

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
Київський національний університет будівництва і архітектури

## **ОПР МАТЕРІАЛІВ**

Методичні вказівки  
до виконання контрольних задач  
і розрахунково-графічних робіт

Київ 2004

УДК 539.3

ББК 30.121

О-60

Укладачі: М.О. Шульга, д-р фіз.-мат. наук, професор  
В.Ф. Корнієнко, канд. техн. наук

Рецензент В.С. Єременко, канд. техн. наук

Відповідальний за випуск Л.Т. Шкельов, канд. техн. наук, професор

*Затверджено на засіданні кафедри опору матеріалів протокол № 9  
від 20 травня 2004 року.*

Видається в авторській редакції.

**Опір** матеріалів : Методичні вказівки до виконання контрольних задач і  
розрахунково-графічних робіт / Уклад.: М. О. Шульга, В.Ф. Корнієнко.—  
К.: КНУБА, 2005.-80 с.

Призначено для студентів архітектурного, санітарно-технічного  
факультетів, але можуть використовуватися студентами інших факультетів зі  
скороченим курсом опору матеріалів.

## Зміст

Загальні вказівки.....	4
1. Контрольні задачі.....	6
2. Розрахунково-графічні роботи і контрольні запитання до них.....	11
3. Основні співвідношення початкового курсу опору матеріалів.....	35
Список літератури.....	43
Додатки.....	44

## ЗАГАЛЬНІ ВКАЗІВКИ

Перед виконанням вправи необхідно опрацювати відповідні розділи теоретичного курсу опору матеріалів і засвоїти методи розв'язання задач, для чого рекомендуються підручники, вказані в списку літератури.

Задачі і вправи виконуються за індивідуальними завданнями, дані для яких вибираються відповідно до шифру, виданого викладачем у вигляді тризначного числа. Перша цифра шифру відповідає варіанту розрахункової схеми, друга і третя цифри шифру – значенням геометричних розмірів і величин силових факторів. Умови вправ і контрольних задач наведені в тексті методичних вказівок і в дод. 1-37. Більшість приведених задач мають методичний характер і складені, в основному, викладачами кафедри опору матеріалів.

При оформленні розв'язків контрольних задач і пояснювальної записки до розрахунково-графічної вправи спочатку вказується шифр, наводиться відповідна шифру схема і необхідні вихідні дані, потім викладається розрахунок.

Терміни виконання розрахунково-графічних вправ і поточного контролю установлюються відповідно до робочих планів по дисципліні.

При здачі вправи студент повинен захистити основні її положення, відповісти на теоретичні питання і вміти розв'язувати задачі в обсязі відповідного розділу курсу. При захисті можуть бути використані контрольні задачі. Наступна вправа приймається після здачі попередньої.

До іспитів студент допускається тільки після здачі усіх вправ і виконання завдань, передбачених робочим планом.

Розрахунки на кожному окремому етапі оформлюються в такій послідовності: розрахункова формула, підстановка в неї конкретних даних, остаточний результат і одиниця розмірності величини. Розв'язки задач і вправ виконуються в одиницях СІ.

Кожен окремий етап розрахунку повинен мати заголовок. Пояснювальна записка оформлюється на стандартних аркушах паперу формату А4, текст і розрахунки повинні бути написані акуратно і без помарок. Графічні ілюстрації виконуються з дотриманням масштабу і нанесенням всіх необхідних розмірів.

До кожної вправи додається титульний лист. Титульний лист, текст пояснювальної записки і креслення укладають в обкладинку і зшивають; зразок титульного листа приведений у дод. 1.

В опорі матеріалів вихідні дані (довжина, площа, сила, модуль Юнга та ін.) є наближеними. При розрахунках з наближеними даними обчислення треба вести з точністю, яка відповідає точності вихідних даних.

Оцінки точності наближених обчислень ґрунтуються на абсолютних похибках  $\Delta_a = |x - a|$  і відносних похибках  $\delta_a = \frac{\Delta_a}{a}$ ; тут  $a$  – наближене значення числа,  $x$  – точне число.

В практичних обчисленнях треба вміти визначати число десяткових знаків і число значущих знаків: число десяткових знаків дорівнює числу знаків після коми, число значущих знаків дорівнює кількості знаків в числі не рахуючи нулів зліва.

В практичних обчисленнях керуються такими правилами:

- 1) при додаванні (відніманні) в сумі зберігається стільки десяткових знаків, скільки їх є в доданку з найменшим числом десяткових знаків;
- 2) при множенні (діленні) в добутку залишається стільки значущих цифр, скільки їх має множник з найменшим числом значущих цифр.

При розрахунках в проміжних діях залишають на одну-дві цифри більше.

При алгебраїчних перетвореннях доводиться користуватися деякими правилами дій із степенями

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}, \quad (a^n)^m = a^{n \cdot m}, \quad \frac{1}{a^n} = a^{-n}, \quad a^n \cdot b^n = (ab)^n.$$

При арифметичних обчисленнях слід пам'ятати наступні залежності між розмірними величинами

$$1 \text{ кН} = 10^3 \text{ Н}$$

$$1 \text{ м} = 10^{+2} \text{ см}$$

$$1 \text{ см} = 10^{-2} \text{ м}$$

$$1 \text{ МПа} = 10^6 \text{ Па}$$

$$1 \text{ м}^2 = 10^{+4} \text{ см}^2$$

$$1 \text{ см}^2 = 10^{-4} \text{ м}^2$$

$$\text{Па} = \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}$$

$$1 \text{ м}^3 = 10^{+6} \text{ см}^3$$

$$1 \text{ см}^3 = 10^{-6} \text{ м}^3$$

$$1 \text{ м}^4 = 10^{+8} \text{ см}^4$$

$$1 \text{ см}^4 = 10^{-8} \text{ м}^4$$

# 1. КОНТРОЛЬНІ ЗАДАЧІ

## 1. Геометричні характеристики плоских перерізів

*Задача 1.1.* Визначити положення центру ваги, осьові і відцентровий моменти інерції перерізу, форма і розміри якого вказані в дод. 3.

*Задача 1.2.* Визначити головні центральні моменти інерції перерізу, форма і розміри якого вказані в дод. 4.

*Задача 1.3.* Для перерізу, форма і розміри якого вказані в дод. 5, визначити положення центру ваги, головні центральні моменти інерції, головні радіуси інерції і побудувати еліпс інерції.

*Задача 1.4.* Для перерізу, форма і розміри якого вказані в дод. 6, визначити:

- а) статичний момент площі перерізу відносно осі, що проходить через основу;
- б) положення центру ваги перерізу;
- в) головні центральні моменти інерції;
- г) момент опору відносно центральної осі, паралельної основі.

## 2. Осьове розтягування і стискування стержнів

*Задача 2.1.* Для стержня, схема якого і навантаження наведені в дод. 7, побудувати епюри поздовжніх сил і нормальних напружень. Визначити переміщення вільного кінця стержня. Власну вагу матеріалу стержня не враховувати. Площу поперечного перерізу прийняти постійною:  $A = 0,25 \text{ м}^2$ , модуль Юнга  $E = 0,030 \cdot 10^5 \text{ МПа}$ .

*Задача 2.2.* Для ступінчатого стержня, схема і навантаження якого наведені в дод. 8, визначити поздовжні зусилля  $N$  і нормальні напруження  $\sigma$  в характерних перерізах по довжині стержня, побудувати епюри поздовжніх зусиль і нормальних напружень, перевірити міцність, визначити переміщення вільного кінця стержня, визначити переміщення заданого перерізу  $n - n$ . При розв'язанні задачі прийняти  $\sigma_{adm}^+ = 0,6 \text{ МПа}$ ,  $\sigma_{adm}^- = 6 \text{ МПа}$ ,  $E = 0,175 \cdot 10^5 \text{ МПа}$ ,  $\gamma = 22 \text{ кН / м}^3$ .

Розв'язок задачі виконати:

- а) без врахування власної ваги матеріалу стержня;

б) з врахуванням власної ваги матеріалу стержня.

*3. Пряме плоске згинання балок (побудова епюр внутрішніх сил і моментів, визначення напружень, підбір перерізу)*

*Задача 3.1.* Побудувати епюри  $Q$  та  $M$  для балки на двох опорах під дією зосередженого навантаження (дод. 9). З умови міцності по нормальних напруженнях підібрати балку двотаврового профілю при  $\sigma_{adm} = 160 \text{ МПа}$ .

*Задача 3.2.* Побудувати епюри  $Q$  та  $M$  для консольної балки (дод. 10). Визначити максимальні нормальні напруження в балці: а) квадратного перерізу зі стороною  $a = 20 \text{ см}$ ; б) круглого перерізу діаметром  $d = 20 \text{ см}$ . Перевірити міцність при  $\sigma_{adm} = 30 \text{ МПа}$ .

*Задача 3.3.* Побудувати епюри  $Q$  та  $M$  для балки на двох опорах з постійним розподіленим навантаженням і зосередженими силами та моментами. Розглянути випадки: а) дод.11; б) дод.12.

*Задача 3.4.* Побудувати епюри  $N$ ,  $Q$  та  $M$  для балки на двох опорах (дод.13).

*Задача 3.5.* Побудувати епюри  $Q$  та  $M$  для балки з проміжним шарніром (дод. 14).

*4. Пряме плоске згинання балок (визначення прогинів і кутів повороту перерізу)*

*Задача 4.1.* Для заданої в дод. 16 балки побудувати епюри кутів повороту перерізів і прогинів, використовуючи метод початкових параметрів (МПП).

*Задача 4.2.* Для заданої в дод. 17 балки визначити прогин та кут повороту перерізу в зазначеній точці методом фіктивних балок (МФБ).

*Задача 4.3.* Для заданої в дод. 18 балки визначити кут повороту перерізу балки на опорах і прогин посередині балки методом Максвела-Мора (МММ).

*5. Статично невизначені задачі при осьовому розтягуванні і стикуванні*

*Задача 5.1.* Для стержня, схема і навантаження якого наведені в дод. 19, побудувати епюри поздовжніх сил  $N$  і підібрати площу поперечного перерізу. Допустиме напруження  $\sigma_{adm} = 160 \text{ МПа}$ . Власну вагу стержня не враховувати.

*Задача 5.2.* Для стержня, схема і навантаження якого наведені в дод. 20, побудувати епюри поздовжніх сил  $N$  і нормальних напружень  $\sigma$ . Власну вагу стержня не враховувати.

*Задача 5.3.* Визначити найбільші нормальні напруження, що виникають при зміні температури в стержні, вихідні дані для якого вказані в дод. 21.

*Задача 5.4.* Для стержня, схема і навантаження якого вказані в дод. 22, визначити розміри  $a$  і  $a_1$  поперечного перерізу.

*Задача 5.5.* Абсолютно твердий елемент конструкції закріплений за допомогою системи пружних стержнів і навантажений силою  $F$ , як показано в дод. 23. Підібрати площу поперечного перерізу пружних стержнів, прийнявши допустиме напруження  $\sigma_{adm} = 160 \text{ МПа}$ .

## *6. Статично невизначені задачі при згинанні балок*

*Задача 6.1.* Побудувати епюри поперечних сил і згинальних моментів для один раз статично невизначеної балки, схема якої наведена в дод. 24.

*Задача 6.2.* Встановити ступінь статичної невизначеності і побудувати епюри поперечних сил і згинальних моментів для балки, схема якої наведена в дод. 25.

## *7. Кручення стержнів (статично визначені задачі)*

*Задача 7.1.* Побудувати епюру крутильних моментів і підібрати діаметр круглого стержня (дод. 26). Визначити кут закручування перерізу  $n - n$  відносно опорного перерізу. Прийняти  $\tau_{adm} = 90 \text{ МПа}$ ,  $G = 0,8 \cdot 10^5 \text{ МПа}$ .

*Задача 7.2.* Консольний сталевий стержень довжиною  $l = 1 \text{ м}$  з внутрішнім радіусом  $D_{вн} = 50 \text{ мм}$  і зовнішнім радіусом  $D_{зн} = 75 \text{ мм}$  закручується на один градус моментом  $M = 3,5 \text{ кНм}$  на його вільному кінці. Чому дорівнює найбільше дотичне напруження? Визначити модуль зсуву матеріалу стержня.

*Задача 7.3.* Консольний стержень довжиною  $l = 1 \text{ м}$  прямокутного перерізу  $2 \text{ см} \times 3 \text{ см}$  скручується моментом  $200 \text{ Нм}$  на вільному кінці. Визначити найбільше дотичне напруження і перевірити міцність при



$\tau_{adm} = 90 \text{ МПа}$  . Знайти кут закручування стержня при  $G = 8 \cdot 10^4 \text{ МПа}$  .

### 8. Кручення стержнів (статично невизначені задачі)

*Задача 8.1.* Для круглого стержня з постійною жорсткістю  $GJ_p$ , схема якого наведена в дод. 27, побудувати епюру крутильних моментів.

*Задача 8.2.* Внутрішня частина консольного складеного стержня  $7,2 \text{ см} < r < 7,5 \text{ см}$  мідна ( $G_m = 4 \cdot 10^4 \text{ МПа}$ ), а зовнішня  $7,5 \text{ см} < r < 7,8 \text{ см}$  стальна ( $G_c = 8 \cdot 10^4 \text{ МПа}$ ). Довжина стержня  $l = 3 \text{ м}$ . Крутильний момент на вільному кінці дорівнює  $1,2 \text{ кНм}$ . Який розподілений момент між мідною і сталлю трубками? Чому дорівнюють найбільші дотичні напруження в трубках? На який кут закрутиться стержень?

### 9. Складний опір

*Задача 9.1.* Визначити положення нейтральної лінії, якщо стержень нецентрально стиснутий силою  $P$ , прикладеною в точці  $n$  поперечного перерізу, наведеного у дод. 29.

*Задача 9.2.* Побудувати ядро перерізу для поперечних перерізів, наведених у дод. 30.

*Задача 9.3.* Побудувати епюру нормальних напружень у поперечному перерізі стержня, який стискується силою, прикладеною в точці  $n$ . Дані для задачі взяти з дод. 31.

*Задача 9.4.* Визначити нормальні напруження в точках  $A$  і  $B$  при косому згинанні балки двотаврового поперечного перерізу. Схема балки і навантаження наведені в дод. 32. Визначити і показати на схемі поперечного перерізу нейтральну лінію.

*Задача 9.5.* Для балки прямокутного поперечного перерізу, схема і навантаження якої наведені в дод. 33, визначити з умов міцності розміри  $b$  і  $h$  перерізу при заданому  $k = h/b$ . Допустиме напруження  $\sigma_{adm} = 12 \text{ МПа}$ .

*Задача 9.6.* Для балки довжиною  $l$  з прямокутним поперечним перерізом ( $b = 8 \text{ см}$ ,  $h = k \cdot b$ ), схема і навантаження якої наведені в дод. 33, побудувати епюру нормальних напружень у небезпечному перерізі і визначити повний прогин вільного кінця балки. Модуль пружності  $E = 0,12 \cdot 10^5 \text{ МПа}$ .

## 10. Стійкість стержнів

*Задача 10.1.* Визначити критичну силу для сталевого стержня ( $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$ ,  $\sigma_{adm} = 160 \text{ МПа}$ ), для якого довжина  $l$ , умови закріплення кінців (коефіцієнт  $\mu$ ) і поперечний переріз вказані в дод. 36.

*Задача 10.2.* Визначити допустимі навантаження для сталевого стержня, використовуючи дані із дод. 36.

*Задача 10.3.* Підібрати квадратний поперечний переріз сталевого стержня за даними, наведеними у дод. 37.

## 11. Розрахунки при динамічних навантаженнях

*Задача 11.1.* Визначити першу частоту  $\omega_1$  вільних поздовжніх коливань вертикального консольного стержня з вантажем  $Q$  на вільному кінці при: 1)  $l = 120 \text{ см}$ , діаметр круглого перерізу  $d = 15 \text{ см}$ ,  $E = 0,1 \cdot 10^5 \text{ МПа}$  (дерево),  $Q = 2 \text{ кН}$ ; 2)  $l = 1,5 \text{ м}$ , двотавровий переріз №20,  $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$  (сталь),  $Q = 15 \text{ кН}$ ; 3)  $l = 1,8 \text{ м}$ , квадратний переріз  $80 \times 80 \text{ (см)}$ ,  $E = 3 \cdot 10^3 \text{ МПа}$  (цегельна кладка),  $Q = 8 \text{ кН}$ .

*Задача 11.2.* Визначити першу частоту  $\omega_1$  вільних поперечних коливань горизонтального консольного стержня з масою  $Q$  на вільному кінці для вказаних в попередній задачі трьох випадків.

*Задача 11.3.* Визначити динамічні напруження в консольному стержні при поздовжньому ударі вантажем  $Q$ , що падає з висоти  $H = 3 \text{ м}$  на його вільний кінець; дані взяти з задачі 11.1.

*Задача 11.4.* Визначити динамічні напруження в консольній балці при поперечному ударі вантажем  $Q$ , що падає з висоти  $H = 3 \text{ м}$  на її вільний кінець; дані взяти з задачі 11.1.

## 2. РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНІ РОБОТИ І КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ ДО НИХ

### *Розрахунково-графічна робота*

#### **Геометричні характеристики поперечного перерізу**

Для поперечного перерізу складної форми визначити положення головних центральних осей. Відносно цих осей обчислити моменти інерції, моменти опору, радіуси інерції і побудувати еліпс інерції. Форма і розміри поперечного перерізу вказані в дод. 2.

#### *Порядок виконання роботи*

1. Визначити центр ваги складного перерізу і центральні вісі.
2. Обчислити осьові і відцентровий моменти інерції перерізу відносно центральних осей.
3. Визначити кут нахилу головних центральних осей інерції.
4. Обчислити головні центральні моменти інерції.
5. Обчислити моменти опору.
6. Визначити головні радіуси інерції і побудувати еліпс інерції.
7. Вміти визначати за допомогою еліпсу інерції центральні моменти інерції.

#### **Контрольні запитання**

1. Які позначення і розмірності мають геометричні характеристики (площа, статичні моменти, осьові і відцентровий моменти інерції, полярний момент інерції)?
2. Що таке центр ваги перерізу? Як знайти центр ваги складного перерізу?
3. Як користуватися залежностями між моментами інерції відносно паралельних осей?
4. Як користуватися формулами перетворення моментів інерції при повороті координатних осей? Які величини залишаються інваріантними при повороті координатних осей?
5. Що таке головні центральні вісі?
6. Відносно яких осей моменти інерції приймають екстремальні значення?
7. Що таке радіуси інерції, еліпс інерції? Як визначати графічно радіуси інерції з допомогою еліпсу інерції?
8. Як визначати головні центральні вісі при наявності осей симетрії фігури?
9. Що таке моменти опору?

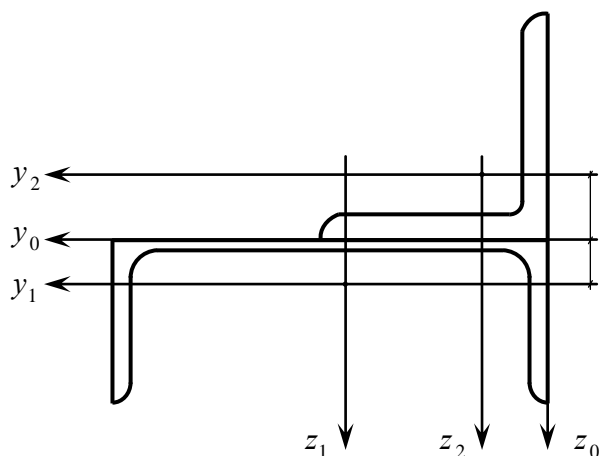


Рис.1

З а д а ч а. Для поперечного перерізу складної форми, що складається із швелера №24 і рівнобічного кутика  $125 \times 125 \times 14$  мм, розташованих як зазначено на рис.1, визначити положення головних центральних осей. Відносно цих осей обчислити моменти інерції, моменти опору, радіуси інерції і побудувати еліпс інерції.

Р о з в ' я з о к. Задачу

розв'язуємо, дотримуючись наступного порядку обчислень.

1. Розбиваємо переріз на прості фігури (у нашому випадку швелер і кутик). Вводимо локальні системи координат із початком у центрах ваги простих фігур. Проводимо паралельні між собою вісі  $y_1, z_1$  (для швелера) і  $y_2, z_2$  (для кутика).

Випишуємо необхідні геометричні характеристики простих фігур із таблиць сортаменту

швелер №24

кутик  $125 \times 125 \times 14$  мм

$$A_1 = 30,6 \text{ см}^2$$

$$A_2 = 33,4 \text{ см}^2$$

$$h_1 = 24 \text{ см},$$

$$b_2 = 12,5 \text{ см},$$

$$b_1 = 9 \text{ см}$$

$$a_2 = 3,61 \text{ см}$$

$$a_1 = 2,42 \text{ см}$$

$$I_{y_2} = I_{z_2} = 482 \text{ см}^4$$

$$I_{y_1} = 208 \text{ см}^4$$

$$I_{\max} = 764 \text{ см}^4$$

$$I_{z_1} = 2900 \text{ см}^4$$

$$I_{\min} = 200 \text{ см}^4$$

$$I_{y_1 z_1} = 0$$

$$I_{y_2 z_2} = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{2} = 282 \text{ см}^4.$$

Значення відцентрового моменту інерції для рівнобічного кутика

обчислюємо по формулі  $I_{y_2 z_2} = \pm \frac{I_{\max} - I_{\min}}{2}$ ; знак вибираємо з умови, що

полічки дають більший внесок у момент (знаки моментів полицок легко визначити по рисунку: у нашому випадку полицки лежать у першому і

третьому квадрантах, де добуток  $y_2 z_2 > 0$ , отже  $I_{y_2 z_2} > 0$ ).

Зображуємо переріз на рисунку в відповідно вибраному масштабі.

2. В цьому випадку зручно ввести допоміжну систему  $(y_0, z_0)$ , як показано на рис. 1. В цій системі просто визначаються центри ваги швелера (фігура 1) і кутика (фігура 2):

$$\begin{aligned}y_{01} &= \frac{h_1}{2} = 12 \text{ см}, & y_{02} &= a_2 = 3,61 \text{ см}, \\z_{01} &= a_1 = 2,42 \text{ см}, & z_{02} &= -a_2 = -3,61 \text{ см}.\end{aligned}$$

Площа поперечного перерізу  $A = A_1 + A_2 = 30,6 + 33,4 = 64 \text{ см}^2$ .

Визначаємо координати  $y_{0C}, z_{0C}$  центру ваги перерізу в системі координат  $(y_0, z_0)$ :

$$\begin{aligned}y_{0C} &= \frac{\sum y_{0i} A_i}{A} = \frac{y_{01} A_1 + y_{02} A_2}{A_1 + A_2} = \frac{12 \cdot 30,6 + 3,61 \cdot 33,4}{64} = 7,62 \text{ см}, \\z_{0C} &= \frac{\sum z_{0i} A_i}{A} = \frac{z_{01} A_1 + z_{02} A_2}{A_1 + A_2} = \frac{2,42 \cdot 30,6 + (-3,61) \cdot 33,4}{64} = -0,73 \text{ см}.\end{aligned}$$

3. Проводимо координатні вісі  $y_C, z_C$  з початком у центрі ваги перерізу паралельно осям  $y_i, z_i$ . Знаходимо координати  $c_{y_i}, c_{z_i}$  центрів ваги простих фігур в осях  $y_C, z_C$ :

$$\begin{aligned}c_{y1} &= y_{01} - y_{0C} = 12 - 7,62 = 4,38 \text{ см}, \\c_{z1} &= z_{01} - z_{0C} = 2,42 - (-0,73) = 3,15 \text{ см}, \\c_{y2} &= y_{02} - y_{0C} = 3,61 - 7,62 = -4,01 \text{ см}, \\c_{z2} &= z_{02} - z_{0C} = -3,61 - (-0,73) = -2,88 \text{ см}.\end{aligned}$$

4. Обчислюємо статичні моменти площі перерізу відносно центральних осей  $y_C, z_C$  (вони повинні дорівнювати нулеві):

$$\begin{aligned}S_{y_C} &= \sum c_{z_i} A_i = c_{z1} A_1 + c_{z2} A_2 = 30,6 \cdot 3,15 + 33,4 \cdot (-2,88) = 96,39 - 96,192 = \\&= 0,198 \text{ см}^3 \approx 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}S_{z_C} &= \sum c_{y_i} A_i = c_{y1} A_1 + c_{y2} A_2 = 30,6 \cdot 4,38 + 33,4 \cdot (-4,01) = -134,03 + 133,93 = \\&= 0,1 \text{ см}^3 \approx 0.\end{aligned}$$

5. Обчислимо осьові і відцентровий моменти інерції відносно центральних осей  $y_C$  і  $z_C$ :

$$\begin{aligned}
I_{y_c} &= \sum (I_{y_i} + c_{zi}^2 A_i) = (I_{y_1} + c_{z1}^2 A_1) + (I_{y_2} + c_{z2}^2 A_2) = 208 + 30,6 \cdot 3,15^2 + \\
&+ 482 + 33,4 \cdot (-2,88)^2 = 208 + 303,63 + 482 + 277,03 = 1271 \text{ см}^4, \\
I_{z_c} &= \sum (I_{z_i} + c_{yi}^2 A_i) = (I_{z_1} + c_{y1}^2 A_1) + (I_{z_2} + c_{y2}^2 A_2) = 2900 + 30,6 \cdot 4,38^2 + \\
&+ 482 + 33,4 \cdot (-4,01)^2 = 2900 + 587,04 + 482 + 537,08 = 4506 \text{ см}^4, \\
I_{y_c z_c} &= \sum (I_{y_i z_i} + c_{zi} c_{yi} A_i) = (I_{y_1 z_1} + c_{z1} c_{y1} A_1) + (I_{y_2 z_2} + c_{z2} c_{y2} A_2) = 0 + \\
&+ 30,6 \cdot 3,15 \cdot 4,38 + 282 + 33,4 \cdot (-2,88) \cdot (-4,01) = 422,2 + 282 + 385,7 = 1090 \text{ см}^4.
\end{aligned}$$

6. Визначаємо положення головних центральних осей інерції, для чого знаходимо кут  $\alpha_0$

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2I_{y_c z_c}}{I_{z_c} - I_{y_c}} = \frac{2 \cdot 1090}{4506 - 1271} = \frac{2180}{3235} = 0,6739$$

$$2\alpha_0 = 34^\circ, \quad \alpha_0 = 17^\circ.$$

Визначивши попередньо значення тригонометричних функцій

$$\sin \alpha_0 = \sin 17^\circ = 0,2922, \quad \cos \alpha_0 = \cos 17^\circ = 0,9564,$$

$$\sin 2\alpha_0 = \sin 34^\circ = 0,5588, \quad \cos 2\alpha_0 = \cos 34^\circ = 0,8293,$$

обчислюємо головні осьові моменти інерції

$$\begin{aligned}
I_u &= I_{y_c} \cos^2 \alpha_0 + I_{z_c} \sin^2 \alpha_0 - I_{y_c z_c} \sin 2\alpha_0 = 1271 \cdot 0,9564^2 + \\
&+ 4506 \cdot 0,2922^2 - 1090 \cdot 0,5588 = 1162,6 + 384,7 - 609,1 = 938 \text{ см}^4,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_v &= I_{y_c} \sin^2 \alpha_0 + I_{z_c} \cos^2 \alpha_0 + I_{y_c z_c} \sin 2\alpha_0 = 1271 \cdot 0,2922^2 + \\
&+ 4506 \cdot 0,9564^2 + 1090 \cdot 0,5588 = 108,5 + 4121,6 + 609,1 = 4839 \text{ см}^4.
\end{aligned}$$

Для перевірки обчислимо також відцентровий момент інерції (він повинен дорівнювати нулю)

$$\begin{aligned}
I_{uv} &= I_{y_c z_c} \cos 2\alpha_0 + (I_{y_c} - I_{z_c}) \frac{\sin 2\alpha_0}{2} = 1090 \cdot 0,8293 + \\
&+ (1271 - 4506) \cdot 0,5 \cdot 0,5588 = 903,94 - 903,86 = 0,08 \text{ см}^4 \approx 0.
\end{aligned}$$

Знайдемо екстремальні значення осьових моментів інерції, які вони приймають відносно головних центральних осей:

$$I_{\max}^{\min} = \frac{I_{y_c} + I_{z_c}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_{y_c} - I_{z_c}}{2}\right)^2 + I_{y_c z_c}^2} = \frac{1271 + 4506}{2} \pm$$

$$\pm \sqrt{\left(\frac{1271 - 4506}{2}\right)^2 + 1090^2} = 2888,5 \pm \sqrt{2616306,25 + 1188100} = 2888,5 \pm 1950,5$$

$$I_{\max} = 4839 \text{ см}^4 = I_v, \quad I_{\min} = 938 \text{ см}^4 = I_u.$$

Перевіряємо умову інваріантності  $I_u + I_v = I_{y_C} + I_{z_C}$  осьових моментів інерції

$$I_u + I_v = 938 + 4839 = 5777 \text{ см}^4, \quad I_{y_C} + I_{z_C} = 1271 + 4506 = 5777 \text{ см}^4.$$

На рисунку проводимо головні центральні вісі інерції, повернуті на кут  $\alpha_0 = 17^\circ$  проти годинникової стрілки від центральних осей  $y_C$  і  $z_C$ .

### 7. Обчислюємо головні радіуси інерції

$$i_u^2 = \frac{I_u}{A} = \frac{938}{64} = 14,7 \text{ см}^2, \quad i_u = 3,8 \text{ см},$$

$$i_v^2 = \frac{I_v}{A} = \frac{4839}{64} = 75,6 \text{ см}^2, \quad i_v = 8,7 \text{ см}$$

і будуємо еліпс інерції

$$\frac{u^2}{i_v^2} + \frac{v^2}{i_u^2} = 1.$$

Для цього скористаємось таблицею

$u/i_v$	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1
$v/i_u$	1	0,98	0,92	0,8	0,6	0

І знайдемо координати точок еліпса в першому квадранті (при  $u > 0, v > 0$ ).

$u$ , см	0	1,74	3,48	5,22	6,96	8,7
$v$ , см	3,8	3,72	3,45	3,04	2,28	0

Нанесемо ці точки на рис.2 і по властивості симетрії еліпса відносно осей  $u, v$  побудуємо повний еліпс. На рисунку безпосередньо вимірюємо значення радіусів інерції  $i_{y_C}$  та  $i_{z_C}$  відносно осей  $z_C$  і  $y_C$  (для цього треба провести паралельні цим осям дотичні до еліпса інерції і виміряти відстань між осями і дотичними)

$$i_{y_C} = 4,5 \text{ см}, \quad i_{z_C} = 8,4 \text{ см}.$$

По вимірних радіусах інерції обчислимо осьові моменти інерції відносно центральних осей

$$I_{y_c} = i_{y_c}^2 \cdot A = 4,5^2 \cdot 64 = 1296 \text{ см}^4, \quad I_{z_c} = i_{z_c}^2 \cdot A = 8,4^2 \cdot 64 = 4516 \text{ см}^4$$

і порівняємо з аналітично визначеними раніше значеннями

$$I_{y_c} = 1271 \text{ см}^4, \quad I_{z_c} = 4506 \text{ см}^4.$$

Невеликі розбіжності свідчать про правильність аналітичних обчислень і геометричних побудов.

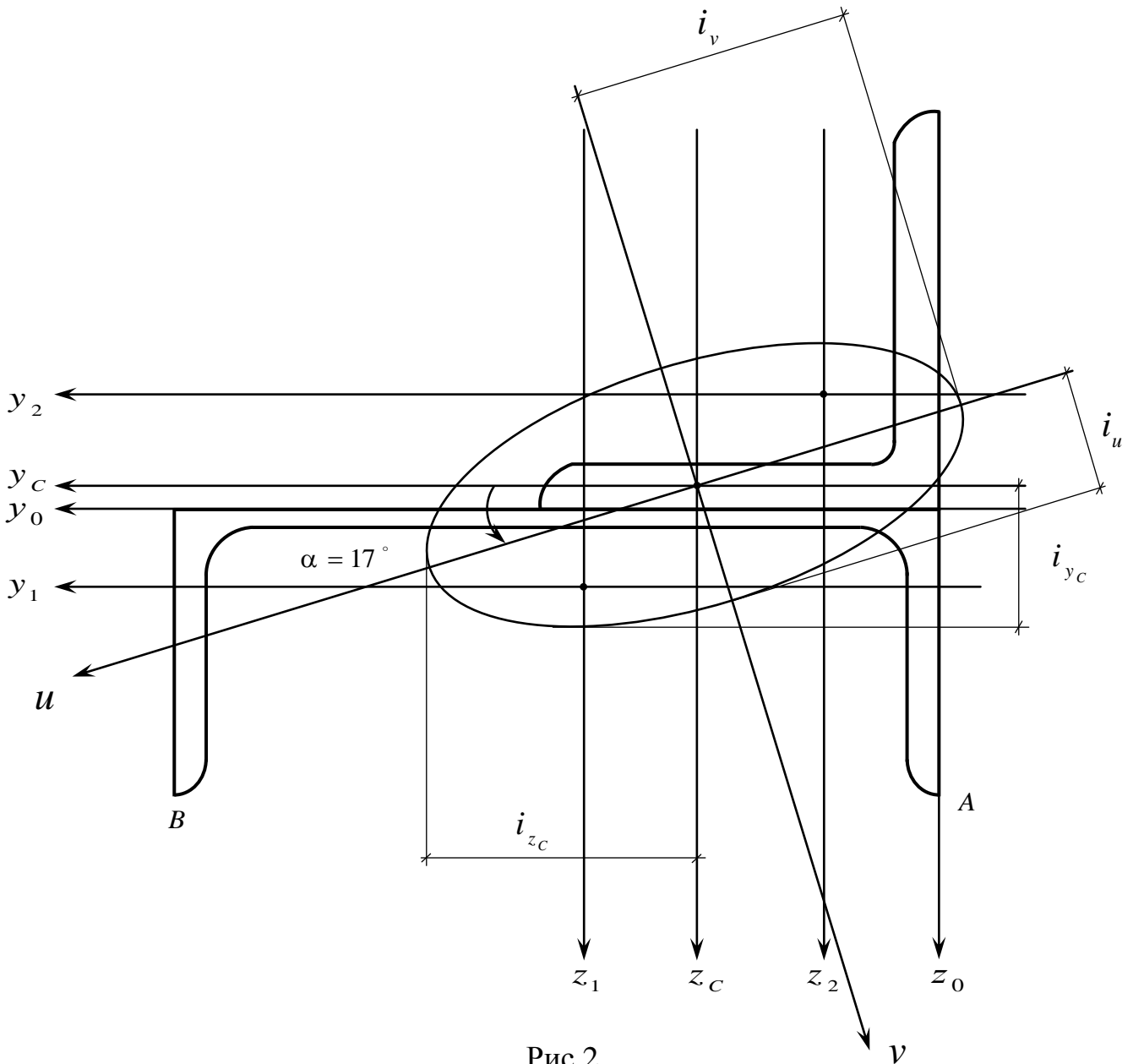


Рис.2

8. Визначаємо головні моменти опору відносно осей  $u, v$  за формулами

$$W_u = \frac{I_u}{v_{\max}}, \quad W_v = \frac{I_v}{u_{\max}}$$



в яких  $u_{\max}$  – відстань до найбільш віддаленої точки перерізу від осі  $v$ ,  $v_{\max}$  – відстань до найбільш віддаленої точки перерізу від осі  $u$ .

Для визначення  $u_{\max}$ ,  $v_{\max}$  знаходимо координати точок  $A$  і  $B$  у центральній системі координат  $y_C, z_C$ , а потім скористаємося формулами

$$u_A = y_{CA} \cos \alpha_0 + z_{CA} \sin \alpha_0,$$

$$v_A = -y_{CA} \sin \alpha_0 + z_{CA} \cos \alpha_0,$$

перетворення координат при повороті координатних осей.

Для точки  $A$  знаходимо:

$$y_{CA} = y_{1A} - y_{1C} = -\frac{h_1}{2} - y_{1C} = -\frac{24}{2} - (-4,38) = -7,62 \text{ см},$$

$$z_{CA} = z_{1A} - z_{1C} = b_1 - z_{01} - z_{1C} = 9 - 2,42 - (-3,15) = 9,73 \text{ см},$$

$$v_{\max} = \left| -y_{CA} \sin \alpha_0 + z_{CA} \cos \alpha_0 \right| = \left| -(-7,62) \cdot 0,2922 + 9,73 \cdot 0,9564 \right| = 2,23 + 9,3 = 11,53 \text{ см}.$$

Для точки  $B$  знаходимо:

$$y_{CB} = y_{1B} - y_{1C} = \frac{h_1}{2} - y_{1C} = \frac{24}{2} - (-4,38) = 16,38 \text{ см},$$

$$z_{CB} = z_{1B} - z_{1C} = b_1 - z_{01} - z_{1C} = 9 - 2,42 - (-3,15) = 9,73 \text{ см},$$

$$u_{\max} = \left| y_{CB} \cos \alpha_0 + z_{CB} \sin \alpha_0 \right| = \left| 16,38 \cdot 0,9564 + 9,73 \cdot 0,2922 \right| = 15,66 + 2,84 = 18,5 \text{ см}.$$

Обчислюємо моменти опору відносно головних осей

$$W_u = \frac{I_u}{v_{\max}} = \frac{938}{11,53} = 81,4 \text{ см}^3, \quad W_v = \frac{I_v}{u_{\max}} = \frac{4839}{18,5} = 261,6 \text{ см}^3.$$

### *Розрахунково-графічна робота*

#### **Згинання статично визначеної балки**

1. Для заданих балок побудувати епюри поздовжніх і поперечних сил та згинальних моментів (епюри  $N$ ,  $Q$ ,  $M$ ). Вихідні дані наведені в дод. 9-14, кількість конкретних задач визначається викладачем.

2. Підібрати поперечний переріз статично визначеної балки зі сталевого прокатного двотавра, перевірити міцність балки, визначити

переміщення її перерізів (кути повороту і прогини). Схеми балки і навантаження вибираються відповідно до дод. 15. Допустиме нормальне напруження  $\sigma_{adm} = 160 \text{ МПа}$ , допустиме дотичне напруження  $\tau_{adm} = 100 \text{ МПа}$ , модуль Юнга  $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$ .

### *Порядок виконання роботи*

- 1.1. Накреслити в масштабі схему балки і показати розміри і діючі навантаження.
- 1.2. Скласти рівняння рівноваги, визначити значення і напрямки опорних реакцій.
- 1.3. Розбити балку на ділянки, скласти вирази для визначення поздовжніх сил  $N$ , поперечних сил  $Q$  і згинальних моментів  $M$  на кожній ділянці балки (за вказівкою викладача).
- 1.4. Обчислити характерні ординати епюр для ряду перерізів балки в кількості, необхідній для побудови цих епюр.
- 1.5. Побудувати епюри  $N$ ,  $Q$ ,  $M$ .
- 2.1. Побудувати епюри поперечних сил і згинальних моментів, визначити найбільші значення  $Q_{max}$  і  $M_{max}$ .
- 2.2. З умови міцності по нормальних напруженнях підібрати по таблицях сортаменту номер двотаврового профілю.
- 2.3. Перевірити міцність підбраного перерізу по нормальних, дотичних і приведених напруженнях. Побудувати епюри  $\sigma$  і  $\tau$  по висоті перерізу.
- 2.4. Обчислити прогини і кути повороту перерізів балки методом початкових параметрів.
- 2.5. Побудувати епюри прогинів і кутів повороту перерізів.

Примітка. Графічне оформлення результатів розрахунку з використанням методу початкових параметрів складається з креслення схеми заданої балки з навантаженнями і послідовної побудови під нею епюр  $Q$ ,  $M$ ,  $EJ\varphi$  і  $EJw$  з позначенням на них значень характерних ординат.

Показати поперечний переріз балки та епюри нормальних і дотичних напружень ( $\sigma$  і  $\tau$ ) по висоті перерізу.

### **Контрольні запитання**

1. За якими формулами визначаються нормальні і дотичні напруження при

- згинанні балок?
2. Як визначаються максимальні нормальні напруження?
  3. Як формулюється умова міцності по нормальних напруженнях?
  4. Як підібрати поперечний переріз за необхідним моментом опору (на прикладах)?
  5. Як побудувати епюри  $Q$  та  $M$  (правило знаків; характерні особливості епюр)? Як побудувати епюри для конкретних балок (консольних, на двох опорах)?
  6. Який вигляд має рівняння зігнутої осі балки?
  7. Як визначаються прогини і кути повороту методом початкових параметрів (МПП)? Що таке початкові параметри?
  8. Як формулюються геометричні (кінематичні) умови при різних закріпленнях балок (на прикладах)?
  9. Як визначаються переміщення методом Максвела-Мора (МММ) (на прикладах)?

**З а д а ч а.** Для балки на рис.4 підібрати поперечний переріз із сталюого прокатного двотавру. Перевірити міцність по нормальних і дотичних напруженнях. Методом початкових параметрів визначити прогини і кути повороту перерізів і побудувати їх епюри по довжині балки. Для двотавра допустимі напруження і модуль Юнга прийняти такими:

$$\sigma_{adm} = 160 \text{ МПа} , \tau_{adm} = 100 \text{ МПа} , E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа} .$$

**Р о з в ' я з о к.**

1. Визначаємо опорні реакції:

$$\sum M_A = 0 ; \quad - 50 \cdot 1,5 - 80 \cdot 2 \cdot (1,5 + 1 + 1) + V_B \cdot 4,5 = 0 ,$$

$$V_B = \frac{75 + 560}{4,5} = 141,1 \text{ кН} ;$$

$$\sum M_B = 0 ; \quad 50 \cdot 3 + 80 \cdot 2 \cdot 1 - V_A \cdot 4,5 = 0 ,$$

$$V_A = \frac{150 + 160}{4,5} = 68,9 \text{ кН}.$$

$$\text{Перевірка: } \sum F_z = 50 + 80 \cdot 2 - 141,1 - 68,9 = 0 .$$

Будуємо епюри  $Q$  та  $M$  . Для цього розбиваємо балку на три ділянки, визначаємо  $Q(x)$  та  $M(x)$  в характерних точках і будуємо епюри.

$$Q(0) = 68,9 \text{ кН}$$

$$M(0) = 0$$

$$Q^{np}(1,5) = 68,9 - 50 = 18,9 \text{ кН}$$

$$M(1,5) = 68,9 \cdot 1,5 = 103,35 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

$$Q(2,5) = 18,9 \text{ кН}$$

$$M(2,5) = 68,9 \cdot 2,5 - 50 \cdot 1 = 122,25 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

$$Q(4,5) = -141,1 \text{ кН}$$

$$M(4,5) = 0.$$

В перерізі, де  $Q = 0$ , згинальний момент приймає екстремальне значення  $M_{ext}$ . Для його визначення з умови  $Q(x = l - a) = 0$  знаходимо:  
 $-141,1 + 80 \cdot a = 0$ ,  $a = 1,76 \text{ м}$ .

Отже,  $M_{ext} = 141,1 \cdot 1,76 - 80 \cdot 1,76 \cdot 0,88 = 248,3 - 123,9 = 124,4 \text{ кН} \cdot \text{м}$ .

Максимальні значення перерізуючої сили і згинального моменту знаходимо з епюр:

$$Q_{\max} = 141,1 \text{ кН} \text{ (на правій опорі, } x = 4,5 \text{ м)},$$

$$M_{\max} = 124,4 \text{ кН} \cdot \text{м} \text{ (на відстані } a = 1,76 \text{ м від правої опори)}.$$

2. Підбираємо двотавровий переріз з умови міцності по нормальних напруженнях:

$$\sigma_{\max} \leq \sigma_{adm}, \quad \sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W}.$$

Знаходимо необхідний момент опору:

$$W_{нб} = \frac{M_{\max}}{\sigma_{adm}} = \frac{124,4 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 777,5 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3 = 778 \text{ см}^3.$$

З таблиць сортаменту беремо двотавр № 36, для якого

$$W_y = 743 \text{ см}^3,$$

$$h = 36 \text{ см},$$

$$I_y = 13380 \text{ см}^4,$$

$$b = 14,5 \text{ см},$$

$$S_y = S_{\max} = 423 \text{ см}^3,$$

$$d = 0,75 \text{ см},$$

$$t = 1,23 \text{ см}.$$

3. Виконуємо перевірку міцності балки по нормальних і дотичних напруженнях:

а) нормальне напруження

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_y} = \frac{124,4 \cdot 10^3}{743 \cdot 10^{-6}} = 167,4 \cdot 10^6 \text{ Па} = 167,4 \text{ МПа}$$

більше  $\sigma_{adm} = 160 \text{ МПа}$ , але перенапруження складає

$$\Delta = \frac{167,4 - 160}{160} \cdot 100\% = 4,6\% < 5\%, \text{ що допустимо.}$$

б) дотичне напруження

$$\tau_{\max} = \frac{Q_{\max} S_{\max}}{d \cdot I_y} = \frac{141,1 \cdot 10^3 \cdot 423 \cdot 10^{-6}}{0,75 \cdot 10^{-2} \cdot 13380 \cdot 10^{-8}} = \frac{141,1 \cdot 423}{0,75 \cdot 13380} \cdot 10^{3-6+2+8} =$$

$$= 59,4 \cdot 10^6 \text{ Па} = 59,4 \text{ МПа}$$

менше  $\tau_{adm} = 100 \text{ МПа}$ , а значить недонапруження складає

$$\Delta = \frac{100 - 59,4}{100} \cdot 100 \% = 40,6\% .$$

в) Перевірка міцності в точках, де  $\sigma \neq 0$  і  $\tau \neq 0$ , виконується з використанням умови міцності для приведенного напруження  $\sigma_{red} \leq \sigma_{adm}$ .

В перерізі  $x = 2,5 \text{ м}$  момент  $M = 122,25 \text{ кН} \cdot \text{м}$ , перерізуюча сила  $Q = 18,9 \text{ кН}$ .

В точці 2 (для стійки)

$$\sigma = \frac{M \cdot \left( \frac{h}{2} - t \right)}{I_y} = \frac{122,25 \cdot 10^3 \cdot 16,77 \cdot 10^{-2}}{13380 \cdot 10^{-8}} = 153 \text{ МПа} ,$$

$$\tau = \frac{Q \cdot S_n}{d \cdot I_y} = \frac{18,9 \cdot 10^3 \cdot 310 \cdot 10^{-6}}{0,75 \cdot 10^{-2} \cdot 13380 \cdot 10^{-8}} = 5,8 \text{ МПа} ,$$

оскільки статичний момент полиці двотавру відносно нейтральної осі

$$S_n = bt \frac{h-t}{2} = 14,5 \cdot 1,23 \frac{36 - 1,23}{2} = 14,5 \cdot 1,23 \cdot 17,4 = 310 \text{ см}^3 .$$

Для пластичних матеріалів по четвертій теорії міцності

$$\sigma_{red} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} = \sqrt{153^2 + 3 \cdot 5,8^2} \approx 153 \text{ МПа} < 160 \text{ МПа} .$$

4. Будуємо епюри  $\sigma$  та  $\tau$  (рис.3).

Для побудови епюри нормальних напружень  $\sigma = \frac{Mz}{I}$  (пряма лінія) по висоті

перерізу  $x = 4,5 - 1,76 = 2,74 \text{ м}$  використовуємо значення  $\sigma_{\max} = 167,4 \text{ МПа}$ .

Для побудови епюри дотичних напружень  $\tau = \frac{QS(z)}{Ib(z)}$  (в нашому випадку це

парабола) по висоті стійки знаходимо значення  $\tau$  в характерних точках перерізу за формулою Журавського

В точці 1  $S_1 = 0 \Rightarrow \tau_1 = 0$ .

В точці 2 (для стійки)  $\tau_2 = \frac{Q_{\max} S_n}{d \cdot I_y} = \frac{141,1 \cdot 10^3 \cdot 310 \cdot 10^{-6}}{0,75 \cdot 10^{-2} \cdot 13380 \cdot 10^{-8}} = 43 \text{ МПа} ,$

оскільки статичний момент полиці двотавру відносно нейтральної осі

$$S_n = bt \frac{h-t}{2} = 14,5 \cdot 1,23 \frac{36-1,23}{2} = 14,5 \cdot 1,23 \cdot 17,4 = 310 \text{ см}^3.$$

В точці 3  $\tau_3 = \pm \tau_{\max} = \pm 59,4 \text{ МПа}$ .

Знаки на епюрах  $\sigma$  і  $\tau$  визначаються по епюрах  $M(x)$  та  $Q(x)$  і формулах для напружень.

5. Обчислюємо переміщення балки методом початкових параметрів.

Запишемо загальні формули для прогину і кута повороту перерізу:

$$EI [w(x) - w_0 - \varphi_0 x] = -68,9 \frac{x^3}{6} + 50 \frac{(x-1,5)^3}{6} + 80 \frac{(x-2,5)^4}{24};$$

$$EI [\varphi(x) - \varphi_0] = -68,9 \frac{x^2}{2} + 50 \frac{(x-1,5)^2}{2} + 80 \frac{(x-2,5)^3}{6}.$$

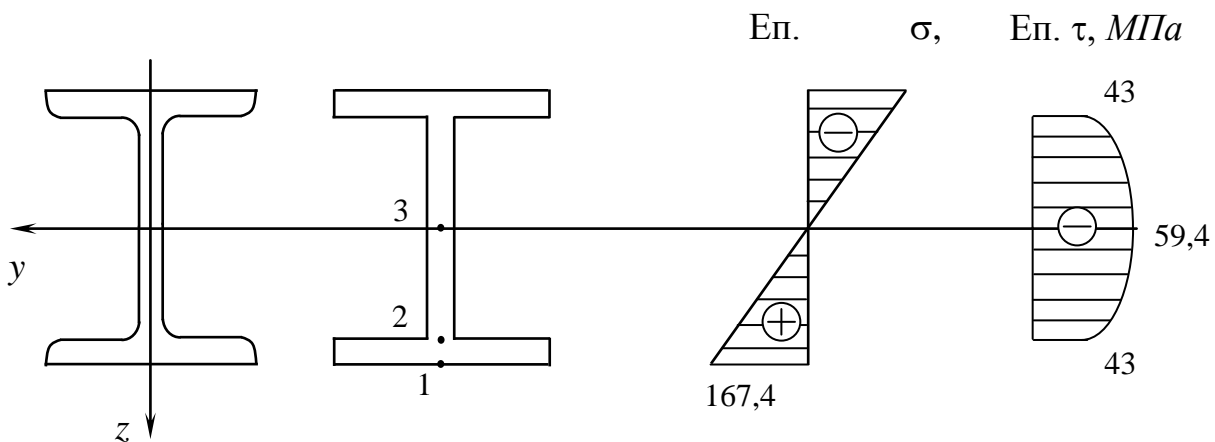


Рис.3

При обчисленні  $w(x)$ ,  $\varphi(x)$  в точці  $x_k$  в цих формулах враховуємо тільки силові фактори, що лежать лівіше від  $x_k$ .

Початкові параметри:

$$Q_0 = 68,9 \text{ кН}, \quad M_0 = 0 \quad (\text{визначаються з епюр});$$

$$w_0 = 0, \quad \varphi_0 = ? \quad (\text{визначаються з умов закріплення балки}).$$

Для визначення  $\varphi_0$  користуємося умовою закріплення правого кінця балки (при  $x = 4,5 \text{ м}$  прогин  $w(4,5) = 0$ ).

З умови  $w(4,5) = 0$  маємо

$$EI [w(4,5) - 0 - 4,5\varphi_0] = -68,9 \frac{4,5^3}{6} + 50 \frac{(4,5 - 1,5)^3}{6} + 80 \frac{(4,5 - 2,5)^4}{24};$$

$$- 4,5 EI \varphi_0 = -1046,4 + 225 + 53,3; \quad EI \varphi_0 = 170,68 \text{ (кН} \cdot \text{м}^2 \text{)}.$$

Таким чином, прогин і кут повороту вираховуємо за формулами

$$EIw(x) = 170,68 \cdot x - 68,9 \frac{x^3}{6} + 50 \frac{(x - 1,5)^3}{6} + 80 \frac{(x - 2,5)^4}{24};$$

$$EI\varphi(x) = 170,68 - 68,9 \frac{x^2}{2} + 50 \frac{(x - 1,5)^2}{2} + 80 \frac{(x - 2,5)^3}{6}.$$

Вибираємо на осі балки декілька точок і обчислюємо  $w(x)$ ,  $\varphi(x)$  в кожній точці. Результати збираємо в таблицю і будуємо епюри  $w(x)$ ,  $\varphi(x)$ .

$x, \text{ м}$	$EI\varphi(x), \text{ кН} \cdot \text{м}^2 \text{ рад}$	$EIw(x), \text{ кН} \cdot \text{м}^3$
0	170,68	0
1	136,23	159,2
1,5	93,17	217,26
2,5	-19,63	255,6
3,5	-138	195,4
4,5	-195,3	0

Обчислюємо дійсні значення кута повороту та прогину в перерізі  $x = 1,5 \text{ м}$ , поділивши знайдені значення на жорсткість балки (модуль Юнга  $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$ )

$$EI = 2 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 13380 \cdot 10^{-8} = 26760 \cdot 10^3 \text{ Н} \cdot \text{м}^2;$$

$$\varphi = \frac{93,17 \cdot 10^3}{26760 \cdot 10^3} = 3,48 \cdot 10^{-3} \text{ рад}; \quad w = \frac{217,26 \cdot 10^3}{26760 \cdot 10^3} = 8,1 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 8,1 \text{ мм}.$$

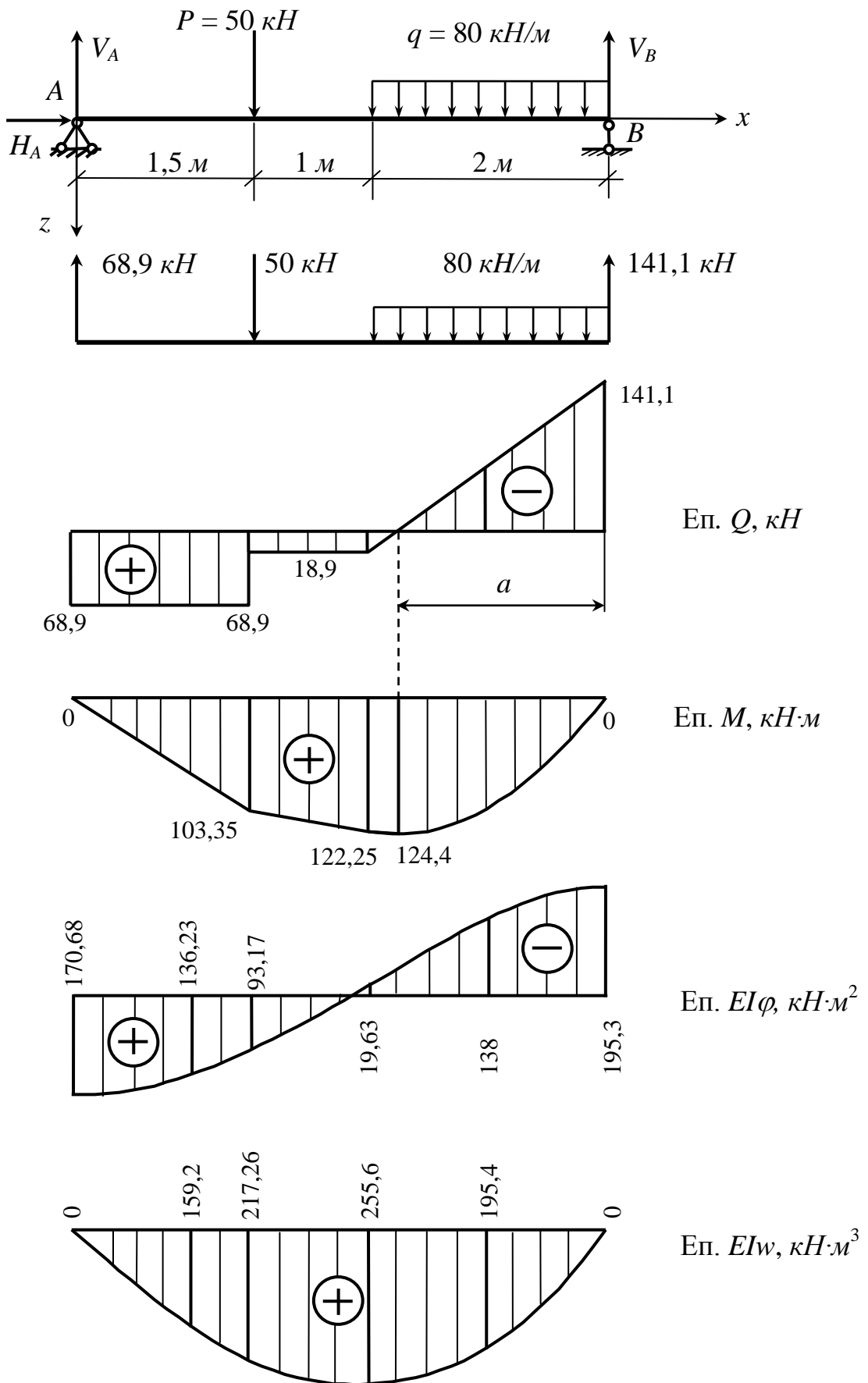


Рис.4



## *Розрахунково-графічна робота*

### **Нецентральне стиснення колони і стійкість стержня**

1. Визначити допустиме навантаження нецентральної стиснутої колони масивного профілю, побудувати ядро перерізу і еліпс інерції. Схема і розміри поперечного перерізу, точка прикладання сили приведені в дод. 28. Допустимі напруження  $\sigma_{adm}^- = 3000 \text{ кПа}$  (на стиснення) і  $\sigma_{adm}^+ = 300 \text{ кПа}$  (на розтягування).

2. Підібрати і розташувати елементи поперечного перерізу центрально стиснутого гнучкого сталевго стержня, виходячи з вимог рівності відносно головних осей. Визначити коефіцієнт запасу стійкості. Тип поперечного перерізу стержня, довжина  $l$  і спосіб закріплення його кінців, поздовжня стискаюча сила  $P$  наведені в дод. 35. На схемі поперечного перерізу стержня жорсткі сполучні планки умовно показані пунктиром.

#### *Порядок виконання роботи*

1.1. Визначити положення головних центральних осей інерції і головних центральних моментів інерції.

1.2. Побудувати еліпс інерції.

1.3. Побудувати ядро перерізу.

1.4. Визначити положення нейтральної лінії і координати небезпечних точок у розтягнутій і стиснутій зонах перерізу.

1.5. Визначити допустиму силу з умов міцності при розтягуванні і стискуванні.

1.6. Обчислити напруження у небезпечних точках перерізу і побудувати епюри нормальних напружень.

2.1. Підібрати поперечний переріз колони способом послідовних наближень.

2.2. Визначити відстані  $a$  між окремими елементами поперечного перерізу колони.

2.3. Визначити критичну силу  $P_{кр}$  і коефіцієнт запасу на стійкість.

2.4. Накреслити в масштабі визначений поперечний переріз колони.

## Контрольні запитання

1. Коли і як користуватися формулою для визначення нормальних напружень

$$\sigma = \pm \frac{P}{A} \left( 1 + \frac{y y_p}{i_z^2} + \frac{z z_p}{i_y^2} \right) ?$$

2. Коли треба користуватися формулою для визначення нормальних напружень

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M_y z}{I_y} + \frac{M_z y}{I_z} ?$$

3. Що таке нейтральна лінія? Рівняння нейтральної лінії. Для чого знаходиться нейтральна лінія?

4. Що таке ядро перерізу?

5. Як знаходиться ядро перерізу способом “обкатки” контуру перерізу?

6. Коли і як користуватися формулами  $\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$ ,  $\sigma_{кр} = a - b\lambda$  для визначення критичного напруження?

7. Що таке  $\lambda = \frac{\mu l}{i_{\min}}$ ? Графік залежності  $\sigma_{кр}$  від  $\lambda$ .

8. Як знайти критичну силу?

9. Як знайти допустиму силу (при заданому  $\sigma_{adm}^-$ ; при заданому коефіцієнті запасу стійкості  $n_{кр}$ )?

10. Як формулюється умова міцності при стискуванні гнучких стержнів?

11. Як проводиться розрахунок на підбір перерізу (проектувальний) при стискуванні гнучкого стержня?

З а д а ч а. Колона, показана на рис.5 поперечного перерізу (розміри дані в дм), стискується силою  $P$ , прикладеною в заданій точці перерізу. Визначити допустиму стискуючу силу при  $\sigma_{adm}^+ = 0,3 \text{ МПа}$ ,  $\sigma_{adm}^- = 3 \text{ МПа}$ . Побудувати еліпс інерції, ядро перерізу, епюру нормальних напружень.

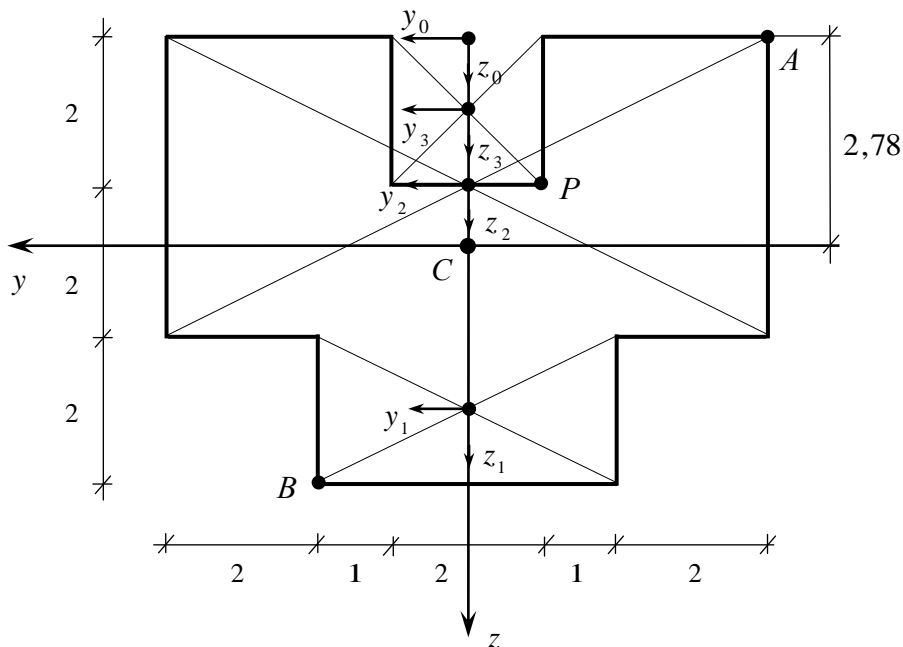


Рис. 5

Р о з в ' я з о к. Переріз має вертикальну вісь симетрії, яка буде головною центральною віссю. Друга головна центральна вісь проходить перпендикулярно до неї через центр ваги перерізу. Для визначення координати центру ваги перерізу розбиваємо його на три прямокутники і вводимо локальні системи координат  $y_i, z_i$  з початком в центрі ваги прямокутників. Знаходимо площі і осьові моменти інерції для кожного прямокутника (відцентрові моменти інерції дорівнюють нулеві):

$$A_1 = 4 \cdot 2 = 8 \text{ дм}^2, \quad A_2 = 8 \cdot 4 = 32 \text{ дм}^2, \quad A_3 = 2 \cdot 2 = 4 \text{ дм}^2,$$

$$I_{y1} = \frac{4 \cdot 2^3}{12} = 2,67 \text{ дм}^4, \quad I_{y2} = \frac{8 \cdot 4^3}{12} = 42,67 \text{ дм}^4, \quad I_{y3} = \frac{2 \cdot 2^3}{12} = 1,33 \text{ дм}^4,$$

$$I_{z1} = \frac{2 \cdot 4^3}{12} = 10,67 \text{ дм}^4, \quad I_{z2} = \frac{4 \cdot 8^3}{12} = 170,67 \text{ дм}^4, \quad I_{z3} = \frac{2 \cdot 2^3}{12} = 1,33 \text{ дм}^4.$$

Вводимо допоміжну систему координат  $y_0, z_0$ , в якій просто визначаються координати  $z_{0i}$  центрів ваги локальних фігур (прямокутників):

$$z_{01} = 5 \text{ дм} , \quad z_{02} = 2 \text{ дм} , \quad z_{03} = 1 \text{ дм} ,$$

$$A = A_1 + A_2 - A_3 = 8 + 32 - 4 = 36 \text{ дм}^2 ,$$

$$z_{0c} = \frac{z_{01}A_1 + z_{02}A_2 - z_{03}A_3}{A} = \frac{5 \cdot 8 + 2 \cdot 32 - 1 \cdot 4}{36} = 2,78 \text{ дм} .$$

Вводимо головні центральні осі  $y, z$  і знаходимо головні центральні моменти інерції і радіуси інерції. Визначивши координати  $c_{zi}$  центрів ваги  $i$ -тих прямокутників в центральних координатах  $y, z$

$$c_{z1} = z_{01} - z_{0c} = 5 - 2,78 = 2,22 \text{ дм} ,$$

$$c_{z2} = z_{02} - z_{0c} = 2 - 2,78 = -0,78 \text{ дм} ,$$

$$c_{z3} = z_{03} - z_{0c} = 1 - 2,78 = -1,78 \text{ дм} ,$$

знаходимо

$$\begin{aligned} I_y &= I_{y1} + c_{z1}^2 A_1 + I_{y2} + c_{z2}^2 A_2 - (I_{y3} + c_{z3}^2 A_3) = \\ &= 2,67 + 2,22^2 \cdot 8 + 42,67 + (-0,78)^2 \cdot 32 - (1,33 + (-1,78)^2 \cdot 4) = \\ &= 2,67 + 39,43 + 42,67 + 19,47 - (1,33 + 12,67) = 90,24 \text{ дм}^4 , \end{aligned}$$

$$I_z = I_{z1} + I_{z2} - I_{z3} = 10,67 + 170,67 - 1,33 = 180,01 \text{ дм}^4 .$$

Для радіусів інерції одержимо значення

$$i_y^2 = \frac{I_y}{A} = \frac{90,24}{36} = 2,51 \text{ дм}^2 , \quad i_y = 1,58 \text{ дм} ,$$

$$i_z^2 = \frac{I_z}{A} = \frac{180,01}{36} = 5,00 \text{ дм}^2 , \quad i_z = 2,24 \text{ дм} .$$

Будуємо еліпс інерції

$$\frac{y^2}{2,24^2} + \frac{z^2}{1,58^2} = 1 .$$

Знаходимо координати  $y_p = -1 \text{ дм} , \quad z_p = 2 - 2,78 = -0,78 \text{ дм}$  точки прикладання сили в центральних координатах.

Рівняння нейтральної лінії

$$\frac{y}{a_y} + \frac{z}{a_z} = 1$$

в нашому випадку набирає вигляду

$$\frac{y}{5,00} + \frac{z}{3,22} = 1,$$

$$\text{оскільки } a_y = -\frac{5,00}{-1} = 5,00 \text{ дм}, \quad a_z = -\frac{2,51}{-0,78} = 3,22 \text{ дм}.$$

Проводимо нейтральну лінію і визначаємо найбільш віддалені точки від неї: в стиснутій зоні точка  $A$  з координатами  $y_A = -4 \text{ дм}$ ,  $z_A = -2,78 \text{ дм}$ , в розтягнутій зоні точка  $B$  з координатами  $y_B = 2 \text{ дм}$ ,  $z_B = 6 - 2,78 = 3,22 \text{ дм}$ .

Запишемо умову міцності в точці  $A$  і знайдемо силу  $P$ :

$$-\frac{P}{A} \left( 1 + \frac{z_P z_A}{i_y^2} + \frac{y_P y_A}{i_z^2} \right) = -\sigma_{adm}^-,$$

$$P \left( 1 + \frac{-0,78 \cdot (-2,78)}{2,51} + \frac{-1 \cdot (-4)}{5,00} \right) = 3,0 \cdot 10^6 \cdot 36 \cdot 10^{-2},$$

$$2,66 P = 108 \cdot 10^4, \quad P = 406 \cdot 10^3 \text{ Н} = 406 \text{ кН}.$$

Запишемо умову міцності в точці  $B$  і знайдемо силу  $P$ :

$$-\frac{P}{A} \left( 1 + \frac{z_P z_B}{i_y^2} + \frac{y_P y_B}{i_z^2} \right) = \sigma_{adm}^+,$$

$$-P \left( 1 + \frac{-0,78 \cdot 3,22}{2,51} + \frac{-1 \cdot 2}{5,00} \right) = 0,3 \cdot 10^6 \cdot 36 \cdot 10^{-2},$$

$$0,40 P = 10,8 \cdot 10^4, \quad P = 270 \cdot 10^3 \text{ Н} = 270 \text{ кН}.$$

За допустиме значення сили приймаємо меншу з двох знайдених, тобто  $P_{adm} = 270 \text{ кН}$ .

Знаходимо напруження в точках  $A$  і  $B$

$$\sigma_A = -\frac{P_{adm}}{A} \left( 1 + \frac{z_P z_A}{i_y^2} + \frac{y_P y_A}{i_z^2} \right) = -\frac{270 \cdot 10^3}{36 \cdot 10^{-2}} \cdot 2,66 = -2 \text{ МПа},$$

$$\sigma_B = -\frac{P_{adm}}{A} \left( 1 + \frac{z_P z_B}{i_y^2} + \frac{y_P y_B}{i_z^2} \right) = -\frac{270 \cdot 10^3}{36 \cdot 10^{-2}} \cdot (-0,40) = 0,3 \text{ МПа}$$

і будемо епюру напружень на лінії, перпендикулярній до нейтральної лінії перерізу.

Для побудови ядра перерізу проводимо дотичні до його контуру і знаходимо відповідні координати вершин ядра перерізу:

– дотична I-I

$$a_y = \infty, \quad y_{Я} = 0,$$

$$a_z = -2,78 \text{ дм}, \quad z_{Я} = -\frac{2,51}{-2,78} = 0,90 \text{ дм};$$

– дотична II-II

$$a_y = -4 \text{ дм}, \quad y_{Я} = -\frac{5,00}{-4} = 1,25 \text{ дм},$$

$$a_z = \infty, \quad z_{Я} = 0;$$

– дотична III-III

$$a_y = -(4 + 1,22) = -5,22 \text{ дм}, \quad y_{Я} = -\frac{5,00}{-5,22} = 0,96 \text{ дм},$$

$$a_z = 1,22 + 2 + 2 = 5,22 \text{ дм}, \quad z_{Я} = -\frac{2,51}{5,22} = -0,48 \text{ дм};$$

– дотична IV-IV

$$a_y = \infty, \quad y_{Я} = 0,$$

$$a_z = 1,22 + 2 = 3,22 \text{ дм}, \quad z_{Я} = -\frac{2,51}{3,22} = -0,78 \text{ дм}.$$

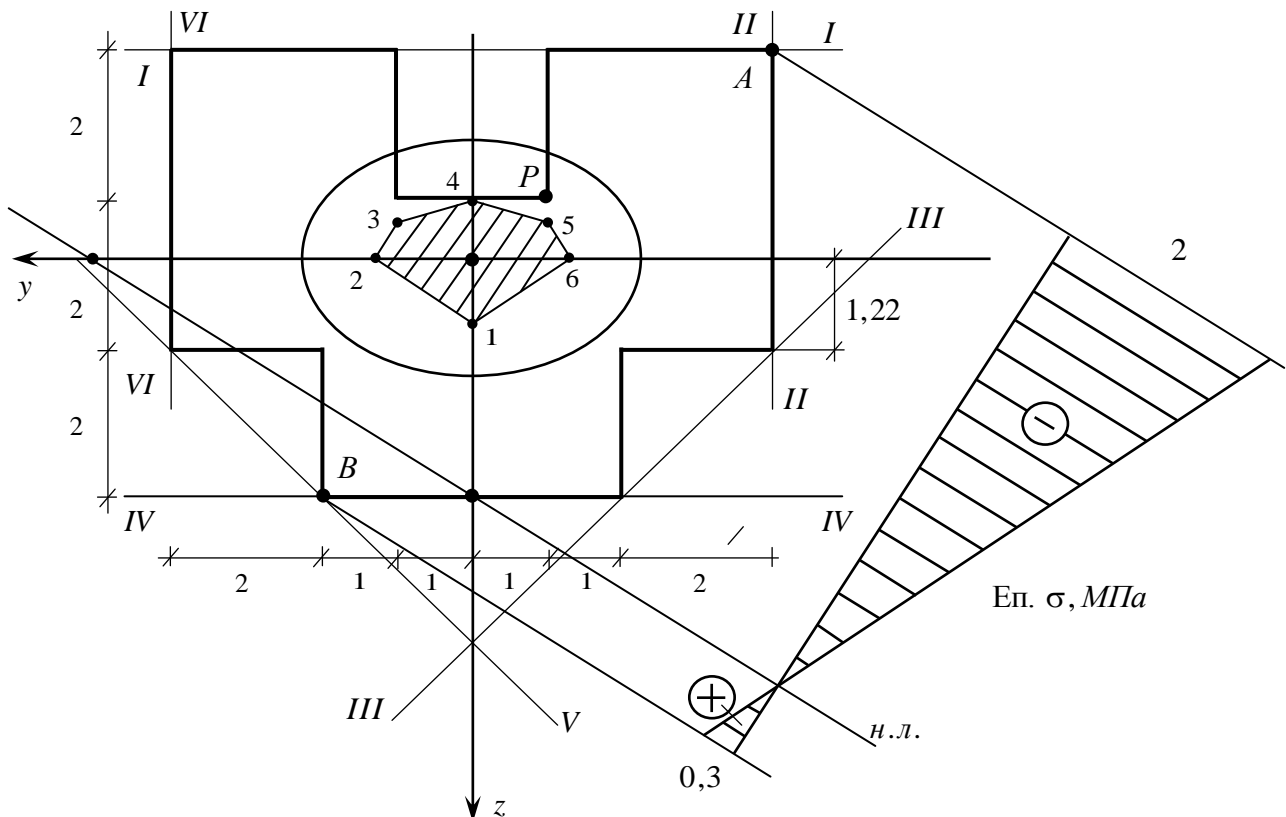


Рис.6

Вершини ядра для дотичних V-V та VI-VI симетричні до вершин ядра для дотичних відповідно III-III та II-II.

Наносимо вершини ядра перерізу на рисунок і будуємо ядро перерізу.

Еліпс інерції, ядро перерізу, нейтральна лінія, еюра напружень показані на рис.6

**З а д а ч а.** Підібрати рівностійкий в обох головних напрямках стержень довжиною  $l = 8 \text{ м}$  з двох швелерів, з'єднаних жорсткими планками (рис.7). Стискуюча сила  $P = 600 \text{ кН}$ , допустиме напруження  $\sigma_{adm}^- = 160 \text{ МПа}$ , модуль Юнга  $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$ , коефіцієнти  $a \approx 310 \text{ МПа}$ ,  $b \approx 1,14 \text{ МПа}$ .

**Р о з в ' я з о к.** Площа складеного поперечного перерізу стержня  $A = 2 A_{шв}$ . Головні центральні моменти інерції

$$I_u = 2 I_{y.шв},$$

$$I_v = 2 \left( I_{z.шв} + \frac{a^2}{4} A_{шв} \right).$$

Стержень буде рівностійким в обох головних напрямках, якщо  $I_u = I_v$ . З цієї умови знаходиться відстань між центрами ваги перерізу

$$a = 2 \sqrt{\frac{I_{y.шв} - I_{z.шв}}{A_{шв}}}.$$

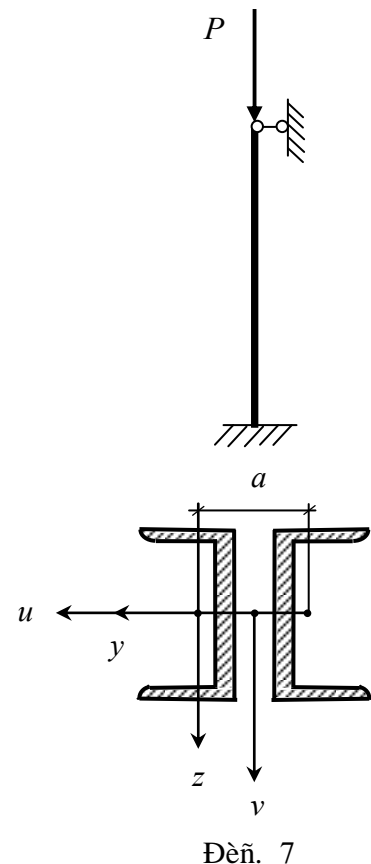
Радіус інерції перерізу

$$i = i_u = i_v = \sqrt{\frac{I_u}{A}} = \sqrt{\frac{2 I_{y.шв}}{2 A_{шв}}} = i_{y.шв}.$$

Поперечний переріз стержня підбираємо з умови міцності при стискуванні гнучких стержнів

$$\frac{P}{A} = \varphi \sigma_{adm}^-.$$

Так як в цій формулі невідомі площа  $A$  і коефіцієнт  $\varphi$  зменшення основного допустимого напруження  $\sigma_{adm}^-$ , то задачу розв'язуємо методом послідовних наближень. Рекомендується притримуватися наступного порядку обчислень:



– *перше наближення*. Задаємося початковим значенням  $\varphi_I^0 = 0,5 \div 0,7$  і послідовно знаходимо  $A_I, \lambda_I, \varphi_I$ . Якщо розбіжність між  $\varphi_I^0$  і  $\varphi_I$  велика, то виконуємо друге наближення.

– *друге наближення*. Приймаємо  $\varphi_{II}^0 = 0,5 \left( \varphi_I^0 + \varphi_I \right)$  і послідовно знаходимо  $A_{II}, \lambda_{II}, \varphi_{II}$ . Якщо розбіжність між  $\varphi_{II}^0$  і  $\varphi_{II}$  велика, то аналогічним чином виконуємо третє наближення.

Цей процес продовжуємо до тих пір, поки розбіжність між  $\varphi_N^0$  і  $\varphi_N$  буде незначна. Практично необхідно виконати три-чотири наближення.

При незначній розбіжності між  $\varphi_N^0$  і  $\varphi_N$  знаходимо фактичне  $\sigma_{факт} = P/A_N$  і допустиме  $\sigma_{дон} = \varphi_N \sigma_{adm}^-$  напруження. Якщо відхилення  $\sigma_{факт}$  від  $\sigma_{дон}$  не перевищує 5%, то розв'язок буде закінченим.

Зауваження. Для прокатних профілів цього не завжди вдається досягти і тоді оцінюємо два сусідні номери прокатних профілів: беремо той з них, для якого  $\sigma_{факт} < \sigma_{дон}$ .

На закінчення розрахунку визначаємо критичну силу  $P_{кр}$  і коефіцієнт запасу стійкості  $n_{кр} = P_{кр} / P$ .

Перейдемо до безпосереднього розв'язку задачі. В першому наближенні задаємо  $\varphi_I^0 = 0,6$ .

Знаходимо відповідну площу

$$A = \frac{P}{\varphi_I^0 \sigma_{adm}^-} = \frac{600 \cdot 10^3}{0,6 \cdot 160 \cdot 10^6} = 62,5 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 = 62,5 \text{ см}^2, \quad A_{шв} = 31,25 \text{ см}^2.$$

По сортаменту беремо швелер № 24, для якого  $A_{шв} = 30,60 \text{ см}^2$ ,  $i_{y.шв} = 9,73 \text{ см}$ .

Гнучкість стержня

$$\lambda = \frac{\mu l}{i} = \frac{0,7 \cdot 800}{9,73} = 58.$$



Застосовуючи лінійну апроксимацію, для  $\lambda = 58$  одержимо

$$\varphi_I = 0,89 + \frac{58 - 50}{60 - 50} (0,86 - 0,89) = 0,89 - 0,8 \cdot 0,03 = 0,866 ,$$

оскільки по таблиці (дод. 34)  $\lambda_1 = 50$  ,  $\varphi_1 = 0,89$  ,  $\lambda_2 = 60$  ,  $\varphi_2 = 0,86$  .

Розбіжність між  $\varphi_I^0 = 0,6$  та  $\varphi_I = 0,866$  велика. Робимо друге наближення.

В другому наближенні покладаємо

$$\varphi_{II}^0 = \frac{\varphi_I^0 + \varphi_I}{2} = \frac{0,6 + 0,866}{2} = 0,733 .$$

Знаходимо відповідну площу

$$A = \frac{600 \cdot 10^3}{0,733 \cdot 160 \cdot 10^6} = 51,16 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 = 51,16 \text{ см}^2 , A_{шв} = 25,58 \text{ см}^2 .$$

По сортаменту беремо швелер № 20а, для якого  $A_{шв} = 25,20 \text{ см}^2$  ,  
 $i_{y.шв} = 8,15 \text{ см}$  .

Гнучкість стержня

$$\lambda = \frac{0,7 \cdot 800}{8,15} = 69 .$$

Застосовуючи лінійну апроксимацію, для  $\lambda = 69$  одержимо

$$\varphi_{II} = 0,86 + \frac{69 - 60}{70 - 60} (0,81 - 0,86) = 0,86 - 0,9 \cdot 0,05 = 0,815 ,$$

оскільки по таблиці  $\lambda_1 = 60$  ,  $\varphi_1 = 0,86$  ,  $\lambda_2 = 70$  ,  $\varphi_2 = 0,81$  .

Зважаючи на невелику розбіжність між  $\varphi_{II}^0$  та  $\varphi_{II}$  , визначимо фактичне і допустиме напруження.

$$\sigma_{факт} = \frac{P}{2 A_{шв}} = \frac{600 \cdot 10^3}{2 \cdot 25,20 \cdot 10^{-4}} = 119 \cdot 10^6 \text{ Па} = 119 \text{ МПа} ,$$

$$\sigma_{дон} = \varphi_{II} \sigma_{adm}^- = 0,815 \cdot 160 = 130 \text{ МПа} .$$

Недонапруження складає  $\frac{130 - 119}{130} \cdot 100 \% \approx 8\%$  . Третє наближення не

робимо, а зменшимо поперечний переріз стержня, вибравши швелер № 20 (попередній переріз № 20а), для якого  $A_{шв} = 23,4 \text{ см}^2$ ,  $i_{y.шв} = 8,07 \text{ см}$ .

Гнучкість стержня

$$\lambda = \frac{0,7 \cdot 800}{8,07} = 69 .$$

Застосовуючи лінійну апроксимацію, для  $\lambda = 69$  одержимо

$$\varphi_{III} = 0,86 + \frac{69 - 60}{70 - 60} (0,81 - 0,86) = 0,86 - 0,9 \cdot 0,05 = 0,815 ,$$

оскільки по таблиці  $\lambda_1 = 60$ ,  $\varphi_1 = 0,86$ ,  $\lambda_2 = 70$ ,  $\varphi_2 = 0,81$ .

Знаходимо фактичне і допустиме напруження

$$\sigma_{факт} = \frac{P}{2 A_{шв}} = \frac{600 \cdot 10^3}{2 \cdot 23,4 \cdot 10^{-4}} = 128 \cdot 10^6 \text{ Па} = 128 \text{ МПа} ,$$

$$\sigma_{дон} = \varphi_{III} \sigma_{adm}^- = 0,815 \cdot 160 = 130 \text{ МПа} .$$

Розбіжність між фактичним і допустимим напруженнями не перевищує 5%.

Поперечний переріз складається з двох швелерів № 20, для якого  $A_{шв} = 23,4 \text{ см}^2$ ,  $I_{y.шв} = 1520 \text{ см}^4$ ,  $I_{z.шв} = 113 \text{ см}^4$ . Відстань

$$a = 2 \sqrt{\frac{1520 - 113}{23,4}} = 15,5 \text{ см} .$$

Знайдемо критичну силу  $P_{кр}$  і коефіцієнт запасу стійкості. Оскільки гнучкість  $\lambda = 69$ , то користуючись формулою Тетмаєра при  $a \approx 310 \text{ МПа}$ ,  $b \approx 1,14 \text{ МПа}$ , знайдемо критичне напруження

$$\sigma_{кр} = a - b\lambda = 310 - 1,41 \cdot 69 = 231 \text{ МПа} .$$

Критична сила

$$P_{кр} = 2 A_{шв} \cdot \sigma_{кр} = 2 \cdot 23,4 \cdot 10^{-4} \cdot 231 \cdot 10^6 = 1081 \cdot 10^3 \text{ Н} = 1081 \text{ кН} .$$

Коефіцієнт запасу стійкості

$$n_{\kappa p} = \frac{P_{\kappa p}}{P} = \frac{1081}{600} = 1,8 .$$

### 3. ОСНОВНІ СПІВВІДНОШЕННЯ ПОЧАТКОВОГО КУРСУ ОПОРУ МАТЕРІАЛІВ

#### I. Поздовжнє розтягування (стискування) стержнів:

рівняння рівноваги  $\frac{dN}{dx} + n(x) = 0$ ,

поздовжня сила  $N$  зв'язана з осьовим переміщенням  $u$  рівнянням

$$N = EA \frac{du}{dx},$$

формула для нормальних напружень  $\sigma = \frac{N}{A}$ ,

умова міцності  $\sigma_{\max} \leq \sigma_{adm}$ ;  $\sigma_{\max} = \frac{N_{\max}}{A}$  (при постійній площі  $A$ ),

видовження стержня визначається з рівняння  $EA \frac{du}{dx} = N$ ; при постійних  $N$  та

$$EA \text{ на відрізьку } l \text{ видовження } u_l = \frac{Nl}{EA},$$

умова жорсткості  $u_{\max} \leq u_{adm}$ ,

$$\text{потенціальна енергія } U = \frac{1}{2} \int_{x_1}^{x_2} \frac{N^2}{EA} dx.$$

#### II. Кручення стержнів круглого перерізу:

рівняння рівноваги  $\frac{dM_k}{dx} + m_k(x) = 0$ ,

крутильний момент  $M_k$  зв'язаний з кутом закручування  $\Omega$  рівнянням

$$M_k = GI_p \frac{d\Omega}{dx},$$

формула для дотичних напружень  $\tau = \frac{M_k r}{GI_p}$ ,

умова міцності  $\tau_{\max} \leq \tau_{adm}$ ;  $\tau_{\max} = \frac{M_{k.\max}}{W_p}$  (при постійному полярному

моменті опору  $W_p$ ),

кут закручування визначається з рівняння  $GI_p \frac{d\Omega}{dx} = M_k$ ; при постійних  $M_k$

та  $GI_p$  на відрізку  $l$  кут закручування  $\Omega_l = \frac{M_k l}{GI_p}$ ,

умова жорсткості  $\Omega_{\max} \leq \Omega_{adm}$ ,

потенціальна енергія  $U = \frac{1}{2} \int_{x_1}^{x_2} \frac{M_k^2}{GI_p} dx$ .

### Кручення стержнів некруглого масивного профілю

$$\tau_{\max} = \frac{M_k}{W_k}, \quad \Omega_{відн.} = \frac{M_k}{GI_k},$$

для витягнутого ( $h > 3b$ ) прямокутного профілю  $I_k = hb^3/3$ ,  $W_k = hb^2/3$ .

### Кручення тонкостінних стержнів відкритого профілю

$$\tau_{\max} = \frac{M_k}{I_k} \delta_{\max}, \quad \Omega_{відн.} = \frac{M_k}{GI_k}, \quad I_k = (s_1 \delta_1^3 + \dots + s_n \delta_n^3)/3.$$

### Кручення тонкостінних стержнів закритого профілю

$$\tau_{\max} = \frac{M_k}{\delta \omega}, \quad \Omega_{відн.} = \frac{M_k}{G \omega^2} \oint \frac{ds}{\delta}, \quad \omega = 2 \cdot (\text{площа охоплена контуром}).$$

## III. Плоске (пряме) згинання:

рівняння рівноваги  $\frac{dM}{dx} - Q = 0$ ,  $\frac{dQ}{dx} + q(x) = 0$ ,

згинальний момент  $M$  зв'язаний з прогином  $w$  рівнянням  $M = -EI \frac{d^2 w}{dx^2}$ ,

формула для нормального напруження  $\sigma = \frac{Mz}{I}$ ,

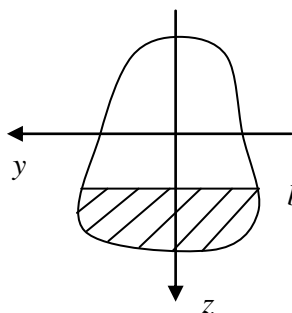


Рис. 8

формула для дотичного напруження  $\tau = \frac{QS(z)}{Ib(z)}$

(формула Журавського),

умова міцності по нормальних напруженнях

$$\sigma_{\max} \leq \sigma_{adm} \quad (\text{при } \tau = 0); \quad \sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W} \quad (\text{при}$$

постійному моменті опору  $W$ ),

умова міцності по дотичних напруженнях  $\tau_{\max} \leq \tau_{adm}$  (при  $\sigma = 0$ );

загальна умова міцності  $\sigma_{red} \leq \sigma_{adm}$  (при  $\sigma \neq 0, \tau \neq 0$ ),

потенціальна енергія 
$$U = \frac{1}{2} \int_{x_1}^{x_2} \frac{M^2}{EI} dx + \left( \frac{1}{2} \int_{x_1}^{x_2} k \frac{Q^2}{GA} dx \right).$$

❖ прогини  $w$  і кути повороту  $\varphi = \frac{dw}{dx}$  перерізу можна визначити:

а) методом початкових параметрів (МПП); при постійних  $q$  та  $EI$  справедливі формули (додатні напрямки сил і моментів показані на рис. 9)

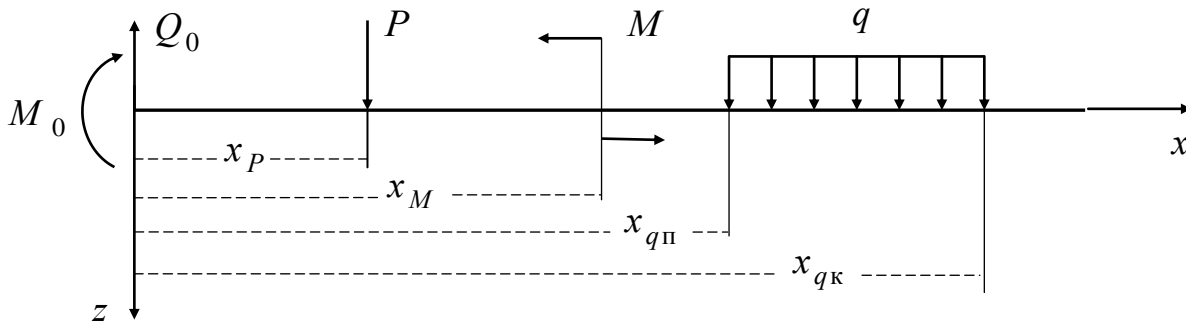


Рис. 9

$$EI(\varphi(x) - \varphi_0) = -M_0 x - Q_0 \frac{x^2}{2} + \sum M(x - x_M) + \sum P \frac{(x - x_P)^2}{2} + \sum q \left[ \frac{(x - x_{qП})^3}{6} - \frac{(x - x_{qК})^3}{6} \right];$$

$$EI(w(x) - \varphi_0 x - w_0) = -M_0 \frac{x^2}{2} - Q_0 \frac{x^3}{6} + \sum M \frac{(x - x_M)^2}{2} + \sum P \frac{(x - x_P)^3}{6} + \sum q \left[ \frac{(x - x_{qП})^4}{24} - \frac{(x - x_{qК})^4}{24} \right];$$

б) методом Максвела-Мора (МММ)

$$\delta_i = \int \frac{M_p M_i}{EI} dx;$$

одичне навантаження при визначенні прогину – одична сила, одичне навантаження при визначенні кута повороту – одичний момент.

Інтеграли Мора обчислюються способом множення епюр

$$\int M_p M_i dx = \omega_p \cdot M_{i.cp}$$

або за формулою Сімпсона-Корноухова

$$\int M_p M_i dx = \frac{l}{6} (M_{p,\Pi} M_{i,\Pi} + 4M_{p,C} M_{i,C} + M_{p,K} M_{i,K}).$$

Умова жорсткості  $w_{\max} \leq w_{adm}$ ,  $\varphi_{\max} \leq \varphi_{adm}$ .

#### IV. Побудова епюр.

Поздовжня сила – це проекція зовнішніх сил на вісь стержня.

Крутильний момент – це момент зовнішніх сил, які лежать в перпендикулярній до осі стержня площині, відносно осі стержня.

Перерізуюча (поперечна) сила – це проекція зовнішніх сил на вісь, перпендикулярну до осі балки.

Згинальний момент – це момент зовнішніх сил, які лежать в осьовій площині балки, відносно точки на осі балки.

При побудові епюр треба враховувати всі зовнішні сили по один бік перерізу і користуватись правилом знаків. Додатні напрямки проекцій зовнішніх сил і моментів при побудові епюр показані на рис. 10.



Рис. 10

#### V. Складний опір.

При складному опорі використовуються головні центральні координати (y, z).

❖ При розтягуванні (стискуванні) і просторовому згинанні нормальне

$$\text{напруження } \sigma_x = \frac{N_x}{A} + \frac{M_y z}{I_y} + \frac{M_z y}{I_z};$$

переміщення визначаються з рівнянь

$$EA \frac{du}{dx} = N_x, \quad EI_y \frac{d^2 w}{dx^2} = -M_y, \quad EI_z \frac{d^2 v}{dx^2} = -M_z,$$

повне переміщення  $f = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2}$ .

- ❖ При нецентральному розтягуванні (стискуванні) силою, прикладеною в точці  $(y_p, z_p)$  перерізу, нормальне напруження

$$\sigma_x = \frac{\pm P}{A} \left( 1 + \frac{y \cdot y_p}{i_z^2} + \frac{z \cdot z_p}{i_y^2} \right),$$

рівняння нейтральної лінії

$$1 + \frac{y_n \cdot y_p}{i_z^2} + \frac{z_n \cdot z_p}{i_y^2} = 0 \Rightarrow \frac{y_n}{-i_z^2 / y_p} + \frac{z_n}{-i_y^2 / z_p} = 1,$$

умова міцності  $\sigma_{adm}^- \leq \sigma \leq \sigma_{adm}^+$ ,

ядро перерізу будується способом обкатки нейтральною лінією його контуру, користуючись формулами  $y_{я} = -i_z^2 / a_y$ ,  $z_{я} = -i_y^2 / a_z$ .

- ❖ При косому згинанні нормальне напруження

$$\sigma_x = M \left( \frac{z \cdot \sin \alpha}{I_y} + \frac{y \cdot \cos \alpha}{I_z} \right),$$

рівняння нейтральної лінії  $z = y \cdot \operatorname{tg} \beta$ ,

$$\text{причому } \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta + \frac{I_y}{I_z} = 0.$$

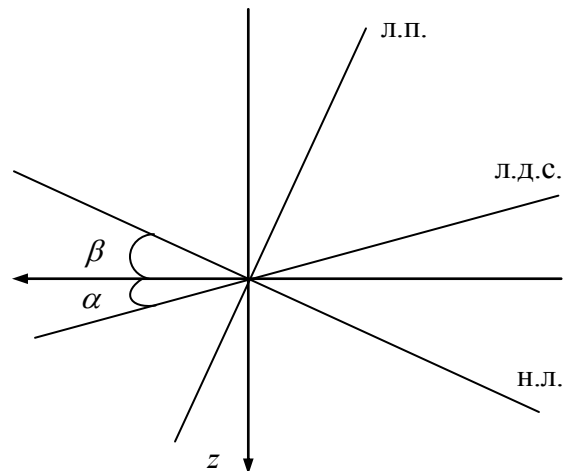


Рис. 11

## VI. Стійкість стержнів.

Формула Ейлера для критичної сили  $P_{кр} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{(\mu l)^2}$ .

В залежності від гнучкості стержня  $\lambda = \frac{\mu l}{i_{\min}}$  критичне напруження

визначається за формулою Ейлера  $\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$  при  $\lambda_{нр} < \lambda$  або за формулою

Тетмаєра  $\sigma_{кр} = a - b\lambda$  при  $\lambda_0 < \lambda < \lambda_{нр}$ .

Розрахунок на міцність при стискуванні гнучкого стержня ведеться за



формулою  $\frac{P}{A} = \varphi \sigma_{adm}^-$ .

## VII. Визначення геометричних характеристик плоских перерізів.

Центр ваги перерізу визначається за формулами  $y_C = S_z/A$ ,  $z_C = S_y/A$ ;

для складених перерізів  $y_C = \sum y_i A_i/A$ ,  $z_C = \sum z_i A_i/A$ , де  $(y_i, z_i)$  – координати центру ваги  $i$ -ої частини.

При визначенні положення головних центральних осей використовуються також формули перетворення для моментів інерції при паралельному перенесенні

$$I_y = I_{y_c} + c_z^2 A, \quad I_z = I_{z_c} + c_y^2 A, \quad I_{yz} = I_{y_c z_c} + c_y c_z A,$$

де  $(c_y, c_z)$  – координати центру ваги перерізу в координатах  $(y, z)$ , і повороті координатних осей

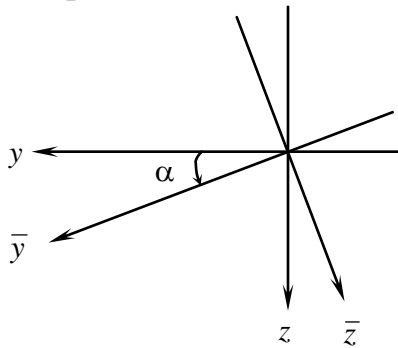


Рис. 12

$$I_{y^-} = I_y \cos^2 \alpha + I_z \sin^2 \alpha - I_{yz} \sin 2\alpha,$$

$$I_{z^-} = I_y \sin^2 \alpha + I_z \cos^2 \alpha + I_{yz} \sin 2\alpha,$$

$$I_{y_z^-} = I_{yz} \cos 2\alpha - \frac{I_z - I_y}{2} \sin 2\alpha.$$

## VIII. Статично невизначені задачі розв'язуються, застосовуючи:

- метод сумісності деформацій (механіко-геометричний підхід);
- метод сил (аналітичний підхід);
- рівняння трьох моментів (аналітичний підхід);
- метод переміщень (аналітичний підхід).

## IX. Розрахунки за граничним навантаженням (несучою здатністю)

- при крученні круглого стержня

$$M_{к.гр} = \tau_T W_{к.пл}, \quad W_{к.пл} = \frac{\pi D^3}{12};$$

- при плоскому згинанні балки

$$M_{гр} = \sigma_T W_{пл}, \quad W_{пл} = 1,2 \dots 1,5 W_y.$$

## Х. Розрахунки при динамічних навантаженнях

при вільних коливаннях вантажу вагою  $Q$  на стержні перша (основна)

$$\text{частота } \omega_1 = 2\pi \cdot f_1 = \sqrt{g / \Delta_{\text{ст}}};$$

при вимушених коливаннях зі збурюючою силою  $P \cos \omega t$  динамічна сила

$$P_d = (Q + P\beta), \text{ причому } \beta = 1 / (1 - \omega^2 / \omega_1^2);$$

при падінні вантажу вагою  $Q$  з висоти  $H$  на пружний стержень  $\sigma_d = \kappa_d \sigma_{\text{ст}}$ ,

де коефіцієнт динамічності

$$\kappa_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{\Delta_{\text{ст}}}} \equiv 1 + \sqrt{1 + \frac{v^2}{g\Delta_{\text{ст}}}};$$

$$\kappa_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{\Delta_{\text{ст}} \left( 1 + \beta \frac{Q_{\text{стерж}}}{Q} \right)}}, \text{ причому } \beta = 1/3 \text{ при поздовжньому ударі,}$$

$\beta = 1/2$  при поперечному ударі;

$$\text{при падінні пружного стержня на жорстку плиту } \sigma_d = \sqrt{\frac{6ENQ}{Al}};$$

при раптовій зупинці маховика з інерційним моментом  $I_M$  у валу довжиною

$$l \text{ напруження } \tau_{\text{max}} = \omega \sqrt{\frac{2GI_M}{lA}}.$$

## КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1. Які позначення і розмірності мають геометричні характеристики (площа, статичні моменти, осьові і відцентровий моменти інерції, полярний момент інерції)?
2. Що таке центр ваги перерізу? Як знайти центр ваги складного перерізу?
3. Що таке головні центральні вісі? Як визначаються головні центральні вісі при наявності осей симетрії фігури? За якими формулами перетворюються моменти інерції при паралельному перенесенні і повороті системи координат? Що таке радіуси інерції, еліпс інерції, моменти опору?
4. Який вигляд має експериментальна діаграма  $\sigma \sim \varepsilon$  для пластичних і крихких матеріалів? Що таке пружне і пластичне деформування? Як формулюється закон Гука? Що таке граничні напруження? Що таке допустимі напруження?

5. Як формулюється гіпотеза плоских перерізів в теорії деформування стержнів?
6. За якими формулами визначаються нормальні напруження при розтягуванні (стискуванні) стержнів? Як визначаються максимальні напруження? Як формулюються умови міцності?
7. Як визначається осьове видовження стержня? Які умови жорсткості?
8. За якими формулами визначаються напруження при крученні круглих стержнів? Як визначаються максимальні напруження? Як формулюються умови міцності?
9. Як визначається кут закручування круглого стержня? Як формулюються умови жорсткості?
10. За якими формулами визначаються нормальні і дотичні напруження при прямому згинанні балки? Як визначаються максимальні напруження? Як формулюються умови міцності?
11. Як визначаються прогини і кути повороту перерізів балки методом початкових параметрів (МПП)? Які умови жорсткості балки?
12. Як визначаються переміщення при розтягуванні (стискуванні), крученні і згинанні стержнів методом Максвела-Мора (МММ)?
13. Що таке статично визначувані і статично невизначувані системи?
14. В чому полягає метод сил розв'язання статично невизначених задач?
15. Як визначаються нормальні напруження і повні переміщення при складному опорі? Як знайти нейтральну лінію і максимальні напруження? Що таке ядро перерізу при нецентральному розтягуванні (стискуванні)? Що таке косе згинання?
16. Що таке стійкість стержнів? Який вигляд має діаграма  $\sigma_{кр} \sim \lambda$  при стискуванні гнучких стержнів (її характерні ділянки)? В яких випадках використовуються формули  $\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$ ,  $\sigma_{кр} = a - b\lambda$  для визначення критичного напруження?
17. Як визначається критична сила? Як визначається допустима сила (при заданому  $\sigma_{adm}^-$  або при заданому  $n_{кр}$ )? Як підбирається переріз гнучкого стержня при стискуванні методом послідовних наближень?
18. Як визначається частота вільних коливань стержня з зосередженим вантажем?
19. Як визначаються динамічні напруження при поздовжньому і поперечному ударах?

### Список літератури

1. *Опір* матеріалів з основами теорії пружності й пластичності: У 2 ч., 5 кн. / За ред. В.Г. Піскунова. – К.: Вища школа. – Ч. 1., кн. 1. Загальні основи курсу. – 1994. – 204 с.; ч. 1., кн. 2. Опір бруса. – 1994. – 335 с. ; ч.1. кн. 3. Опір дво- і тривимірних тіл. – 1995. – 271 с.; ч. 2. кн. 4. Приклади і задачі. – 1995. – 303 с.; ч.2. кн. 5. Розрахунково-проектувальні та лабораторні роботи. – 1995. – 207 с.
2. *Шкелев Л.Т.* Сопротивление материалов и основы строительной механики. – К.: Вища школа, 1989. – 248 с.
3. *Шульга М.О.* Опір матеріалів при статичних навантаженнях. – К.: КНУБА. – 2002. – 140 с.



МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
Київський національний університет будівництва і архітектури

Кафедра опору матеріалів  
200\_ - 200\_ навчальний рік

**РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНА РОБОТА №**

\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_  
(назва роботи)

Шифр \_\_\_\_\_

Факультет \_\_\_\_\_

Курс \_\_\_\_\_

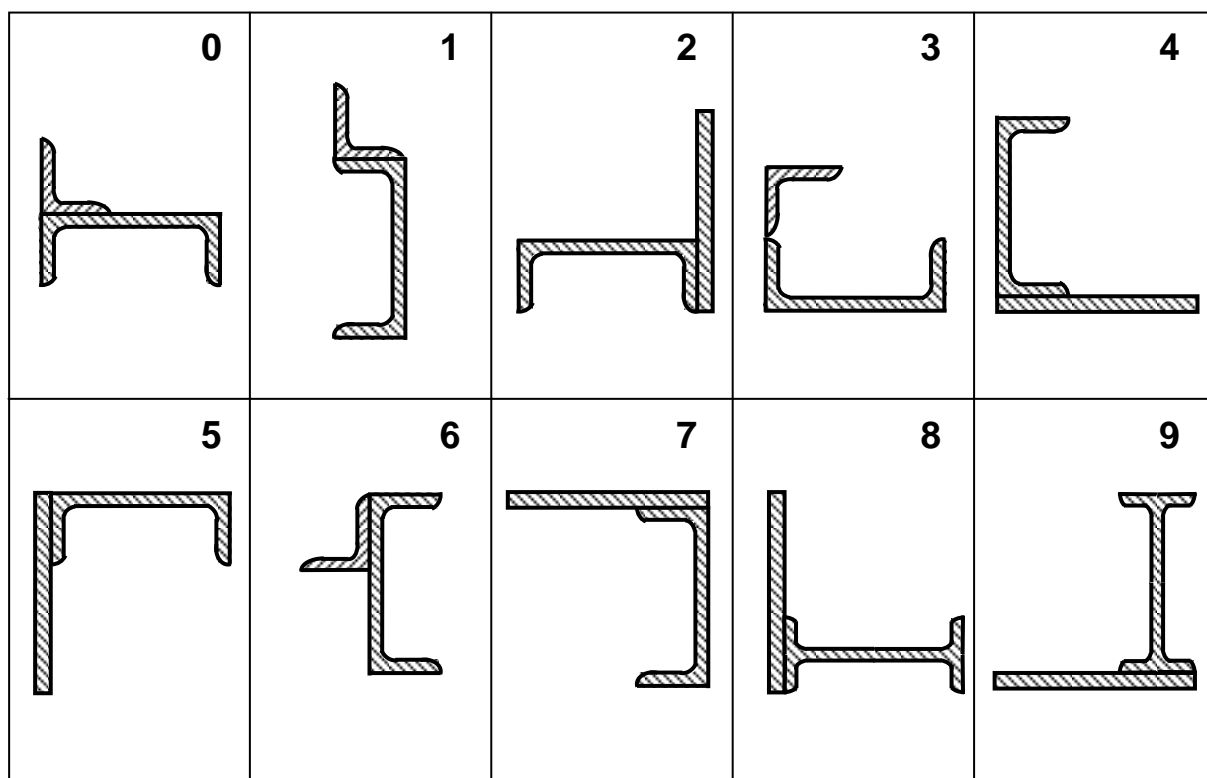
Група \_\_\_\_\_

Студент (П.І.Б.) \_\_\_\_\_

Керівник (П.І.Б.) \_\_\_\_\_

Дата здачі завдання \_\_\_\_\_

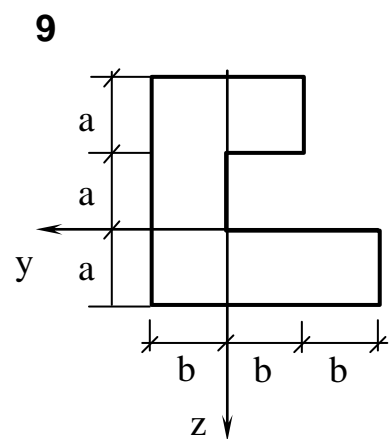
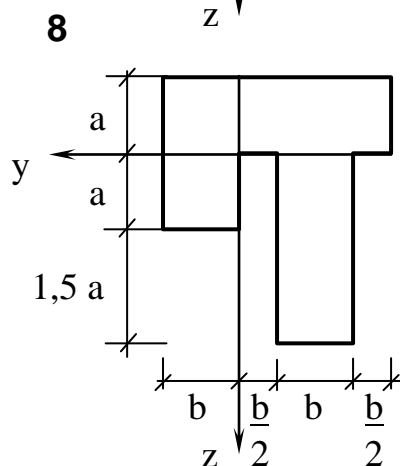
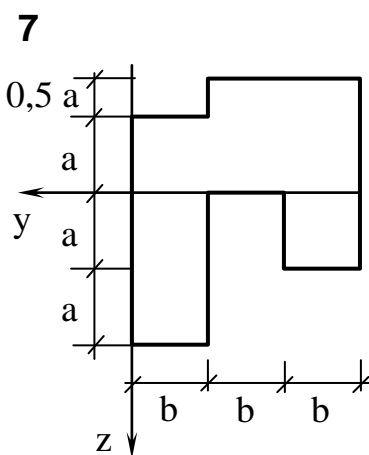
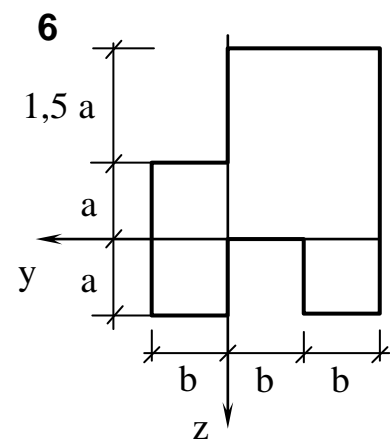
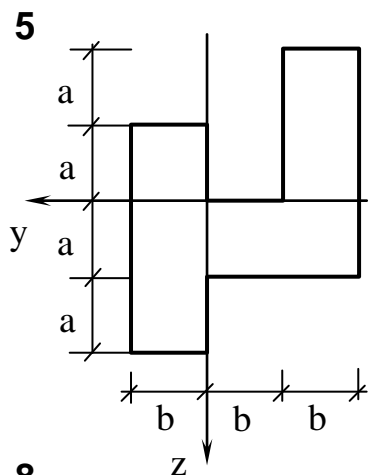
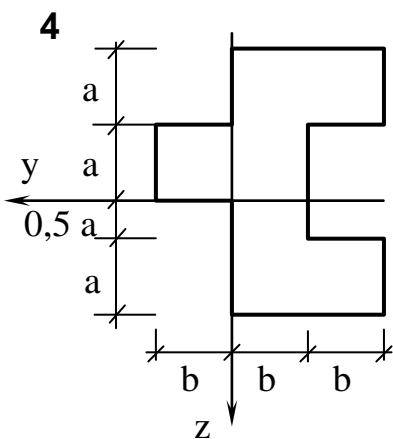
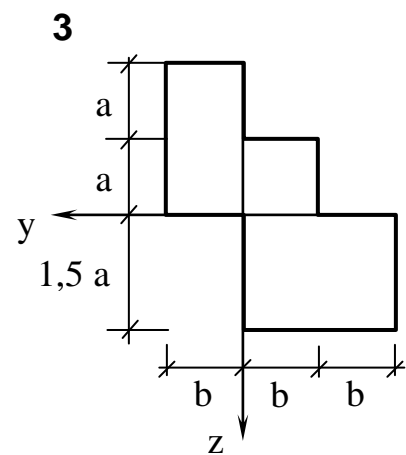
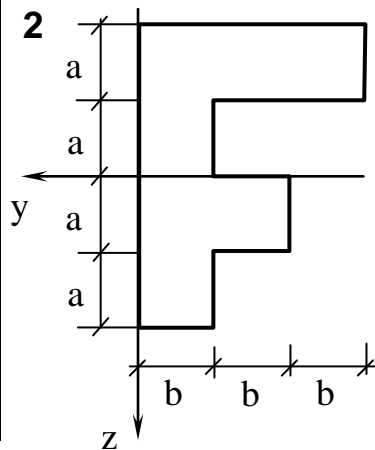
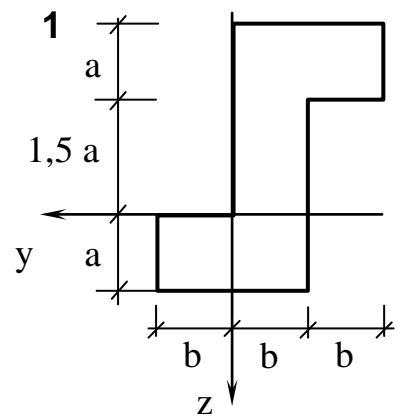
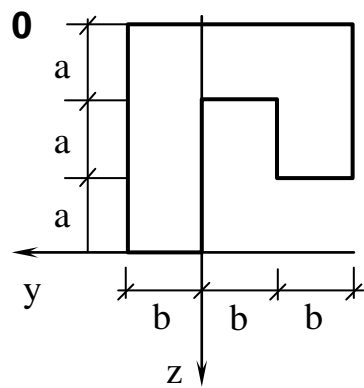
Оцінка \_\_\_\_\_



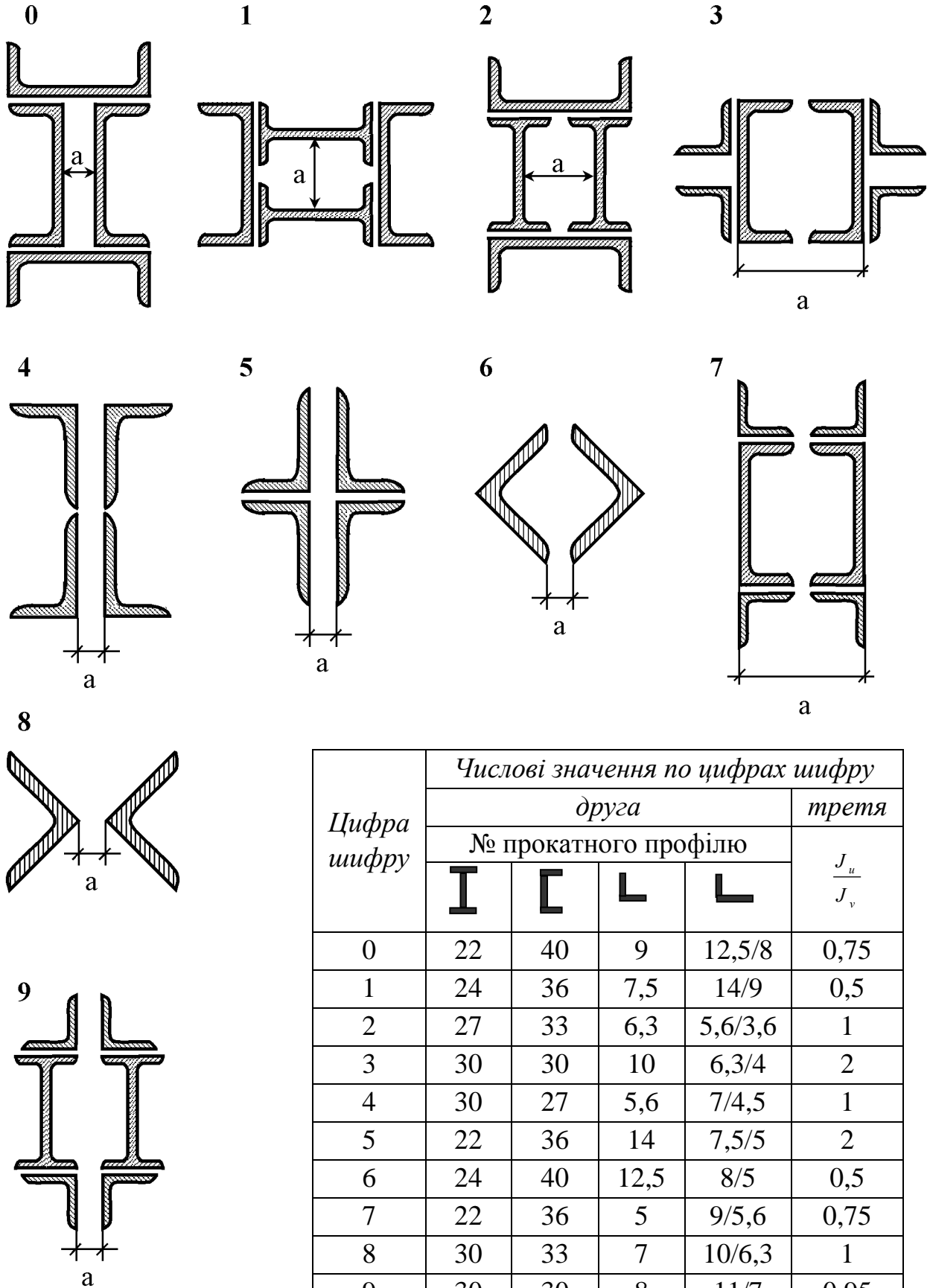
Цифра шифру	Числові значення по цифрах шифру			
	друга		третья	
	№ двотавра	№ швелера	розміри листа, мм	розміри кутика, мм
0	60	14	200x10	250x20
1	55	16	200x12	220x14
2	50	18	220x14	200x20
3	40	20	220x16	180x12
4	36	22	300x18	140x10
5	30	24	300x20	125x10
6	24	27	350x18	110x8
7	22	30	400x16	100x10
8	20	36	420x14	90x8
9	10	40	440x12	80x8

*Номер схеми береться по першій цифрі шифру*

Цифра шифру	Числові значення по цифрах шифру	
	друга	третя
	a, b, m	J
0	1, 2	$J_y$
1	2, 1	$J_z$
2	3, 1	$J_y$
3	2, 1	$J_{zy}$
4	1, 3	$J_{zy}$
5	2, 1	$J_z$
6	3, 2	$J_y$
7	1, 3	$J_{zy}$
8	2, 1	$J_z$
9	3, 1	$J_{zy}$

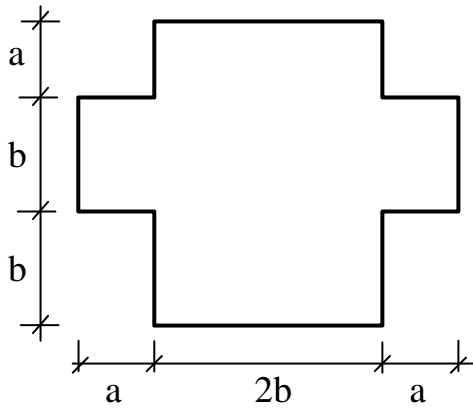




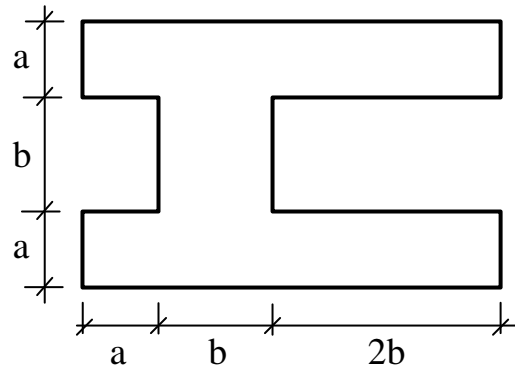


Цифра шифру	Числові значення по цифрах шифру				
	друга				третя
	№ прокатного профілю				$\frac{J_u}{J_v}$
	I	C	L	L	
0	22	40	9	12,5/8	0,75
1	24	36	7,5	14/9	0,5
2	27	33	6,3	5,6/3,6	1
3	30	30	10	6,3/4	2
4	30	27	5,6	7/4,5	1
5	22	36	14	7,5/5	2
6	24	40	12,5	8/5	0,5
7	22	36	5	9/5,6	0,75
8	30	33	7	10/6,3	1
9	30	30	8	11/7	0,95

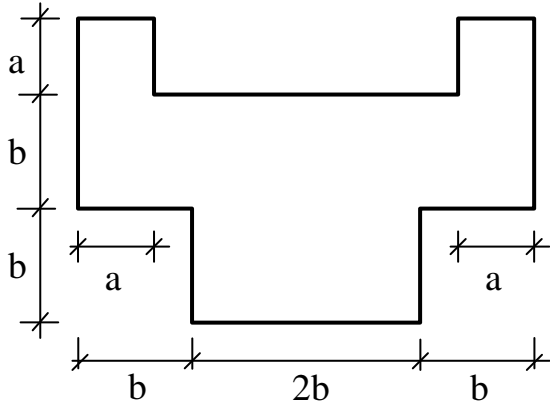
0, 1



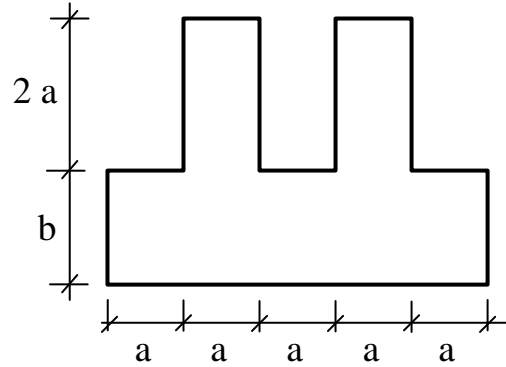
2, 3



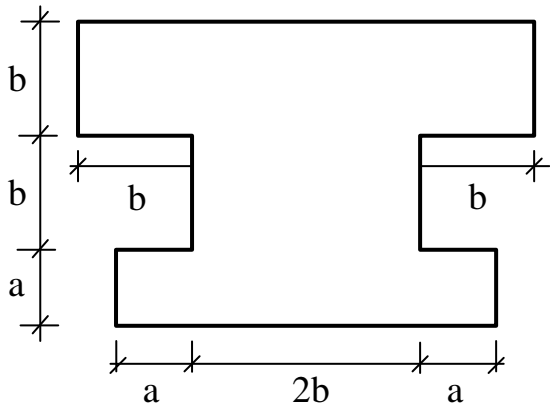
4, 5



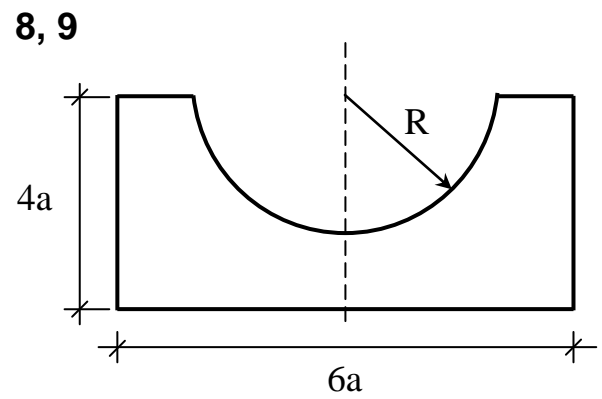
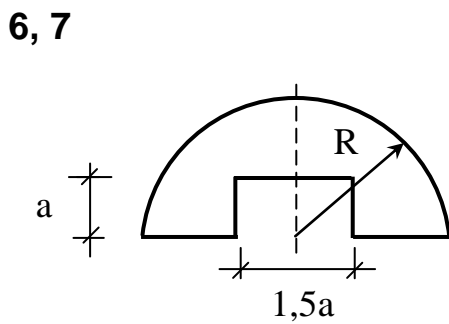
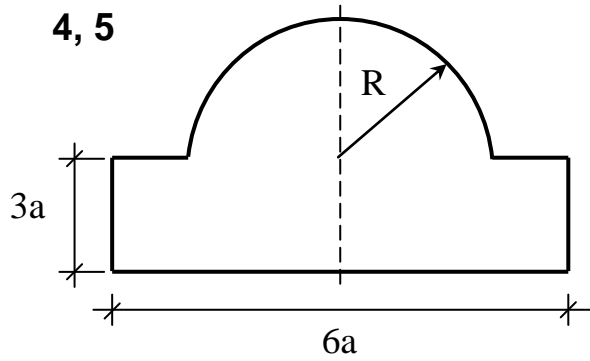
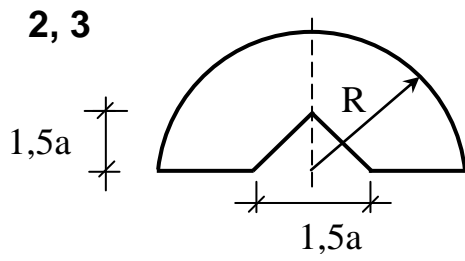
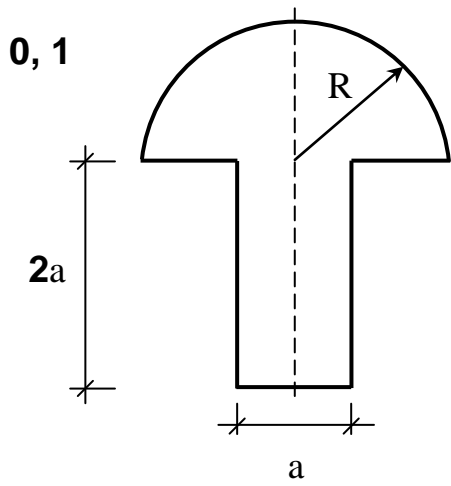
6, 7



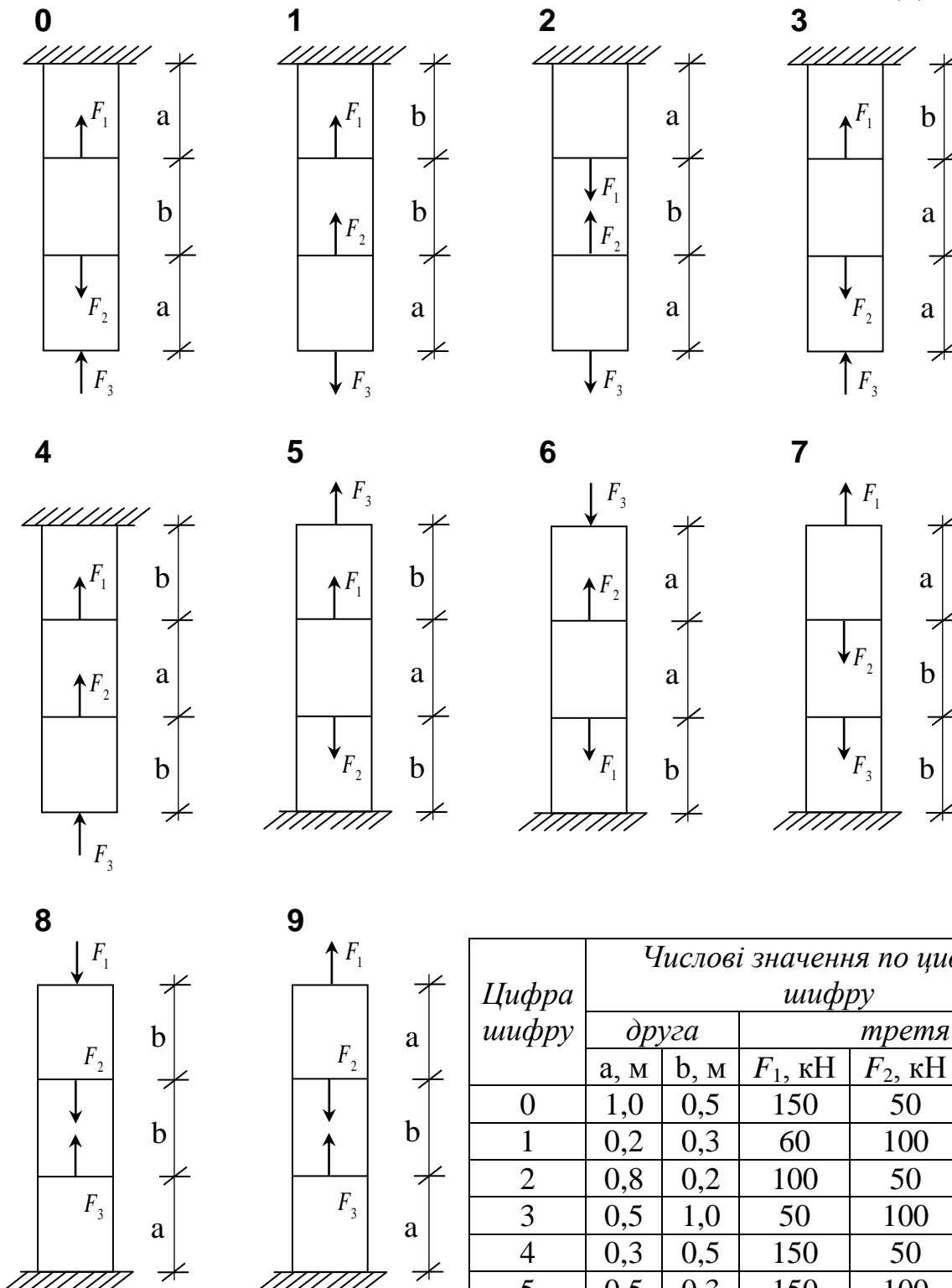
8, 9



Цифра шифру	Числові значення по цифрах шифру	
	друга	третя
	а, м	б, м
0	0,1	0,2
1	0,2	0,1
2	0,1	0,2
3	0,2	0,1
4	0,2	0,1
5	0,1	0,2
6	0,1	0,2
7	0,2	0,1
8	0,1	0,2
9	0,2	0,1

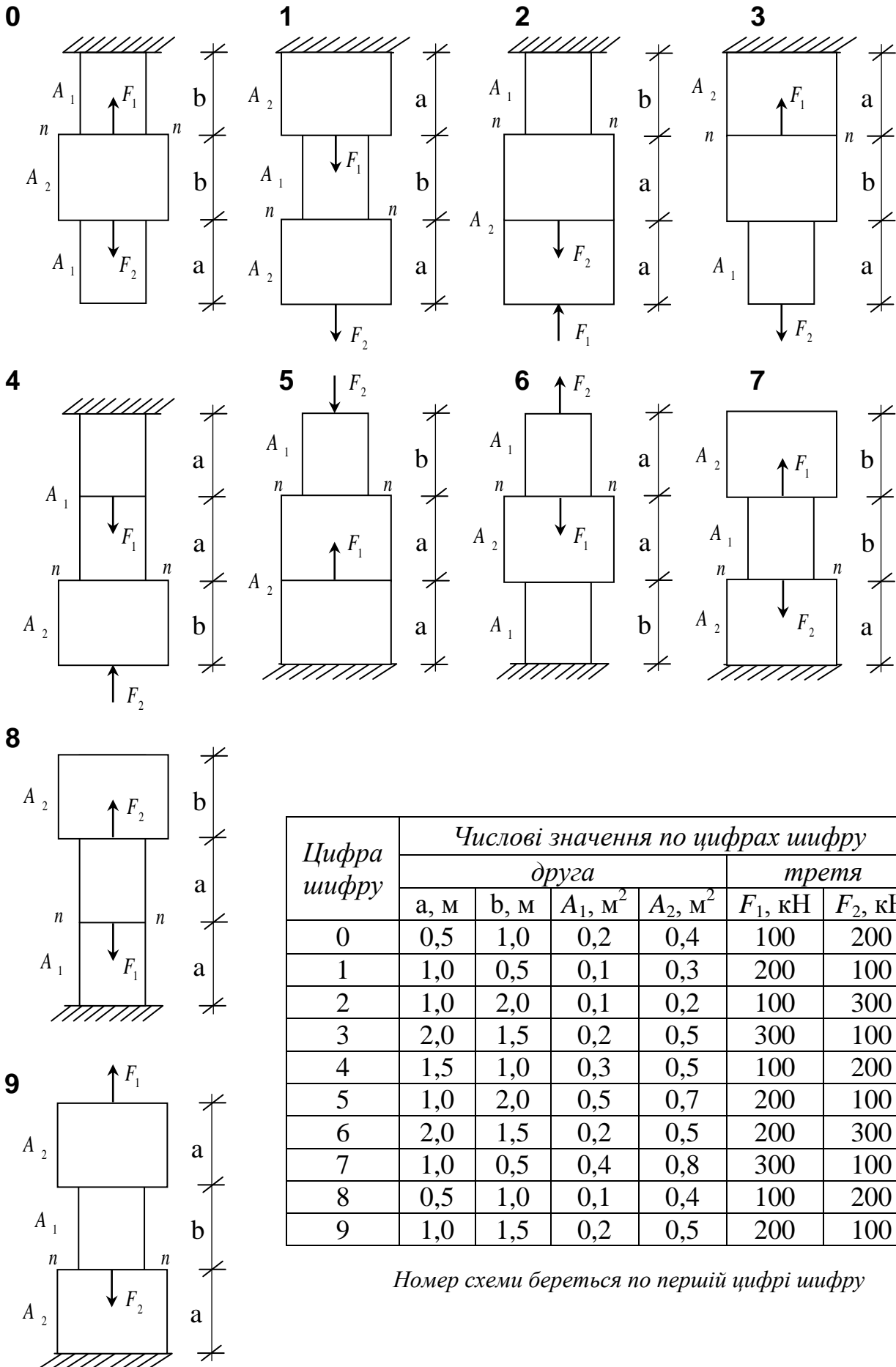


Цифра шифру	Числові значення по цифрах шифру	
	друга	третья
	R	a, м
0	3a	2
1	3a	3
2	2a	1
3	3a	2
4	2a	1
5	3a	2
6	3a	3
7	2a	1
8	3a	3
9	3a	2



Цифра шифру	Числові значення по цифрах шифру				
	друга		третя		
	a, м	b, м	$F_1$ , кН	$F_2$ , кН	$F_3$ , кН
0	1,0	0,5	150	50	100
1	0,2	0,3	60	100	50
2	0,8	0,2	100	50	150
3	0,5	1,0	50	100	150
4	0,3	0,5	150	50	100
5	0,5	0,3	150	100	50
6	1,0	0,2	100	50	150
7	0,2	0,6	50	100	150
8	0,3	1,0	150	50	100
9	0,5	0,2	150	100	50

Номер схеми береться по першій цифрі шифру

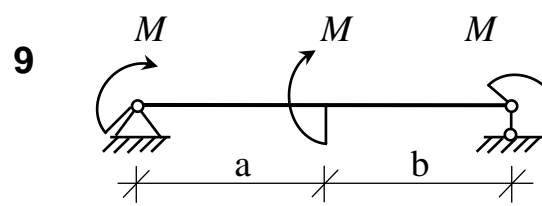
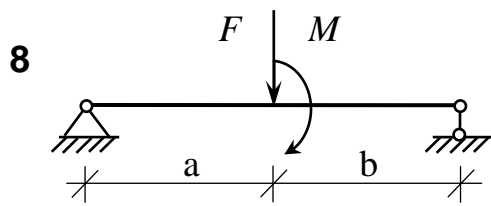
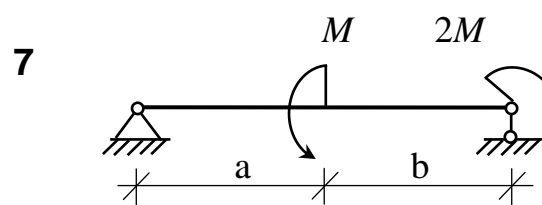
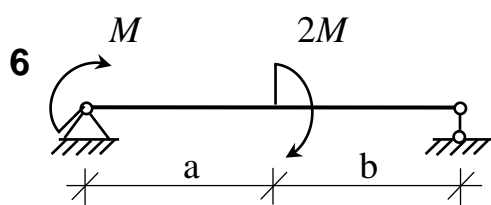
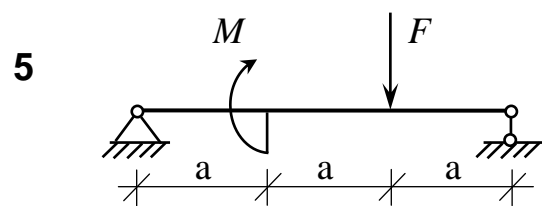
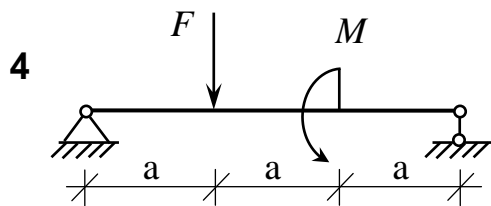
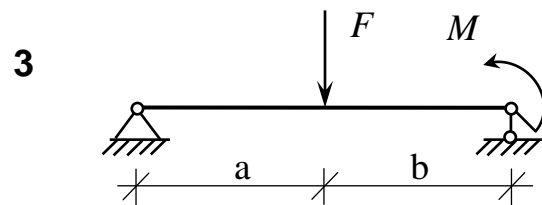
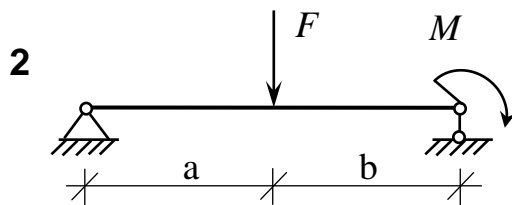
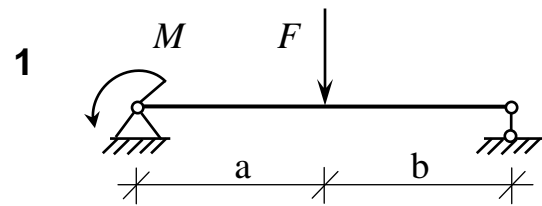
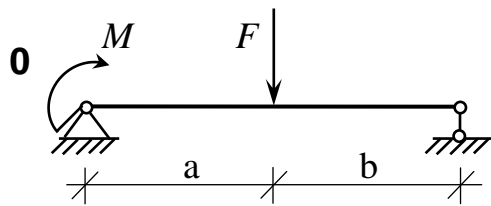


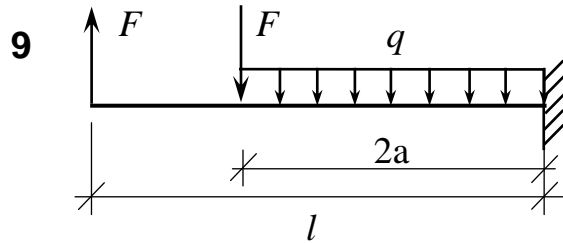
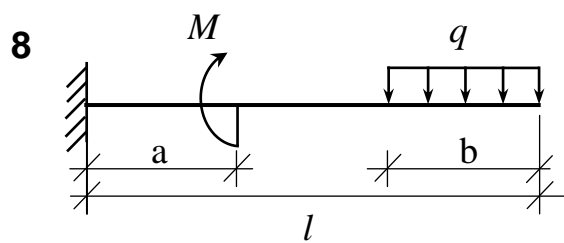
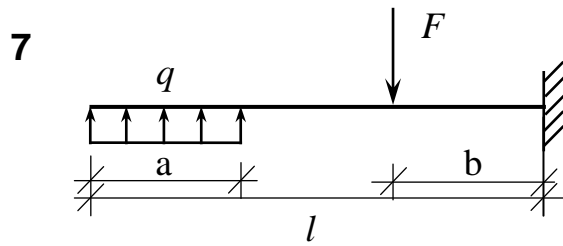
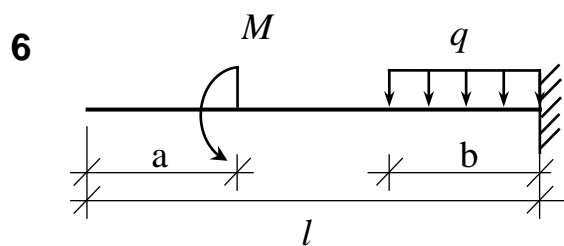
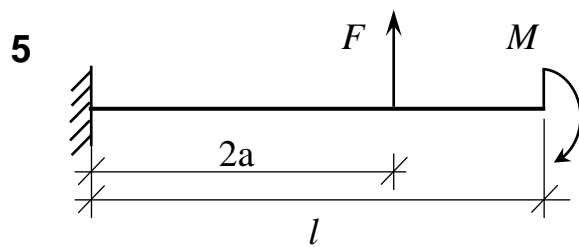
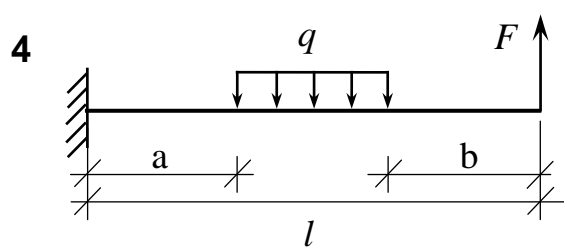
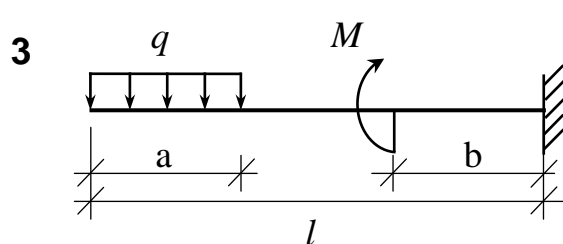
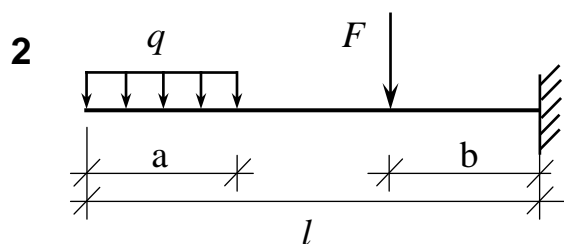
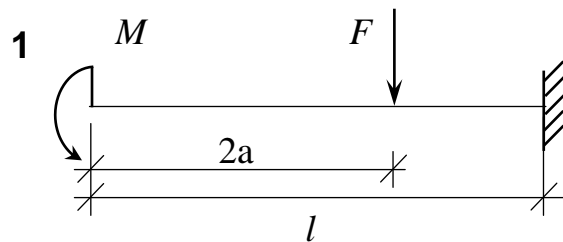
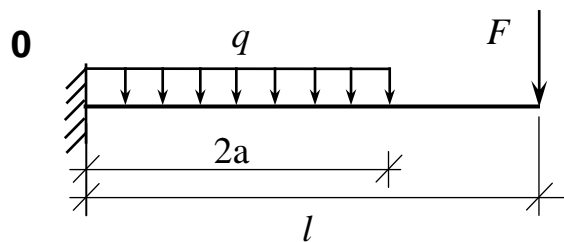
Цифра шифру	Числові значення по цифрах шифру					
	друга				третя	
	а, м	б, м	$A_1, \text{м}^2$	$A_2, \text{м}^2$	$F_1, \text{кН}$	$F_2, \text{кН}$
0	0,5	1,0	0,2	0,4	100	200
1	1,0	0,5	0,1	0,3	200	100
2	1,0	2,0	0,1	0,2	100	300
3	2,0	1,5	0,2	0,5	300	100
4	1,5	1,0	0,3	0,5	100	200
5	1,0	2,0	0,5	0,7	200	100
6	2,0	1,5	0,2	0,5	200	300
7	1,0	0,5	0,4	0,8	300	100
8	0,5	1,0	0,1	0,4	100	200
9	1,0	1,5	0,2	0,5	200	100

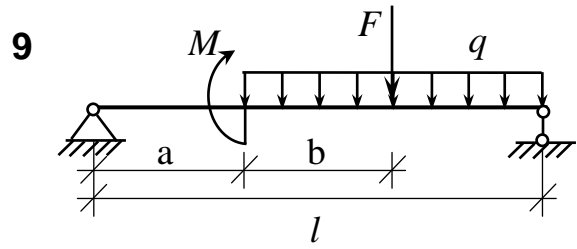
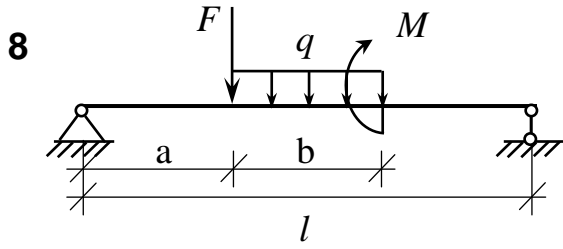
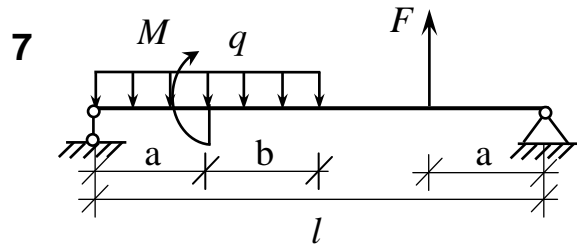
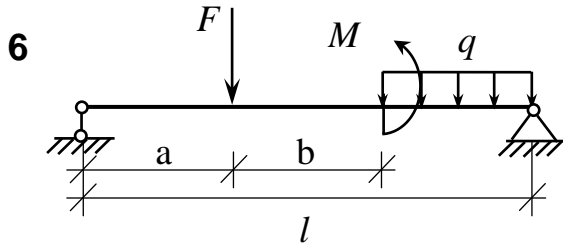
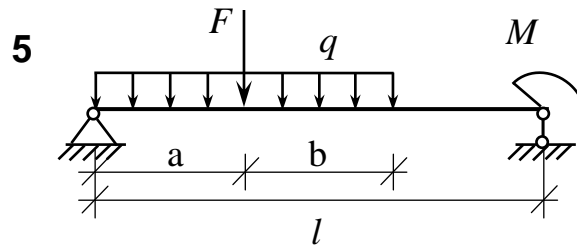
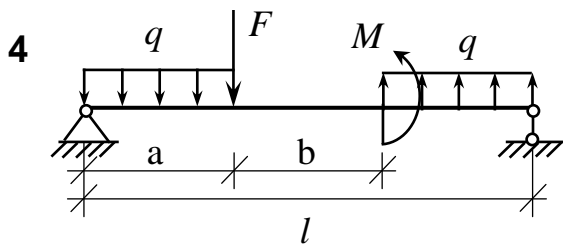
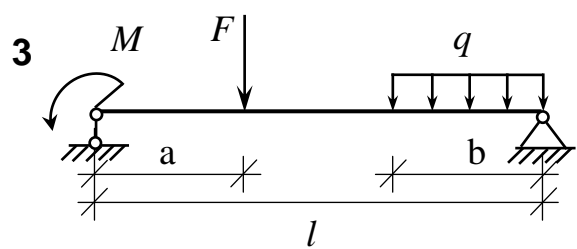
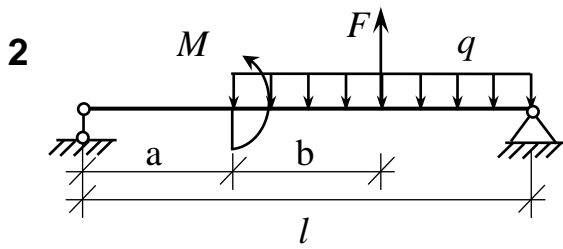
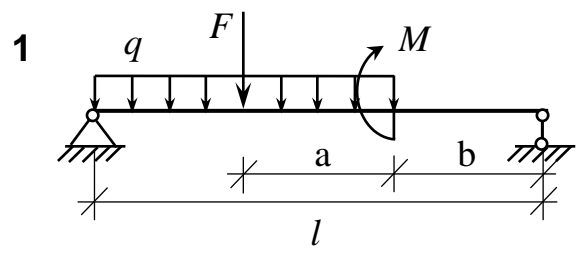
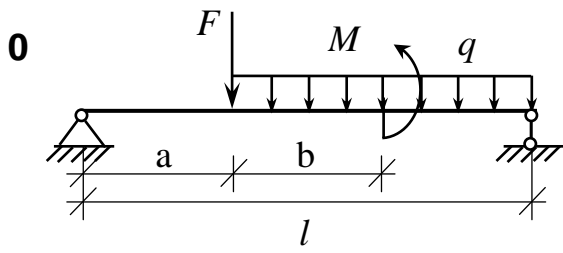
Номер схеми береться по першій цифрі шифру

Загальні дані для всіх задач додатків 9-14

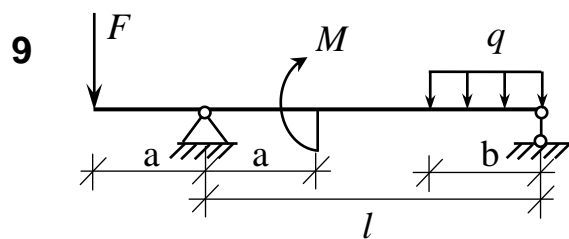
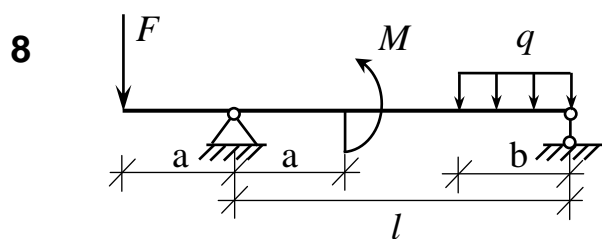
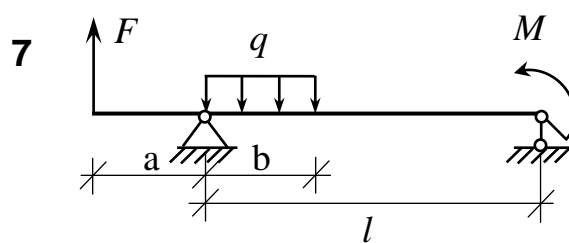
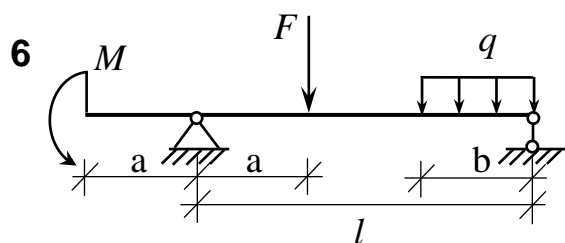
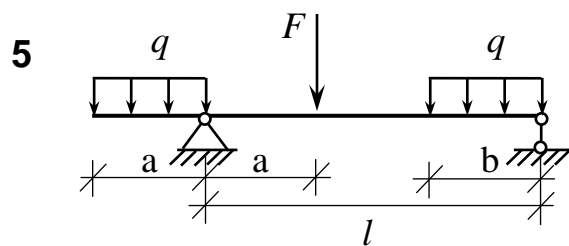
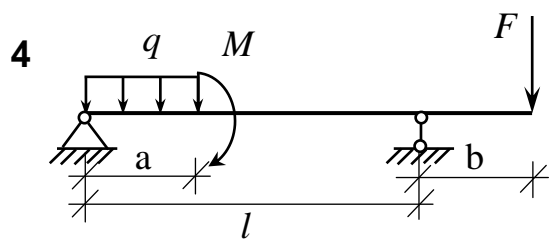
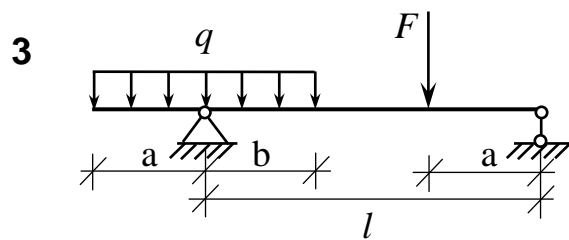
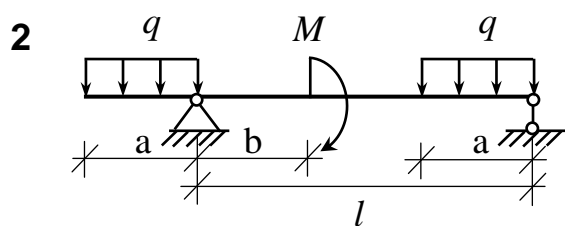
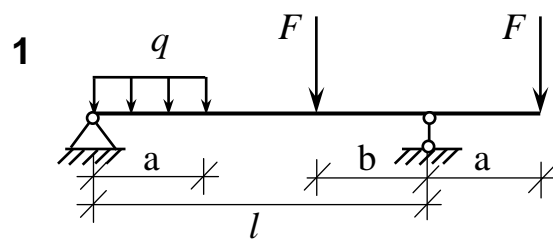
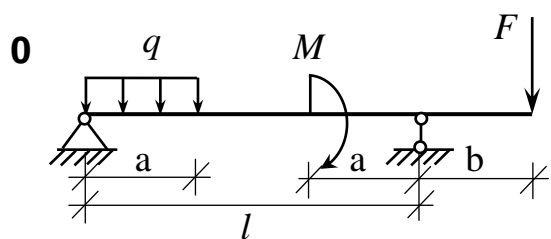
Цифра шифру	Числові значення по цифрах шифру					
	друга розмір			третя навантаження		
	$l, \text{ м}$	$a, \text{ м}$	$b, \text{ м}$	$F, \text{ кН}$	$q, \text{ кН/м}$	$M, \text{ кН}\cdot\text{м}$
0	8	1	2	10	2	15
1	6	2	1	12	3	20
2	8	2	2	16	4	18
3	10	3	2	18	6	16
4	12	2	4	20	4	10
5	10	2	1	18	3	12
6	12	1	3	16	2	16
7	14	2	2	12	4	18
8	16	3	2	16	3	20
9	12	3	1	10	6	15

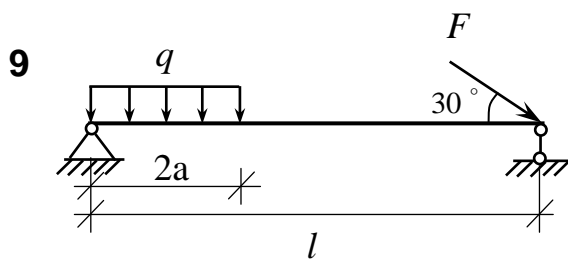
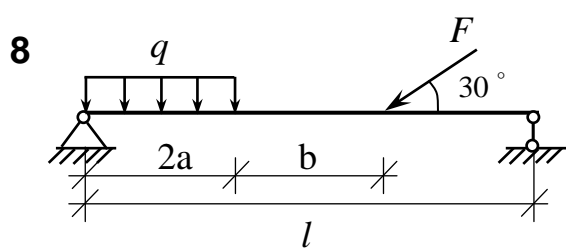
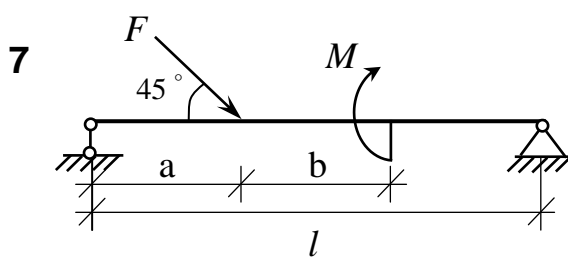
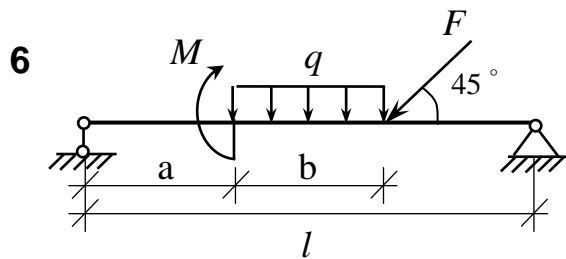
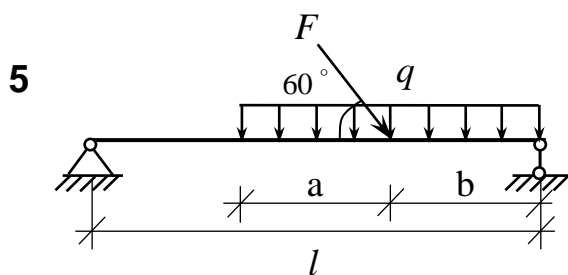
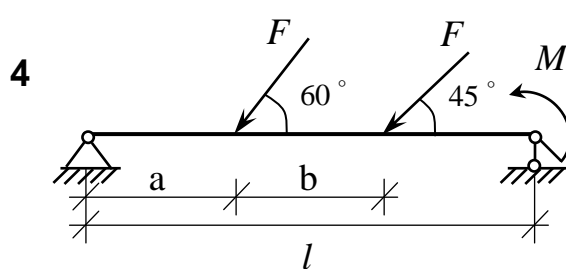
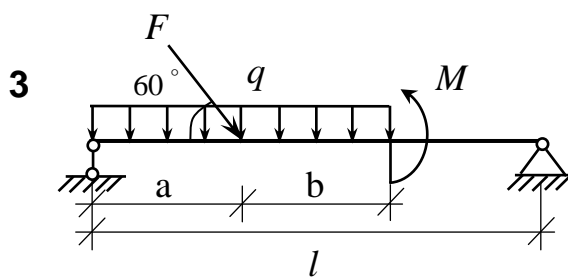
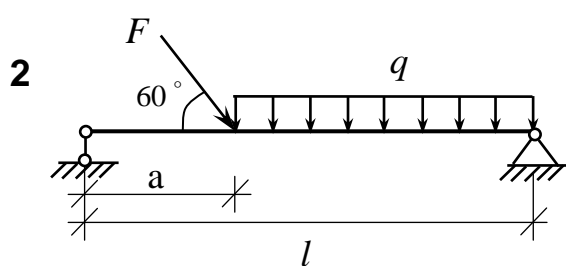
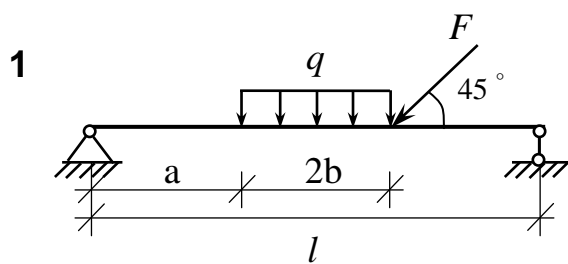
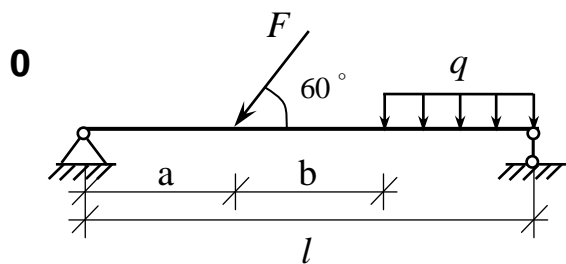


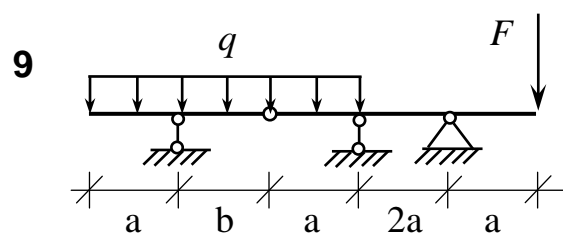
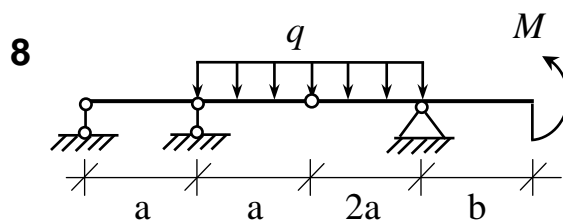
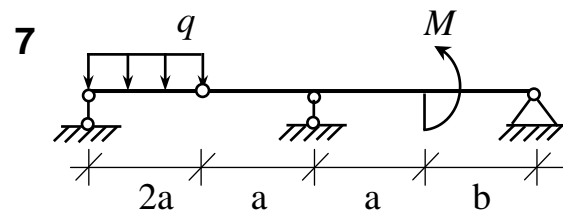
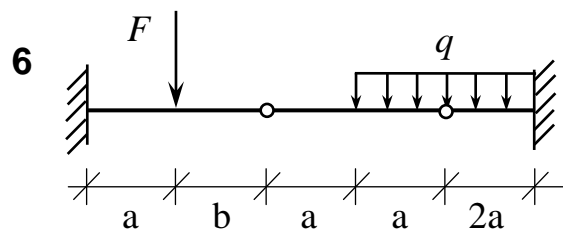
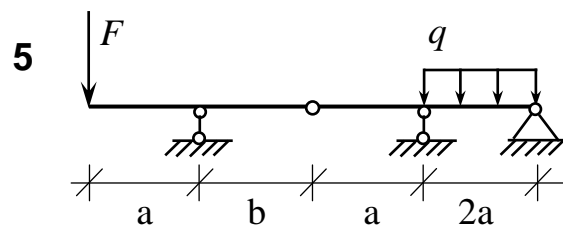
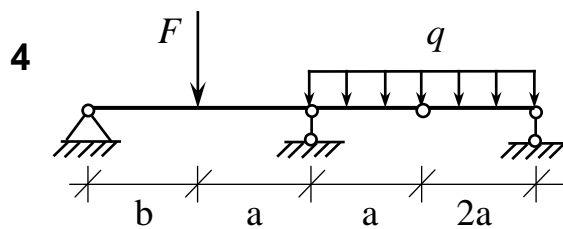
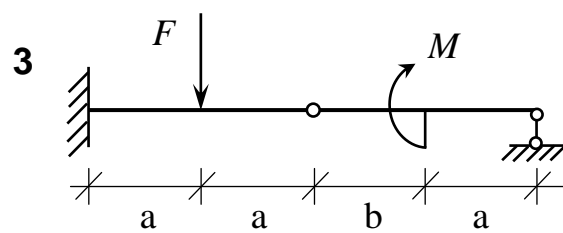
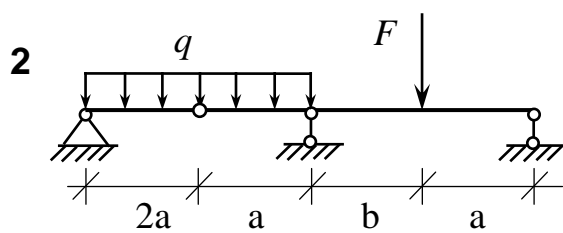
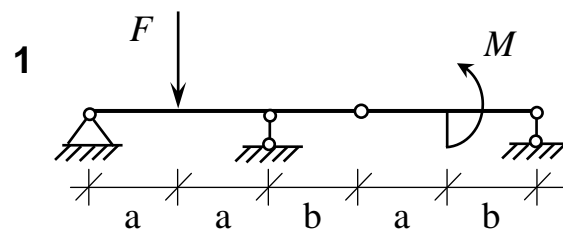
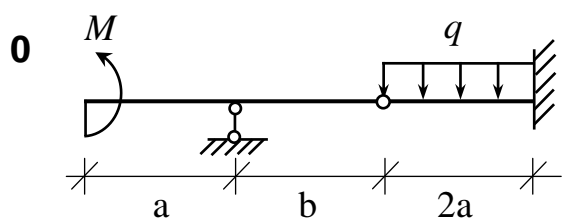




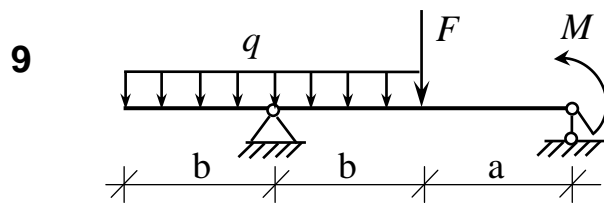
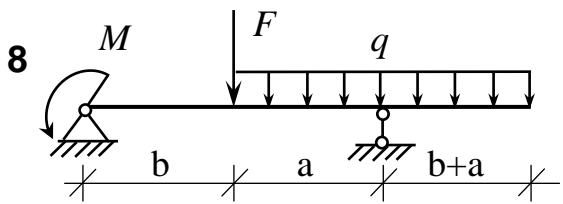
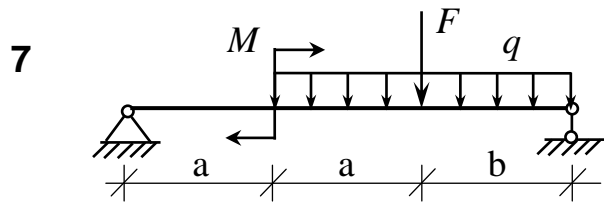
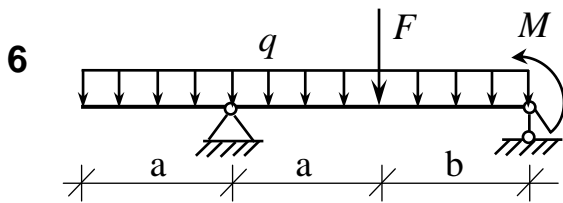
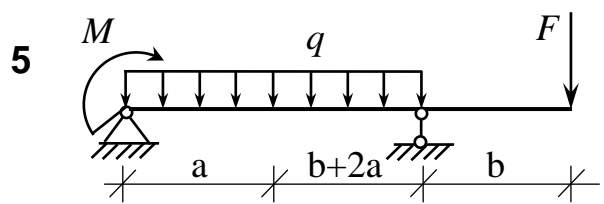
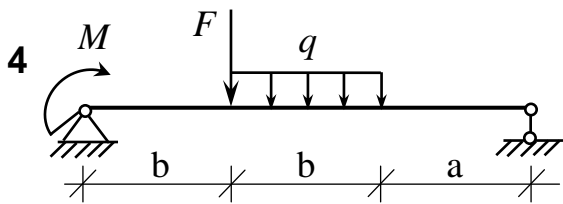
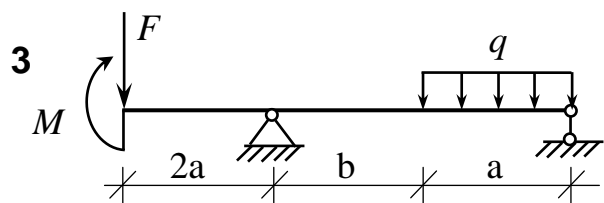
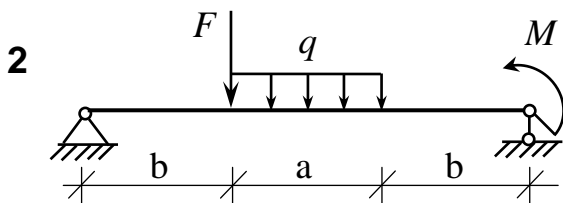
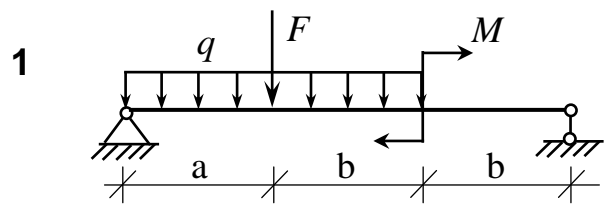
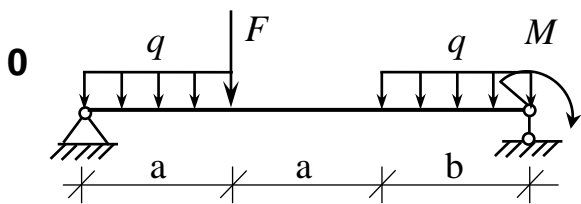




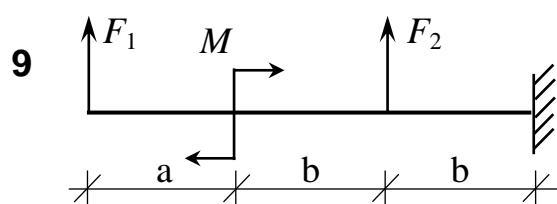
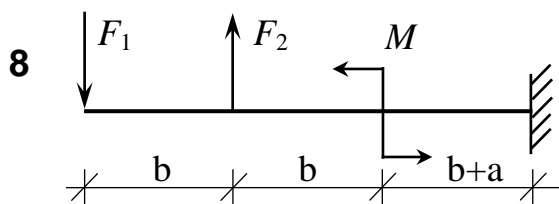
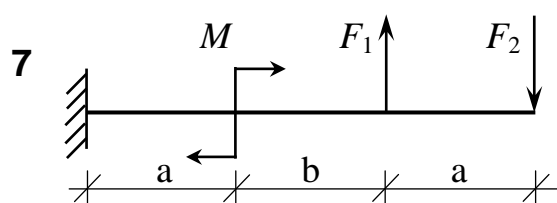
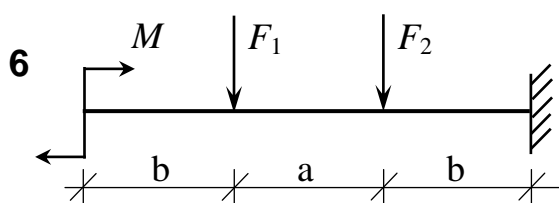
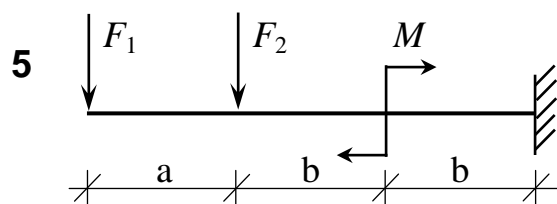
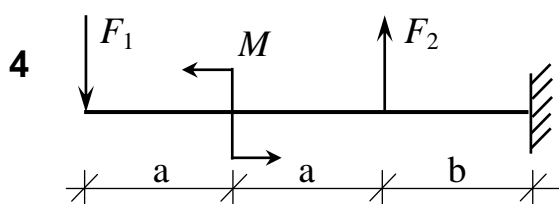
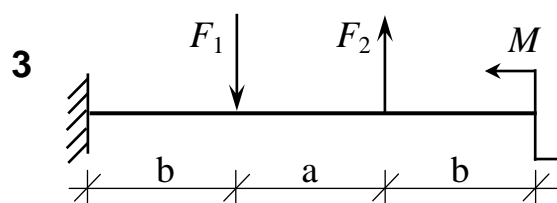
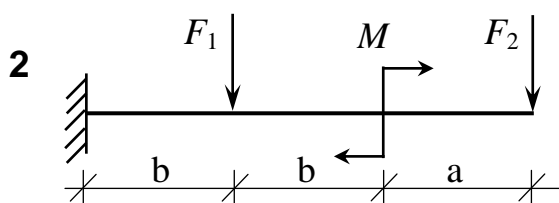
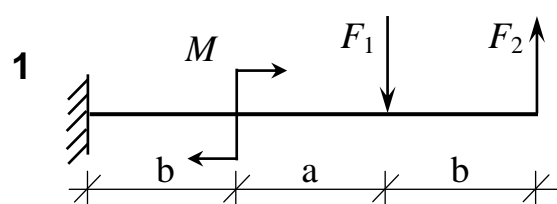
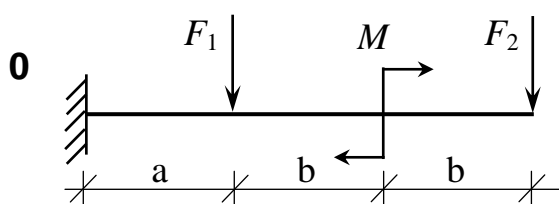




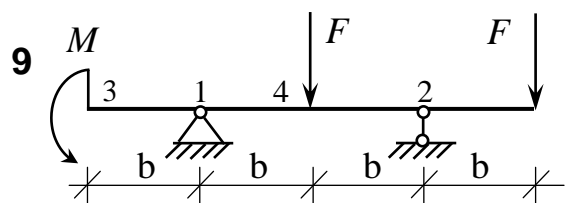
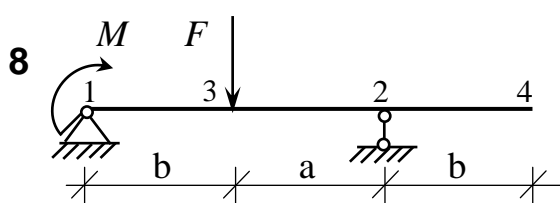
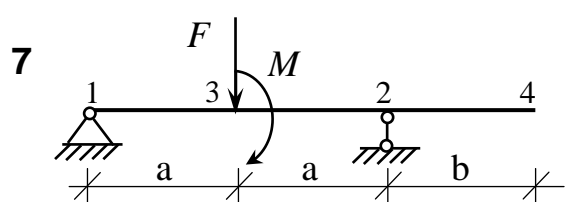
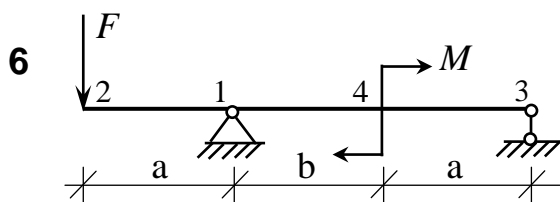
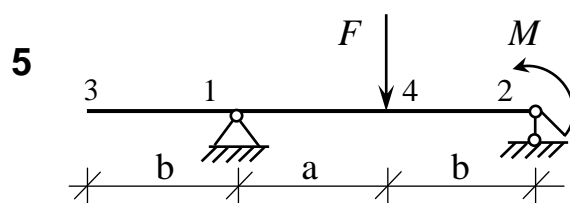
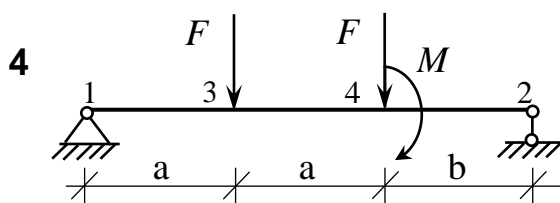
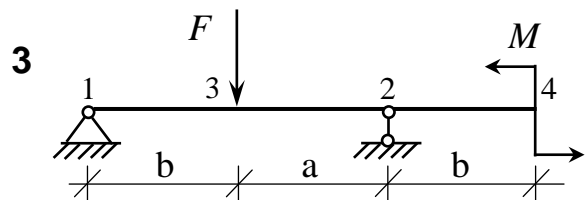
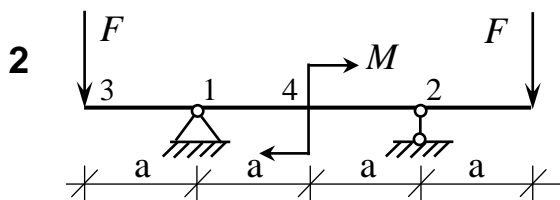
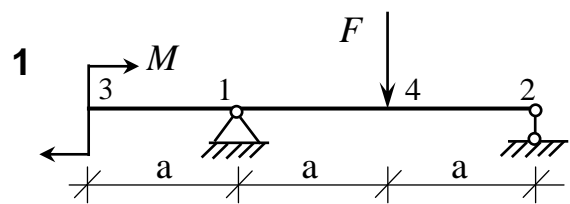
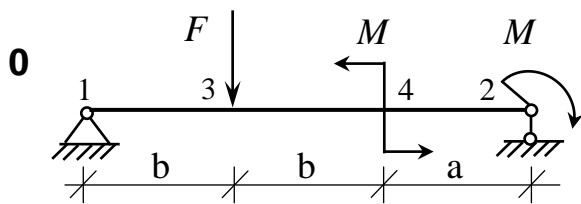
Цифра шифру	Числові значення по цифрах шифру				
	друга		третя		
	розмір		навантаження		
	а, м	б, м	F, кН	q, кН/м	M, кН·м
0	2	1	10	5	20
1	2	2	20	10	20
2	1	2	30	10	10
3	1	3	20	5	10
4	3	2	10	2	30
5	2	3	20	20	30
6	1	3	30	10	20
7	2	1	20	5	10
8	2	2	10	2	20
9	1	3	10	4	30



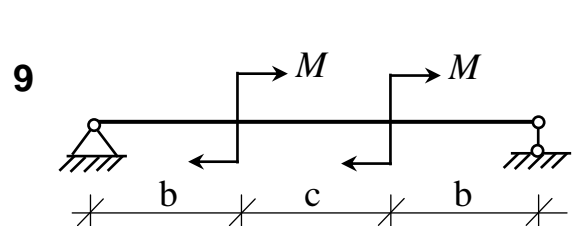
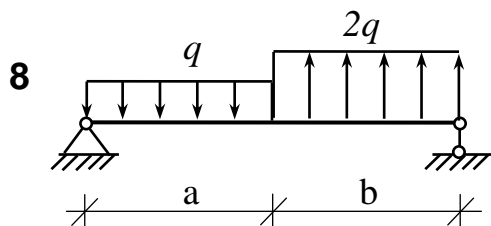
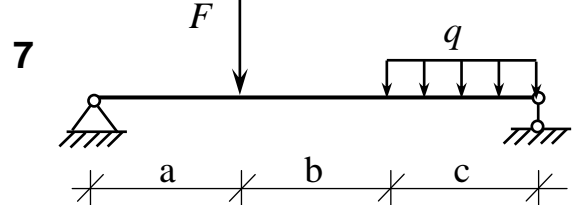
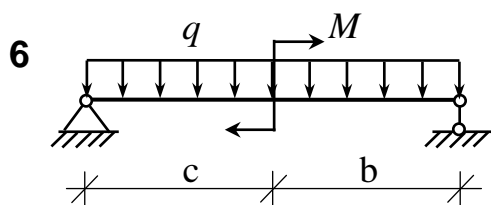
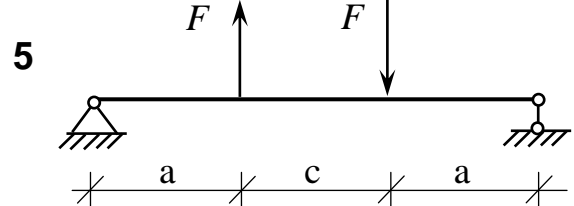
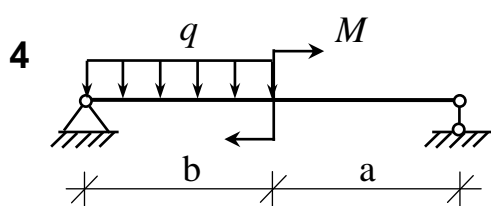
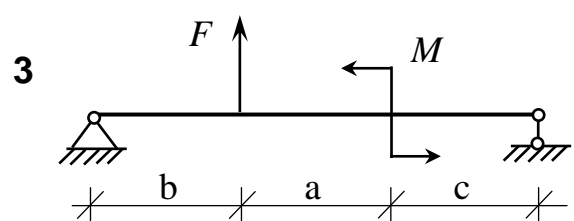
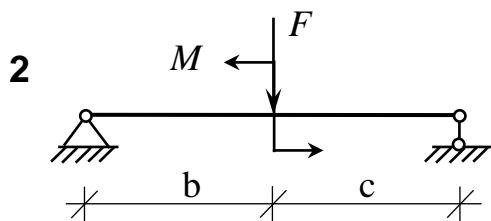
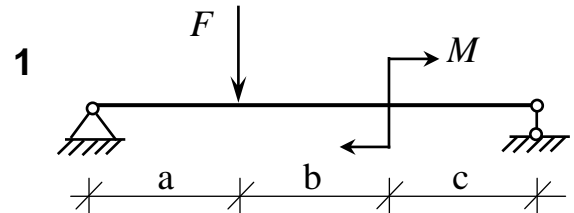
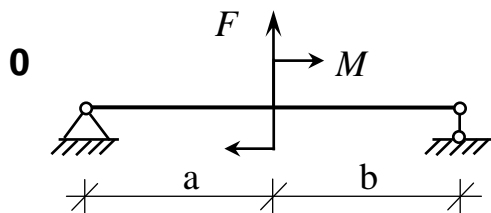
Цифра шифру	Числові значення по цифрах шифру				
	друга		третя		
	розмір		навантаження		
	a, м	b, м	$F_1$ , кН	$F_2$ , кН	$M$ , кН·м
0	1	2	20	0	40
1	2	1	0	10	30
2	1	3	10	0	20
3	2	2	10	0	40
4	2	1	0	20	20
5	3	2	20	0	10
6	1	3	0	10	20
7	1	2	0	10	40
8	2	1	20	0	30
9	3	2	0	10	20

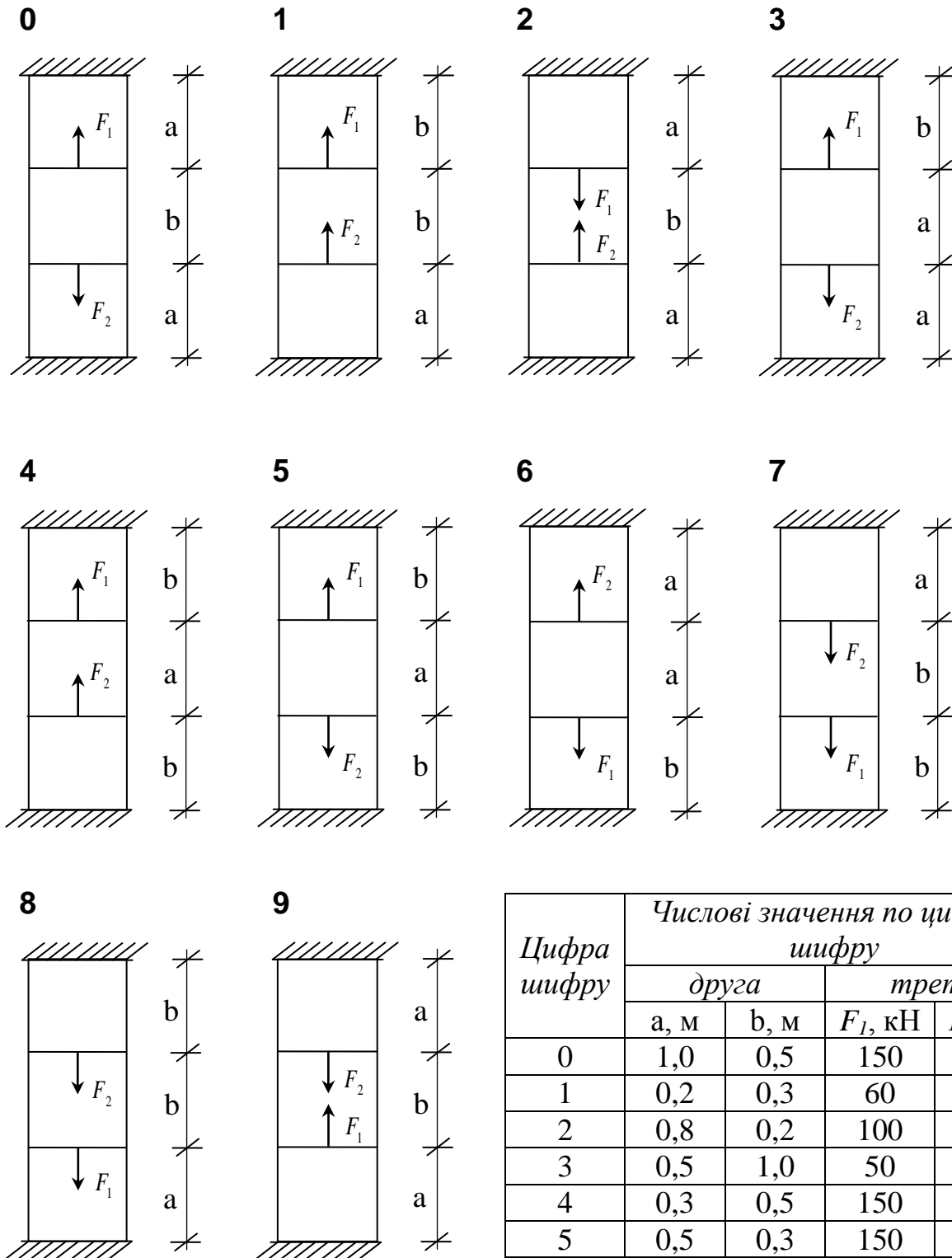


Цифра шифру	Числові значення по цифрах шифру					
	друга		третья			
	а, м	б, м	F, кН	M, кН·м	переміщення	
0	2	1	20	10	$\varphi_1$	$W_3$
1	2	2	10	20	$\varphi_2$	$W_3$
2	3	2	20	20	$\varphi_3$	$W_3$
3	2	1	30	10	$\varphi_4$	$W_4$
4	1	1	10	30	$\varphi_1$	$W_4$
5	3	2	20	20	$\varphi_2$	$W_3$
6	3	2	10	20	$\varphi_3$	$W_3$
7	2	1	30	10	$\varphi_4$	$W_3$
8	3	1	10	20	$\varphi_1$	$W_3$
9	2	2	20	30	$\varphi_2$	$W_4$



Цифра шифру	Числові значення по цифрах шифру					
	друга			третя		
	a, м	b, м	c, м	F, кН	q, кН/м	M, кН·м
0	2,5	3	1	10	5	18
1	3	4	2	12	8	20
2	2	2,5	1	15	6	10
3	2	3	2,5	20	10	16
4	2	3,5	2	25	15	20
5	2,5	2	1	30	4	30
6	1,5	3	1,5	18	5	12
7	2	2,5	2	20	8	10
8	3	2	1	16	10	15
9	2	3	2	8	4	30

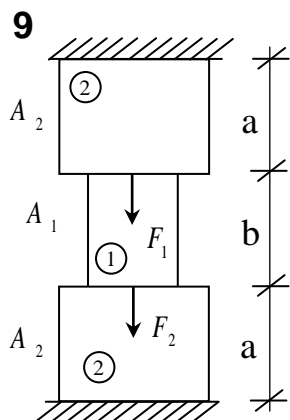
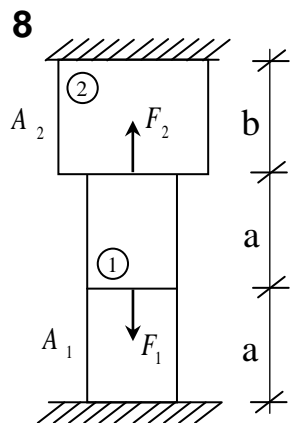
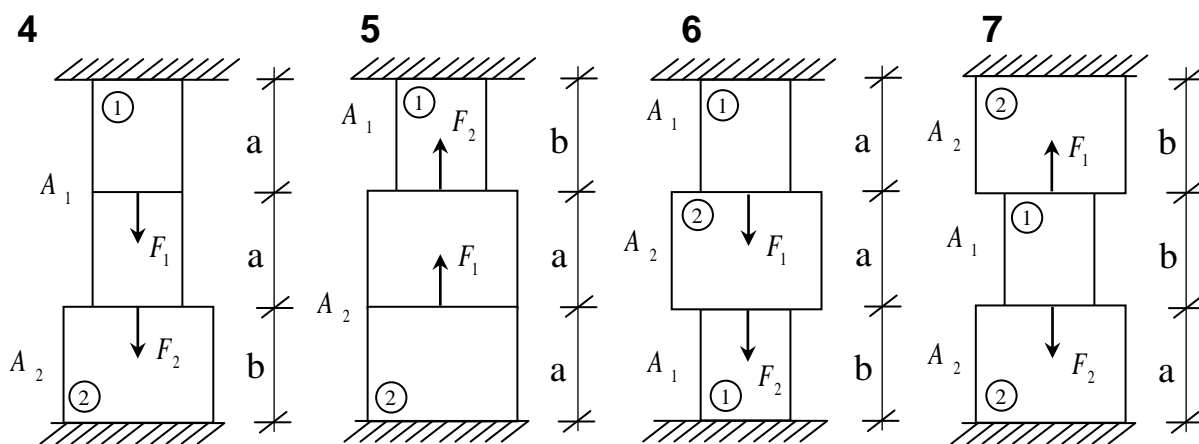
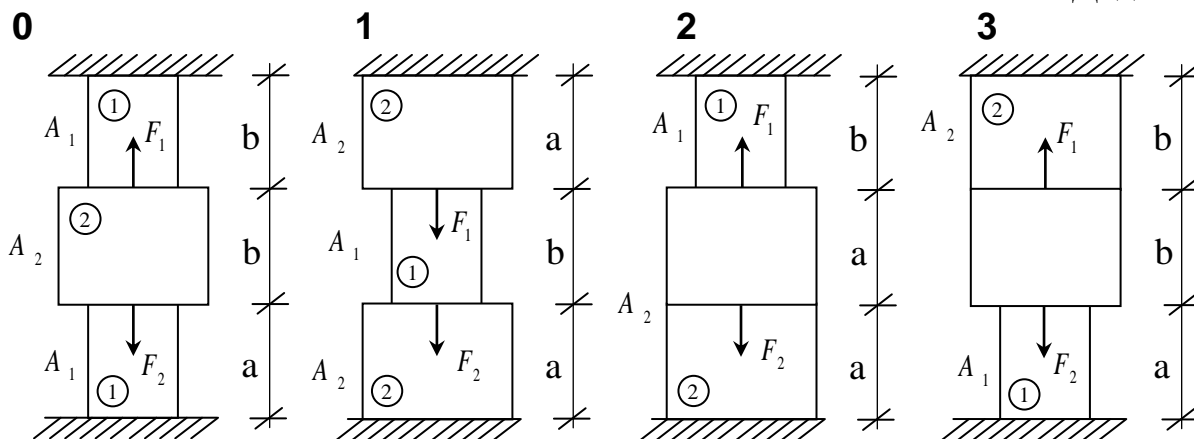




Цифра шифру	Числові значення по цифрах шифру			
	друга		третя	
	а, м	б, м	$F_1$ , кН	$F_2$ , кН
0	1,0	0,5	150	50
1	0,2	0,3	60	100
2	0,8	0,2	100	50
3	0,5	1,0	50	100
4	0,3	0,5	150	50
5	0,5	0,3	150	100
6	1,0	0,2	100	50
7	0,2	0,6	50	100
8	0,3	1,0	150	50
9	0,5	0,2	150	100

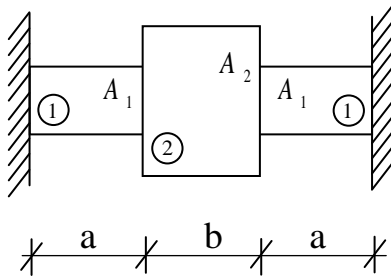
Номер схеми береться по першій цифрі шифру



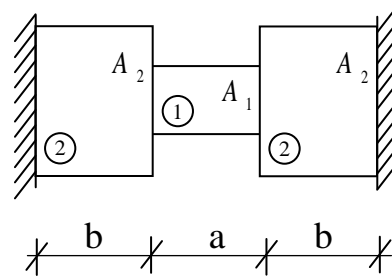


Цифра шифру	Числові значення по цифрах шифру						
	друга				третя		
	а, м	б, м	$A_1, \text{м}^2$	$A_2, \text{м}^2$	$F_1, \text{кН}$	$F_2, \text{кН}$	$E_1/E_2$
0	0,5	1,0	0,2	0,4	100	200	2,0
1	1,0	0,5	0,1	0,3	200	100	1,5
2	1,0	2,0	0,1	0,2	100	300	0,5
3	2,0	1,5	0,2	0,5	300	100	0,25
4	1,5	1,0	0,3	0,5	100	200	3,0
5	1,0	2,0	0,5	0,7	200	100	0,75
6	2,0	1,5	0,2	0,5	200	300	2,5
7	1,0	0,5	0,4	0,8	300	100	2,0
8	0,5	1,0	0,1	0,4	100	200	0,5
9	1,0	1,5	0,2	0,5	200	100	1,5

Номер схеми береться по першій цифрі шифру



**0, 1, 2, 3, 4**

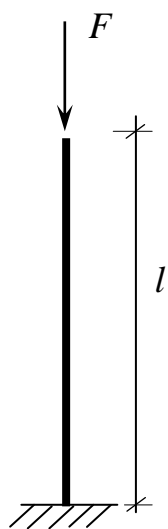
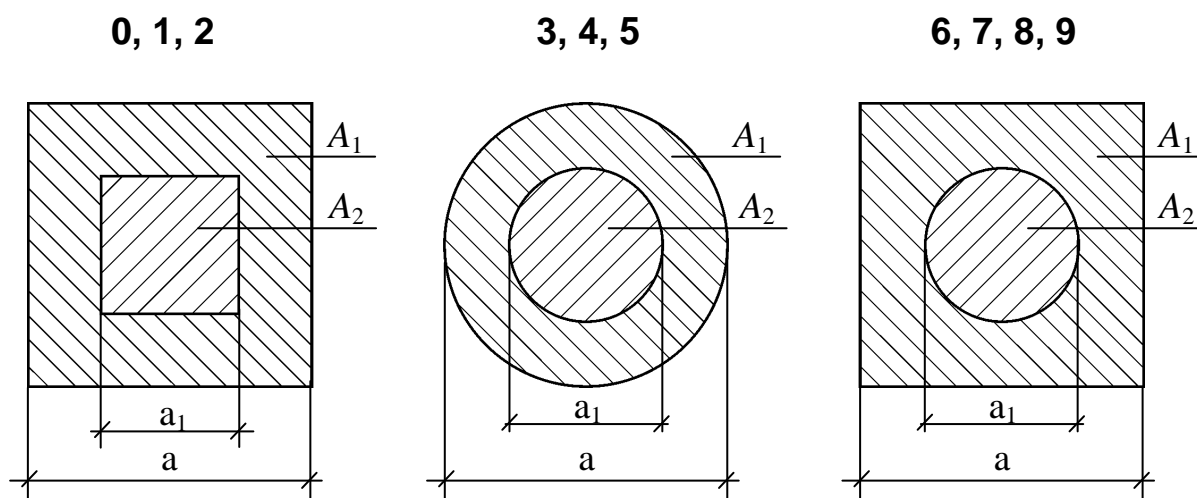


**5, 6, 7, 8, 9**

Цифра шифру	Числові значення по цифрах шифру				
	друга		третя		
	a, м	b, м	A <sub>1</sub> , м <sup>2</sup>	A <sub>2</sub> , м <sup>2</sup>	ΔT, °C
0	0,10	0,20	4·10 <sup>-3</sup>	6·10 <sup>-3</sup>	60
1	0,20	0,20	6·10 <sup>-3</sup>	8·10 <sup>-3</sup>	50
2	0,15	0,25	3·10 <sup>-3</sup>	6·10 <sup>-3</sup>	20
3	0,30	0,10	6·10 <sup>-3</sup>	9·10 <sup>-3</sup>	30
4	0,20	0,10	6·10 <sup>-3</sup>	10·10 <sup>-3</sup>	40
5	0,10	0,15	5·10 <sup>-3</sup>	10·10 <sup>-3</sup>	60
6	0,15	0,20	4·10 <sup>-3</sup>	9·10 <sup>-3</sup>	40
7	0,20	0,30	4·10 <sup>-3</sup>	8·10 <sup>-3</sup>	30
8	0,30	0,20	8·10 <sup>-3</sup>	10·10 <sup>-3</sup>	50
9	0,25	0,15	5·10 <sup>-3</sup>	9·10 <sup>-3</sup>	20

$$E_1 = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа} , \quad \alpha_1 = 125 \cdot 10^{-7} \text{ град}^{-1}$$

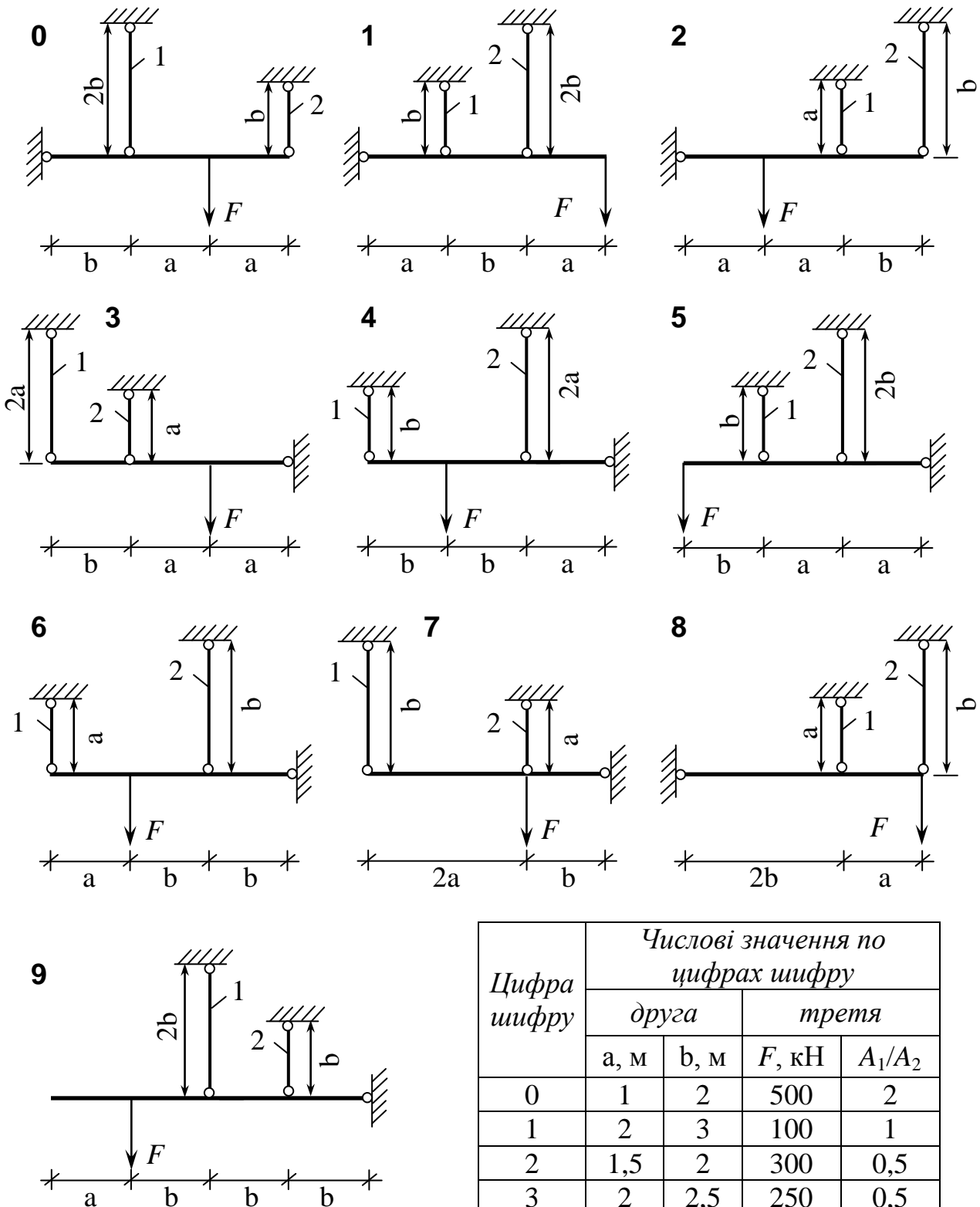
$$E_2 = 1 \cdot 10^5 \text{ МПа} , \quad \alpha_2 = 165 \cdot 10^{-7} \text{ град}^{-1}$$



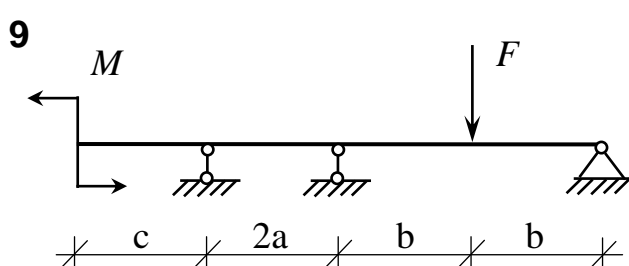
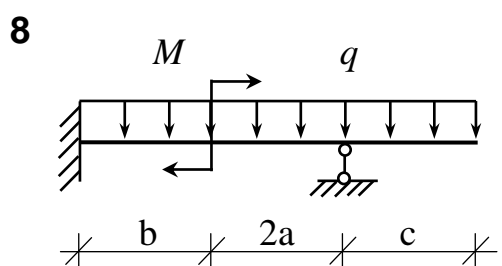
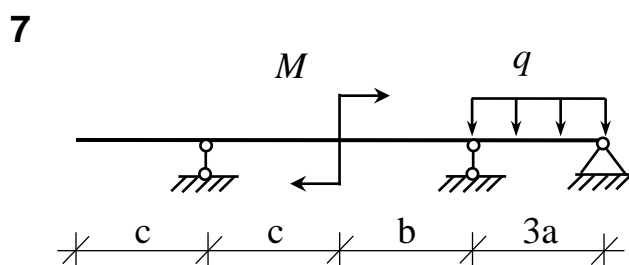
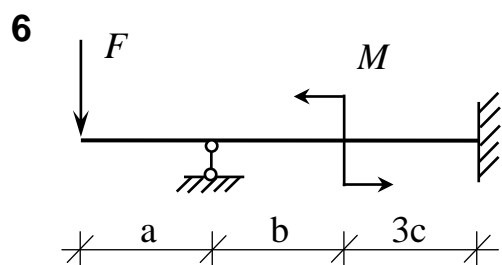
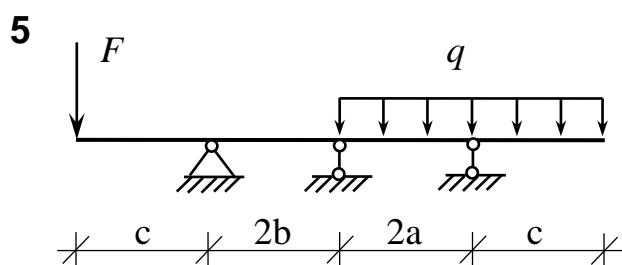
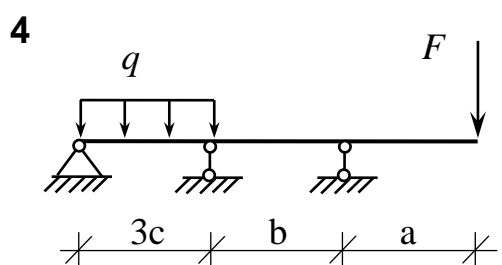
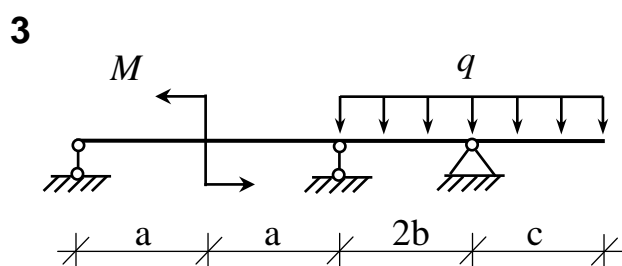
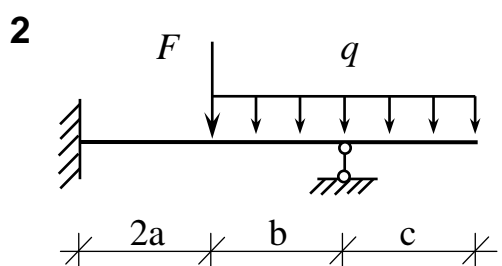
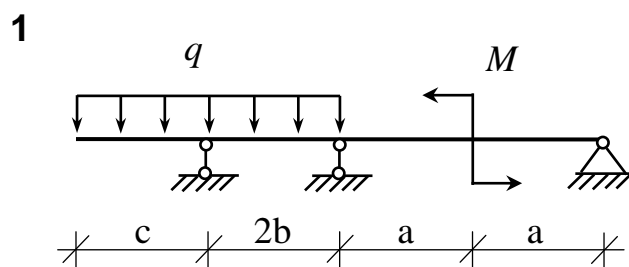
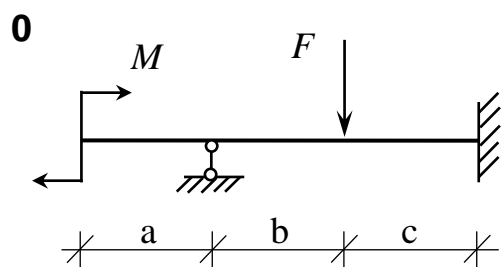
Цифра шифру	Числові значення по цифрах шифру				
	друга			третя	
	$A_1/A_2$	$E_1/E_2$	$F$ , кН	$\sigma_{adm1}$ , МПа	$\sigma_{adm2}$ , МПа
0	3	0,5	150	100	80
1	4	0,6	200	120	40
2	5	0,4	300	140	100
3	2	0,2	100	150	50
4	3	0,1	140	120	60
5	4	0,7	200	80	120
6	5	1,2	300	90	150
7	2	1,5	150	110	70
8	3	2,0	250	60	100
9	4	3,0	400	70	120

Номер схеми береться по першій цифрі шифру

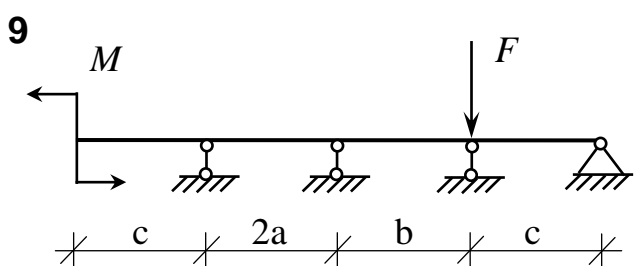
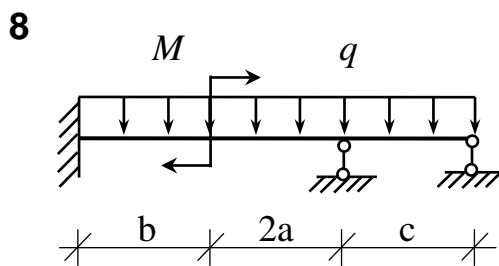
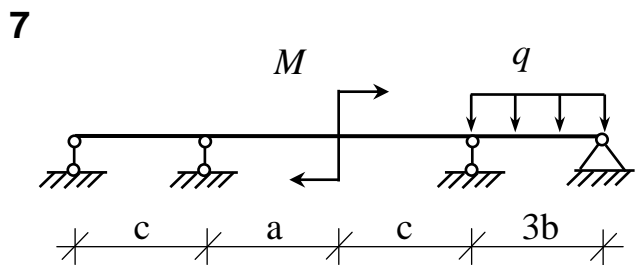
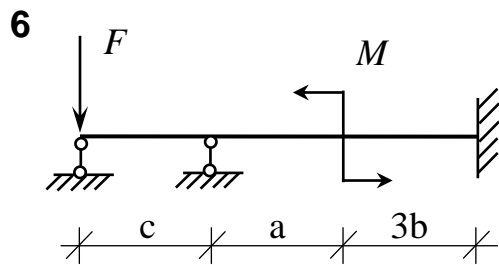
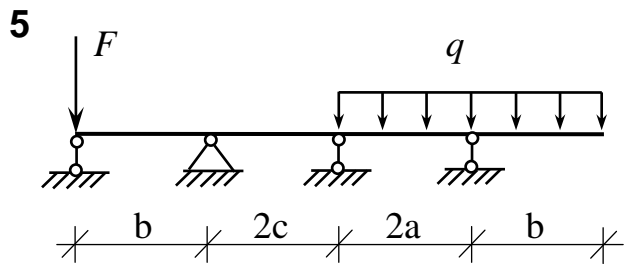
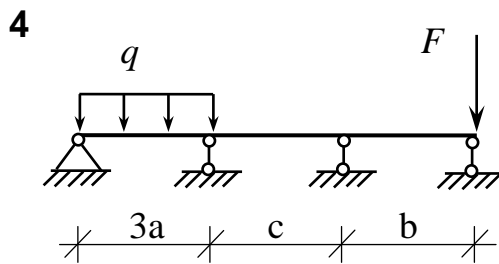
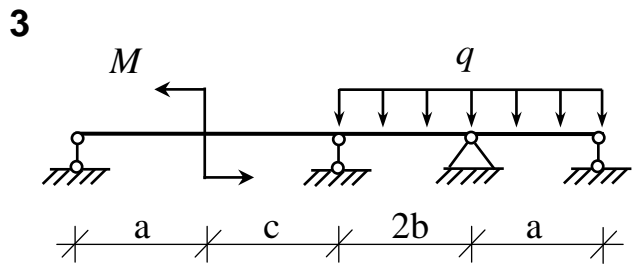
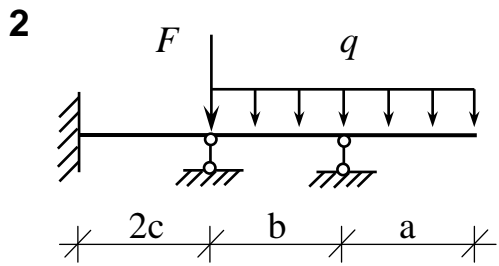
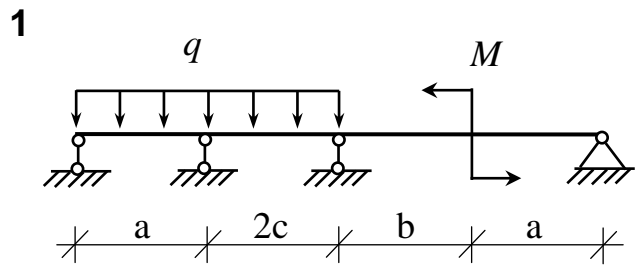
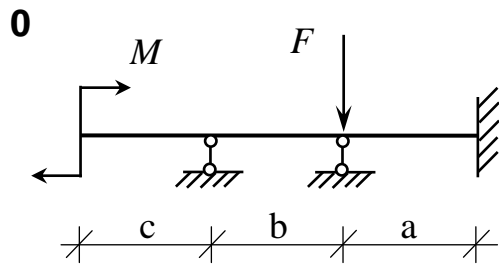
Додаток 23



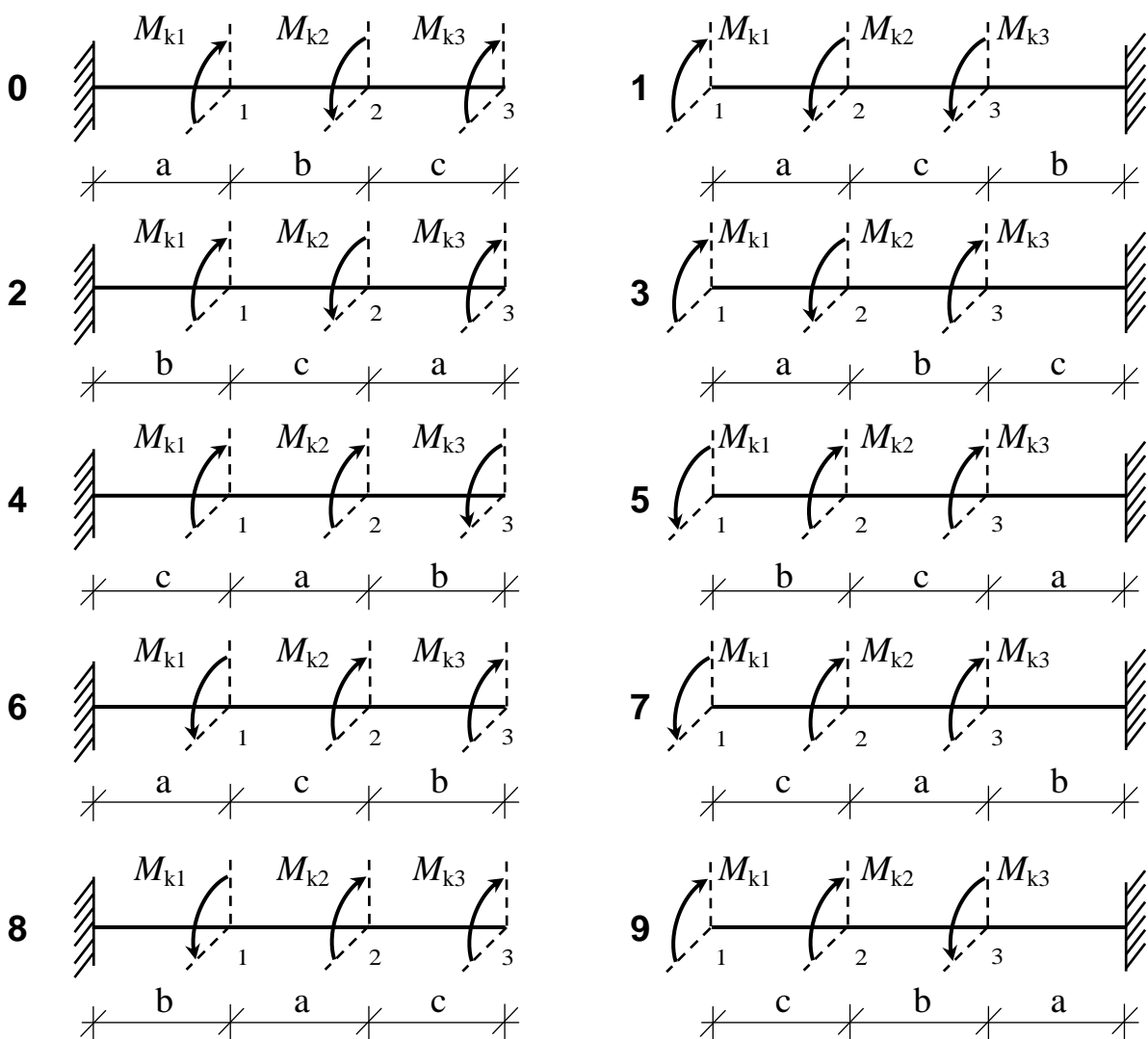
Цифра шифру	Числові значення по цифрах шифру			
	друга		третя	
	а, м	б, м	F, кН	A <sub>1</sub> /A <sub>2</sub>
0	1	2	500	2
1	2	3	100	1
2	1,5	2	300	0,5
3	2	2,5	250	0,5
4	1	2	350	1
5	1,5	2	450	2
6	2	3	200	2
7	1	3	300	1
8	2	2	350	0,5
9	1	2	400	2



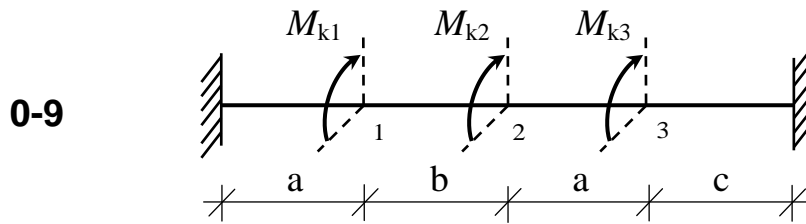
Розміри і навантаження взяти із додатка 18.



Розміри і навантаження взяти із додатка 18.



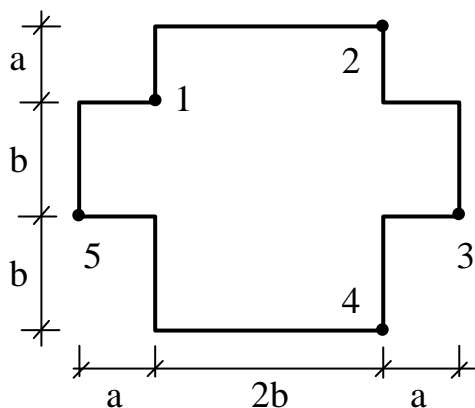
Цифра шифру	Числові значення по цифрах шифру						
	друга			третя			
	$M_{k1}$ , кН·м	$M_{k2}$ , кН·м	$M_{k3}$ , кН·м	а, м	б, м	с, м	переріз
0	2	3	1	1	3	2	2
1	1	2	3	1,5	2	1	3
2	3	2	1	2	3	1	1
3	2	1	3	1,5	1	3	2
4	1	3	2	1	3	2	3
5	3	2	1	2	2	3	1
6	2	3	2	1,5	1,5	2	3
7	1	2	3	2	1	2	2
8	3	1	3	1	2	1	1
9	2	3	2	1,5	3	2	2



Цифра шифру	Числові значення по цифрах шифру					
	друга			третя		
	$M_{k1}$ , кН·м	$M_{k2}$ , кН·м	$M_{k3}$ , кН·м	a, м	b, м	c, м
0	2	3	-1	1	2	3
1	-2	3	-2	2	2	3
2	3	-3	-3	0,5	3	1
3	-3	2	3	2	1	2
4	1	-2	2	0,5	2	3
5	-3	1	2	1	0,5	3
6	2	-3	1	0,5	3	2
7	-1	3	-2	1	2	1,5
8	3	-1	2	2	1	3
9	-2	1	3	0,5	2	1

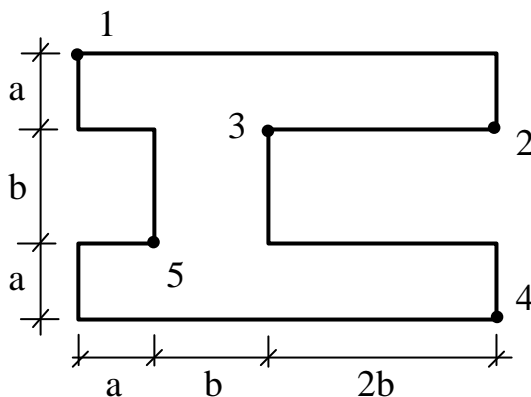


0, 1

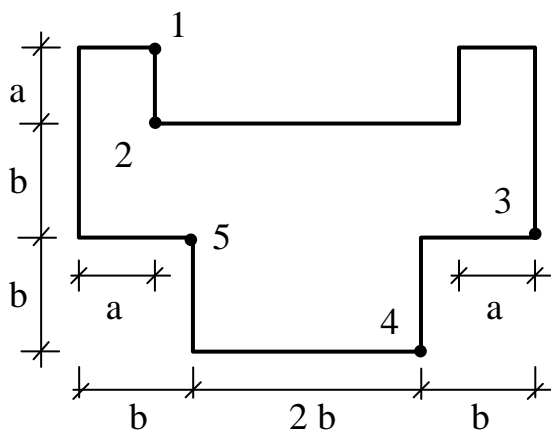


2, 3

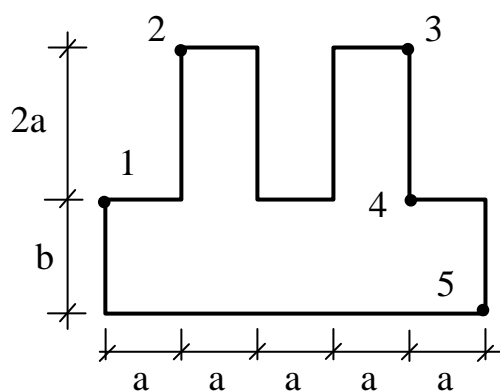
Додаток 28



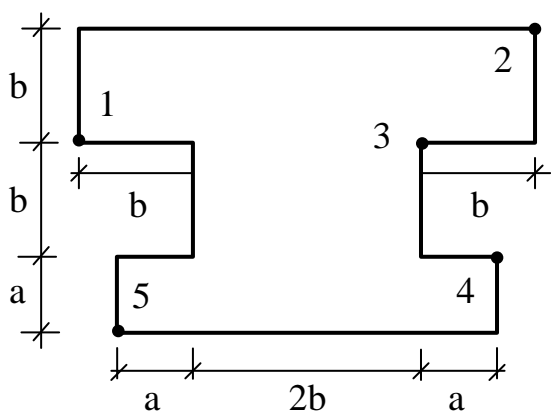
4, 5



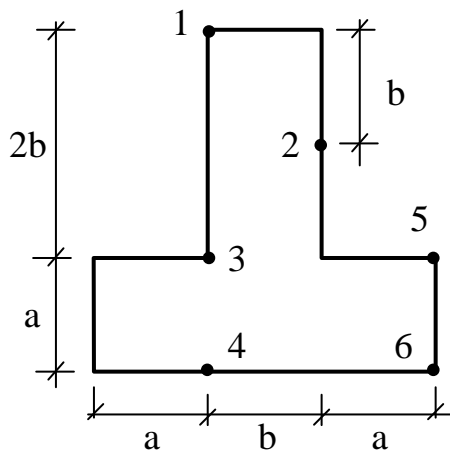
6, 7



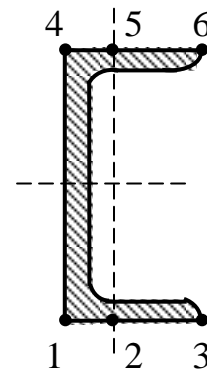
8, 9



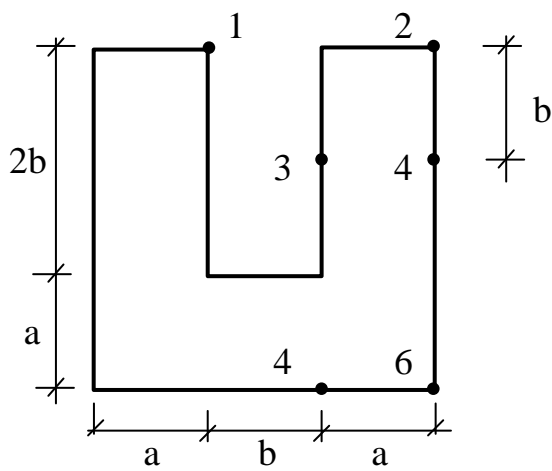
Цифра шифру	Числові значення по цифрах шифру		
	друга	третя	
		а, м	б, м
0	0,1	0,2	1
1	0,2	0,1	2
2	0,1	0,2	3
3	0,2	0,1	4
4	0,2	0,1	5
5	0,1	0,2	5
6	0,1	0,2	4
7	0,2	0,1	3
8	0,1	0,2	2
9	0,2	0,1	1



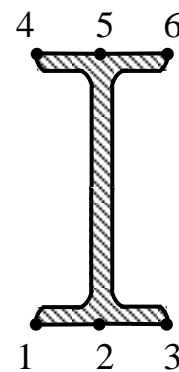
0, 2, 4, 6, 8



швелер

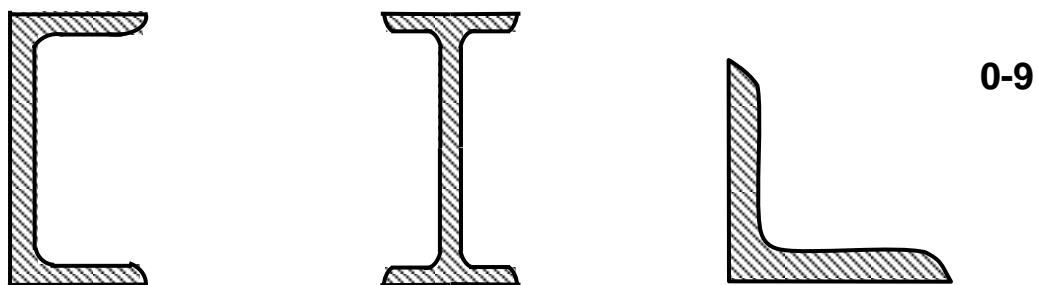


1, 3, 5, 7, 9

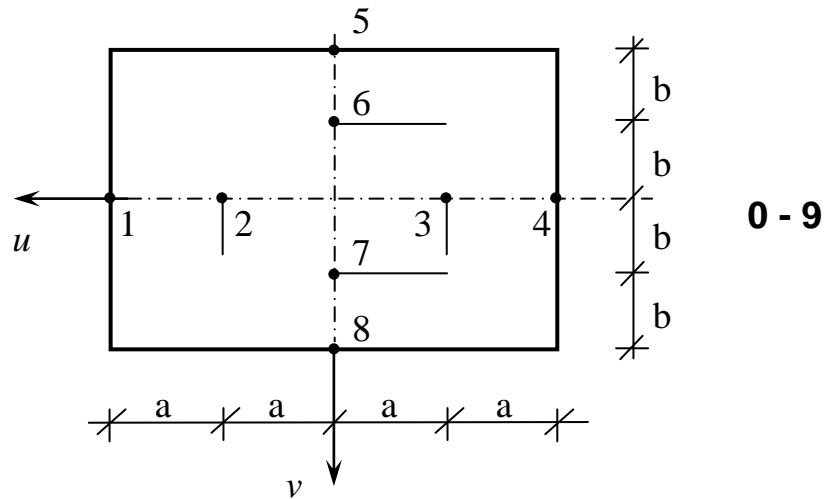


двотавр

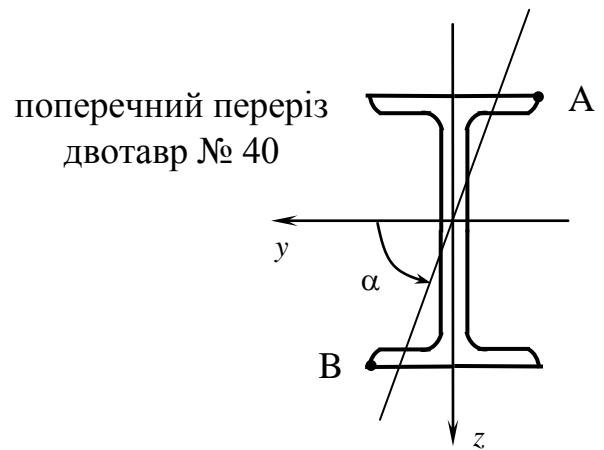
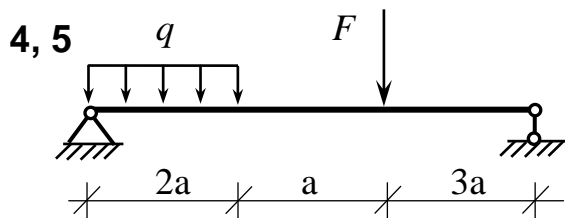
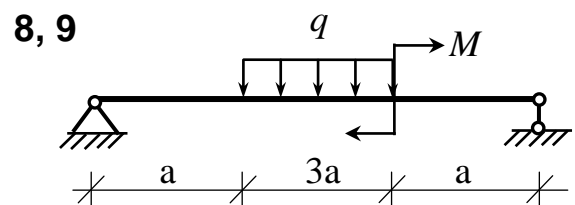
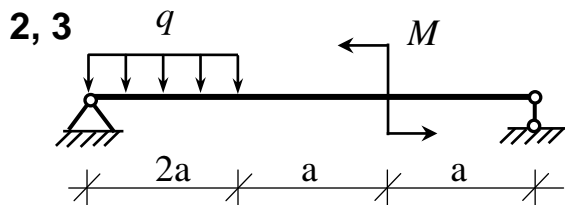
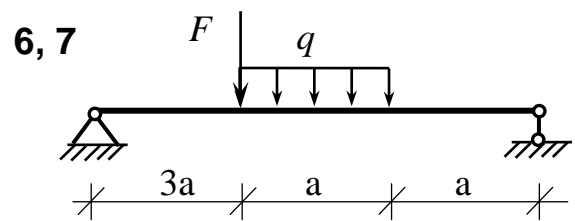
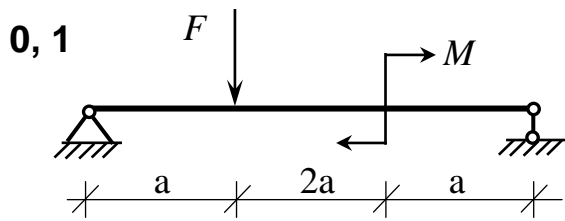
Цифра шифру	Числові значення по цифрах шифру			
	друга		третя	
	а, м	б, м	точка п	номер профілю
0	1	1	1	33
1	1	2	2	27
2	2	1	3	16
3	2	2	4	40
4	1,5	2	5	14
5	1	1,5	6	24
6	2	1,5	5	36
7	1,5	1	4	20
8	2	3	3	22
9	3	2	2	18



Цифра шифру	Числові значення по цифрах шифру		
	перша	друга	третя
	номер профілю		
	<b>C</b>	<b>I</b>	<b>L</b>
0	30	45	220x14
1	22	55	110x7
2	24	30	250x16
3	40	50	80x6
4	20	27	160x10
5	18	60	90x6
6	36	24	200x12
7	16	36	100x10
8	33	40	180x12
9	27	33	140x10

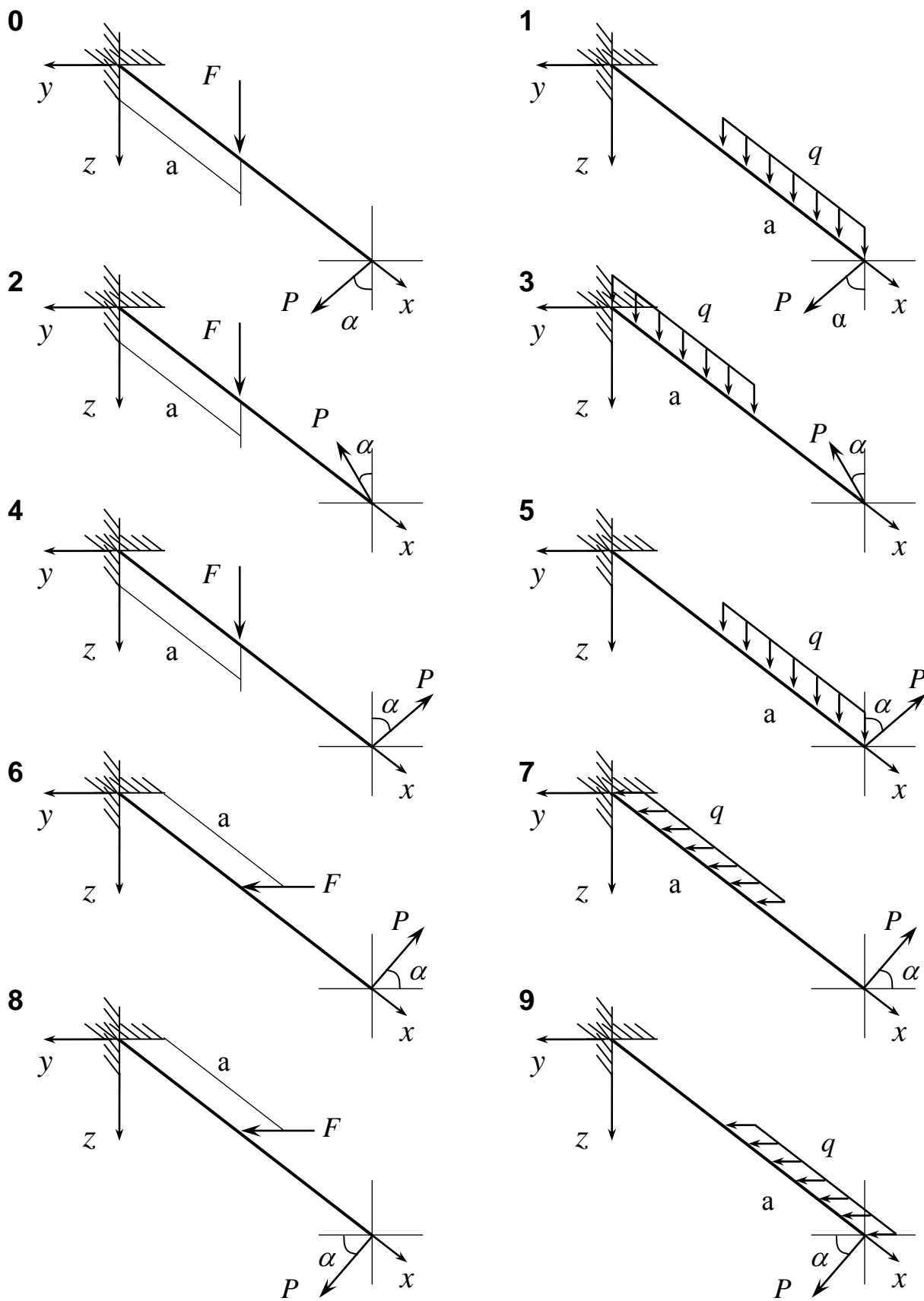


Цифра шифру	Числові значення по цифрах шифру			
	друга		третя	
	а, м	б, м	Точка n	F, кН
0	0,1	0,3	1	200
1	0,2	0,4	2	300
2	0,3	0,2	3	400
3	0,4	0,5	4	100
4	0,5	0,2	5	250
5	0,6	0,3	6	350
6	0,7	0,4	7	450
7	0,8	0,2	8	150
8	0,9	0,6	2	500
9	1,0	0,5	3	550



Загальні дані для задач додатків 32, 33

Цифра шифру	Числові значення по цифрах шифру							
	друга				третья			
	$l, \text{ м}$	$a, \text{ м}$	$\alpha, \text{ град}$	$k = h/b$	$F, \text{ кН}$	$P, \text{ кН}$	$q, \text{ кН/м}$	$M, \text{ кН}\cdot\text{м}$
0	0,8	0,4	45	1,8	8	10	20	15
1	1,0	0,5	30	1,6	10	15	18	20
2	1,2	0,8	60	2	12	6	16	30
3	1,8	0,9	45	1,5	6	8	10	10
4	1,5	0,5	60	1,5	5	8	8	20
5	1,7	0,6	30	1,7	4	12	15	15
6	1,4	0,7	60	1,8	6	14	12	30
7	1,3	0,8	45	2	12	7	10	40
8	1,5	1,0	60	1,6	7	8	14	20
9	1,4	0,9	30	2,2	6	6	16	10



Коефіцієнти  $\varphi$  зменшення  
основного допустимого  
напруження  $\sigma_{adm}^-$   
(ст2, ст3, ст4)

Гнучкість $\lambda$	Коеф. $\varphi$
0	1,00
10	0,99
20	0,96
30	0,94
40	0,92
50	0,89
60	0,86
70	0,81
80	0,75
90	0,69
100	0,60
110	0,52
120	0,45
130	0,40
140	0,36
150	0,32
160	0,29
170	0,26
180	0,23
190	0,21
200	0,19

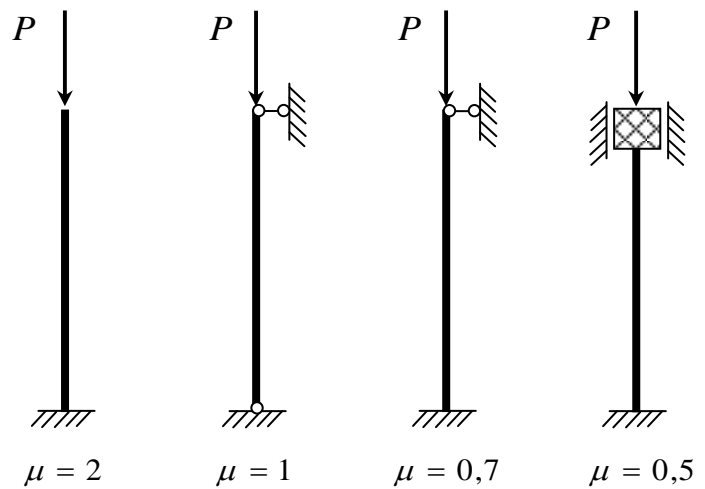
Для проміжних нетабульованих значень  $\varphi$   
при  $\lambda_1 < \lambda < \lambda_2$  користуються лінійною  
апроксимацією

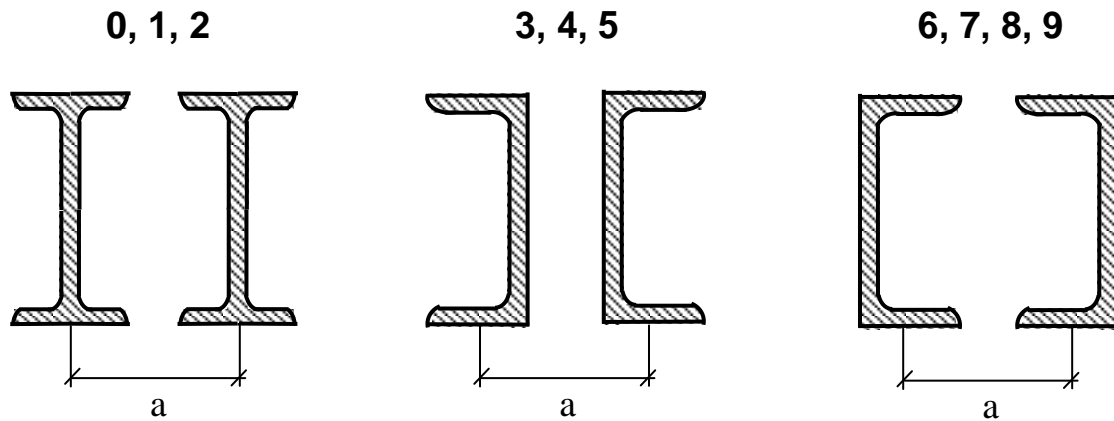
$$\varphi = \varphi_1 + \frac{\lambda - \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} (\varphi_2 - \varphi_1),$$

де  $\varphi_1$  відповідає  $\lambda_1$ , а  $\varphi_2$  відповідає  $\lambda_2$ .

Якщо гнучкість  $\lambda$  перевищує наведене в  
таблиці найбільше значення, то  $\varphi$  береться  
рівним мінімальному табличному значенню  
(в таких випадках іноді доводиться без-  
посередньо коригувати площу поперечного  
перерізу).

Схеми закріплення кінців стержня





Цифра шифру	Числові значення по цифрах шифру		
	друга		третья
	довжина $l$ , м	коефіцієнт $\mu$	сила $F$ , кН
0	7	1	500
1	6	0,7	800
2	5	2	450
3	10	0,5	750
4	8	0,7	650
5	9	1	550
6	8,5	2	700
7	11	0,5	400
8	12	0,7	300
9	7,5	2	600



Додаток 36

Цифра шифру	Числові значення по цифрах шифру		
	перша	друга	третя
	довжина $l$ , см	коефіцієнт $\mu$	поперечний переріз
0	190	2	I № 40
1	185	0,5	I № 36
2	170	0,7	I № 50
3	200	1,0	I № 33
4	180	0,7	□ № 40
5	175	0,5	I № 45
6	165	2	I № 30
7	160	1	□ № 33
8	155	0,5	□ № 27
9	195	0,7	□ № 36

Додаток 37

Цифра шифру	Числові значення по цифрах шифру		
	перша	друга	третя
	сила $F$ , кН	довжина $l$ , см	коефіцієнт $\mu$
0	100	150	0,7
1	200	160	2
2	300	90	1
3	400	100	0,5
4	500	130	1
5	600	110	0,5
6	700	140	2
7	250	120	0,7
8	450	125	2
9	550	115	0,5

Навчально-методичне видання

## **ОПР МАТЕРІАЛІВ**

Методичні вказівки  
до виконання контрольних задач  
і розрахунково-графічних робіт

Укладачі      ШУЛЬГА Микола Олександрович  
                      КОРНІЄНКО Вікторія Федорівна

Комп'ютерна верстка *Ю.Г.Томащука*

Підписано до друку      2.02.2005      Формат 60×84 1/16  
Папір офсетний. Гарнітура Таймс. Друк на різнографі.  
Ум.-друк.арк.      4,65, обл.-вид.арк. 5,0. Фарбовідб. 41  
Тираж 75 прим. Вид. № 112/III-04. Зам. № 21/1-05

КНУБА, Повітрофлотський проспект, 31 Київ-680, 03680

Віддруковано в редакційно-видавничому відділі  
Київського національного університету будівництва і архітектури

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру суб'єктів  
Видавничої справи ДК № 808 від 13.02.2002 р.