Бондаренко Н.В., Наголкіна З.І.,
Пастухова М.С., Печук В.Д.

Методичні вказівки та розв'язання типових задач до контрольної роботи № 1

Вказівки. Комплексні числа

Алгебраїчна форма запису комплексного числа має вигляд $z = a + bi$, де i – уявна одиниця така, що $i^2 = -1$, a і b – дійсні числа. В множині комплексних чисел визначені операції додавання, віднімання, множення та ділення:

1) $(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$,

2) $(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i$,

3) $(a+bi)\cdot(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$,

4) $\dfrac{a+bi}{c+di}=\dfrac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}=\dfrac{ac+bd}{c^2+d^2}+\dfrac{bc-ad}{c^2+d^2}i$, якщо $c+di \neq 0$.

Дії додавання, віднімання та множення над комплексними числами можна виконувати, як звичайні алгебраїчні дії над лінійними двочленами, вважаючи, що $i^2 = -1$.

Комплексне число можна записати і в **тригонометричній формі**

$$z = r(\cos\varphi + \sin\varphi),$$

де $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2} \geq 0$, а φ – це головне значення аргументу комплексного числа, $\varphi \in [0; 2\pi)$ або $\varphi \in [-\pi; \pi)$ (рис. 1).

Якщо $\arg z \in (-\pi; \pi]$, то

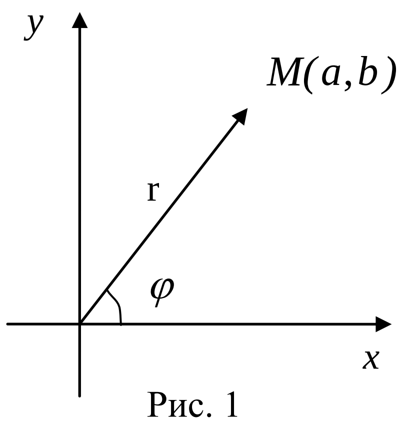

Рис. 1

$$\arg z = \begin{cases} arctg\dfrac{b}{a}, & \text{якщо } a > 0, \\ arctg\dfrac{b}{a} + \pi, & \text{якщо } a < 0, b \geq 0, \\ arctg\dfrac{b}{a} - \pi, & \text{якщо } a < 0,\ b < 0, \\ \dfrac{\pi}{2}, & \text{якщо } a = 0,\ b > 0, \\ -\dfrac{\pi}{2}, & \text{якщо } a = 0,\ b < 0. \end{cases}$$

Якщо $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, то для $n \in \mathbb{N}$ степінь комплексного числа обчислюється за **формулою Муавра**

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi).$$

Завдання 1. Знайдіть алгебраїчну форму комплексних чисел

а) $\dfrac{(5-4i)(3+2i)}{2-3i} - i^3(6-7i)$; б) $(\sqrt{2}i - \sqrt{6})^{48}$.

Розв'язок.

а) $$\frac{(5-i)(3+5i)}{2-3i} - i^3(6-7i) = \frac{15+25i-3i-5i^2}{2-3i} - (-i)(6-7i) =$$

$$= \frac{20+22i}{2-3i} + i(6-7i) = \frac{(20+22i)(2+3i)}{(2-3i)(2+3i)} + 6i + 7 =$$

$$= \frac{40+60i+44i-66}{13} + 6i + 7 = \frac{-26+104i}{13} + 7 + 6i =$$

$$-2 + 8i + 7 + 6i = 5 + 14i.$$

б) Запишемо комплексне число у вигляді $z = \sqrt{2}i - \sqrt{6} = -\sqrt{6} + \sqrt{2}i$ та знайдемо його тригонометричну форму. Дійсна частина комплексного числа $a = -\sqrt{6}$, уявна частина $b = \sqrt{2}$. Модуль комплексного числа

$$|z| = \sqrt{(-\sqrt{6})^2 + (\sqrt{2})^2} = \sqrt{6+2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}.$$

Комплексне число z лежить в другій чверті координатної площини. Тому

$$\varphi = arctg\frac{b}{a} + \pi = arctg(-\frac{1}{\sqrt{3}}) + \pi = -\frac{\pi}{6} + \pi = \frac{5\pi}{6}.$$

Звідси тригонометрична форма комплексного числа має вигляд

$$z = 2\sqrt{2}(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}).$$

За формулою Муавра отримуємо

$$z^{48} = (2\sqrt{2})^{48}(\cos\frac{5\pi}{6}\cdot 48 + i\sin\frac{5\pi}{6}\cdot 48) = 2^{72}(\cos 40\pi + i\sin 40\pi) = 2^{72}.$$

Вказівки. Матриці. Визначники і системи лінійних рівнянь

Матрицею називається прямокутна таблиця, елементами якої можуть бути дійсні або комплексні числа.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},\ a_{ij} \in \square\ (\square, \square, \dots),\ i = 1,\dots,m;\ j = 1,\dots,n.$$

Якщо матриця A складається з m рядків і n стовпчиків, то кажуть, що матриця A **розміру** $m \times n$. Якщо кількість рядків m у матриці A дорівнює кількості стовпчиків, то матриця A називається **квадратною розміру** m.

Елементарними перетвореннями першого, другого та третього типу над рядками (стовпчиками) матриці A називаються:

1. Перестановка двох рядків (стовпчиків).
2. Множення деякого рядка (стовпчика) матриці на ненульове число.
3. Додавання до деякого рядка (стовпчика) матриці іншого рядка (стовпчика) помноженого на ненульове число.

Дві матриці A і B називаються **рядково (стовпчиково) еквівалентними**, якщо одна матриця отримана з іншої за допомогою елементарних перетворень над рядками (стовпчиками). Еквівалентність матриць A і B позначають $A \sim B$.

Визначником другого порядку квадратної матриці $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ називається число, що визначається за формулою:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}.$$

Визначником третього порядку квадратної матриці A розміру три називається число, що визначається за формулою:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} =$$

$$= a_1 b_2 c_3 + a_3 b_1 c_2 + a_2 b_3 c_1 - (a_3 b_2 c_1 + a_2 b_1 c_3 + a_1 b_3 c_2). \qquad (1)$$

Для матриць четвертого порядку і вище визначник можна обчислити за індукцією за допомогою формули розкладу по i-му рядку

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ik} A_{ik}$$

або по j-му стовпчику

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{kj} A_{kj}.$$

В останніх рівностях A_{ij} − алгебраїчне доповнення до елемента a_{ij} матриці A, що визначається як $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$, де M_{ij} − доповнюючий мінор до елемента a_{ij}, тобто визначник порядку $n-1$, складений з елементів вихідної матриці A, з якої викреслений i-тий рядок та j-тий стовпчик.

Зауваження. Визначник третього порядку можна знайти й іншим способом, який полягає у зниженні порядку розкладом за рядком або за стовпчиком. Розклад визначника третього порядку за першим рядком має вигляд:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}. \qquad (2)$$

Властивості визначників:

1. При транспонуванні матриці її визначник не змінюється.
2. Якщо в квадратній матриці A поміняти місцями два рядки (стовпчики), залишивши інші на своїх місцях, то $\det A$ змінить знак на протилежний.

3. Якщо всі елементи якого-небудь рядка (стовпчика) квадратної матриці A помножити на число λ, то $\det A$ також помножиться на λ.

4. Визначник матриці не зміниться, якщо до елементів одного з її рядків (стовпчиків) додати відповідні елементи другого рядка (стовпчика) помножені на деяке число.

5. Якщо квадратна матриця має два однакові рядки (стовпчики), то її визначник дорівнює нулю.

Завдання 2. Знайти добуток матриць $A \cdot B$ та визначник матриці A, якщо

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

Розв'язок.

а) Добуток двох матриць визначений, якщо число стовпчиків першої матриці дорівнює числу рядків другої матриці. Добуток матриць виконують за правилом «**рядок на стовпчик**». Нехай матриця $A = (a_{ij})_{m\times n}$, а матриця $B = (b_{ij})_{n\times l}$. Добутком матриць A і B є матриця C розміру $m \times l$. Щоб знайти елемент добутку c_{ij}, $i = 1,...,m$, $j = 1,...,l$, потрібно елементи i-го рядка помножити на відповідні елементи j-го стовпчика, після чого отримані добутки додати.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2\cdot(-1) + 4\cdot(-2) + (-1)\cdot 1 + 2\cdot 3 & 2\cdot 2 + 4\cdot 0 + (-1)\cdot 1 + 2\cdot(-3) \\ (-1)\cdot(-1) + 2\cdot(-2) + 3\cdot 1 + 1\cdot 3 & (-1)\cdot 2 + 2\cdot 0 + 3\cdot 1 + 1\cdot(-3) \\ 2\cdot(-1) + 5\cdot(-2) + 1\cdot 1 + 4\cdot 3 & 2\cdot 2 + 5\cdot 0 + 1\cdot 1 + 4\cdot(-3) \\ 1\cdot(-1) + 2\cdot(-2) + 0\cdot 1 + 3\cdot 3 & 1\cdot 2 + 2\cdot 0 + 0\cdot 1 + 3\cdot(-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -3 \\ 3 & -2 \\ 1 & -7 \\ 4 & -7 \end{pmatrix}$$

б) Обчислити визначник $\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 & 4 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}$.

Розв’язок. Для обчислення заданого визначника четвертого порядку використаємо метод зниження порядку визначника за допомогою розкладу його за рядком чи стовпчиком. Для спрощення обрахунку визначника за допомогою елементарних перетворень рядків визначника зробимо в першому стовпчику всі елементи нульові, крім одного.

Другий рядок визначника помножимо на три і додамо до першого рядка. Далі другий рядок помножимо на два і додамо до третього рядка. Після цього другий рядок додамо до четвертого рядка.

Отримаємо в першому стовпчику один ненульовий елемент. Визначник розкладемо за першим стовпчиком. Визначник третього порядку обчислимо за формулою (1):

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 & 4 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & -2 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 8 & 8 & 7 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 9 & 4 & 6 \\ 0 & 4 & 3 & 4 \end{vmatrix} = (-1)(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 8 & 8 & 7 \\ 9 & 4 & 6 \\ 4 & 3 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= 128 + 192 + 189 - 112 - 144 - 288 = -35.$$

Завдання 3. а) Розв’язати систему лінійних рівнянь:

1) по правилу Крамера; 2) методом Гауса, або переконатись у її несумісності.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = -2; \\ -9x_1 - 5x_2 + 2x_3 = -1; \\ 6x_1 + 4x_2 + x_3 = -1. \end{cases}$$

Розв’язок.

Вказівки. Система лінійних рівнянь називається:

1) **сумісною**, якщо вона має хоча б один розв’язок;

2) **несумісною**, якщо вона не має жодного розв'язку;

3) **визначеною**, якщо вона має точно один розв'язок;

4) **невизначеною**, якщо вона має безліч розв’язків.

Квадратна система лінійних рівнянь визначена тоді і лише тоді, коли визначник основної матриці системи не дорівнює нулю.

Знайдемо визначник основної матриці запропонованої системи лінійних рівнянь за формулою (1):

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -9 & -5 & 2 \\ 6 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 3\cdot(-5)\cdot 1 + 2\cdot 2\cdot 6 + (-9)\cdot 4\cdot 1 -$$

$$-(1\cdot(-5)\cdot 6 + 2\cdot 4\cdot 3 + 2\cdot(-9)\cdot 1) =$$

$$= -15 + 24 - 36 - (-30 + 24 - 18) = -27 + 24 = -3 \neq 0.$$

Отже, система лінійних рівнянь визначена.

1) Розв'яжемо систему лінійних рівнянь методом Крамера.

Визначник $\Delta = \det A = -3$.

Обчислимо визначники $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$, які отримані з основної матриці A заміною відповідно першого, другого та третього стовпчика на стовпчик вільних членів системи лінійних рівнянь.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -2 & 2 & 1 \\ -1 & -5 & 2 \\ -1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 15, \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -9 & -1 & 2 \\ 6 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -24,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -9 & -5 & -1 \\ 6 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 9.$$

За формулами Крамера отримуємо розв'язок системи:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{15}{-3} = -5,\ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-24}{-3} = 8,\ x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{9}{-3} = -3.$$

2) Розв'яжемо систему лінійних рівнянь методом Гауса. Запишемо розширену матрицю системи лінійних рівнянь

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & -2 \\ -9 & -5 & 2 & -1 \\ 6 & 4 & 1 & -1 \end{array}\right).$$

Метод Гауса розв'язку систем лінійних рівнянь полягає у зведенні розширеної матриці системи за допомогою елементарних перетворень рядків матриці до «ступінчатої» матриці. У випадку визначеної квадратної системи лінійних рівнянь, як у нашому завданні, основна матриця зведеться до одиничної матриці. При цьому в стовпчику справа від вертикальної риски отримаємо розв'язок системи лінійних рівнянь.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & -2 \\ -9 & -5 & 2 & -1 \\ 6 & 4 & 1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 5 & -7 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 0 & -15 \\ 0 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right).$$

В першому перетворенні розширеної матриці ми помножили елементи першого рядка на три і додали до відповідних елементів другого рядка, а також помножили елементи першого рядка на (-2) і додали до відповідних елементів третього рядка. Ми отримали нульові елементи матриці під головною діагоналлю.

Далі потрібно зробити нульові елементи над головною діагоналлю. Тому в другому перетворенні розширеної матриці ми додали елементи третього рядка до відповідних елементів першого рядка, а також помножили елементи третього рядка на п'ять і додали до відповідних елементів другого рядка.

В третьому перетворенні розширеної матриці ми помножили елементи другого рядка на (-2) і додали до відповідних елементів першого рядка.

В четвертому перетворенні розширеної матриці ми помножили перший рядок на $1/3$. Таким чином, зліва від риски ми отримали одиничну матрицю.

Випишемо розв'язок системи лінійних рівнянь:

$$x_1 = -5,\ x_2 = 8,\ x_3 = -3.$$

b) Знайти загальний розв'язок системи лінійних рівнянь або переконатись у її несумісності.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 7; \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 = -2; \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 23; \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 - x_5 = 12. \end{cases}$$

Розв’язок. Випишемо розширену матрицю неоднорідної системи лінійних рівнянь та зведемо її за допомогою елементарних перетворень рядків матриці до ступінчатого вигляду.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 7 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 23 \\ 5 & 4 & 3 & 3 & -1 & 12 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -6 & -23 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 23 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -6 & -23 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 23 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 & -5 & -16 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 23 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

З останньої матриці визначаємо, що пов’язаними змінними системи лінійних рівнянь є x_1 та x_2, а вільними змінними x_3, x_4, x_5. Кількість пов’язаних змінних рівна кількості ненульових рядків після зведення матриці до «ступінчатого» виду. Пов’язані змінні вибирають довільно, але так, щоб стовпчики, яким вони відповідають, були лінійно незалежними. Вільні змінні – це змінні, які можуть приймати довільні дійсні значення. Пов’язані змінні визначаються через вільні.

Випишемо загальний розв’язок системи лінійних рівнянь за спрощеною матрицею, залишивши пов’язані змінні x_1, x_2 в лівій частині рівностей, а вільні змінні x_3, x_4, x_5 в правій частині.

$$\begin{cases} x_1 = -16 + x_3 + x_4 + 5x_5; \\ x_2 = 23 - 2x_3 - 2x_4 - 6x_5; \\ x_3 = c_3, \\ x_4 = c_4, \\ x_5 = c_5, \end{cases} \text{, де } c_3, c_4, c_5 \in \mathbb{R}.$$

Завдання 4. Довести, що вектори $\vec{a}_1 = (7; -3; 2)$, $\vec{a}_2 = (2; -4; 5)$, $\vec{a}_3 = (-9; -1; 4)$ утворюють базис лінійного простору $\mathbf{R}^3$, і знайти координати вектора $\vec{b} = (5; 5; -7)$ в цьому базисі.

Розв'язок. Вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ утворюють базис лінійного простору $\mathbf{R}^3$, розмірність якого рівна трьом, тоді і тільки тоді, коли вони лінійно незалежні. Для цього достатньо показати, що $rank(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3) = 3$. Знайдемо визначник матриці, стовпчиками якої є вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$.

$$\begin{vmatrix} 7 & 2 & -9 \\ -3 & -4 & -1 \\ 2 & 5 & 4 \end{vmatrix} = 7 \cdot \begin{vmatrix} -4 & -1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} + (-9) \begin{vmatrix} -3 & -4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$= 7(-16+5) - 2(-12+2) - 9(-15+8) = 6 \neq 0$$

Отже, $rank(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3) = 3$ і система векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ утворює базис простору $\mathbf{R}^3$.

Оскільки вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ є базисом лінійного простору $\mathbf{R}^3$, то існують єдині коефіцієнти $x_1, x_2, x_3 \in \mathbf{R}$ такі, що

$$x_1 \vec{a}_1 + x_2 \vec{a}_2 + x_3 \vec{a}_3 = \vec{b}. \qquad (3)$$

Коефіцієнти x_1, x_2, x_3 називаються координатами вектора $\vec{b}$ в базисі $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$. Щоб знайти x_1, x_2, x_3 запишемо рівність (3) у векторному вигляді

$$x_1 \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -9 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ -7 \end{pmatrix}.$$

Або $\begin{pmatrix} 7x_1 + 2x_2 - 9x_3 \\ -3x_1 - 4x_2 - x_3 \\ 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ -7 \end{pmatrix}$, $\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 - 9x_3 = 5, \\ -3x_1 - 4x_2 - x_3 = 5, \\ 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 = -7. \end{cases}$

Отже, задача знаходження координат вектора $\vec{b}$ в базисі $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ звелась до знаходження розв'язку системи лінійних рівнянь. Розв'яжемо систему лінійних рівнянь методом Крамера. Визначники $\Delta, \Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ обчислимо за формулою (2):

$$\Delta = \begin{vmatrix} 7 & 2 & -9 \\ -3 & -4 & -1 \\ 2 & 5 & 4 \end{vmatrix} = 7\begin{vmatrix} -4 & -1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} + (-9)\begin{vmatrix} -3 & -4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$= 7(-16+5) - 2(-12+2) - 9(-15+8) = 6,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 5 & 2 & -9 \\ 5 & -4 & -1 \\ -7 & 5 & 4 \end{vmatrix} = 5\begin{vmatrix} -4 & -1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ -7 & 4 \end{vmatrix} + (-9)\begin{vmatrix} 5 & -4 \\ -7 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= 5(-16+5) - 2(20-7) - 9(25-28) = -54,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 7 & 5 & -9 \\ -3 & 5 & -1 \\ 2 & -7 & 4 \end{vmatrix} = 7\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ -7 & 4 \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} + (-9)\begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 2 & -7 \end{vmatrix} =$$

$$= 7(20-7) - 5(-12+2) - 9(21-10) = 42,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 7 & 2 & 5 \\ -3 & -4 & 5 \\ 2 & 5 & -7 \end{vmatrix} = 7\begin{vmatrix} -4 & 5 \\ 5 & -7 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 2 & -7 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} -3 & -4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$= 7(28-25) - 2(21-10) + 5(-15+8) = -36.$$

Отримуємо $x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta} = -9,\ x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta} = 7,\ x_3 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta} = -6$.

Отже, координати вектора $\vec{b}$ в базисі $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ мають вигляд $\vec{b} = (-9; 7; -6)$.

Завдання 5. Дано вершини трикутника ABC: $A(5;-4),\ B(9;-1), C(-1,-2)$ (рис. 2). Знайдіть: a) рівняння сторін трикутника; b) косинус кута при вершині A; c) рівняння медіани та висоти, проведеної з вершини B.

Розв'язок. а) Щоб записати рівняння сторони AB, запишемо рівняння прямої, що проходить через дві точки A та B.

$$AB: \quad \frac{x-5}{9-5} = \frac{y-(-4)}{-1-(-4)}; \quad \frac{x-5}{4} = \frac{y+4}{3}; \quad 3\cdot(x-5) = 4\cdot(y+4).$$

Звідси маємо рівняння прямої AB: $3x-4y-31=0$.

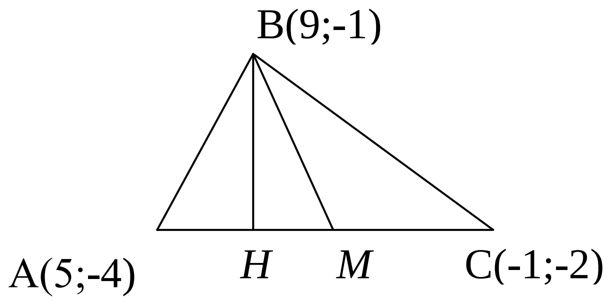

Рис. 2

Аналогічно знайдемо рівняння прямих, що проходять через сторони BC та AC.

$$BC: \ \frac{x-(-1)}{9-(-1)}=\frac{y-(-2)}{-1-(-2)}\ ; \ \frac{x+1}{10}=\frac{y+2}{1}; \ x-10y-19=0.$$

$$AC: \ \frac{x-(-1)}{5-(-1)}=\frac{y-(-2)}{-4-(-2)}; \ \frac{x+1}{6}=\frac{y+2}{-2}; \ x+3y+7=0.$$

b) Косинус кута при вершині A рівний косинусу кута між векторами $\overrightarrow{AB}$ та $\overrightarrow{AC}$. Знайдемо координати векторів $\overrightarrow{AB}$ та $\overrightarrow{AC}$.

$\overrightarrow{AB}=(9-5;-1-(-4))=(4;3)$, $\overrightarrow{AC}=(-1-5;-2-(-4))=(-6;2)$.

Тоді

$$\cos\angle A=\frac{(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|}=\frac{4\cdot(-6)+3\cdot 2}{\sqrt{4^2+3^2}\cdot\sqrt{(-6)^2+2^2}}=\frac{-18}{10\sqrt{10}}=\frac{-9}{5\sqrt{10}}.$$

c) Для того, щоб знайти рівняння прямої, що проходить через медіану BM, знайдемо координати точки M, як середини відрізка AC.

$$M\left(\frac{5+(-1)}{2};\frac{-4+(-2)}{2}\right) \text{ або } M(2;-3).$$

Запишемо рівняння медіани BM, як пряму, що проходить через дві точки B та M.

$$BM: \ \frac{x-2}{9-2}=\frac{y-(-3)}{-1-3}; \ \frac{x-2}{7}=\frac{y+3}{-4}; \ 4x+7y+13=0.$$

Для того, щоб записати рівняння висоти BH, знайдемо вектор нормалі (довільний перпендикулярний вектор до BH). Таким вектором буде вектор $\overrightarrow{AC}=(-6;2)$, оскільки висота BH перпендикулярна до сторони AC трикутника ABC. Запишемо рівняння прямої BH, як пряму, що проходить через точку B перпендикулярно вектору $\vec{N} = \overrightarrow{AC} = (-6;2)$.

$$BH: \ (-6)\cdot(x-9)+2\cdot(y+1)=0; \ \ 3x-y-28=0.$$

Завдання 6. Дано координати вершин тетраедра: $A(1;3;6)$, $B(2;2;1)$, $C(-1;0;1)$, $D(-4;6;-3)$ (рис. 3). Знайти:

a) рівняння та довжину ребра AB;
b) рівняння площини ABC;
c) площу грані ABC;
d) кут нахилу ребра AD до площини ABC;
e) рівняння і довжину висоти, проведеної з вершини D на грань ABC;
f) об'єм тетраедра $ABCD$;
g) проекцію H вершини D на площину ABC.

Розв'язок.

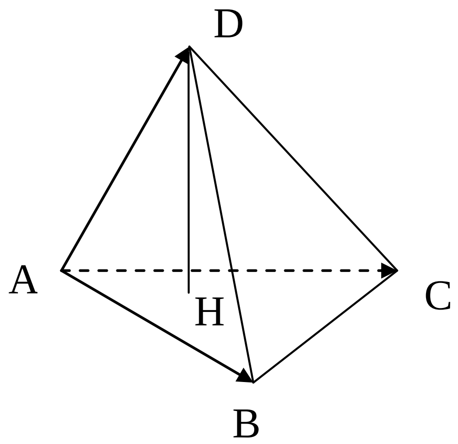

Рис. 3

а) Запишемо рівняння прямої, що проходить через ребро AB, як рівняння прямої, що проходить через дві точки A і B

$$AB: \ \frac{x-1}{2-1}=\frac{y-3}{2-3}=\frac{z-6}{1-6};$$

$$AB: \ \frac{x-1}{1}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z-6}{-5}.$$

Довжину ребра AB знайдемо за формулою відстані між точками:

$$AB=\sqrt{(2-1)^2+(2-3)^2+(1-6)^2}=\sqrt{1+1+25}=\sqrt{27}=3\sqrt{3}.$$

б) Рівняння площини ABC запишемо, як рівняння площини, що проходить через три точки A, B, C

$$\begin{vmatrix} x-x_A & y-y_A & z-z_A \\ x_B-x_A & y_B-y_A & z_B-z_A \\ x_C-x_A & y_C-y_A & z_C-z_A \end{vmatrix}=0;$$

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-3 & z-6 \\ 2-1 & 2-3 & 1-6 \\ -1-1 & 0-3 & 1-6 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x-1 & y-3 & z-6 \\ 1 & -1 & -5 \\ -2 & -3 & -5 \end{vmatrix}=0;$$

$$(x-1)\begin{vmatrix}-1 & -5\\ -3 & -5\end{vmatrix}-(y-3)\begin{vmatrix}1 & -5\\ -2 & -5\end{vmatrix}+(z-6)\begin{vmatrix}1 & -1\\ -2 & -3\end{vmatrix}=0;$$

$$-10(x-1)+15(y-3)-5(z-6)=0.$$

Звідси маємо рівняння площини ABC в загальному вигляді

$$2x-3y+z+1=0.$$

Зауважимо, що вектор нормалі до площини ABC має вигляд $\vec{N}=(2;-3;1)$.

c) Площа грані ABC − це площа трикутника ΔABC. Площу ΔABC знайдемо за формулою

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}|[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}]|.$$

Запишемо координати векторів $\overrightarrow{AB}=(1;-1;-5)$, $\overrightarrow{AC}=(-2;-3;-5)$. Векторний добуток $[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}]$ знайдемо за формулою:

$$[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & -1 & -5\\ -2 & -3 & -5\end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix}-1 & -5\\ -3 & -5\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}1 & -5\\ -2 & -5\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}1 & -1\\ -2 & -3\end{vmatrix}=$$

$$=-10\vec{i}+15\vec{j}-5\vec{k}.$$

Звідси $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\sqrt{(-10)^2+15^2+(-5)^2}=\frac{5\sqrt{14}}{2}$ (кв. од).

d) Кут нахилу ребра AD до площини ABC − це кут між прямою AD та площиною. Напрямний вектор прямої AD − вектор $\overrightarrow{AD}=(-5;3;-9)$. Вектор нормалі до площини ABC рівний $\vec{N}=(2;-3;1)$. Кут між прямою та площиною знайдемо за формулою

$$\sin\alpha=\frac{(\vec{n},\overrightarrow{AD})}{|\vec{N}|\cdot|\overrightarrow{AD}|}=\frac{-5\cdot(-2)+3\cdot 3+(-9)\cdot(-1)}{\sqrt{4+9+1}\cdot\sqrt{25+9+81}}=\frac{28}{\sqrt{115}\sqrt{14}}.$$

e) Щоб записати рівняння прямої, що проходить через висоту DH, використаємо формулу запису рівняння прямої через точку $D(-4;6;-3)$ та напрямний вектор до прямої. Напрямним вектором до прямої DH є вектор нормалі $\vec{N}=(2;-3;1)$ до площини ABC, оскільки пряма DH перпендикулярна до площини ABC.

$$DH:\ \frac{x-(-4)}{2}=\frac{y-6}{-3}=\frac{z-(-3)}{1}\ ;\quad \frac{x+4}{2}=\frac{y-6}{-3}=\frac{z+3}{1}.$$

Довжину d висоти DH знайдемо за формулою відстані від точки D до площини ABC ($2x-3y+z+1=0$).

$$d=\frac{|2\cdot(-4)-3\cdot 6+1\cdot(-3)+1|}{\sqrt{2^2+(-3)^2+1^2}}=\frac{28}{\sqrt{14}}=2\sqrt{14}.$$

f) Об'єм тетраедра $ABCD$ обчислимо за формулою:

$$V_{ABCD}=\frac{1}{6}|(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})|=\frac{1}{6}\left|\begin{vmatrix}1 & -1 & -5\\ -2 & -3 & -5\\ -5 & 3 & -3\end{vmatrix}\right|=\frac{80}{6}=\frac{40}{3}\ \text{(куб. од.)}$$

g) Для того, щоб знайти проекцію H вершини D на площину ABC, знайдемо точку перетину прямої DH і площини ABC. Для цього рівняння прямої DH: $\frac{x+4}{2}=\frac{y-6}{-3}=\frac{z+3}{1}$ запишемо в параметричному вигляді

$$\frac{x+4}{2}=\frac{y-6}{-3}=\frac{z+3}{1}=t,\ \begin{cases}x+4=2t,\\ y-6=-3t,\\ z+3=t.\end{cases}\ \begin{cases}x=-4+2t,\\ y=6-3t,\\ z=-3+t.\end{cases}\qquad (4)$$

Підставимо x,y,z з рівнянь (4) в рівняння площини ABC: $2x-3y+z+1=0$ та знайдемо значення параметра t, при якому точка H належить площині ABC і прямій DH.

$$2(-4+2t)-3(6-3t)-3+t+1=0,\quad 14t-28=0.$$

Звідси $t=2$. Підставляючи це значення параметра t в рівняння (4), отримаємо координати точки H:

$$x=-4+2\cdot 2=0,\ y=6-3\cdot 2=0,\ z=-3+2=-1.$$

Або $H(0;0;-1)$.

Завдання 7. Обчислити границю функцій.

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{18x^4+x^3+9}{9x^4-5x^2-2}$.

Безпосередня підстановка в цей вираз граничного значення аргументу приводить до невизначеності виду $\frac{\infty}{\infty}$. Перетворимо вираз

$\dfrac{18x^4+x^3+9}{9x^4-5x^2-2}$, поділивши чисельник і знаменник на найвищу степінь аргументу в знаменнику, тобто на x^4:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(18x^4+x^3+9)\cdot\frac{1}{x^4}}{(9x^4-5x^2-2)\cdot\frac{1}{x^4}}=\lim_{x\to\infty}\frac{18+\frac{1}{x}+\frac{9}{x^4}}{9-\frac{5}{x^2}-\frac{2}{x^4}}=\frac{18}{9}=2.$$

При цьому ми врахували, що $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^k}=0$, коли $k>0$.

b) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{\sqrt{3x}-3}$.

Безпосередня підстановка в цей вираз граничного значення аргументу приводить до невизначеності виду $\dfrac{0}{0}$. Щоб позбутися цієї невизначеності, помножимо чисельник і знаменник на вираз, який буде спряженим до знаменника, а саме на $(\sqrt{3x}+3)$ (під спряженістю розуміємо утворення різниці квадратів $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$).

Дістанемо:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{\sqrt{3x}-3}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(\sqrt{3x}+3)}{(\sqrt{3x}-3)(\sqrt{3x}+3)}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(\sqrt{3x}+3)}{(\sqrt{3x}-3)(\sqrt{3x}+3)}=$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(\sqrt{3x}+3)}{(3x-9)}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(\sqrt{3x}+3)}{3(x-3)}=\lim_{x\to 3}\frac{(\sqrt{3x}+3)}{3}=2.$$

Вказівки. Границі функцій

Границю $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ називають **першою важливою границею.** Наслідки з першої важливої границі:

$$1)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin kx}{x}=k,\quad 2)\ \lim_{x\to 0}\frac{tgkx}{x}=k,\ 3)\ \lim_{x\to 0}\frac{\arcsin kx}{x}=k,$$

$$4)\ \lim_{x\to 0}\frac{arctgkx}{x}=k,\qquad 5)\ \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}.$$

Границю $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$ або $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$ називають **другою важливою** границею. Наслідки з другої важливої границі:

$$1)\ \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^{x}=e^{k},\qquad 2)\ \lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\log_a e,$$

$$3)\ \lim_{x\to 0}\frac{a^{x}-1}{x}=\ln a,\qquad 4)\ \lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{k}-1}{x}=k.$$

Нескінченно малі функції $\alpha(x)$ та $\beta(x)$ ($\alpha(x)\to 0,\ \beta(x)\to 0$ при $x\to x_0$) називаються **еквівалентними** $\alpha(x)\sim\beta(x)$, якщо $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1.$

При обчисленні границь функцій часто використовують властивість нескінченно малих функцій: якщо $\alpha(x)\sim\alpha_1(x)$, $\beta(x)\sim\beta_1(x)$ при $x\to x_0$, то

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}. \qquad (5)$$

З першою та другою «важливими» границями пов’язані такі еквівалентності:

$$x\sim\sin x\sim tgx\sim\arcsin x\sim arctgx\sim e^{x}-1\sim\ln(1+x),$$

$$1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^{2},\ a^{x}-1\sim x\ln a,\ (1+x)^{k}-1\sim kx, \qquad (6)$$

$$\log_a(1+x)\sim x\log_a,\ \textit{якщо}\ x\to 0.$$

c) $\lim\limits_{x\to 0}(e^{2x}-1)ctg3x$.

Розв’язок. Використовуючи властивість $ctg3x=\dfrac{1}{tg3x}$, запишемо умову завдання у вигляді $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(e^{2x}-1)}{tg3x}$.

Безпосередня підстановка в цей вираз граничного значення аргументу приводить до невизначеності виду $\dfrac{0}{0}$. Запропоноване завдання можна розв’язати двома способами.

1 спосіб. Використовуючи наслідки першої та другої важливих границь, а саме границі $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx}{x}=1$ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(e^{x}-1)}{x}=1$, та властивість границь, за якою $\lim\limits_{x\to a}f(x)g(x)=\lim\limits_{x\to a}f(x)\cdot\lim\limits_{x\to a}g(x)$ (вважається, що $f(x), g(x)$ мають скінченні границі в точці a), отримуємо вирази:

$$\lim_{x\to 0}\frac{(e^{2x}-1)}{tg3x}=\frac{2}{3}\lim_{x\to 0}\frac{(e^{2x}-1)}{2x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{3x}{tg3x}=\frac{2}{3}.$$

2 спосіб. Замінимо чисельник і знаменник за властивістю (5) відповідними еквівалентними функціями з (6):

$$\lim_{x\to 0}\frac{(e^{2x}-1)}{tg3x}=\begin{bmatrix} e^{2x}-1 \sim 2x,\ x\to 0 \\ tg3x \sim 3x,\ x\to 0\end{bmatrix}=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{3x}=\frac{2}{3}.$$

d) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x-7}{2x+3}\right)^{7x-1}$.

Безпосередня підстановка в цей вираз граничного значення аргументу приводить до невизначеності виду 1^{∞}. Для розкриття такої невизначеності слід застосувати другу важливу границю $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$, а також властивість границі показниково-степеневої функції: $\lim\limits_{x\to a}(f(x))^{\varphi(x)}=\left(\lim\limits_{x\to a}f(x)\right)^{\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)}$. Виконаємо тотожні перетворення:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x-7}{2x+3}\right)^{7x-1}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3-3-7}{2x+3}\right)^{7x-1}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-10}{2x+3}\right)^{7x-1}=$$

$$==\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{2x+3}{-10}}\right)^{7x-1}=\left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{2x+3}{-10}}\right)^{\frac{2x+3}{-10}}\right]^{\frac{(7x-1)(-10)}{2x+3}}=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-70x+10}{2x+3}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-70+\frac{10}{x}}{2+\frac{3}{x}}}=e^{-35}.$$

Завдання 8. Обчислити похідні.

a) $y=14x^{6}+\arccos 8x\cdot\ln 7x$.

Застосуємо формулу для знаходження похідної від добутку двох диференційованих в точці x функцій $u(x)$ та $v(x)$, а саме:

$$(u(x)\cdot v(x))'=u'(x)\cdot v(x)+u(x)\cdot v'(x). \qquad (7)$$

$$y' = 14\cdot 6x^5 + (\arccos 8x)'\ln 7x + \arccos 8x(\ln 7x)' =$$

$$= 84x^5 + \left(-\frac{8}{\sqrt{1-64x^2}}\right)\cdot \ln 7x + \arccos 8x \cdot \frac{7}{7x} =$$

$$= 84x^5 - \frac{8\ln 7x}{\sqrt{1-64x^2}} + \frac{1}{x}\cdot \arccos 8x.$$

b) $y = \sin^7(\sin 7x)$.

У запропонованому завданні потрібно обчислити похідну від складеної функції. Нехай $y = f(\varphi(x))$ складена функція, тобто $y = f(u)$, а $u = \varphi(x)$. Тоді, якщо для відповідних значень x та u існують похідні $f'(u)$ та $u' = \varphi'(x)$, то існує похідна функції y по x, при цьому справедлива рівність:

$$y' = f'(u)\cdot u'(x) \quad (y'_x = y'_u \cdot u'_x). \tag{8}$$

Таким чином, отримуємо:

$$y' = 7\sin^6(\sin 7x)\cdot \cos(\sin 7x)\cdot \cos 7x \cdot 7 =$$

$$= 49\cdot \sin^6(\sin 7x)\cdot \cos(\sin 7x)\cdot \cos 7x.$$

c) $y = \dfrac{\cos^2 5x}{2x-5}$.

У запропонованому завданні потрібно обчислити похідну від дробу. Застосуємо формулу похідної від дробу двох диференційованих в точці x функцій $u(x), v(x)$, $v(x) \neq 0$, а саме:

$$\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \frac{u'(x)v(x) - v'(x)u(x)}{v^2(x)}. \tag{9}$$

Таким чином, отримуємо:

$$y' = \frac{(\cos^2 5x)'(2x-5) - (2x-5)'\cos^2 5x}{(2x-5)^2} =$$

$$= \frac{2\cos 5x\cdot(-\sin 5x)\cdot 5\cdot(2x-5) - 2\cos^2 5x}{(2x-5)^2} =$$

$$= \frac{-10\cos 5x \sin 5x(2x-5) - 2\cos^2 5x}{(2x-5)^2} = \frac{-5\sin 10x\cdot(2x-5) - 2\cos^2 5x}{(2x-5)^2}.$$

d) $y = (arctg 3x)^{\sqrt{x}}$.

У запропонованому завданні функція y є показниково-степеневою функцією. Для обчислення похідної такої функції спочатку треба прологарифмувати обидві частини виразу, а потім застосувати формулу для знаходження похідної добутку функцій і похідної складеної функції.

$$(\ln y) = \ln(arctg3x)^{\sqrt{x}};$$

$$\ln y = \sqrt{x} \cdot \ln arctg3x; \ (\ln y)' = (\sqrt{x} \cdot \ln arctg3x)';$$

$$\frac{y'}{y} = (\sqrt{x})' \cdot (\ln arctg3x) + \sqrt{x}(\ln arctg3x)' =$$

$$= \frac{\ln arctg3x}{2\sqrt{x}} + \frac{3\sqrt{x}}{arctg3x \cdot (1+9x^2)};$$

$$y' = y \cdot \left(\frac{\ln arctg3x}{2\sqrt{x}} + \frac{3\sqrt{x}}{arctg3x \cdot (1+9x^2)} \right);$$

$$y' = (arctg3x)^{\sqrt{x}} \cdot \left(\frac{\ln arctg3x}{2\sqrt{x}} + \frac{3\sqrt{x}}{arctg3x \cdot (1+9x^2)} \right).$$

Завдання 9. Обчислити границі за правилом Лопіталя.

а) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos 2x}$, б) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sin 5\pi x}{\sin 2\pi x}$, в) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln \sin 2x}{\ln \sin x}$.

Вказівки. При розкритті невизначеностей виду $\dfrac{0}{0}$, $\dfrac{\infty}{\infty}$ використовують правило Лопіталя, яке полягає в тому, що границя відношення двох функцій дорівнює границі відношення похідних у випадку їх існування.

Правило Лопіталя. Нехай функції $f(x), g(x)$:

а) нескінченно малі або нескінченно великі, коли $x \to a$,

б) диференційовані в околі точки $x = a$ за винятком можливо самої точки a,

в) $g'(x) \neq 0$ в околі точки $x = a$, за винятком можливо самої точки $x = a$,

г) існує скінченна або нескінченна границя $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = A$.

Тоді границя відношення функцій $f(x)$, $g(x)$ дорівнює границі відношення їх похідних, тобто

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Це правило справедливе і для випадку, коли $x\to\infty$.

Розв'язок.

а) $$\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos 2x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{(e^x+e^{-x}-2)'}{(1-\cos 2x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{2\sin 2x}=$$

$$=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{(e^x-e^{-x})'}{(2\sin 2x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}}{4\cos 2x}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}.$$

б) $$\lim_{x\to 1}\frac{\sin 5\pi x}{\sin 2\pi x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 1}\frac{(\sin 5\pi x)'}{(\sin 2\pi x)'}=\lim_{x\to 1}\frac{5\pi\cos 5\pi x}{2\pi\cos 2\pi x}=-\frac{5}{2}.$$

в) $$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\sin 2x}{\ln\sin x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{(\ln\sin 2x)'}{(\ln\sin x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\sin 2x}2\cos 2x}{\frac{1}{\sin x}\cos x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2\sin x\cos x}2\cos 2x}{\frac{1}{\sin x}\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos 2x}{\cos^2 x}=1.$$

Завдання 10.

а) Зробити повне дослідження функції $y=x^4-4x^2+3$ та побудувати її графік.

Розв'язок.

1. *Область визначення функції.* Функція визначена всюди на числовій осі $(-\infty,\infty)$.

2. *Парність, непарність функції.* Функція парна, якщо $f(-x)=f(x)$ і непарна, якщо $f(-x)=-f(x)$.

Для заданої функції

$$y(-x)=(-x)^4-4(-x)^2+3=x^4-4x^2+3=y(x).$$

Тому функція $y=x^4-4x^2+3$ є парною. Графік функції буде симетричним відносно осі Oy.

3. *Періодичність функції.* Функція періодична, якщо $y(x) = y(x+T),\ T > 0$. Задана функція неперіодична.

4. *Нулі функції.* Коли $x = 0$, отримуємо $y = 3$. Отже, вісь Oy графік функції перетинає в точці $y = 3$.

Коли $y = 0$, потрібно розв'язати рівняння $x^4 - 4x^2 + 3 = 0$. Це є біквадратним рівнянням. Зробимо заміну $x^2 = t$ і отримаємо квадратне рівняння $t^2 - 4t + 3 = 0$. За теоремою Вієта знаходимо корені $t_1 = 1,\ t_2 = 3$. Звідси корені рівняння $x^4 - 4x^2 + 3 = 0$ будуть мати вигляд

$$x_1 = 1,\ x_2 = -1,\ x_3 = \sqrt{3},\ x_4 = -\sqrt{3}. \qquad (10)$$

Отже, вісь Ox графік функції перетинає в точках (10).

5. *Інтервали монотонності. Точки локального екстремуму.*

Знайдемо похідну заданої функції $y = x^4 - 4x^2 + 3$ та прирівняємо її до нуля, щоб знайти критичні точки

$$y' = 4x^3 - 8x = 4x(x^2 - 2) = 4x(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2}) = 0.$$

Звідси маємо корені рівняння $x = 0, x = -\sqrt{2}, x = \sqrt{2}$, які є критичними точками заданої функції.

Далі знайдемо знак похідної $y' = 4x(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$ на кожному з інтервалів $(-\infty; -\sqrt{2}), (-\sqrt{2}; 0), (0; \sqrt{2}), (\sqrt{2}; +\infty)$. Для цього використаємо відомий з курсу шкільної математики метод інтервалів (рис. 4). Тобто візьмемо довільні числові значення x_i з інтервалів і знайдемо $y'(x_i) > 0$ чи $y'(x_i) < 0$. Такий знак матиме похідна на відповідному інтервалі. Обчислимо:

$$y'(-2) = -16 < 0,\ y'(-1) = 4 > 0,\ y'(1) = -4 < 0,\ y'(2) = 16 > 0.$$

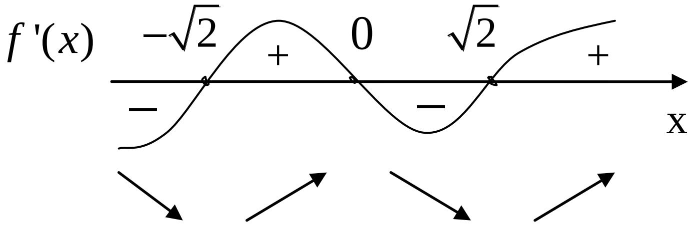

Рис. 4

Отже, функція зростає, якщо $x \in (-\sqrt{2};0) \cup (\sqrt{2};+\infty)$. Функція спадає, якщо $x \in (-\infty;-\sqrt{2}) \cup (0;\sqrt{2})$.

За теоремою про достатні умови локального екстремуму маємо, що $x_1 = -\sqrt{2}$ та $x_2 = \sqrt{2}$ є точками локального мінімуму функції, а точка $x_3 = 0$ є точкою локального максимуму функції.

Локальний мінімум функції в точках $x_1 = -\sqrt{2}$ та $x_2 = \sqrt{2}$ відповідно буде рівний

$$y_{\min 1} = y(-\sqrt{2}) = (-\sqrt{2})^4 - 4(-\sqrt{2})^2 + 3 = -1;\ y_{\min 2} = y(\sqrt{2}) = -1.$$

Локальний максимум функції в точці $x_3 = 0$ рівний $y_{\max} = y(0) = 3$.

6. *Інтервали випуклості вгору, вниз та точки перегину.*

Знайдемо другу похідну функції $y = x^4 - 4x^2 + 3$ та прирівняємо її до нуля, щоб знайти точки підозрілі на перегин.

$$y'' = (4x^3 - 8x)' = 12x^2 - 8 = 12(x^2 - \frac{2}{3}) = 12(x - \sqrt{\frac{2}{3}})(x + \sqrt{\frac{2}{3}}) = 0.$$

Звідси знаходимо $x_1 = -\sqrt{\frac{2}{3}}$, $x_2 = \sqrt{\frac{2}{3}}$ – точки підозрілі на перегин.

Знайдемо знак другої похідної на інтервалах $(-\infty;-\sqrt{\frac{2}{3}}), (-\sqrt{\frac{2}{3}};\sqrt{\frac{2}{3}}), (\sqrt{\frac{2}{3}};+\infty)$ (рис. 5). Отримуємо:

$$y''(-1) = 4 > 0,\ y''(0) = -8 < 0,\ y''(1) > 0.$$

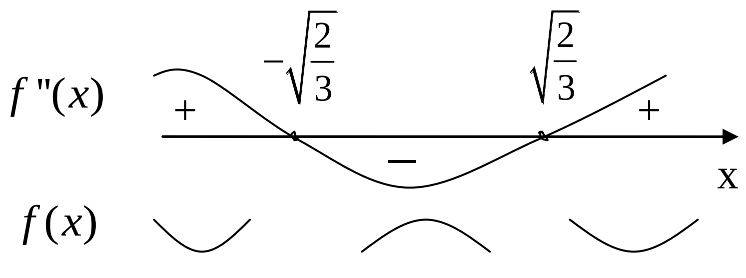

Рис. 5

Отже, задана функція випукла вниз на інтервалах $(-\infty;-\sqrt{\frac{2}{3}})$, $(\sqrt{\frac{2}{3}};+\infty)$. Функція випукла вгору на інтервалі $(-\sqrt{\frac{2}{3}};\sqrt{\frac{2}{3}})$. Точки $x_1=-\sqrt{\frac{2}{3}}\approx-0{,}8$, $x_2=\sqrt{\frac{2}{3}}\approx 0{,}8$ є точками перегину графіка функції.

6. Враховуючи зроблені вище дослідження, побудуємо графік функції.

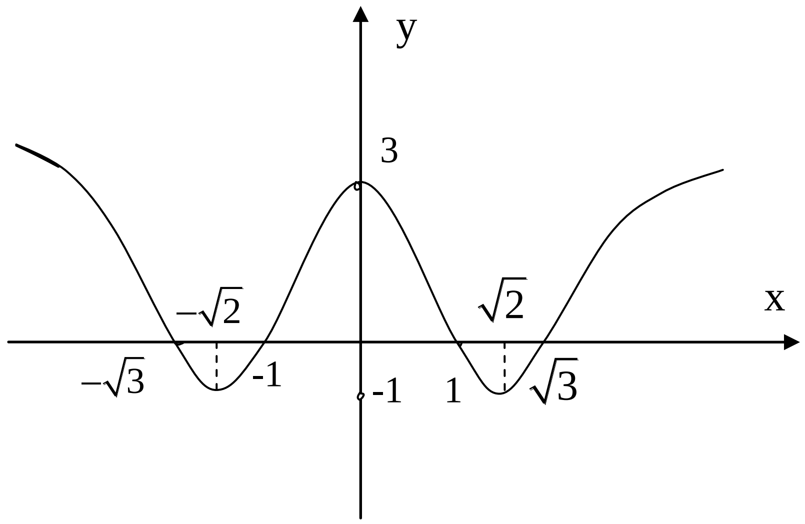

Рис. 6

б) Зробити повне дослідження функції $y=\dfrac{x}{x^2-1}$ та побудувати її графік.

1. *Область визначення функції.*

Функція визначена всюди на числовій осі, крім точок $x=\pm1$. Тобто $x\in(-\infty,-1)\cup(-1;1)\cup(1;+\infty)$.

2. *Парність, непарність функції.* Функція парна, якщо $f(-x)=f(x)$ і непарна, якщо $f(-x)=-f(x)$.

Для заданої функції

$$y(-x)=\frac{-x}{(-x)^2-1}=-\frac{x}{x^2-1}=-y(x).$$

Отже, функція $y(x)$ є непарною. Графік функції буде симетричним відносно точки $O(0;0)$.

3. *Періодичність функції.* Функція періодична, якщо $y(x) = y(x+T),\ T > 0$. Задана функція неперіодична.

4. *Нулі функції.* Коли $x = 0$, отримуємо $y = 0$. Таким чином, графік функції проходить через початок прямокутної декартової системи координат – точку $O(0;0)$.

5. *Інтервали монотонності. Точки локального екстремуму.*

Знайдемо похідну заданої функції $y = \dfrac{x}{x^2-1}$ та прирівняємо її до нуля, щоб знайти критичні точки та інтервали монотонності.

$$y' = \frac{(x^2-1)-(2x)x}{(x^2-1)^2} = \frac{x^2-1-2x^2}{(x^2-1)^2} = \frac{-x^2-1}{(x^2-1)^2} = -\frac{x^2+1}{(x^2-1)^2} < 0.$$

Отже, $y' < 0$ для всіх значень x з області визначення досліджуваної функції. Звідси маємо, що функція спадає на всій області визначення $x \in (-\infty, -1) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty)$.

6. *Інтервали випуклості вгору, вниз та точки перегину.*

Знайдемо другу похідну функції $y = \dfrac{x}{x^2-1}$ та прирівняємо її до нуля, щоб знайти точки підозрілі на перегин та інтервали випуклості вгору та вниз.

$$y'' = (y')' = \left(-\frac{x^2+1}{(x^2-1)^2}\right)' = -\frac{2x(x^2-1)^2 - 2(x^2-1)2x(x^2+1)}{(x^2-1)^4} =$$

$$= -\frac{(x^2-1)(2x(x^2-1)-4x^3-4x)}{(x^2-1)^4} = -\frac{2x^3-2x-4x^3-4x}{(x^2-1)^3} =$$

$$= -\frac{-2x^3-6x}{(x^2-1)^3} = \frac{2x(x^2+3)}{(x^2-1)^3} = 0.$$

Звідси $x = 0$ $-$ точка підозріла на перегин.

Позначимо на дійсній осі точку $x = 0$, в якій друга похідна y'' дорівнює нулю та точки, в яких y'' не існує. Знайдемо знак другої похідної на кожному з отриманих інтервалів (рис. 7).

Отримуємо: $y''(-10) < 0,\ y''(-0{,}5) > 0,\ y''(0{,}5) < 0,\ y''(10) > 0.$

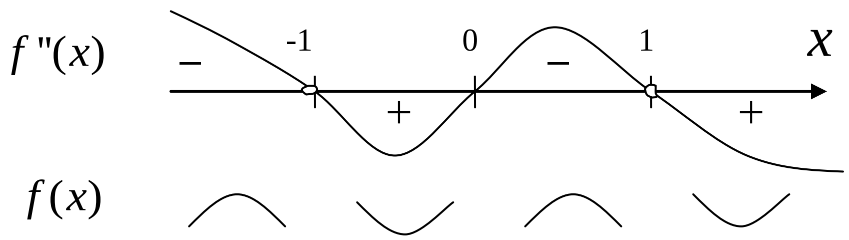

Рис. 7

На інтервалах $(-\infty;-1)$ та $(0;1)$ – функція випукла вгору. На інтервалах $(-1;0)$ та $(1;+\infty)$ – функція випукла вниз. Точка $x=0$ є точкою перегину графіка функції.

6. Асимптоти графіка функції.

Знайдемо горизонтальні асимптоти $y=b$ графіка функції.

$$b=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x^2-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x^2}}=0.$$

Звідси маємо, що $y=0$ – горизонтальна асимптота.

Знайдемо вертикальні асимптоти $x=a$ *графіка функції.* Їх зазвичай шукають у точках, де функція невизначена. Тобто в нашому випадку в точках $x=\pm 1$.

Знаходимо, що $\lim\limits_{x\to\pm 1}\frac{x}{x^2-1}=\infty$. Це означає, що прямі $x=\pm 1$ – вертикальні асимптоти.

Знайдемо поведінку кривої графіка функції вздовж асимптот.

$$\lim_{x\to -1-0}\frac{x}{x^2-1}=\lim_{x\to -1-0}\frac{x}{(x-1)(x+1)}=-\infty;$$

$$\lim_{x\to -1+0}\frac{x}{x^2-1}=\lim_{x\to -1+0}\frac{x}{(x-1)(x+1)}=+\infty$$

$$\lim_{x\to 1-0}\frac{x}{x^2-1}=\lim_{x\to 1-0}\frac{x}{(x-1)(x+1)}=-\infty$$

$$\lim_{x\to 1+0}\frac{x}{x^2-1}=\lim_{x\to 1+0}\frac{x}{(x-1)(x+1)}=+\infty$$

Знайдемо похилу асимптоту $y = kx + b$ *графіка функції, де* $k = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x}$, а $b = \lim\limits_{x\to\infty} (f(x) - kx)$. Отримуємо:

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{(x^2-1)x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{(x^2-1)} = 0.$$

Оскільки $k = 0,$ то похилих асимптот функція не має.

7. Враховуючи зроблені вище дослідження побудуємо графік функції (рис. 8).

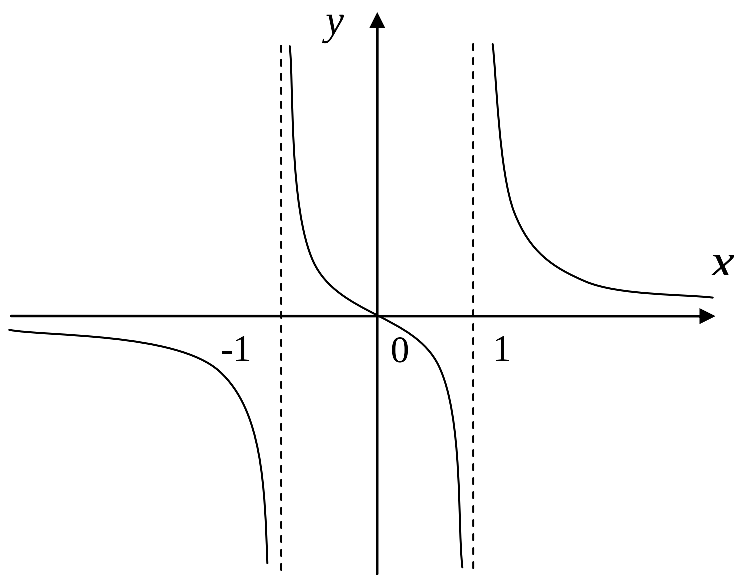

Рис. 8

Список літератури

1. *Бондаренко Н.В.* Лінійна алгебра. Методичні вказівки та самостійні завдання з вищої математики/ Бондаренко Н.В., Бондаренко Є.В., Пастухова М.С. – КНУБА, 2015. – 80 с.
2. *Бондаренко Н.*В. Аналітична геометрія в просторі. Методичні вказівки, самостійні та контрольні роботи з вищої математики/ Бондаренко Н.В., Килимник О.О., Отрашевська В.В., Пастухова М.С. – КНУБА, 2013. – 40 с.
3. *Денисюк В.П.* Вища математика, навчальний посібник Част. 1,2 / Денисюк В.П., Репета В.К. – К. Книжкове видавництво НАУ, 2006.
4. *Дубовик В.П.* Вища математика: Навчальний посібник/ *Дубовик В.П., Юрик І.І.* – К.: Вища школа,1993. – 648 с.
5. *Дубовик В.П.* Вища математика/ Дубовик В.П., Юрик І.І. – К.: «А.С.К.», 2005. – 480 с.
6. *Клетеник Д.В.* Сборник задач по аналитической геометри/ Клетеник Д.В. – М.: Наука, 1986. – 240 с.
7. *Кузнецов Л.А.* Сборник заданий по высшей математике (типовые расчеты) / Кузнецов Л.А. – М.: Высшая школа, 1983. – 91 с.
8. *Овчинников П.П.* Вища математика: Підручник. У 2 ч. / Пер. з рос. П. М. Юрченка, 3-тє вид., випр./ Овчинников П.П., Яремчук Ф.П., Михайленко В.М. – К.: Техніка, 2007.