МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Київський національний університет будівництва і архітектури

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Методичні вказівки
до виконання індивідуальних завдань
для студентів спеціальностей 7.090214 "Підйомно-транспортні, будівельні, дорожні і меліоративні машини і обладнання", 7.010104 "Професійне навчання. Виробництво, експлуатація та ремонт підйомно-транспортних, будівельних, дорожніх і меліоративних машин і обладнання"

Київ 2005

ББК 22.11
В41

Укладачі: Н.Д. Федоренко, канд. техн. наук, професор
С.В. Білощицька, асистент
О.В. Доля, асистент

Рецензент О.І. Баліна, канд. техн. наук, доцент

Відповідальний за випуск В.В. Демченко, канд. техн. наук, доцент, завідувач кафедри прикладної математики

Затверджено на засіданні кафедри прикладної математики, протокол № 6 від 14 лютого 2005 року.

Видається в авторській редакції.

Вища математика: Методичні вказівки до виконання
В41 індивідуальних завдань / Уклад.: Н.Д Федоренко, С.В. Білощицька, О.В. Доля. – К.: КНУБА, 2005. – 92 с.

Містять приклади розв'язання завдань з розділів лінійної алгебри, векторної алгебри, аналітичної геометрії та диференціального числення; варіанти завдань для самостійної роботи, список літератури.

Призначені для студентів спеціальностей 7.090214 "Підйомно-транспортні, будівельні, дорожні і меліоративні машини і обладнання", 7.010104 "Професійне навчання. Виробництво, експлуатація та ремонт підйомно-транспортних, будівельних, дорожніх і меліоративних машин і обладнання" усіх форм навчання.

ЗАГАЛЬНІ ПОЛОЖЕННЯ

Пропоноване читачеві видання являє собою методичні вказівки для вивчення загального курсу вищої математики по модулях 1, 2 студентами першого курсу інженерних спеціальностей.

Методичні вказівки містять систематично підібрані задачі і вправи з таких розділів вищої математики, як лінійна та векторна алгебра, аналітична геометрія, диференціальне числення функції однієї та багатьох змінних.

Основою навчання є самостійна робота студента над підручником, конспектом лекцій та виконанням завдань по модулях.

У даних методичних вказівках наведені завдання по варіантах для виконання самостійної роботи по модулях, а також приклади розв’язання типових задач.

МОДУЛЬ 1

Розділ 1. ЛІНІЙНА АЛГЕБРА

Завдання 1.1. Задано три матриці A, B та C (де λ – дві останні цифри номера залікової книжки, μ – остання цифра номера залікової книжки). Виконати такі дії над матрицями:

а) $3A+4B$, $A\cdot B$, $B\cdot A$, $A\cdot C$;

б) обчислити det A, використовуючи методи Саррюса, трикутника (зірочки) та за допомогою розкладу на ад’юнкти;

в) знайти обернену матрицю A^{-1};

г) знайти $A\cdot A^{-1}$.

Завдання 1.2. Обчислити визначник, використовуючи його властивості.

Завдання 1.3. Перевірити сумісність системи за допомогою теореми Кронекера–Капеллі і в разі сумісності розв’язати її:

а) методом Крамера;

б) методом Гауса;

в) матричним методом.

Завдання 1.4. Розв’язати однорідну систему лінійних алгебраїчних рівнянь.

Розділ 2. ВЕКТОРНА АЛГЕБРА ТА АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ

Завдання 2.1. Задано вектори $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$. Необхідно:

а) обчислити мішаний добуток трьох векторів;

б) знайти модуль векторного добутку;

в) обчислити скалярний добуток двох векторів;

г) перевірити, будуть колінеарні чи ортогональні два вектори;

д) перевірити чи будуть компланарні три вектори.

Завдання 2.2. Довести, що вектори $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ утворюють базис, та знайти координати вектора $\vec{d}$ в цьому базисі.
Завдання 2.3. Вказані координати вершин піраміди $A_1A_2A_3A_4$. Знайти:
а) довжину ребра A_1A_2;
б) площу грані $A_1A_2A_3$;
в) кут між ребрами A_1A_2 і A_1A_4;
г) об'єм піраміди $A_1A_2A_3A_4$;
д) направляючі косинуси вектора A_1A_4.
Завдання 2.4. На векторах $\vec{m} = a\cdot\vec{i} + b\cdot\vec{j}$, $\vec{n} = c\cdot\vec{j} + d\cdot\vec{k}$, $\vec{p} = r\cdot\vec{i} + l\cdot\vec{k}$ побудовано паралелепіпед ($\vec{i},\vec{j},\vec{k}$, взаємно ортогональні орти). Знайти:
а) об'єм паралелепіпеда***;***
б) площу грані, побудованої на векторах $\overline{m}$ і $\overline{p}$;
в) довжину діагоналі паралелограма, побудованого на векторах $\overline{m}$ і $\overline{n}$.
Завдання 2.5. Дано координати вершин піраміди $A_1A_2A_3A_4$. Знайти:
а) рівняння прямої A_1A_2;
б) рівняння площини $A_1A_2A_3$;
в) через точки A_1,A_4 провести площину, перпендикулярну до площини $A_1A_2A_3$;
г) рівняння висоти, опущеної з точки A_4 на площину грані $A_1A_2A_3$;
д) точку A_5, що симетрична точці A_4 відносно грані $A_1A_2A_3$;
е) впевнитись, що прямі A_1A_2 та A_1A_4 належать одній площині;
ж) через точку A_4 провести площину, перпендикулярну до прямої A_1A_4.
Завдання 2.6. Задано вершини трикутника А, В, С. Знайти:
а) рівняння сторони АВ;
б) рівняння висоти СН;
в)рівняння медіани АМ;
г) точку N перетину медіани АМ та висоти СН;
д) рівняння прямої, що проходить через точку С паралельно стороні АВ;
е) відстань від точки С до прямої АВ.
Завдання 2.7. Розв'язати задачу.
Завдання 2.8. Розв'язати задачу.
Завдання 2.9. Скласти канонічне рівняння:
а) еліпса; б) гіперболи; в) параболи.
A, B – точки, що лежать на кривій, F – фокус, a – велика (дійсна) ось, b – мала (уявна) ось, ε – ексцентриситет, $y = \pm kx$ – рівняння асимптот гіперболи, D – директриса кривої, $2c$ – фокальна відстань.
Завдання 2.10. Побудувати криву задану рівнянням в полярній системі координат.
Завдання 2.11. Побудувати поверхні та визначити їх вид (назву).
Завдання 2.12. Записати рівняння та визначити вид поверхні, що отримана при обертанні даної лінії навколо вказаної осі координат. Зробити малюнок.

МОДУЛЬ 2
Розділ 3. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ

Завдання 3.1. Знайти границю функції, не користуючись правилом Лопіталя.
Завдання 3.2. Знайти похідну від функцій.
Завдання 3.3. Дослідити функцію за допомогою диференціального числення та побудувати її графік.
Завдання 3.4. Знайти частинний і повний диференціали 1–го порядку функції *Z* = *f(x, y)* в точці N при заданих значеннях Δx та Δy.
Завдання 3.5. Знайти частинні похідні другого порядку функції *Z* = *f(x, y).*
Завдання 3.6. Знайти градієнт функції *Z* = *f(x, y)* в точці M та похідну за напрямком вектора $\vec{S}$ в цій точці.
Завдання 3.7. Дослідити на екстремум функцію *Z* = *f(x, y).*
Завдання 3.8. Знайти найменше і найбільше значення функції *Z* = *f(x, y)* в замкненому контурі *(D),* заданому системою нерівностей.

РОЗВ'ЯЗАННЯ ТИПОВОГО ВАРІАНТА
МОДУЛЬ 1
Розділ 1. ЛІНІЙНА АЛГЕБРА

Завдання 1.1. Задано три матриці:

$$A=\begin{pmatrix}-3 & 0 & 7\\ -4 & 2 & -3\\ -1 & 1 & 2\end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix}2 & 3 & 1\\ -1 & 4 & 0\\ 1 & 5 & -12\end{pmatrix};\quad C=\begin{pmatrix}3\\ -1\\ 5\end{pmatrix}.$$

Знайти: а) $2A+3B$; $A\cdot B$; $B\cdot C$; б) $\det A$; в) A^{-1}; г) $A\cdot A^{-1}$.

Розв'язок:

а) знаходимо: $2A+3B=\begin{pmatrix}-6 & 0 & 14\\ -8 & 4 & -6\\ -2 & 2 & 4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}6 & 9 & 3\\ -3 & 12 & 0\\ 3 & 15 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 9 & 17\\ -11 & 16 & -6\\ 1 & 17 & 1\end{pmatrix}$;

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}-3\cdot 2+0\cdot(-1)+7\cdot 1 & -3\cdot 3+0\cdot 4+7\cdot 5 & -3\cdot 1+0\cdot 0+7\cdot(-1)\\ -4\cdot 2+2\cdot(-1)+(-3)\cdot 1 & -4\cdot 3+2\cdot 4+(-3)\cdot 5 & -4\cdot 1+2\cdot 0+(-3)\cdot(-1)\\ -1\cdot 2+1\cdot(-1)+2\cdot 1 & -1\cdot 3+1\cdot 4+2\cdot 5 & -1\cdot 1+1\cdot 0+2\cdot(-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 26 & -10\\ -13 & -19 & -1\\ -1 & 11 & -3\end{pmatrix};$$

$$B\cdot C=\begin{pmatrix} 2\cdot 3+3\cdot(-1)+1\cdot 5 \\ =1\cdot 3+4\cdot(-1)+0\cdot 5 \\ 1\cdot 3+5\cdot(-1)+(-1)\cdot 5 \\ \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 8 \\ -7 \\ -7 \end{pmatrix};$$

б) $\det A=\begin{vmatrix} -3 & 0 & 7 \\ -4 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix}=-3\cdot 2\cdot 2+(-4)\cdot 1\cdot 7+0\cdot(-3)\cdot(-1)-(-1)\cdot 2\cdot 7-1\cdot(-3)\cdot(-3)-2\cdot(-4)\cdot 0=-35$

в) обернена матриця A^{-1} до матриці A має вигляд:

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\cdot\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{23} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}.$$

Оскільки $\det A=-35\neq 0$, то матриця A^{-1} є не виродженою, отже, існує.

Знаходимо:

$A_{11}=\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=7;$ $\quad A_{12}=-\begin{vmatrix} -4 & -3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}=11;$ $\quad A_{13}=\begin{vmatrix} -4 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}=-2.$

$A_{21}=-\begin{vmatrix} 0 & 7 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=7;$ $\quad A_{22}=-\begin{vmatrix} -3 & 7 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}=1;$ $\quad A_{33}=\begin{vmatrix} -3 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}=3.$

$A_{31}=\begin{vmatrix} 0 & 7 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}=-14;$ $\quad A_{32}=-\begin{vmatrix} -3 & 7 \\ -4 & -3 \end{vmatrix}=-37;$ $\quad A_{33}=\begin{vmatrix} -3 & 0 \\ -4 & 2 \end{vmatrix}=-6.$

Тоді: $A^{-1}=-\dfrac{1}{35}\begin{pmatrix} 7 & 7 & -14 \\ 11 & 1 & -37 \\ -2 & 3 & -6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{2}{3} \\ -\frac{11}{35} & -\frac{1}{35} & \frac{37}{35} \\ \frac{2}{35} & -\frac{3}{35} & \frac{6}{35} \end{pmatrix}$

г) маємо:

$$A\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{3}{5}+0+\frac{2}{5} & \frac{3}{5}-0-\frac{3}{5} & -\frac{6}{5}+0+\frac{6}{5} \\ \frac{4}{5}-\frac{22}{35}-\frac{6}{35} & \frac{4}{5}-\frac{2}{35}+\frac{9}{35} & -\frac{8}{5}+\frac{74}{35}-\frac{18}{35} \\ & & \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=E.$$

Отже, обернена матриця знайдена вірно.

Завдання 1.2. Обчислити визначник, використовуючи його властивості:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 & 2 \\ 6 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -3 & 4 \\ 2 & 3 & 0 & -5 \end{vmatrix}.$$

Розв'язок:

Обчислимо визначник, попередньо отримавши нулі в першому рядку:

$$2\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 & 21 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -3 & 4 \\ 1 & 3 & 0 & -5 \end{vmatrix} = 2\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 7 & -6 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & -7 \end{vmatrix} = 2\cdot\begin{vmatrix} -1 & 7 & -6 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -7 \end{vmatrix} =$$

$$= 2\left(-1\cdot\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -7 \end{vmatrix} - 7\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -7 \end{vmatrix} - 6\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}\right) = 2(-3+126=36) = 174.$$

Завдання 1.3. Перевірити сумісність системи і розв'язати її:

а) методом Крамера; б) методом Гауса; в) матричним методом.

$$1.\ \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = -1; \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -4; \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -2. \end{cases}$$

Розв'язок:

Сумісність системи перевіримо за теоремою Кронекера-Капеллі, для цього утворимо основну і розширену матриці даної системи:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{pmatrix}; \qquad \tilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & -4 \\ 4 & 1 & 4 & -2 \end{array}\right).$$

Оскільки ранг основної матриці $rang A = 3$, ранг розширеної матриці $rang\tilde{A} = 3$, то задана система рівнянь сумісна і має єдиний розв'язок:

а) за формулами Крамера: $x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta}$; $\quad x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta}$; $\quad x_3 \dfrac{\Delta_3}{\Delta}$.

Отже, знайдемо визначники системи:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2(-3-0+6) = 6 \neq 0;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -4 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -2(-3-6+6) = 6;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ 4 & -2 & 4 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 4 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -2(6-0-12) = 12;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -4 \\ 4 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 6-12-6 = -12.$$

$$x_1 \frac{6}{6} = 1; \quad x_2 \frac{12}{6} = 2; \quad x_3 \frac{-12}{6} = -2.$$

Відповідь: (1;2;-2).

б) виконаємо елементарні перетворення над рядками розширеної матриці даної системи:

$$\tilde{A} = 1\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & -4 \\ 4 & 1 & 4 & -2 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & -2 & -2 \\ 0 & -3 & -4 & 2 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \end{array}\right).$$

$-2x_3 = 4; \quad x_3 - 2$

Отже, $\quad 3x_2 + 2x_3 = 2; \quad 3x_2 - 4 = 2; \quad x_2\,2$

$x_1 + x_2 + 2x_3 = -1; \quad x_1 + 2 - 4 = -1; \quad x_1 = 1$

Відповідь: (1;2;-2).

в) запишемо систему рівнянь в матричній формі: $AX = B$, де

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{pmatrix}; \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}. \qquad X = A^{-1}B.$$

Знайдемо обернену матрицю A^{-1} до матриці A:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}; \quad \begin{matrix} A_{11} - 6; & A_{21} = -2; & A_{31} = 4 \\ A_{12} = 0 & A_{22} = -4 & A_{32} = 2 \\ A_{13} = 6 & A_{23} = 3 & A_{33} = -3 \end{matrix}; \ \det A = 6 \neq 0.$$

Тоді $\quad A^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -6 & -2 & 4 \\ 0 & -4 & 2 \\ 6 & 3 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix};$

$$X=\begin{pmatrix}-1 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3}\\ 0 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3}\\ 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1\\ -4\\ -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\cdot(-1) & + & (-\frac{1}{3})\cdot(-4) & + & \frac{2}{3}\cdot(-2)\\ 0\cdot(-1) & + & (-\frac{2}{3})\cdot(-4) & + & \frac{1}{3}\cdot(-2)\\ 1\cdot(-1) & + & \frac{1}{2}\cdot(-4) & + & (-\frac{1}{2})\cdot(-2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ -2\end{pmatrix}.$$

Відповідь: (1;2;-2).

$$2.\ \begin{cases}x_1+2x_2-x_3=1;\\ 2x_1-x_2+2x_3=3\\ 3x_1+x_2+x_3=5\end{cases}$$

Перевіримо сумісність системи за теоремою Кронекера-Капеллі:

$$\widetilde{A}=\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & -1 & 1\\ 2 & -1 & 2 & 3\\ 3 & 1 & 1 & 5\end{array}\right)\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & -1 & 1\\ 0 & -5 & 4 & 1\\ 0 & -5 & 4 & 2\end{array}\right)\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & -1 & 1\\ 0 & -5 & 4 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right).$$

Отже, $\operatorname{rang}\widetilde{A}=3$; $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 2 & -1 & 2\\ 3 & 1 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 0 & -5 & 4\\ 0 & -5 & 4\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 0 & -5 & 4\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$

Отже, $\operatorname{rang}A=2.$ Тому дана система рівнянь несумісна.

Завдання 1.4. Розв'язати однорідну систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$1.\ \begin{cases}x_1+2x_2+3x_3=0\\ 2x_1+x_2+x_3=0\\ x_1-x_2+2x_3=0\end{cases}$$

Визначник системи: $\Delta=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 2\end{vmatrix}=3-6-9=-12\neq 0,$ тому система має єдиний розв'язок $x_1=x_2=x_3=0.$

$$2.\ \begin{cases}-x_1+x_2-2x_3=0\\ x_1-x_2+2x_3=0\\ 2x_1+x_2-x_3=0\end{cases}$$

Визначник системи $\Delta=\begin{vmatrix}-1 & 1 & -2\\ 1 & -1 & 2\\ 2 & 1 & -1\end{vmatrix}=0,$ тому система невизначена. Всі мінори другого порядку, що містяться у першому і другому рядках визначника, дорівнюють 0. Візьмемо друге і третє рівняння системи:

$$\begin{matrix} x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{matrix}.$$

Ці рівняння містять відмінний від нуля мінор другого порядку:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0, \text{ тому}$$

$$x_1 = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \cdot t = -t; \quad x_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \cdot t = 5t; \quad x_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \cdot t = 3t,$$

де t – довільне дійсне число. Отже, система має безліч розв'язків:

$$\begin{cases} x_1 = -t \\ x_2 = 5t \\ x_3 = 3t \end{cases}, \text{ де } t \in R.$$

Розділ 2. ВЕКТОРНА АЛГЕБРА ТА АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ

Завдання 2.1. Задано вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$: $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$; $\vec{b} = -\vec{i} + 2\vec{k}$; $\vec{c} = \vec{i} - 2\vec{j} + 5\vec{k}$. Знайти:

а) мішаний добуток векторів $\vec{a}, 2\vec{b}, -3\vec{c}$;

б) модуль векторного добутку векторів $2\vec{a}$ і $3\vec{c}$;

в) скалярний добуток векторів $3\vec{b}$ і $(-2\vec{c})$;

г) чи будуть колінеарні чи ортогональні вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$;

д) чи будуть колінеарні вектори $4\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

Розв'язок:

а) так як $2\vec{b} = -2\vec{i} + 4\vec{k}$; $-3\vec{c} = -3\vec{i} + 6\vec{j} - 15\vec{k}$, то

$$\left(\vec{a} \cdot 2\vec{b}\right) \cdot \left(-3\vec{c}\right) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 4 \\ -3 & 6 & -15 \end{vmatrix} = -3\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 4 \\ 1 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 6\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & -5 \end{vmatrix} = 6(-4 - 16 - 4) = -144$$

б) так як $2\vec{a} = 2\vec{i} + 4\vec{j} + 6\vec{k}$; $3\vec{c} = 3\vec{i} - 6\vec{j} + 15\vec{k}$, то

$$2\vec{a} \cdot 3\vec{c} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & -6 & 15 \end{vmatrix} = 6\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 6(16\vec{i} - 2\vec{j} + 4\vec{k}),$$

$$\left|2\vec{a} \cdot 3\vec{c}\right| = \sqrt{6^2\left(16^2 + (2)^2 + 4^2\right)} = 6\sqrt{256 + 4 + 16} = 12\sqrt{69};$$

в) так як $3\vec{b} = -3\vec{i} + 6\vec{k}$; $-2\vec{c} = -2\vec{i} + 4\vec{j} - 10\vec{k}$, то

$$3\vec{b} \cdot (-2\vec{c}) = -3 \cdot (-2) + 0 \cdot 4 + 6 \cdot (-10) = -54;$$

г) так як $\vec{a}=(1{,}2{,}3)$ і $\vec{b}=(-1{,}0{,}2)$, то $-\frac{1}{1}\neq\frac{0}{2}\neq\frac{2}{3}$, отже, вектори не колінеарні. Так як $\vec{a}\cdot\vec{b}=1\cdot(-1)+2\cdot 0+3\cdot 2=5\neq 0$, то вектори не ортогональні;

д) вектори $4\vec{a},\vec{b}$ і $\vec{c}$ колінеарні, якщо $4\vec{a}\vec{b}\vec{c}=0$. Обчислимо

$$4\vec{a}\vec{b}\vec{c}=4\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ -1 & 0 & 2\\ 1 & -2 & 5\end{vmatrix}=8\begin{vmatrix}1 & 1 & 3\\ -1 & 0 & 2\\ 1 & -1 & 5\end{vmatrix}=8(8+4)=96\neq 0,$$

тобто вектори не компланарні.

Завдання 2.2. Довести, що вектори $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ утворюють базис і розкласти вектор $\vec{d}$ за цим базисом, якщо $\vec{a}=(2{,}1{,}1)$; $\vec{b}=(1{,}2{,}-2)$; $\vec{c}=(1{,}1{,}2)$; $\vec{d}=(4{,}3{,}-2)$.

Розв’язок:

Обчислимо $$\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\begin{vmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & 2 & -2\\ 1 & 1 & 2\end{vmatrix}=12-4-1=7\neq 0.$$

Отже, вектори $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ утворюють базис і вектор $\vec{d}$ в цьому базисі має представлення: $\vec{d}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}$, або в координатному вигляді

$$\begin{cases}2\alpha+\beta+\gamma=4\\ \alpha+2\beta+\gamma=3\\ \alpha-2\beta+2\gamma=-2\end{cases}.$$

Розв’язуємо дану систему за формулами Крамера: $\Delta=7$,

$$\Delta_\alpha=\begin{vmatrix}4 & 1 & 1\\ 3 & 2 & 1\\ -2 & -2 & 2\end{vmatrix}=-2\begin{vmatrix}4 & 1 & 1\\ 3 & 2 & 1\\ 1 & 1 & -1\end{vmatrix}=-2(-12+4+1)=14,$$

$$\Delta_\beta=\begin{vmatrix}2 & 4 & 1\\ 1 & 3 & 1\\ 1 & -2 & 2\end{vmatrix}=16-4-5=7,\qquad \Delta_\gamma=\begin{vmatrix}2 & 1 & 4\\ 1 & 2 & 3\\ 1 & -2 & -2\end{vmatrix}=4+5-16=-7.$$

$$\alpha=\frac{\Delta_\alpha}{\Delta}=\frac{17}{7}=2;\quad \beta=\frac{\Delta_\beta}{\Delta}=\frac{7}{7}=1;\quad \gamma=\frac{\Delta_\gamma}{\Delta}=\frac{-7}{7}=-1,$$

отже, $\vec{d}=(2{,}1{,}-1)=2\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$.

Завдання 2.3. Дано вершини піраміди $A_1A_2A_3A_4$:

$A_1(1;2;1)$; $A_2(3;0;-2)$; $A_3(5;2;7)$; $A_4(-6;-5;8)$. Знайти:

а) довжину ребра A_1A_2; б) площу грані $A_1A_2A_3$;

в) кут між ребрами A_1A_2 і A_1A_4;   г) об'єм піраміди $A_1A_2A_3A_4$:;

д) напрямні косинуси вектора A_1A_4.

Розв'язок:

а) вектор $\overrightarrow{A_1A_2}=(2;-2;-3)$, тому його довжина $\left|\overrightarrow{A_1A_2}\right|=\sqrt{2^2+(-2)^2+(-3)^2}=17$, отже, довжина ребра A_1A_2 дорівнює 17;

б) так як $S_{A_1A_2A_3}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{A_1A_2}\cdot\overrightarrow{A_1A_3}\right|$, то

$$\overrightarrow{A_1A_3}=(4;0;6),\quad \overrightarrow{A_1A_2}\cdot\overrightarrow{A_1A_3}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & -2 & -3\\ 4 & 0 & 6\end{vmatrix}=-12\vec{i}-24\vec{j}+8\vec{k},$$

$$S_{A_1A_2A_3}=\frac{1}{2}\sqrt{(-12)^2+(-24)^2+8^2}=\frac{1}{2}\cdot 28=14;$$

в) вектори $\overrightarrow{A_1A_2}=(2;-2;-3)$, $\overrightarrow{A_1A_4}=(-7;-7;7)$, кут φ між ними визначається рівністю: $\cos\varphi=\dfrac{\overrightarrow{A_1A_2}\cdot\overrightarrow{A_1A_4}}{\left|\overrightarrow{A_1A_2}\right|\cdot\left|\overrightarrow{A_1A_4}\right|}$.

Отже, $\cos\varphi=\dfrac{2\cdot(-7)\_(-2)\cdot(-7)+(-3)\cdot 7}{17\cdot\sqrt{(-7)^2+(-7)^2+7^2}}=\dfrac{7(-2+2-3)}{17\cdot 7\sqrt{3}}=-\dfrac{\sqrt{3}}{17}$.

Тоді $\varphi=\arccos(\frac{\sqrt{3}}{17})=180^0-\arccos\frac{\sqrt{3}}{17}\approx 180^0-84^0=96^0.$

г) так як $V_{nip}=\frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{A_1A_2}\cdot\overrightarrow{A_1A_3}\right)\cdot\overrightarrow{A_1A_4}\right|$, то

$$V_{nip}=\frac{1}{6}\mathrm{mod}\begin{vmatrix}2 & -2 & -3\\ 4 & 0 & 6\\ -7 & -7 & 7\end{vmatrix}=\frac{7}{3}\mathrm{mod}\begin{vmatrix}-2 & 2 & 3\\ 2 & 0 & 3\\ 1 & 1 & -1\end{vmatrix}=\frac{7}{3}\left|10+12\right|=\frac{7}{3}\cdot 22=\frac{154}{3}=51\frac{1}{3};$$

д) так як $\overrightarrow{A_1A_4}=(-7;-7;7)$ і $\left|\overrightarrow{A_1A_4}\right|=7\sqrt{3}$, то напрямні косинуси вектора $\overrightarrow{A_1A_4}$: $\cos\alpha=\dfrac{-7}{7\sqrt{3}}=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$; $\cos\beta=\dfrac{-7}{7\sqrt{3}}=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$; $\cos\gamma=\dfrac{7}{7\sqrt{3}}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Завдання 2.4. На векторах $\vec{m}=3\vec{i}+4\vec{j}$, $\vec{n}=-3\vec{j}+\vec{k}$, $\vec{p}=2\vec{j}+5\vec{k}$ побудовано паралелепіпед. Знайти:

а) об'єм паралелепіпеда; б) площу грані, побудованої на векторах $\vec{m}$ і $\vec{p}$;

в) довжину діагоналі паралелограма, побудованого на векторах $\vec{m}$ і $\vec{n}$.

Розв'язок:

а) так як $\vec{m}=(3;4;0)$; $\vec{n}=(0;-3;1)$: $\vec{p}=(0;2;5)$,

$$\vec{m}\vec{n}\vec{p}=\begin{vmatrix}3 & 4 & 0\\ 0 & -3 & 1\\ 0 & 2 & 5\end{vmatrix}=3(-15-2)=-51, \text{ то } V_{\text{парал}}=|\vec{m}\vec{n}\vec{p}|=|-51|=51;$$

б) так як $S_{\text{парал}}=|\vec{m}\cdot\vec{p}|$, то $\vec{m}\cdot\vec{p}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 3 & 4 & 0\\ 0 & 2 & 5\end{vmatrix}=20\vec{i}-15\vec{j}+6\vec{k}$,

$$S=\sqrt{20^2+(-15)^2+6^2}=\sqrt{661};$$

в) знайдемо кут φ між векторами $\vec{m}$ і $\vec{n}$:

$$\cos\varphi=\frac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{|\vec{m}|\cdot|\vec{n}|}=\frac{3\cdot 0+4\cdot(-3)+0\cdot 1}{\sqrt{3^2+4^2+0^2}\cdot\sqrt{0^2+(-3)^2+1^2}}=\frac{-12}{5\sqrt{10}}=-\frac{6}{5}\sqrt{\frac{2}{5}}.$$

Тоді $d^2=|\vec{m}|^2+|\vec{n}|^2-2|\vec{m}|\cdot|\vec{n}|\cos\varphi$, $d^2=25+10-2\cdot(-12)=59.$ $d=\sqrt{59}.$

Завдання 2.5. Дано координати вершин піраміди $A_1A_2A_3A_4$:
$A_1(1;-2;2)$; $A_2(5;1;4)$; $A_3(0;-4;4)$; $A_4(2;-3;-6)$. Знайти:

а) рівняння прямої A_1A_2; б) рівняння площини $A_1A_2A_3$;

в) через точки A_4A_0 провести площину, перпендикулярну до площини $A_1A_2A_3$;

г) рівняння висоти A_4A_0 піраміди;

д) точку A_5, симетричну точці A_4, відносно грані $A_1A_2A_3$;

е) впевнитись, що прямі A_1A_2 та A_1A_4 належать одній площині;

ж) через точку A_4 провести площини, перпендикулярну до прямої A_1A_4.

Розв'язок:

а) Рівняння прямої в просторі, яка проходить через дві задані точки A_1 і A_4

$$\frac{x-1}{5-1}=\frac{y-(-2)}{1-(-2)}=\frac{z-2}{4-2}; \qquad \frac{x-1}{4}=\frac{y+2}{3}=\frac{z-2}{2};$$

б) рівняння площини, що проходить через точки A_1,A_2,A_3:

$$\begin{vmatrix}x-1 & y+2 & z-2\\ 4 & 3 & 2\\ -1 & -2 & 2\end{vmatrix}=0,$$

Отже, $(x-1)(6+4)-(y+2)(8+2)+(z-2)(-8+3)=0$, $10(x-1)-10(y+2)-5(z-2)=0$,
$10x-10y-5z-20=0$, $2x-2y-z-4=0$;

в) рівняння прямої A_1A_4:

$\frac{x-1}{2-1}=\frac{y+2}{-3+2}=\frac{z-2}{-6-2}$; $\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z-2}{-8}$; рівняння площини $A_1A_2A_3$: $2x$-$2y$-z-4=0; отже, рівняння площини, що проходить через пряму A_1A_4 перпендикулярно до площини $A_1A_2A_3$, буде:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+2 & z-2 \\ 1 & -1 & -8 \\ 2 & -2 & -1 \end{vmatrix}=0,$$

$(x-1)(1-16)-(y+2)(-1+16)+(z-2)(-2+2)=0$,
$-15(x-1)-15(y+2)=0$, $x-1+y+2=0$,
$x+y+1=0$;

г) З умови перпендикулярності прямої A_4A_0 і площин $A_1A_2A_3$ випливає, що напрямний вектор прямої $\vec{S}$ співпадає з нормальним вектором площини $\vec{n}$, тобто, $\vec{S}=\vec{n}$=(2;-2;-1). Тоді рівняння прямої A_4A_0: $\frac{x-2}{2}=\frac{y+3}{-2}=\frac{z+6}{-1}$;

д) параметричне рівняння прямої A_4A_5: $\begin{cases} x=2+t, \\ y=-3+t, \\ z=-6+t \end{cases}$

Рівняння площини $A_1A_2A_3$: $2x-2y-z-4=0$,
Отже, $2(2+t)-2(-3+t)-(-6+t)-4=0$, $2t-2t-6t+4+6+6-4=0$, $-6t+12=0$; $t=2$.
Точка перетину прямої і площини: $A_0(4;-1;-4)$.
Оскільки $A_4A_5\perp(A_1A_2A_3)$ і A_0 – середина відрізка A_4A_5, то маємо:

$4=\frac{2+x}{2}$; $-1=\frac{-3+y}{2}$; $-4=\frac{-6+z}{2}$; $x=6$; $y=1$; $z=-2$,;

е) рівняння прямих A_1A_2 та A_1A_4:

$\frac{x-1}{4}=\frac{y+2}{3}=\frac{z-2}{2}$ і $\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z-2}{-8}$, а їх напрямні вектори $\vec{S}_1$=(4;3;2) і $\vec{S}_2$=(1;-1;-8).

Оскільки $\frac{4}{1}\neq\frac{3}{-1}\neq\frac{2}{-8}$, то $\vec{S}_1$ $\vec{S}_2$, отже, прямі A_1A_2 і A_1A_4 не паралельні.

Необхідною і достатньою умовою перетину двох непаралельних прямих є рівність:

$\begin{vmatrix} x_1-x_2 & y_1-y_2 & z_1-z_2 \\ S_{1x} & S_{1y} & S_{1z} \\ S_{2x} & S_{2y} & S_{2z} \end{vmatrix}=0$, тому $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & -8 \end{vmatrix}=0$, рівність справджується, і отже прямі A_1A_2 і A_1A_4 перетинаються і тому належать одній площині.

ж) Нормальний вектор $\vec{n}$ шуканої площини співпадає з напрямним вектором $\vec{S}$ прямої A_1A_4, тобто $\vec{n}=\vec{S}$=(1;-1;-8). Тому рівняння площини має вигляд: 1(x-2)-1(y+3)-8(z+6)=0, x-2-y-3-8z-48=0, x-y-8z-53=0.

Завдання 2.6. Дано площину: 3x-2y+4z-12=0. Необхідно:

а) побудувати цю площину;

б) знайти відстань від точки M(2;-5;-7) до цієї площини.

Розв'язок:

а) Запишемо дане рівняння у відрізках на осях. Для цього перенесемо у праву частину вільний член і поділимо на нього обидві частини рівняння:

$$\frac{x}{4}+\frac{y}{-6}+\frac{z}{3}=1,$$ звідки a=4; b=-6; c=3.

Знаючи відрізки, які відтинає площина на осях координат, легко побудувати площину (рис.1):

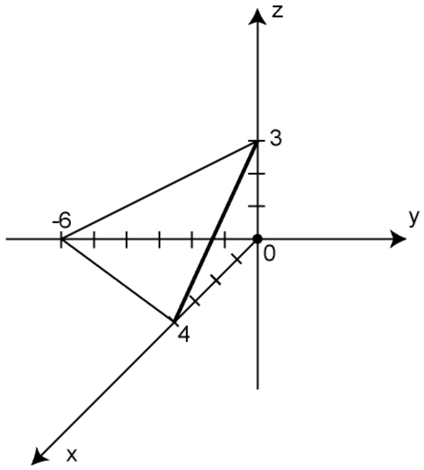

Рис.1

б) відстань від точки M до площини знайдемо за формулою:

$$d=\frac{\left|3\cdot 2+(-2)(-5)+4\cdot(-7)-12\right|}{\sqrt{3^2+(-2)^2+4^2}}=\frac{24}{\sqrt{29}}\approx 4{,}5.$$

Завдання 2.7. У трикутнику, заданому вершинами A(-3; 2); B (-5;-2); C(3;2), знайти:

а) рівняння сторони AB; б) рівняння висоти CH;

в) рівняння медіани AM; г) точку N перетину медіани AM і висоти CH;

д) рівняння прямої, що проходить через вершину C паралельно стороні AB; е) відстань від точки C до прямої AB.

Розв'язок:

а) Рівняння прямої, що проходить через точки A і B:

$$\frac{x-(-3)}{-5-(-3)}=\frac{y-2}{-2-2};\quad \frac{x+3}{-2}=\frac{y-2}{-4};\quad \frac{x+3}{1}=\frac{y-2}{2};$$

$$2x+6=y-2;\quad y=2x+8.$$

б) Кутовий коефіцієнт прямої AB: $k_{AB}=2$.

Оскільки $AB\perp CH$, то $k_{CH}=-\frac{1}{k_{AB}}=-\frac{1}{2}$, тому рівняння висоти CH:

$$y-2=-\frac{1}{2}(x-3);$$

$$2y-4=-x+3; \qquad x+2y-7=0;$$

в) Знаходимо координати т.М – середини відрізка BC:

$x_M=\frac{-5+3}{2}=-1;\ \ y_M=\frac{-2+2}{2}=0,$ тобто M (-1; 0). Тоді рівняння медіани AM:

$\frac{x+3}{-1+3}=\frac{y-2}{0-2}; \quad \frac{x+3}{2}=\frac{y-2}{-2}; \quad -(x+3)=y-2 \quad ; \qquad x+y+1=0;$

г) Для знаходження точки N – перетину медіани AM і висоти CH, утворюємо розв'язуємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} x+y+1=0, \\ x+2y-7=0, \end{cases}; \qquad \begin{cases} y=8, \\ x=-9, \end{cases} \qquad N\ (-9;8)$$

д) Оскільки прямі паралельні, то $k_1=k_2$, тобто k=2, тоді рівняння прямої, що проходить через точку С, паралельно до AB: $y-3=2(x-2); \quad 2x-y-1=0.$

е) Відстань від точки С до прямої AB:

$$d=|CH|=\frac{|2\cdot 3+(-1)\cdot 2+8|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{12}{\sqrt{5}}\approx 5{,}4$$

Завдання 2.8. Медіани BM і CN трикутника ABC мають відповідно рівняння:
$x+y-3=0$ і $2x+3y-1=0,$ а точка A(1;1) – вершина трикутника. Скласти рівняння сторони BC.

Розв'язок:

Розв'язуючи систему рівнянь $\begin{cases} x+y=3, \\ 2x+3y=1, \end{cases}$ знаходимо точку перетину медіан: O (8;-5). З відношення $\frac{AO}{OP}=\frac{2}{1}=\lambda,$ дістанемо координати середини відрізка BC – точки P: $8=\frac{1+2x_p}{1+2}; \quad -5=\frac{1+2y_p}{1+2}; \quad x_p=\frac{23}{2}; \quad y_p=-8.$

Оскільки точки B і C лежать на заданих прямих, то їхні координати задовольняють задані рівняння. Точка P – середина BC, отже маємо

$$\frac{x_B + x_C}{2} = \frac{23}{2}; \qquad \frac{y_B + y_C}{2} = -8;$$

$$x_B + x_C = 23, \qquad x_B + y_B = 3, \qquad ; \qquad \begin{cases} x_C = 11, \\ y_C = -7. \end{cases}$$

$$y_B + y_C = -16, \quad 2x_C + 3y_C = 1,$$

Пряма ВС проходить через точки Р ($\frac{23}{2}$;–8) і С (11;-7), тому дістанемо:

$$\frac{x - \frac{23}{2}}{11 - \frac{23}{2}} = \frac{y+8}{-7+8}; \qquad \frac{2x-23}{22-23} = \frac{y+8}{1},$$

$$2x - 23 = -y - 8,$$

$$2x + y - 15 = 0.$$

Завдання 2.9. Скласти канонічне рівняння:

а) еліпса, велика піввісь якого дорівнює 3, а фокус знаходиться в точці F($\sqrt{5}$;0);

б) гіперболи з уявною піввіссю, що дорівнює 2, і фокусом F(-$\sqrt{13}$;0);

в) параболи, директриса якої x=-3.

Розв'язок:

а) Канонічне рівняння еліпса: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{в^2} = 1,$

за умовою $a = 3$, $с = \sqrt{5}$, отже, $в^2 = a^2 - c^2$, $в^2 = 3 - (\sqrt{5})^2 = 4$.

Тому рівняння еліпса: $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$.

б) Канонічне рівняння гіперболи: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{в^2} = 1$.

За умовою $в = 2$, $c = \sqrt{13}$, отже, $в^2 = c^2 - a^2$, $a^2 = c^2 - в^2 = (\sqrt{13})^2 - 2^2 = 9$.

Тому рівняння гіперболи: $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$.

в) Канонічне рівняння параболи в даному випадку має вигляд: $y^2 = 2px$,

а рівняння її директриси: $x = -\frac{P}{2}$.

Тому $-\frac{P}{2} = -3$, $p = 6$, отже рівняння параболи: $y^2 = 12x$.

Завдання 2.10. Побудувати криву, задану рівнянням в полярній системі координат: $\rho = 2 + \cos^2 \varphi$.

Розв’язок:

Складемо таблицю, в якій наведені значення полярного кута φ і відповідні їм значення полярного радіуса ρ:

φ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
ρ	3	$2\frac{3}{4}$	$2\frac{1}{2}$	$2\frac{1}{4}$	2	$2\frac{1}{4}$	$2\frac{1}{2}$	$2\frac{3}{4}$	3	$2\frac{3}{4}$	$2\frac{1}{2}$	$2\frac{1}{4}$	2	$2\frac{1}{4}$	$2\frac{1}{2}$	$2\frac{3}{4}$	3

В полярній системі координат побудуємо кожну отриману точку, а потім плавно з’єднаємо всі такі точки. Отримаємо криву (рис. 2)

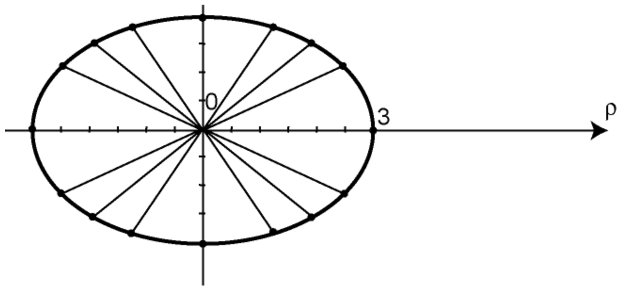

Рис. 2

Завдання 2.11. Побудувати поверхні та визначити їх вид:

$$\text{а) } -\frac{x^2}{6}+4y^2+\frac{1}{2}z^2-2=0; \qquad \text{б) } 3x^2+\frac{y^2}{2}-\frac{z^2}{4}=0.$$

Розв’язок:

Отримали рівняння гіперболоїда (рис. 3), півосі його еліпса $OB=\frac{\sqrt{2}}{2}$; $OC=2$;

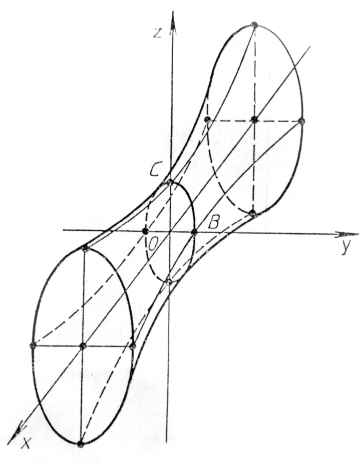

Рис. 3

б) зведемо рівняння до канонічного вигляду: $\frac{x^2}{1}+\frac{y^2}{6}-\frac{z^2}{12}=0.$

Це рівняння конуса другого порядку (рис. 4). Його перерізи площинами $z=\text{const}$ є еліпсами.

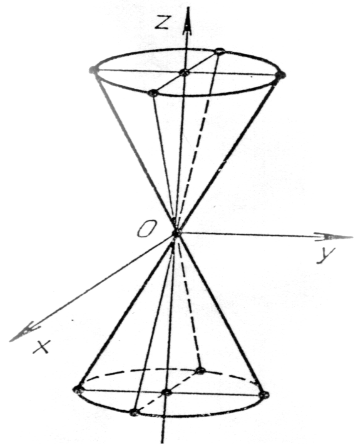

Рис. 4

Завдання 2.12. Побудувати рівняння поверхні, яку отримано при обертанні:

а) параболи $z=-\frac{1}{2}y^2$ навколо осі OZ;

б) еліпса $\frac{y^2}{64}+\frac{z^2}{4}=1$ навколо осі OY.

Розв'язок:

а) за загальним правилом отримання поверхні обертання маємо:

$z=-\frac{1}{2}\left(\pm\sqrt{x^2+y^2}\right)^2$; $z=-\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)$. Це параболоїд обертання (рис. 5).

б) маємо: $\frac{y^2}{64}+\frac{\left(\pm\sqrt{x^2+z^2}\right)^2}{4}=1$; $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{64}+\frac{z^2}{4}=1$. Це еліпсоїд обертання (рис. 6), витягнутий вздовж осі OY: $OA=OC=2$; $OB=8$.

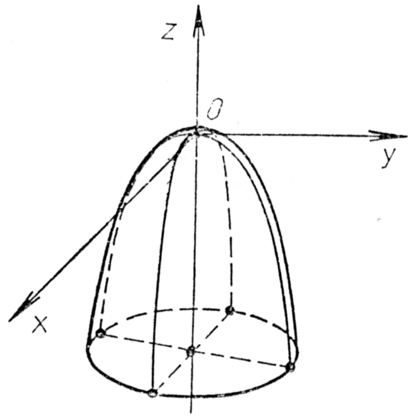

Рис. 5

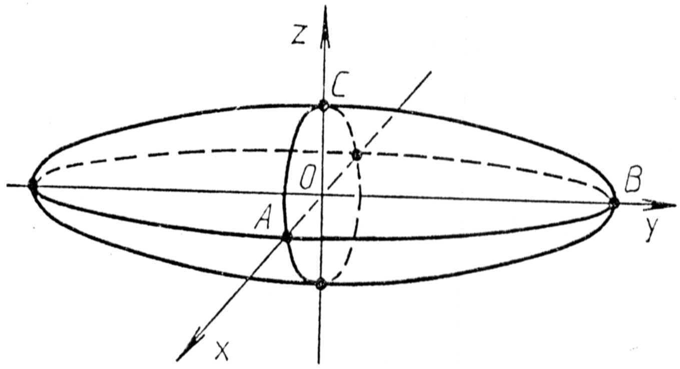

Рис. 6

МОДУЛЬ 2
Розділ 3. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ

Завдання 3.1. Знайти границі функцій, не використовуючи правило Лопіталя:

а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8x^2+1}{x+3}$; е) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+3}{1+5x^2-4x^3}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+3}{3x-1}$; є) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^5-3x+1}{2x^4+3x^2+5}$;

в) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-9}$; ж) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 5x-\cos 3x}{x^2}$; г) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2}{x-2}$; з) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)\operatorname{tg}x$

д) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}$; и) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-1}{2x+3}\right)^{1-5x}$; к) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{1}{\sin^2 3x}}$.

Розв'язок:

а) За теоремами про границі маємо:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8x^2+1}{x+3}=\frac{\lim\limits_{x\to 2}\left(x^3-8x^2+1\right)}{\lim\limits_{x\to 2}(x+3)}=\frac{8-32+1}{2+3}=\frac{-23}{5};$$

б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+3}{3x-1}=\dfrac{1+3}{3-1}=2$;

в) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-9}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x-2)(x-3)}{(x-3)(x+3)}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-2}{x+3}=\dfrac{1}{6}$;

г) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2}{x-2}=\infty$, оскільки $x^2\to 4$ при $x\to 2$ і $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{x-2}=\infty$, як добуток нескінченно великої величини на обмежену величину, яка не є нескінченно малою.

д) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\left(x^2-9\right)\left(\sqrt{x+13}+2\sqrt{x+1}\right)}{(\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1})(\sqrt{x+13}+2\sqrt{x+1})}=$

$=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x-3)(x+3)(\sqrt{x+13}+2\sqrt{x+1})}{-3(x-3)}=-\dfrac{1}{3}\lim\limits_{x\to 3}(x+3)(\sqrt{x+13}+2\sqrt{x+1})=$

$=-\dfrac{1}{3}\cdot 6\cdot 8=-16$;

е) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+3}{1+5x^2-4x^3}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2+\dfrac{3}{x^3}}{\dfrac{1}{x^3}+\dfrac{5}{x}-4}=\dfrac{2}{-4}=-\dfrac{1}{2}$;

є) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^5-3x+1}{2x^4+3x^2+5}=\left[\dfrac{-\infty}{\infty}\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1-\dfrac{3}{x^4}+\dfrac{1}{x^5}}{\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{x^3}+\dfrac{5}{x^5}}=-\infty$;

ж) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos5x-\cos3x}{x^2}=2\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin4x\sin(-x)}{x^2}=2\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin4x}{x}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-\sin x}{x}=2\cdot4\cdot(-1)=-8$;

з) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)\operatorname{tg}x=\left|\begin{matrix}y=x-\dfrac{\pi}{2}\\ x=y+\dfrac{\pi}{2}\end{matrix}\right|=\lim\limits_{y\to0}y\operatorname{tg}\left(y+\dfrac{\pi}{2}\right)=-\lim\limits_{y\to0}y\operatorname{ctg}y=$

$=-\lim\limits_{y\to0}\dfrac{y}{\sin y}\cdot\cos y=-1\cdot1=-1$;

и) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-1}{2x+3}\right)^{1-5x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2x-1}{2x+3}-1\right)^{1-5x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{4}{2x+3}\right)=$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{\dfrac{2x+3}{-4}}\right)^{\frac{2x+3}{-4}\cdot\frac{-4}{2x+3}\cdot\frac{1-5x}{1}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{20x-4}{2x+3}}=e^{10}$;

к) $\lim\limits_{x\to0}(\cos2x)^{\frac{1}{\sin^2 3x}}=\lim\limits_{x\to0}(1+(\cos2x-1))^{\frac{1}{\sin^2 3x}}=$

$\lim\limits_{x\to0}\left(1+\left(-2\sin^2 x\right)\right)^{-\frac{1}{2\sin^2 x}\cdot\frac{-2\sin^2 x}{\sin^2 3x}}=$

$=e^{-2\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin^2 x}{\sin^2 3x}}=e^{-\frac{2}{9}}=\dfrac{1}{\sqrt[9]{e^2}}$.

Завдання 3.2. Знайти похідні від функцій

а) $y=3x^5-\dfrac{2}{x^4}-\dfrac{1}{x^2}+5\sqrt{x^3}$; б) $y=\sqrt[3]{4x^2-3x+1}+\dfrac{2}{(x-5)^4}$;

в) $y=\sin^3\frac{x}{4}\cos 2x^5$;

г) $y=\operatorname{arctg}^2 3x\cdot\ln(x+1)$;

д) $y=\operatorname{tg}^4 5x\cdot\arccos 3x^2$;

е) $y=\sqrt{\sin x}\cdot 5^{\sqrt{\sin x}}$;

є) $y=\dfrac{\sqrt{2x-1}}{e^{\arcsin^2 x}}$;

ж) $y=\dfrac{\log_4(3x+2)}{\operatorname{tg}5x^3}$;

з) $y=\dfrac{x^3\left(x^2+1\right)e^x}{(x-1)\sqrt{3x+5}}$;

и) $y=\left(\operatorname{cth}\sqrt{3x}\right)^{\arcsin x}$;

к) $y=\left(\sqrt[3]{x}\right)^{\sqrt{x}}$;

л) $y=(\lg x)^{4x}$;

м) $xy=\arcsin(x+y)$;

н) $x\ln y=\cos xy^2$;

о) $\begin{cases} x=e^{2t}\sin 3t \\ y=e^{2t}\cos 3t \end{cases}$;

п) $\begin{cases} x=\dfrac{1-\sqrt{t}}{\cos t} \\ y=t\ln t \end{cases}$.

Розв'язок:

а) $y=3x^5-\dfrac{2}{x^4}-\dfrac{1}{x^2}+5\sqrt{x^3}$;

$$y'=15x^4-2(-4)x^{-5}-(-2)x^{-3}+5\cdot\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}=15x^4+\frac{8}{x^5}+\frac{2}{x^3}+\frac{15}{2}\sqrt{x};$$

б) $y=\sqrt[3]{4x^2-3x+1}+\dfrac{2}{(x-5)^4}$;

$$y'=\frac{1}{3}\left(4x^2-3x+1\right)^{-\frac{2}{3}}\cdot(8x-3)+2\cdot(-4)(x-5)^{-5}=$$

$$\frac{8x-3}{3\sqrt[3]{\left(4x^2-3x+1\right)^2}}-\frac{8}{(x-5)^5};$$

в) $y=\sin^3\frac{x}{4}\cos 2x^5$;

$$y'=3\sin^2\frac{x}{4}\cdot\cos\frac{x}{4}\cdot\frac{1}{4}\cos 2x^5+\sin^3\frac{x}{4}\cdot\left(-\sin 2x^5\right)\cdot 10x^4=$$

$$=\frac{3}{4}\sin^2\frac{x}{4}\cos\frac{x}{4}\cos 2x^5-10x^4\sin^3\frac{x}{4}\sin 2x^5;$$

г) $y=\operatorname{arctg}^2 3x\cdot\ln(x+1)$;

$$y'=2\operatorname{arctg}3x\cdot\frac{1}{1+9x^2}\cdot 3\ln(x+1)+\operatorname{arctg}^2 3x\cdot\frac{1}{x+1}=$$

$$=\frac{6\ln(x+1)\operatorname{arctg}3x}{1+9x^2}+\frac{\operatorname{arctg}^2 3x}{x+1};$$

д) $y=\operatorname{tg}^4 5x\cdot\arccos 3x^2$;

$$y'=4\operatorname{tg}^3 5x\cdot\frac{1}{\cos^2 5x}\cdot 5\arccos 3x^2+tg^4 5x\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{1-9x^4}}\right)\cdot 6x =$$

$$=\frac{20\operatorname{tg}^3 5x\arccos 3x^2}{\cos^2 5x}-\frac{6x\operatorname{tg}^4 5x}{\sqrt{1-9x^4}};$$

е) $y=\sqrt{\sin x}\cdot 5^{\sqrt{\sin x}}$;

$$y'=\frac{1}{2\sqrt{\sin x}}\cdot\cos x\cdot 5^{\sqrt{\sin x}}+\sqrt{\sin x}\cdot 5^{\sqrt{\sin x}}\ln 5\cdot\frac{1}{2\sqrt{\sin x}}\cos x =$$

$$=\frac{5^{\sqrt{\sin x}}\cos x}{2\sqrt{\sin x}}\left(1+\ln 5\sqrt{\sin x}\right);$$

є) $y=\dfrac{\sqrt{2x-1}}{e^{\arcsin^2 x}}$;

$$y'=\frac{\dfrac{1}{2\sqrt{2x-1}}\cdot 2e^{\arcsin^2 x}-\sqrt{2x-1}\cdot e^{\arcsin^2 x}\cdot 2\arcsin x\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{e^{2\arcsin^2 x}} =$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2x-1}\,e^{\arcsin^2 x}}-\frac{2\sqrt{2x-1}\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}\,e^{\arcsin^2 x}}=\frac{\sqrt{1-x^2}-2(2x-1)\arcsin x}{\sqrt{(2x-1)\left(1-x^2\right)}\,e^{\arcsin^2 x}};$$

ж) $y=\dfrac{\log_4(3x+2)}{\operatorname{tg} 5x^3}$;

$$y'=\frac{\dfrac{3}{(3x+2)\ln 4}\operatorname{tg} 5x^3-\log_4(3x+2)\cdot\dfrac{1}{\cos^2 5x^3}\cdot 15x^2}{\operatorname{tg}^2 5x^3} =$$

$$=\frac{3}{(3x+2)\ln 4\operatorname{tg} 5x^3}-\frac{15x^2\log_4(3x+2)}{\sin^2 5x^3};$$

з) $y=\dfrac{x^3(x^2+1)e^x}{(x-1)\sqrt{3x+5}}$; застосуємо логарифмічне диференціювання, маємо

$$\ln y = 3\ln x+\ln(x^2+1)+x-\ln(x-1)-\frac{1}{2}\ln|3x+5|;$$

$$\frac{y'}{y}=\frac{3}{x}+\frac{2x}{x^2+1}+1-\frac{1}{x-1}-\frac{3}{2(3x+5)};$$

$$y'=\frac{x^3(x^2+1)e^x}{(x-1)\sqrt{3x+5}}\cdot\left(\frac{3}{x}+\frac{2x}{x^2+1}+1-\frac{1}{x-1}-\frac{3}{2(3x+5)}\right);$$

и) $y=(\operatorname{ctg}\sqrt{3x})^{\arcsin x}$; прологарифмуємо дану функцію:

$\ln y=\arcsin\cdot\ln(\operatorname{cth}\sqrt{3x})$, тоді

$$\frac{1}{y}y'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ln(\operatorname{cth}\sqrt{3x})+\arcsin\cdot\frac{1}{\operatorname{cth}\sqrt{3x}}\cdot\left(-\frac{1}{\operatorname{sh}^2\sqrt{3x}}\right)\cdot\frac{1}{2\sqrt{3x}}\cdot 3\ ;$$

$$y'=(\operatorname{cth}\sqrt{3x})^{\arcsin x}\cdot\left(\frac{\ln(\operatorname{cth}\sqrt{3x})}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{3\arcsin x}{2\sqrt{3x}\cdot\operatorname{cth}\sqrt{3x}\cdot\operatorname{sh}^2\sqrt{3x}}\right);$$

к) $y=(\sqrt[3]{x})^{\sqrt{x}}$; маємо : $\ln y=\sqrt{x}\cdot\ln\sqrt[3]{x}$, тоді

$$\frac{1}{y}y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot\ln\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\cdot\frac{1}{3}\cdot x^{-\frac{2}{3}}\ ;$$

$$y'=(\sqrt[3]{x})^{\sqrt{x}}\cdot\left(\frac{\ln\sqrt[3]{x}}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{3\sqrt{x}}\right)=\frac{(\sqrt[3]{x})^{\sqrt{x}}(\ln x+2)}{6\sqrt{x}}\ ;$$

л) $y=(\lg x)^{4x}$; маємо $\ln y=4x\cdot\ln(\lg x)$,тоді

$$\frac{1}{y}y'=4\ln\cdot(\lg x)+4x\cdot\frac{1}{\lg x}\cdot\frac{1}{x\ln 10},$$

$$y'=(\lg x)^{4x}\cdot\left(\ln\cdot(\lg^4 x)+\frac{4}{\lg x\ln 10}\right);$$

м) $xy = \arcsin(x+y)$, маємо рівність $y+xy'=\frac{1}{\sqrt{1-(x+y)^2}}\cdot(1+y')$; тоді

$$xy'-\frac{y'}{\sqrt{1-(x+y)^2}}=\frac{1}{\sqrt{1-(x+y)^2}}-y\ ;$$

$$y'\cdot\left(x-\frac{1}{\sqrt{1-(x+y)^2}}\right)=\frac{1}{\sqrt{1-(x+y)^2}}-y$$

$$y'=\frac{1-y\sqrt{1-(x+y)^2}}{x\sqrt{1-(x+y)^2}-1}$$

н) $x\ln y = \cos(xy^2)$; маємо рівність $\ln y+\dfrac{x}{y}\ y'=-\sin(xy^2)\,(y^2+2xyy')$;

$$\frac{x}{y}y' + 2xyy' \sin(xy^2) = -(\ln y + y^2 \sin(xy^2));$$

$$y'\left(\frac{x}{y} + 2xy \sin(xy^2)\right) = -(\ln y + y^2 \sin(xy^2));$$

$$y' = -y\frac{\ln y + y^2 \sin(xy^2)}{x + 2xy^2 \sin(xy^2)} \ ;$$

о) $\begin{cases} x = e^{2t} \sin 3t; \\ y = e^{2t} \cos 3t; \end{cases}$

Оскільки $x'_t = 2e^{2t} \sin 3t + e^{2t} \cos 3t \ 3 = e^{2t}(2\sin 3t + 3\cos 3t)$,

$$y'_t = 2e^{2t} \cos 3t - 3e^{2t} \sin 3t = e^{2t}(2\cos 3t - 3\sin 3t) \ ,$$

$$\text{то } y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{e^{2t}(2\cos 3t - 3\sin 3t)}{e^{2t}(2\sin 3t + 3\cos 3t)} = \frac{2\cos 3t - 3\sin 3t}{2\sin 3t + 3\cos 3t};$$

п) $\begin{cases} x = \dfrac{1-\sqrt{t}}{\cos t}; \\ y = t \ln t; \end{cases}$

Маємо: $x_t' = \dfrac{-\dfrac{1}{2\sqrt{t}}\cos t + (1-\sqrt{t})\sin t}{\cos^2 t} = \dfrac{(2\sqrt{t} - 2t)\cdot \sin t - \cos t}{2\sqrt{t}\cos^2 t};$

$$y_t' = \ln t + t\,\frac{1}{t} = \ln t + 1;$$

$$y_x' = \frac{2(\ln t + 1)\sqrt{t}\cos^2 t}{(2\sqrt{2-2t})\sin t - \cos t}$$

Завдання 3.3. Дослідити функцію за допомогою диференціального числення та побудувати її графік:

$$\text{а) } y = \frac{x^3}{1-x^2}\ ; \qquad \text{б) } y = x + \ln(x^2 - 1).$$

Розв'язок:

а) $y = \dfrac{x^3}{1-x^2}$

1) Область визначення : $x \neq \pm 1$, D : $(-\infty;-1)\cup(-1;1)\cup(1;\infty)$;

2) Функція не періодична. Оскільки $f(-x) = \dfrac{(-x)^3}{1-(-x)^2} = -\dfrac{x^3}{1-x^2} = -f(x)$,

то функція не парна, тому досліджуватимемо її лише для $x \geq 0$;

3) Якщо $x = 0$, то $y = 0$, тому графік перетинає осі координат в точці (0;0); знакосталість функції :

$y > 0$ при $x \in (-\infty;-1) \cup (0;1)$;

$y < 0$ при $x \in (-1;0) \cup (1;\infty)$.

4) Функція в точці $x = 1$ має розрив 2–го роду і

$\lim\limits_{x \to 1 \pm 0} f(x) = \mp\infty$, отже $x = 1-$ вертикальна асимптота графіка. Оскільки

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{x^3}{(1-x^2)x} = -1$, $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \left(\dfrac{x^3}{1-x^2} - (-1)x \right) = 0$, то у = –$x$ − похила асимптота графіка.

5) Похідна $y' = \dfrac{x^2(3-x^2)}{(1-x^2)^2}$ дорівнює 0 при $x = 0, x = \pm\sqrt{3}$ і не існує в точках $x = \pm 1$. Отже, критичні точки функції : $\left[\begin{array}{l} x = -\sqrt{3} \\ x = 0 \\ x = \sqrt{3} \end{array} \right.$.

На інтервалі (0;∞) маємо:

$f(x) \uparrow$ при $x \in (0;1)$ і $(1;\sqrt{3})$,так як $f'(x) > 0$;

$f(x) \downarrow$ при $x \in (\sqrt{3}; +\infty)$, так як $f'(x) < 0$;

в точці $x = \sqrt{3}$ − функція має локальний максимум: $y_{\max} = f(\sqrt{3}) \approx -2{,}6$.

6) Знаходимо другу похідну:

$y'' = \dfrac{2x\left(x^2+3\right)}{\left(1-x\right)^3}$, $\qquad f''(x) = 0$ при $x = 0$ і не існує при $x = \pm 1$,

отже, єдина критична точка x=0; маємо:

при $x \in (-1;0)$ $f''(x) < 0$ – крива опукла,

при $x \in (0;1)$ $f''(x) > 0$ – крива вогнута,

при $x \in (1;\infty)$ $f''(x) < 0$ – крива опукла;

точка $(0;0)$ – точка перегину;

7) Враховуючи проведене дослідження і непарність функції, будуємо графік (рис. 7):

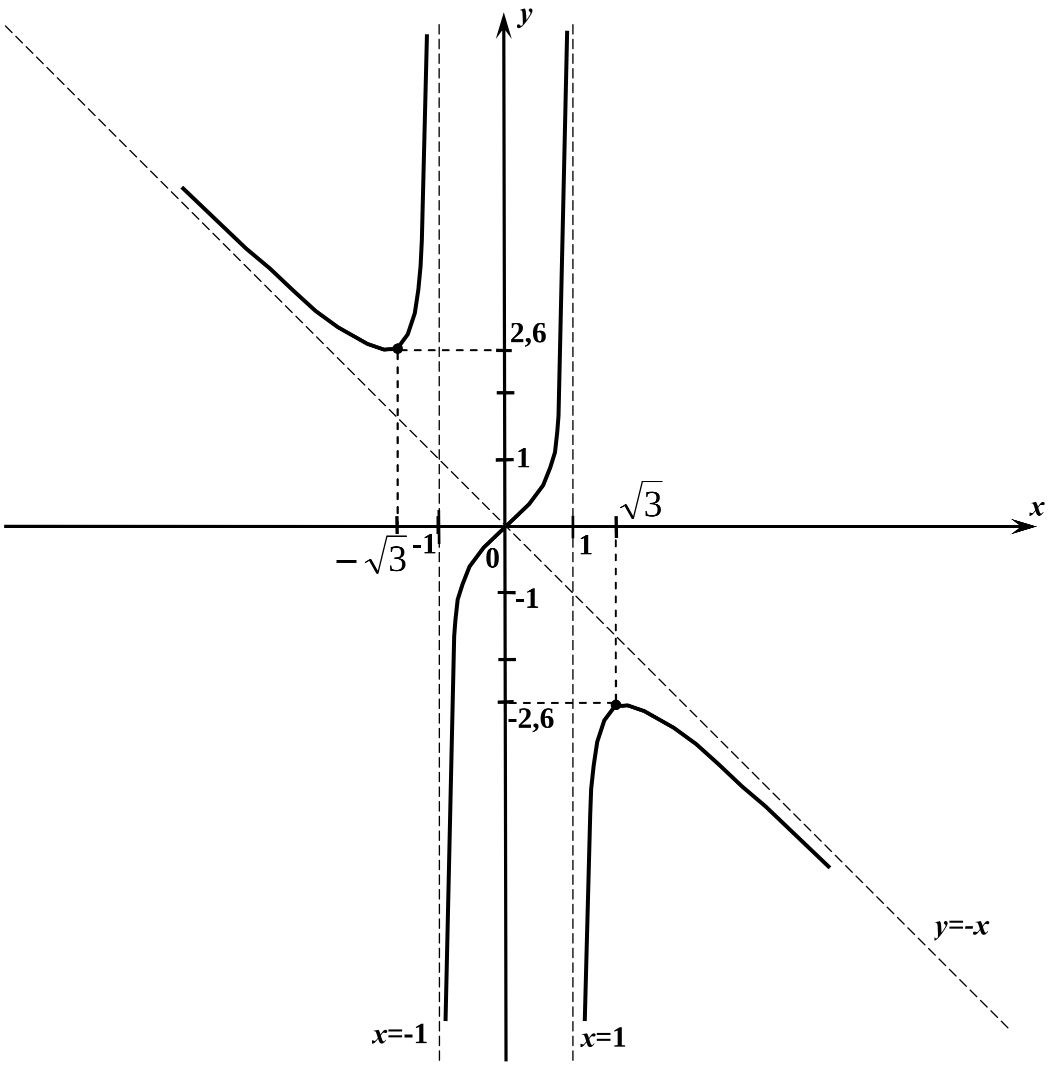

Рис. 7

б) $y = x + \ln(x^2 - 1)$

1) Область визначення функції: $x^2 - 1 > 0$, $|x| > 1$, отже, $D: (-\infty;-1) \cup (1;+\infty)$;

2) Функція неперіодична. Оскільки $f(-x) = -x + \ln(x^2 - 1)$, то функція загального вигляду.

3) Оскільки $x \neq 0$, то перетину з *OY* немає; при *y*=0 маємо:

$$x + \ln\left(x^2 - 1\right) = 0, \quad \ln\left(x^2 - 1\right) = -x, \quad x^2 - 1 = \frac{1}{e^x}, \quad x \approx 1{,}2,$$

отже, графік перетинає *OX* в точці (1,2; 0); проміжки знакосталості функції: при $x \in (-\infty; -1)$ $y < 0$; при $x \in (1; 1{,}2)$ $y < 0$; при $x \in (1{,}2; +\infty)$ $y > 0$.

4) Знайдемо асимптоти графіка:

$\lim\limits_{x \to -1-0} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to 1+0} f(x) = -\infty$, отже, $x = -1$ *і* $x = 1-$ вертикальні асимптоти;

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\left(x + \ln\left(x^2 - 1\right)\right)}{x} = \lim_{x\to\infty}\left(1 + \frac{\ln\left(x^2-1\right)}{x}\right) = 1 + \lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(x^2-1\right)}{x} = 1 + \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x}{x^2-1}}{1} =$$

$$= 1 + \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x^2}} = 1 + 0 = 1; \quad \text{аналогічно,} \quad \lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = 1,$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(f(x) - 1\cdot x\right) = \lim_{x\to\pm\infty}\ln\left(x^2 - 4\right) = +\infty,$$

отже, похилих і горизонтальних асимптот немає.

5) Знайдемо похідну: $f'(x) = 1 + \dfrac{2x}{x^2-1} = \dfrac{x^2 + 2x - 1}{x^2 - 1}$, похідна дорівнює нулю при $x = -1 + \sqrt{2}$ і при $x = -1 - \sqrt{2}$, похідна існує при $x = \pm 1$, отже, єдина критична точка $x = -1 - \sqrt{2}$,

$f(x)\uparrow$ при $x \in \left(-\infty; -1-\sqrt{2}\right) i \left(1; +\infty\right)$, так як $f'(x) > 0$,

$f(x)\downarrow$ при $x \in \left(-1-\sqrt{2}; -1\right)$, так як $f'(x) < 0$,

в точці $x = -1-\sqrt{2}$ функція має локальний максимум; $y_{\max} \approx -0{,}9$

6) Знайдемо другу похідну: $f''(x) = -\dfrac{2\left(x^2+1\right)}{\left(x^2-1\right)^2}$, при $x \in D(x)$ $f''(x) < 0$, отже, графік функції опуклий на всій області визначення;

7) Враховуючи проведене дослідження, будуємо графік функції (рис. 8):

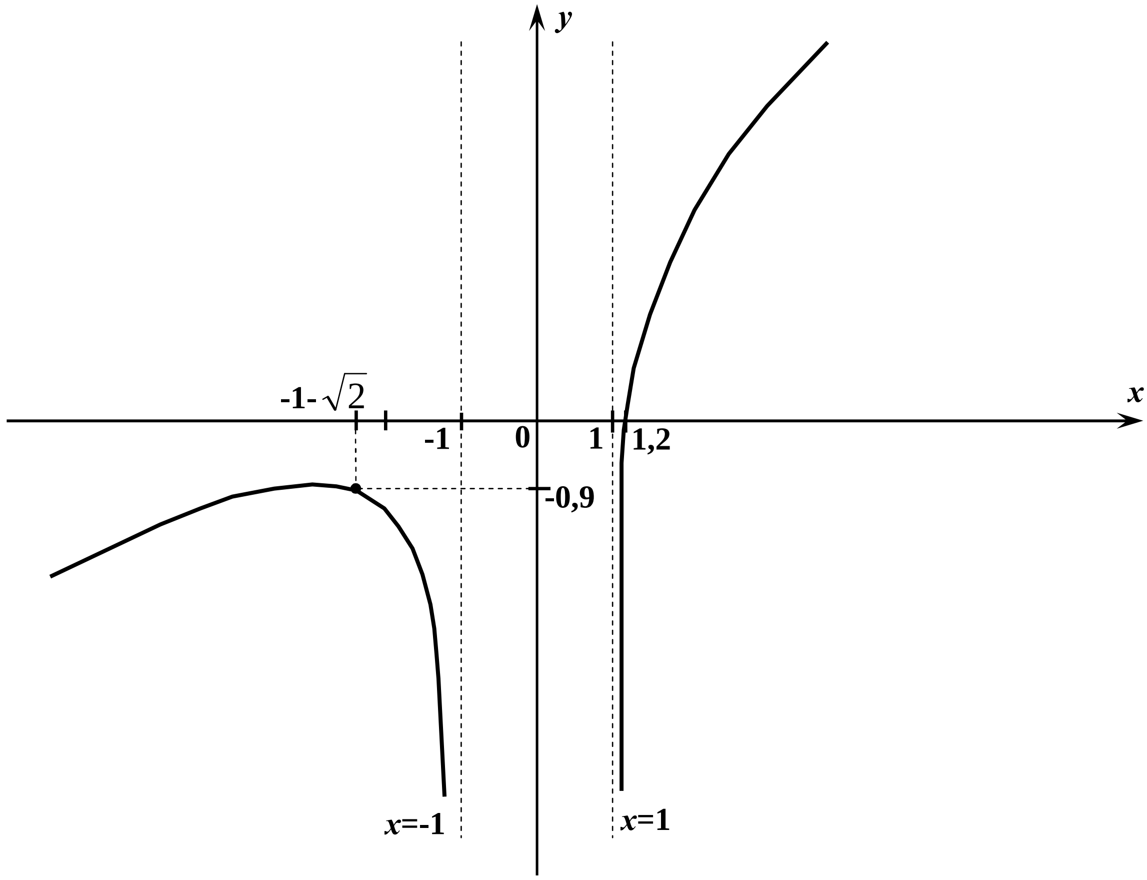

Рис. 8

Завдання 3.4. Знайти частинний і повний диференціали першого порядку функції $z = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 5y^2$ в точці N (1; 5) при заданому Δx = 0,01 і Δy =0,001.

Розв'язок:

Дана функція z є функцією двох змінних x і y. Її частинні похідні:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = x^2 - 4x; \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = 10y.$$

Тоді частинний і повний диференціали цієї функції:

$$d_x z = \frac{\partial z}{\partial x} dx; \quad d_y z = \frac{\partial z}{\partial y} dy; \quad dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy.$$

Отже, маємо $d_x z = (x^2 - 4x)dx;\ d_y z = 10ydy;\ dz = (x^2 - 4x)dx + 10ydy.$

Підставивши x = 1, y = 5, $dx = \Delta x$ = 0,01 і $dy = \Delta y$ =0,001, маємо

$d_x z$ = –3·0,01 = -0,03; $d_y z$ = 50·0,001 = 0,05; dz = –0,03 + 0,05 = 0,02.

Завдання 3.5. Знайти частинні похідні другого порядку функції $z = f(x, y)$.

а) $z = x^3 - x^2 y + y^2$; б) $z = e^{x^2 y^2}$.

Розв'язок:

а) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=3x^2-2xy;\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=6x-2y;\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=-x^2+2y;\quad \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2;\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=-2x.$

б) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=e^{x^2y^2}\cdot 2xy^2;\quad \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=e^{x^2y^2}\cdot 4x^2y^4+e^{x^2y^2}\cdot 2y^2=2y^2e^{x^2y^2}(2x^2y^2+1);$

$\dfrac{\partial z}{\partial y}=e^{x^2y^2}\cdot 2x^2y;\quad \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=e^{x^2y^2}\cdot 4x^4y^2+e^{x^2y^2}\cdot 2x^2=2x^2e^{x^2y^2}(2x^2y^2+1);$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=e^{x^2y^2}\cdot 4x^3y^3+e^{x^2y^2}\cdot 4xy=4xye^{x^2y^2}(x^2y^2+1).$$

Завдання 3.6. Знайти градієнт функції $z = f(x, y)$ в точці M та похідну за напрямком вектора $\vec{S}$ в цій точці, якщо $z= x^2 -xy + 2y^2$, M(–1; 2), $\vec{S}=\{3;4\}$.

Розв'язок:

Знайдемо частинні похідні в точці M:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2x-y;\quad \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_M=2\cdot(-1)-2=-4;\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-x+4y;\quad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_M=-(-1)+4\cdot 2=9.$$

Тоді $grad\ z(M)=-4\vec{i}+9\vec{j}=\{-4;9\}$. Відомо, що $\dfrac{\partial z}{\partial \vec{s}}=\dfrac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha+\dfrac{\partial z}{\partial y}\cos\beta$,

Де cos α і cos β – напрямні косинуси вектора $\vec{S}$. Маємо

$$\cos\alpha=\frac{3}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{3}{5};\quad \cos\beta=\frac{4}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{4}{5}.$$

Отже, $\left.\dfrac{\partial z}{\partial \vec{s}}\right|_M=\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_M\cos\alpha+\left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_M\cos\beta=-4\cdot\dfrac{3}{5}+9\cdot\dfrac{4}{5}=\dfrac{24}{5}.$

Завдання 3.7. Дослідити на екстремум функцію: $z = x^4 + y^4 -2x^2 + 4xy - 2y^2$.

Розв'язок:

Знайдемо частинні похідні: $\dfrac{\partial z}{\partial x}=4(x^3-x+y);\quad \dfrac{\partial z}{\partial y}=4(y^3+x-y).$

Критичні точки функції визначимо із системи: $\begin{cases} x^3-x+y=0, \\ y^3+x-y=0 \end{cases}.$

Отже, $x^3 + y^3 = 0$, звідки $y = -x$.

Маємо $x_1 = 0$, $x_2=\sqrt{2}$, $x_3=-\sqrt{2}$, тоді $y_1 = 0$, $y_2=-\sqrt{2}$, $y_3=\sqrt{2}$.

Отже функція має три критичні точки : $M_1(0; 0)$, $M_2(\sqrt{2};-\sqrt{2})$, $M_3(-\sqrt{2};\sqrt{2})$.

Оскільки $A=\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=12x^2-4;\quad C=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=12y^2-4;\quad B=\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=4$, маємо

$\Delta=AC-B^2$,

$\Delta = 16(9x^2 y^2 - 3x^2 - 3y^2)$, за достатньою умовою екстремуму функції маємо: $\Delta(M_1) = 0$, $\Delta(M_2) = \Delta(M_3) = 384 > 0$, $\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{M_2} = \left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{M_3} = 20 > 0$, отже точки M_2 і M_3 – точки мінімуму. В цих точках $z_{\min} = -8$.

Переконаємося, що в точці $M_1(0;\ 0)$ екстремум відсутній. Дійсно, якщо $y = 0$, то $z = x^4 - 2x^2 = x^2(x^2 - 2) < 0$, в околі точки M_1. Якщо $y = x$, то $z = 2x^4 > 0$. Отже, в околі точки M_1 значення z можуть бути як додатні, так і від'ємні, а це значить, що точка M_1 не є екстремальною.

Інших екстремумів функція не має, оскільки точки, в яких похідні $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ *і* $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ не існують, відсутні.

Завдання 3.8. Знайти найменше і найбільше значення функції $z = x^2 + y^2$ в замкненому контурі *D:* $\left(x - \sqrt{2}\right)^2 + \left(y - \sqrt{2}\right)^2 \le 9$.

Розв'язок:

Потрібно розглянути область D, обмежену колом $\left(x - \sqrt{2}\right)^2 + \left(y - \sqrt{2}\right)^2 \le 9$, включаючи й самі точки кола.

Знайдемо: $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 2x$; $\dfrac{\partial z}{\partial y} = 2y$. За необхідною умовою екстремуму:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \quad \Rightarrow x = 0; \quad y = 0.$$

Неважко помітити, що в точці (0; 0) функція $z = x^2 + y^2$ має найменше значення $z_{\min} = 0$, причому ця точка є внутрішньою точкою області D.

Дослідимо на умовний екстремум функцію $z = x^2 + y^2$, якщо x і y пов'язані співвідношенням $\left(x - \sqrt{2}\right)^2 + \left(y - \sqrt{2}\right)^2 = 9$. Розглянемо функцію $u = x^2 + y^2 + \lambda\left[\left(x - \sqrt{2}\right)^2 + \left(y - \sqrt{2}\right)^2 - 9\right]$.

Знайдемо частинні похідні: $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 2x + 2\lambda(x - \sqrt{2})$; $\dfrac{\partial u}{\partial y} = 2y + 2\lambda(y - \sqrt{2})$.

Маємо систему рівнянь: $\begin{cases} x + \lambda(x - \sqrt{2}) = 0, \\ y + \lambda(y - \sqrt{2}) = 0, \\ \left(x - \sqrt{2}\right)^2 + \left(y - \sqrt{2}\right)^2 = 9. \end{cases}$

Система має два розв'язки:

$$x = y = \frac{5}{2}\sqrt{2},\ \lambda = -\frac{5}{3},\ z = 25; \quad x = y = -\frac{\sqrt{2}}{2},\ \lambda = -\frac{1}{3},\ z = 1.$$

Таким чином, найбільше значення функція приймає в точці кола $(\frac{5}{2}\sqrt{2}; \frac{5}{2}\sqrt{2})$. Отже, $z_{\min} = 0$, $z_{\max} = 25$.

ВАРІАНТИ ЗАВДАНЬ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Варіант № 1

МОДУЛЬ 1

Розділ 1. ЛІНІЙНА АЛГЕБРА

Завдання 1.1. $A=\begin{pmatrix}1 & \lambda & 2\\ 2 & 3 & 4\\ 1 & -6 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & -2 & \mu\\ 0 & 1 & 7\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1\\ 4\\ -3\end{pmatrix}$.

Завдання 1.2. $\begin{vmatrix}1 & -4 & 6 & 8\\ 2 & 5 & 3 & -9\\ -1 & 0 & 5 & 1\\ -3 & -6 & 4 & 2\end{vmatrix}$.

Завдання 1.3. а) $\begin{cases}-2x_1-x_2+x_3=-7\\ x_1-x_2+x_3=8\\ 4x_1-5x_2-3x_3=19\end{cases}$; б) $\begin{cases}2x_1+x_2+3x_3=7\\ 2x_1+3x_2+x_3=1\\ 3x_1+2x_2+x_3=6\end{cases}$.

Завдання 1.4. а) $\begin{cases}x_1+x_2+x_3=0\\ 2x_1-3x_2+4x_3=0\\ 4x_1-11x_2+10x_3=0\end{cases}$; б) $\begin{cases}5x_1-3x_2+4x_3=0\\ 3x_1+2x_2-x_3=0\\ 8x_1-x_2+3x_3=0\end{cases}$.

Розділ 2. ВЕКТОРНА АЛГЕБРА ТА АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ

Завдання 2.1. $a = 2i - 3j+k$, $b = j + 4k$, $c = 5i + 2j - 3k$.
а) a, $3b$, c; б) $3a$, $2c$; в) b, $-4c$; г) a, c; д) a, $2b$, $3c$.

Завдання 2.2. $a = (5, 4, 1)$, $b = (-3, 5, 2)$, $c = (2, -1, 3)$, $d = (7, 23, 4)$.

Завдання 2.3. $A_1(2;5;-3)$, $A_2(-7;8;0)$, $A_3(4;-2;5)$, $A_4(6;3;-1)$.

Завдання 2.4. $a = 7$, $в = -3$, $c = -4$, $d = 9$, $r = 4$, $l = 2$.

Завдання 2.5. Координати вершин піраміди $A_1A_2A_3A_4$ див. завд. 2.3.

Завдання 2.6. A(–2, 4), B(3, 1), C(10, 7).

Завдання 2.7. Знайти рівняння прямої, що проходить через точку перетину прямих $3x - 2y - 7 = 0$ і $x + 3y - 6 = 0$ і, що відсікає на осі абсцис відрізок, рівний 3.

Завдання 2.8. Скласти рівняння площини, що проходить через точки M(2; 3; –5) та K(–1; 1; –6) паралельно вектору $a = (4; 4; 3)$.

Завдання 2.9. а) $b = 15$, F(–10,0); б) $a = 13$, $\varepsilon = 14/13$; в) D: $x = -4$.

Завдання 2.10. $\rho = 2\sin 4\varphi$.

Завдання 2.11. *а)* $4x^2-y^2-16z^2+16=0$; *б)* $x^2+4z=0$

Завдання 2.12. *а)* $y^2=2z$, *Oz;* *б)* $9y^2+4z^2=36$; *Oy*.

МОДУЛЬ 2
Розділ 3. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ

Завдання 3.1.

а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-12x+20}$; б) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{2x^2+11x+15}{3x^2+5x-12}$; в) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{3x^3-5x^2+2}{2x^3+5x^2-x}$;

г) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{x^5-2x+4}{2x^4+3x^2+1}$; д) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{2x^2+3x-5}{7x^3-2x^2+1}$; е) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+x-12}{\sqrt{x-2}-\sqrt{4-x}}$;

ж) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x+4}{x+8}\right)^{-3x}$; з) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{2x+3}{5x+7}\right)^{x+1}$; и) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 8x}{3x^2}$.

Завдання 3.2.

$y=2x^5-\dfrac{4}{x^3}+\dfrac{1}{x}+3\sqrt{x}$	$y=\sqrt[3]{3x^4+2x-5}+\dfrac{4}{(x-2)^5}$	$y=\sin^3 2x\cdot\cos 8x^5$
$y=\operatorname{arcctg}^2 5x\cdot\ln(x-4)$	$y=\operatorname{tg}^4 3x\cdot\arcsin 2x^3$	$y=\dfrac{\log_5(3x-7)}{\operatorname{ctg} 7x^3}$
$y=\dfrac{e^{\arccos^3 x}}{\sqrt{x+5}}$	$y=(x-3)^4\arccos 5x^3$	$y=\dfrac{\operatorname{arcctg}^4 5x}{\operatorname{sh}\sqrt{x}}$
$y=\dfrac{9\operatorname{arctg}(x+7)}{(x-1)^2}$	$y=\sqrt{\dfrac{2x+1}{2x-1}}\log_2(x-3x^2)$	$y=e^{-x}\cdot\sin 3x$
$y=(\arccos(x+2))^{\operatorname{tg}3x}$	$y=\dfrac{\sqrt{x+7}(x-3)^4}{(x+2)^5}$	$y=(\operatorname{cth}3x)^{\arcsin x}$
$y=\operatorname{tg}x-\dfrac{1}{3}\operatorname{ctg}^7 3x$	$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$	$\begin{cases} x=\sin^3 2t \\ y=t^2\cdot\ln^2 t\end{cases}$

Завдання 3.3. а) $y=\left(\dfrac{x-1}{x}\right)^2$; б) $y=xe^{-x^2}$.

Завдання 3.4. $z = x^2 + xy^2 - 17$, N(1; 1), $\Delta x = -0{,}03$, $\Delta y = 0{,}02$.

Завдання 3.5. а) $Z=\ln\operatorname{tg}^3\left(\dfrac{x}{3}-\dfrac{y}{6}\right)$; б) $Z=\dfrac{x}{y}$.

Завдання 3.6. $z = x^2 + 2xy + y^2$, M(1; 2), $\vec{s}\{3;4\}$.

Завдання 3.7. $z = x^2 + y^2 + xy - 2x - y$.

Завдання 3.8. $z = 4x^2 + (y+1)^2$, (D): $x-y\geq 0$, $x+y\leq 0$, $y\geq -2$.

Варіант № 2

МОДУЛЬ 1

Розділ 1. ЛІНІЙНА АЛГЕБРА

Завдання 1.1. $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & -3 \\ -7 & -4 & \lambda \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 7 & -8 \\ 3 & -9 & \mu \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}.$

Завдання 1.2. $\begin{vmatrix} 5 & -8 & 3 & -1 \\ 7 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & -9 & 6 & -5 \\ 4 & 3 & 1 & -2 \end{vmatrix}.$

Завдання 1.3. а) $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = -9 \\ x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 3 \\ -3x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -2 \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = -4 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -3 \end{cases}.$

Завдання 1.4. а) $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases};$ б) $\begin{cases} 5x_1 - 6x_2 + 4x_3 = 0 \\ 3x_1 - 3x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}.$

Розділ 2. ВЕКТОРНА АЛГЕБРА ТА АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ

Завдання 2.1. $a = 3i + 4j + k$, $b = i – 2j + 7k$, $c = 3i – 6j + 21k$.
а) $5a$, $2b$, c; б) $4b$, $2c$; в) a, c; г) b, c; д) $2a$, $–3b$, c.

Завдання 2.2. $a = (2, –1, 4)$, $b = (– 3, 0, –2)$, $c = (4, 5, –3)$, $d = (0, 11, –14)$.

Завдання 2.3. $A_1(1;–5;4)$, $A_2(–3;6;–1)$, $A_3(3;–2;3)$, $A_4(0;9;–11)$.

Завдання 2.4. $a = 1$, $в = –2$, $c = 1$, $d = 8$, $r = 3$, $l = –3$.

Завдання 2.5. Координати вершин піраміди $A_1A_2A_3A_4$ див. завд. 2.3.

Завдання 2.6. $A(–3, –2)$, $B(14, 4)$, $C(6, 8)$.

Завдання 2.7. Знайти проекцію точки $A(– 8, 12)$ на пряму, що проходить через точки $B(2, –3)$ і $C(– 5, 1)$.

Завдання 2.8. Знайти величини відрізків, що відсікаються на осях координат площиною, яка проходить через точку $M (2, –3, 3)$ паралельно площині $3x + y – 3z = 0$.

Завдання 2.9. а) $b = 2$, $F(4\sqrt{2}, 0)$; б) $a = 7$, $\varepsilon = \sqrt{85}/7$; в) D: $x = 5$.

Завдання 2.10. $\rho = 2(1 – \sin 2\varphi)$.

Завдання 2.11. *а)* $3x^2+y^2+9z^2–9=0$; *б)* $x^2+2x^2–2z=0$

Завдання 2.12. *а)* $4x^2–3y^2=12$, Ox; *б)* $x=1$, $y=2$, Oz.

МОДУЛЬ 2
Розділ 3. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ

Завдання 3.1

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3-x^2+2x}{x^2+x}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2+5x-10}{x^3-1}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3+7x}{2x^3-4x^2+5}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4+2x-5}{2x^2+x+7}$; д) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x^2-7x+2}{x^4+2x-4}$; е) $\lim\limits_{x\to-4}\dfrac{\sqrt{x+12}-\sqrt{4-x}}{x^2+2x-8}$;

ж) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^{2x-3}$; з) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+1}{x-1}\right)^{x}$; и) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x-\sin x}{5x}$.

Завдання 3.2

$y=\dfrac{3}{x}+\sqrt[5]{x^2}-4x^3+\dfrac{2}{x^4}$	$y=\sqrt[3]{(x-3)^4}-\dfrac{3}{2x^3-3x+1}$	$y=\operatorname{tg}^4 x\cdot\arcsin 4x^5$
$y=\operatorname{arctg}^3 2x\cdot\ln(x+5)$	$y=(x-2)^4\arcsin 5x^4$	$y=\dfrac{(x-4)^2}{e^{\operatorname{arcctg} x}}$
$y=(3x-4)^3\arccos 3x^{2.}$	$y=\dfrac{\ln(5x-3)}{4tg3x^4}$	$y=\dfrac{\operatorname{arctg}^3 2x}{\operatorname{ch}(1/x)}$
$y=\dfrac{8\operatorname{arctg}(2x+3)}{(x+1)^3}$	$y=\sqrt[3]{\dfrac{2x-5}{2x+3}}\lg(4x+7)$	$y=(\cos(x+2))^{\ln x}$
$y=(\arcsin 2x)^{\operatorname{ctg}(x+1)}$	$y=\dfrac{(x-3)^5(x+2)^3}{\sqrt{(x-1)^3}}$	$y=e^{\operatorname{ctg} 3x}$
$y=\dfrac{1}{\ln x^2}$	$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$	$\begin{cases} x=3t^5+\cos t \\ y=\operatorname{tg} 2t\cdot\sqrt{1-t} \end{cases}$

Завдання 3.3 а) $y=\dfrac{4x}{4+x^2}$; б) $y=\ln\dfrac{x}{x-1}$.

Завдання 3.4. $z = x^2 + xy - y^2 - 9$, N(1; 2), $\Delta x = 0{,}02$, $\Delta y = -0{,}04$.

Завдання 3.5. а) $Z=\dfrac{1}{12}\operatorname{arc\,tg}\dfrac{3y}{4x}$; б) $Z = x^y$.

Завдання 3.6. $z = \ln(5x^2 + 4y^2)$, M(1; 1), $\vec{s}\{2;-1\}$.

Завдання 3.7. $z = x^2 - xy + y^2 + 9x - 6y + 20$.

Завдання 3.8. $z = (x-1)^2 + y^2$, (D): $x^2 + y^2 \le 4$, $y - x \le 0$, $y + x \ge 0$.

Варіант № 3
МОДУЛЬ 1
Розділ 1. ЛІНІЙНА АЛГЕБРА

Завдання 1.1. $A=\begin{pmatrix}5 & 4 & 7\\ 3 & -8 & -1\\ \lambda & 0 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}6 & \mu & -2\\ -5 & -3 & 9\\ 8 & 2 & 1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}-1\\ 6\\ 2\end{pmatrix}$.

Завдання 1.2. $\begin{vmatrix}-1 & 7 & -4 & 5\\ 6 & -3 & 0 & 7\\ -9 & 3 & 8 & 9\\ 10 & 4 & -2 & 5\end{vmatrix}$.

Завдання 1.3. а) $\begin{cases}4x_1+x_2+2x_3=-19\\ x_1-3x_2+x_3=-10\\ 4x_1+3x_2-2x_3=-1\end{cases}$ б) $\begin{cases}3x_1-x_2+x_3=12\\ x_1+2x_2+4x_3=6\\ 5x_1+x_2+2x_3=3\end{cases}$

Завдання 1.4. а) $\begin{cases}x_1+3x_2+2x_3=0\\ 2x_1-x_2+3x_3=0\\ 3x_1-5x_2+4x_3=0\end{cases}$; б) $\begin{cases}x_1+2x_2-5x_3=0\\ 2x_1-4x_2+x_3=0\\ 3x_1-2x_2-4x_3=0\end{cases}$.

Розділ 2. ВЕКТОРНА АЛГЕБРА ТА АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ

Завдання 2.1. $a = 2i - 4j - 2k$, $b = 7i + 3j$, $c = 3i + 5j - 7k$.
а) a, $2b$, $3c$; б) $3a$, $-7b$; в) c, $-2a$; г) a, c; д) $3a$, $2b$, $3c$.

Завдання 2.2. $a = (-1, 1{,}2)$, $b = (2, -3, -5)$, $c = (-6, 3, -1)$, $d = (28, -19, -7)$.

Завдання 2.3. $A_1(1;-5;-6)$, $A_2(2;4;-7)$, $A_3(3;-2;-5)$, $A_4(-6;9;-3)$.

Завдання 2.4. $a=3$, $в=1$, $c=-4$, $d=5$, $r=1$, $l=-2$.

Завдання 2.5. Координати вершин піраміди $A_1A_2A_3A_4$ див. завд. 2.3.

Завдання 2.6. A(1, 7), B(–3, –1), C(11, –3).

Завдання 2.7. Дано дві вершини трикутника ABC: A(– 4, 4), B(4, –12) і точка M(4, 2) перетину його висот. Знайти вершину C.

Завдання 2.8. Визначити при якому значенні C площини $3x-5y+Cz-3=0$ та $x-3y+2z+5=0$ будуть перпендикулярні.

Завдання 2.9. а) A(3, 0), B(2, $\sqrt{5}/3$); б) $k = 3/4$, $\varepsilon = 5/4$; в) D: $y = -2$.

Завдання 2.10. $\rho = 2\sin 2\varphi$.

Завдання 2.11. *а)* $-5x^2+10y^2-z^2+20=0$; *б)* $x^2+4z^2=5x^2$

Завдання 2.12. *а)* $x^2=-3z$, Oz; *б)* $x=1$, $y=2$, Oz.

МОДУЛЬ 2
Розділ 3. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ

Завдання 3.1.

а) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{6+x-x^2}{x^3-27}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x+2}{x^2-4x+3}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^4-3x^2+7}{x^4+2x^3+1}$;

г) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{3x^2+7x-4}{x^5+2x-1}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^4-3x+4}{3x^2-2x+1}$; е) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+10}-\sqrt{4-x}}{2x^2-x-21}$;

ж) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x}{1+2x}\right)^{-4x}$; з) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{2x-1}\right)^{3x}$; и) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos 5x}{2x^2}$.

Завдання 3.2.

$y=3x^4+\sqrt[3]{x^5}-\dfrac{2}{x}-\dfrac{4}{x^2}$	$y=\sqrt{(x-4)^5}+\dfrac{5}{\left(2x^2+4x-1\right)^2}$	$y=\cos^5 3x\cdot\mathrm{tg}(4x+1)^3$
$y=\arccos^4 x\cdot\ln\left(x^2+x-1\right)$	$y=2^{-x^3}\,\mathrm{arctg}\,7x^4$	$y=\mathrm{sh}^3\,4x\cdot\arccos\sqrt{x}$
$y=\dfrac{e^{-x^3}}{\sqrt{x^2+5x-1}}$	$y=\dfrac{\ln(7x+2)}{5\cos 42x}$	$y=\dfrac{\arccos 3x^4}{\mathrm{th}^2\,x}$
$y=\dfrac{7\arccos(4x-1)}{(x+2)^4}$	$y=\sqrt[4]{\dfrac{x+3}{x-3}}\ln(5x^2-2x+1)$	$y\sin x=\cos(x-y)$
$y=(\mathrm{arctg}(x+7))^{\cos 2x}$	$y=\dfrac{(x-2)^3\sqrt{(x+1)^5}}{(x-4)^2}$	$y=x^5\ln x$
$y=e^{-x}\cdot\left(\dfrac{1}{x^2+1}\right)$	$y=(\sin 3x)^{\arccos x}$	$\begin{cases}x=\cos^3 5t\\ y=\mathrm{ctg}^2\,t\cdot t^2\end{cases}$

Завдання 3.3 а) $y=\dfrac{x}{(x-1)^2}$; б) $y=\dfrac{e^x}{x}$.

Завдання 3.4. $z = x^3 + 2xy - 2$, N(1; 2), $\Delta x = 0{,}03$, $\Delta y = -0{,}02$.

Завдання 3.5. а) $Z=6\sqrt[3]{1+4xy+x^2+y^3}$; б) $Z=\sin^2(x-4y)$.

Завдання 3.6. $z = 2xy - y^3 + x$, M(–1; 2), $\vec{s}\{-3;4\}$.

Завдання 3.7. $z = e^{\frac{y}{2}}(x^2 + y)$.

Завдання 3.8. $z = 9(x-1)^2 + y^2$, (D): $x - y \ge 0$, $x + y \ge 0$, $x \le 2$.

Варіант № 4
МОДУЛЬ 1
Розділ 1. ЛІНІЙНА АЛГЕБРА

Завдання 1.1. $A=\begin{pmatrix}5 & 9 & -6\\ -1 & 4 & 7\\ 3 & -9 & \lambda\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}7 & 6 & -2\\ 0 & \mu & 1\\ 5 & 3 & -8\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 3\end{pmatrix}$.

Завдання 1.2. $\begin{vmatrix}0 & 6 & -7 & 3\\ -1 & 10 & 8 & 5\\ -4 & -2 & 4 & 7\\ 9 & -5 & 3 & 8\end{vmatrix}$.

Завдання 1.3. а) $\begin{cases}2x_1-x_2+2x_3=-1\\ 3x_1+2x_2+x_3=6\\ 3x_1-3x_2-4x_3=11\end{cases}$; б) $\begin{cases}2x_1-x_2+3x_3=-4\\ x_1+3x_2-x_3=11\\ x_1-2x_2+2x_3=-7\end{cases}$.

Завдання 1.4. а) $\begin{cases}4x_1-x_2+10x_3=0\\ x_1+2x_2-x_3=0\\ 2x_1-3x_2+4x_3=0\end{cases}$; б) $\begin{cases}x_1+x_2+x_3=0\\ 2x_1-3x_2+4x_3=0\\ 3x_1-2x_2+5x_3=0\end{cases}$.

Розділ 2. ВЕКТОРНА АЛГЕБРА ТА АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ

Завдання 2.1. $a=-7i+2k$, $b=2i-6j+4k$, $c=i-3j+2k$.
а) a, $-2b$, $-7c$; б) $4b$, $3c$; в) $2a$, $-7c$; г) b, c; д) $2a$, $4b$, $3c$.

Завдання 2.2. $a=(1, 3, 4)$, $b=(-2, 5, 0)$, $c=(3, -2, -4)$, $d=(13, -5, -4)$.

Завдання 2.3. $A_1(-2;0;-4)$, $A_2(1;5;5)$, $A_3(1;-12;3)$, $A_4(2;8;-9)$.

Завдання 2.4. $a=2$, $в=2$, $c=-1$, $d=9$, $r=-4$, $l=3$.

Завдання 2.5. Координати вершин піраміди $A_1A_2A_3A_4$ див. завд. 2.3.

Завдання 2.6. A(1, 0), B (–l, 4), C(9, 5).

Завдання 2.7. Знайти рівняння прямої, що відсікає на осі ординат відрізок, рівний 2, і паралельна прямій $2y-x=3$.

Завдання 2.8. При яких значеннях A та B площина $Ax+By+6z-7=0$ перпендикулярна до прямої $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y+5}{-4}=\dfrac{z+1}{3}$?

Завдання 2.9. а) $\varepsilon=\sqrt{21}/5$, A(–5, 0); б) A($\sqrt{80}$, 3), B($4\sqrt{6}$, $3\sqrt{2}$); в) D: y=1.

Завдання 2.10. $\rho=3\sin 6\varphi$.

Завдання 2.11. *а)* $4x^2-8y^2+z^2+24=0$; *б)* $x^2-y=-9z^2$

Завдання 2.12. *а)* $3y^2-4z^2=12$, Oz; *б)* $y=4$, $z=2$, Ox.

МОДУЛЬ 2
Розділ 3. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ

Завдання 3.1.

а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2-x-1}{3x^2-x-2}$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2+2x+1}{x^3-8}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^3-2x^2+4x}{2x^3+5}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x-x^6}{x^2-2x+5}$; д) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^2-x+7}{3x^4-5x^2+10}$; е) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{\sqrt{2-x}-\sqrt{x+6}}{x^2-x-6}$;

ж) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x}\right)^{2-3x}$; з) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{2x-1}{4x+1}\right)^{3x-1}$; и) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}3x}{2\sin x}$.

Завдання 3.2.

$y=7\sqrt{x}-\dfrac{2}{x^5}-3x^3+\dfrac{4}{x}$	$y=\sqrt[5]{7x^2-3x+5}-\dfrac{5}{(x-1)^3}$	$y=\arcsin^3 2x\cdot\operatorname{ctg}7x^4$
$y=\sqrt{\arccos 2x}\cdot 3^{-x}$	$y=(x+6)^5\operatorname{arcctg}3x^5$	$y=th^2\sqrt{x}\cdot\operatorname{arcctg}3x^2$
$y=\dfrac{e^{-\operatorname{ctg}5x}}{(3x^2-4x+2)}$	$y=\dfrac{\sin^3 5x}{\ln(2x-3)}$	$y=\dfrac{\sqrt{\arccos 3x}}{sh^2x}$
$y=\dfrac{6\arcsin(x+5)}{(x-2)^5}$	$y=\sqrt[5]{\dfrac{x+1}{x-1}}\log_3(x^2+x+4)$	$y=(\operatorname{th}5x)^{\arcsin(x+1)}$
$y=(\operatorname{arcctg}(x-3))^{\sin 4x}$	$y=\dfrac{(x+3)\sqrt[5]{(x-2)^2}}{(x+1)^7}$	$y=\sqrt[3]{\dfrac{1}{1+x^2}}$
$y=\ln\sin 3x$	$\operatorname{tg}(\dfrac{y}{x})=3x$	$\begin{cases}x=\operatorname{tg}^2 4t\\ y=\ln^3 t\cdot t^5\end{cases}$

Завдання 3.3. а) $y=\dfrac{x^2+1}{2}$; б) $y=\ln\dfrac{1+x}{1-x}$.

Завдання 3.4. $z = 3x^2 - xy + x + y + 1$, N(1; 3), $\Delta x = 0{,}06$, $\Delta y = -0{,}08$.

Завдання 3.5. а) $Z=12\cos^2\left(\dfrac{x}{3}-\dfrac{y}{4}\right)$; б) $Z=(x+a)(y+b)$.

Завдання 3.6. $z = \arcsin\dfrac{x^2}{y}$, M(1; 2), $\vec{s}\{5;-12\}$.

Завдання 3.7. $z = x^{3\,+}\,y^3 - 3xy$.

Завдання 3.8. $z = x^2 + 3y^2 + x - y$, (D): $x \ge 1$, $y \ge -1$, $x + y \le 1$.

Варіант № 5

МОДУЛЬ 1

Розділ 1. ЛІНІЙНА АЛГЕБРА

Завдання 1.1. $A = \begin{pmatrix} 8 & -6 & 4 \\ -1 & \lambda & 3 \\ 2 & 5 & -7 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 9 \\ 4 & -1 & 0 \\ \mu & -4 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 8 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}.$

Завдання 1.2. $\begin{vmatrix} 5 & 7 & -4 & 3 \\ -2 & 6 & -1 & 8 \\ 0 & 6 & -5 & -4 \\ 8 & 2 & 4 & 9 \end{vmatrix}.$

Завдання 1.3. а) $\begin{cases} -4x_1 + 5x_2 + 4x_3 = -20 \\ -2x_1 + x_2 + 5x_3 = -22 \\ x_1 - 2x_2 - 4x_3 = 17 \end{cases}$; б) $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 12 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 6 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = -9 \end{cases}$.

Завдання 1.4. а) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 0 \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \\ 4x_1 - x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$; б) $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + x_3 = 0 \\ 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$.

Розділ 2. ВЕКТОРНА АЛГЕБРА ТА АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ

Завдання 2.1. $a=-4i + 2j-k$, $b = 3i + 5j - 2k$, $c = j + 5k$.
а) a, $6b$, $3c$; б) $2b$, a; в) a, $-4c$; г) $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$; д) a, $6b$, $3c$.

Завдання 2.2. $a = (1,-1,1)$, $b = (-5,-3,1)$, $c = (2\ -1,0)$,
$d = (-15,-10,5)$.

Завдання 2.3. $A_1(3;-6;-11)$, $A_2(5;8;1)$, $A_3(-4;1;8)$, $A_4(-6;5;0)$.

Завдання 2.4. $a=1$, $в = -5$, $c=5$, $d = 2$, $r = -5$, $l = 1$.

Завдання 2.5. Координати вершин піраміди $A_1A_2A_3A_4$ див. завд. 2.3.

Завдання 2.6. A (1, –2), B(7, 1), C(3, 7).

Завдання 2.7. Знайти рівняння прямої, що проходить через точку A(2, –3) і точку перетину прямих $2x-y = 5$ і $x + y=1$.

Завдання 2.8. Знайти проекцію точки P (3;1;–1) на площину $x+2y+3z-1=0$.

Завдання 2.9. а) 2a = 22, $\varepsilon = \sqrt{57}/11$; б) k = 2/3, 2c = $10\sqrt{13}$;
в) ось симетрії Ox та A(27, 9).

Завдання 2.10. $\rho = 2/(1 + \cos\varphi)$.

Завдання 2.11. *а)* $x^2 - 6y^2+z^2=0$; *б)* $7x^2-3y^2-z^2=21$.

Завдання 2.12. *а)* $x^2=3y$, Oy; *б)* $3x^2+4z^2=24$, Oz.

МОДУЛЬ 2
Розділ 3. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ

Завдання 3.1.

а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2-7x+4}{x^2-5x+6}$; б) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^4-x^2+x+1}{x^4+1}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-4x^2+28x}{5x^3+3x^2+x-1}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+7x-1}{3x^4+2x+5}$; д) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{4x^3-2x^2+x}{3x^2-x}$; е) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{3+2x}-\sqrt{x+4}}{3x^2-4x+1}$;

ж) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+5}{2x+1}\right)^{5x}$; з) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x+8}{x-2}\right)^{x+4}$; и) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x-\sin x}{3x^2}$.

Завдання 3.2.

$y=7x+\dfrac{5}{x^2}-\sqrt[7]{x^4}+\dfrac{6}{x}$	$y=\sqrt[4]{3x^2-x+5}-\dfrac{3}{(x-5)^4}$	$y=\operatorname{ctg}3x\cdot\arccos 3x^2$
$y=\operatorname{tg}^4 3x\cdot\operatorname{arctg}7x^2$	$y=3^{\cos x}\ln\left(x^2-3x+7\right)$	$y=\operatorname{ch}\dfrac{1}{x}\cdot\operatorname{arctg}(7x+2)$
$y=\dfrac{\sqrt{7x^3-5x+2}}{e^{\cos x}}$	$y=\dfrac{\cos^2 3x}{\lg(3x-4)}$	$y=\dfrac{\arcsin 5x^3}{\operatorname{ch}\sqrt{x}}$
$y=\dfrac{3\operatorname{arcctg}(2x-5)}{(x+1)^4}$	$y=\sqrt[6]{\dfrac{7x-4}{7x+4}}\log_5(3x^2+2x)$	$y=(\operatorname{sh}(x+2))^{\arcsin 2x}$
$y=(\operatorname{ctg}(3x-2))^{\arcsin 3x}$	$y=\dfrac{(x+2)^7(x-3)^3}{\sqrt{(x+1)^5}}$	$y=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}+\sqrt[6]{x^7+1}$
$y=\dfrac{\sin^3 x}{\sin x^2}$	$y=3x\cdot\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$	$\begin{cases}x=\operatorname{ctg}^3 t\\ y=\arcsin 5t\cdot\sqrt[3]{t^2+1}\end{cases}$.

Завдання 3.3. а) $y=\dfrac{1}{1+x^2}$; б) $y=xe^{-x}$.

Завдання 3.4. $z = 2x^2 + xy^2 - 3$, N(2; 1), $\Delta x = 0{,}02$, $\Delta y = -0{,}04$.

Завдання 3.5. а) $Z=\dfrac{5x-2y}{x+3y}$; б) $Z=\arcsin^2\left(x+\sqrt{y}\right)$.

Завдання 3.6. $z = \operatorname{arctg}(x^2 y)$, M(–2; 1), $\vec{s}\{6;8\}$.

Завдання 3.7. $z = 2xy - 3x^2 - 2y^2 + 10$.

Завдання 3.8. $z = x^2 + y^2 - xy + x + y$, (D): $x\le 0$, $y\le 0$, $x+y+3\ge 0$.

Варіант № 6
МОДУЛЬ 1
Розділ 1. ЛІНІЙНА АЛГЕБРА

Завдання 1.1. $A = \begin{pmatrix} -7 & 4 & -3 \\ 6 & 5 & 2 \\ \lambda & 1 & -4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \mu & 7 & -4 \\ 0 & 5 & -2 \\ 6 & 3 & 8 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}.$

Завдання 1.2. $\begin{vmatrix} 0 & -7 & 4 & -8 \\ 3 & 9 & 2 & -5 \\ 6 & 2 & -1 & 1 \\ 7 & 9 & 1 & 5 \end{vmatrix}.$

Завдання 1.3. а) $\begin{cases} 4x_1 + x_2 - 5x_3 = -27 \\ -3x_1 - x_2 + 2x_3 = 17 \\ x_1 + 3x_2 - 4x_3 = -15 \end{cases}$; б) $\begin{cases} 8x_1 + 3x_2 - 6x_3 = -4 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = -5 \end{cases}$.

Завдання 1.4. а) $\begin{cases} 3x_1 - x_2 - 3x_3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$; б) $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 0 \\ 5x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases}$.

Розділ 2. ВЕКТОРНА АЛГЕБРА ТА АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ

Завдання 2.1. $a = 3i - 2j + k$, $b = 2j - 3k$, $c = -3i + 2j - k$.
а) a, $-3b$, $2c$; б) $5a$, $3c$; в) $-2a$, $4b$; г) a, c; д) $5a$, $4b$, $3c$.

Завдання 2.2. $a = (3, 1, 2)$, $b = (-7, -2, -4)$, $c = (-4, 0, 3)$, $d = (16, 6, 15)$.

Завдання 2.3. $A_1(5;5;-7)$, $A_2(-3;-8;1)$, $A_3(4; 2; 2)$, $A_4(1;-3;-1)$.

Завдання 2.4. $a = -5$, $в = 5$, $c = -4$, $d = 3$, $r = 4$, $l = -1$.

Завдання 2.5 Координати вершин піраміди $A_1A_2A_3A_4$ див. завд. 2.3.

Завдання 2.6. A(–2, –3), B(1, 6), C(6, 1).

Завдання 2.7. Довести, що чотирикутник ABCD – трапеція, якщо A(3, 6), B(5, 2), C(–1, –3), D(–5,5).

Завдання 2.8. Знайти рівняння площини, що проходить через вісь Ox та точку A(2; –1; 3).

Завдання 2.9. а) $b = \sqrt{15}$, $\varepsilon = \dfrac{\sqrt{10}}{25}$; б) $k = 3/4$, $2a = 16$;
в) ось симетрії Ox та A(4, –8).

Завдання 2.10. $\rho = 3(1+\sin\varphi)$.

Завдання 2.11. *а)* $z = 8 - x^2 - 4y^2$; *б)* $4x^2 + 9y^2 + 36z^2 = 72$.

Завдання 2.12. *а)* $2x^2 - 6y^2 = 12$, Ox; *б)* $y^2 = 4z$, Oz.

МОДУЛЬ 2
Розділ 3. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ

Завдання 3.1.

а) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{12+x-x^2}{x^3-27}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2-3x-1}{x^4-1}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+10x+3}{2x^2+5x-3}$;

г) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{2x^3+7x^2+4}{x^4+5x-1}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4-2x+1}{3x^2+2x-5}$; е) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-3x+2}{\sqrt{5-x}-\sqrt{x+1}}$;

ж) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x}\right)^{-5x}$; з) $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\dfrac{x+1}{3x-1}\right)^{2x+1}$; и) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 5x}{\sin 3x}$.

Завдання 3.2.

$y=5x^2-\sqrt[3]{x^4}+\dfrac{4}{x^3}-\dfrac{5}{x}$	$y=\sqrt{3x^4-2x^3+x}-\dfrac{4}{(x+2)^3}$	$y=\arccos^2 4x\cdot 1n(x-3)$
$y=\dfrac{e^{\operatorname{tg}3x}}{\sqrt{3x^2-x+4}}$	$y=\operatorname{ch}^3 4x\cdot\arccos 4x^2$	$y=\dfrac{\operatorname{cth}^3(x+1)}{\arccos 2x}$
$y=\dfrac{2\operatorname{arctg}(3x+2)}{(x-3)^2}$	$y=\sqrt[7]{\dfrac{2x-3}{2x+1}}\lg(7x-10)$	$y=(\cos 5x)^{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}$
$y=(\operatorname{tg}(4x-3))^{\arccos 2x}$	$y=\dfrac{(x-1)^4(x+2)^5}{\sqrt[3]{(x-4)^2}}$	$y=\operatorname{arctg}e^{2x}$
$y=\left(\ln\dfrac{1}{x}\right)^2$	$y=2x\cdot\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$	$y=\dfrac{\operatorname{tg}^3 2x}{\lg(5x+1)}$
$y=5^{-x^2}\arcsin 3x^3$	$y=\log_2(x-7)\cdot\operatorname{arctg}\sqrt{x}$	$\begin{cases}x=\arccos^3 2t\\ y=\dfrac{1}{t^6}\cdot\sin^2 t\end{cases}$

Завдання 3.3. а) $y=\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^2$; б) $y=\ln(2x^2+3)$.

Завдання 3.4. $z = x^2 + 3xy - 6(y + 4)$, N(4; 1), $\Delta x = -0{,}04$, $\Delta y = 0{,}03$.

Завдання 3.5. а) $Z=(2x+y)\,e^{-xy}$; б) $Z=\operatorname{arc}\operatorname{tg}^3\left(y-\sqrt{x}\right)$.

Завдання 3.6. $z = \ln(3x^2 + 4y^2)$, M(1; 3), $\vec{s}\{2;-1\}$.

Завдання 3.7. $z = 5xy + \dfrac{10}{x}+\dfrac{20}{y}$.

Завдання 3.8. $z = x^2 + xy$, (D): $-1\le x\le 1,\quad 0\le y\le 3$.

Варіант № 7
МОДУЛЬ 1
Розділ 1. ЛІНІЙНА АЛГЕБРА

Завдання 1.1. $A=\begin{pmatrix}-2 & -7 & 8\\ 1 & 4 & \lambda\\ 11 & 6 & -6\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}7 & -\mu & 3\\ 0 & 3 & 1\\ -5 & 9 & 1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}6\\ -5\\ 5\end{pmatrix}$.

Завдання 1.2. $\begin{vmatrix}7 & -6 & 4 & -1\\ 5 & 4 & 3 & -2\\ 8 & -9 & 1 & 5\\ 0 & 6 & -3 & -5\end{vmatrix}$.

Завдання 1.3. а) $\begin{cases}3x_1+x_2+5x_3=-6\\ 2x_1+x_2+3x_3=-3\\ 4x_1-x_2-4x_3=15\end{cases}$; б) $\begin{cases}4x_1+x_2-3x_3=9\\ x_1+x_2-x_3=-2\\ 8x_1+3x_2-6x_3=12\end{cases}$.

Завдання 1.4. а) $\begin{cases}x_1-x_2+2x_3=0\\ 2x_1+x_2-3x_3=0\\ 3x_1+2x_3=0\end{cases}$; б) $\begin{cases}x_1-2x_2+x_3=0\\ 3x_1+3x_2+5x_3=0\\ 4x_1+x_2+6x_3=0\end{cases}$.

Розділ 2. ВЕКТОРНА АЛГЕБРА ТА АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ

Завдання 2.1. $a = 4i - j + 3k$, $b = 2i + 3j - 5k$, $c = 7i + 2j + 4k$.
а) $7a$, $-4b$, $2c$; б) $3a$, $5c$; в) $2b$, $4c$; г) b, c; д) $7a$, $2b$, $5c$.

Завдання 2.2. $a = (-3, 0, 1)$, $b = (2, 7, -3)$, $c = (-4, 3, 5)$, $d = (-16, 33, 13)$.

Завдання 2.3 $A_1(0;3;-7)$, $A_2(10;-4;8)$, $A_3(-9; 4;3)$, $A_4(7;-3;2)$.

Завдання 2.4. $a=1$, $в=-2$, $c = 4$, $d = 1$, $r = -2$, $l = 3$.

Завдання 2.5. Координати вершин піраміди $A_1A_2A_3A_4$ див. завд. 2.3.

Завдання 2.6. $A(-4, 2)$, $B(-6, 6)$, $C(6, 2)$.

Завдання 2.7. Записати рівняння прямої, що проходить через точку $A(3, 1)$ перпендикулярно прямій BC, якщо $B(2, 5)$, $C(1, 0)$.

Завдання 2.8. Знайти точку перетину прямої $\frac{x-7}{5}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-5}{4}$ і площини $3x - y + 2z - 8 = 0$.

Завдання 2.9. а) $a = 4$, $F(3, 0)$ б) $b = 2\sqrt{10}$, $F(-11, 0)$; в) D: $x = -2$.

Завдання 2.10. $\rho = 2(1-\cos\varphi)$.

Завдання 2.11. *а)* $4x^2+6y^2-24z^2=96$; *б)* $y^2+8z^2=20x^2$.

Завдання 2.12. *а)* $x^2+3z^2=9$, Oz; *б)* $x=4$, $z=6$, Oy.

МОДУЛЬ 2
Розділ 3. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ

Завдання 3.1.

а) $\lim\limits_{x\to 1/3}\dfrac{3x^2+2x-1}{27x^3-1}$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-x+3}{5x^2+3x-3}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-3x^4+x^2+x}{x^4+3x-2}$;

г) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x^6-5x^2+2}{2x^3+4x-5}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-5x+2}{x^4+3x^2-9}$; е) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{3x^2+4x+1}{\sqrt{x+3}-\sqrt{5+3x}}$;

ж) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{x+1}\right)^{1+2x}$; з) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{2x+1}{x-1}\right)^{4x}$; и) $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\,\mathrm{tg}\,\dfrac{\pi x}{2}$.

Завдання 3.2.

$y=3x^5-\dfrac{3}{x}-\sqrt{x^3}+\dfrac{10}{x^5}$	$y=\sqrt[3]{(x-7)^5}+\dfrac{5}{4x^2+3x-5}$	$y=\arccos^3 5x\cdot\mathrm{tg}\,x^4$
$y=\dfrac{e^{\sin x}}{(x-5)^7}$	$y=\dfrac{\log_3(4x+5)}{2\,\mathrm{ctg}\sqrt{x}}$	$y=\dfrac{\mathrm{th}\,3x^5}{\mathrm{arctg}^2\,3x}$
$y=\dfrac{4\arccos 3x}{(x+2)^5}$	$y=\sqrt[8]{\dfrac{5x+1}{5x-1}}\ln(3x-x^2)$	$y=(\sqrt{3x+2})^{\mathrm{arcctg}\,3x}$
$y=(\cos(2x-5))^{\mathrm{arctg}\,5x}$	$y=\dfrac{(x-3)^2\sqrt{x+4}}{(x+2)^7}$	$y=x^3\ln x$
$y=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$	$y^2x=e^{\frac{y}{x}}$	$y=\mathrm{sh}^3\,3x\cdot\mathrm{arcctg}\,5x^2$
$y=\arcsin^3 2x\cdot\mathrm{ctg}\,7x^4$	$y=\mathrm{arctg}^5\,x\cdot\log_2(x-3)$	$\begin{cases}x=\sqrt{\dfrac{1+t}{2+t^3}}\\ y=\mathrm{arctg}\,t\cdot\dfrac{1}{\sqrt{t}}\end{cases}$

Завдання 3.3. а) $y=\dfrac{(x-1)^2}{x^2+1}$; б) $y=e^{\frac{1}{x}}$.

Завдання 3.4. $z = 2xy-y^2+2$, N(3; 1), $\Delta x = -0{,}04$, $\Delta y = 0{,}03$.

Завдання 3.5. а) $Z=\sqrt{3x}\sin\dfrac{x}{y}$; б) $Z=e^{x^2+y^2}$.

Завдання 3.6. $z = x^3-2xy+y^2$, M(–2; –1), $\vec{s}\{-6;8\}$.

Завдання 3.7. $z = 4(x-y)-x^2-y^2$.

Завдання 3.8. $z = x^2-y^2$, (D): $x^2+y^2\le 4$.

Варіант № 8
МОДУЛЬ 1
Розділ 1. ЛІНІЙНА АЛГЕБРА

Завдання 1.1. $A=\begin{pmatrix}\lambda & 9 & -3\\ 2 & -1 & 1\\ -10 & 5 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & -1 & 6\\ \mu & 4 & -3\\ 8 & 2 & 9\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1\\ 3\\ 5\end{pmatrix}$.

Завдання 1.2. $\begin{vmatrix}1 & -2 & 4 & -6\\ -9 & 7 & -5 & 4\\ 3 & 0 & 2 & -1\\ 6 & 3 & -5 & 0\end{vmatrix}$.

Завдання 1.3. а) $\begin{cases}x_1-5x_2+5x_3=10\\ 2x_1-5x_2+x_3=-2\\ -2x_1+3x_2-3x_3=-6\end{cases}$; б) $\begin{cases}2x_1+3x_2+4x_3=33\\ 7x_1-5x_2=24\\ 4x_1+11x_3=39\end{cases}$.

Завдання 1.4. а) $\begin{cases}2x_1-x_2-5x_3=0\\ x_1+2x_2-3x_3=0\\ 5x_1+x_2+4x_3=0\end{cases}$; б) $\begin{cases}2x_1+x_2-3x_3=0\\ x_1+2x_2-4x_3=0\\ x_1-x_2+x_3=0\end{cases}$.

Розділ 2. ВЕКТОРНА АЛГЕБРА ТА АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ

Завдання 2.1. $a = 4i + 2j - 3k$, $b = 2i + k$, $c = -12\boldsymbol{i} - 6j + 9k$.
а) $2a$, $3b$, c; б) $4a$, $3b$; в) b, $-4c$; г) a, c; д) $2a$, $3b$, $-4c$.

Завдання 2.2. $a = (5, 1, 2)$, $b = (-2, 1, -3)$, $c = (4, -3, 5)$, $d = (15, -15, 24)$.

Завдання 2.3. $A_1(1;2;-3)$, $A_2(-4;6;5)$, $A_3(7;-12;5)$, $A_4(1;8;-8)$.

Завдання 2.4. $a = 4$, $в = -2$, $c = -3$, $d = 2$, $r = -5$, $l = 1$.

Завдання 2.5. Координати вершин піраміди $A_1A_2A_3A_4$ див. завд. 2.3.

Завдання 2.6. A(4, –3), B(7, 3), C(1, 10).

Завдання 2.7. Знайти рівняння прямої, що проходить через точку A(–2, 1) паралельно прямій MN, якщо M(– 3, –2), N(l, 6).

Завдання 2.8. Скласти загальне рівняння прямої, що утворена перетином площини $3x - y - 7z + 9 = 0$ з площиною, що проходить через вісь Ox та точку A(3, 2, –5).

Завдання 2.9. а) $b = 4$, F(9,0); б) $a = 5$, $\varepsilon = 7/5$; в) D: $x = 6$.

Завдання 2.10. $\rho = 3(1 - \cos 2\varphi)$.

Завдання 2.11. *а)* $4x^2-5y^2-5z^2+40=0$; *б)* $y=5x^2+3z^2$.

Завдання 2.12. *а)* $3x^2-5z^2=15$, Oz; *б)* $z=-1$, $y=3$, Ox.

МОДУЛЬ 2
Розділ 3. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ

Завдання 3.1.

а) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2-4x-5}{x^2-2x-3}$; б) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^2+2x}{x^2+4x+4}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+7x+3}{5x^2-3x+4}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^7+5x^2-4x}{3x^2+11x-7}$; д) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{5x^2-4x+2}{4x^3+2x-5}$; е) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{2x^2-9x+4}{\sqrt{5-x}-\sqrt{x-3}}$;

ж) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x-1}\right)^{x-4}$; з) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{2x-1}\right)^{5x}$; и) $\lim\limits_{x\to\pi/2}\dfrac{1-\sin x}{\pi-2x}$.

Завдання 3.2.

$y=\sqrt[3]{x^7}+\dfrac{3}{x}-4x^6+\dfrac{4}{x^5}$	$y=\sqrt[5]{(x+4)^6}-\dfrac{2}{2x^2-3x+7}$	$y=\operatorname{arctg}^3 4x\cdot 3^{\sin x}$
$y=\log_3(x+5)\cdot\arccos 3x$	$y=(x-5)^7\operatorname{arcctg}7x^3$	$y=\operatorname{th}^5 3x\cdot\arcsin\sqrt{x}$
$y=\dfrac{\sqrt[3]{2x^2-3x+1}}{e^{-x}}$	$y=\dfrac{\ln(7x-3)}{3\operatorname{tg}^2 4x}$	$y=\dfrac{\arccos^7 2x}{\operatorname{th}x^5}$
$y=\dfrac{\arcsin(3x+8)}{(x-7)^3}$	$y=\sqrt[9]{\dfrac{x+3}{x-3}}\log_5(2x-3)$	$y=(\ln(x+3))^{\sin\sqrt{x}}$
$y=(\sin(7x+4))^{\operatorname{arcctg}x}$	$y=\dfrac{(x-7)^{10}\sqrt{3x-1}}{(x+3)^5}$	$y=e^{\cos x}$
$x^2-2xy-y^2=2x$	$y=\left(x+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}\right)\ln x$	$\begin{cases}x=\sqrt{t^3+2}\\ \operatorname{arcctg}^2 t\cdot\ln t\end{cases}$

Завдання 3.3. а) $y=\dfrac{x^3+1}{x^2}$; б) $y=\dfrac{\ln x}{x}$.

Завдання 3.4. $z = x^2-y^2+6(x-2)+3y$, N(2; 3), $\Delta x = 0{,}02$, $\Delta y = -0{,}03$.

Завдання 3.5. а) $Z=4a^2b^2\sqrt{1-\dfrac{x^2}{y^2}-\dfrac{y^2}{b^2}}$; б) $Z=\arccos^2\ln\dfrac{x}{5y}$.

Завдання 3.6. $z = x^2+xy-y^3$, M(1; –2), $\bar{s}\{-6;-8\}$.

Завдання 3.7. $z=(x^2+y^2)e-\left(x^2+y^2\right)$.

Завдання 3.8. $z = x^2+xy-2$, (D): $4x^2-4\le y\le 0$.

Варіант № 9
МОДУЛЬ 1
Розділ 1. ЛІНІЙНА АЛГЕБРА

Завдання 1.1. $A=\begin{pmatrix} -3 & 5 & 7 \\ -2 & \lambda & -1 \\ 7 & 9 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & 8 & -3 \\ -6 & 8 & \mu \\ -5 & 4 & 2 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 9 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix}$.

Завдання 1.2. $\begin{vmatrix} 6 & 9 & -2 & 0 \\ 7 & -3 & -4 & 2 \\ 7 & 6 & 3 & 10 \\ 3 & 9 & 1 & -5 \end{vmatrix}$.

Завдання 1.3. а) $\begin{cases} x_1-3x_2-4x_3=-15 \\ -4x_1+4x_2+2x_3=2 \\ -5x_1+x_2+5x_3=2 \end{cases}$; б) $\begin{cases} 2x_1+3x_2+4x_3=12 \\ 7x_1-5x_2+x_3=-33 \\ 4x_1+x_3=-7 \end{cases}$.

Завдання 1.4. а) $\begin{cases} 5x_1-5x_2+4x_3=0 \\ 3x_1+x_2+3x_3=0 \\ x_1+7x_2-x_3=0 \end{cases}$; б) $\begin{cases} 2x_1-x_2+2x_3=0 \\ 4x_1+x_2+5x_3=0 \\ 2x_1+2x_2+3x_3=0 \end{cases}$.

Розділ 2. ВЕКТОРНА АЛГЕБРА ТА АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ

Завдання 2.1. $a=-i+5k$, $b=-3i+2j+2k$, $c=-2i-4j+k$.
а) $3a$, $-4b$, $2c$; б) $7a$, $-3c$; в) $2b$, $3a$; г) b, c; д) $7a$, $2b$, $-3c$.

Завдання 2.2. $a=(0, 2, -3)$, $b=(4, -3, -2)$, $c=(-5, -4, 0)$, $d=(-19, -5, -4)$.

Завдання 2.3. $A_1(-2;-5;3)$, $A_2(3;-8;10)$, $A_3(9;-2;3)$, $A_4(6;6;-2)$.

Завдання 2.4. а $=3$, $в=1$, $c=5$, $d=2$, $r=1$, $l=3$.

Завдання 2.5. Координати вершин піраміди $A_1A_2A_3A_4$ див. завд. 2.3.

Завдання 2.6. A (4, –4), B(8, 2), C(3, 8).

Завдання 2.7. Знайти точку, симетричну точці M(2, – 1) відносно прямої $x-2y+3=0$.

Завдання 2.8. Задано загальне рівняння прямої $5x+7y+1=0$. Записати для заданої прямої рівняння: з кутовим коефіцієнтом, у відрізках на осях, у нормальному виді, у параметричному виді.

Завдання 2.9. а) $A(0, \sqrt{3})$, $B(\sqrt{14/13}, 1)$; б) $k=\sqrt{21}/10$, $\varepsilon=10/11$;
в) D: $y=-4$.

Завдання 2.10. $\rho=4\sin 3\varphi$.

Завдання 2.11. *а)* $x^2=8(y^2+z^2)$; *б)* $2x^2+3y^2-z^2=18$.

Завдання 2.12. *а)* $y^2=3z$, Oz; *б)* $2x^2+3z^2=6$, Ox.

МОДУЛЬ 2
Розділ 3. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ

Завдання 3.1.

а) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{3x^2+2x-1}{-x^2+x+2}$; б) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-1}{x^2+3x+2}$; в) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{-x^2+3x+1}{3x^2+x-5}$;

г) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{7x^2+5x+9}{1+4x-x^3}$; д) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{2x^3-3x^2+2x}{x^2+7x+1}$; е) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+6}}{2x^2-7x-15}$;

ж) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{2x}{2-3x}\right)^{3x}$; з) $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\dfrac{x+3}{2x-4}\right)^{x+2}$; и) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} 2x-\sin 2x}{x^2}$.

Завдання 3.2.

$y=8x^2+\sqrt[3]{x^4}-\dfrac{4}{x}-\dfrac{2}{x^3}$	$y=2^{\cos x}\cdot\operatorname{arcctg}5x^3$	$y=e^{-x}\cdot\arcsin^2 5x$
$y=\arccos x^2\cdot\operatorname{ctg}7x^3$	$y=\dfrac{3}{(x-4)^7}-\sqrt{5x^2-4x+3}$	$y=\dfrac{\arcsin^3 4x}{\operatorname{sh}(3x+1)}$
$y=\dfrac{\sqrt{x^2+4x-5}}{e^{x^3}}$	$y=\operatorname{cth}^2(x+1)\cdot\arccos\dfrac{1}{x}$	$y=\dfrac{\lg(11x+3)}{\cos^2 5x}$
$y=\dfrac{7\operatorname{arctg}(4x+1)}{(x-4)^2}$	$y=\sqrt{\dfrac{6x+5}{6x-5}}\lg(4x+7)$	$y=x\sqrt{1+x^3}$
$y=(\arcsin 2x)^{\ln(x+3)}$	$y=\dfrac{(x+1)^8(x-3)^2}{\sqrt{(x+2)^5}}$	$y=(\log_2(x+4))^{\operatorname{ctg}7x}$
$y=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{1}{\cos x^2}$	$\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$	$\begin{cases}x=\ln\ln t\\ y=\arccos 7t\cdot\sqrt{t^4+5}\end{cases}$.

Завдання 3.3. а) $y=\dfrac{1}{1-x^2}$; б) $y=\ln(x^2-4)$.

Завдання 3.4. $z = xy^2+2x^2-4$, N(1; 3), $\Delta x = 0{,}05$, $\Delta y= -0{,}04$.

Завдання 3.5. а) $Z=\sin^2(x+y)-\sin^2\dfrac{x}{2}+\cos^2 2y$; б) $Z=\dfrac{y}{x}$

Завдання 3.6. $z = 13\ln(x^3y^2+1)$, M(1; –1), $\vec{s}\{5;12\}$.

Завдання 3.7. $z = x^4+y^4-2x^2+4xy-2y^2$.

Завдання 3.8. $z = x^2y(4-x-y)$, (D): $x\ge 0, y\ge 0$, $x+y-6\le 0$.

Варіант № 10
МОДУЛЬ 1
Розділ 1. ЛІНІЙНА АЛГЕБРА

Завдання 1.1. $A = \begin{pmatrix} 6 & \lambda & -4 \\ 8 & -7 & 2 \\ -1 & 6 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & -5 & \mu \\ 9 & -2 & -6 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix}$.

Завдання 1.2. $\begin{vmatrix} 7 & -6 & 5 & -1 \\ 0 & 7 & -9 & 4 \\ -3 & 10 & 4 & 7 \\ 5 & 6 & -1 & -1 \end{vmatrix}$.

Завдання 1.3. а) $\begin{cases} -2x_1 + x_2 - 2x_3 = -5 \\ 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 25 \\ x_1 - 5x_2 - 3x_3 = -7 \end{cases}$; б) $\begin{cases} x_1 + 4x_2 - x_3 = 6 \\ 5x_2 + 4x_3 = -20 \\ 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 = -22 \end{cases}$.

Завдання 1.4. а) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 = 0 \end{cases}$; б) $\begin{cases} 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 = 0 \\ 7x_1 - x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$.

Розділ 2. ВЕКТОРНА АЛГЕБРА ТА АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ

Завдання 2.1. $a = 6i - 4j + 6k$, $b = 9i - 6j + 9k$, $\mathbf{c} = i - 8k$.
а) $2a, -4b, 3c$; б) $3b, -9c$; в) $3a, -5c$; г) a, b; д) $3a, -4b, -9c$.

Завдання 2.2. $a = (3, -1, 2)$, $b = (-2, 3, 1)$, $c = (4, -5, -3)$, $d = (-3, 2, -3)$.

Завдання 2.3. $A_1(6;5;23)$, $A_2(-6;11;3)$, $A_3(5;-6;5)$, $A_4(1;3;-1)$.

Завдання 2.4. $a = 4$, $в = 1$, $c = -5$, $d = -3$, $r = -1$, $l = 2$.

Завдання 2.5. Координати вершин піраміди $A_1A_2A_3A_4$ див. завд. 2.3.

Завдання 2.6. A(–3, –3), B(5, –7), C(7, 7).

Завдання 2.7. Знайти точку O перетину діагоналей чотирикутника ABCD, якщо A(– 1, –3), B(3, 5), C(5, 2), D(3, –5).

Завдання 2.8. Скласти рівняння площини, що проходить через початок координат перпендикулярно до площин $3x - y - 7z + 9 = 0$ та $x - 4y + 2z - 5 = 0$

Завдання 2.9. а) $\varepsilon = 7/8$, A(8, 0); б) A(3, $-\sqrt{3/5}$), B($\sqrt{13/5}$, 6); в) D: $y = 4$.

Завдання 2.10. $\rho = 4 \sin 4\varphi$.

Завдання 2.11. *а)* $5z^2+2y^2=10x$; *б)* $4z^2-3y^2-5x^2+60=0$.

Завдання 2.12. *а)* $y^2-5z^2=5$, Oy; *б)* $y=3$, $z=1$, Ox.

МОДУЛЬ 2
Розділ 3. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ

Завдання 3.1.

а) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3x^2-11x+6}{2x^2-5x-3}$; б) $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{2x^2+7x-4}{x^3+64}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-3x^2+10}{7x^3+2x+1}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4+x^2-6}{2x^2+3x+1}$; д) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{3x^2-7x+5}{4x^5-3x^3+2}$; е) $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{\sqrt{3x+17}-\sqrt{2x+12}}{x^2+8x+15}$;

ж) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-7}{x}\right)^{2x+1}$; з) $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\dfrac{2x+1}{3x-1}\right)^{x-1}$; и) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^2 x}{x\,\mathrm{tg}\,x}$.

Завдання 3.2.

$y=4x^6+\dfrac{5}{x}-\sqrt[3]{x^7}+\dfrac{7}{x^4}$	$y=\sqrt[3]{4x^2-3x-4}-\dfrac{2}{(x-3)^5}$	$y=4^{-x}\cdot\ln^5(x+2)$
$y=\log_4(x-1)\cdot\arcsin^4 x$	$y=5^{-x^2}\arccos 5x^4$	$y=\mathrm{sh}^4 2x\cdot\arccos x^2$
$y=\dfrac{e^{\mathrm{ctg}\,5x}}{(x+4)^3}$	$y=\dfrac{\mathrm{ctg}^2 5x}{\ln(7x-2)}$	$y=\dfrac{\mathrm{th}^4(2x+5)}{\arccos 3x}$
$y=\dfrac{3\arcsin(2x-7)}{(x+2)^4}$	$y=\sqrt[3]{\dfrac{4x-1}{4x+1}}\ln(2x^3-3)$	$y=(sh3x)^{\mathrm{arctg}(x+2)}$
$y=(\arccos 3x)^{\lg(5x-1)}$	$y=\dfrac{(x+2)(x-7)^4}{\sqrt[3]{(x-1)^4}}$	$y=\dfrac{(2-x^2)\cdot(x-1)}{1-x^3}$
$y=\mathrm{arctg}\sin\sqrt{x}$	$\mathrm{tg}\dfrac{y}{x}=\ln\sqrt{x^2+y^2}$	$\begin{cases}x=e^{5t}+2t^7\\ y=\ln^3 t\cdot\dfrac{1}{\sqrt[3]{t}}\end{cases}$

Завдання 3.3. а) $y=\dfrac{x}{3-x^2}$; б) $y=x\ln x$.

Завдання 3.4. $z = x^2 + 2xy + 3y^2+1$, N(2; 1), $\Delta x = -0{,}04$, $\Delta y = 0{,}04$.

Завдання 3.5. а) $Z=\cos^2(x-y)$; б) $Z=\dfrac{y}{\sqrt{1-x}}$.

Завдання 3.6. $z = x^2 + xy + y^2$, M(1; 1), $\vec{s}\{2;-1\}$.

Завдання 3.7. $z = x^3 + y^3 - 6xy$.

Завдання 3.8. $z = x^2 + 4x + 2xy - y^2$, (D): $x\le 0, y\le 0$, $x + y + 2 \ge 0$.

Варіант № 11
МОДУЛЬ 1
Розділ 1. ЛІНІЙНА АЛГЕБРА

Завдання 1.1. $A=\begin{pmatrix}-9 & 4 & -8\\ 3 & 2 & 6\\ -8 & \lambda & 7\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}7 & \mu & 9\\ 3 & -3 & 1\\ -7 & 4 & 8\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}0\\ 4\\ -7\end{pmatrix}$.

Завдання 1.2. $\begin{vmatrix}-1 & 0 & 7 & 6\\ -5 & 4 & -6 & 8\\ -2 & 10 & 7 & 4\\ -8 & 3 & -1 & -3\end{vmatrix}$.

Завдання 1.3. а) $\begin{cases}x_1-4x_2-5x_3=6\\ -2x_1-x_2+4x_3=3\\ 2x_1+3x_2+3x_3=5\end{cases}$; б) $\begin{cases}3x_1-2x_2+4x_3=21\\ 3x_1+4x_2-2x_3=9\\ 2x_1-x_2-x_3=10\end{cases}$.

Завдання 1.4. а) $\begin{cases}2x_1+x_2+3x_3=0\\ 3x_1-x_2+2x_3=0\\ x_1+3x_2+4x_3=0\end{cases}$; б) $\begin{cases}3x_1-2x_2+x_3=0\\ 2x_1+3x_2-5x_3=0\\ 5x_1+x_2-4x_3=0\end{cases}$.

Розділ 2. ВЕКТОРНА АЛГЕБРА ТА АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ

Завдання 2.1. $a = 5i - 3j+4k$, $b = 2i - 4j - 2k$, $c = 3i + 5j - 7k$.
а) a, $-4b$, $2c$; б) $-2b$, $4c$; в) $-3a$, $6c$; г) b, c; д) a, $-2b$, $6c$.

Завдання 2.2. $a = (5, 3, 1)$, $b = (-1, 2, -3)$, $c = (3, -4, 2)$, $d=(-9, 34, -20)$.

Завдання 2.3. $A_1(-5;-5;2)$, $A_2(-7;1;0)$, $A_3(6;2;-9)$, $A_4(10;-1;-1)$.

Завдання 2.4. $a =-1$, $в = 4$, $c = 2$, $d = 5$, $r = 3$, $l =1$.

Завдання 2.5. Координати вершин піраміди $A_1A_2A_3A_4$ див. завд. 2.3.

Завдання 2.6. A(1, –6), B(3, 4), C(–3, 3).

Завдання 2.7. Через точку перетину прямих $6x - 4y + 5 = 0$, $2x + 5y + 8 = 0$ провести пряму, паралельну осі абсцис.

Завдання 2.8. Знайти рівняння площини, точки якої однаково віддалені від точок A (1, –4, 2) та B(7, 1, –5).

Завдання 2.9. а) $2a = 24$, $\varepsilon = \sqrt{22}/6$; б) $k=\sqrt{2/3}$, $2c=10$;
в) ось симетрії Ox та A(–7, –7).

Завдання 2.10. $\rho = 3(\cos\varphi +1)$.

Завдання 2.11. *а)* $x^2-7y^2-14z^2+21=0$; *б)* $2y=x^2+4z^2$

Завдання 2.12. *а)* $x^2=-4z$, Oz; *б)* $y^2+4z^2=4$, Oy.

МОДУЛЬ 2
Розділ 3. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ

Завдання 3.1.

а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{x^2+x-6}$; б) $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{4x^2+19x-5}{2x^2+11x+5}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2+5x-7}{2x^2-x+10}$;

г) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^2+5x+7}{3x^4-2x^2+x}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^5+6x^4-x^3}{2x^2+6x+1}$; е) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+2}-\sqrt{2}}{\sqrt{x^2+1}-1}$;

ж) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x+4}\right)^{3x+2}$; з) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x-3}{x+4}\right)^{x+3}$; и) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\operatorname{tg}x}-\dfrac{1}{\sin x}\right)$.

Завдання 3.2.

$y=2\sqrt{x^3}-\dfrac{7}{x}+3x^2-\dfrac{2}{x^5}$	$y=\dfrac{7}{(x-1)^3}+\sqrt{8x-3+x^2}$	$y=3^{tgx}\cdot\arcsin 7x^4$
$y=(x-4)^5\cdot\operatorname{arcctg}3x^2$	$y=\operatorname{arctg}^4 x\cdot\cos 7x^4$	$y=\dfrac{\sqrt[3]{\operatorname{arctg}2x}}{\operatorname{sh}^2 x}$
$y=\dfrac{\sqrt{3+2x-x^2}}{e^x}$	$y=\dfrac{\sin^3(4x+3)}{\ln(7x+1)}$	$y=\operatorname{ch}^3(3x+2)\cdot\operatorname{arctg}3x$
$y=\dfrac{2\lg(4x+5)}{(x+6)^4}$	$y=\sqrt[4]{\dfrac{x+6}{x-6}}\sin(3x^2+1)$	$y=(\operatorname{ch}3xx)^{\operatorname{ctg}1/x}$
$y=(\operatorname{arctg}5x)^{\log_2(x+4)}$	$y=\dfrac{\sqrt[5]{(x+4)^3}}{(x-1)^2(x+3)^5}$	$y=5^{\arcsin x}$
$y=\sin(\operatorname{tg}^3 x)$	$y=\sin(x+y)$	$\begin{cases}x=\operatorname{tg}^3 t^2\\ y=2^{3t}\cdot\sin^4 t\end{cases}$.

Завдання 3.3. а) $y=\dfrac{1}{x^2+2x}$; б) $y=(x+4)e^{2x}$.

Завдання 3.4. $z = x^2y + y^3 + 1$, N(–3; 1), Δx = –0,06, Δy = 0,04.

Завдання 3.5. а) $Z=\ln ctg^2(x-2y)$; б) $Z=\dfrac{\ln x}{y^3}$.

Завдання 3.6. $z = 2x^2 + 3xy + y^2$, M(2; 1), $\vec{s}\{3;4\}$.

Завдання 3.7. $z = 4x^2 + y^2 + 2xy - 4x - y$.

Завдання 3.8. $z = x^3 + y^3 - 3xy$, (D): $0\le x\le 2$, $-1\le y\le 2$.

Варіант №12

МОДУЛЬ 1

Розділ 1. ЛІНІЙНА АЛГЕБРА

Завдання 1.1. $A=\begin{pmatrix}7 & -9 & 10\\ \lambda & 1 & -1\\ 3 & 7 & -3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 8 & 3\\ -4 & 5 & -6\\ \mu & -2 & -6\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}2\\ 0\\ -8\end{pmatrix}$.

Завдання 1.2. $\begin{vmatrix}1 & 7 & -5 & 4\\ 0 & -5 & 3 & -9\\ 2 & 7 & 3 & 1\\ 8 & -6 & -9 & 2\end{vmatrix}$.

Завдання 1.3. а) $\begin{cases}-3x_1-x_2+x_3=-13\\ x_1+x_2-4x_3=4\\ -5x_1+x_2-3x_3=-13\end{cases}$; б) $\begin{cases}3x_1-2x_2-5x_3=5\\ 2x_1+3x_2-4x_3=12\\ x_1-2x_2+3x_3=-1\end{cases}$.

Завдання 1.4. а) $\begin{cases}x_1-2x_2-x_3=0\\ 2x_1+3x_2+2x_3=0\\ 3x_1-2x_2+5x_3=0\end{cases}$; б) $\begin{cases}5x_1+x_2+2x_3=0\\ 3x_1+2x_2-3x_3=0\\ 2x_1-x_2+x_3=0\end{cases}$.

Розділ 2. ВЕКТОРНА АЛГЕБРА ТА АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ

Завдання 2.1. $a = -4i + 3j - 7k$, $b = 4i + 6j - 2k$, $c = 6i + 9j - 3k$.
а) $-2a$, b, $-2c$; б) $4b$, $7c$; в) $5a$, $-3b$; г) b, c; д) $-2a$, $4b$, $7c$.

Завдання 2.2. $a = (3, 1, -3)$, $b = (-2, 4, 1)$, $c = (l, -2, 5)$, $d = (l, 12, -20)$.

Завдання 2.3. $A_1(-1;5;7)$, $A_2(3;-6;-10)$, $A_3(5;2;-3)$, $A_4(1;9;-1)$.

Завдання 2.4. $a=1$, $в=-4$, $c=-5$, $d=-7$, $r=1$, $l=-3$.

Завдання 2.5. Координати вершин піраміди $A_1A_2A_3A_4$ див. завд. 2.3.

Завдання 2.6. A(–4, 2), B(8, –6), C(2, 6).

Завдання 2.7. Відомі рівняння сторони AB трикутника ABC $4x+y=12$, його висот BH $5x-4y=12$ і AM $x+y=6$. Знайти рівняння двох інших сторін трикутника ABC.

Завдання 2.8. Скласти рівняння площини у відрізках, якщо вона проходить через точку M(6; –10; 1) і відсікає на осі Ox відрізок a = –3, а на осі Oz c = 2.

Завдання 2.9. а) $b=2$, $\varepsilon=5\sqrt{29}/29$; б) $k=12/13$, $2a=26$;
в) ось симетрії Ox та A(–5, 15).

Завдання 2.10. $\rho = 1/(2-\sin\varphi)$.

Завдання 2.11. *а)* $6x^2-y^2+3z^2-12=0$; *б)* $8y^2+2z^2=x$.

Завдання 2.12. *а)* $5x^2-6z^2=30$, Ox; *б)* $x=3$, $z=-2$, Oy;

МОДУЛЬ 2
Розділ 3. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ

Завдання 3.1.

а) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-x-2}{x^3+1}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-x^2+x-1}{x^3+x-2}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4+2x+1}{x^4-x^3+2x}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3+4x^2-7x}{2x^2+7x-3}$; д) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{4-3x-2x^2}{3x^4+5x}$; е) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{7-x}-\sqrt{7+x}}{\sqrt{7}x}$;

ж) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+1}{2x-1}\right)^{x+2}$; з) $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\dfrac{2x-3}{7x+4}\right)^{x}$; и) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 3x-\sin^2 x}{x^2}$.

Завдання 3.2.

$y=4x^3-\dfrac{3}{x}-\sqrt[5]{x^2}+\dfrac{6}{x^2}$	$y=\sqrt[5]{3x^2+4x-5}+\dfrac{4}{(x-4)^4}$	$y=5^{x^2}\cdot\arccos 2x^5$
$y=\mathrm{ctg}^3\,4x\cdot\mathrm{arctg}\,2x^3$	$y=4(x-7)^6\arcsin 3x^5$	$y=\mathrm{th}^3\,4x\cdot\mathrm{arcctg}\,3x^4$
$y=\dfrac{e^{3x}}{\sqrt{3x^2-4x-7}}$	$y=\dfrac{\mathrm{ctg}^3(2x-3)}{\log_3(x+2)}$	$y=\dfrac{\arcsin 4x^5}{\mathrm{th}^3\,x}$
$y=\dfrac{5\ln(5x+7)}{(x-1)^5}$	$y=\sqrt[5]{\dfrac{x-7}{x+7}}\cos(2x^3+x)$	$y=(\arcsin 5x)^{\mathrm{tg}\sqrt{x}}$
$y=(\mathrm{arctg}\,7x)^{\lg(x+1)}$	$y=\dfrac{\sqrt[3]{(x-1)^7}}{(x+1)^5(x-5)^3}$	$y=x^2\sin x^3$
$y=\dfrac{1}{\sqrt{\ln x}}$	$x^2+2xy+y^2=2x$	$\begin{cases}x=\mathrm{ctg}^2\,t\\ y=\ln^2 t\cdot 5^{3t}\end{cases}$

Завдання 3.3. а) $y=\dfrac{2-4x^2}{1-4x^2}$; б) $y=\ln(x^2-4x+8)$.

Завдання 3.4. $z=x^2+y^2+2x+y-7$, N(2; 4), $\Delta x=-0{,}02$, $\Delta y=0{,}03$.

Завдання 3.5. а) $Z=3\arccos\left(y\sqrt{x+1}\right)$; б) $Z=\dfrac{x+y}{x-2y}$.

Завдання 3.6. $z=\ln(x^2+y^2)$, M(1; 1), $\vec{s}\{1;1\}$.

Завдання 3.7. $z=1-\sqrt{x^2+y^2}$.

Завдання 3.8. $z=2xy-x^2+10$, (D): $0\le y\le 4-x^2$.

Варіант № 13
МОДУЛЬ 1
Розділ 1. ЛІНІЙНА АЛГЕБРА

Завдання 1.1. $A=\begin{pmatrix}-6 & 3 & 9\\ \lambda & -4 & 5\\ -2 & 9 & 10\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4 & -7 & 3\\ 9 & -5 & \mu\\ 7 & 2 & 1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}6\\ 0\\ -1\end{pmatrix}$.

Завдання 1.2. $\begin{vmatrix}4 & -9 & 3 & -2\\ 6 & -8 & 4 & -1\\ 7 & 10 & 5 & 3\\ 8 & -5 & 2 & 8\end{vmatrix}$.

Завдання 1.3. а) $\begin{cases}x_1+3x_2+2x_3=-1\\ x_1-x_2-x_3=-6\\ 2x_1-4x_2+4x_3=8\end{cases}$; б) $\begin{cases}4x_1+x_2+4x_3=19\\ 2x_1-x_2+2x_3=11\\ x_1+x_2+2x_3=8\end{cases}$.

Завдання 1.4. а) $\begin{cases}2x_1+x_2-x_3=0\\ 3x_1-2x_2+4x_3=0\\ x_1-5x_2+3x_3=0\end{cases}$; б) $\begin{cases}x_1+2x_2-5x_3=0\\ x_1-2x_2-4x_3=0\\ 2x_1-9x_3=0\end{cases}$.

Розділ 2. ВЕКТОРНА АЛГЕБРА ТА АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ

Завдання 2.1. $a=-5i+2j-2k$, $b=7i-5k$, $c=2i+3j-2k$.
а) $2a$, $4b$, $-5c$; б) $-3b$, $11c$; в) $8a$, $-6c$; г) a, c; д) $8a$, $-3b$, $11c$.

Завдання 2.2. $a=(6, 1, -3)$, $b=(-3, 2, 1)$, $c=(-1, -3, 4)$, $d=(15, 6, -17)$.

Завдання 2.3. $A_1(-4;2;-3)$, $A_2(6;-7;4)$, $A_3(-7;2;3)$, $A_4(8;9;1)$.

Завдання 2.4. $a=3$, $в=5$, $c=-1$, $d=-1$, $r=2$, $l=-3$.

Завдання 2.5. Координати вершин піраміди $A_1A_2A_3A_4$ див. завд. 2.3.

Завдання 2.6. : A(–5, 2), B(0, –4), C(5, 7).

Завдання 2.7. Дано дві вершини трикутника ABC: A(– 6, 2), B(2, –2) і точка перетину його висот H(1,2). Знайти координати точки M перетину сторони AC і висоти BH.

Завдання 2.8. Скласти рівняння площини, що проходить через дві паралельні прямі $\frac{x-3}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{2}$ та $\frac{x+1}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{2}$.

Завдання 2.9. а) $a=6$, F (–4, 0) б) $b=3$, F (7, 0); в) D: $x=-7$.

Завдання 2.10. $\rho=5(1-\sin 2\varphi)$.

Завдання 2.11. *а)* $-16x^2+y^2+4z^2-32=0$; *б)* $6x^2+y^2-3z^2=0$.

Завдання 2.12. *а)* $z^2=2y$, Oy; *б)* $2x^2+3z^2=6$. Oz.

МОДУЛЬ 2

Розділ 3. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ

Завдання 3.1.

а) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-16}{x^2+x-20}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+1}{2x^2-7x+5}$; в) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{3x^2+2x+9}{2x^2-x+4}$;

г) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{5x^3-3x^2+7}{2x^4+3x^2+1}$; д) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{7-3x^4}{2x^3+3x^2-5}$; е) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$;

ж) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{2-x}{x+1}\right)^{2x-3}$; з) $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\dfrac{x-5}{3x+4}\right)^{2x}$; и) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x+\sin 3x}{x\sin x}$.

Завдання 3.2.

$y=5x^3-\dfrac{8}{x^2}+4\sqrt{x}+\dfrac{1}{x}$	$y=\sqrt[3]{5x^4-2x-1}+\dfrac{8}{(x-5)^2}$	$y=\sin^4 3x\cdot \operatorname{arctg} 2x^3$
$y=e^{-\cos x}\operatorname{arctg} 7x^5$	$y=(x+5)^2\arccos^3 5x$	$y=\operatorname{cth}^4 7x\cdot \arcsin\sqrt{x}$
$y=\dfrac{e^{-\sin 2x}}{(x+5)^4}$	$y=\dfrac{\lg^3 x}{\sin 5x^2}$	$y=\dfrac{\operatorname{arctg}^3(2x+1)}{\operatorname{ch}\sqrt{x}}$
$y=\dfrac{4\log_3(3x+1)}{(x+1)^2}$	$y=\sqrt[6]{\dfrac{x-9}{x+9}}tg(3x^2-4x+1)$	$y=(\arccos 5x)^{\ln x}$
$y=(\log_4(2x+3))^{\arcsin x}$	$y=\dfrac{\sqrt{(x+2)^3}(x-1)^4}{(x+2)^7}$	$y=6^{2x}\cos x$
$y=\dfrac{\sqrt{x}}{\sin 3x}$	$x-y=\operatorname{arctg} y$	$\begin{cases}x=10^{8t^2}\\ y=\sqrt[3]{1+t^4}\cdot\arcsin^2 t\end{cases}$.

Завдання 3.3. а) $y=\dfrac{x^2-x-1}{x^2-2x}$; б) $y=\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

Завдання 3.4. $z = x^3 + 2xy - 10$, N(3; –2), $\Delta x = -0{,}06$, $\Delta y = -0{,}03$.

Завдання 3.5. а) $Z=\dfrac{xy}{x+y}$; б) $Z=\ln tg^3(2x-3y)$.

Завдання 3.6. $z = 13\operatorname{arctg}(xy^3)$, M(3; 1), $\vec{s}\{-5;12\}$.

Завдання 3.7. $z = x^3 + 8y^2 - 6xy + 1$.

Завдання 3.8. $z = 4x^2 - y^2$, (D): $4x^2 + y^2 \le 4$.

Варіант № 14

МОДУЛЬ 1

Розділ 1. ЛІНІЙНА АЛГЕБРА

Завдання 1.1. $A=\begin{pmatrix}-4 & 2 & -3\\ 7 & 8 & 1\\ 9 & -6 & \lambda\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & 8 & 3\\ -8 & \mu & 1\\ -4 & 2 & 8\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}6\\ 3\\ -1\end{pmatrix}$.

Завдання 1.2. $\begin{vmatrix}-7 & 4 & -9 & 1\\ 0 & 8 & -5 & 4\\ -3 & 2 & 6 & 8\\ 10 & -6 & 4 & 1\end{vmatrix}$.

Завдання 1.3. а) $\begin{cases}2x_1+2x_2+x_3=-1\\ 2x_1-3x_2-5x_3=22\\ 3x_1+4x_2+5x_3=-13\end{cases}$; б) $\begin{cases}2x_1-x_2+2x_3=0\\ 4x_1+x_2+4x_3=6\\ x_1+x_2+2x_3=4\end{cases}$.

Завдання 1.4. а) $\begin{cases}4x_1+x_2+3x_3=0\\ 8x_1-x_2+7x_3=0\\ 2x_1+4x_2-5x_3=0\end{cases}$; б) $\begin{cases}x_1-3x_2+5x_3=0\\ x_1+2x_2-3x_3=0\\ 2x_1-x_2+2x_3=0\end{cases}$.

Розділ 2. ВЕКТОРНА АЛГЕБРА ТА АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ

Завдання 2.1. $a=-4i-6j+2k$, $b=2i+3j-k$, $c=-i+5j-3k$.
а) $5a$, $7b$, $2c$; б) $-4b$, $11a$; в) $3a$, $-7c$; г) a, b; д) $3a$, $7b$, $-2c$.

Завдання 2.2. $a=(4, 2, 3)$, $b=(-3, 1, -8)$, $\mathbf{c}=(2, -4, 5)$,
$d=(-12, 14, -31)$.

Завдання 2.3. $A_1(7;-5;2)$, $A_2(-5;2;-12)$, $A_3(13;-2;0)$, $A_4(3;-4;8)$.

Завдання 2.4. $a=-2$, $в=-3$, $c=3$, $d=-1$, $r=1$, $l=-4$.

Завдання 2.5. Координати вершин піраміди $A_1A_2A_3A_4$ див. завд. 2.3.

Завдання 2.6. A(4, –4), B(6, 2), ' C(–1, 8).

Завдання 2.7. Знайти рівняння висот трикутника ABC, що проходять через вершини A та B, якщо A(– 4, 2), B(3, –5), C(5, 0).

Завдання 2.8. Скласти рівняння площини, що проходить через точку A(2; 3; – 4) паралельно двом векторам $a=(4; 1; -1)$
$b=(2; -1; 2)$.

Завдання 2.9. а) $b=7$, F(5,0); б) $a=11$, $\varepsilon=12/11$; в) D: $x=10$.

Завдання 2.10. $\rho=3(2-\cos 2\varphi)$.

Завдання 2.11. *а)* $5x^2-y^2-15z^2+15=0$; *б)* $x^2+3z=0$.

Завдання 2.12. *а)* $y^2=-4z$, Oz; *б)* $3y^2+z^2=6$, Oy.

МОДУЛЬ 2
Розділ 3. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ

Завдання 3.1.

а) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{4x^2+11x-3}{x^2+2x-3}$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{2x^2-9x+10}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-3x^2+10}{7x^3+2x+1}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2-3x+1}{1+2x-x^4}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^4+7x^3-3}{3x^2-5x+1}$; е) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}$;

ж) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{x-3}\right)^{x-5}$; з) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{4x-5}\right)^{2x}$; и) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 5x}{2x^2}$.

Завдання 3.2

$y=\dfrac{9}{x^3}+\sqrt[3]{x^4}-\dfrac{2}{x}+5x^4$	$y=\dfrac{3}{(x+2)^5}-\sqrt[7]{5x-7x^2-3}$	$y=\dfrac{\arccos 4x^3}{sh^4 x}$
$y=(x+1)\arccos 3x^4$	$y=2^{-\sin x}\arcsin^3 2x$	$y=\mathrm{sh}^3 2x\cdot\arcsin 7x^2$
$y=\dfrac{e^{\cos 5x}}{\sqrt{x^2-5x-2}}$	$y=\dfrac{\ln^2(x+1)}{\cos 3x^4}$	$y=\cos^3 4x\cdot\mathrm{arcctg}\sqrt{x}$
$y=\dfrac{7\log_4(2x-5)}{(x-1)^5}$	$y=\sqrt[7]{\dfrac{x-4}{x+4}}\,\mathrm{ctg}(2x+5)$	$y=(\mathrm{arctg}\,2x)^{\sin x}$
$y=(\log_5(3x+2))^{\arccos x}$	$y=\dfrac{\sqrt{(x+2)^3}\,(x-1)^4}{(x+2)^7}$	$y=\arcsin\sqrt{1-3x}$
$y=\sqrt[3]{x^2-1}/\sqrt{x^5}$	$x-y=a\sin y$	$\begin{cases}x=\sqrt{t^2+7t+10}\\ y=e^{7t}\cdot\mathrm{ctg}^3 2t\end{cases}$

Завдання 3.3. а) $y=\dfrac{4x^3+5}{x}$; б) $y=\ln\dfrac{x-1}{x-2}$.

Завдання 3.4. $z = 2x^2y + 3y^2 - 12$, N(–1; 2), $\Delta x = 0{,}05$, $\Delta y = -0{,}04$.

Завдання 3.5. а) $Z=\ln\left(x^2+xy-\sqrt{y}\right)$; б) $Z=\arcsin^2\left(\dfrac{x}{3y}\right)$.

Завдання 3.6. $z = \ln(4x^2 + 5y^2)$, M(1; 1), $\vec{s}\{1;-2\}$.

Завдання 3.7. $z = 4x + 2y - 4x^2 - y^2$.

Завдання 3.8. $z = 5x^2 - 3xy + y^2 + 4$, (D): $x \ge -1$, $y \ge -1$, $x + y \le 1$.

Варіант № 15

МОДУЛЬ 1

Розділ 1. ЛІНІЙНА АЛГЕБРА

Завдання 1.1. $A=\begin{pmatrix}6 & -4 & 2\\ 8 & 1 & -9\\ \lambda & -3 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & -9 & -8\\ 7 & 6 & -1\\ 6 & \mu & 3\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}7\\ -9\\ 3\end{pmatrix}$.

Завдання 1.2. $\begin{vmatrix}4 & -6 & 0 & 8\\ -3 & 5 & 6 & -7\\ 2 & -8 & 1 & -10\\ 7 & 3 & 9 & -2\end{vmatrix}$.

Завдання 1.3. а) $\begin{cases}-2x_1+x_2-2x_3=-7\\ 5x_1+3x_2+5x_3=23\\ -x_1+2x_2-3x_3=-10\end{cases}$; б) $\begin{cases}2x_1-x_2+2x_3=8\\ x_1+x_2+2x_3=11\\ 4x_1+x_2+4x_3=22\end{cases}$.

Завдання 1.4. а) $\begin{cases}x_1+4x_2-3x_3=0\\ 2x_1+5x_2+x_3=0\\ x_1-7x_2+2x_3=0\end{cases}$; б) $\begin{cases}2x_1-x_2+2x_3=0\\ 3x_1+2x_2-3x_3=0\\ 5x_1+x_2-x_3=0\end{cases}$.

Розділ 2. ВЕКТОРНА АЛГЕБРА ТА АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ

Завдання 2.1. $a=-4i+2j-3k$, $b=-3j+5k$, $c=6i+6j-4k$.
а) $5a$, $-b$, $3c$; б) $-7a$, $4c$; в) $3a$, $9b$; г) a, c; д) $3a$, $9b$, $4c$.

Завдання 2.2. $a=(-2, 1, 3)$, $b=(3, -6, 2)$, $c=(-5, -3, -1)$,
$d=(31, -6, 22)$.

Завдання 2.3. $A_1(6;-10;0)$, $A_2(-8;-4;-1)$, $A_3(3;3;3)$, $A_4(1;9;-4)$.

Завдання 2.4. $a=5$, $в=-4$, $c=3$, $d=7$, $r=3$, $l=-1$.

Завдання 2.5. Координати вершин піраміди $A_1A_2A_3A_4$ див. завд. 2.3.

Завдання 2.6. $A(-3, 8)$, $B(-6, 2)$, $C(0, -5)$.

Завдання 2.7. Обчислити координати точки перетину перпендикулярів, проведених через середини сторін трикутника, вершинами якого служать точки $A(2, 3)$, $B(0, -3)$, $C(6,-3)$.

Завдання 2.8. Скласти рівняння площини, що проходить через точки $A(2;-4;8)$ та $B(2; -1; -1)$ перпендикулярно до площини $5x+2y+3z-7=0$.

Завдання 2.9. а) $A(-\sqrt{17/3}, 1/3)$, $B(\sqrt{21/2}, 1/2)$; б) $k=1/2$, $\varepsilon=\sqrt{5}/2$; в) $D: y=-1$.

Завдання 2.10. $\rho = 6\sin 4\varphi$.

Завдання 2.11. *а)* $6x^2+y^2+6z^2-18=0$; *б)* $3x^2+y^2-3z=0$.

Завдання 2.12. *а)* $7x^2-5y^2=35$, Ox; *б)* $x=-1$, $y=-3$, Oz.

МОДУЛЬ 2
Розділ 3. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ

Завдання 3.1.

а) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3x^2-7x-6}{2x^2-7x+3}$; б) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{9x^2+17x-2}{x^2+2x}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+7x-2}{3x^3-x-4}$;

г) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{2x^3+3x^2+5}{3x^2-4x+1}$; д) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{3x+7}{2-3x+4x^2}$; е) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{x+5}-2}{\sqrt{8-x}-3}$;

ж) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-4}{3x+2}\right)^{2x}$; з) $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\dfrac{x-2}{3x+1}\right)^{5x}$; и) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 2x-\cos 4x}{3x^2}$.

Завдання 3.2.

$y=\dfrac{4}{x^5}-\dfrac{9}{x}+\sqrt[5]{x^2}-7x^3$	$y=\sqrt[4]{(x-1)^5}-\dfrac{4}{7x^2-3x+2}$	$y=\operatorname{tg}^3 2x\cdot\arcsin x^5$
$y=2^{\sin x}\operatorname{arcctg} x^4$	$y=(x+2)^7\arccos\sqrt{x}$	$y=\dfrac{\operatorname{cth}^2(x-2)}{\arccos 3x}$
$y=\dfrac{(2x+5)^3}{e^{\operatorname{tg} x}}$	$y=\dfrac{\log_2(7x-5)}{\operatorname{tg}\sqrt{x}}$	$y=\operatorname{th}^5 4x\cdot\arccos 3x^4$
$y=\dfrac{\ln(7x+2)}{(x-6)^4}$	$y=\sqrt[8]{\dfrac{x-2}{x+2}}\sin(4x^2-7x+2)$	$y=(\ln(x+7))^{\operatorname{ctg} 2x}$
$y=(\lg(7x-5))^{\operatorname{arctg} 2x}$	$y=\dfrac{\sqrt[3]{(x-2)^5}(x+3)^2}{(x-7)^3}$	$y=\ln\sin(2x+5)$
$y=\operatorname{arctg}\sqrt{1+4x}$	$\operatorname{ctg}(y/x)=3x^3$	$\begin{cases}x=2^{5t}+\dfrac{1}{t}\\ y=\operatorname{arctg} 8t\cdot e^t\end{cases}$

Завдання 3.3. а) $y=\dfrac{x^3}{x^2+1}$; б) $y=e^{\frac{1}{2-x}}$.

Завдання 3.4. $z = 3x^2 + 2y^2 - xy + 2$, N(–1; 3), $\Delta x = 0{,}02$, $\Delta y = -0{,}03$.

Завдання 3.5. а) $Z=\ln\left(e^{\sqrt{x}}-e^y\right)$; б) $Z=\dfrac{y-2x}{x+y^3}$.

Завдання 3.6. $z = 5x^2 + 6xy$, M(2; 1), $\vec{s}\{1; 2\}$.

Завдання 3.7. $z = xy + \dfrac{50}{x}+\dfrac{20}{y}$.

Завдання 3.8. $z = x^2 + 3xy$, (D): $-1\le x\le 1$, $0\le y\le 1$.

Варіант №16
МОДУЛЬ 1
Розділ 1. ЛІНІЙНА АЛГЕБРА

Завдання 1.1. $A=\begin{pmatrix}7 & -2 & 6\\ 4 & -1 & \lambda\\ 8 & 5 & -3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}9 & -5 & 3\\ 8 & \mu & 1\\ -9 & 4 & 3\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}8\\ 0\\ -3\end{pmatrix}$.

Завдання 1.2. $\begin{vmatrix}5 & -8 & 3 & 9\\ 10 & -3 & -2 & 7\\ 1 & 0 & 9 & 3\\ 2 & 7 & 5 & -6\end{vmatrix}$.

Завдання 1.3. а) $\begin{cases}-3x_1-2x_2+x_3=-10\\ -5x_1+2x_2+x_3=-8\\ -2x_1-2x_2-3x_3=-19\end{cases}$; б) $\begin{cases}2x_1-x_2-3x_3=-9\\ x_1+5x_2+x_3=20\\ 3x_1+4x_2+2x_3=15\end{cases}$.

Завдання 1.4. а) $\begin{cases}x_1-2x_2+x_3=0\\ 3x_1+x_2+2x_3=0\\ 2x_1-3x_2+5x_3=0\end{cases}$; б) $\begin{cases}2x_1-x_2+3x_3=0\\ x_1-3x_2+2x_3=0\\ x_1+2x_2+x_3=0\end{cases}$.

Розділ 2. ВЕКТОРНА АЛГЕБРА ТА АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ

Завдання 2.1. $a = -3i + 8j$, $b = 2i + 3j - 2k$, $c = 8i + 12j - 8k$.
а) $4a$, $-6b$, $5c$; б) $-7a$, $9c$; в) $3b$, $-8c$; г) b, c; д) $4a$, $-6b$, $9c$.

Завдання 2.2. $a = (1, 3, 6)$, $b = (-3, 4, -5)$, $c = (1, -7, 2)$, $d = (-2, 17, 5)$.

Завдання 2.3. $A_1(8;-2;4)$, $A_2(9;-6;6)$, $A_3(2;8;-3)$, $A_4(-5;9;-7)$.

Завдання 2.4. $a=-2$, $в = 6$, $c = 1$, $d = 4$, $r = -1$, $l = 4$.

Завдання 2.5. Координати вершин піраміди $A_1A_2A_3A_4$ див. завд. 2.3.

Завдання 2.6. A(6, –9), B(10, –1), C(–4, 1).

Завдання 2.7. Скласти рівняння висоти проведеної через вершину A трикутника ABC, знаючи рівняння його сторін: AB : $2x - y - 3 = 0$, AC : $x + 5y - 7 = 0$, BC: $3x - 2y + 13 = 0$.

Завдання 2.8. Через точку M(3; –5; 1) провести площину паралельну площині $2x - 3y + 5z - 4 = 0$.

Завдання 2.9. а) $\varepsilon = 3/5$, A(0, 8); б) A($\sqrt{6}$, 0), B($-2\sqrt{2}$, 1); в) D: $y = 9$.

Завдання 2.10. $\rho = 2\cos 6\varphi$.

Завдання 2.11. *а)* $-7x^2+14y^2-z^2+21=0$; *б)* $y^2+2z^2=6x^2$.

Завдання 2.12. *а)* $2x^2=z$, *Oz;* *б)* $x^2+4z^2=4$, *Ox.*

МОДУЛЬ 2
Розділ 3. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ

Завдання 3.1.

а) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{4x^2+7x-2}{3x^2+8x+4}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+x-2}{x^3-x^2-x+1}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{18x^2+5x}{8-3x-9x^2}$;

г) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{6x^2-5x+2}{3x^2-4x+1}$; д) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{2x^3-3x+1}{7x+5}$; е) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x+4}-3}{\sqrt{x-1}-2}$;

ж) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{2x-1}{2x+4}\right)^{3x-1}$; з) $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\dfrac{3x-4}{x+6}\right)^{x-1}$; и) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{arctg}\,2x}{\mathrm{tg}\,3x}$.

Завдання 3.2.

$y=\dfrac{8}{x^3}+\dfrac{3}{x}-4\sqrt{x^3}+2x^7$	$y=\sqrt[5]{(x-2)^6}-\dfrac{3}{7x^3-x^2-4}$	$y=\dfrac{\mathrm{th}^3(2x+2)}{\arcsin 5x}$
$y=3^{-x^3}\,\mathrm{arctg}\,2x^5$	$y=(x-7)^5\arcsin 7x^4$	$y=\mathrm{ch}^2\,5x\cdot\mathrm{arctg}\sqrt{x}$
$y=\dfrac{e^{-\mathrm{tg}\,3x}}{4x^2-3x+5}$	$y=\dfrac{\log_3(4x-2)}{\mathrm{ctg}\,2x}$	$y=\mathrm{ctg}^7\,x\cdot\arccos 2x^3$
$y=\sqrt[9]{\dfrac{x-3}{x+3}}\cos(x^2-3x+2)$	$y=\dfrac{4\lg(3x+7)}{(x+1)^7}$	$y=(\mathrm{ctg}(7x+4))^{\sqrt{x+3}}$
$y=(\ln(5x-4))^{\mathrm{arcctg}\,x}$	$y=\dfrac{\sqrt[4]{x-8}(x+2)^6}{(x-1)^5}$	$y=\sqrt{x^2+1}+\sqrt[3]{x^3+1}$
$y=\dfrac{\ln 3\sin x+\cos x}{3^x}$	$\mathrm{tg}(y/x)=3x$	$\begin{cases}x=28\arcsin^3 t\\ y=\cos^5 t\cdot\sqrt{t^3-7}\end{cases}$

Завдання 3.3. а) $y=x-\sqrt[3]{x^2}$; б) $y=e^{2x-x^2}$.

Завдання 3.4. $z=x^2-y^2+5(x-3)+4(y+1)$, N(3; 5), $\Delta x=0{,}02$, $\Delta y=-0{,}02$.

Завдання 3.5. а) $Z=e^{\frac{x}{y^2}}$; б) $Z=\cos^3\left(x-2\sqrt{y}\right)$.

Завдання 3.6. $z=\arcsin\dfrac{y^2}{x}$, M(2; 1), $\vec{s}\{12;-5\}$.

Завдання 3.7. $z=x^2-2xy+4y^2-4y+1$.

Завдання 3.8. $z=x^2+2xy+2y^2$, (D): $-1\le x\le 1,\quad 0\le y\le 2$.

Варіант №17

МОДУЛЬ 1

Розділ 1. ЛІНІЙНА АЛГЕБРА

Завдання 1.1. $A=\begin{pmatrix}-2 & \lambda & 9\\ -8 & 4 & -3\\ 6 & 2 & 9\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}2 & 6 & 0\\ 1 & -8 & -4\\ 2 & -1 & \mu\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}4\\ 0\\ -6\end{pmatrix}.$

Завдання 1.2. $\begin{vmatrix}-6 & 2 & -8 & 2\\ 7 & 3 & 7 & -10\\ 4 & 8 & 1 & 7\\ -3 & 9 & 0 & 1\end{vmatrix}.$

Завдання 1.3. а) $\begin{cases}5x_1+5x_2+x_3=23\\ -2x_1+x_2+x_3=10\\ 4x_1-3x_2+x_3=-16\end{cases}$; б) $\begin{cases}2x_1-x_2-3x_3=0\\ 3x_1+4x_2+2x_3=1\\ x_1+5x_2+x_3=-3\end{cases}.$

Завдання 1.4. а) $\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3=0\\ 2x_1-x_2-x_3=0\\ 3x_1+3x_2+2x_3=0\end{cases}$; б) $\begin{cases}x_1-3x_2-2x_3=0\\ 3x_1-x_2+4x_3=0\\ 2x_1-2x_2+x_3=0\end{cases}.$

Розділ 2. ВЕКТОРНА АЛГЕБРА ТА АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ

Завдання 2.1. $a = 2i - 4j - 2k$, $b = -9i + 2k$, $c = 3i + 5\mathbf{j} - 7k$.
а) $7a, 5b, -c$; б) $-5a, 4b$; в) $3b, -8c$; г) a, c; д) $7a, 5b, -c$.

Завдання 2.2. $a = (7, 2, 1)$, $b = (5, 1, -2)$, $c = (-3, 4, 5)$, $d = (26, 11, 1)$.

Завдання 2.3. $A_1(0;-3;6)$, $A_2(-8;2;-1)$, $A_3(9;-2;3)$, $A_4(3;9;-1)$.

Завдання 2.4. $a=-3$, $в = -5$, $c = 3$, $d = 3$, $r = 4$, $l = 5$.

Завдання 2.5. Координати вершин піраміди $A_1A_2A_3A_4$ див. завд. 2.3.

Завдання 2.6. A(4, 1), B(–3, –1), C(7, –3).

Завдання 2.7. Дано трикутник з вершинами A (3,1), B(–3,–1) і C(5, –7). Знайти рівняння й обчислити довжину його медіани, проведеної з вершини C.

Завдання 2.8. Скласти рівняння площини, що проходить через точку M(2; 3; –1) і пряму $x = t - 3$, $y = 2t + 5$, $z = -3t + 1$.

Завдання 2.9. а) $2a = 22$, $\varepsilon = 10/11$; б) $k=\sqrt{11}/5$, $2c = 12$;
в) ось симетрії Ox та A(–7, 5).

Завдання 2.10. $\rho = 3/(1 - \cos 2\varphi)$.

Завдання 2.11. *а)* $-3x^2+6y^2-z^2-18=0$; *б)* $x^2-2y=-z^2$.

Завдання 2.12. *а)* $2y^2-5z=10$, Oz; *б)* $y=2$, $z=6$, Ox

МОДУЛЬ 2
Розділ 3. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ

Завдання 3.1.

а) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{5x^2+4x-1}{3x^2+x-2}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x^3-2x^2+5x}{x^3-x^2-x+1}$; в) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{3x^4-6x^2+2}{x^4+4x-3}$;

г) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{11x^3+3x}{2x^2-2x+1}$; д) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{10x-7}{3x^4+2x^3+1}$; е) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{\sqrt{x-3}-2}{\sqrt{x+2}-3}$;

ж) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{2x-4}{2x}\right)^{-3x}$; з) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x-2}{3x+10}\right)^{3x}$; и) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}3x-\sin 3x}{2x^2}$.

Завдання 3.2.

$y=5x^2+\dfrac{4}{x}-\sqrt[3]{x^7}-2x^6$	$y=\dfrac{3}{(x+4)^2}-\sqrt[3]{4+3x-x^4}$	$y=e^{-\sin x}tg7x^6$
$y=3^{\cos x}\arcsin^2 3x$	$y=\ln(x-3)\cdot\arccos 3x^4$	$y=\operatorname{cth}^4 2x\cdot\operatorname{arctg}x^3$
$y=\dfrac{e^{-\sin 4x}}{(2x-5)^6}$	$y=\dfrac{\ln^3(x-5)}{\operatorname{tg}(1/x)}$	$y=\dfrac{\operatorname{cth}^2(3x-1)}{\arccos x^2}$
$y=\dfrac{5\log_2(x^2+1)}{(x-3)^4}$	$y=\sqrt{\dfrac{3x-2}{3x+2}}\operatorname{tg}(2x^2-9)$	$y=(\operatorname{th}\sqrt{x+1})^{\operatorname{arctg}2x}$
$y=(\log_2(6x+5))^{\arcsin 2x}$	$y=\dfrac{\sqrt[5]{x+1}(x-3)^7}{(x+8)^3}$	$y=\operatorname{tg}\ln\dfrac{1}{x}$
$y=4\sqrt[3]{\operatorname{ctg}^2 x}$	$x^3+y^3=3xy$	$\begin{cases} x=\sqrt{\dfrac{t^2-7}{2-t^5}} \\ y=(3t^2-5t-7)\cdot\operatorname{ctg}10t \end{cases}$.

Завдання 3.3. а) $y=\dfrac{x^4}{x^3-1}$; б) $y=\ln(x^2+4x)$.

Завдання 3.4. $z = x^2 + xy^2 + 11$, N(1; –1), Δx = –0,04, Δy = 0,04.

Завдання 3.5. а) $Z=\sqrt{x}\sin\dfrac{y}{x}$; б) $Z=\ln^3(x-y)$.

Завдання 3.6. $z = \ln(xy^2) + 1$, M(1; 1), $\vec{s}\{-3;-4\}$.

Завдання 3.7. $z = e^{\frac{x}{2}}(x + y^2)$.

Завдання 3.8. $z = x^2 + 4y^2 - 2xy + x + 2y$, (D): $x - y \ge 0$, $x + y \le 0$, $x + y + 2 \ge 0$.

Варіант №18
МОДУЛЬ 1
Розділ 1. ЛІНІЙНА АЛГЕБРА

Завдання 1.1. $A=\begin{pmatrix}5 & -1 & -1\\ 2 & 3 & -8\\ 4 & \lambda & -9\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}6 & -8 & 5\\ -1 & 2 & \mu\\ 7 & -3 & 4\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}5\\ 1\\ -6\end{pmatrix}$.

Завдання 1.2. $\begin{vmatrix}8 & 1 & -8 & 3\\ 6 & -5 & 3 & -2\\ 1 & 0 & 9 & 10\\ 5 & -4 & 3 & 1\end{vmatrix}$.

Завдання 1.3. а) $\begin{cases}4x_1-x_2+3x_3=-8\\ x_1-4x_2+4x_3=13\\ 2x_1+5x_2+4x_3=-26\end{cases}$; б) $\begin{cases}-3x_1+5x_2+6x_3=-8\\ 3x_1+x_2+x_3=-4\\ x_1-4x_2-2x_3=-9\end{cases}$.

Завдання 1.4. а) $\begin{cases}3x_1+2x_2=0\\ x_1-x_2+2x_3=0\\ 4x_1-2x_2+5x_3=0\end{cases}$; б) $\begin{cases}5x_1+x_2-2x_3=0\\ 3x_1-x_2+x_3=0\\ 2x_1+2x_2-3x_3=0\end{cases}$.

Розділ 2. ВЕКТОРНА АЛГЕБРА ТА АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ

Завдання 2.1. $a = 9i - 3j + k$, $b = 3i - 15j + 21k$, $c = i - 5j + 7k$.
а) $2a, -7b, 3c$; б) $-6a, 4c$; в) $5b, 7a$; г) b, c; д) $2a, -7b, 4c$.

Завдання 2.2. $a = (3, 5, 4)$, $b = (-2, 7, -5)$, $c = (6, -2, 1)$, $d = (6, -9, 22)$.

Завдання 2.3. $A_1(-3; 5; -6)$, $A_2(11; 0; -5)$, $A_3(7; -8; 9)$, $A_4(2; 3; -8)$.

Завдання 2.4. $a = 3$, $в = 9$, $c = 2$, $d = 8$, $r = -5$, $l = 1$.

Завдання 2.5. Координати вершин піраміди $A_1A_2A_3A_4$ див. завд. 2.3.

Завдання 2.6. A(–4, 2), B(6, –4), C(4, 10).

Завдання 2.7. Скласти рівняння прямої, що проходить через початок координат і точку перетину прямих $2x + 5y - 8 = 0$ і $2x + 3y + 4 = 0$.

Завдання 2.8. Скласти рівняння площини, що проходить через точку A(3; 4; 0) і пряму $\frac{x-2}{1}=\frac{y-3}{2}=\frac{z+1}{2}$.

Завдання 2.9. а) $b = 5$, $\varepsilon = 12/13$; б) $k = 1/3$, $2a = 6$;
в) ось симетрії Oy та A(–9, 6).

Завдання 2.10. $\rho = 2(1 - \cos 3\varphi)$.

Завдання 2.11. *а)* $4x^2 - 6y^2 + 3z^2 = 0$; *б)* $4x^2 - y^2 - 3z^2 = 12$.

Завдання 2.12. *а)* $x^2 = -5y$, Oy; *б)* $2x^2 + 3z = 6$, Oz.

МОДУЛЬ 2
Розділ 3. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ

Завдання 3.1.

а) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-4x-5}{3x^2+2x-2}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{4x^4-5x^2+1}{x^2-1}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^2+4x-5}{4x^2-3x+2}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^2+3x+5}{4x^3-2x^2+1}$; д) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{5x^4-3x^2}{1+2x+3x^2}$; е) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{4x-3}-3}{x^2-9}$;

ж) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+5}{x}\right)^{3x+4}$; з) $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\dfrac{2x-3}{x+4}\right)^{6x+1}$; и) $\lim\limits_{x\to\pi/4}\dfrac{1-\sin 2x}{\pi-4x}$.

Завдання 3.2.

$y=10x^2+3\sqrt{x^5}-\dfrac{4}{x}-\dfrac{5}{x^4}$	$y=\dfrac{2}{(x-1)^3}-\dfrac{8}{6x^2+3x-7}$	$y=e^{\cos x}\,\mathrm{ctg}\,8x^3$
$y=\ln(x-10)\cdot\arccos^2 4x$	$y=\log_2(x-4)\cdot\mathrm{arctg}^3\,4x$	$y=\dfrac{\mathrm{sh}^5\,x}{\arccos 4x}$
$y=\dfrac{3x^2-5x+10}{e^{-x^4}}$	$y=\dfrac{\lg(x+2)}{\sin 2x^5}$	$y=\mathrm{sh}^4\,5x\cdot\arccos 3x^2$
$y=\dfrac{6\log_3(2x+9)}{(x+4)^2}$	$y=\sqrt{\dfrac{2x+3}{2x-3}}\,\mathrm{ctg}(3x^2+5)$	$y=(\mathrm{cth}\,\dfrac{1}{x})^{\arcsin 7x}$
$y=(\lg(4x-3))^{\arccos 4x}$	$y=\dfrac{\sqrt[7]{(x-2)^4}}{(x+1)^2(x-6)^5}$	$y=e^x(x^2-3^x)$
$y=\sqrt[3]{(1+x^2)\ln x}$	$(e^x-1)(e^y-1)=1$	$\begin{cases} x=\ln^5 7t \\ y=\dfrac{t^3-5t^2}{t^7}. \end{cases}$

Завдання 3.3. а) $y=\dfrac{1}{x-9}$; б) $y=x^2-2\ln x$.

Завдання 3.4. $z = 2xy + 3y^2 - 5(x+1)$, N(3; 4), $\Delta x = 0{,}04$, $\Delta y = -0{,}05$.

Завдання 3.5. а) $Z=\dfrac{\sin(x-y)}{x}$; б) $Z=\mathrm{tg}^2\ln\left(\sqrt{x}-y\right)$.

Завдання 3.6. $z = x^3 + 2xy$, M(1; 2), $\vec{s}\{-1; 2\}$.

Завдання 3.7. $z = x^3 + \dfrac{y^3}{27} - xy$.

Завдання 3.8. $z = x^2 + 3y^2 + x - y$, (D): $x\le 0$, $y\le 0$, $y\ge -2$.

Варіант №19
МОДУЛЬ 1
Розділ 1. ЛІНІЙНА АЛГЕБРА

Завдання 1.1. $A=\begin{pmatrix}5 & -1 & 6\\ 3 & -7 & \lambda\\ 9 & 2 & -8\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}7 & -1 & 5\\ 9 & 3 & -7\\ \mu & 9 & -1\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}0\\ 3\\ -7\end{pmatrix}.$

Завдання 1.2. $\begin{vmatrix}1 & 3 & 5 & -7\\ 4 & -6 & 2 & 8\\ -10 & 5 & 2 & 1\\ 0 & 8 & -4 & 9\end{vmatrix}.$

Завдання 1.3. а) $\begin{cases}-3x_1+5x_2+2x_3=-19\\ 2x_1-x_2-5x_3=13\\ -5x_1-3x_2+x_3=7\end{cases}$; б) $\begin{cases}3x_1+x_2+x_3=-4\\ -3x_1+5x_2+6x_3=36\\ x_1-4x_2-2x_3=-19\end{cases}.$

Завдання 1.4. а) $\begin{cases}2x_1-x_2+3x_3=0\\ x_1+2x_2-5x_3=0\\ 3x_1+x_2+x_3=0\end{cases}$; б) $\begin{cases}3x_1+2x_2-3x_3=0\\ 2x_1-3x_2+x_3=0\\ 5x_1-x_2-2x_3=0\end{cases}.$

Розділ 2. ВЕКТОРНА АЛГЕБРА ТА АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ

Завдання 2.1. $a = -2i + 4j - 3k$, $b = 5i + j - 2k$, $c = 7i + 4j - k$.
а) a, $-6b$, $2c$; б) $-8b$, $5c$; в) $-9a$, $7c$; г) a, b; д) a, $-6b$, $5c$.

Завдання 2.2. $a = (5, 3, 2)$, $b = (2, -5, 1)$, $c = (-7, 4, -3)$, $d = (36, 1, 15)$.

Завдання 2.3. $A_1(7;-6;4)$, $A_2(9;2;-5)$, $A_3(7;-2;1)$, $A_4(5;-8;-10)$.

Завдання 2.4. $a=5$, $в=-2$, $c=3$, $d=7$, $r=3$, $l=-2$.

Завдання 2.5. Координати вершин піраміди $A_1A_2A_3A_4$ див. завд. 2.3.

Завдання 2.6. A(3, –1), B(11, 3), C(–6, 2).

Завдання 2.7. Знайти рівняння перпендикулярів до прямої $3x+5y-15=0$, проведених через точки перетину даної прямої з осями координат.

Завдання 2.8. Через пряму $\frac{x+5}{3}=\frac{y-2}{1}=\frac{z}{4}$ провести площину, що паралельна до площини $x + y - z + 15 = 0$.

Завдання 2.9. а) $a = 9$, F (7, 0) б) $b = 6$, F (12, 0); в) D: $x = -1/4$.

Завдання 2.10. $\rho = 3(1 - \cos 4\varphi)$.

Завдання 2.11. *а)* $z=4-x^2-y^2$; *б)* $3x^2+12y^2+4z^2=48$.

Завдання 2.12. *а)* $x^2-9y^2=9$, Ox; *б)* $3y^2=z$, Oz.

МОДУЛЬ 2
Розділ 3. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ

Завдання 3.1.

а) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{7x^2+4x-3}{2x^2+3x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3x^2+5x-1}{x^2-5x+6}$; в) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{8x^4-4x^2+3}{2x^4+1}$;

г) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{6x^3+5x^2-3}{2x^2-x+7}$; д) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{5x+3}{x^3-4x^2-x}$; е) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{5x+1}-4}{x^2+2x-15}$;

ж) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-7}{x+1}\right)^{4x-2}$; з) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x+3}{3x-1}\right)^{2x}$; и) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 4x-\cos^3 4x}{3x^2}$.

Завдання 3.2.

$y=\sqrt{x^5}-\dfrac{3}{x}+\dfrac{4}{x^3}-3x^3$	$y=\sqrt{1+5x-2x^2}+\dfrac{3}{(x-3)^4}$	$y=\cos^5 x\cdot\arccos 4x$
$y=\lg(x-2)\cdot\arcsin^5 x$	$y=(x-7)^4 arcctg^2 7x$	$y=\dfrac{\sqrt{ch^3x}}{arctg5x}$
$y=\dfrac{e^{-x}}{\left(2x^2-x+4\right)^2}$	$y=\dfrac{tg^3 7x}{\ln(3x+2)}$	$y=ch^3 9x\cdot arctg(5x-1)$
$y=\dfrac{3\log_2(5x-4)}{(x-3)^5}$	$y=\sqrt[4]{\dfrac{x+5}{x-5}}\sin(3x^2-x+4)$	$y=(\cos(x+5))^{\arcsin 3x}$
$y=\ln(7x-3))^{arctg5x}$	$y=\dfrac{\sqrt[5]{(x+1)^2}}{(x-3)^4(x-4)^3}$	$y=15\cdot\sqrt[5]{1+x^2}$
$y=\sin(\cos^2 x)$	$y=\sin(x-y)$	$\begin{cases} x=ctg^2 5t \\ y=\dfrac{1}{\sqrt[4]{t}}\cdot 10^{t^3}\end{cases}$.

Завдання 3.3. а) $y=\dfrac{2x^2}{4x^2-1}$; б) $y=x^2e^{-2x}$.

Завдання 3.4. $z = x^2 - 2xy^2 + 3$, N(–2; 1), $\Delta x = 0{,}03$, $\Delta y = -0{,}08$.

Завдання 3.5. а) $Z = arc\,tg\,\dfrac{x}{y}$; б) $Z=\ln^2\cos(x-y)$.

Завдання 3.6. $z = 3x^4 + 2x^2y^3$, M(–1; 2), $\vec{s}\{4;-3\}$.

Завдання 3.7. $z = xy(1-x)(2-y)$.

Завдання 3.8. $z = 4x^2 + (y+1)^2$, (D): $x\ge 1$, $y\ge -1$, $x+y\le 1$.

Варіант №20

МОДУЛЬ 1

Розділ 1. ЛІНІЙНА АЛГЕБРА

Завдання 1.1. $A=\begin{pmatrix}1 & -3 & 5\\ -7 & \lambda & -1\\ 3 & -5 & 7\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & -4 & 6\\ -8 & \mu & 2\\ -4 & 6 & 8\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}0\\ -3\\ 6\end{pmatrix}$.

Завдання 1.2. $\begin{vmatrix}3 & 2 & -8 & 10\\ 2 & -8 & 3 & -1\\ 1 & 2 & -5 & 4\\ 9 & -1 & 0 & 3\end{vmatrix}$.

Завдання 1.3. а) $\begin{cases}x_1+3x_2-5x_3=0\\ 5x_1-4x_2-5x_3=-19\\ x_1-4x_2-3x_3=-7\end{cases}$; б) $\begin{cases}3x_1-x_2+x_3=-11\\ 5x_1+x_2+2x_3=8\\ x_1+2x_2+4x_3=16\end{cases}$.

Завдання 1.4. а) $\begin{cases}3x_1+2x_2-x_3=0\\ 2x_1-x_2+3x_3=0\\ 4x_1+3x_2+4x_3=0\end{cases}$; б) $\begin{cases}4x_1-x_2+5x_3=0\\ 2x_1-3x_2+2x_3=0\\ 2x_1+2x_2+3x_3=0\end{cases}$.

Розділ 2. ВЕКТОРНА АЛГЕБРА ТА АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ

Завдання 2.1. $a=-9i+4j-5k$, $b=i-2j+4k$, $c=-5i+10j-20k$.
а) $-2a$, $7b$, $5c$; б) $-6b$, $7c$; в) $9a$, $4c$; г) b, c; д) $-2a$, $7b$, $4c$.

Завдання 2.2. $a=(11, 1, 2)$, $b=(-3, 3, 4)$, $c=(-4, -2, 7)$,
$d=(-5, 11, -15)$.

Завдання 2.3. $A_1(-2;8;6)$, $A_2(3;-3;9)$, $A_3(1;-10;4)$, $A_4(7;-5;-2)$.

Завдання 2.4. $a=2$, $в=1$, $c=-3$, $d=-5$, $r=4$, $l=-2$.

Завдання 2.5. Координати вершин піраміди $A_1A_2A_3A_4$ див. завд. 2.3.

Завдання 2.6. $A(-7, -2)$, $B(-7, 4)$, $C(5, -5)$.

Завдання 2.7. Задані рівняння сторін чотирикутника: $x-y=0$, $x+3y=0$, $x-y-4=0$, $3x+y-12=0$. Знайти рівняння його діагоналей.

Завдання 2.8. Скласти рівняння площини, що проходить від начала координат на відстані 6 одиниць та відсікає на осях координат відрізки зв'язані співвідношенням: a:b:c = 1:3:2.

Завдання 2.9. а) $b=5$, $F(-10,0)$; б) $a=9$, $\varepsilon=4/3$; в) D: $x=12$.

Завдання 2.10. $\rho=5(2-\sin\varphi)$.

Завдання 2.11. *а)* $4x^2+5y^2-10z^2=60$; *б)* $7y^2+z^2=14x^2$.

Завдання 2.12. *а)* $x^2+2z=4$, Oz; *б)* $x=3$, $z=-1$, Oy.

МОДУЛЬ 2
Розділ 3. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ

Завдання 3.1.

а) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{3x^2-3x+2}{x^2-x-12}$; б) $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{x^2-x-30}{x^3+125}$; в) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{3x^2-4x+2}{6x^2+5x+1}$;

г) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{3x^2+4x-7}{x^4-2x^3+1}$; д) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{3x^4+5x}{2x^2-3x-7}$; е) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2-\sqrt{x^2+4}}{3x^2}$;

ж) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x+2}{x}\right)^{3-2x}$; з) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{6x+5}{x-10}\right)^{5x}$; и) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin 2x}-\dfrac{1}{\operatorname{tg} 2x}\right)$.

Завдання 3.2.

$y=9x^3+\dfrac{5}{x}-\dfrac{7}{x^4}+\sqrt[3]{x^7}$	$y=\sqrt[3]{5+4x-x^2}-\dfrac{5}{(x+1)^3}$	$y=\dfrac{\operatorname{th}^2(x+3)}{\operatorname{arcctg}\sqrt{x}}$
$y=\log_3(x+1)\cdot\operatorname{arctg}^5 7x$	$y=\sqrt[3]{x-3}\arccos^4 2x$	$y=\sin^3 7x\cdot\operatorname{arcctg}5x^2$
$y=\dfrac{e^{4x}}{(3x+5)^3}$	$y=\dfrac{\operatorname{ctg}\sqrt{x-2}}{\lg(3x+5)}$	$y=\operatorname{ch}^3 9x\cdot\operatorname{arctg}(5x-1)$
$y=\dfrac{7\log_5(x^2+x)}{(x+3)^3}$	$y=\sqrt[5]{\dfrac{x-6}{x+6}}\cos(7x+2)$	$y=(\sqrt{x+5})^{\arccos 3x}$
$y=(\log_5(2x+5))^{\operatorname{arctg}x}$	$y=\dfrac{\sqrt{x^2+2x-3}}{(x+3)^7(x-4)^2}$	$y=\arcsin\dfrac{1}{x}$
$y=\dfrac{\sin^2 x}{\sin x^2}$	$y\sin x=\cos(x+y)$	$\begin{cases} x=\ln\dfrac{t^3}{3} \\ y=\dfrac{\sqrt{t^2-2}}{5}\cdot\sin 3t^2 \end{cases}.$

Завдання 3.3. а) $y=\dfrac{1-2x}{x^2-x-2}$; б) $y=xe^{2x-1}$.

Завдання 3.4. $z = xy + 2y^2 - 2(x -)$, N(1; 2), $\Delta x = -0{,}03$, $\Delta y = 0{,}03$.

Завдання 3.5. а) $Z=y\sqrt{\dfrac{y}{x}}$; б) $Z=x\cdot\arcsin\dfrac{x}{y}$.

Завдання 3.6. $z = x^2 - y^2$, M(1; 1), $\vec{s}\left\{\sqrt{3};1\right\}$.

Завдання 3.7. $z = (x-1)^2 + y^2 - 3$.

Завдання 3.8. $z = 3 - 2x^2 - xy - y^2$, (D): $x\le 1$, $y\ge 0$, $y\le x$.

Варіант №21

МОДУЛЬ 1

Розділ 1. ЛІНІЙНА АЛГЕБРА

Завдання 1.1. $A=\begin{pmatrix}-6 & \lambda & -4\\ 8 & 7 & 2\\ -1 & -5 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}7 & 3 & -1\\ 2 & -3 & -4\\ 6 & \mu & 8\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}4\\ 7\\ -1\end{pmatrix}$.

Завдання 1.2. $\begin{vmatrix}3 & -4 & 5 & 8\\ -1 & 1 & 2 & -7\\ 0 & 8 & 10 & 5\\ -4 & 6 & 8 & -1\end{vmatrix}$.

Завдання 1.3. а) $\begin{cases}2x_1-5x_2+x_3=11\\ -2x_1+4x_2+x_3=-2\\ 5x_1-2x_2+5x_3=27\end{cases}$; б) $\begin{cases}3x_1-x_2+x_3=9\\ 5x_1+x_2+2x_3=11\\ x_1+2x_2+4x_3=19\end{cases}$.

Завдання 1.4. а) $\begin{cases}x_1-3x_2-4x_3=0\\ 5x_1-8x_2-2x_3=0\\ 2x_1+x_2-x_3=0\end{cases}$; б) $\begin{cases}x_1+5x_2+x_3=0\\ 2x_1-3x_2-7x_3=0\\ 3x_1+2x_2-6x_3=0\end{cases}$.

Розділ 2. ВЕКТОРНА АЛГЕБРА ТА АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ

Завдання 2.1. $a = 2i - 7j + 5k$, $b = -i + 2j - 6k$, $c = 3i + 2j - 4k$.
а) $-3a$, $6b$, $-c$; б) $5b$, $3c$; в) $7a$, $-4b$; г) b, c; д) $7a$, $-4b$, $3c$.

Завдання 2.2. $a = (9, 5, 3)$, $b = (-3, 2, 1)$, $c = (4, -7, 4)$, $d = (-10, -13, 8)$.

Завдання 2.3. $A_1(-1;-6;2)$, $A_2(3;7;-8)$, $A_3(1;-12;13)$, $A_4(6;2;1)$.

Завдання 2.4. $a=1$, $в=-1$, $c=1$, $d=1$, $r=4$, $l=-5$.

Завдання 2.5. Координати вершин піраміди $A_1A_2A_3A_4$ див. завд. 2.3.

Завдання 2.6. A(–1, –4), B(9, 6), C(–5, 4).

Завдання 2.7. Скласти рівняння медіани CM і висоти CK трикутника ABC, якщо A(4, 6), B(– 4, 0), C(– 1, –4).

Завдання 2.8. Скласти рівняння площини, що проходить через точку M(2; –2; 4) перпендикулярно до площин $3x - 2y + z + 7 = 0$ та $5x - 4y + 3z + 1 = 0$.

Завдання 2.9. а) $A(0,-2)$, $B(\sqrt{15/2},1)$; б) $k = 2\sqrt{10}/9$, $\varepsilon = 11/9$; в) D: $y = 5$.

Завдання 2.10. $\rho = 3\sin 4\varphi$.

Завдання 2.11. *а)* $9x^2-6y^2-6z^2+1=0$; *б)* $15y=10x^2+6y^2$.

Завдання 2.12. *а)* $15x^2-3y^2=1$, Ox; *б)* $x=3$, $y=4$, Oz.

МОДУЛЬ 2
Розділ 3. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ

Завдання 3.1.

а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2-9x+10}{x^2+3x-10}$; б) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2+3x-28}{x^3-64}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^3+4x}{x^3-3x+2}$;

г) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{8x^5-4x^3+3}{2x^3+x-7}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-5x+3}{3x^4-2x^2+x}$; е) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+4}-2}{\sqrt{x^2+16}-4}$;

ж) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2-3x}{5-3x}\right)^x$; з) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{3x+7}{x+4}\right)^{4x}$; и) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos^2 x-\cos^2 2x}{x^2}$.

Завдання 3.2.

$y=3\sqrt{x}+\dfrac{4}{x^5}+\sqrt[3]{x^2}-\dfrac{7}{x}$	$y=\sqrt[4]{5x^2-4x+1}-\dfrac{7}{(x-5)^2}$	$y=\dfrac{\operatorname{arcctg}^3 x}{\operatorname{sh}(2x-5)}$
$y=\ln(x+9)\cdot\operatorname{arcctg}^3 2x$	$y=(x-3)^5\arccos 3x^6$	$y=\sin^2 3x\cdot\operatorname{arcctg}3x^5$
$y=\dfrac{(2x-3)^7}{e^{-2x}}$	$y=\dfrac{\cos^2 x}{\lg(x^2-2x+1)}$	$y=\operatorname{cth}^3 4x\cdot\arcsin(3x+1)$
$y=\dfrac{2\ln(3x-10)}{(x+5)^7}$	$y=\sqrt[7]{\dfrac{x-8}{x+8}}\arccos(3x-5)$	$y=(\operatorname{tg}3x^4)^{\sqrt{x+3}}$
$y=(\cos(3x+8))^{\operatorname{th}(x-7)}$	$y=\dfrac{(x+4)^3(x-2)^4}{\sqrt[3]{(x-2)^5}}$	$y=x\cdot\sqrt{(1+x^3)\cdot\dfrac{1}{x}}$
$y=e^x(1+\operatorname{ctg}\dfrac{x}{2})$	$x-y=-\operatorname{arctg}y$	$\begin{cases}x=7^{\sqrt{t}}\\ y=\ln\dfrac{1}{\sqrt{t}}\cdot(t^3-10t+1)\end{cases}$.

Завдання 3.3. а) $y=\dfrac{x^2-1}{x^2+2}$; б) $y=\ln(x^2+2x+2)$.

Завдання 3.4. $z = x^2 + 2xy + y^2 + 4$, N(1; 1), $\Delta x = 0{,}02$, $\Delta y = 0{,}02$.

Завдання 3.5. а) $Z=\sin^2(y-ax)$; б) $Z=\operatorname{arcctg}\dfrac{y}{x}$.

Завдання 3.6. $z = \ln(5x^2 + 3y^2)$, M(1; 1), $\vec{s}\{3;2\}$.

Завдання 3.7. $z = 2(x + y) - x^2 - y^2$.

Завдання 3.8. $z = 9x^2 + 6xy$, (D): $-\dfrac{1}{3}\le x\le\dfrac{1}{3}$, $0\le y\le\dfrac{3}{2}$.

Варіант № 22
МОДУЛЬ 1
Розділ 1. ЛІНІЙНА АЛГЕБРА

Завдання 1.1. $A=\begin{pmatrix}7 & 2 & -5\\ 1 & -3 & 8\\ 10 & -6 & \lambda\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & -3 & \mu\\ 5 & -9 & 4\\ 0 & 6 & -7\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}4\\ 8\\ -1\end{pmatrix}$.

Завдання 1.2. $\begin{vmatrix}3 & -2 & 1 & 5\\ -8 & 6 & -6 & 4\\ 2 & -9 & 2 & 5\\ 1 & 0 & -1 & 4\end{vmatrix}$.

Завдання 1.3. а) $\begin{cases}2x_1+2x_2+4x_3=4\\ -2x_1-3x_2-4x_3=-9\\ x_1+2x_2-2x_3=15\end{cases}$; б) $\begin{cases}2x_1+3x_2+x_3=4\\ 2x_1+x_2+3x_3=0\\ 3x_1+2x_2+x_3=1\end{cases}$.

Завдання 1.4. а) $\begin{cases}3x_1+5x_2x_3=0\\ 2x_1+4x_2-3x_3=0\\ x_1-3x_2+x_3=0\end{cases}$; б) $\begin{cases}3x_1+4x_2-x_3=0\\ x_1-5x_2+2x_3=0\\ 4x_1-x_2+x_3=0\end{cases}$.

Розділ 2. ВЕКТОРНА АЛГЕБРА ТА АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ

Завдання 2.1. $a = 7i - 4j - 5k$, $b = i - 11j + 3k$, $c = 5i + 5j + 3k$.
а) $3a$, $-7b$, $2c$; б) $2b$, $6c$; в) $-4a$, $-5c$; г) a, c; д) $-4a$, $2b$, $6c$.

Завдання 2.2. $a = (7, 2, 1)$, $b = (3, -5, 6)$, $c = (-4, 3, -4)$, $d = (-1, 18, -16)$.

Завдання 2.3. $A_1(-1;-5;6)$, $A_2(2;8;-1)$, $A_3(-4;2;-9)$, $A_4(10;2;-2)$.

Завдання 2.4. $a = 1$, $в = -5$, $c = 1$, $d = 3$, $r = -3$, $l = -3$.

Завдання 2.5. Координати вершин піраміди $A_1A_2A_3A_4$ див. завд. 2.3.

Завдання 2.6. A(10, –2), B(4, –5), C(–3, 1).

Завдання 2.7. Записати рівняння прямої, що проходить через точку A(– 2, 3) і складає з віссю Ox кут: а) 45°, б) 90°, в) 0°.

Завдання 2.8. З точки M(2; 4 ; –5) на координатні вісі проведено перпендикуляри. Знайти рівняння площини, що проходить через їх основи.

Завдання 2.9. а) $\varepsilon = 2/3$, A(–6, 0); б) A($\sqrt{8}$, 0), B($\sqrt{20}/3$, 2); в) D: $y = 1$.

Завдання 2.10. $\rho = 2\cos 4\varphi$.

Завдання 2.11. *а)* $x^2=5(y^2+z^2)$; *б)* $2x^2+3y^2-z^2=36$.

Завдання 2.12. *а)* $y^2=5z$, Oz; *б)* $3x^2+7y^2=21$, Ox.

МОДУЛЬ 2
Розділ 3. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ

Завдання 3.1.

а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{4x^2+x-5}{x^2-2x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to 1/2}\dfrac{8x^3-1}{x^2-1/4}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+4x-x^4}{x+3x^2+2x^4}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-7x+1}{x^3+4x^2-3}$; д) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^5-x^3}{4x^2+3x-6}$; е) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{\sqrt{5-x}-\sqrt{5+x}}$;

ж) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1-x}{2-x}\right)^{3x}$; з) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{4x+5}\right)^{3x}$; и) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 5x}{x^2-x}$.

Завдання 3.2.

$y=\sqrt{x^3}+\dfrac{2}{x}-\dfrac{4}{x^5}-5x^3$	$y=\sqrt[5]{3-7x+x^2}-\dfrac{4}{(x-7)^5}$	$y=\cos\sqrt[5]{x}\cdot\operatorname{arctg}x^4$
$y=\lg(x+2)\cdot\arcsin^2 3x$	$y=\sqrt[3]{x-4}\arcsin^4 5x$	$y=\operatorname{th}^4 x\cdot\operatorname{arcctg}\dfrac{1}{x}$
$y=\dfrac{e^{\operatorname{ctg}5x}}{(3x-5)^4}$	$y=\dfrac{\operatorname{tg}(3x-5)}{\ln^2(x+3)}$	$y=\dfrac{\arcsin^2 3x}{\operatorname{ch}(x-5)}$
$y=\dfrac{\log_7(2x^2+5)}{(x-4)^2}$	$y=\sqrt[6]{\dfrac{x-7}{x+7}}\arcsin(2x+3)$	$y=(\sin 4x)^{\operatorname{arctg}1/x}$
$y=(\sin(8x-7))^{\operatorname{cth}(x+3)}$	$y=\dfrac{\sqrt[3]{(x-2)^4}}{(x-5)(x+1)^7}$	$y=\operatorname{arctg}\sqrt{1+4x}$
$y=\ln\sin(2x+5)$	$\operatorname{tg}(y/x)=3x$	$\begin{cases} x=\dfrac{1}{t^5-t} \\ y=\dfrac{\ln^2 t}{t} \end{cases}$.

Завдання 3.3. а) $y=\dfrac{2x-1}{(x-1)^2}$; б) $y=x^3e^{-x}$.

Завдання 3.4. $z = 2xy-y^3+x-3$, N(–1; –1), $\Delta x=-0{,}02$, $\Delta y=-0{,}03$.

Завдання 3.5. а) $Z=e^{-\cos(ax+y)}$; б) $Z=\dfrac{x}{\left(x^2-y^2\right)^4}$.

Завдання 3.6. $z = 3x^2y^2+5xy^2$, M(1; 1), $\vec{s}\{2;1\}$.

Завдання 3.7. $z = 27x^3+y^3-9xy$.

Завдання 3.8. $z = x^2+2y^2+1$, (D): $x\ge 0, y\ge 0,$ $x+y\le 3$.

Варіант №23
МОДУЛЬ 1
Розділ 1. ЛІНІЙНА АЛГЕБРА

Завдання 1.1. $A = \begin{pmatrix} \lambda & -8 & 5 \\ -1 & 3 & 7 \\ 4 & -6 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ -8 & -9 & 10 \\ 0 & 4 & \mu \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Завдання 1.2. $\begin{vmatrix} 5 & -7 & 3 & 0 \\ 4 & -1 & 8 & 5 \\ 10 & 4 & -6 & -8 \\ 3 & -1 & 6 & 2 \end{vmatrix}$.

Завдання 1.3. а) $\begin{cases} -3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = -25 \\ 4x_1 - 4x_2 + 3x_3 = -20 \\ -4x_1 + x_2 - x_3 = 3 \end{cases}$; б) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 12 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 16 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \end{cases}$.

Завдання 1.4. а) $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0 \\ 4x_1 + x_2 - 4x_3 = 0 \end{cases}$; б) $\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 0 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$.

Розділ 2. ВЕКТОРНА АЛГЕБРА ТА АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ

Завдання 2.1. $a = 4i - 6j - 2k$, $b = -2i + 3j + k$, $c = 3i - 5j + 7k$.
а) $6a$, $3b$, $8c$; б) $-7b$, $6a$; в) $-5a$, $4c$; г) a, b; д) $-5a$, $3b$, $4c$.

Завдання 2.2. $a = (1, 2, 3)$, $b = (-5, 3, -1)$, $c = (-6, 4, 5)$, $d = (-4, 11, 20)$.

Завдання 2.3. $A_1(-10;6;0)$, $A_2(4;8;-6)$, $A_3(2;9;11)$, $A_4(1;3;-1)$.

Завдання 2.4. $a = 3$, $в = 7$, $c = -4$, $d = -4$, $r = 1$, $l = -5$.

Завдання 2.5. Координати вершин піраміди $A_1A_2A_3A_4$ див. завд. 2.3.

Завдання 2.6. A(–3, –1), B(–4, –5), C(8, 1).

Завдання 2.7. Яку ординату має точка C, що лежить на одній прямій із точками A(– 6, –6) і B(– 3, –1) і має абсцису, рівну 3?

Завдання 2.8. Скласти рівняння площини, що проходить через точку K(1; –4; 6) і перпендикулярна вектору $a = 4i + 3j + 2k$.

Завдання 2.9. а) $2a = 50$, $\varepsilon = 3/5$; б) $k = \sqrt{29}/14$, $2c = 30$;
в) ось симетрії Oy та A(4, 1).

Завдання 2.10. $\rho = 4(1 + \cos 2\varphi)$.

Завдання 2.11. *а)* $4x^2 + 3y^2 = 12x$; *б)* $3x^2 - 4y^2 - 2z^2 + 12 = 0$

Завдання 2.12. *а)* $15y^2 - x^2 = 6$, Oy; *б)* $y = 5$, $z = 2$, Oy.

МОДУЛЬ 2
Розділ 3. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ

Завдання 3.1.

а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{-5x^2+11x-2}{3x^2-x-10}$; б) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2+3x-28}{x^2-4x}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+7x^2-2}{6x^3-4x+3}$;

г) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{5x^4-2x^3+3}{2x^2+3x-7}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x+1}{x^3-5x^2+4x}$; е) $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{\sqrt{2x+7}-5}{3-\sqrt{x}}$;

ж) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x-1}{4x+1}\right)^{2x}$; з) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{5x-7}{x+6}\right)^{2x}$; и) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^2 2x}{x\arcsin x}$.

Завдання 3.2.

$y=7x^2+\dfrac{3}{x}-\sqrt[5]{x^4}+\dfrac{8}{x^3}$	$y=\sqrt{(x-3)^7}+\dfrac{9}{7x^2-5x-8}$	$y=\mathrm{tg}^6\,2x\cdot\cos 7x^2$
$y=4^{-\sin x}\,\mathrm{arctg}\,3x$	$y=\sqrt{(x+3)^5}\arcsin 2x^3$	$y=\mathrm{ch}^2\,5x\cdot\mathrm{arctg}\,x^4$
$y=\dfrac{(3x+1)^4}{e^{4x}}$	$y=\dfrac{\arccos^3 5x}{\mathrm{th}(x-2)}$	$y=\dfrac{\sqrt{\arccos 3x}}{\mathrm{sh}^2\,x}$
$y=\dfrac{8\lg(4x+5)}{(x-1)^5}$	$y=\sqrt[8]{\dfrac{x-4}{x+4}}\,\mathrm{arctg}(5x+1)$	$y=(\mathrm{ctg}\,2x^3)^{\sin\sqrt{x}}$
$y=(\mathrm{tg}(9x+2))^{\mathrm{ch}(2x-1)}$	$y=\dfrac{(x-1)^6(x+2)}{\sqrt[5]{(x+3)^2}}$	$y=\mathrm{ctg}\,3x-x\cos\pi$
$y=\dfrac{1}{\sqrt{x+\sqrt{x}}}$	$\ln y=\mathrm{arctg}\,\dfrac{x}{y}$	$\begin{cases}x=\mathrm{arctg}(t^3+7t)\\ y=\dfrac{\mathrm{ctg}\,7t}{e^{2t}}\end{cases}$.

Завдання 3.3. а) $y=\dfrac{x^3}{x^2+2x+3}$; б) $y=x+\ln(x^2-1)$.

Завдання 3.4. $z = x^3 - 2xy + y^2 + 1$, N(1; –1), $\Delta x = -0{,}04$, $\Delta y = 0{,}02$.

Завдання 3.5. а) $Z=xe^{y/x}$; б) $Z=\ln\left(x^2+(y+1)^2\right)$.

Завдання 3.6. $z = \mathrm{arctg}(xy^2)$, M(2; 3), $\vec{s}\{4;-3\}$.

Завдання 3.7. $z = e^{-x^2-y^2}(4x^2+y^2)$.

Завдання 3.8. $z = x^2 + y^2 - 12x + 16y$, (D): $x\ge 0,\ y\ge 0,\ x+y-2\le 0$.

Варіант №24

МОДУЛЬ 1

Розділ 1. ЛІНІЙНА АЛГЕБРА

Завдання 1.1. $A=\begin{pmatrix}-4 & 2 & 1\\ 9 & 7 & \lambda\\ -4 & 8 & -3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & -8 & 4\\ -1 & \mu & 5\\ 9 & -6 & 2\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}4\\ -8\\ 1\end{pmatrix}$.

Завдання 1.2. $\begin{vmatrix}5 & 9 & -4 & -3\\ 2 & 1 & -1 & 5\\ 8 & -9 & 3 & -6\\ 2 & 0 & 5 & 7\end{vmatrix}$.

Завдання 1.3. а) $\begin{cases}-2x_1-5x_2+x_3=20\\ -5x_1+x_2+3x_3=-4\\ 4x_1+2x_2-3x_3=-8\end{cases}$; б) $\begin{cases}x_1-2x_2+3x_3=14\\ 2x_1+3x_2-4x_3=-16\\ 3x_1-2x_2-5x_3=-8\end{cases}$.

Завдання 1.4. а) $\begin{cases}7x_1+x_2-3x_3=0\\ 3x_1-2x_2+3x_3=0\\ x_1-x_2+2x_3=0\end{cases}$; б) $\begin{cases}7x_1-6x_2-x_3=0\\ 3x_1-3x_2+4x_3=0\\ 4x_1-3x_2-5x_3=0\end{cases}$.

Розділ 2. ВЕКТОРНА АЛГЕБРА ТА АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ

Завдання 2.1. $a = 3i - j + 2k$, $b= -i + 5j - 4k$, $c = 6i - 2j+ 4k$.
а) $4a$, $-7b$, $-2c$; б) $6a$, $-4c$; в) $-2a$, $5b$; г) a, c; д) $6a$, $-7b$, $-2c$.

Завдання 2.2. $a = (-2, 5, 1)$, $b = (3, 2, -7)$, $c = (4, -3, 2)$, $d = (-4, 22, -13)$.

Завдання 2.3. $A_1(3;-4;4)$, $A_2(5;-7;-1)$, $A_3(8;12;0)$, $A_4(3;-9;6)$.

Завдання 2.4. $a =1$, $в = -3$, $c = 1$, $d = 2$, $r =-4$, $l =4$.

Завдання 2.5. Координати вершин піраміди $A_1A_2A_3A_4$ див. завд. 2.3.

Завдання 2.6. A(–2, –6), B(–3, 5), ' C(4, 0).

Завдання 2.7. Через точку перетину прямих $2x - 5y - 1 = 0$ і $x + 4y - 7 = 0$ провести пряму, що ділить відрізок між точками A(4, –3) і B(–1, 2) у відношенні $\lambda= 2/3$.

Завдання 2.8. Знайти довжину перпендикуляра, опущеного з точки M(–2; 3; –5) на площину $x + 2y + 5z -1 = 0$.

Завдання 2.9. а) $b = 2\sqrt{15}$, $\varepsilon =7/8$; б) $k = 5/6$, $2a =12$;
в) ось симетрії Oy та A(-2, $3\sqrt{2}$).

Завдання 2.10. $\rho = 1/(2 - \cos 2\varphi)$.

Завдання 2.11. *а)* $8x^2-y^2-2z^2-32=0$; *б)* $y-4z^2=3x^2$.

Завдання 2.12. *а)* $5z=-x$, Oz; *б)* $3y^2+18z^2=1$, Oy.

МОДУЛЬ 2
Розділ 3. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ

Завдання 3.1.

а) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{x^2-5x-14}{2x^2-9x-35}$; б) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{3x^2+11x+10}{x^2-5x+14}$; в) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{14x^2+3x}{7x^2+2x+1}$;

г) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{8x^3+x^2-7}{2x^2-5x+3}$; д) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{2-x-3x^2}{x^3-16}$; е) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2-\sqrt{x}}{\sqrt{6x+1}-5}$;

ж) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{3x+4}{3x}\right)^{-2x}$; з) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{3-4x}{2-x}\right)^{6x}$; и) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{x\sin x}$.

Завдання 3.2

$y=8x^3-\dfrac{4}{x}-\dfrac{7}{x^4}+\sqrt[7]{x^2}$	$y=\sqrt[3]{(x-8)^4}-\dfrac{2}{1+3x-4x^2}$	$y=\dfrac{tg^2(x-2)}{\lg(x+3)}$
$y=2^{\cos x}\operatorname{arcctg}^3 x$	$y=\sqrt[3]{(x+1)^2}\arccos 3x$	$y=\operatorname{th}^4 7x\cdot\arccos x^3$
$y=\dfrac{5x^2+4x-2}{e^{-x}}$	$y=\dfrac{\arcsin^2 4x}{\operatorname{th}(5x-3)}$	$y=\operatorname{ctg}^3 4x\cdot\arcsin\sqrt{x}$
$y=\dfrac{2\log_3(4x-7)}{(x+3)^4}$	$y=\sqrt[9]{\dfrac{x-1}{x+1}}\operatorname{arcctg}(7x+2)$	$y=(\operatorname{tg}7x^5)^{\sqrt{x+2}}$
$y=(\operatorname{ctg}(7x+5))^{\operatorname{sh}3x}$	$y=\dfrac{(x-1)^4(x-7)^2}{\sqrt[3]{(x+2)^5}}$	$y=(3-x)\cos 4x$
$y=\ln\cos(5x)$	$(x^3-y^3)=3xy$	$\begin{cases}x=e^{-3t^3}\\ y=\dfrac{t^2}{2\ln^2 t}\end{cases}$.

Завдання 3.3. а) $y=\dfrac{3x^2-7x-16}{x^2-x-6}$; б) $y=\ln(1+x^2)$.

Завдання 3.4. $z=\dfrac{1}{3}x^3+x^2-3y^2-3$, N(1; 1), $\Delta x=0{,}01$, $\Delta y=-0{,}01$.

Завдання 3.5. а) $Z=\ln\left(x+e^{-y}\right)$; б) $Z=e^{-\sin(y-3x)}$.

Завдання 3.6. $z=2x^2+y^2x-4y$, M(2; 2), $\vec{s}\{6;-8\}$.

Завдання 3.7. $z=2\sqrt{x^2+y^2}-1$.

Завдання 3.8. $z=x^2+y^2-9xy+27$, (D): $0\le x\le 3$, $0\le y\le 3$.

Варіант №25

МОДУЛЬ 1

Розділ 1. ЛІНІЙНА АЛГЕБРА

Завдання 1.1. $A=\begin{pmatrix}4 & 6 & -5\\ 6 & -7 & 3\\ 9 & \lambda & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-2 & 1 & -6\\ 9 & 3 & 8\\ \mu & 0 & 3\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}-4\\ 3\\ 8\end{pmatrix}$.

Завдання 1.2. $\begin{vmatrix}4 & -7 & 5 & -8\\ 3 & 7 & 1 & 0\\ -5 & -8 & 2 & 9\\ -3 & 6 & 1 & 1\end{vmatrix}$.

Завдання 1.3. а) $\begin{cases}4x_1-5x_2+x_3=-3\\ x_1+x_2-5x_3=-6\\ -4x_1+2x_2+x_3=5\end{cases}$; б) $\begin{cases}3x_1+4x_2-2x_3=11\\ 2x_1-x_2-x_3=4\\ 3x_1-2x_2+4x_3=11\end{cases}$.

Завдання 1.4. а) $\begin{cases}x_1+2x_2-4x_3=0\\ 2x_1-x_2-3x_3=0\\ x_1+3x_2+x_3=0\end{cases}$; б) $\begin{cases}5x_1-3x_2+2x_3=0\\ 2x_1+4x_2-3x_3=0\\ 3x_1-7x_2+5x_3=0\end{cases}$.

Розділ 2. ВЕКТОРНА АЛГЕБРА ТА АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ

Завдання 2.1. $a=-3i-j-5k$, $b=2i-4j+8k$, $c=3i+7j-k$.
а) $2a$, –b, $3c$; б) $-9a$, $4c$; в) $5b$, $-6c$; г) b, c; д) $2a$, $5b$, $-6c$.

Завдання 2.2. $a=(3, 1, 2)$, $b=(-4, 3, -1)$, $c=(2, 3, 4)$, $d=(14, 14, 20)$.

Завдання 2.3. $A_1(-1;-8;6)$, $A_2(4;-6;5)$, $A_3(3;7;10)$, $A_4(2;4;-9)$.

Завдання 2.4. $a=2$, $в=7$, $c=4$, $d=-2$, $r=-3$, $l=-4$.

Завдання 2.5. Координати вершин піраміди $A_1A_2A_3A_4$ див. завд. 2.3.

Завдання 2.6. A(–7, –2), B(3, –8), C(– 4, 6).

Завдання 2.7. Відомі рівняння двох сторін ромба $2x-5y-1=0$ і $2x-5y-34=0$ і рівняння однієї з його діагоналей $x+3y-6=0$. Знайти рівняння другої діагоналі.

Завдання 2.8. Скласти рівняння площини, що проходить через лінію перетину площин $x+2y+5z-1=0$ та $3x+3y-z+4=0$ та через точку К(–3; 2 4).

Завдання 2.9. а) $a=13$, F (–5, 0) б) $b=44$, F (–7, 0); в) D: $x=-3/8$.

Завдання 2.10. $\rho=4(1-\sin\varphi)$.

Завдання 2.11. *а)* $x^2-6y^2+z^2-12=0$; *б)* $x-3z^2=9y^2$.

Завдання 2.12. *а)* $3x^2-8y^2=288$, *Ox*; *б)* $x=5$, $z=-3$, *Oy*.

МОДУЛЬ 2

Розділ 3. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ

Завдання 3.1.

а) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{3x^2-6x-45}{2x^2-3x-35}$; б) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-4}{3x^2+x-10}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-2x^2+5x^4}{2+3x^2+x^4}$;

г) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{3x^4+2x^2-8}{8x^3-4x+5}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2-10x+7}{2x^3-3x}$; е) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3-27}{\sqrt{3x}-x}$;

ж) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-1}{2x+4}\right)^{-x}$; з) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1-2x}{3-x}\right)^{-x}$; и) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 5x-\cos x}{4x^2}$.

Завдання 3.2.

$y=8x-\dfrac{5}{x^4}+\dfrac{1}{x}-\sqrt[5]{x^4}$	$y=\dfrac{3}{4x-3x^2+1}-\sqrt{(x+1)^5}$	$y=\operatorname{ctg}\dfrac{1}{x}\cdot\arccos x^4$
$y=\lg(x-3)\cdot\arcsin^2 5x$	$y=\operatorname{tg}^3 x\cdot\operatorname{arcctg}3x$	$y=\operatorname{cth}4x^5\cdot\arccos 2x$
$y=\dfrac{\sqrt{5x^2-x+1}}{e^{3x}}$	$y=\dfrac{ch^2(4x+2)}{\operatorname{arcctg}x^3}$	$y=\dfrac{\cos^4(7x-1)}{\lg(2x+5)}$
$y=\dfrac{3\log_4(2x+9)}{(x-7)^2}$	$y=\sqrt{\dfrac{7x-4}{7x+4}}\arcsin(x^2+1)$	$y=(\arccos x)^{\sqrt{\cos x}}$
$y=(\operatorname{sh}(3x-7))^{\cos(x+4)}$	$y=\dfrac{\sqrt[3]{x-3}(x+7)^5}{(x-4)^2}$	$y=x^{-3}\arcsin\sqrt{\ln x}$
$y=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	$(e^x+1)(e^y+1)=2$	$\begin{cases}x=e^{5t}+\cos 8y\\ y=\operatorname{arcctg}t^2\cdot\dfrac{1}{\sqrt[3]{t}}\end{cases}$

Завдання 3.3. а) $y=\dfrac{x^3-8}{2x^2}$; б) $y=x^2e^{-x}$.

Завдання 3.4. $z=\dfrac{1}{2}x^2-xy+\dfrac{1}{3}y^3+4$, N(1; –1), $\Delta x=-0{,}02$, $\Delta y=0{,}01$.

Завдання 3.5. а) $Z=\cos y+(y-x)\sin y$; б) $Z=\dfrac{xy}{x-y}$.

Завдання 3.6. $z=\ln(x^3-y^3)$, M(2; 1), $\vec{s}\{3;-4\}$.

Завдання 3.7. $z=(2x-x^2)(2y-y^2)$.

Завдання 3.8. $z=y^2+4xy$, (D): $0\le x\le 1$, $-1\le y\le 1$.

Варіант №26

МОДУЛЬ 1

Розділ 1. ЛІНІЙНА АЛГЕБРА

Завдання 1.1. $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & \lambda\\ 4 & 3 & -3\\ 2 & -6 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-5 & 2 & 3\\ \mu & 8 & -2\\ 0 & 1 & 7\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1\\ 3\\ -3\end{pmatrix}$.

Завдання 1.2. $\begin{vmatrix}1 & -4 & 7 & 8\\ 3 & 5 & 2 & -9\\ -1 & 0 & 5 & 6\\ -3 & 6 & -4 & 2\end{vmatrix}$.

Завдання 1.3. а) $\begin{cases}x_1+5x_2-6x_3=-15\\ 3x_1+x_2+4x_3=13\\ 2x_1-3x_2+x_3=9\end{cases}$; б) $\begin{cases}5x_1-x_2-2x_3=1\\ 3x_1-4x_2+x_3=7\\ 2x_1+3x_2-3x_3=4\end{cases}$.

Завдання 1.4. а) $\begin{cases}7x_1-6x_2+x_3=0\\ 4x_1+5x_2=0\\ x_1-2x_2+3x_3=0\end{cases}$; б) $\begin{cases}x_1-8x_2+7x_3=0\\ 3x_1+5x_2-4x_3=0\\ 4x_1-3x_2+3x_3=0\end{cases}$.

Розділ 2. ВЕКТОРНА АЛГЕБРА ТА АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ

Завдання 2.1. $a=-3i-j+7k$, $b=i-5k$, $c=6i+4j-k$.
а) $-2a$, b, $7c$; б) $5a$, $-2c$; в) $3b$, c; г) a, c; д) $-2a$, $3b$, $7c$.

Завдання 2.2. $a=(3,-1,2)$, $b=(-2,4,1)$, $c=(4,-5,-1)$, $d=(-5,11,1)$.

Завдання 2.3. $A_1(1;3;-6)$, $A_2(5;-7;2)$, $A_3(0;2;-55)$, $A_4(6;3;-1)$.

Завдання 2.4. $a=5$, $в=-2$, $c=4$, $d=7$, $r=4$, $l=-22$.

Завдання 2.5. Координати вершин піраміди $A_1A_2A_3A_4$ див. завд. 2.3.

Завдання 2.6. A(3, –4), B(5, –7), C(–4, 7).

Завдання 2.7. Відомі рівняння двох сторін ромба $2x-5y-1=0$ та $2x-5y-34=0$ та рівняння однієї з його діагоналей $x+3y-6=0$. Знайти рівняння другої діагоналі.

Завдання 2.8. Скласти загальне рівняння площини, що проходить точку A(3; –4; 1) паралельно координатній площині Oxz.

Завдання 2.9. а) $b=7$, F(13,0); б) $b=4$, F(–11,0); в) D: $x=13$.

Завдання 2.10. $\rho=3(1+\cos 2\varphi)$.

Завдання 2.11. *а)* $2x^2-3y^2-5z^2+30=0$; *б)* $2x^2+3z=0$

Завдання 2.12. *а)* $2y^2=72$, Oz; *б)* $6y^2+5z^2=30$; Oy.

МОДУЛЬ 2
Розділ 3. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ

Завдання 3.1

а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-12x+20}$; б) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{2x^2+11x+15}{3x^2+5x-12}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3-5x^2+2}{2x^3+5x^2-x}$;

г) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{x^5-2x+4}{2x^4+3x^2+1}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+3x-5}{7x^3-2x^2+1}$; е) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+x-12}{\sqrt{x-2}-\sqrt{4-x}}$;

ж) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+4}{x+8}\right)^{-3x}$; з) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{5x+7}\right)^{x+1}$; и) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 8x}{3x^2}$.

Завдання 3.2.

$y=\sqrt[4]{x^3}-\dfrac{5}{x^4}+\dfrac{4}{x}+3x$	$y=\dfrac{3}{x-4}+\sqrt[6]{(2x^2-3x+1)^5}$	$y=\dfrac{\arcsin^2 3x}{\sqrt{\operatorname{th} x}}$
$y=\log_2(x+3)\cdot\arccos^2 x$	$y=\sqrt{(x-2)^3}\,\operatorname{arctg} 3x$	$y=\operatorname{cth}3x\cdot\arcsin^4 2x$
$y=\dfrac{e^{-x^2}}{(2x-5)^7}$	$y-\dfrac{\log_2(3x+7)}{\operatorname{tg} 3x}$	$y=\operatorname{tg}\sqrt{x}\cdot\operatorname{arcctg} 3x^5$
$y=\dfrac{\lg(x^2+2x)}{(x+8)^4}$	$y=\sqrt[3]{\dfrac{8x-3}{8x+3}}\arccos(x^2-5)$	$y=(\operatorname{ctg}7x)^{\operatorname{sh}(x+3)}$
$y=(\operatorname{ch}(2x-3))^{\operatorname{tg}(x+5)}$	$y=\dfrac{\sqrt{x+10}(x-8)^3}{(x-1)^5}$	$y=e^{-x}\cdot\sin 3x$
$y=\operatorname{tg}x-\dfrac{1}{3}\operatorname{ctg}^7 3x$	$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$	$\begin{cases}x=\ln(7t^2+2t)\\ y=\dfrac{1+t}{\sqrt{1-t^2}}\end{cases}$.

Завдання 3.3 а) $y=\left(\dfrac{x-1}{x}\right)^2$; б) $y=xe^{-x^2}$.

Завдання 3.4. $z = x^3 + 5xy^2 + 7x$, N(2; –1), Δx = 0,01, Δy= –0,01.

Завдання 3.5. а) $Z=e^{xy}$; б) $Z=3\operatorname{arc\,tg}^2\left(\dfrac{y}{x}\right)$.

Завдання 3.6. $z = 4x^3 + 2x^3y^2$, M(–1; 2), $\vec{s}\{4;-3\}$.

Завдання 3.7. $z = xy^2(1- x - y)$.

Завдання 3.8. $z = 10 + 2xy - x^2$, (D): $0\le y\le 4-x^2$.

Варіант № 27

МОДУЛЬ 1

Розділ 1. ЛІНІЙНА АЛГЕБРА

Завдання 1.1. $A=\begin{pmatrix} 7 & 2 & 6 \\ -3 & -1 & \lambda \\ 8 & 5 & 8 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} \mu & 5 & 3 \\ -7 & 2 & 1 \\ -9 & 4 & 3 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Завдання 1.2. $\begin{vmatrix} -1 & 8 & -2 & 1 \\ 9 & 3 & -2 & 7 \\ 1 & 9 & 0 & 3 \\ 2 & -7 & 5 & -6 \end{vmatrix}$.

Завдання 1.3. а) $\begin{cases} 4x_1 - x_2 = -6 \\ 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 = -14 \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -19 \end{cases}$; б) $\begin{cases} 2x_1 + 8x_2 - 7x_3 = 0 \\ 2x_1 - 5x_2 + 6x_3 = 1 \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 = 7 \end{cases}$.

Завдання 1.4. а) $\begin{cases} 5x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 0 \\ 3x_2 - 2x_3 = 0 \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases}$; б) $\begin{cases} 5x_1 + 8x_2 - 5x_3 = 0 \\ 7x_1 + 5x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases}$.

Розділ 2. ВЕКТОРНА АЛГЕБРА ТА АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ

Завдання 2.1. $a = -3i - j + 5k$, $b = 2i - 4j + 6k$, $c = i - 2j + 3k$.
а) – $3a$, $4b$, $-5c$; б) $6b$, $3c$; в) a, $4c$;г) b, c; д) $-3a$, $4b$, $5c$.

Завдання 2.2. $a = (4, 5, 1)$, $b = (1, 3, 1)$, $c = (-3, -6, 7)$, $d = (19, 33, 0)$.

Завдання 2.3. $A_1(6; 2; -4)$, $A_2(0; -6; 6)$, $A_3(5 ;-8;-3)$, $A_4(-5;9;-7)$.

Завдання 2.4. $a =-4$, $в = 5$, $c = 2$, $d =- 4$, $r = 3$, $l =4$.

Завдання 2.5. Координати вершин піраміди $A_1A_2A_3A_4$ див. завд. 2.3.

Завдання 2.6. A(7, –8), B(5, 4), C(–3, –9).

Завдання 2.7. Знайти точку E перетину медіан трикутника, вершинами якого є точки A (–3, 1), B(7, 5) та C(5, –3).

Завдання 2.8. Скласти рівняння площини, що проходить через середину відрізка AB перпендикулярно до цього відрізку, якщо A(–1; 4; 7), B (2;–3; 5).

Завдання 2.9. а) A(–3, 0), B($1, \sqrt{40}/3$); б) $k=\sqrt{2/3}$, $\varepsilon = \sqrt{15}/3$; в) D: $y =-3$.

Завдання 2.10. $\rho = 3\cos 2\varphi$.

Завдання 2.11. *а)* $7x^2+2y^2+6z^2 - 42=0$; *б)* $2x^2+4y^2-5z=0$.

Завдання 2.12. *а)* $5x^2-2y^2=35$, Ox; *б)* $x=2$, $y= -4$, Oz.

МОДУЛЬ 2
Розділ 3. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ

Завдання 3.1.

а) $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{x^2-2x-35}{2x^2+11x+5}$; б) $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{2x^2-11x-6}{3x^2-20x+12}$; в) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{4-5x^2-3x^5}{x^5+6x+8}$;

г) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{7x^3-2x+4}{2x^2+x-5}$; д) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{2x-13}{x^7-3x^5-4}$; е) $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{\sqrt{x+20}-4}{x^3+64}$;

ж) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{1+2x}{3+2x}\right)^{-x}$; з) $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\dfrac{3x-1}{2x+5}\right)^{3x}$; и) $\lim\limits_{x\to \pi/2}\dfrac{1-\sin x}{(\pi/2-x)^2}$.

Завдання 3.2.

$y=4x^3+\dfrac{3}{x}-\sqrt[3]{x^5}-\dfrac{2}{x^4}$	$y=\dfrac{4}{(x-7)^3}-\sqrt[3]{(3x^2-x+1)^4}$	$y=\dfrac{\operatorname{arctg}^2 5x}{\sqrt[3]{\operatorname{cth} x}}$
$y=2^{-x}\operatorname{arctg}^3 4x$	$y=\sqrt[5]{(x+4)^2}\arcsin 7x^2$	$y=\operatorname{th}^5 3x\cdot\operatorname{arcctg}\sqrt{x}$
$y=\dfrac{e^{\cos 3x}}{(2x+4)^5}$	$y=\dfrac{\ln^3 x}{\operatorname{ctg}(x-3)}$	$y=\operatorname{tg}^3 2x\cdot\arccos 2x^3$
$y=\dfrac{3\ln(x^2+5)}{(x-7)^3}$	$y=\sqrt[4]{\dfrac{2x-5}{2x+5}}\operatorname{arctg}(3x+2)$	$y=(\operatorname{sh} 5x)^{\operatorname{arctg}(x+2)}$
$y=(\operatorname{th}(7x-5))^{\sin(x+2)}$	$y=\dfrac{\sqrt[5]{(x-2)^3}\,(x-1)}{(x+3)^4}$	$y=x\sqrt{\arcsin x}$
$y=\dfrac{1}{2}\ln(1+x)-\dfrac{1}{2(1+x)}$	$y^2x=e^{\frac{y}{x}}$	$\begin{cases} x=\sqrt[3]{(1-t)^2} \\ y=\dfrac{\cos 6t}{\sqrt{3t+t^3}} \end{cases}$.

Завдання 3.3. а) $y=\dfrac{x^4}{x^3-1}$; б) $y=\ln(x^2+4x)$;

Завдання 3.4. $z = xy^3 + 2x^2 + 3y$, N(1; –1), $\Delta x = -0{,}02$, $\Delta y = 0{,}04$.

Завдання 3.5. а) $Z=\ln\left(x^2+y^2-2x+1\right)$; б) $Z=e^{x^2-y}$.

Завдання 3.6. $z = \ln(x^2 y + 6x)$, M(1; 1), $\bar{s}\{3; 2\}$.

Завдання 3.7. $z = x^3 + y^3 - 15xy$.

Завдання 3.8. $z = x^2 + 2xy - y^2 + 4x$, (D): $x \le 0, y \le 0$, $x + y + 2 \ge 0$.

Варіант №28
МОДУЛЬ 1
Розділ 1. ЛІНІЙНА АЛГЕБРА

Завдання 1.1. $A=\begin{pmatrix} 5 & -4 & 6 \\ -8 & -3 & \lambda \\ -9 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 7 & -5 & 1 \\ -2 & \mu & 4 \\ 6 & -8 & -2 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 8 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Завдання 1.2. $\begin{vmatrix} -8 & -4 & 5 & -4 \\ 1 & 1 & -2 & -7 \\ -3 & 0 & 10 & -5 \\ 4 & 6 & 1 & -1 \end{vmatrix}$.

Завдання 1.3. а) $\begin{cases} 5x_1+2x_2-4x_3=-16 \\ x_1+3x_3=-6 \\ 2x_1-3x_2+x_3=9 \end{cases}$; б) $\begin{cases} 3x_1+4x_2+x_3=2 \\ x_1+5x_2-3x_3=4 \\ 2x_1-x_2+4x_3=5 \end{cases}$.

Завдання 1.4. а) $\begin{cases} 6x_1+5x_2-4x_3=0 \\ x_1+x_2-x_3=0 \\ 3x_1+4x_2+3x_3=0 \end{cases}$; б) $\begin{cases} 5x_1+x_2-6x_3=0 \\ 4x_1+3x_2-7x_3=0 \\ x_1-2x_2+x_3=0 \end{cases}$.

Розділ 2. ВЕКТОРНА АЛГЕБРА ТА АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ

Завдання 2.1. $a = 4\boldsymbol{i} - 5j - 4k$, $b = 5i - 2j$, $c = 2i + 4j - 3k$.
а) a, $7b$, $-2c$; б) $-5a$, $4b$; в) $8c$, $-3a$; г) a, c; д) $-3a$, $4b$, $8c$.

Завдання 2.2. $a = (1, -3, 1)$, $b = (-2, -4, 3)$, $c = (0, -2, 3)$,
$d = (-8, -10, 13)$.

Завдання 2.3. $A_1(1;-6;-2)$, $A_2(5; 4; -7)$, $A_3(1;-2;9)$, $A_4(6;-2;1)$.

Завдання 2.4. $a = 5$, $в = -4$, $c = -1$, $d = 2$, $r = -4$, $l = -5$.

Завдання 2.5. Координати вершин піраміди $A_1A_2A_3A_4$ див. завд. 2.3.

Завдання 2.6. $A(7, -5)$, $B(-9, 6)$, $C(-3, 0)$.

Завдання 2.7. Записати рівняння прямих, що проходять через точку $A(-1,1)$ під кутом 45° до прямої $2x + 3y = 6$.

Завдання 2.8. Знайти величини відрізків, які відсікає на осях координат площина, що проходить через точку $A(2; -3; 3)$ паралельно площині $3x + y - 3z = 0$.

Завдання 2.9. а) $\varepsilon = 5/6$, $A(0, -\sqrt{11})$;б) $A(\sqrt{32/3}, 1)$, $B(\sqrt{8}, 0)$; в) D: $y = -3$.

Завдання 2.10. $\rho = 2\sin 3\varphi$.

Завдання 2.11. *а)* $-4x^2+12y^2-3z^2+24=0$; *б)* $2y^2+6z^2=3x$.

Завдання 2.12. *а)* $3x^2 = -2z$, Oz; *б)* $8x^2+11z^2=88$, Ox.

МОДУЛЬ 2
Розділ 3. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ

Завдання 3.1.

а) $\lim\limits_{x\to -8}\dfrac{2x^2+15x-8}{3x^2+25x+8}$; б) $\lim\limits_{x\to -6}\dfrac{x^2+2x-24}{2x^3+15x+18}$; в) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{5x^3-7x^2+3}{2+2x-x^3}$;

г) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{4x^3+5x^2-3x}{3x^2+x-10}$; д) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{2x^2-3x+1}{x^3+2x^2+5}$; е) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^2-2}{\sqrt{8+x}-3}$;

ж) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{3x}{3x+2}\right)^{x-2}$; з) $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\dfrac{1-x}{2-10x}\right)^{5x}$; и)

$\lim\limits_{x\to\pi/2}(\pi/2-x)\,\mathrm{tg}\,x$.

Завдання 3.2

$y=4x^5-\dfrac{5}{x}-\sqrt{x^3}+\dfrac{2}{x^3}$	$y=\sqrt{(x-4)^7}-\dfrac{10}{3x^2-5x+1}$	$y=2^{\mathrm{tg}\,x}\,\mathrm{arctg}^5\,3x$
$y=\ln(x-4)\cdot\mathrm{arcctg}^4\,3x$	$y=\arcsin^3 4x\cdot\mathrm{ctg}\,3x$	$y=\mathrm{sh}^4\,3x\cdot\arccos 5x^4$
$y=\dfrac{e^{\sin 5x}}{(3x-2)^2}$	$y=\dfrac{\mathrm{tg}^4\,5x}{\ln(xs+7)}$	$y=\dfrac{\mathrm{arctg}^2\,5x}{\mathrm{th}(x+3)}$
$y=\dfrac{4\log_2(3x-5)}{(x-2)^2}$	$y=\sqrt[5]{\dfrac{3x-4}{3x+4}}\,\mathrm{arcctg}(2x+5)$	$y=(\mathrm{arctg}\,x)^{\mathrm{th}(3x+1)}$
$y=(\mathrm{ch}(3x+2))^{\cos(x+4)}$	$y=\dfrac{\sqrt[4]{(x+1)^3}\,(x-2)^5}{(x-3)^2}$	$y=x^2\sin x^3$;
$y=\dfrac{1}{\sqrt{\ln x}}$;	$x^2+2xy+y^2=2x$;	$\begin{cases}x=\sqrt[4]{(1-t)^3}\\ y=t\cdot e^{-7t^2}\end{cases}$.

Завдання 3.3. а) $y=x-\sqrt[3]{x^2}$; б) $y=e^{2x-x^2}$.

Завдання 3.4. $z = x^2y-3y^2+4x$, N(–1; 1), $\Delta x = 0{,}04$, $\Delta y = -0{,}02$.

Завдання 3.5. а) $Z=\dfrac{y^2}{3x}+\arcsin(xy)$; б) $Z=x^3+xy^2-5\sqrt{x}$.

Завдання 3.6. $z = \mathrm{arctg}(x^2y^2)$, M(2; 3), $\vec{s}\{4;-3\}$.

Завдання 3.7. $z = 4-(x^2+y^2)^{\frac{2}{3}}$.

Завдання 3.8. $z = xy$, (D): $x^2+y^2\le 4$.

Варіант №29

МОДУЛЬ 1

Розділ 1. ЛІНІЙНА АЛГЕБРА

Завдання 1.1. $A=\begin{pmatrix} 4 & -2 & -5 \\ -6 & 7 & 3 \\ \lambda & -8 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -6 \\ -6 & -3 & 4 \\ \mu & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} -5 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}$.

Завдання 1.2. $\begin{vmatrix} 7 & -1 & 5 & -8 \\ 5 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & -8 & 2 & -4 \\ -3 & 6 & 9 & 1 \end{vmatrix}$.

Завдання 1.3. а) $\begin{cases} x_1+4x_2-x_3=-9 \\ 4x_1-x_2+5x_3=-2 \\ 3x_2-7x_3=-6 \end{cases}$; б) $\begin{cases} 2x_1-3x_2+2x_3=5 \\ 3x_1+4x_2-7x_3=2 \\ 5x_1+x_2-5x_3=9 \end{cases}$.

Завдання 1.4. а) $\begin{cases} 8x_1+x_2-3x_3=0 \\ x_1+5x_2+x_3=0 \\ 4x_1-7x_2+2x_3=0 \end{cases}$; б) $\begin{cases} 2x_1-x_2+4x_3=0 \\ 7x_1-5x_2+3x_3=0 \\ 5x_1-4x_2-x_3=0 \end{cases}$.

Розділ 2. ВЕКТОРНА АЛГЕБРА ТА АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ

Завдання 2.1. $a=-9i+4k$, $b=2i-4j+6k$, $c=3i-6j+9k$.
а) $3a$, $-5b$, $4c$; б) $6b$, $2c$; в) $2a$, $8c$; г) b, c; д) $3a$, $6b$, $-c$.

Завдання 2.2. $a=(5, 7, -2)$, $b=(-3, 1, 3)$, $c=(1, -4, 6)$, $d=(14, 9, -1)$.

Завдання 2.3. $A_1(-1;8;-5)$, $A_2(-4;6;5)$, $A_3(2;-7;9)$, $A_4(2;-4;-9)$.

Завдання 2.4. $a=3$, $в=-4$, $c=5$, $d=2$, $r=3$, $l=-1$.

Завдання 2.5. Координати вершин піраміди $A_1A_2A_3A_4$ див. завд. 2.3.

Завдання 2.6. A(7, 2), B(–3, –8), C(–4, 8).

Завдання 2.7. Задано рівняння висот трикутника ABC $2x-3y+1=0$, $x+2y+1=0$ і координати його вершини A(2, 3) Знайти рівняння сторін AB та AC трикутника.

Завдання 2.8. Довести, що пряма $\frac{x+1}{2}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-3}{3}$ паралельна площині $2x\ y-z=0$, а пряма $\frac{x-2}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z-4}{3}$ лежить в цій площині.

Завдання 2.9. а) $2a=30$, $\varepsilon=17/15$; б) $k=\sqrt{17}/8$, $2c=18$;
в) вісь симетрії Oy та A(4, –10) .

Завдання 2.10. $\rho=2/(2-\cos\varphi)$.

Завдання 2.11. *а)* $3x^2-9y^2+z^2-27=0$; *б)* $z^2-2y=-4x^2$.

Завдання 2.12. *а)* $5y^2-8z^2=40$, Oz; *б)* $y=3$, $z=1$, Ox.

МОДУЛЬ 2
Розділ 3. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ

Завдання 3.1.

а) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{3x^2-2x-40}{x^2-3x-4}$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-2x-4}{x^2-11x+18}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3-2x+1}{2x^3+3x^2+2}$;

г) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^2+10x-11}{3x^4-2x+5}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-81}{3x^2+4x+2}$; е) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{9+x}-3}{x^2+x}$;

ж) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{x-1}\right)^{3-2x}$; з) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3+x}{9x-4}\right)^{2x}$; и) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{7x}{\sin x+\sin 7x}$.

Завдання 3.2.

$y=\dfrac{7}{x}+\dfrac{4}{x^3}-\sqrt[5]{x^3}-2x^6$	$y=\dfrac{7}{(x+2)^5}-\sqrt{8-5x+2x^2}$	$y=\dfrac{\sqrt{sh^3x}}{\operatorname{arcctg}5x}$
$y=\lg(x+3)\cdot\operatorname{arcctg}^2 5x$	$y=e^{-\cos x}\arcsin 2x$	$y=\sin^5 3x\cdot\operatorname{arctg}\sqrt{x}$
$y=\dfrac{\sqrt{x^2-3x-7}}{e^{-x^3}}$	$y=\dfrac{\log_3(x+4)}{\cos^5 x}$	$y=\operatorname{cth}^2 4x\cdot\arcsin x^3$
$y=\dfrac{2\ln(2x^2+3)}{(x-7)^4}$	$y=\sqrt[6]{\dfrac{x^2-1}{x^2+1}}\arcsin 2x$	$y=(\operatorname{cth}\sqrt{x})^{\sin(x+3)}$
$y=(\ln(7x+4))^{\operatorname{tg}x}$	$y=\dfrac{\sqrt[6]{(x-1)^5}}{(x+2)^4(x-5)^7}$	$y=2^x e^{-x}$
$y=\arcsin\dfrac{1}{\sqrt{x^3}}$	$\sqrt{x}-\sqrt{y}=\sqrt{a}$	$\begin{cases}x=\operatorname{arctg}(21t+e^{-t})\\ y=(7t-5)^7\cdot\sqrt{\ln t}\end{cases}$.

Завдання 3.3. а) $y=\dfrac{x^2-x-1}{x^2-2x}$; б) $y=\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

Завдання 3.4. $z = 4x^3 + 5xy^2 - 7x$, N(–3; 1), $\Delta x = 0{,}03$, $\Delta y = -0{,}02$.

Завдання 3.5. а) $Z=\dfrac{y}{\left(x^2+y^2\right)^5}$; б) $Z=\cos^2\left(x\sqrt{y}\right)$.

Завдання 3.6. $z = 2x^3 + 5y^2x - 7y$, M(2; 2), $\vec{s}\{6;-8\}$.

Завдання 3.7. $z = x^2 + xy + y^2 + \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$.

Завдання 3.8. $z = x^2 + y^2$, (D): $(x-\sqrt{2})^2+(y-\sqrt{2})^2\le 9$.

Варіант № 30
МОДУЛЬ 1
Розділ 1. ЛІНІЙНА АЛГЕБРА

Завдання 1.1. $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 3\\ 5 & \lambda & 2\\ 8 & 2 & -9\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}7 & 0 & 5\\ \mu & 3 & -7\\ 2 & 9 & 1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}-1\\ 3\\ -6\end{pmatrix}$.

Завдання 1.2. $\begin{vmatrix}1 & 0 & 5 & -7\\ 4 & -6 & -2 & 5\\ -1 & -3 & 4 & 1\\ 0 & 8 & -4 & 9\end{vmatrix}$.

Завдання 1.3. а) $\begin{cases}7x_1+4x_2-x_3=13\\ 3x_1+2x_2+3x_3=3\\ 2x_1-3x_2+x_3=-10\end{cases}$; б) $\begin{cases}4x_1-9x_2+5x_3=1\\ 7x_1-4x_2+x_3=11\\ 3x_1+5x_2-4x_3=5\end{cases}$.

Завдання 1.4. а) $\begin{cases}x_1+7x_2-3x_3=0\\ 3x_1-5x_2+x_3=0\\ 3x_1+4x_2-2x_3=0\end{cases}$; б) $\begin{cases}2x_1+2x_2-x_3=0\\ 5x_1+4x_2-6x_3=0\\ 3x_1+2x_2-5x_3=0\end{cases}$.

Розділ 2. ВЕКТОРНА АЛГЕБРА ТА АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ

Завдання 2.1. $a = 5i - 6j - 4k$, $b = 4i + 8j - 7k$, $c = 3j - 4k$.
а) $5a, 3b, -4c$; б) $4b, a$; в) $7a, -2c$; г) a, b; д) $5a, 4b, -2c$.

Завдання 2.2. $a = (-1, 4, 3)$, $b = (3, 2, -4)$, $c = (-2, -7, 1)$, $d = (6, 20, -3)$.

Завдання 2.3. $A_1(-5;6;4)$, $A_2(8;-2;5)$, $A_3(-7;-3;2)$, $A_4(-5;7;-1)$.

Завдання 2.4. $a=-3$, $в = 2$, $c = 4$, $d = -4$ $r = 8$, $l=-5$.

Завдання 2.5. Координати вершин піраміди $A_1A_2A_3A_4$ див. завд. 2.3.

Завдання 2.6. A(3, –5), B(–8, 3), C(0, 7).

Завдання 2.7. Задано рівняння двох сторін паралелограма $x - 2y = 0$, $x - y - 1 = 0$ та точка перетину його діагоналей M(3, –1) Знайти рівняння двох інших сторін.

Завдання 2.8. Довести, що пряма $\frac{x}{6}=\frac{y-3}{8}=\frac{z-1}{-9}$ паралельна площині $x+3y-2z-1=0$, а пряма $x = t+7$, $y = t-2$, $z = 2t+1$ лежить в цій площині.

Завдання 2.9. а) $b = 2\sqrt{2}$, $\varepsilon = 7/9$; б) $k=\sqrt{2}/2$, $2a = 12$;
в) вісь симетрії Oy та A(–45, 15)

Завдання 2.10. $\rho = 2 - \cos 2\varphi$.

Завдання 2.11. *а)* $27x^2 - 63y^2+21z^2=0$; *б)* $3x^2 - 7y^2 -2z^2=42$.

Завдання 2.12. *а)* $3x^2=-4y$, Oz; *б)* $4x^2 +3z^2=12$, Oz.

МОДУЛЬ 2
Розділ 3. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ

Завдання 3.1.

а) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{2x^2-2x-40}{x^2-3x-4}$; б) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^3-64}{7x^2-27x-4}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2-3x+1}{3x^2+x-5}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^3+3x-4}{2x^2-5x+1}$; д) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{7x+4}{3x^3-5x+1}$; е) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{4x+1}-3}{x^3-8}$;

ж) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4-2x}{1-2x}\right)^{x+1}$; з) $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\dfrac{x+5}{4x-2}\right)^{3x}$; и) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos^3 x}{5x^2}$.

Завдання 3.2.

$y=\dfrac{6}{x^4}-\dfrac{3}{x}+3x^3-\sqrt{x^7}$	$y=\sqrt[3]{(x-1)^5}+\dfrac{5}{2x^2-4x+7}$	$y=\dfrac{\sqrt[5]{\operatorname{ch}3x}}{\operatorname{arctg}(x+2)}$
$y=\log_5(x+1)\cdot\operatorname{arctg}^2 x^3$	$y=\sqrt{(x+5)^3}\arccos^4 x$	$y=\cos^4 3x\cdot\arcsin 3x^2$
$y=\dfrac{e^{-\operatorname{tg}x}}{4x^2+7x-5}$	$y=\dfrac{\operatorname{tg}^4 3x}{\lg(x^2-x+4)}$	$y=\operatorname{th}^3 5x\cdot\operatorname{arcctg}(2x-5)$
$y=\dfrac{4\lg(3x+7)}{(x-5)^3}$	$y=\sqrt[7]{\dfrac{x^2+3}{x^2-3}}\arccos 4x$	$y=(\operatorname{sh}3x)^{\operatorname{arcctg}2x}$
$y=(\lg(8x+3))^{\operatorname{tg}5x}$	$y=\dfrac{\sqrt[5]{(x+2)^3}}{(x-1)^4(x-3)^5}$	$y=5^{2x}\sin x$
$y=\lg^3 x^2$	$y=5x\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$	$\begin{cases}x=3(\sin t-\cos t)\\ y=\dfrac{7^{3t+2}}{\operatorname{arcctg}^2 t}\end{cases}$.

Завдання 3.3. а) $y=\dfrac{(x-3)^2}{4(x-1)}$; б) $y=e^{\frac{1}{3-x}}$.

Завдання 3.4. $z = 4xy - x^3 + y^2 + 11$, N(1; –3), $\Delta x = -0{,}06$, $\Delta y = 0{,}04$.

Завдання 3.5. а) $Z=2\arcsin\left(x\sqrt{y+2}\right)$; б) $Z = y^x$.

Завдання 3.6. $z = 2x^5 + 2x\,y^3$, M(–1; 2), $\vec{s}\{4;-3\}$.

Завдання 3.7. $z = 2x^3 - xy^2 + 5y^2 + y$.

Завдання 3.8. $z = 1 - x^2 - y^2$, (D): $(x-1)^2 + (y-1) \le 1$.

Список літератури

1. *Федоренко Н.Д., Баліна О.І.* і ін. Вища математика: Навчальний посібник. – К.: Віпол, 2003. – 164 с.
2. *Федоренко Н.Д., Баліна О.І., Безклубенко І.С.* Вища математика. – К.: КНУБА, 2003. – 208 с.
3. *Овчінніков Ф.П., Яремчук В.М.* Вища математика: Ч. 1, 2. – К.: Техніка, 2000. – 590 с.; 790 с.
4. *Міхайленко В.М., Федоренко Н.Д.* Математичний аналіз для економістів. – К.: Європейський університет, 2002. – 297 с.
5. *Міхайленко В.М., Федоренко Н.Д.* Алгебра та геометрія для економістів. – К.: Європейський університет, 2001. – 100 с.

Навчально-методичне видання

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Методичні вказівки
до виконання індивідуальних завдань
для студентів спеціальностей 7.090214 "Підйомно-транспортні, будівельні, дорожні і меліоративні машини і обладнання", 7.010104 "Професійне навчання. Виробництво, експлуатація та ремонт підйомно-транспортних, будівельних, дорожніх і меліоративних машин і обладнання"

Укладачі: ФЕДОРЕНКО Наталія Дмитрівна
БІЛОЩИЦЬКА Світлана Василівна
ДОЛЯ Олена Вікторівна

Комп'ютерна верстка *Т.І.Кукарєвої*

Підписано до друку 2005. Формат 60х84$_{1/16}$
Папір офсетний. Гарнітура Таймс. Друк на різографі.
Ум. друк. арк. 5,37. Обл.-вид. арк. 5,75. Ум. фарбовідб. 47.
Тираж 75 прим. Вид. № 39/ІІІ-05. Зам. №

КНУБА, Повітрофлотський проспект, 31, Київ-680, 03680

Віддруковано в редакційно-видавничому відділі
Київського національного університету будівництва і архітектури

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру суб'єктів
видавничої справи ДК № 808 від 13.02.2002 р.