходить через дві точки. Пучок прямих. Кут між прямими

Канонічне і параметричні рівняння прямої

Пряму однозначно можна задати точкою $M_0(x_0; y_0)$, яка лежить на цій прямій, і вектором $\vec{a} = \{l; m\}$, що паралельний прямій (рис. 25). Зрозуміло, що точка $M(x; y)$ лежить на прямій, якщо вектор $\overrightarrow{M_0 M} = \{x - x_0; y - y_0\}$ паралельний вектору $\vec{a} = \{l; m\}$.

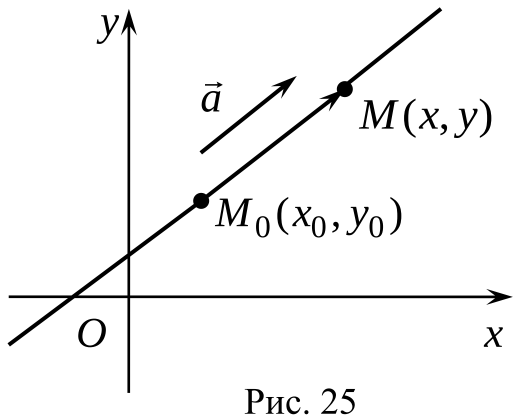


Рис. 25

Із паралельності векторів випливає, що їхні координати пропорційні:

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m}. \tag{34}$$

Це рівняння називається *канонічним рівнянням прямої*. В цьому рівнянні $M_0(x_0; y_0)$ – точка, яка лежить на прямій, $\vec{a} = \{l; m\}$ – вектор, паралельний прямій, який називається *напрямним вектором прямої*.

В частинному випадку, якщо $l = 0$, то вектор $\vec{a}$ паралельний осі Oy. Отже, пряма паралельна цій осі і має рівняння $x = x_0$. Аналогічно, якщо $m = 0$, то вектор $\vec{a}$ паралельний осі Ox і пряма $y = y_0$ паралельна цій осі.

Крива на площині вважається *заданою параметрично*, якщо вона задається двома рівняннями

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$$

за допомогою яких кожному значенню параметра $t \in \boldsymbol{R}$ ставляться у відповідність координати деякої точки кривої, що визначають її положення на площині.

Для знаходження параметричних рівнянь прямої скористаємося канонічним рівнянням (34)

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = t.$$

Звідки

$$\begin{cases} x = lt + x_0, \\ y = mt + y_0. \end{cases} \tag{35}$$

Рівняння (35) називаються *параметричними рівняннями прямої*.

Нехай M_0 – точка на прямій L, а M – довільна точка, $\vec{a}$ – напрямний вектор прямої. Розглянемо радіус-вектори $\vec{r_0} = \overrightarrow{OM_0}$ та $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ точок M_0 та M відповідно (рис. 26). Оскільки вектори $\overrightarrow{M_0M} = \vec{r} - \vec{r_0}$ та $\vec{a}$ колінеарні, то $\vec{r} - \vec{r_0} = t\,\vec{a}$. Отримаємо ще одну форму рівняння прямої на площині – *векторно-параметричне рівняння*

$$\vec{r} = \vec{r_0} + t\,\vec{a}\text{, де } t - \text{параметр, } t \in \boldsymbol{R}.$$

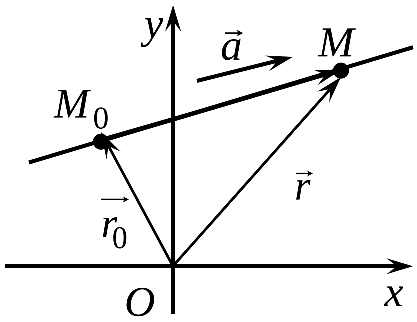


Рис. 26

Рівняння прямої, що проходить через дві точки

У разі, коли відомі координати двох точок $M_1(x_1; y_1)$ і $M_2(x_2; y_2)$, які лежать на прямій, за напрямний вектор у канонічному рівнянні прямої можна прийняти вектор, що з'єднує ці точки: $\overrightarrow{M_1M_2} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1\}$. За точку, що лежить на прямій, можна прийняти одну з цих точок,

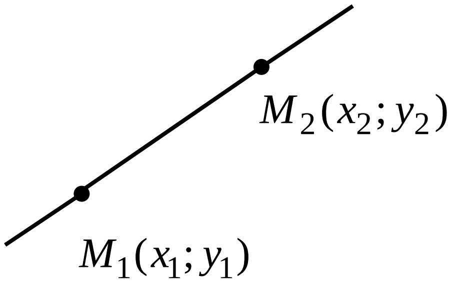


Рис. 26 а

наприклад, $M_1(x_1;y_1)$. Тоді рівняння прямої матиме вигляд

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}. \qquad (36)$$

Це рівняння називається *рівнянням прямої, що проходить через дві точки*.

Наприклад, рівняння прямої, що проходить через точки $M_1(1;-3)$ і $M_2(-1;2)$ має вигляд

$$\frac{x-1}{-1-1}=\frac{y+3}{2+3}, \text{ або } \frac{x-1}{-2}=\frac{y+3}{5}.$$

Пучок прямих

Пучком прямих називається множина прямих, що проходять через одну точку.

Нехай деяка пряма визначена рівнянням з кутовим коефіцієнтом $y=kx+b$ і проходить через точку $M_0(x_0;y_0)$. Координати точки задовольняють це рівняння: $y_0=kx_0+b.$ Маємо

$$y-y_0=k(x-x_0). \qquad (37)$$

Це є *рівняння пучка прямих* з центром у точці $M_0(x_0;y_0)$. При різних значеннях кутового коефіцієнта k рівняння задає всі прямі пучка.

У разі, коли точка, що є центром пучка, задається як перетин двох непаралельних прямих

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2=0, \end{cases}$$

зручніше користуватися рівнянням пучка у вигляді

$$\alpha(A_1x+B_1y+C_1)+\beta(A_2x+B_2y+C_2)=0. \qquad (38)$$

Якщо $\alpha\neq 0,$ то рівняння (38) можна подати як рівняння з одним параметром:

$$(A_1x+B_1y+C_1)+\lambda(A_2x+B_2y+C_2)=0. \qquad (39)$$

Зауважимо, що рівняння (39) при різних значеннях λ задає всі прямі пучка крім прямої

$$A_2x + B_2y + C_2 = 0.$$

Кут між прямими

Якщо дві прямі L_1 та L_2 на площині задані своїми рівняннями з кутовими коефіцієнтами $y = k_1x + b_1$ і $y = k_2x + b_2$ і утворюють з віссю Ox кути відповідно α_1 *і* α_2 (рис. 27), то $k_1 = tg\alpha_1$ *і* $k_2 = tg\alpha_2$. Гострий кут між прямими

$$\varphi = \max(\alpha_1, \alpha_2) - \min(\alpha_1, \alpha_2) = |\alpha_1 - \alpha_2|.$$

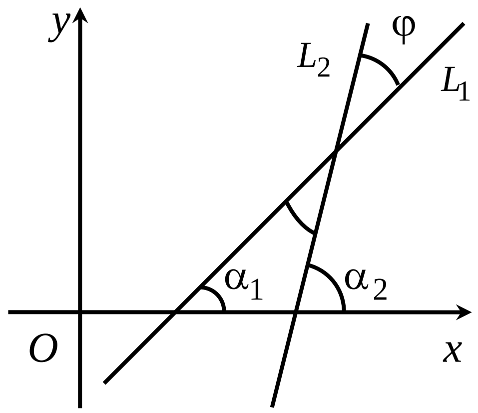


Рис. 27

$$tg\varphi = tg|\alpha_1 - \alpha_2| = |tg(\alpha_1 - \alpha_2)| = \left|\frac{tg\alpha_1 - tg\alpha_2}{1 + tg\alpha_1 \cdot tg\alpha_2}\right| = \left|\frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 \cdot k_2}\right|.$$

Отже,

$$tg\varphi = \left|\frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 \cdot k_2}\right|. \tag{40}$$

Якщо в отриманій формулі у правій частині враховувати модуль, то дістанемо тангенс гострого кута. Якщо модуль не враховувати, матимемо тангенс одного з двох кутів, утворених прямими.

Умовою паралельності прямих є рівність їхніх кутових коефіцієнтів $k_1 = k_2$. *Умова перпендикулярності прямих*: $k_1 = -\dfrac{1}{k_2}$.

Якщо прямі на площині задані своїми канонічними рівняннями, то кут між прямими визначається як кут між їхніми напрямними векторами, або, якщо прямі задані загальними рівняннями, – як кут між їхніми нормальними векторами. Відповідно, умовою паралельності або перпендикулярності прямих є паралельність або перпендикулярність їхніх напрямних чи нормальних векторів.

Контрольні запитання

1. Запишіть загальне рівняння прямої на площині. Який вектор є нормальним вектором до прямої?

2. Виведіть рівняння прямої у відрізках на осях із загального рівняння прямої.

3. Запишіть рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом.

4. Запишіть нормальне рівняння прямої. Як визначається відстань від точки до прямої і відхилення точки від прямої на площині?

5. Запишіть канонічне і параметричні рівняння прямої. Який вектор є напрямним вектором прямої?

6. Виведіть рівняння прямої, що проходить через дві точки.

7. Що називається пучком прямих та як записується його рівняння?

8. Як визначається кут між прямими? Сформулюйте умови паралельності і перпендикулярності прямих.

Вправи

1. Визначити точки перетину прямої $3x-4y-12=0$ з координатними осями і побудувати цю пряму на рисунку.

2. Дана пряма $2x+3y+4=0$. Скласти рівняння прямої, що проходить через точку $M_0(2;1)$:

а) паралельно даній прямій;

б) перпендикулярно до даної прямої.

3. Знайти точку Q, симетричну точці $P(-6;4)$ відносно прямої $4x-5y+3=0$.

4. Записати рівняння медіан та висот трикутника з вершинами в точках $A(-4;2), B(2;0), C(2;-4)$. Знайти точку перетину медіан трикутника ABC. Знайти точку перетину висот трикутника ABC.

5. Дано трикутник з вершинами $A(1;-3)$, $B(5;7)$, $C(9;-1)$. Знайти центр описаного кола навколо трикутника ABC.

6. Скласти рівняння сторін трикутника, знаючи вершину $A(3;-4)$ та

рівняння двох висот $7x-2y-1=0$ та $2x-7y-6=0$.

7. Середини сторін трикутника лежать у точках $M_1(2;1)$, $M_2(5;3)$, $M_3(3;-4)$. Скласти рівняння його сторін.

8. Рівняння двох сторін паралелограма $8x+3y+1=0$, $2x+y-1=0$, а рівняння однієї з його діагоналей $3x+2y+3=0$. Визначити координати вершин цього паралелограма.

9. Визначити кутовий коефіцієнт прямої k і відрізок b, що його відтинає пряма на осі Oy, якщо вона задана рівняннями:

1) $5x-y+3=0$; 2) $2x+3y-6=0$; 3) $4x+3y=0$; 4) $x-5=0$.

10. Скласти рівняння сторін трикутника, знаючи його вершину $A(2;-4)$ та рівняння бісектрис двох його кутів: $x+y-2=0$ та $x-3y-6=0$.

11. Скласти рівняння катетів рівнобедреного прямокутного трикутника, якщо $C(5;-1)$ – вершина прямого кута, а $2x-3y+5=0$ – рівняння гіпотенузи.

12. Точка $D(1;-1)$ є центром квадрата, одна із сторін якого лежить на прямій $x-2y+12=0$. Знайти рівняння інших сторін квадрата.

13. Протилежні вершини квадрата лежать у точках $A(-1;3)$ і $C(6;2)$. Скласти рівняння його сторін.

14. Обчислити відстань від точки $M(2;1)$ до прямої

$$x=-1+2t, \quad y=2+t.$$

15. Точка $A(2;-5)$ є вершиною квадрата, одна із сторін якого лежить на прямій $x-2y-7=0$. Обчислити площу цього квадрата.

16. Задано вершини трикутника $A(-10;-13)$, $B(-2;3)$ та $C(2;1)$. Обчислити довжину перпендикуляра, опущеного з вершини B на медіану, проведену з вершини C.

17. Точка A належить прямій $x+y=8$ і розміщена на однаковій відстані від точки $B(2;8)$ і від прямої $x-3y+2=0$. Знайти координати точки A.

Тема 3. Площина та пряма у просторі

Лекція 5. Площина у просторі. Різні види рівнянь площини

Найпростішою поверхнею у просторі є площина. Якщо у просторі обрана прямокутна декартова система координат, то рівняння площини є алгебраїчним рівнянням першого порядку від трьох змінних, яке можна отримати різними способами

Загальне рівняння площини

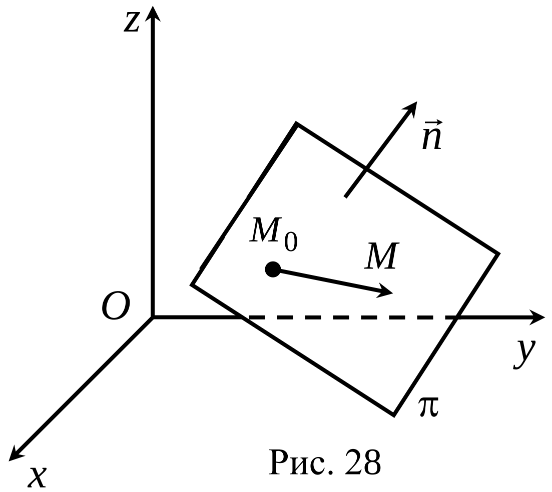


Рис. 28

Площину π у просторі можна задати вектором $\vec{n}=\{A;B;C\}$, перпендикулярним до площини, і точкою $M_0(x_0;y_0;z_0)$, що лежить на площині (рис. 28). Умовою того, що точка $M(x;y;z)$ лежить на площині є перпендикулярність векторів $\overrightarrow{M_0M}=\{x-x_0;y-y_0;z-z_0\}$ і $\vec{n}=\{A;B;C\}$. Тобто скалярний добуток цих векторів має дорівнювати нулю:

$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{M_0M}=0. \qquad (41)$$

Це рівняння називається *векторним рівнянням площини*, а вектор $\vec{n}=\{A;B;C\}$ *– нормальним вектором площини.*

Рівняння (41) у покоординатному вигляді:

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0. \qquad (42)$$

Це рівняння площини, що *проходить через точку* $M_0(x_0;y_0;z_0)$ *і перпендикулярна вектору* $\vec{n}=\{A;B;C\}$.

Розкривши дужки і позначивши $D=-Ax_0-By_0-Cz_0$, дістанемо рівняння

$$Ax + By + Cz + D = 0, \qquad (43)$$

яке називається *загальним рівнянням площини*.

В частинному випадку, якщо $D = 0$, площина проходить через початок координат. Якщо $C = 0$, маємо рівняння $Ax + By + D = 0$, яке є рівнянням площини, паралельної осі Oz. Зауважимо, що це рівняння на площині Oxy задає пряму, а в просторі – площину, яка перетинається з координатною площиною Oxy по цій прямій.

Якщо $B = C = 0$, площина, паралельна координатній площині Oyz, якщо $B = C = D = 0$, то рівняння $x = 0$ є рівнянням цієї координатної площини. Аналогічно можна описати інші частинні випадки щодо коефіцієнтів загального рівняння.

Рівняння площини у відрізках на осях

Якщо у загальному рівнянні площини (43) $D \neq 0$, то поділивши рівняння на цей коефіцієнт, дістанемо, аналогічно як для загального рівняння прямої на площині (п.п. 2.5), *рівняння площини у відрізках на осях*:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1, \qquad (44)$$

де через a, b, c позначені відрізки, які площина відтинає на координатних осях (рис. 29).

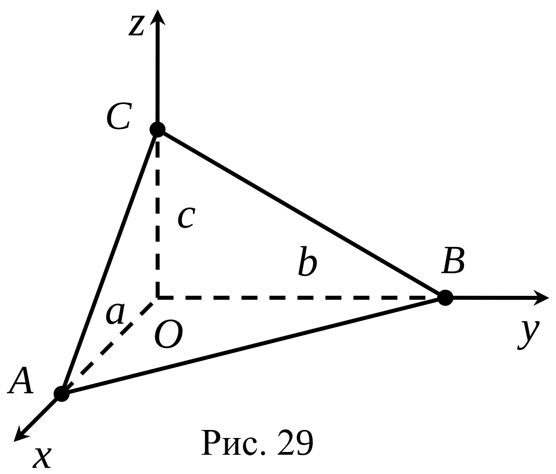


Рис. 29

Нормальне рівняння площини

Якщо за нормальний вектор площини прийняти вектор одиничної довжини

$$\vec{n} = \{\cos\alpha; \cos\beta; \cos\gamma\}$$

і позначити через p відстань площини від початку координат, то, як і для прямої (п.п. 2.3), можна отримати *нормальне рівняння площини*:

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0. \qquad (45)$$

Щоб перейти від загального рівняння

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

до нормального, загальне рівняння треба помножити на нормуючий множник

$$\mu = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Знак "+" або "–" обирається протилежним знаку коефіцієнта D у загальному рівнянні. Після множення на нормуючий множник дістанемо

$$\pm\left(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}x + \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}y + \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}z + \right.$$

$$\left. + \frac{D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right) = 0.$$

Відстань від точки до площини

Аналогічно формулі (35) для прямої на площині *відстань від точки* $M_0(x_0, y_0, z_0)$ *до площини*

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

обчислюється за формулою

$$d = \left|\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}\right| \qquad (46)$$

або за формулою

$$d = \left|x_0\cos\alpha + y_0\cos\beta + z_0\cos\gamma - p\right|, \qquad (47)$$

якщо площина задана нормальним рівнянням.

Величина

$$\delta = \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \qquad (48)$$

називається *відхиленням точки* $M_0(x_0; y_0; z_0)$ *від площини*. Якщо точка $M_0(x_0; y_0; z_0)$ і початок координат лежать по різні стороні від площини, то $\delta = +d$, і $\delta = -d$, якщо точка і початок координат лежать по одну сторону від площини.

Кут між площинами

Кут між площинами

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \text{ і } A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

– це кут між їхніми нормальними векторами

$$\vec{n}_1 = \{A_1; B_1; C_1\} \text{ і } \vec{n}_2 = \{A_2; B_2; C_2\}.$$

Косинус кута між площинами визначається за формулою

$$\cos(\widehat{\vec{n}_1, \vec{n}_2}) = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}. \quad (49)$$

Дві площини паралельні, якщо паралельні їхні нормальні вектори і перпендикулярні, якщо їхні нормальні вектори перпендикулярні.

Рівняння площини, що проходить через три точки

Нехай у просторі дано три точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$, $M_2(x_2; y_2; z_2)$, $M_3(x_3; y_3; z_3)$, які не лежать на одній прямій (рис. 30). Знайдемо рівняння площини π, що задається цими трьома точками.

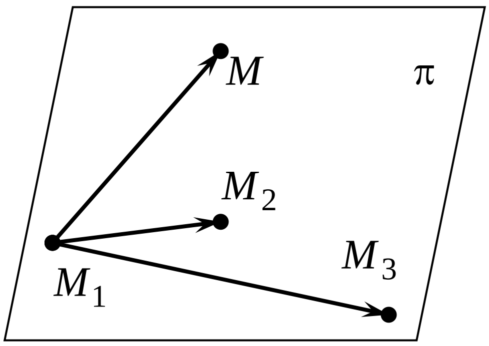


Рис. 30

Візьмемо довільну точку $M(x; y; z)$ на площині π і розглянемо вектори $\overrightarrow{M_1M}, \overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_1M_3}$. Ці вектори лежать у площині π і тому компланарні, тобто їхній мішаний добуток дорівнює нулю:

$$(\overrightarrow{M_1M}, \overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_1M_3}) = 0.$$

Запишемо цю умову покоординатно:

$$\overrightarrow{M_1M}=\{x-x_1; y-y_1; z_1-z_1\},$$

$$\overrightarrow{M_1M_2}=\{x_2-x_1; y_2-y_1; z_2-z_1\},$$

$$\overrightarrow{M_1M_3}=\{x_3-x_1; y_3-y_1; z_3-z_1\}.$$

Умова рівності нулю мішаного добутку цих векторів:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0. \tag{50}$$

Це рівняння називається *рівнянням площини, що проходить через три точки*.

Приклад. Написати рівняння площини, що задається трьома точками $M_1(1;2;-1)$, $M_2(-2;3;0)$, $M_3(3;0;1)$.

Скористаємося формулою (50). Рівняння шуканої площини має вигляд

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z+1 \\ -2-1 & 3-2 & 0+1 \\ 3-1 & 0-2 & 1+1 \end{vmatrix}=0, \qquad \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z+1 \\ -3 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \end{vmatrix}=0,$$

$$(x-1)\cdot 4-(y-2)\cdot(-8)+(z+1)\cdot 4=0,$$

$$4x+8y+4z-16=0,$$

$$x+2y+z-16=0.$$

Пучком площин називається множина площин, що проходять через одну пряму. У випадку, коли пряма, яка визначає пучок, задається як перетин двох непаралельних площин

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \text{ і } A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0,$$

рівняння пучка площин має вигляд

$$\alpha(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+\beta(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0. \tag{51}$$

Це рівняння при різних значеннях параметрів α і β задає всі прямі пучка.

Якщо $\alpha \neq 0,$ то рівняння (51) можна подати як рівняння з одним параметром:

$$(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \lambda(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0, \qquad (52)$$

яке при різних значеннях λ задає всі площини пучка крім площини

$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

Контрольні запитання

1. Запишіть загальне рівняння площини. Який вектор є нормальним вектором площини?
2. Вкажіть частинні випадки рівняння площини.
3. Виведіть рівняння площини у відрізках на осях із загального рівняння площини.
4. Запишіть рівняння площини, що проходить через три точки.
5. Як визначається відстань від точки до площини і відхилення точки від площини?
6. Як знайти кут між двома площинами?
7. Що називається пучком площин та яке його рівняння?

Вправи

1. Записати рівняння площини, що проходить через точку $M_0(1;-2;3)$ та:

а) перпендикулярна вектору $\vec{N} = (4;-3;2)$;

б) паралельна площині $3x - 2y + z - 5 = 0$;

в) перпендикулярна до площин $x + 2y + 1 = 0$ та $3x - 2y + z - 4 = 0$.

2. Дано точки $A(3;2;1)$ і $B(1;4;-5)$. Записати рівняння площини, що проходить через середину відрізка AB перпендикулярно цьому відрізку.

3. Записати рівняння площини, яка проходить через точку $M_0(1;-3;1)$ паралельно двом векторам $\vec{a} = (5;-1;3)$ і $\vec{b} = (4;1;2)$.

4. Записати рівняння площини, яка паралельна осі Oz та проходить через точки $M_1(3;0;-1)$, $M_2(4;1;5)$.

5. Записати рівняння площини, що перпендикулярна площині

$x-y+z+1=0$ та проходить через точки $M_1(1;1;0)$ і $M_2(0;1;2)$.

6. Записати загальне рівняння площини, що проходить через три точки $A(2;4;3)$, $B(3;6;4)$, $C(1;1;2)$.

7. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $P(1;0;2)$ перпендикулярно до двох площин $2x-y+3z-5=0$ і $3x+6y+3z-5=0$.

8. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $M_0(5;-4;2)$ і паралельна площині Oxz.

9. Записати рівняння площини, що проходить через точки $M_1(2;-3;5)$ і $M_2(4;1;-1)$ паралельно осі Ox.

10. Скласти рівняння площини, яка проходить через вісь Oy і точку $M(-8;6;7)$.

11. Площина паралельна вектору $\vec{s}=(3;-6;4)$ і відтинає на координатних осях Oy і Oz відрізки $b=-3$, $c=4$. Знайти рівняння цієї площини.

12. Знайти відстань між паралельними площинами $x-2y-2z-12=0$ та $x-2y-2z+3=0$.

13. Дві грані куба лежать на площинах $2x-2y+z+3=0$, $2x-2y+z+9=0$. Знайти об’єм цього куба.

14. Знайти відстань від точки $M(1;5;4)$ до площини, що відтинає на осях координат відрізки $a=1$, $b=5$ та $c=4$.

15. Записати рівняння площин, паралельних площині $2x+6y+3z-6=0$ і віддалених від неї на відстань $d=5$.

16. Знайти об’єм піраміди, утвореної перетином площини $2x-3y+6z-12=0$ і координатних площин.

17. Знайти двогранні кути, утворені перетином таких пар площин:

а) $x+y+\sqrt{2}z-3=0$, $x-y+\sqrt{2}z+4=0$;

б) $6x+3y-2z+5=0$, $x+2y+6z-8=0$;

в) $2x-3y+4z=0$, $6x-9y+12z-3=0$.

18. Написати рівняння площин, що ділять навпіл двогранні кути між площинами $x-2y+5z-11=0$ та $2x+y+5z-5=0$.

Лекція 6. Пряма у просторі та різні види її рівняння

Канонічні рівняння прямої в просторі

Пряму L в просторі однозначно можна задати паралельним їй вектором $\vec{a}=\{l;m;n\}$ і точкою на цій прямій $M_0(x_0;y_0;z_0)$ (рис. 31). Точка $M(x;y;z)$ належить прямій L, якщо вектор

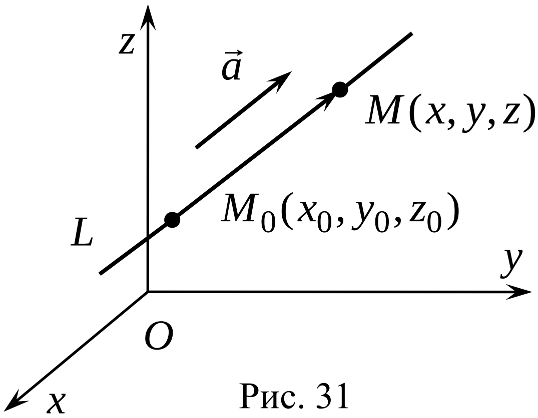


Рис. 31

$\overrightarrow{M_0M}=\{x-x_0;y-y_0;z-z_0\}$ колінеарний вектору $\vec{a}=\{l;m;n\}$. З умови колінеарності двох векторів отримаємо

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}. \quad (53)$$

Ці рівняння називаються *канонічними рівняннями прямої у просторі*. Вектор $\vec{a}=\{l;m;n\}$ – *напрямний вектор прямої* L.

Параметричні рівняння прямої в просторі

Параметричне задання прямої дістанемо із рівностей

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}=t.$$

Маємо

$$\begin{cases} x=lt+x_0, \\ y=mt+y_0, \\ z=nt+z_0. \end{cases} \quad (54)$$

Рівняння (54) – це *параметричні рівняння прямої у просторі*.

Векторно-параметричне рівняння прямої у просторі має такий самий вигляд, які і векторно-параметричне рівняння прямої на площині.

Рівняння прямої в просторі, що проходить через дві точки

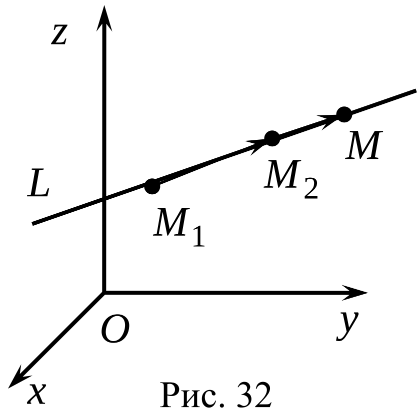


Рис. 32

Якщо $M_1(x_1; y_1; z_1)$ і $M_2(x_2; y_2; z_2)$ – дві точки на прямій (рис. 32), то для довільної точки прямої $M(x; y; z)$, вектори

$$\overrightarrow{M_1M} = \{x - x_1; y - y_1; z - z_1\},$$

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}$$

мають бути паралельними, тобто

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}. \qquad (55)$$

Це *рівняння прямої у просторі, що проходить через дві точки*.

Загальне рівняння прямої в просторі

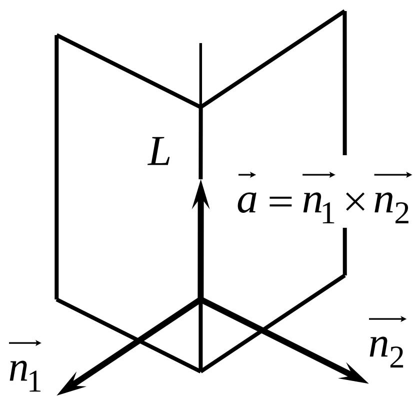


Рис. 33

Пряму L у просторі інакше можна задати як перетин двох непаралельних площин (рис. 33):

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases} \qquad (56)$$

Рівняння (56) називаються *загальними рівняннями прямої у просторі*. Вважається, що нормальні вектори площин $\vec{n}_1 = \{A_1; B_1; C_1\}$ і $\vec{n}_2 = \{A_2; B_2; C_2\}$ не паралельні, інакше площини паралельні, не перетинаються і пряму не задають.

Щоб записати канонічні рівняння (53) прямої L, заданої загальними рівняннями (56), треба знайти координати якої-небудь точки на прямій і напрямний вектор прямої. Для визначення координат точки прямої $M_0(x_0; y_0; z_0)$ можна надати одній з координат довільне значення (наприклад, $z_0 = 0$) і потім знайти значення двох інших координат, розв'язавши систему (56).

Напрямний вектор прямої перпендикулярний до обох нормальних векторів площин $\vec{n}_1=\{A_1;B_1;C_1\}$ і $\vec{n}_2=\{A_2;B_2;C_2\}$, тобто його можна визначити як векторний добуток цих векторів:

$$\vec{a}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ A_1 & B_1 & C_1\\ A_2 & B_2 & C_2\end{vmatrix}.$$

Зауважимо, що дістати канонічні рівняння прямої, знаючи її загальні рівняння, можна іншим способом. Можна знайти дві різні точки на прямій і записати рівняння прямої за двома точками.

Приклад. Написати канонічне рівняння прямої, заданої загальними рівняннями

$$\begin{cases}2x-y+3z+1=0,\\ x+y-2z+2=0.\end{cases}$$

Розв'язок. Надамо значення $z_0=0$, тоді

$$\begin{cases}2x_0-y_0+1=0,\\ x_0+y_0+2=0.\end{cases}$$

Розв'язок системи $x_0=-1$, $y_0=-1$. Отже, точка на прямій $M_0(-1;-1;0)$.

Напрямний вектор прямої

$$\vec{a}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & -1 & 3\\ 1 & 1 & -2\end{vmatrix}=-\vec{i}+7\vec{j}+3\vec{k}.$$

Канонічне рівняння прямої має вигляд

$$\frac{x+1}{-1}=\frac{y+1}{7}=\frac{z}{3}.$$

Кут між прямими – це кут між їхніми напрямними векторами. Прямі паралельні, якщо паралельні їхні напрямні вектори.

Для визначення відстані d (рис. 34) від точки $M(x';y';z')$ до прямої у просторі

$$L:\ \frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n},$$

яка проходить через точку $M_0(x_0;y_0;z_0)$ і паралельна вектору $\vec{a}=\{l;m;n\}$, розглянемо паралелограм, побудований на векторах $\overrightarrow{M_0M}=\{x'-x_0;y'-y_0;z'-z_0\}$ і $\vec{a}=\{l;m;n\}$. Площа такого паралелограма дорівнює, з одного боку, модулю векторного добутку $\left|\overrightarrow{M_0M}\times\vec{a}\right|$, а, з іншого боку, добутку основи $|\vec{a}|$ на висоту d, яка і є відстанню від точки до прямої: $\left|\overrightarrow{M_0M}\times\vec{a}\right|=|\vec{a}|\cdot d$. Отже,

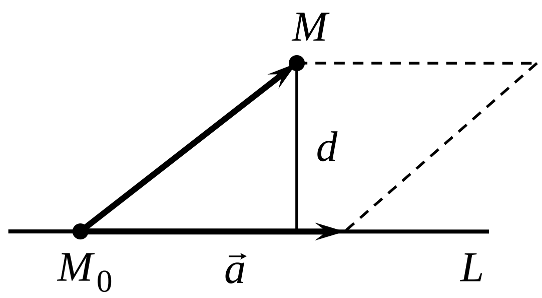


Рис. 34

$$d=\frac{\left|\overrightarrow{M_0M}\times\vec{a}\right|}{|\vec{a}|}. \qquad (57)$$

Це формула *визначення відстані від точки до прямої у просторі*.

Нехай дві прямі задані канонічними рівняннями

$$L_1:\frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1},$$

$$L_2:\frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2}.$$

Умовою того, що дві прямі лежать в одній площині, є компланарність вектора, $\overrightarrow{M_1M_2} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}$, що з'єднує дві точки на цих прямих, і їхніх напрямних векторів $\vec{a}_1 = \{l_1; m_1; n_1\}$ і $\vec{a}_2 = \{l_2; m_2; n_2\}$. Тобто мішаний добуток цих векторів має дорівнювати нулю:

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0. \qquad (58)$$

За цієї умови дві прямі лежать в одній площині, вони можуть бути паралельними, а можуть перетинатися. У разі невиконання умови (58) прямі є мимобіжними.

Приклад. Показати, що прямі

$$L_1 : \frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z}{-1}, \quad L_2 : \frac{x+3}{-2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{-4}$$

є мимобіжними, і знайти відстань між ними.

Розв'язок. Перевіримо умову (58)

$$\begin{vmatrix} -4 & 3 & 2 \\ 1 & -3 & -1 \\ -2 & 1 & -4 \end{vmatrix} = -48 + 6 + 2 - 12 + 12 - 4 = -44 \neq 0.$$

Отже, прямі L_1 і L_2 мимобіжні. Для визначення відстані між ними напишемо рівняння площини P, яка проходить через L_2 і паралельна прямій L_1. Тоді відстань від будь-якої точки прямої L_1 до площин P і буде відстанню між прямими.

Нормальний вектор $\vec{n}$ площини P перпендикулярний до обох напрямних векторів прямих L_1 і L_2. Знайдемо його як векторний добуток цих векторів:

$$\vec{n} = \vec{a}_1 \times \vec{a}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -3 & -1 \\ -2 & 1 & -4 \end{vmatrix} = 13\vec{i} + 6\vec{j} - 5\vec{k}.$$

Пряма L_2 лежить у площині P, тобто точка $M_2(-3; 1; 2)$ лежить у площині P. Напишемо рівняння площини, що проходить через цю точку і перпендикулярна вектору $\vec{n}$ (формула (42)):

$$P:\ 13(x+3) + 6(y-1) - 5(z-2) = 0,$$

$$P:\ 13x + 6y - 5z + 43 = 0.$$

Відстань від точки $M_1(1; -2; 0)$, що лежить на прямій L_1, до площини P визначимо за формулою (46):

$$d = \left| \frac{13 \cdot 1 + 6 \cdot (-2) - 5 \cdot 0 + 43}{\sqrt{(13)^2 + 6^2 + (-5)^2}} \right| = \frac{44}{\sqrt{230}}.$$

Це є відстань між прямими L_1 і L_2.

Розглянемо можливі випадки *взаємного розміщення прямої і площини*. Пряма, задана канонічними рівняннями (53), і площина $Ax + By + Cz + D = 0$ можуть перетинатися, бути паралельними або пряма може лежати в площині.

Перейдемо від канонічних рівнянь (53) до параметричних (54) і підставимо вирази для x, y, z з рівнянь (54) в рівняння площини. Дістанемо рівняння відносно невідомого параметра t:

$$(Al + Bm + Cn)t + (Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D) = 0. \tag{59}$$

Можливі три випадки.

1. При $Al + Bm + Cn \neq 0$ це рівняння має єдиний розв’язок:

$$t = -(Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D)/(Al + Bm + Cn).$$

Підставивши це значення t в параметричні рівняння прямої (54), знайдемо координати точки перетину прямої і площини.

2. При

$$Al + Bm + Cn = 0, \quad Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0 \qquad (60)$$

рівняння (59) не має розв'язку, а пряма не має спільних точок з площиною. Формули (60) є *умовами паралельності прямої і площини*.

3. При

$$Al + Bm + Cn = 0, \quad Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0 \qquad (61)$$

довільне значення t є розв'язком рівняння (59), тобто довільна точка прямої належить площині. Рівності (61) називаються *умовами належності прямої площині*.

Кутом між прямою і площиною називається кут між прямою і проекцією цієї прямої на площину. Нехай площина задана загальним рівнянням

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

а пряма канонічним рівнянням

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}.$$

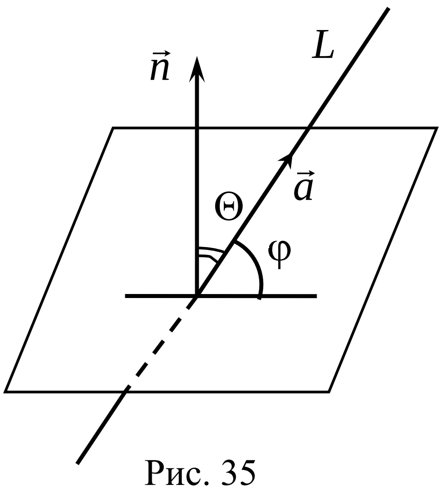


Рис. 35

Позначимо через φ кут між прямою і площиною, а через θ – кут між напрямним вектором прямої $\vec{a} = \{l; m; n\}$ і нормальним вектором площини $\vec{n} = \{A; B; C\}$ (рис. 35). Тоді

$$\cos\theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{n}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{n}|}.$$

Оскільки $\varphi + \theta = \dfrac{\pi}{2}$, то $\sin\varphi = \cos\theta$. Враховуючи, що $\sin\varphi \geq 0$, дістанемо

$$\sin\varphi = \frac{|\vec{a}\cdot\vec{n}|}{|\vec{a}|\cdot|\vec{n}|} = \frac{|Al + Bm + Cn|}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}\cdot\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \qquad (62)$$

Приклад. Задано загальне рівняння площини $x + y - 2z + 1 = 0$ і канонічні рівняння прямої

$$\frac{x-1}{-2} = \frac{y}{-1} = \frac{z+1}{3}.$$

Знайти кут між площиною і прямою і координати точки перетину прямої і площини.

Нормальний вектор площини $\vec{n} = \{1; 1; -2\}$, напрямний вектор прямої $\vec{a} = \{-2; -1; 3\}$. Синус кута φ між прямою і площиною знайдемо за формулою (58):

$$\sin\varphi = \frac{|\vec{a}\cdot\vec{n}|}{|\vec{a}|\cdot|\vec{n}|} = \frac{|1\cdot(-2) + 1\cdot(-1) + (-2)\cdot 3|}{\sqrt{(-2)^2 + (-1)^2 + 3^2}\cdot\sqrt{1^2 + 1^2 + (-2)^2}} = \frac{9}{\sqrt{84}}.$$

Отже, $\varphi = arc\sin\dfrac{9}{\sqrt{84}}$.

Для знаходження координат точки перетину прямої і площини скористаємося параметричними рівняннями прямої.

$$\frac{x-1}{-2} = \frac{y}{-1} = \frac{z+1}{3} = t.$$

Звідси параметричні рівняння

$$\begin{cases} x = -2t + 1, \\ y = -t, \\ z = 3t - 1. \end{cases}$$

Для визначення значення параметра t, яке відповідає точці перетину прямої і площини, підставимо параметричні рівняння у рівняння площини:

$$-2t+1-t-2(3t-1)+1=0, \quad -9t+4=0, \quad t=\frac{4}{9}.$$

Підставляючи знайдене значення $t=\dfrac{4}{9}$ в параметричні рівняння, дістанемо $x=\dfrac{1}{9}$, $y=-\dfrac{4}{9}$, $z=\dfrac{1}{3}$. Отже, $M\left(\dfrac{1}{9};-\dfrac{4}{9};\dfrac{1}{3}\right)$ – точка перетину прямої і площини.

Приклад. Знайти координати точки M_2, яка симетрична точці $M_1(3;-2;4)$ відносно площини $x+y+z-8=0$.

Запишемо рівняння прямої, яка проходить через точку M_1 перпендикулярно до заданої площини (рис. 36). Це буде пряма M_1M_2, на якій лежить точка M_2 симетрична точці M_1 відносно площини. Вектор нормалі площини $\vec{n}=\{1;1;1\}$ є напрямним вектором для прямої M_1M_2. Тому параметричні рівняння (див. (54)) прямої M_1M_2 мають вигляд:

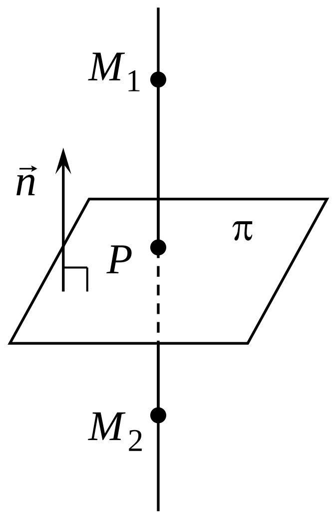


Рис. 36

$$x=t+3, \quad y=t-2, \quad z=t+4.$$

Знайдемо точку P перетину прямої M_1M_2 з площиною $x+y+z-8=0$:

$$t+3+t-2+t+4-8=0,$$

$$3t-3=0, \; t=1.$$

Звідси $P(4;-1;5)$.

Нехай $M_2(x_2;y_2;z_2)$. Оскільки точка P є серединою відрізка M_1M_2, то справедливі рівності:

$$\frac{3+x_2}{2}=4, \quad \frac{-2+y_2}{2}=-1, \quad \frac{4+z_2}{2}=5,$$

з яких знаходимо координати точки $M_2(5;0;6)$.

Приклад. Доведіть, що прямі

$$L_1:\begin{cases} x=3t-4, \\ y=-2t+1, \\ z=t+3, \end{cases} \text{ і } L_2:\begin{cases} x=2t-5, \\ y=-3t+5, \\ z=4t-4. \end{cases}$$

перетинаються. Знайти рівняння площини, в якій вони розміщені.

Розв'язок. Розглянемо напрямні вектори $\vec{a}_1=\{3;-2;1\}$, $\vec{a}_2=\{2;-3;4\}$ та точки $M_1(-4;1;3)$, $M_2(-5;5;-4)$ прямих L_1 та L_2 відповідно. Умовою перетину двох прямих в просторі є компланарність векторів $\overrightarrow{M_1M_2}, \vec{a}_1, \vec{a}_2$ (рис. 37), тобто виконання рівності $(\overrightarrow{M_1M_2}, \vec{a}_1, \vec{a}_2)=0$. Знаходимо $\overrightarrow{M_1M_2}=\{-1;4;-7\}$ та

$$(\overrightarrow{M_1M_2}, \vec{a}_1, \vec{a}_2)=\begin{vmatrix} -1 & 4 & -7 \\ 3 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -1 & 4 & -7 \\ 0 & 10 & -20 \\ 0 & 5 & -10 \end{vmatrix}=0.$$

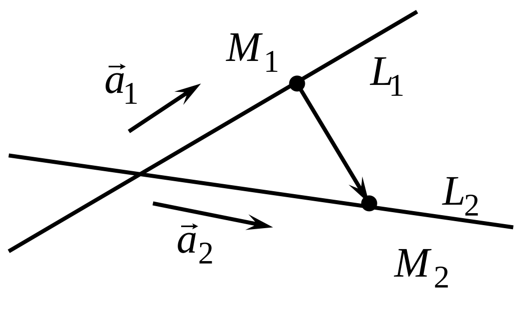


Рис. 37

Отже, прямі L_1 та L_2 перетинаються.

Площина, в якій розміщені прямі L_1 та L_2, паралельна векторам $\vec{a}_1$ та $\vec{a}_2$ і проходить через точку $M_1(-4;1;3)$. За вектор нормалі візьмемо вектор

$$\vec{N} = [\vec{a}_1, \vec{a}_2] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \end{vmatrix} = -5\vec{i} - 10\vec{j} - 5\vec{k}.$$

За формулою (42) запишемо рівняння шуканої площини

$$-5(x+4) - 10(y-1) - 5(z-3) = 0.$$

Після спрощень отримаємо рівняння $x + 2y + z - 1 = 0$.

Контрольні запитання

1. Запишіть канонічні і параметричні рівняння прямої у просторі.
2. Виведіть рівняння прямої, що проходить через дві точки.
3. Як визначається відстань від точки до прямої?
4. Як знайти кут між прямою і площиною?
5. Як визначається взаємне розміщення двох прямих у просторі?
6. Як визначається взаємне розміщення прямої в просторі і площини?

Вправи

1. Записати канонічні та параметричні рівняння прямої, яка проходить через точку $M_0(3;0;-2)$ паралельно: а) вектору $\vec{a} = (4;-3;5)$; б) прямій $\dfrac{x-2}{5} = \dfrac{y+1}{3} = \dfrac{z+4}{-1}$; в) осі Ox, г) осі Oy; д) осі Oz.

2. Записати канонічні та параметричні рівняння прямої, яка проходить через точки $M_1(1;-2;3)$ і $M_2(-3;1;4)$. Знайти точку A перетину прямої з площиною Oxy.

3. Записати параметричні рівняння прямої, яка перпендикулярна площині $x + 2y - 1 = 0$ та проходить через точку $M_0(2;-1;3)$.

4. Записати параметричні рівняння прямої

$$\begin{cases} x-2y+3z-4=0, \\ 3x+2y-5z-4=0. \end{cases}$$

5. Знайти координати точки Q, що є проекцією точки $P(2;-5;7)$ на пряму L, яка проходить через точки $M_1(5;4;6)$ та $M_2(-2;-17;-8)$. Знайти точку S, симетричну точці P відносно цієї прямої.

6. Знайти координати точки S, що симетрична точці $P(-3;1;-9)$ відносно площини $4x-3y-z-7=0$.

7. Знайти відстань між паралельними прямими $x=2+4t$, $y=-6t$, $z=-1-8t$ і $x=7-6t$, $y=2+9t$, $z=12t$.

8. Знайти відстань між мимобіжними прямими $x=2t-4$, $y=-t+4$, $z=-2t-1$ та $x=4t-5$, $y=-3t+5$, $z=-5t+5$.

9. Знайти кут між прямою

$$\begin{cases} x-2y+3=0, \\ 3y+z-1=0 \end{cases}$$

і площиною $2x+3y-z+1=0$.

10. При якому значенні A площина $Ax+3y-6z+1=0$ паралельна прямій $\frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{4}=\frac{z}{1}$.

11. При яких значеннях m і C пряма

$$\frac{x+5}{m}=\frac{y-1}{6}=\frac{z+2}{-1}$$

перпендикулярна до площини $2x-3y+Cz+7=0$.

12. Показати, що пряма

$$\frac{x}{-6}=\frac{y-3}{8}=\frac{z-1}{9}$$

паралельна площині $x+3y-2z+1=0$, а пряма $x=t+7,\ y=t-2,\ z=2t+1$ лежить в цій площині.

13. Записати рівняння площини, яка проходить через пряму

$$\frac{x-2}{5}=\frac{y-3}{1}=\frac{z+1}{2}$$

перпендикулярно до площини $x+4y-3z+7=0$.

14. Записати канонічні рівняння прямої, що проходить через точку $M_0(-4;-5;3)$ та перетинає дві прямі:

$$\frac{x+1}{3}=\frac{y+3}{-2}=\frac{z-2}{-1}, \text{ і } \frac{x-2}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-1}{-5}.$$

15. Записати рівняння площини, що проходить через паралельні прямі

$$\frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-3}{-2}, \frac{x-1}{3}=\frac{y-2}{2}=\frac{z+3}{-2}.$$

16. Дано вершини трикутника $A(-2;-1;-1)$, $B(-2;3;-2)$, $C(4;1;7)$. Знайти параметричні рівняння висоти, опущеної з вершини C.

17. Записати рівняння площини, що проходить через пряму

$$\begin{cases} 2x-y-4z+2=0, \\ 4x-y-5z+4=0 \end{cases}$$

перпендикулярно площині $2x-3y+z-11=0$. Знайти відстань від точки $M(1;2;1)$ до отриманої площини.

Тема 4. Криві другого порядку на площині

Лекція 7. Загальне рівняння кривої другого порядку. Класифікація кривих другого порядку. Еліпс, канонічне рівняння еліпса

Означення. *Алгебраїчною кривою другого порядку на площині* називається геометричне місце точок площини, які в прямокутній декартовій системі координат задовольняють алгебраїчне рівняння другого порядку:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0, \qquad (63)$$

де a_{ij} – дійсні числа і принаймні одне з чисел a_{11}, a_{12}, a_{22} не дорівнює нулю.

Розглянемо два визначники

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} \quad \text{і} \quad \delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}. \qquad (64)$$

Визначник Δ називається *дискримінант рівняння* (63), визначник δ – *дискримінантом старших членів рівняння*.

Якщо $\delta \neq 0$, крива називається *центральною*: при $\delta > 0$ це крива *еліптичного типу*, при $\delta < 0$ – *гіперболічного типу*. Якщо $\delta = 0$ крива називається *нецентральною* кривою і має *параболічний тип*.

Твердження. За допомогою переносу початку системи координат і повороту системи координат у загальному рівнянні кривої другого порядку (63) можна позбутися лінійних членів і доданку, що містить добуток *xy*. Після названих перетворень системи координат дістанемо:

1) якщо $\delta > 0$, рівняння має еліптичний тип і

при $\Delta \neq 0$ це є еліпс $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1, \quad a \geq b > 0$,

при $\Delta = 0$ це є точка $x^2 + y^2 = 0$;

2) якщо $\delta < 0$, рівняння має гіперболічний тип і

при $\Delta \neq 0$ це є гіпербола $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a \geq b > 0$,

при $\Delta = 0$ це є пара прямих, що перетинаються

$$a^2x^2 - b^2y^2 = 0, \quad a, b > 0;$$

3) якщо $\delta = 0$, рівняння має параболічний тип і

при $\Delta \neq 0$ це є парабола $y^2 = 2px, \quad p > 0$,

при $\Delta = 0$ це є пара паралельних прямих

$x^2 - a^2 = 0, a \geq 0$

(при $a = 0, \quad x^2 = 0$ пара прямих, що співпадають).

Можуть бути уявні криві:

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$ уявний еліпс,

$x^2 = -a^2$ пара уявних паралельних прямих.

Розглянемо властивості невироджених кривих другого порядку – еліпса , гіперболи і параболи.

Еліпс. Канонічне рівняння еліпса

Означення. *Еліпсом* називається геометричне місце точок площини, сума відстаней яких до двох фіксованих точок, які називаються *фокусами*, є величина стала і більша відстані між фокусами.

Щоб отримати канонічне рівняння еліпса, вважатимемо, що фокуси F_1 і F_2 розташовані на осі Ox на рівній відстані від початку координат, тобто $F_1(-c; 0)$ і $F_2(c; 0)$, де c – певне задане дійсне число (рис. 38). Суму відстаней від довільної точки еліпса $M(x; y)$ до фокусів позначимо через $2a$, тобто

$$|MF_1|+|MF_2|=\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a\,.$$

Відрізки $|MF_1|$ і $|MF_2|$ називаються *фокальними радіусами точки* M .

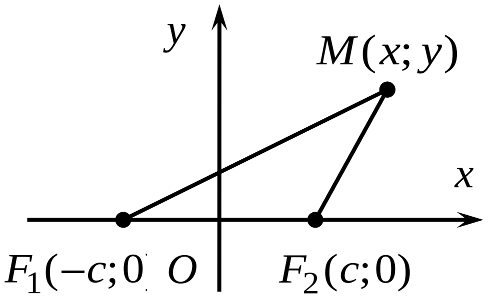


Рис. 38

Спростимо рівняння

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2}\,;$$

$$(x+c)^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2;$$

$$x^2+2xc+c^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+x^2-2xc+c^2+y^2\,;$$

$$4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}=4a^2-4xc;$$

$$a\sqrt{(x-c)^2+y^2}=a^2-xc;$$

$$a^2((x-c)^2+y^2)=a^4-2a^2xc+x^2c^2\,;$$

$$a^2x^2-2a^2xc+a^2c^2+a^2y^2=a^4-2a^2xc+x^2c^2;$$

$$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2)\,.$$

За умовою існування еліпса $a>c$. Позначимо $a^2-c^2=b^2$, тоді

$$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$$

або

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1. \qquad (65)$$

Це рівняння називається *канонічним рівнянням еліпса*.

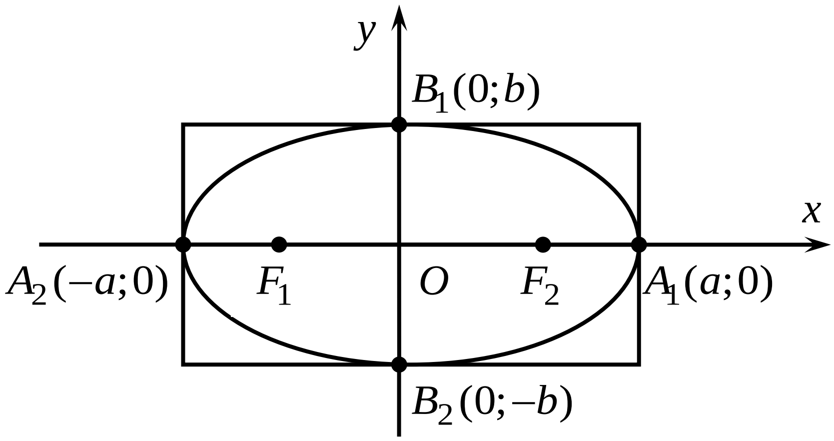


Рис. 39

Якщо $a=b$ рівняння (65) набирає вигляду $x^2+y^2=a^2$ і еліпс є *колом* радіуса $R=a$ з центром у початку координат.

У деяких задачах зручніше користуватися *параметричними рівняннями еліпса*:

$$\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = a\sin t. \end{cases} \tag{66}$$

Канонічне рівняння еліпса (65) містить змінні x і y у парних степенях, отже, еліпс є фігурою, симетричною відносно осей Ox і Oy і точки $O(0;0)$, яка називається *центром еліпса* (рис. 39). Точки $A_1(a;0)$, $A_2(-a;0)$, $B_1(0;b)$, $B_2(0;-b)$, в яких еліпс перетинає осі координат, називаються *вершинами еліпса*. Відрізки A_1A_2 і B_1B_2, а також їхні довжини $2a$ і $2b$ називаються відповідно *великою* і *малою осями еліпса*. Числа a і b називаються відповідно *великою* і *малою півосями еліпса*.

Означення. *Ексцентриситетом* еліпса ε називається відношення половини відстані між фокусами до більшої півосі, тобто

$$\varepsilon = \frac{c}{a}. \tag{67}$$

Для еліпса $0<\varepsilon<1$. Ексцентриситет характеризує форму еліпса, його міру "сплющеності". Справді,

$$\frac{b}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{a} = \sqrt{\frac{a^2 - c^2}{a^2}} = \sqrt{1 - \frac{c^2}{a^2}} = \sqrt{1 - \varepsilon^2}.$$

Тобто чим менший ексцентриситет, тим менше "сплющений" еліпс. Зокрема, для кола $\varepsilon = 0$.

Вертикальні прямі

$$x = \pm \frac{a}{\varepsilon}.$$

називаються *директрисами еліпса*. Оскільки для еліпса $0 < \varepsilon < 1$, директриси розташовані поза еліпсом.

З директрисами пов'язана *характеристична властивість еліпса*. Позначимо через $r_1 = MF_1$ і $r_2 = MF_2$ фокальні радіус-вектори точки $M(x; y)$, а через d_1 і d_2 – відстані точки до відповідних директрис (рис. 40). Тоді для всіх точок еліпса

$$\frac{r_1}{d_1} = \frac{r_2}{d_2} = \varepsilon \tag{68}$$

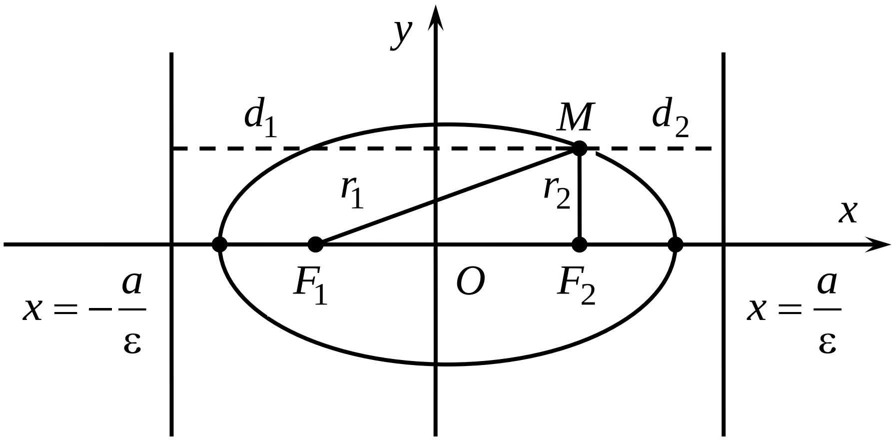


Рис. 40

Зауважимо, що ця характеристична властивість еліпса не є властивістю кола, оскільки коло не має директрис.

У випадку, коли $a < b$, більша вісь еліпса $2b$ лежить на осі Oy, а менша $2a$ – на осі Ox (рис. 41). Фокуси еліпса знаходяться на більшій осі у точках з координатами $F_1(0; c)$ і $F_2(0; -c)$, де $c^2 = b^2 - a^2$.

Ексцентриситет рівний $\varepsilon = \dfrac{c}{b}$, а директриси мають рівняння $y = \pm \dfrac{b}{\varepsilon}$.

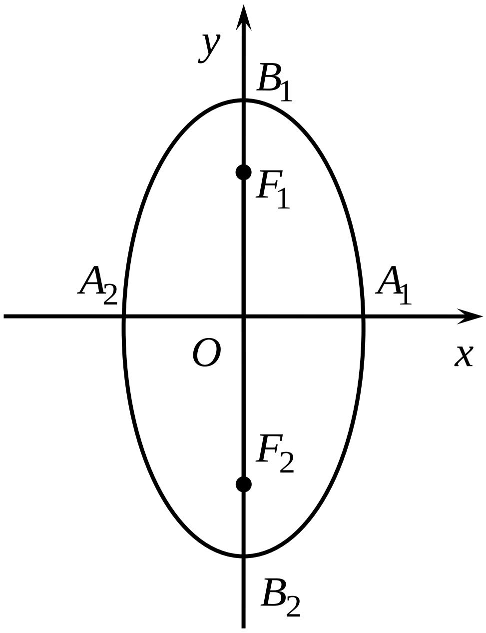


Рис. 41

Рівняння дотичної прямої до еліпса $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ у точці $M_0(x_0; y_0)$ має вигляд

$$\frac{x_0}{a^2}x + \frac{y_0}{b^2}y = 1.$$

Оптична властивість еліпса: промінь світла, що виходить із одного з фокусів еліпса, після відбиття від еліпса потрапляє в інший фокус.

Лекція 8. Гіпербола та парабола

Гіпербола. Канонічне рівняння гіперболи

Означення. *Гіперболою* називається геометричне місце точок площини, модуль різниці відстаней яких до двох фіксованих точок, які називаються *фокусами*, є величина стала і менша відстані між фокусами.

Щоб отримати канонічне рівняння гіперболи вважатимемо, що фокуси F_1 і F_2 розташовані на осі Ox на рівній відстані від початку координат, тобто $F_1(-c;0)$ і $F_2(c;0)$, де c – певне задане дійсне число (рис. 42).

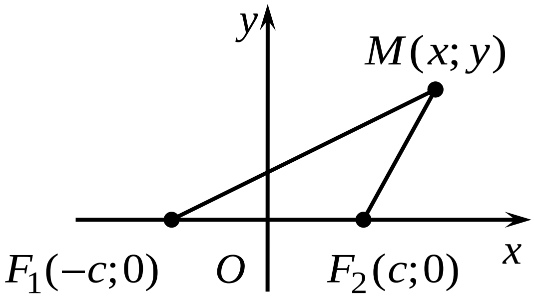


Рис. 42

Нехай $M(x;y)$ – точка гіперболи. Відрізки MF_1 і MF_2 називаються *фокальними радіусами точки* M. Модуль різниці відстаней довільної точки гіперболи до фокусів позначимо через $2a$, тобто

$$\left||MF_1|-|MF_2|\right|=\left|\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}\right|=2a.$$

Позначимо $b^2=c^2-a^2$ (із означення гіперболи $c>a$) і після спрощень дістанемо

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1. \qquad (69)$$

Це рівняння називається *канонічним рівнянням гіперболи*.

Рівняння гіперболи (69) містить змінні x і y у парних степенях, отже, гіпербола симетрична відносно осей Ox і Oy та точки $O(0;0)$, яка називається *центром гіперболи*. Гіпербола перетинає вісь Ox у точках $A_1(a;0)$, $A_2(-a;0)$, які називаються *вершинами гіперболи* (рис. 43). Вісь Oy гіпербола не перетинає. Відрізок $A_1A_2=2a$ називається *дійсною віссю гіперболи*, а відрізок $B_1B_2=2b$ – *уявною віссю гіперболи*. Числа a і b називають відповідно *дійсною і уявною півосями гіперболи.* Прямокутник з центром у початку координат і сторонами $2a$ і $2b$, паралельними осям, називається *головним прямокутником гіперболи*.

Гіпербола має дві гілки: *права гілка* розташована справа від прямої $x = a$, а *ліва гілка* – зліва від прямої $x = -a$. Прямі

$$y = \pm \frac{b}{a} x$$

є *асимптотами гіперболи*, які проходять через вершини головного прямокутника гіперболи.

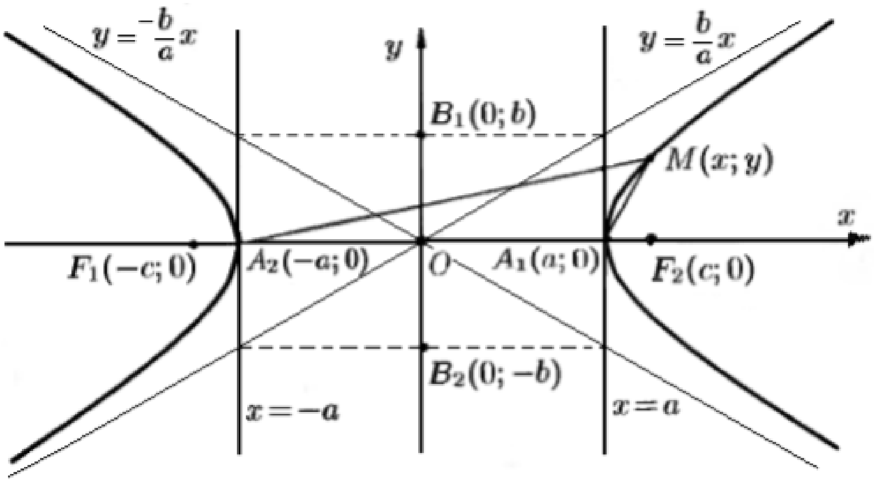


Рис. 43

Означення. *Ексцентриситетом* гіперболи ε називається відношення половини відстані між фокусами до дійсної півосі, тобто

$$\varepsilon = \frac{c}{a}. \tag{70}$$

Для гіперболи $\varepsilon > 1$. Ексцентриситет характеризує форму гіперболи:

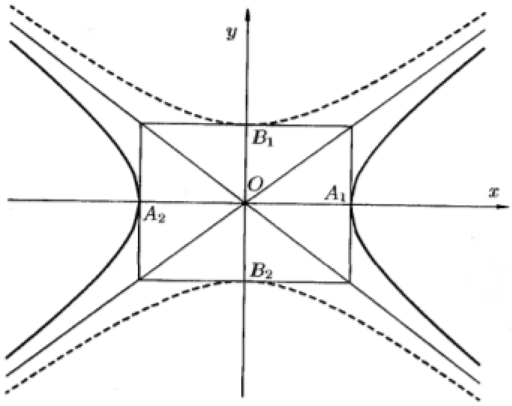
$$\frac{b}{a} = \sqrt{\varepsilon^2 - 1},$$

тобто чим менший ексцентриситет, тим більше "розтягнутий" головний прямокутник гіперболи.

Якщо $b = a$, гіпербола називається *рівнобічною* і її рівняння має вигляд

$$x^2 - y^2 = a^2.$$

Асимптоти рівнобічної гіперболи $y = \pm x$ є бісектрисами координатних кутів. Ексцентриситет рівнобічної гіперболи $\varepsilon = \sqrt{2}.$



Прямі $x = \pm \frac{a}{\varepsilon}.$ називаються *директрисами гіперболи*. Оскільки для гіперболи $\varepsilon > 1,$ директриси розташовані між вершинами гіперболи.

Як і для еліпса, з поняттям директриси пов'язана *характеристична властивість гіперболи*. Якщо $r_1 = |MF_1|$ і $r_2 = |MF_2|$ – фокальні радіус-вектори точки $M(x;\, y),$ а d_1 і d_2 – відстані цієї точки до відповідних директрис, то

$$\frac{r_1}{d_1} = \frac{r_2}{d_2} = \varepsilon. \tag{71}$$

Гіпербола

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$$

називається *спряженою* до гіперболи (рис. 44)

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Рис. 44

Ці дві гіперболи мають спільні асимптоти. Дійсна вісь спряженої гіперболи $2b$ розташована на осі Oy, а уявна вісь $2a$ – на осі Ox. На рисунку спряжена гіпербола зображена пунктирною лінією.

Дотична пряма до гіперболи $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$ у точці $M_0(x_0; y_0)$ визначається рівнянням

$$\frac{x_0}{a^2}x-\frac{y_0}{b^2}y=1.$$

Оптична властивість гіперболи: якщо в одному з фокусів гіперболи знаходиться джерело світла, то після відображення від гіперболи промені утворюють розбіжний пучок з центром в іншому фокусі.

Парабола. Канонічне рівняння параболи

Означення. *Параболою* називається геометричне місце точок площини, рівновіддалених від фіксованої точки, яка називається *фокусом*, та фіксованої прямої, яка називається *директрисою*.

Відстань p від фокуса до директриси параболи називається *параметром параболи*.

Щоб отримати канонічне рівняння параболи вважатимемо, що фокус знаходиться на осі Ox в точці $F\left(\frac{p}{2};0\right)$, а директриса перпендикулярна осі Ox і має рівняння $x=\frac{p}{2}$ (рис. 45).

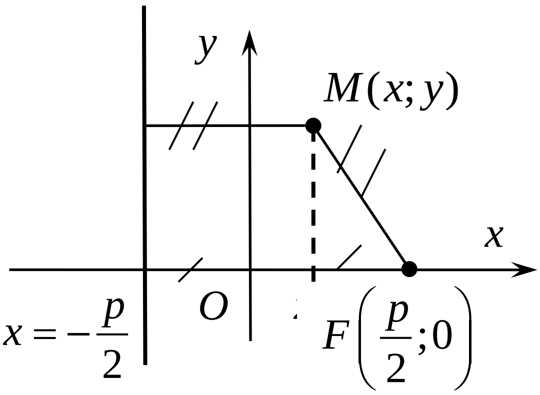


Рис. 45

Для точки параболи $M(x;y)$ довжина відрізка MF називається *фокальним радіусом точки.* Із означення параболи випливає, що для її точок фокальний радіус дорівнює відстані точки до директриси:

$$\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}=\left|x+\frac{p}{2}\right|.$$

Після піднесення до квадрату і спрощень дістанемо

$$y^2 = 2px. \qquad (72)$$

Це рівняння називається *канонічним рівнянням параболи* (рис. 46).

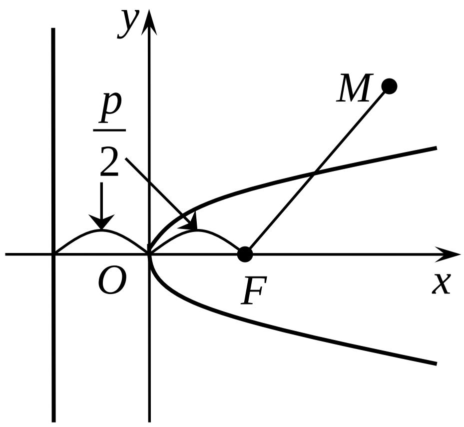


Рис. 46

Із рівняння видно, що парабола проходить через початок координат $O(0;0)$, симетрична відносно осі Ox і розташована справа від осі Oy. Точка $O(0;0)$ називається *вершиною параболи*.

Дотична до параболи $y^2 = 2px$ у точці $M_0(x_0;y_0)$ визначається рівнянням

$$yy_0 = p(x + x_0).$$

Оптична властивість параболи. Якщо джерело світла знаходиться у фокусі параболи, то промені відображаються від параболи паралельно її осі. І навпаки, промені, спрямовані паралельно осі параболи, після відображення від параболи збираються у її фокусі.

Узагальнюючи характеристичні властивості еліпса і гіперболи, а також означення параболи, дамо таке загальне означення кривої другого порядку (на коло і вироджені криві це означення не поширюється).

Означення. *Кривою другого порядку на площині* називається геометричне місце точок, відношення відстаней кожної з яких до фіксованої точки (фокуса) і до фіксованої прямої (директриси) є величина стала: $\frac{r}{d} = \varepsilon$. При $\varepsilon < 1$ крива є еліпсом, при $\varepsilon > 1$ – гіперболою, при

$\varepsilon = 1$ – параболою.

В полярній системі координат рівняння еліпса, гіперболи і параболи мають вигляд

$$\rho = \frac{p}{1 - \varepsilon \cos\varphi},$$

де для параболи p – параметр параболи, для еліпса і гіперболи $p = \frac{b^2}{a}$.

При $\varepsilon < 1$ крива є еліпсом, при $\varepsilon > 1$ – гіперболою, при $\varepsilon = 1$ – параболою.

Лекція 9. Приведення загального рівняння кривої другого порядку до канонічного виду

Вже зазначалося, що при приведенні загального рівнянні кривої другого порядку

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0 \qquad (73)$$

до канонічного виду шляхом переносу початку системи координат можна позбутися лінійних доданків рівняння і шляхом повороту системи координат – позбутися доданку, що містить добуток xy.

З рівнянням (73) розглядаються дискримінант рівняння Δ і дискримінант старших членів δ:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} \quad \text{і} \quad \delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}. \qquad (74)$$

Припустимо спочатку, що $\delta \neq 0$, тобто крива центральна. В цьому разі для переносу початку системи координат в центр симетрії кривої робиться заміна

$$\begin{cases} x = x_0 + x', \\ y = y_0 + y'. \end{cases} \qquad (75)$$

Підставивши вирази (75) у рівняння (73) і прирівнявши нулю коефіцієнти при x' і y', дістанемо систему рівнянь відносно координат нового початку системи координат x_0 і y_0:

$$\begin{cases} a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13} = 0, \\ a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23} = 0. \end{cases} \tag{76}$$

Оскільки визначник цієї системи $\delta \neq 0$, координати x_0 і y_0 знаходяться однозначно. В результаті рівняння кривої спрощується і набирає вигляду

$$a_{11}x'^2 + 2a_{12}x'y' + a_{22}y'^2 + \frac{\Delta}{\delta} = 0. \tag{77}$$

Квадратичною формою від набору змінних $x_1, x_2, \ldots, x_n$ називається вираз виду

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j \text{, де } a_{ij} = a_{ji} \text{ для } \forall\, i, j.$$

Симетрична матриця $(a_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$ називається *матрицею квадратичної форми*.

Симетричним (*самоспряженим*) *лінійним оператором* у векторному просторі називається такий оператор $\boldsymbol{A}$, що $(\boldsymbol{A}x,y)=(x,\boldsymbol{A}y)$.

Симетричну матрицю квадратичної форми можна розглядати як матрицю симетричного оператора у канонічному ортонормованому базисі $e_1 = (1;0;\ldots;0), e_2 = (0;1;\ldots;0), \ldots, e_n = (0;0;\ldots;1)$. Зокрема, квадратичній формі від двох змінних

$$a_{11}x'^2 + 2a_{12}x'y' + a_{22}y'^2$$

у виразі (73) відповідає симетрична матриця

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}, \tag{78}$$

яка є матрицею симетричного оператора у канонічному ортонормованому базисі $e_1 = (1;0),\ e_2 = (0;1)$.

Твердження. Симетричний оператор має власний ортонормований базис, у якому він записується діагональною матрицею з власними числами по діагоналі.

Тобто у власному (складеному із власних векторів) ортонормованому базисі квадратична форма має діагональний вид із власними числами по діагоналі і коефіцієнт при добутку xy дорівнює нулю.

Лінійний оператор називається *ортогональним*, якщо він зберігає скалярний добуток: $(\boldsymbol{A}x,\boldsymbol{A}y)=(x,y)$. Це означає, що при такому відображенні зберігається довжина вектора і кут між векторами.

Твердження. Якщо оператор переводить ортонормований базис у ортонормований, то він ортогональний.

Отже, *для приведення квадратичної форми із симетричною матрицею* (*78*) *до діагонального виду треба знайти власні вектори симетричного оператора, що задається цією матрицею, нормувати їх, записати матрицю переходу і зробити заміну змінних*.

Зауваження. Для квадратичної форми від двох змінних власні значення оператора будуть різними, отже, власні вектори будуть ортогональним. У разі однакових власних значень матриця матиме діагональний вигляд.

При знаходженні власних векторів допустима перенумерація векторів і множення вектора на (–1). Матриця переходу до системи координат, в якій квадратична форма має канонічний вигляд складається з ортонормованого базису власних векторів матриці A вигляду $v_1^н = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, $v_2^н = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$:

$$T = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

Саме ці вектори визначають напрямок нових координатних осей Ox'', Oy''.

Із умови ортонормованості векторів легко бачити, що матриця переходу можна записати у вигляді

$$T = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}, \qquad (79)$$

тобто є матрицею оператора повороту системи координат проти годинникової стрілки на кут φ. Кут φ знаходиться з умови

$$tg\, 2\varphi = \frac{2a_{12}}{a_{11} - a_{22}} \quad (0 < \varphi < \frac{\pi}{2}).$$

Перехід до нової системи координат відповідає множенню на матрицю переходу:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix}. \qquad (80)$$

У разі, коли $\delta = 0$ і крива нецентральна, спочатку приводиться квадратична форма

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2$$

рівняння (73) до діагонального виду (при цьому, оскільки $\delta = 0$, один з коефіцієнтів при квадратах невідомих дорівнюватиме нулю), а потім виконується паралельний перенос осей.

Приклад. Привести до канонічного виду рівняння кривої другого порядку

$$9x^2 - 4xy + 6y^2 + 16x - 8y - 2 = 0.$$

Запишемо для даної кривої дискримінанти δ та Δ:

$$\delta = \begin{vmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} = 50 > 0, \quad \text{і} \quad \Delta = \begin{vmatrix} 9 & -2 & 8 \\ -2 & 6 & -4 \\ 8 & -4 & -2 \end{vmatrix} = -500 \neq 0.$$

Отже, крива є еліпсом (п.п. 5.1). Для знаходження нового початку координат запишемо систему (76):

$$\begin{cases} 9x_0 - 2y_0 + 8 = 0, \\ -2x_0 + 6y_0 - 4 = 0. \end{cases}$$

Ця система має розв'язок $x_0 = -\frac{4}{5}$, $y_0 = \frac{2}{5}$. Отже, після переносу системи координат початок координат знаходиться у точці $O'\left(-\frac{4}{5}; \frac{2}{5}\right)$, а рівняння у нових координатах набирає вигляду (77):

$$9x'^2 - 4x'y' + 6y'^2 - 10 = 0.$$

Для приведення квадратичної форми

$$9x'^2 - 4x'y' + 6y'^2$$

до діагонального виду знайдемо власні значення і власні вектори симетричної матриці

$$A = \begin{pmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix},$$

нормуємо власні вектори і запишемо матрицю переходу до власного ортонормованого базису.

Характеристичне рівняння має вигляд

$$\begin{vmatrix} 9-\lambda & -2 \\ -2 & 6-\lambda \end{vmatrix} = 0, \text{ або } (9-\lambda)(6-\lambda) - 4 = 0, \quad \lambda^2 - 15\lambda + 50 = 0.$$

Власні значення є коренями цього рівняння $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = 10$.

Для $\lambda_1 = 5$ маємо однорідну систему $(A - \lambda_1 E)v = 0$ з матрицею

$$\left(\begin{array}{cc|c} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Знайдемо фундаментальну систему розв'язків (базис простору розв'язків) однорідної системи:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right). \quad \begin{cases} x_1 = c \in \mathbf{R}, \\ x_2 = 2x_1. \end{cases}$$

Отже, маємо власний вектор $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Для $\lambda_2 = 10$ маємо однорідну систему $(A - \lambda_2 E)v = 0$ з матрицею

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & -2 & 0 \\ -2 & -4 & 0 \end{array}\right).$$

Знайдемо фундаментальну систему розв'язків (базис простору розв'язків) однорідної системи:

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & -2 & 0 \\ -2 & -4 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ -2 & -4 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right). \qquad \begin{cases} x_1 = -2x_2, \\ x_2 = c \in \mathbf{R}. \end{cases}$$

Отже, маємо власний вектор $v_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Нормовані власні вектори:

$$v_1^{н} = \frac{1}{|\,f_1\,|} v_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} \end{pmatrix}, \qquad v_2^{н} = \frac{1}{|\,f_2\,|} v_2 = \begin{pmatrix} -2/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \end{pmatrix}.$$

Матриця переходу

$$T = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{pmatrix}.$$

Отже,

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix},$$

$$\begin{cases} x' = \dfrac{1}{\sqrt{5}} x'' - \dfrac{2}{\sqrt{5}} y'', \\ y' = \dfrac{2}{\sqrt{5}} x'' + \dfrac{1}{\sqrt{5}} y''. \end{cases}$$

Підставивши отримані вирази в рівняння, після спрощень дістанемо

$$5x''^2 + 10y''^2 = 10,$$

тобто у базисі з власних векторів матриця квадратичної форми має діагональний вигляд з власними числами по діагоналі. Поділивши на 10, остаточно матимемо канонічне рівняння еліпса

$$\frac{x''^2}{2} + y''^2 = 1.$$

Приклад. Привести до канонічного виду рівняння кривої другого порядку

$$9x^2 + 12xy + 4y^2 - 19x - 17y + 11 = 0.$$

Розв’язок. Для цієї кривої

$$\delta = \begin{vmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} = 0.$$

Отже, крива нецентральна.

Спочатку виконаємо поворот системи координат. Для приведення квадратичної форми

$$9x^2 + 12xy + 6y^2$$

до діагонального виду знайдемо власні значення і власні вектори симетричної матриці

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$$

і запишемо матрицю переходу до власного ортонормованого базису.

Характеристичне рівняння має вигляд

$$\begin{vmatrix} 9-\lambda & 6 \\ 6 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0, \text{ або } (9-\lambda)(4-\lambda)-36=0, \quad \lambda^2-13\lambda=0.$$

Отже, $\lambda_1 = 13, \ \lambda_2 = 0.$

Для $\lambda_1 = 13$ маємо однорідну систему $(A-\lambda_1 E)v = 0$ з матрицею

$$\left(\begin{array}{cc|c} -4 & 6 & 0 \\ 6 & -9 & 0 \end{array}\right).$$

Знайдемо фундаментальну систему розв'язків (базис простору розв'язків) однорідної системи:

$$\left(\begin{array}{cc|c} -4 & 6 & 0 \\ 6 & -9 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -3 & 0 \\ 6 & -9 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x_1 = 3/2 x_2, \\ x_2 = c \in \mathbf{R}. \end{cases}$$

Отрже, маємо власний вектор $v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$

Для $\lambda_2 = 0$ маємо однорідну систему $(A-\lambda_2 E)v = 0$ з матрицею

$$\left(\begin{array}{cc|c} 9 & 6 & 0 \\ 6 & 4 & 0 \end{array}\right),$$

Знайдемо фундаментальну систему розв'язків (базис простору розв'язків) однорідної системи:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 9 & 6 & 0 \\ 6 & 4 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

$$\begin{cases} x_1 = -2/3 x_2, \\ x_2 = c \in \mathbf{R}. \end{cases}$$

Отже, маємо власний вектор $v_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Нормовані власні вектори:

$$v_1^н = \frac{1}{|v_1|} v_1 = \begin{pmatrix} 3/\sqrt{13} \\ 2/\sqrt{13} \end{pmatrix}, \quad v_2^н = \frac{1}{|v_2|} v_2 = \begin{pmatrix} -2/\sqrt{13} \\ 3/\sqrt{13} \end{pmatrix}.$$

Матриця переходу

$$T = \begin{pmatrix} 3/\sqrt{13} & -2/\sqrt{13} \\ 2/\sqrt{13} & 3/\sqrt{13} \end{pmatrix}.$$

Отже,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/\sqrt{13} & -2/\sqrt{13} \\ 2/\sqrt{13} & 3/\sqrt{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix},$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{3}{\sqrt{13}} x' - \dfrac{2}{\sqrt{13}} y', \\ y = \dfrac{2}{\sqrt{13}} x' + \dfrac{3}{\sqrt{13}} y'. \end{cases}$$

Підставивши ці вирази у рівняння, після спрощень дістанемо

$$x'^2 - \frac{7}{\sqrt{13}} x' - \frac{1}{\sqrt{13}} y' + \frac{11}{13} = 0,$$

або

$$\left(x'^2 - 2 \cdot \frac{7}{2\sqrt{13}} x' + \frac{49}{52} \right) - \frac{49}{52} - \frac{1}{\sqrt{13}} y' + \frac{11}{13} = 0,$$

$$\left(x' - \frac{7}{2\sqrt{13}} \right)^2 = \frac{1}{\sqrt{13}} y' + \frac{5}{52},$$

$$\left(x' - \frac{7}{2\sqrt{13}}\right)^2 = \frac{1}{\sqrt{13}}\left(y' + \frac{5}{4\sqrt{13}}\right).$$

Позначимо

$$x'' = x' - \frac{7}{2\sqrt{13}}, \quad y'' = y' + \frac{5}{4\sqrt{13}}$$

і в нових змінних отримаємо канонічне рівняння параболи

$$x''^2 = \frac{1}{\sqrt{13}} y''.$$

Знайдемо координати нової вершини параболи з систем перетворень, поклавши $x'' = 0,\ y'' = 0$:

$$(1)\ \begin{cases} x = \dfrac{3}{\sqrt{13}} x' - \dfrac{2}{\sqrt{13}} y', \\ y = \dfrac{2}{\sqrt{13}} x' + \dfrac{3}{\sqrt{13}} y'. \end{cases} \text{ та } (2)\ \begin{cases} x'' = x' - \dfrac{7}{2\sqrt{13}}, \\ y'' = y' + \dfrac{5}{4\sqrt{13}}. \end{cases}$$

З першої системи знайдемо x', y' через змінні x, y:

$$\begin{cases} x = \dfrac{3}{\sqrt{13}} x' - \dfrac{2}{\sqrt{13}} y', \\ y = \dfrac{2}{\sqrt{13}} x' + \dfrac{3}{\sqrt{13}} y'. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = \dfrac{3}{\sqrt{13}} x + \dfrac{2}{\sqrt{13}} y, \\ y' = -\dfrac{2}{\sqrt{13}} x + \dfrac{3}{\sqrt{13}} y. \end{cases}$$

З другої системи знайдемо x'', y'' через змінні x, y:

$$\begin{cases} x'' = x' - \dfrac{7}{2\sqrt{13}}, \\ y'' = y' + \dfrac{5}{4\sqrt{13}}. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'' = \dfrac{3}{\sqrt{13}} x + \dfrac{2}{\sqrt{13}} y - \dfrac{7}{2\sqrt{13}} = 0, \\ y'' = -\dfrac{2}{\sqrt{13}} x + \dfrac{3}{\sqrt{13}} y + \dfrac{5}{4\sqrt{13}} = 0. \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ x = 1,\ y = \frac{1}{4}.$$

Отже, вершина параболи нової системи координат $Ox''y''$ знаходиться в точці $O(1; \frac{1}{4})$.

Контрольні запитання

1. Наведіть класифікацію кривих другого порядку.
2. Запишіть канонічне рівняння еліпса. Як визначаються фокуси, ексцентриситет, директриси еліпса?
3. Запишіть канонічне рівняння гіперболи. Як визначаються фокуси, ексцентриситет, директриси гіперболи?
4. Запишіть канонічне рівняння параболи. Як визначаються фокус та директриса параболи?
5. Яка спільна характеристична властивість еліпса, гіперболи та параболи? Наведіть загальне означення еліпса, гіперболи та параболи.
6. Який вигляд мають рівняння еліпса, гіперболи та параболи у полярній системі координат?
7. Опишіть метод приведення кривої другого порядку до канонічного виду.

Вправи

1. Скласти рівняння еліпса, фокуси якого лежать на осі абсцис, симетрично щодо початку координат, якщо:

а) відстань між фокусами рівна 6, а більша вісь еліпса рівна 8;

б) більша вісь рівна 20, а ексцентриситет $\varepsilon = 0{,}8$;

в) сума осей дорівнює 16, а відстань між фокусами 8;

г) відстань між фокусами дорівнює 6, а ексцентриситет $\varepsilon = 0{,}6$.

2. Скласти рівняння еліпса, фокуси якого лежать на осі абсцис, симетрично щодо початку координат, якщо відстань між фокусами дорівнює 8, а відстань між директрисами дорівнює 24. Знайти ексцентриситет еліпса.

3. Знайти ексцентриситет еліпса, якщо відстань між фокусами дорівнює відстані між кінцями великої і малої півосей.

4. Побудувати гіперболу $16x^2 - 9y^2 = 144$. Знайти:

а) півосі; б) координати фокусів; в) ексцентриситет; г) рівняння асимптот.

5. Скласти рівняння гіперболи, фокуси якої розміщені на осі абсцис, симетрично відносно початку координат, якщо:

а) відстань між фокусами $2c = 10$ і вісь $2b = 8$;

б) відстань між фокусами $2c = 8$ і ексцентриситет $\varepsilon = 2$;

в) рівняння асимптот $y = \pm\frac{4}{3}x$, а відстань між фокусами $2c = 20$;

г) відстань між директрисами рівна $\frac{8}{3}$ і ексцентриситет $\varepsilon = \frac{3}{2}$.

6. Скласти рівняння гіперболи, фокуси якої лежать на осі Ox, якщо сума її дійсної та уявної півосей дорівнює 7, а відстань між фокусами дорівнює 10.

7. Дано еліпс $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{2} = 1$. Записати рівняння рівнобічної гіперболи, фокуси якої знаходяться у фокусах еліпса.

8. Знайти відстань від фокусів еліпса $x^2 + 2y^2 = 8$ до асимптот гіперболи $2x^2 - y^2 = 18$.

9. Скласти канонічне рівняння параболи, якщо:

а) відстань від фокуса, що лежить на осі Ox, до вершини дорівнює чотирьом;

б) відстань від фокуса, розміщеного на осі Oy, до директриси дорівнює шести;

в) парабола симетрична щодо осі абсцис і проходить через точку $M(1;2)$.

10. На параболі $y^2 = 24x$ знайти точки, фокальний радіус яких дорівнює 12.

11. Через фокус параболи $y^2 = 4x$ проведено хорду, перпендикулярну до її осі. Визначити довжину цієї хорди.

12. Записати рівняння директриси параболи, вершина якої знаходиться в початку координат, а фокус співпадає з правою вершиною еліпса $x^2 + 2y^2 = 32$.

13. Записати рівняння кола, що має центр у фокусі параболи $y^2 = 6x$ і проходить через лівий фокус еліпса $x^2 + 2y^2 = 8$.

14. Привести рівняння кривої другого порядку до канонічного виду та побудувати криву:

а) $3x^2 - 4xy + 3y^2 + 4x + 4y - 1 = 0$;

б) $x^2 + 4xy + y^2 + 4x + 2y - 5 = 0$;

в) $x^2 - 2xy + y^2 - 2x + 2y - 7 = 0$.

Список літератури

1. *Бондаренко Н.В*. Аналітична геометрія в просторі: методичні вказівки, самостійні та контрольні роботи з вищої математики/ Бондаренко Н.В., Килимник О.О., Отрашевська В.В., Пастухова М.С. – КНУБА, 2013. – 40 с.

2. *Бугров Я.С., Никольский С.М.* Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии: учебник / Бугров Я.С., Никольский С.М. – М.: Наука, 1988. – 240 с.

3. *Дубовик В.П.* Вища математика: навчальний посібник/ Дубовик В.П., Юрик І.І. – К.: Вища школа,1993. – 648 с.

4. *Дубовик В.П.* Вища математика: збірник задач/ Дубовик В.П., Юрик І.І. – К.: «А.С.К.», 2005. – 480 с.

5. *Завадский А.Г.* Методические указания к решению задач по линейной алгебре / Завадский А.Г., Пастухова М.С., Турчин В.М., Шкабара А.С. – К.: КИСИ, 1992. – 63 с.

6. *Ильин В.А.* Аналитическая геометрия: учебник / Ильин В.А., Позняк Э.Г. – М.: Наука, 1981. – 221 с.

7. *Каплан И.А.* Практические занятия по высшей математике. Ч. 1 Аналитическая геометрия на плоскосте и в пространстве. – Харьков.: ХГУ, 1973. – 204 с.

8. *Кириченко В.В.* Аналітична геометрія: навчальний посібник / Кириченко В.В., Петкевич Н.Ю. Петравчук А.П. – К.: Видавничо-поліграфічний центр «Київський університет», 2003. – 191 с.

9. *Клетеник Д.В.* Сборник задач по аналитической геометрии. – М.: Наука, 1986. – 222 с.

10. *Курош А.Г.* Курс высшей алгебры: ученик. – М.: Наука, 1975. – 432 с.

11. *Овчинніков П.П.* Вища математика: підручник: У 2 ч. – Ч. 1: Лінійна і векторна алгебра. Аналітична геометрія. Вступ до математичного аналізу. Диференціальне та інтегральне числення / Овчинніков П.П., Яремчук Ф.П., Михайленко В.М. – К.: Техніка, 2000. – 592 с.

Навчальне видання

БОНДАРЕНКО Наталія В'ячеславівна
ОТРАШЕВСЬКА Валентина Володимирівна

АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ

Конспект лекцій

Комп'ютерне верстання *А.П. Селівестрової*

Підписано до друку 20.06.2022 . Формат $60\times80_{1/16}$
Ум. друк. арк. 4,65. Обл.-вид. акр. 5,0.
Електронний документ. Вид. № 6/І-22

Видавець і виготовлювач
Київський національний університет будівництва і архітектури

Повітрофлотський проспект, 31, Київ, Україна, 03037

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру суб'єктів видавничої справи ДК № 808 від 13.02.2002 р.