Бондаренко Н.В., Наголкіна З.І.,
Печук В.Д.

Методичні вказівки та розв'язання типових задач до контрольної роботи № 2

Вказівки. Обчислення невизначених інтегралів

Літерою I позначимо один з наступних числових проміжків дійсної прямої **R**: $[a;b]$, $(a;b)$, $[a;b)$, $(a;b]$, $(-\infty;b)$, $(-\infty;b]$, $(a;+\infty)$, $[a;+\infty)$, $(-\infty;+\infty)$.

Функція $F(x)$ називається **первісною** для функції $f(x)$ на числовому проміжку I, якщо $F(x)$ диференційована на I і $F'(x) = f(x)$, для всіх $x \in I$. Наприклад, $f(x) = \cos x, F(x) = \sin x$.

Якщо $F(x)$ − первісна функції $f(x)$ на проміжку I, то функція $F(x)+C,\ C \in \mathbf{R}$ також буде первісною. І навпаки, кожна первісна функції $f(x)$ на I може бути представлена у вигляді $F(x)+C, C \in \mathbf{R}$.

Сукупність усіх первісних $F(x)+C$, $C \in \mathbf{R}$ функції $f(x)$ на I називають **невизначеним інтегралом** функції $f(x)$ і записують так:

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

Основні властивості невизначеного інтеграла:

1. $(\int f(x)dx)' = f(x),$
2. $d(\int f(x)dx) = f(x)dx,$
3. $\int \lambda f(x)dx = \lambda \int f(x)dx$, де $\lambda = const$,
4. $\int dF(x) = F(x) + C$, $C \in \mathbb{R}$,
5. $\int (f_1(x) \pm f_2(x))dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx,$
6. Якщо $\int f(x)dx = F(x) + C$ і $u = \varphi(x)$ − довільна функція, що має неперервну похідну, то

$$\int f(u)du = F(u) + C.$$

Зокрема, $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b)+C$, $a,b \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$.

Більша частина формул таблиці основних інтегралів випливає з таблиці похідних, справедливість інших легко перевіряється диференціюванням.

Таблиця основних інтегралів

1) $\int 0dx = C$, 2) $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}+C \ (n \neq -1)$, 3) $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$,

4) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, (a>0, a \neq 1)$, 5) $\int e^x dx = e^x + C$,

6) $\int \sin x dx = -\cos x + C$, 7) $\int \cos x dx = \sin x + C$,

8) $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$, 9) $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$,

10) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$, 11) $\int \frac{dx}{x^2+1} = arctg\ x + C$,

12) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$, 13) $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C$,

14) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2+a^2}\right| + C$,

15) $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$, 16) $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|tg\frac{x}{2}\right| + C$,

17) $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left|tg(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})\right| + C$, 18) $\int tgxdx = -\ln|\cos x| + C$,

19) $\int ctgx = \ln|\sin x| + C$,

20) $\int \sqrt{x^2 \pm a^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2}\ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$,

21) $\int \sqrt{a^2-x^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C$.

Мистецтво інтегрування полягає в умінні так перетворити підінтегральний вираз, щоб одержати табличні інтеграли. Існують різні методи зведення інтегралів до табличних.

Метод підстановки (заміни змінної)

Суть методу підстановки полягає у введенні нової змінної. При знаходженні інтеграла $\int f(x)dx$ застосовують підстановки таких двох видів:

$$1)\ x=\varphi(t),\ 2)\ \psi(x)=t.$$

Функції $\varphi(t)$ та $\psi(x)$ − неперервно-диференційовні.

У першому випадку $dx=\varphi'(t)dt$ і $\int f(x)dx=\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$.

Якщо підінтегральний вираз можна подати у вигляді $f(x)dx=g(\psi(x))\psi'(x)dx$, то використовують другу підстановку:

$$\int f(x)dx=\int g(\psi(x))\psi'(x)dt=\int g(\psi(x))d\psi(x)=\int g(t)dt.$$

У цьому випадку функція $\psi'(x)$ заноситься під знак диференціала $\psi'(x)dx=d(\psi(x))=dt$.

Метод інтегрування частинами

Інтегруванням частинами називають знаходження інтеграла за **формулою інтегрування частинами**:

$$\int udv=uv-\int vdu, \tag{1}$$

де $u(x), v(x)$ диференційовані функції.

Метод інтегрування частинами застосовується, наприклад, для обчислення інтегралів вигляду $\int P_n(x)f(x)dx$, де $P_n(x)$ − многочлен (в деяких випадках x^n), а $f(x)$ − одна з наступних функцій: $e^{ax},\ \sin ax,\ \cos ax,\ \ln x,\ \log_a x,\ \arcsin x,\ arctgx.$

При обчисленні інтеграла за формулою (1) виділяють наступні три випадки:

а) $f(x):\cos ax, \sin ax, e^{ax}, a^x$, тоді позначають $P_n(x)=u$;

б) $f(x): arctgx, \arcsin x, \ln x$. Тоді позначають $f(x)=u$, $P_n(x)dx=dv$;

в) підінтегральна функція має вигляд $\cos ax \cdot e^{bx}$, або $\sin ax \cdot e^{bx}$, тоді треба двічі застосувати формулу (1). При цьому позначити, наприклад, $\cos ax = u,\ e^{bx}dx = dv$.

Завдання 1. Знайдіть невизначений інтеграл

$$\int (x^{12} - \cos 7x + \frac{3}{x^2+4} - \frac{1}{x-2})dx.$$

Розв'язок. Заданий інтеграл є сумою табличних інтегралів.

$$\int (x^{12} - 2\cos 7x + \frac{3}{x^2+4} - \frac{1}{x-2})dx =$$

$$= \int x^{12}dx - 2\int \cos 7x dx + 3\int \frac{1}{x^2+4}dx - \int \frac{1}{x-2}dx =$$

$$= \frac{x^{13}}{13} - 2\cdot\frac{1}{7}\sin 7x + \frac{3}{2}arctg\frac{x}{2} - \ln(x-2) + C, C \in \mathbb{R}.$$

Завдання 2. Знайдіть невизначений інтеграл $\int \frac{(\arcsin x)^2}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

Розв'язок. Заданий інтеграл знайдемо методом заміни змінної.

$$\int \frac{(\arcsin x)^2}{\sqrt{1-x^2}}dx = \begin{bmatrix} \arcsin x = t \\ \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = dt \end{bmatrix} = \int t^2 dt = \frac{t^3}{3} + C = \frac{(\arcsin x)^3}{3} + C.$$

Завдання 3. Знайдіть невизначені інтеграли:

a) $\int (2x+3)\cos 3x dx$.

Розв'язок. Заданий інтеграл обчислимо методом інтегрування частинами.

$$\int (2x+3)\cos 3x dx = \begin{bmatrix} u = 2x+3 & du = 2dx \\ dv = \cos 3x dx & v = \dfrac{\sin 3x}{3} \end{bmatrix} =$$

$$= (2x+3)\frac{\sin 3x}{3} - \int \frac{1}{3}\sin 3x\ 2dx = \frac{1}{3}(2x+3)\sin 3x + \frac{2}{9}\cos 3x + C.$$

b) $\int arctg\sqrt{2x-1}\,dx$.

Розв'язок. Заданий інтеграл обчислимо методом інтегрування частинами

$$\int arctg\sqrt{2x-1}dx = \begin{bmatrix} u = arctg\sqrt{2x-1}, & du = \dfrac{1}{2x\sqrt{2x-1}}dx \\ dv = dx, & v = x \end{bmatrix} =$$

$$= xarctg\sqrt{2x-1} - \frac{1}{2}\int \frac{x}{x\sqrt{2x-1}}dx = xarctg\sqrt{2x-1} - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{2x-1}} =$$

$$= xarctg\sqrt{2x-1} - \frac{1}{2}(2x-1)^{1/2} + C.$$

Взазівки. Інтегрування раціональних дробів

Потрібно знайти $\int \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}dx$, де $P_n(x)$, $Q_m(x)$ – многочлени відносно змінної x степенів n і m відповідно.

Якщо $n < m$, то раціональний дріб $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ – правильний, якщо $n \geq m$, то дріб неправильний. Будь-який неправильний раціональний дріб може бути приведений до правильного шляхом виділення цілої частини та дробової частини. Це робиться діленням многочлена в чисельнику на многочлен в знаменнику. Інтегрування правильного раціонального дробу зводиться до інтегрування елементарних дробів чотирьох типів:

1) $\int \frac{A}{x-a}dx = A \cdot \ln|x-a| + C$.

2) $\int \frac{A}{(x-a)^k}dx = A \cdot \frac{(x-a)^{-k+1}}{1-k} + C$.

3) $\int \frac{(Ax+B)dx}{x^2+px+q}$, $q - \frac{p^2}{4} > 0$.

Щоб обчислити заданий інтеграл, спочатку виділяємо повний квадрат в знаменнику дробу. Крім того, для спрощення обрахунків позначимо $a^2 = q - \frac{p^2}{4}$.

$$\int\frac{(Ax+B)dx}{x^2+px+q}=\int\frac{(Ax+B)dx}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4}}=\left|\begin{matrix}x+\frac{p}{2}=t\\ dx=dt\end{matrix}\right|=\int\frac{A(t-\frac{p}{2})+B}{t^2+a^2}dx=$$

$$=A\cdot\int\frac{tdt}{t^2+a^2}+(B-\frac{Ap}{2})\int\frac{dt}{t^2+a^2}=$$

$$=\frac{A}{2}\ln(t^2+a^2)+(B-\frac{Ap}{2})\frac{1}{a}arctg\frac{t}{a}+C=$$

$$=\frac{A}{2}\ln(x^2+px+q)+\frac{\left(B-\frac{Ap}{2}\right)}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\cdot arctg\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}+C.$$

4) $\int\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}dx,\ k\geq 2,\ q-\frac{p^2}{4}>0.$

$$\int\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}dx=\left|\begin{matrix}x+\frac{p}{2}=t\\ dx=dt\end{matrix}\right|=A\cdot\int\frac{tdt}{(t^2+a^2)^k}+(B-\frac{Ap}{2})\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^k}=$$

$$=\frac{1}{2}A\cdot\int(t^2+a^2)^{-k}d(t^2+a^2)+(B-\frac{Ap}{2})\cdot I_k=$$

$$=A\frac{1}{2(t^2+a^2)^{k-1}(1-k)}+(B-\frac{Ap}{2})\cdot I_k,$$

де $a^2=q-\frac{p^2}{4}$, $I_k=\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^k}$.

Інтеграл I_k знаходиться за рекурентною формулою:

$$I_k=\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^k}=\frac{1}{a^2}\left(\frac{2k-3}{2k-2}\cdot I_{k-1}+\frac{t}{2(k-1)(t^2+a^2)^{k-1}}\right),\ k\geq 1.$$

Правильний раціональний дріб можна однозначно розкласти на суму простих дробів типу 1), 2), 3), 4).

Завдання 4. Знайдіть інтеграл $\int \frac{x^3-6x^2+13x-6}{(x+2)(x-2)^3}\,dx.$

Розв'язок. Заданий інтеграл є інтегралом від правильного раціонального дробу. Степінь чисельника $n=3$, а степінь знаменника $m=4.$ Представимо підінтегральну функцію у вигляді суми простих дробів з невизначеними коефіцієнтами

$$\frac{x^3-6x^2+13x-6}{(x+2)(x-2)^3}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{(x-2)^2}+\frac{D}{(x-2)^3}.$$

Знайдемо коефіцієнти A, B, C, D. Для цього зведемо праву частину рівності до спільного знаменника, а потім прирівняємо чисельники лівої і правої частини рівних дробів

$$x^3-6x^2+13x-6=A(x-2)^3+B(x+2)(x-2)^2+$$
$$+C(x-2)(x+2)+D(x+2).$$

Прирівняємо коефіцієнти при однакових степенях лівої і правої частини останньої рівності. Отримуємо систему чотирьох рівнянь з чотирма невідомими.

x^3: $A+B=1,$

x^2 $-6A-2B+C=-6,$

x^1 $12A-4B+D=13,$

x^0 $8A+8B-4C+2D=-6$

Розв'язавши систему лінійних рівнянь відносно невідомих A, B, C, D, отримуємо:

$$A=1, \quad B=0, \quad C=0, \quad D=1.$$

Звідси

$$\int \frac{x^3-6x^2+13x-6}{(x+2)(x-2)^3}dx=\int \frac{1}{(x+2)}dx+\int \frac{1}{(x-2)^3}dx=\ln|x+2|+$$
$$+\frac{(x-2)^{-3+1}}{-2}+C=\ln|x+2|-\frac{1}{2(x-2)^2}+C, \quad C\in\mathbb{R}.$$

Вказівки. Інтегрування тригонометричних функцій

Інтеграли вигляду $\int R(\sin x, \cos x)dx$, де R − раціональна функція від $\sin x$ і $\cos x$, за допомогою **універсальної тригонометричної підстановки** $tg\frac{x}{2}=t$ зводять до інтегралів від раціональних функцій. При цьому використовують співвідношення:

$$\sin x=\frac{2t}{1+t^2},\quad \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2},\quad dx=\frac{2}{1+t^2}dt.$$

За допомогою універсальної тригонометричної підстановки зручно знаходити інтеграли вигляду $\int\frac{dx}{a\cos x+b\sin x+c}$.

Застосування універсальної тригонометричної підстановки часто приводить до раціональних дробів з великими степенями. Тому в багатьох випадках використовують інші підстановки.

Інтеграли вигляду

$$\int R(\sin x)\cos x dx,\ \int R(\cos x)\sin x dx,\ \int R(tgx)dx$$

інтегрують підстановками $\sin x=t, \cos x=t, tgx=t$ відповідно.

Інтеграли вигляду $\int \sin^m x\cos^n x\,dx$ залежно від значень цілих чисел m і n знаходять так:

Числа m і n	**Підстановка**
m− ціле додатне непарне число	$\cos x=t$
n − ціле додатне непарне число	$\sin x=t$
m і n − цілі додатні парні числа	Потрібно знизити степені тригонометричних функцій за формулами: $\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}$, $\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}$.
m і n − цілі парні числа, але хоча б одне з них від'ємне; m і n − цілі непарні від'ємні числа.	$tgx=t$.

Інтеграли вигляду

$$\int \sin mx \cos nx\, dx,\ \int \sin mx \sin nx\, dx,\ \int \cos mx \cos nx\, dx$$

інтегрують шляхом застосування формул перетворення добутку тригонометричних функцій у їх суму:

$$\sin mx \cdot \cos nx = \frac{1}{2}(\sin(m+n)x + \sin(m-n)x),$$

$$\sin mx \cdot \sin nx = \frac{1}{2}(\cos(m-n)x - \cos(m+n)x),$$

$$\cos mx \cdot \cos nx = \frac{1}{2}(\cos(m-n)x + \cos(m+n)x).$$

Часто для перетворень підінтегрального виразу застосовують співвідношення:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1, \qquad tg^2 x + 1 = \frac{1}{\cos^2 x}, \qquad ctg^2 x + 1 = \frac{1}{\sin^2 x}.$$

Для гіперболічних функцій застосовують співвідношення:

$$ch^2 x - sh^2 x = 1, \quad 1 - th^2 x = \frac{1}{ch^2 x}, \quad cth^2 x - 1 = \frac{1}{sh^2 x}.$$

Завдання 5. Знайдіть інтеграли: **a)** $\int \frac{dx}{\sin^6 x}$, **b)** $\int th^4 x dx$.

Розв'язок.

a) $$\int \frac{dx}{\sin^6 x} = \int \frac{1}{\sin^2 x} \cdot \left(\frac{1}{\sin^2 x}\right)^2 dx = \int \frac{1}{\sin^2 x}(1 + ctg^2 x)^2 dx =$$

$$= \left[ctgx = t, \quad -\frac{1}{\sin^2 x} dx = dt \right] = \int -(1+t^2)^2 dt = -\int (t^4 + 2t^2 + 1) dt =$$

$$= -\frac{t^5}{5} - 2\frac{t^3}{3} + t + C = -\frac{1}{5} ctg^5 x - \frac{2}{3} ctg^3 x + ctgx + C.$$

b) $$\int th^4 x dx = \left[thx = t \quad dt = \frac{1}{ch^2 x} dx \right] = \int th^2 x (1 - \frac{1}{ch^2 x}) dx =$$

$$= \int th^2 x dx - \int th^2 x \cdot \frac{1}{ch^2 x} dx = \int (1 - \frac{1}{ch^2 x}) dx - \int t^2 dt = x - thx - \frac{th^3 x}{3} + C.$$

Вказівки. Визначений інтеграл

Нехай функція $f(x)$ визначена на відрізку $[a,b]$. Розіб'ємо цей відрізок на n довільних частин точками $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b$ і виберемо на кожному з відрізків $[x_{i-1}, x_i]$ довільну точку ξ_i (рис. 9).

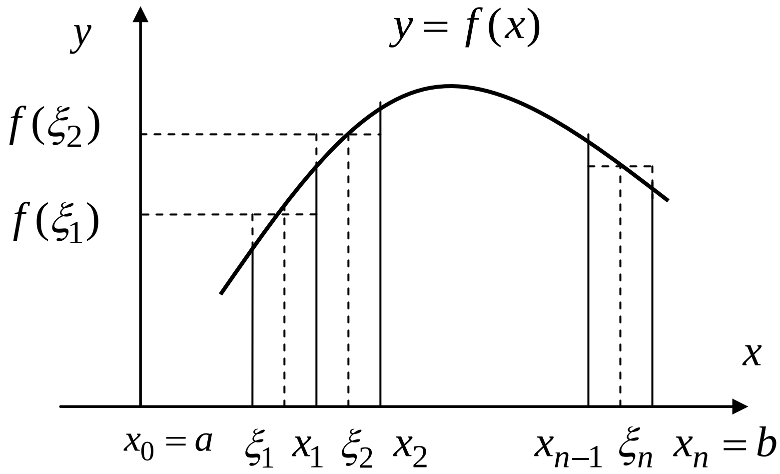

Рис. 9

Складемо суму $S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$, де $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Цю суму називають **інтегральною сумою** функції $f(x)$ на відрізку $[a,b]$. Позначимо через λ довжину найбільшого частинного відрізка Δx_i.

Визначеним інтегралом функції $f(x)$ на відрізку $[a,b]$ називають скінченну границю інтегральної суми при $\lambda \to 0$ за умови, що вона не залежить від способу розбиття відрізка $[a,b]$, вибору точок ξ_i, і позначають так:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{\lambda \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i .$$

Геометричний зміст визначеного інтеграла. Визначений інтеграл $\int_a^b f(x)dx$, де $f(x)$ − невід'ємна і неперервна функція, чисельно дорівнює площі криволінійної трапеції S, обмеженої вертикальними прямими $x=a$ і $x=b$ $(a<b)$, віссю Ox і графіком функції $y=f(x)$, тобто

$$S=\int_a^b f(x)dx.$$

Функцію $f(x)$ називають **інтегрованою на відрізку** $[a;b]$, якщо існує визначений інтеграл $\int_a^b f(x)dx$.

Визначений інтеграл обчислюють за **формулою Ньютона-Лейбніца.** Нехай функція $y=f(x)$ − інтегрована на $[a;b]$ і $f(x)$ має неперервну первісну $F(x)$ на $[a;b]$. Тоді

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a). \qquad (2)$$

При обчисленні визначеного інтегралу спочатку знаходять первісну $F(x)$, а потім підставляють межі інтегрування. Для знаходження первісної використовують всі методи інтегрування, які були розглянуті раніше.

Заміна змінної у визначеному інтегралі. Якщо функція $f(x)$ − неперервна на $[a,b]$ і функція $x=\varphi(t)$ задовольняє умови:

1) $x=\varphi(t)$ і її похідна $x'=\varphi'(t)$ − неперервні при $t\in[\alpha;\beta]$;

2) множиною значень функції $x=\varphi(t)$ при $t\in[\alpha;\beta]$ є відрізок $[a,b]$;

3) $\varphi(\alpha)=a,\quad \varphi(\beta)=b$.

Тоді справедлива **формула заміни змінної** у визначеному інтегралі

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt.$$

Нижня межа α знаходиться, як розв’язок рівняння $a=\varphi(t)$, а β − як розв’язок рівняння $b=\varphi(t)$.

У визначеному інтегралі роблять також заміну $\psi(x)=t$, тоді $\psi(a)=\alpha$, $\psi(b)=\beta$. В цьому випадку функція $x=x(t)$ − обернена до

ψ має задовольняти умови (1)−(3). Найзручніше використовувати заміну монотонно-диференційовними функціями. Такі функції гарантують однозначність як прямої так і оберненої функції.

Метод інтегрування частинами у визначеному інтегралі

Якщо функції $u = u(x)$ і $v = v(x)$ мають на відрізку $[a;b]$ неперервні похідні, то справедлива формула

$$\int_a^b u dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v dv. \qquad (3)$$

Завдання 6. Обчислити визначений інтеграл.

a) $\int_1^e \frac{x+\sqrt{x}}{x\sqrt{x}}dx$.

Розв'язок.

$$\int_1^e \frac{x+\sqrt{x}}{x\sqrt{x}}dx = \int_1^e \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x}\right)dx = (2\sqrt{x} + \ln x)\Big|_1^e =$$

$$= 2\sqrt{e} + 1 - (2+0) = 2\sqrt{e} - 1.$$

b) $\int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}dx$.

Розв'язок.

$$\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^{2x}}dx = \begin{bmatrix} e^x = t \Rightarrow e^x dx = dt \\ x = 0 \Rightarrow t = e^0 = 1 \\ x = 1 \Rightarrow t = e^1 = e \end{bmatrix} = \int_1^e \frac{dt}{1+t^2} = arctgt\Big|_1^e =$$

$$= arctge - arctg1 = arctge - \frac{\pi}{4}.$$

c) $\int_1^e x \ln x dx$.

Розв'язок

$$\int_1^e x\ln x dx = \left[\begin{array}{l} u=\ln x \Rightarrow du=\frac{1}{x}dx \\ v'=x \Rightarrow v=\frac{x^2}{2} \end{array}\right] = \frac{x^2}{2}\ln x\Big|_1^e - \int_1^e \frac{1}{x}\cdot\frac{x^2}{2}dx =$$

$$=(\frac{e^2}{2}\cdot 1-0)-\frac{1}{2}\frac{x^2}{2}\Big|_1^e = \frac{e^2}{2}-(\frac{e^2}{4}-\frac{1}{4})=\frac{e^2}{4}+\frac{1}{4}.$$

Вказівки. Невласні інтеграли

Невласні інтеграли – це узагальнення визначеного інтеграла на випадок інтеграла від функції з нескінченним проміжком інтегрування або від необмеженої функції.

Невласні інтеграли 1-го роду. Нехай функція $f(x)$ визначена на нескінченному проміжку $[a;+\infty)$ та інтегрована на будь-якому скінченному відрізку $[a;A]$, $a<A<+\infty$.

Невласним інтегралом 1-го роду від функції $f(x)$ на множині $[a;+\infty)$ називається скінченна границя $\lim\limits_{A\to+\infty}\int_a^A f(x)dx$ (якщо ця границя існує) і позначається

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx := \lim_{A\to+\infty}\int_a^A f(x)dx. \tag{4}$$

В цьому випадку кажуть, що невласний інтеграл **збігається**. Якщо границя (4) не існує або нескінченна, то невласний інтеграл називається **розбіжним**.

Аналогічно визначають невласні інтеграли на проміжках $(-\infty;b]$ та $(-\infty;+\infty)$:

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx := \lim_{B\to-\infty}\int_B^b f(x)dx,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{B\to-\infty}\int_B^c f(x)dx + \lim_{A\to+\infty}\int_c^A f(x)dx,$$ де c − довільне число.

Невласні інтеграли 2-го роду. Нехай функція $f(x)$ визначена на проміжку $[a;b)$ і має нескінченний розрив при $x=b$.

Невласним інтегралом 2-го роду від функції $f(x)$ на множині $[a;b)$ називається скінченна границя $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$, якщо вона існує, і позначають

$$\int\limits_a^b f(x)dx := \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)dx. \tag{5}$$

В цьому випадку кажуть, що невласний інтеграл 2-го роду **збігається**. Якщо ж вказана границя не існує або нескінченна, то кажуть, що **інтеграл розбігається**.

Аналогічно, якщо функція $f(x)$ має нескінченний розрив в точці $x=a$, то

$$\int\limits_a^b f(x)dx := \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx \tag{6}$$

Завдання 7. Обчисліть невласні інтеграли або доведіть їх розбіжність.

а) $\int\limits_1^{+\infty}\dfrac{dx}{x(1+\ln^2 x)}$.

Розв'язок.

Заданий інтеграл є невласним інтегралом 1-го роду.

$$\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x(1+\ln^2 x)} = \lim_{A\to+\infty}\int\limits_1^{A}\frac{dx}{x(1+\ln^2 x)} = \begin{bmatrix} \ln x = t \Rightarrow \dfrac{1}{x}dx = dt \\ x=1 \Rightarrow t=\ln 1 = 0 \\ x = A \Rightarrow t = \ln A \end{bmatrix} =$$

$$= \lim_{A\to\infty}\int\limits_0^{\ln A}\frac{dt}{1+t^2} = \lim_{A\to+\infty} arctgt\Big|_0^{\ln A} = \lim_{A\to+\infty}(arctg(\ln A) - arctg 0) = \frac{\pi}{2}.$$

Отже, невласний інтеграл збігається.

b) $\int\limits_0^1 \frac{2xdx}{\sqrt{1-x^4}}$.

Функція $f(x)=\frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$ має нескінченний розрив в точці $x=1$. Тому заданий інтеграл є невласним інтегралом 2-го роду.

$$\int\limits_0^1 \frac{2xdx}{\sqrt{1-x^4}} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_0^{1-\varepsilon}\frac{2xdx}{\sqrt{1-x^4}} = \begin{bmatrix} x^2=t \Rightarrow 2xdx=dt \\ x=0 \Rightarrow t=0 \\ x=1-\varepsilon \Rightarrow t=(1-\varepsilon)^2 \end{bmatrix} =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_0^{(1-\varepsilon)^2}\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \lim_{\varepsilon\to 0}\arcsin t\Big|_0^{(1-\varepsilon)^2} = \lim_{\varepsilon\to 0}(\arcsin(1-\varepsilon)^2-\arcsin 0) =$$

$$= \arcsin 1 = \frac{\pi}{4}.$$

Отже, невласний інтеграл збігається.

Вказівки. Диференціальні рівняння з відокремленими і відокремлюваними змінними

Диференціальним рівнянням першого порядку називають рівняння вигляду

$$F(x,y,y')=0,$$

де x – аргумент, $y=y(x)$ – невідома функція.

Частіше розглядають рівняння **розв'язані відносно похідної** $y'=f(x,y)$ або у вигляді $N(x,y)dx+M(x,y)dy=0$.

Якщо після перетворень рівняння розв'язані відносно похідної можна представити у вигляді

$$y'=f_1(x)\cdot f_2(y) \qquad (7)$$

або

$$N_1(x)\cdot N_2(y)dx+M_1(x)\cdot M_2(y)dy=0, \qquad (8)$$

тоді їх називають **рівняннями з відокремлюваними змінними**.

Спочатку розглянемо рівняння типу (7). Для розв'язання цього рівняння треба спочатку відокремити змінні, тобто представити його у вигляді $\dfrac{dy}{dx} = f_1(x) f_2(y)$. Далі, виключивши точки, в яких $f_2(y)=0$ отримаємо $\dfrac{dy}{f_2(y)} = f_1(x)dx$. Проінтегруємо обидві частини рівності $\int \dfrac{dy}{f_2(y)} = \int f_1(x)dx$. В результаті отримаємо розв'язок у вигляді загального інтегралу $\Psi(x,y,C)=0$.

При розв'язанні рівняння типу (8) треба виключити точки, в яких $M_1(x)=0, N_2(y)=0$. Відокремимо змінні, поділивши рівняння (8) на добуток $M_1(x)\cdot N_2(x)\neq 0$, та проінтегруємо праву та ліву частину отриманого рівняння:

$$\int \frac{N_1(x)}{M_1(x)}dx + \int \frac{M_2(y)}{N_2(y)}dy = C.$$

В результаті отримаємо розв'язок у вигляді загального інтегралу $\Psi(x,y,C)=0$, де C − довільна стала.

Завдання 8. Знайдіть загальний інтеграл диференціального рівняння $x^2 y' = 1+\cos 2y$.

Розв'язок. Задане рівняння є рівнянням з відокремлюваними змінними. Розпишемо похідну $y' = \dfrac{dy}{dx}$ і відокремимо змінні:

$$x^2 \frac{dy}{dx} = 1+\cos 2y; \qquad \frac{dy}{1+\cos 2y} = \frac{dx}{x^2}; \qquad \int \frac{dy}{1+\cos 2y} = \int \frac{dx}{x^2}.$$

Перетворимо підінтегральну функцію за допомогою рівності $\cos 2y = 2\cos^2 y - 1$ та обчислимо інтеграли.

$$\int \frac{dy}{2\cos^2 y} = \int \frac{dx}{x^2}; \qquad \frac{1}{2} tgy = \frac{x^{-1}}{-1} + C; \qquad \frac{1}{2} tgy = -\frac{1}{x} + C.$$

Отже, загальний інтеграл має вигляд $tgy = -\dfrac{2}{x} + C$, $C \in \mathbb{R}$.

Вказівки. Лінійні однорідні диференціальні рівняння другого порядку

Рівняння вигляду

$$a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = 0, \quad a_0 \neq 0 \tag{9}$$

де коефіцієнти a_0, a_1, a_2 − деякі дійсні числа, називають **лінійним однорідним рівнянням зі сталими коефіцієнтами**. Будемо шукати розв'язок цього рівняння у вигляді $y = e^{kx}$. Тоді $y' = ke^{kx}$, $y'' = k^2 e^{kx}$. Підставляючи y', y'' в рівняння (9) і враховуючи, що $e^{kx} \neq 0$ одержимо рівняння:

$$a_0 k^2 + a_1 k + a_2 = 0, \; a_0 \neq 0 \tag{10}$$

Рівняння (10) називають **характеристичним рівнянням рівняння** (9). Це квадратне рівняння, корені якого визначають за відомими формулами:

$$k_{1,2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0 a_2}}{2a_0}.$$

В залежності від вигляду коренів рівняння (10) розглядають три випадки.

1. Корені рівняння (10) дійсні і різні $k_1 \neq k_2$.Тоді загальний розв'язок $y_{зо}$ рівняння (9) має вигляд:

$$y_{Зо} = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}, \; C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

2. Корені рівняння (10) дійсні і рівні $k_1 = k_2$. Тоді загальний розв'язок $y_{зо}$ (9) має вигляд:

$$y_{Зо} = C_1 e^{k_1 x} + C_2 x e^{k_1 x}, \; C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

3. Корені рівняння (10) комплексно-спряжені $k_1 = \alpha + i\beta$, $k_2 = \alpha - i\beta$. Тоді загальний розв'язок рівняння (9) має вигляд:

$$y_{Зо} = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x), \; C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Для знаходження частинного розв'язку, який відповідає заданим початковим умовам (задача Коші), треба підставити їх у відповідний розв'язок та його похідну. Після цього розв'язати систему двох лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих C_1, C_2.

Завдання 9. Знайдіть розв'язок задачі Коші.

$$y'' + 4y' - 21y = 0,\ y(0) = 2,\ y'(0) = -2.$$

Розв'язок. Знайдемо відповідне характеристичне рівняння

$$k^2 + 4k - 21 = 0.$$

Знайдемо корені квадратного рівняння

$$k_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot (-21)}}{2} = \frac{-4 \pm 10}{2}, \quad k_1 = 3, k_2 = -7.$$

Маємо перший випадок – корені характерисстичного рівняння дійсні і різні.

Запишемо загальний розв'язок диференціального рівняння

$$y_{зо} = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-7x},\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Щоб знайти частинний розв'язок диференціального рівняння з початковими умовами $y(0) = 2,\ y'(0) = -2$, обчислимо похідну $y'_{зо} = 3C_1 e^{3x} - 7C_2 e^{-7x}$.

Обчислимо $y_{зо}(0)$ та $y'_{зо}(0)$:

$$y_{зо}(0) = C_1 e^{3 \cdot 0} + C_2 e^{-7 \cdot 0} = C_1 + C_2 = 2,$$

$$y'_{зо}(0) = 3C_1 e^{3x} - 7C_2 e^{-7x} = 3C_1 e^{3 \cdot 0} - 7C_2 e^{-7 \cdot 0} = 3C_1 - 7C_2 = -2.$$

Отримуємо систему лінійних рівнять відносно C_1, C_2:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 2, \\ 3C_1 - 7C_2 = -2. \end{cases}$$

Методом виключення знайдемо розв'язок системи $C_1 = \frac{6}{5}, C_2 = \frac{4}{5}.$

Таким чином, розв'язок задачі Коші має вигляд:

$$y = \frac{6}{5} e^{3x} + \frac{4}{5} e^{-7x}.$$

Вказівки. Функції кількох змінних

Нехай на деякій множині $D \subset \mathbb{R}^2$ задано функцію $z = f(x, y)$ і точку $M(x, y) \in D$, в околі якої визначена функція. **Частинними**

похідними функції $z = f(x,y)$ в точці $M(x,y)$ за змінними x та y відповідно називають скінченні границі, якщо вони існують:

$$z'_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{z(x+\Delta x, y) - z(x,y)}{\Delta x}, \; z_y{}' = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{z(x, y+\Delta y) - z(x,y)}{\Delta y}.$$

Частинні похідні ще позначають $z'_x = \frac{\partial z}{\partial x}, \; z'_y = \frac{\partial z}{\partial y}$.

Щоб знайти частинну похідну $\frac{\partial z}{\partial x}$, потрібно взяти звичайну похідну функції $z = f(x,y)$ за змінною x, вважаючи y сталою. Аналогічно, $\frac{\partial z}{\partial y}$ − це похідна за змінною y функції $z = f(x,y)$ при фіксованому значенні x.

Частинні похідні другого порядку визначаються таким чином:

$$z''_{xx} = (z'_x)'_x, \; z''_{yy} = (z'_y)'_y, \; z''_{xy} = (z'_x)'_y, \; z''_{yx} = (z'_y)'_x.$$

При цьому, якщо в околі точки $M(x;y)$ функція $z = f(x,y)$ має неперервні частинні похідні z''_{xy}, z''_{yx}, то вони рівні між собою $z''_{xy} = z''_{yx}$.

Диференціал першого порядку функції $z = f(x,y)$ у точці $M(x;y)$ при умові, що x та y − незалежні змінні, рівний

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy.$$

Диференціал другого порядку функції $z = f(x,y)$ у точці $M(x;y)$ при умові, що x та y − незалежні змінні, рівний

$$d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2.$$

Завдання 10. Знайдіть диференціали першого та другого порядків функції

$$z = x^3 y + \cos(3x - 5y).$$

Розв'язок. Обчислимо частинні похідні першого і другого порядків:

$$z'_x = 3x^2 y - 3\sin(3x - 5y), \quad z'_y = x^3 + 5\sin(3x - 5y),$$

$$z''_{xx} = (z'_x)'_x = (3x^2 y - 3\sin(3x - 5y))'_x = 6xy - 9\cos(3x - 5y),$$

$$z''_{yy} = (z'_y)'_y = (x^3 + 5\sin(3x - 5y))'_y = -25\cos(3x - 5y),$$

$$z''_{xy} = z''_{yx} = (z'_x)'_y = (3x^2 y - 3\sin(3x - 5y))'_y = 3x^2 + 15\cos(3x - 5y).$$

Запишемо диференціал першого та другого порядків:

$$dz = (3x^2 y - 3\sin(3x - 5y))dx + (x^3 + 5\sin(3x - 5y))dy.$$

$$d^2 z = (6xy - 9\cos(3x - 5y))dx^2 + 2(3x^2 + 15\cos(3x - 5y))dxdy +$$
$$+(-25\cos(3x - 5y))dy^2.$$

Завдання 11. Знайдіть частинні похідні складеної функції

$$z = arctg(x^2 y^2), \; x = \sin u - v, \; y = u \cdot v.$$

Розв'язок. Частинні похідні складеної функції $z = f(x, y)$, де $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ мають вигляд:

$$z'_u = z'_x x'_u + z'_y y'_u, \quad z'_v = z'_x x'_v + z'_y y'_v.$$

Знайдемо частинні похідні заданих функцій:

$$z'_x = \frac{2xy^2}{1 + x^4 y^4}, \quad z'_y = \frac{2x^2 y}{1 + x^4 y^4}, \; x'_u = \cos u, \; x'_v = -1, \; y'_u = v, \; y'_v = u.$$

Отримуємо: $z'_u = z'_x x'_u + z'_y y'_u = \dfrac{2xy^2}{1 + x^4 y^4}\cos u + \dfrac{2x^2 y}{1 + x^4 y^4} v,$

$$z'_v = z'_x x'_v + z'_y y'_v = \frac{2xy^2}{1 + x^4 y^4}(-1) + \frac{2x^2 y}{1 + x^4 y^4} u.$$

Або

$$z'_u = \frac{2(\sin u - v)u^2 v^2}{1 + (\sin u - v)^4 (uv)^4}\cos u + \frac{2(\sin u - v)uv}{1 + (\sin u - v)^4 (uv)^4} v,$$

$$z'_v = \frac{2(v - \sin v)u^2 v^2}{1 + (\sin u - v)^4 (uv)^4} + \frac{2(\sin u - v)uv}{1 + (\sin u - v)^4 (uv)^4} u.$$

Вказівки. Похідна за напрямком. Градієнт функції кількох змінних

Похідною функції $u = f(x, y, z)$ **за напрямком вектора** $\vec{l}$ називають скінченну границю $\lim\limits_{\Delta l \to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta l} = \lim\limits_{\Delta l \to 0} \dfrac{f(M_1) - f(M_2)}{\Delta l}$, якщо вона існує, і позначають $\dfrac{\partial u}{\partial l}$. Тут точка $M(x; y; z)$ − початок вектора $\vec{l}$, $M_1(x + \Delta x; y + \Delta y; z + \Delta z)$ − точка на прямій, яка проходить через точку M у напрямі вектора $\vec{l}$, $\Delta l = |\overrightarrow{MM_1}| = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$.

Похідну функції $u = f(x, y, z)$ у напрямі вектора $\vec{l} = (a; b; c)$ обчислюють за формулою:

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma,$$

де $\cos\alpha = \dfrac{a}{|\vec{l}\,|}, \cos\beta = \dfrac{b}{|\vec{l}\,|}, \cos\gamma = \dfrac{c}{|\vec{l}\,|}$ − напрямні косинуси вектора $\vec{l}$, $|\vec{l}\,| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ − довжина вектора $\vec{l}$, α, β, γ − кути, які утворює вектор $\vec{l}$ з координатними осями Ox, Oy, Oz.

Градієнтом функції $u = f(x, y, z)$ в точці $M(x, y, z)$ називають вектор, координатами якого є частинні похідні функції $u = f(x, y, z)$, обчислені в точці M, тобто

$$\overrightarrow{grad\ u(M)} = \frac{\partial u(M)}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u(M)}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u(M)}{\partial z}\vec{k}. \qquad (11)$$

Градієнт вказує напрям найшвидшого зростання функції, найбільша швидкість зміни функції $u = f(x, y, z)$ рівна $|\overrightarrow{grad\ u}|$.

Завдання 12. Для функції $u = 3x^3 - y^3 + x^2 y - 6z + 7$ знайдіть:

a) похідну функції в точці $M_0(1; -5; 2)$ в напрямку від точки M_0 до точки $M(16; 3; 2)$;

b) градієнт функції в точці M_0.

Розв'язок. Знайдемо координати вектора $\overrightarrow{M_0M} = (15;8;0)$.

Тоді напрямні косинуси вектора $\vec{l} = \overrightarrow{M_0M_1}$ рівні:

$$\cos\alpha = \frac{15}{\sqrt{15^2+8^2}},\ \cos\beta = \frac{8}{\sqrt{15^2+8^2}},\ \cos\gamma = \frac{0}{\sqrt{15^2+8^2}}.$$

Або

$$\cos\alpha = \frac{15}{\sqrt{289}} = \frac{15}{17},\ \cos\beta = \frac{8}{\sqrt{289}} = \frac{8}{17},\ \cos\gamma = 0.$$

Знайдемо частинні похідні функції $u = 3x^3 - y^3 + x^2y - 6z + 7$:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 9x^2 + 2xy,\quad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_0} = 9 + 2\cdot(-5) = -1;$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -3y^2 + x^2;\quad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{M_0} = -3y^2 + x^2 = -3(-5)^2 + 1 = -74;$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = -6;\quad \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{M_0} = -6$$

Запишемо похідну функції $u = 3x^3 - y^3 + x^2y - 6z + 7$ за напрямком $\vec{l} = \overrightarrow{M_0M_1} = (15;8;0)$ в точці M_0:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \vec{l}}\right|_{M_0} = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_0}\cdot\cos\alpha + \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{M_0}\cdot\cos\beta + \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{M_0}\cdot\cos\gamma,$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \vec{l}}\right|_{M_0} = (-1)\cdot\frac{15}{17} + (-74)\cdot\frac{8}{17} + (-6)\cdot 0 = -\frac{607}{17}.$$

Зазначимо, що функція $u = f(x;y;z)$ у точці M_0 у напрямку вектора $\vec{l}$ спадає, оскільки $\dfrac{\partial u}{\partial \vec{l}} < 0$.

Запишемо градієнт функції $u = 3x^3 - y^3 + x^2y - 6z + 7$ в точці M_0:

$$\overrightarrow{grad\ u(M_0)} = \frac{\partial u(M_0)}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u(M_0)}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u(M_0)}{\partial z}\vec{k} = -\vec{i} - 74\vec{j} - 6\vec{k}.$$

Завдання 13. Обчислити площу області D обмеженої кривими: $y=(x-1)^2,\ y^2=x-1$ за допомогою подвійного інтегралу.

Розв'язок. Якщо область D є правильною і описується системою нерівностей вигляду:

$$D=\{(x,y),\ a\le x\le b,\ y_1(x)\le y\le y_2(x)\} \tag{12}$$

$$\text{або } D=\{(x,y),\ c\le y\le d,\ x_1(y)\le x\le x_2(y)\}, \tag{13}$$

то подвійний інтеграл зводиться до повторного інтегруванням двох визначених інтегралів відповідно

$$\iint_D f(x,y)dxdy=\int_a^b dx\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy,$$

$$\text{або } \iint_D f(x,y)dxdy=\int_c^d dy\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx.$$

Слід відмітити, коли інтегруємо за змінною x, то $y=const$ вважається сталою і навпаки, коли інтегруємо за змінною y, то вважається $x=const$.

Згідно з визначенням подвійного інтегралу у випадку, коли $f(x;y)\equiv 1$, площа області D обчислюється за формулою:

$$S_D=\iint_D dxdy.$$

Для знаходження відповідних меж інтегрування, треба спочатку намалювати область (рис. 10), а потім визначити множини (12) або (13), які описують цю область.

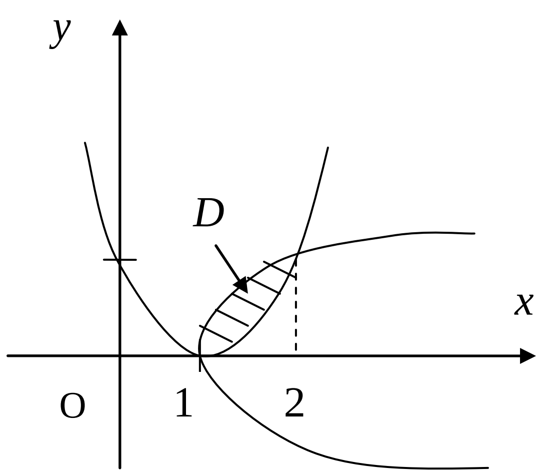

Рис. 10

В завданні область D обмежена кривими:

$$y=(x-1)^2,\ y^2=x-1.$$

Спочатку знайдемо координати точок перетину кривих, що обмежують цю область. Для цього розв'яжемо систему рівнянь

$$\begin{cases} y = (x-1)^2, \\ y^2 = x-1. \end{cases}$$

Методом виключення знаходимо $y - y^4 = 0$ або $y(1-y^3) = 0$. Звідси $y_1 = 0$, $y_2 = 1$. Тоді $x_1 = 1$, $x_2 = 0$. Точки перетину кривих будуть мати вигляд $M_1(1;0), M_2(2;1)$.

В нашому випадку область D можна описати формулою (12) або формулою (13).

Перший випадок $D = \left\{(x,y),\ 1 \le x \le 2,\ (x-1)^2 \le y \le \sqrt{x-1}\right\}$.

Тоді

$$S_D = \iint\limits_D dxdy = \int\limits_1^2 dx \int\limits_{(x-1)^2}^{\sqrt{x-1}} dy = \int\limits_1^2 dx \cdot y \Bigg|_{(x-1)^2}^{\sqrt{x-1}} = \int\limits_1^2 (\sqrt{x-1} - (x-1)^2) dx =$$

$$= \frac{(x-1)^{\frac{3}{2}}}{3/2}\Bigg|_1^2 - \frac{(x-1)^3}{3}\Bigg|_1^2 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}\ (кв.\ од.).$$

Другий випадок $D = \left\{(x,y),\ 0 \le y \le 1,\ y^2 + 1 \le x \le 1 + \sqrt{y}\right\}$.

Тоді

$$S_D = \iint\limits_D dxdy = \int\limits_0^1 dy \int\limits_{y^2+1}^{1+\sqrt{y}} dx = \int\limits_0^1 dy \cdot x \Bigg|_{y^2+1}^{1+\sqrt{y}} = \int\limits_0^1 (1 + \sqrt{y} - y^2 - 1) dy =$$

$$= \frac{y^{\frac{3}{2}}}{3/2}\Bigg|_0^1 - \frac{y^3}{3}\Bigg|_0^1 = \frac{1}{3}\ (кв.\ од.)$$

Завдання 14. Обчисліть об'єм тіла, обмеженого поверхнями $5x + 2y + 10z - 10 = 0,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0$.

Розв'язок. Потрійний інтеграл по просторовій правильній області G обчислюється за формулою:

$$\iiint\limits_G f(x,y,z)dxdydz = \iint\limits_D dxdy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz,$$

де D проекція області G на площину XOY, а $z_1(x,y), z_2(x,y)$ – поверхні, які обмежують область G знизу і зверху.

З визначення потрійного інтегралу випливає, що об'єм області G можна обчислити при $f \equiv 1$ за формулою:

$$V_G = \iiint\limits_G dxdydz.$$

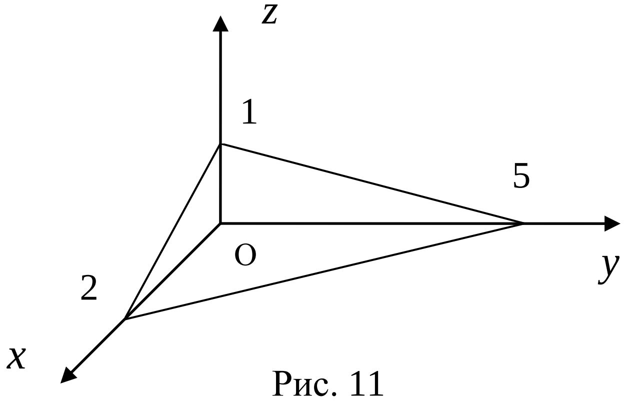

Рис. 11

У запропонованому завданні просторова область є тетраедр. Знизу він обмежений координатною площиною $z = 0$, а зверху площиною

$5x + 2y + 10z - 10 = 0$ або

$$z = 1 - \frac{5x}{10} - \frac{2y}{10} = 1 - \frac{x}{2} - \frac{y}{5}.$$

З боків координатними площинами $x = 0,\ y = 0$ (рис. 11).

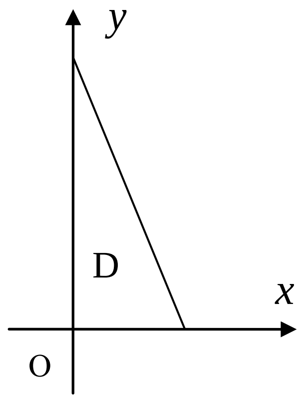

Рис. 12

Проекція D тетраедра на площину XOY є прямокутний трикутник, що відтинається від координатного кута прямою $5x + 2y = 10$ (Рис. 12).

$$D = \left\{ (x,y), 0 \le x \le 2, 0 \le y \le 5 - \frac{5}{2}x \right\},$$

$$G = \left\{ (x,y,z), 0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 5 - \frac{5}{2}x,\ 0 \le z \le 1 - \frac{x}{2} - \frac{y}{5} \right\}.$$

Таким чином, $V_G = \iint\limits_D dxdy \int\limits_0^{1-\frac{x}{2}-\frac{y}{5}} dz = \int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{5-\frac{5}{2}x} dy \cdot z \Big|_0^{1-\frac{x}{2}-\frac{y}{5}} =$

$$=\int_0^2 dx\int_0^{5-\frac{5}{2}x}(1-\frac{x}{2}-\frac{y}{5})dy=\int_0^2 dx\cdot(y-\frac{xy}{2}-\frac{y^2}{10})\Bigg|_0^{5-\frac{5}{2}x}=$$

$$=\int_0^2 dx\cdot(5-\frac{5}{2}x-\frac{5x-\frac{5}{2}x^2}{2}-\frac{(5-\frac{5}{2}x)^2}{10})=\int_0^2(\frac{5}{2}-\frac{5}{2}x+\frac{5x^2}{8})dx=$$

$$=\frac{5}{2}(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{12})\Bigg|_0^2=\frac{5}{3}\,(\text{куб. од.}).$$

Вказівки. Криволінійний інтеграл 1-го роду (по довжині дуги) має вигляд:

$$\int_L \phi(x,y)dl\,,$$

де $\phi(x,y)$ − функція неперервна в деякій області на площині. L − крива $y=f(x)$, яка розташована в цій же області, dl − диференціал дуги кривої. З визначення криволінійного інтегралу 1-го роду, коли $\phi(x,y)\equiv 1$, довжина дуги AB кривої L визначається за формулою:

$$l_{AB}=\int_{AB} dl\,.$$

Обчислення даного інтегралу зводиться до обчислення визначеного інтегралу.

Якщо крива в площині задана в явному вигляді $y=y(x),\ a\le x\le b$, диференціал дуги $dl=\sqrt{1+(y'(x))^2}dx$, кінцеві точки дуги відповідно $A(a,y(a))$, $B(b,y(b))$, то довжина дуги обчислюється за формулою:

$$l_{AB}=\int_{AB} dl=\int_a^b\sqrt{1+(y'(x))^2}dx\,. \qquad (14)$$

Якщо крива задана в параметричному вигляді $x=x(t),\ y=y(t)$, $t_1\le t\le t_2$, відповідно кінцеві точки якої $A(x(t_1),y(t_1))$, $B(x(t_2),y(t_2))$, то

$$l_{AB}=\int\limits_{AB} dl=\int\limits_{t_1}^{t_2}\sqrt{(x_t')^2+(y_t')^2}dt\,. \qquad (15)$$

Завдання 15. Обчисліть довжину дуги кривої за допомогою криволінійного інтегралу 1-го роду:

а) $f(x)=2+chx, 0\le x\le 3,$

б) $x=2\cos^3 t, y=2\sin^3 t,\ t\in[0,2\pi]$.

Розв'язок.

а) Обчислимо довжину дуги кривої $f(x)=2+chx,\ 0\le x\le 3$ за формулою (14):

$$l_{AB}=\int\limits_{AB} dl=\int\limits_{0}^{3}\sqrt{1+(2+chx)'^2}dx=\int\limits_{0}^{3}\sqrt{1+sh^2 x}\,dx=$$

$$=\int\limits_{0}^{3} chxdx=shx\Big|_0^3=sh3 \text{ (од.)}$$

Зауваження. В цьому завданні були використані формули:

$$shx=\frac{e^x-e^{-x}}{2},\ chx=\frac{e^x+e^{-x}}{2},\ \ ch^2x-sh^2x=1.$$

б) $x=2\cos^3 t,\ y=2\sin^3 t,\ t\in[0,2\pi]$. Запропонована крива задана в параметричному вигляді. Це – астроїда (рис. 13). Вона симетрична відносно обох координатних осей. Тому достатньо обчислити довжину її четвертої частини, яка розташована в першому квадранті. За формулою (15) маємо:

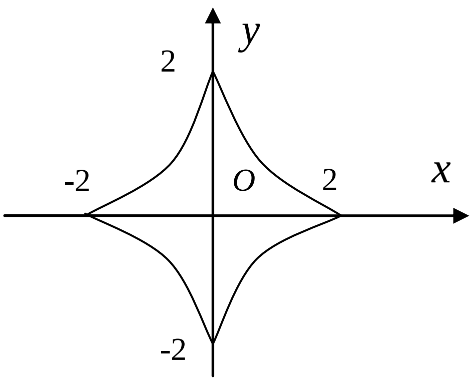

Рис. 13

$$\frac{l}{4}=\int\limits_{t_1}^{t_2}\sqrt{(x_t')^2+(y_t')^2}dt=\int\limits_{0}^{\pi/2}\sqrt{\left((2\cos^3 t)'\right)^2+\left((2\sin^3 t)'\right)^2}dt=$$

$$= \int_0^{\pi/2} \sqrt{36\cos^4 t \sin^2 t + 36\sin^4 t \cos^2 t}\, dt = \int_0^{\pi/2} 6\cos t \sin t\, dt =$$

$$= 6 \cdot \frac{\sin^2 t}{2} \Bigg|_0^{\pi/2} = 3.$$

Звідки отримуємо довжину дуги кривої $l = 12$ (од.).

Список літератури

1. *Бондаренко Н.В.* Інтеграли та їх застосування. Практичний посібник з вищої математики/ Бондаренко Н.В., Забарило О.В., Отрашевська В.В., Пастухова М.С., Соколова Л. В. – КНУБА, 2009. – 64 с.
2. *Берман Г.Н.* Сборник задач по курсу математического анализа. – М.: Наука, 1977. – 432 с.
3. *Денисюк В.*П. Вища математика, навчальний посібник Част. 1,2,3/ Денисюк В.П., Репета В.К. – К. Книжкове видавництво НАУ, 2006.
4. *Дубовик В.П.* Вища математика: Навчальний посібник/ *Дубовик В.П., Юрик І.І.* – К.: Вища школа,1993. – 648 с.
5. *Дубовик В.П.* Вища математика/ Дубовик В.П., Юрик І.І. – К.: «А.С.К.», 2005. – 480 с.
6. *Кузнецов Л.А.* Сборник заданий по высшей математике (типовые расчеты) / Кузнецов Л.А. – М.: Высшая школа, 1983. – 91 с.
7. *Овчинников П.П.* Вища математика: Підручник. У 2 ч. / Пер. з рос. П.М. Юрченка, 3-тє вид., випр./ Овчинников П.П., Яремчук Ф.П., Михайленко В.М. – К.: Техніка, 2007.